T.C.
NEVŞEHİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

STANDART OLMAYAN TİPTEN İNTERVAL DEĞERLİ FUZZY SAYILARIN DİZİ UZAYLARI ÜZERİNE

Tezi Hazırlayan:
ZARİFE ZARARSIZ

Tezi Yöneten:
Yrd. Doç. Dr. MEHMET ŞENGÖNÜL

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Aralık 2011
NEVŞEHİR

İçindekiler

Yrd. Doç. Dr. Mehmet ŞENGÖNÜL danışmanlığında **Zarife ZARARSIZ** tarafından hazırlanan **"Standart Olmayan Tipten İnterval Değerli Fuzzy Sayıların Dizi Uzayları Üzerine"** adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

23.12.2011

JÜRİ:

Başkan : Prof. Dr. İhsan SOLAK

Üye : Yrd. Doç. Dr. Mehmet ŞENGÖNÜL

Üye : Doç. Dr. Şeref TURHAN

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulunun 17/01/2012 tarih ve 2012-2-1 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

17/01/2012

Prof. Dr. Selçuk KERVAN
Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı bana vererek, yöneten ve çalışma süresince yardımını benden esirgemeyen değerli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Mehmet ŞENGÖNÜL' e teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Ayrıca çalışmam boyunca desteklerini hep yanımda hissettiğim canım aileme teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

ÖZET

Üç bölüm olarak hazırlanan bu çalışmanın ilk bölümünde daha sonraki bölümlerde işimize yarayacak ön bilgilere yer verildi.

İkinci bölümde $c_0(E^2)$, $c(E^2)$ ve $\ell_\infty(E^2)$ sırası ile interval değerli fuzzy sayılarının θ'ya yakınsak, yakınsak ve sınırlı dizi cümlelerinin bazı topolojik ve cebirsel özellikleri incelendi.

Üçüncü bölümde $Z = (z_{nk})$, p. dereceden Zweier matrisi, $u \in w(E^2)$ ve $\lambda(E^2) \in \{\ell_\infty(E^2), c(E^2), c_0(E^2)\}$ olmak üzere $Zu \in \lambda(E^2)$ olacak şekildeki, sırasıyla $\ell_\infty(E^2, Z^p)$, $c(E^2, Z^p)$ ve $c_0(E^2, Z^p)$ ile gösterilen dizi cümleleri tanımlanarak bu cümlelerin bazı topolojik, kapsama, v. s. özellikleri ele alındı.

Anahtar Kelimeler: İnterval değerli fuzzy sayı, interval sayı, fuzzy cümle, fuzzy sayı, dizi uzayı, tam metrik uzay, matris dönüşümü, Zweier matrisi.

ABSTRACT

This thesis consists of three chapters. In the first chapter some basic definitions and theorems which will be used in the later chapters are given.

In the second chapter, some topological and algebraic proporties of spaces of $c_0(E^2)$, $c(E^2)$ ve $\ell_\infty(E^2)$ which are convergent to θ, convergent and bounded sequence spaces of interval valued fuzzy numbers are given, respectively.

In the third chapter by taking a non-negative, regular Zweier matrix $Z = (z_{nk})$, $u \in w(E^2)$ and $\lambda(E^2) \in \{\ell_\infty(E^2), c(E^2), c_0(E^2)\}$, and in for $Zu \in \lambda(E^2)$, $\ell_\infty(E^2, Z^p)$, $c(E^2, Z^p)$ and $c_0(E^2, Z^p)$ sequence spaces are defined respectively. Finally some topological and inclusion problems of $\ell_\infty(E^2, Z^p)$, $c(E^2, Z^p)$ and $c_0(E^2, Z^p)$ sequence spaces are investigated.

Keywords: Interval valued fuzzy number, interval number, fuzzy set, fuzzy number, sequence space, complete metric space, matrix transformation, Zweier matrix.

SEMBOLLER VE ANLAMLARI

$\mathbb{N}$	Doğal sayıların cümlesi
$\mathbb{R}$	Reel sayıların cümlesi
w	Bütün reel veya kompleks terimli dizilerin uzayı
I	Kapalı ve sınırlı birim interval sayı
E	Reel sayılar cümlesi üzerindeki kapalı interval sayıların cümlesi
$\mathcal{F}(X)$	X evrensel cümlesinin bütün fuzzy alt cümlelerinin cümlesi
$\mathcal{F}^2(X)$	İnterval değerli fuzzy cümlelerin cümlesi
E^1	Fuzzy sayıların cümlesi
E^2	İnterval değerli fuzzy sayıların cümlesi
$w(E)$	İnterval sayıların bütün dizilerinin uzayı
$w(E^1)$	Fuzzy sayıların bütün dizilerinin uzayı
$w(E^2)$	İnterval değerli fuzzy sayıların bütün dizilerinin uzayı
$\ell_\infty(E)$	İnterval sayıların sınırlı dizilerinin uzayı
$c(E)$	İnterval sayıların yakınsak dizilerinin uzayı
d	İki interval sayı arasındaki uzaklık
$\bar{d}$	İki fuzzy sayı arasındaki uzaklık
D	İki fuzzy sayı dizisi arasındaki uzaklık
$\mathfrak{D}$	İki interval değerli fuzzy sayı arasındaki uzaklık
$\widetilde{\mathfrak{D}}$	İki interval değerli fuzzy sayı dizisi arasındaki uzaklık
$\|\|.\|\|$	Norm fonksiyonu
Z^p	p. dereceden Zweier matrisi
${}^{\alpha}A$	Bir fuzzy cümlesinin α- kesim cümlesi
${}^{\alpha+}A$	Bir fuzzy cümlesinin kuvvetli α- kesim cümlesi
$\theta_i = [0, 0]$	İnterval sayıların toplamaya göre etkisiz elemanı
$\theta = [\theta_\ell, \theta_r]$	İnterval değerli fuzzy sayıların toplamaya göre etkisiz elemanı

GİRİŞ

Bilindiği gibi birçok matematiksel yapı reel ve kompleks sayılar üzerine inşa edilmiştir. Ancak son zamanlarda fuzzy sayı ya da interval sayı fikrinin ortaya atılmasıyla bu matematiksel yapılar değişikliğe uğramıştır. Fuzzy küme fikri ilk olarak 1965 yılında California Berkeley Üniversitesinden Zadeh tarafından ortaya konulmuştur. Bundan sonra fuzzy cümle teorisi üzerine yapılan araştırmalar git gide çoğalmış, uygulamalı matematikle beraber pür matematik alanında da birçok çalışmaya konu olmuştur. Örneğin; Matloka [14] fuzzy sayılarının sınırlı ve yakınsak dizilerini tanıtmış, her yakınsak dizinin sınırlı olduğunu söylemiştir. Nanda [17], Matloka'nın çalışmalarını referans alarak fuzzy sayıların sınırlı ve yakınsak dizilerinin tam metrik uzay olduğunu göstermiştir. Talo ve Başar [24] fuzzy sayı dizilerinin klasik kümelerinin duallerini belirleyip bazı matris dönüşümlerini vermişlerdir. Hong [9] ise fuzzy sayıların çekirdeğini incelemiştir.

Alışılmış matematiksel yöntemlerle kompleks sistemleri modellemek ve kontrol etmek zordur zira veriler tam olmalıdır. Oysa fuzzy cümle teorisi kişiyi bu zorunluluktan kurtarır, her türlü durumu değerlendirebilmemize olanak verir.

Uygulama alanlarının çeşitliliği nedeniyle de fuzzy cümle teorisi bilimsel çalışmalarda önemli bir yere sahiptir. İlk uygulama alanı ise 1974 yılında Mamdani'nin buhar makinası için geliştirdiği kontrol sistemidir. Fotoğraf makinelerinden klimalara, asansörlerden çamaşır makinelerine, havacılık endüstrisinden metro sistemlerinin kontrolüne, motor sistemlerinden süpürgelere kadar fuzzy cümle teorisinin kullanıldığı birçok alan bulunmaktadır. Ancak her ne kadar fuzzy cümle teorisi alışılmış cümle teorisine göre bir çok karmaşık durumu değerlendirebilmemize olanak verse de özellikle uygulama alanlarında karşılaşılan problemlemleri çözmede yetersiz kalmıştır. Bunun üzerine fuzzy cümlelerinin iyi bilinen bir genellemesi olan interval değerli fuzzy cümle fikri Gorzalczany [6] ve Turksen [25] tarafından ortaya konmuştur.

Son zamanlarda Chen [1] interval değerli fuzzy cümleler arasındaki uzaklığı, Guijun ve Xiaoping [8] de interval değerli fuzzy sayıları tanımlamıştır. Hong ve Lee [12], Meenakshi ve Kaliraja [15] da interval değerli fuzzy sayıların değişik özellikleriyle ilgili çalışmalar yapmışlardır.

Bu tezde interval sayı, fuzzy cümle, fuzzy sayı, interval değerli fuzzy sayılar için yapılan çalışmalar incelenmiş, interval değerli fuzzy sayıların Zweier sınırlı, Zweier yakınsak ve Zweier null dizilerinin uzayları inşa edilerek bazı özellikleri araştırılmıştır.

BÖLÜM 1

İNTERVAL VE FUZZY SAYILARIN DİZİ UZAYLARI

Bu bölümde çalışmaya esas olacak hazırlık bilgileri verilecektir.

1.1 İnterval Sayılar ve İnterval Sayıların Dizi Uzayları

Reel sayıların kapalı ve sınırlı intervali $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a \leq b$ olmak üzere

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

biçiminde tanımlanan bir cümledir, [14].

Çalışmamız boyunca reel sayıların kapalı ve sınırlı intervallerini, interval sayı olarak adlandıracağız. $\mathbb{R}$ üzerindeki bütün interval sayıların cümlesini E ile gösterelim. E'nin herhangi bir elemanını $\bar{x}$ şeklinde göstereceğiz. Bir $\bar{x}$ interval sayısını; uç (alt ve üst) noktaları sırasıyla x^-, x^+ olmak üzere, $[x^-, x^+]$ şeklinde göstereceğiz.Herhangi bir r reel sayısını $[r, r]$ biçiminde verilmiş interval sayısı ile eş tutacağız.

İnterval sayıların cümlesi, E, üzerindeki cebirsel işlemler $\bar{x} = [x^-, x^+], \bar{y} = [y^-, y^+] \in E$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için;

(1) $\bar{x} + \bar{y} = \{x \in \mathbb{R} : x^- + y^- \leq x \leq x^+ + y^+\}$,

(2) $\bar{x} - \bar{y} = \{x \in \mathbb{R} : x^- - y^+ \leq x \leq x^+ - y^-\}$,

(3) $\alpha\bar{x} = \begin{cases} [\alpha x^-, \alpha x^+], & \alpha \geq 0 \text{ ise;} \\ [\alpha x^+, \alpha x^-], & \alpha < 0 \text{ ise.} \end{cases}$

(4) $\bar{x}\bar{y} = \{x \in \mathbb{R} : \min\{x^-y^-, x^-y^+, x^+y^-, x^+y^+\} \leq x \leq \max\{x^-y^-, x^-y^+, x^+y^-, x^+y^+\}\}$,

(5) Bir $\bar{x}$ interval sayısının negatifi -$\bar{x}$;

$$-\bar{x} = -[x^-, x^+] = [-x^+, -x^-] = \{-x : x \in \bar{x}\},$$

(6) Sıfırı ihtiva etmeyen bir $\bar{x}$ interval sayısının $\frac{1}{\bar{x}}$ tersi; $\frac{1}{\bar{x}} = \left\{\frac{1}{x} : x \in \bar{x}\right\}$ dır.

(7) Bir $\bar{x}$ interval sayısının $\bar{y}$ interval sayısına bölümü $0 \notin \bar{y}$ olmak üzere $\bar{x}\frac{1}{\bar{y}}$ şeklindedir.

(8) $\bar{x}$ ve $\bar{y}$ interval sayıları eşittir $\Leftrightarrow x^- = y^-$ ve $x^+ = y^+$ ise,
olarak tanımlıdır.

$\bar{x}$ ve $\bar{y}$ interval sayılarının diğer ilginç iki özelliği de aşağıdaki gibidir.

(9) $\bar{x}$ ve $\bar{y}$ interval sayılarının kesişimi;

$$[x^-, x^+] \cap [y^-, y^+] = [\max\{x^-, y^-\}, \min\{x^+, y^+\}]$$

ve

$$[x^-, x^+] \cap [y^-, y^+] = \emptyset \Leftrightarrow x^- > y^+ \text{ ya da } y^- > x^+,$$

(10) $\bar{x}$ ve $\bar{y}$ interval sayılarının birleşimi;

$$[x^-, x^+] \cup [y^-, y^+] = [\min\{x^-, y^-\}, \max\{x^+, y^+\}],$$

olarak tanımlıdır, [13].

Tanım 1.1 $\bar{x} = [x^-, x^+], \bar{y} = [y^-, y^+] \in E$ olsun. $\bar{x} \leq \bar{y} \Leftrightarrow x^- \leq y^-$ ve $x^+ \leq y^+$ ise, [14].

Tanım 1.2 $\bar{x} = [x^-, x^+]$ intervali verilsin. Eğer $x^- = x^+ = r \in \mathbb{R}$ ise $\bar{x}$ intervaline dejenere interval sayı denir, [13].

Bu aslında $\mathbb{R}$ de bir noktayı temsil eder. Buradan $\mathbb{R}$ deki her elemanın bir dejenere interval sayı olduğunu, dolayısıyla reel sayılar cümlesinin, interval sayılar cümlesi içine gömülebileceğini söyleriz.

Ancak her ne kadar interval sayıların cümlesi reel sayılar cümlesini kapsasa da $\mathbb{R}$'nin birçok ilginç cebirsel ve topolojik özelliği interval sayıların cümlesi E' de görülmez. İnterval sayı cümlelerinin cebirsel yapısını incelediğimizde monoid olduğunu görürüz. Ancak interval sayılar cümlesi toplama işlemine göre ters eleman özelliğine sahip olmadığından lineer uzay değildir.

Gerçekten $\bar{x} = [x^-, x^+]$, $\bar{y} = [y^-, y^+]$ iki interval olmak üzere;

(1) $\bar{x} + \bar{y} = [x^- + y^-, x^+ + y^+]$ olup interval sayı tanımından $x^- \leq x^+$ ve $y^- \leq y^+$ ifadelerini yazabiliriz. Bu iki ifade taraf tarafa toplanırsa $x^- + y^- \leq x^+ + y^+$ elde edilir. x^-, y^-, x^+, y^+ birer reel sayı olduğundan $x^- + y^-$, $x^+ + y^+$

toplamları da birer reel sayıdır. Böylece $[x^- + y^-, x^+ + y^+]$' nin bir interval sayı olduğu sonucuna varırız. O halde E, interval sayılar cümlesi toplama işlemine göre kapalıdır.

(2) $\bar{x} \in E$, 0 reel sayılar cümlesi üzerindeki toplama işleminin birim elemanı ve $\theta_i = [0,0]$ interval sayıların toplama işlemine göre birim elemanı olmak üzere, $\bar{x} + \theta_i = \theta_i + \bar{x} = \bar{x}$ dir. Gerçekten $\bar{x} = [x^-, x^+]$ ve $\theta_i = [0,0]$ ise

$$\bar{x} + \theta_i = [x^- + 0, x^+ + 0] = [x^-, x^+] \tag{1.1}$$

$$\theta_i + \bar{x} = [0 + x^-, 0 + x^+] = [x^-, x^+] \tag{1.2}$$

olduğundan $\bar{x} + \theta_i = \theta_i + \bar{x} = \bar{x}$ dir. Böylece (1) ve (2) den E, interval sayıların cümlesi monoidtir. Fakat

(3) $\forall \bar{x} \in E$ için $\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x} = \theta_i$ olacak şekilde $\bar{y} \in E$ mevcut olmadığından E toplama işlemine göre grup değildir.

Lemma 1.1. Bütün interval sayıların cümlesi E, $d : E \times E \to \mathbb{R}$ ile tanımlı

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = \max\{|x^- - y^-|, |x^+ - y^+|\}; \tag{1.3}$$

fonksiyonu ile beraber tam metrik uzaydır, [16].

Eğer özel olarak $\bar{x} = [x^-, x^-]$ ve $\bar{y} = [y^-, y^-]$ olarak seçilirse (1.3) de verilen d; $\mathbb{R}$'nin mutlak değer metriğine indirgenir.

Tanım 1.3. Bir interval sayı dizisi, tanım cümlesi $\mathbb{N}$ ve değer cümlesi E, kapalı intervallerin cümlesi olan bir fonksiyondur, diğer bir söyleyişle

$$f : \mathbb{N} \to E, k \to f(k) = \bar{x}_k, \bar{x}_k = [x_k^-, x_k^+]$$

fonksiyonuna interval sayıların dizisi denir, [2].

Bütün interval sayıların dizilerinin cümlesini $w(E)$ ile gösterelim.

Tanım 1.4. $(\bar{x}_k) = ([x_k^-, x_k^+])$ interval sayı dizisine sınırlıdır denir $\Leftrightarrow$ $\forall k \in \mathbb{N}$ için $x_k^- \geq m$ ve $x_k^+ \leq M$ olacak şekilde $m, M \in \mathbb{R}$ var ise.

Tanım 1.5. $(\bar{x}_k)$ interval sayıların bir dizisi ve $\bar{x}_0$ bir interval sayı olsun. $\forall \epsilon > 0$ için $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ öyleki $\forall k > k_0$ için $d(\bar{x}_k, \bar{x}_0) < \epsilon$ oluyorsa $(\bar{x}_k)$ dizisi $\bar{x}_0$'a yakınsaktır denir ve

$$\lim_k \bar{x}_k = \bar{x}_0 \quad \text{veya} \quad (\bar{x}_k) \to \bar{x}_0 \quad (k \to \infty)$$

şeklinde gösterilir, Yani;

$$\lim_{k\to\infty} \bar{x}_k = \bar{x}_0 \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} x_k^- = x_0^- \quad \text{ve} \quad \lim_{k\to\infty} x_k^+ = x_0^+$$

dır, [2].

İnterval sayıların sıfıra yakınsak, yakınsak ve sınırlı dizilerinin uzayları sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır,

$$c_0(E) = \{(\bar{x}_k) \in w(E) : \lim_k \bar{x}_k = [0,0] = \theta_i\},$$

$$c(E) = \{(\bar{x}_k) \in w(E) : \lim_k \bar{x}_k = \bar{x}_0, \quad \bar{x}_0 \in E\},$$

$$\ell_\infty(E) = \{(\bar{x}_k) \in w(E) : \sup_k \{|x_k^-|, |x_k^+|\} < \infty\},$$

[20].

İnterval sayıların $c_0(E), c(E)$ ve $\ell_\infty(E)$ cümleleri, $\forall(\bar{x}_k)$, $(\bar{y}_k) \in \ell_\infty(E)$ (veya $c_0(E), c(E)$) olmak üzere;

$$\widetilde{d}(\bar{x}_k, \bar{y}_k) = \sup_k \max\{|x_k^- - y_k^-|, |x_k^+ - y_k^+|\} \tag{1.4}$$

ile tanımlı $\tilde{d}$ fonksiyonu ile beraber birer tam metrik uzaydır, [20].

1.2. Fuzzy Sayı ve Fuzzy Sayıların Dizi Uzayları

Bilindiği gibi alışılmış cümle teorisinde belirsizliklerle değil kesin verilerle çalışılır. Alışılmış cümle teorisinde bir eleman için sadece cümleye ait olma ve ait olmama seçeneği varken fuzzy cümlelerde elemanlar cümleye kısmen ait olabilmektedir. Zadeh'in [27] yazdığı makalede belirsizlik kavramı ele alınarak kesin sınırlara sahip olmayan nesneler, fuzzy cümle teorisi ile değerlendirilebilmiştir. Bu değerlendirme ise üyelik derecesi ile yapılır. Belirsizliklerede bir değer veren fuzzy cümle teorisi bu nedenle çok ilgi görmüştür. Üyelik derecesi temsili olarak $u : X \to [0,1]$ şeklinde tanımlı üyelik fonksiyonu ile ölçülür. Fiziksel dünyamızda birçok nesne tam olarak belirli bir sınıf içerisine dahil edilemeyip belirsiz bir konuma sahiptir. Örneğin köpek, at, kuş hayvanlar aleminin içinde, sınıflandırılırken bakteri hayvanlar alemi için belirsiz bir konumda kalmaktadır. Yine güzellik gibi göreceli bir kavramı düşünürsek birisi için çirkin olarak tanımlanan bir nesne bir başkası için güzel olabilmekte bir diğeri için ise orta derecede güzel olarak nitelendirilebilmektedir. Öyleyse güzellik, uzunluk, büyüklük, küçüklük gibi kavramları da fuzzy cümle teorisi başlığı altında üyelik fonksiyonuyla derecelendirebiliriz.

Tanım 1.6. X genel elemanı x ile gösterilen boştan farklı bir cümle olsun. X'in bir $\mathbf{A}$ fuzzy alt cümlesi X'in herbir elemanını $[0,1]$ intervaline ait bir reel sayıya karşılık getiren $\mu_{\mathbf{A}}$ fonksiyonu ile karakterize edilir, [27].

$\mu_{\mathbf{A}}$ fonksiyonu

$$\mu_{\mathbf{A}} : X \to [0,1] \tag{1.5}$$

şeklinde tanımlandığından X'in $\mathbf{A}$ fuzzy alt cümlesi

$$\mathbf{A} = \{(x, \mu_{\mathbf{A}}(x)) : x \in X\} \tag{1.6}$$

biçiminde yazılabilir. Genel olarak $\mu_{\mathbf{A}}$ fonksiyonu, $x \in X$'in üyelik fonksiyonu olarak isimlendirilir. X evrensel cümlesi üzerinde tanımlı sonlu A fuzzy cümlesini, $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{x_i}$ biçiminde de yazabiliriz. Burada $\sum$ toplamayı değil elemanların topluluğunu, $-$ kesri değil a_i ile x_i' yi ayıran bir ayıracı gösterir. Eğer X evrensel cümlesi sayılabilir sonsuz çoklukta eleman ihtiva ediyorsa X üzerinde bir A fuzzy cümlesi $\int_{x \in X} \frac{A(x)}{x}$ şeklinde ifade edilir, burada $\int$ integral sembolünü değil, elemanlerın sonsuz topluluğunu ve $-$ kesri değil $A(x)$ ile x'i ayıran bir ayıracı gösterir. [11].

Bir fuzzy cümle α- kesim cümleleri yardımıyla iç içe geçmiş intervallerin bir ailesi olarak düşünülebilir. Örneğin, B.S. Butkiewicz [28] bu bağıntıyı Fourier dönüşümlerini intervallere ve fuzzy sayılarına genişletmek için kullanmıştır.

Örnek 1.1. $X = \mathbb{R}$ ve $\mu_{\mathbf{A}} : \mathbb{R} \to [0,1]$ fonksiyonu

$$\mu_{\mathbf{A}}(x) = \begin{cases} 0 \quad , & x \leq 1 \ \ ise, \\ \frac{1}{99} \quad , & 1 < x \leq 100 \ \ ise, \\ 1 \quad , & 100 < x \ \ ise, \end{cases} \tag{1.7}$$

şeklinde tanımlansın. (1.7) de tanımlı üyelik fonksiyonu $\mathbb{R}$'nin bir $\mathbf{A}$ fuzzy alt cümlesini "1 den büyük reel sayıların cümlesi" olarak belirler, [3].

Çalışmamızda fuzzy cümleler ya $\mathbb{R}$'nin ya da $\mathbb{R}$'nin alt cümlelerinin fuzzy alt cümleleri olarak göz önüne alınacaktır.

Bir X evrensel cümlesinin bütün fuzzy alt cümlelerinin cümlesi $\mathcal{F}(X)$ olsun. $\mathbf{A} \in \mathcal{F}(X)$ olmak üzere $\mathbf{A}$'ya boştur denir $\Leftrightarrow \forall x \in X$ için $\mu_{\mathbf{A}}(x) = 0$ ise, [27].

$\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B} \in \mathcal{F}(X)$ olsun. $\mathbf{A}$'nın $\mathbf{B}$'ye eşit olması için gerek ve yeter şart $\forall x \in X$ için $\mu_{\mathbf{A}}(x) = \mu_{\mathbf{B}}(x)$ olmasıdır, [27].

$\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B} \in \mathcal{F}(X)$ olsun. $\mathbf{A}$'nın $\mathbf{B}$'nin alt cümlesi olması için gerek ve yeter şart $\forall x \in X$ için $\mu_{\mathbf{A}}(x) \leq \mu_{\mathbf{B}}(x)$ olmasıdır, [27].

Örnek 1.2.

$$X = \{-1, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

bir evrensel cümle ve X üzerinde tanımlı $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ fuzzy alt cümleleri aşağıdaki gibi olsun:

$$\mathbf{A} = \left\{(-1, 0), (1, \frac{1}{2}), (2, 1)\right\}, \quad \mathbf{B} = \left\{(-1, \frac{1}{2}), (1, \frac{7}{10}), (2, 1)\right\}$$

$\forall x \in X$ için

$$\mu_{\mathbf{A}}(-1) = 0, \quad \mu_{\mathbf{A}}(1) = \frac{1}{2}, \quad \mu_{\mathbf{A}}(2) = 1, \quad \mu_{\mathbf{A}}(3) = \mu_{\mathbf{A}}(4) = \mu_{\mathbf{A}}(5) = 0$$

$$\mu_{\mathbf{B}}(-1) = \frac{1}{2}, \quad \mu_{\mathbf{B}}(1) = \frac{7}{10}, \quad \mu_{\mathbf{B}}(2) = 1, \quad \mu_{\mathbf{B}}(3) = \mu_{\mathbf{B}}(4) = \mu_{\mathbf{B}}(5) = 0$$

dır. $\forall x \in X$ için $\mu_{\mathbf{A}}(x) \leq \mu_{\mathbf{B}}(x)$ olduğundan $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ dir.

Fuzzy cümleler üzerindeki tümleme, birleşim ve kesişim tanımları aşağıdaki gibi verilir.

Üyelik fonksiyonu $\mu_{\mathbf{A}'} = 1 - \mu_{\mathbf{A}}$ şeklinde tanımlanan $\mathbf{A}'$ cümlesine $\mathbf{A}$ fuzzy cümlesinin tümleyeni denir, [**27**].

Örnek 1.3.

$$X = \{-1, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

evrensel cümlesi üzerinde tanımlı **A** fuzzy cümlesi

$$\mathbf{A} = \left\{(-1,0),(1,\frac{1}{2}),(2,1),(3,0),(4,0),(5,0)\right\}$$

olarak alınırsa **A**'nın tümleyeni, tanımdan dolayı

$$\mathbf{A}^{'} = \left\{(-1,1),(1,\frac{1}{2}),(2,0),(3,1),(4,1),(5,1)\right\}$$

olur.

$\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B} \in \mathcal{F}(X)$ olmak üzere **A** ile **B** nin birleşimi

$$\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \mathbf{C} = \{(x, \mu_{\mathbf{A}\cup\mathbf{B}=\mathbf{C}}(x)) : \mu_{\mathbf{A}\cup\mathbf{B}=\mathbf{C}}(x) = \max\{\mu_{\mathbf{A}}(x), \mu_{\mathbf{B}}(x)\}, x \in X\}$$

ve kesişimi

$$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \mathbf{C} = \{(x, \mu_{\mathbf{A}\cap\mathbf{B}=\mathbf{C}}(x)) : \mu_{\mathbf{A}\cap\mathbf{B}=\mathbf{C}}(x) = \min\{\mu_{\mathbf{A}}(x), \mu_{\mathbf{B}}(x)\}, x \in X\}$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer $\mathbf{A} \ \cap \mathbf{B} = \emptyset$ ise, **A** ve **B** fuzzy cümlelerine ayrıktır denir.

Örnek 1.4. X evrensel cümlesini $X = \{-1,1,2,3,4,5\}$ olarak alalım. X'in iki fuzzy alt cümlesi

$$\mathbf{A} = \left\{(-1,0),(1,\frac{1}{2}),(2,1),(3,0),(4,0),(5,0)\right\}$$

ve

$$\mathbf{B} = \left\{(-1,\frac{1}{2}),(1,\frac{7}{10}),(2,1),(3,0),(4,0),(5,0)\right\}$$

ise

$$\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \left\{(-1,\frac{1}{2}),(1,\frac{7}{10}),(2,1),(3,0),(4,0),(5,0)\right\}$$

ve

$$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \left\{(-1,0),(1,\frac{1}{2}),(2,1),(3,0),(4,0),(5,0)\right\}$$

olur.

1.3. Fuzzy Cümleler Üzerindeki Cebirsel İşlemler

Fuzzy cümleler üzerinde temel cebirsel işlemler aşağıdaki gibi tanımlanır. **A** ve **B** $\in \mathcal{F}(X)$ olmak üzere **A** ve **B**'nin **A+B** toplamı,

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \{(x, \mu_{\mathbf{A}+\mathbf{B}}(x)) : 0 \leq \mu_{\mathbf{A}}(x) + \mu_{\mathbf{B}}(x) \leq 1, x \in X\}$$

ile tanımlı fuzzy cümledir, [27]. Bu toplam $\mu_{\mathbf{A}}(x) + \mu_{\mathbf{B}}(x) \leq 1$ eşitsizliğini sağlayan x' ler için anlamlıdır.

Örnek 1.5. X evrensel cümlesini ve X üzerindeki A ve B fuzzy cümlelerini Örnek 1.4 deki gibi alırsak **A** ile **B** fuzzy cümlelerinin **A+B** toplamı,

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \left\{(-1, \frac{1}{2}), (1, \frac{6}{5}), (2, 2), (3, 0), (4, 0), (5, 0)\right\}$$

olur.

A ve **B** $\in \mathcal{F}(X)$ olmak üzere **A** ve **B**'nin **AB** çarpımı,

$$\mathbf{AB} = \{(x, \mu_{\mathbf{AB}}(x)) : 0 \leq \mu_{\mathbf{A}}(x)\mu_{\mathbf{B}}(x) \leq 1, x \in X\}$$

olarak tanımlanan cümledir, [27].

Örnek 1.6. X evrensel cümlesini ve X üzerindeki A ve B fuzzy cümlelerini Örnek 1.4 deki gibi alırsak **A** ile **B** fuzzy cümlelerinin **AB** çarpımı

$$\mathbf{AB} = \left\{(-1, 0), (1, \frac{7}{20}), (2, 1), (3, 0), (4, 0), (5, 0)\right\}$$

olur. Burada

$$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \left\{(-1, 0), (1, \frac{1}{2}), (2, 1), (3, 0), (4, 0), (5, 0)\right\}$$

olduğu göz önüne alınırsa $\mathbf{A.B} \subset \mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ dir. Bu kapsama herhangi iki **A** ve **B** fuzzy cümleleri için her zaman geçerlidir.

Mutlak Fark:

A ve **B** fuzzy cümlelerinin mutlak farkı $\forall x \in X$ için

$$|\mathbf{A} - \mathbf{B}| = |\mu_{\mathbf{A}}(x) - \mu_{\mathbf{B}}(x)| \tag{1.8}$$

ile tanımlanır.

Fuzzy cümle teorisindeki en önemli kavramlardan ikisi de α-kesim cümlesi ve kuvvetli α- kesim cümlesi kavramlarıdır. $\alpha \in [0, 1]$ olmak üzere $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı bir **A** fuzzy cümlesinin ${}^{\alpha}\mathbf{A}$ ile gösterilen α- kesim ve ${}^{\alpha+}\mathbf{A}$ ile gösterilen kuvvetli α- kesim cümleleri sırasıyla

$$ {}^{\alpha}\mathbf{A} = \{x : \mathbf{A}(x) \geq \alpha\}, \tag{1.9} $$

$$ {}^{\alpha+}\mathbf{A} = \{x : \mathbf{A}(x) > \alpha\} \tag{1.10} $$

şeklinde tanımlanırlar, [11].

α- kesim ve kuvvetli α- kesim kavramları fuzzy cümlelerle alışılmış cümleler arasına geçişte temel bir role sahiptir, hatta "*bu iki cümle çeşidi arasında bir köprü vazifesi görüyor*" denebilir. Çünkü fuzzy cümleler üzerindeki iki temel kavram "aritmetik ve uzaklık" kavramları bunlar vasıtasıyla tanımlanır.
$\mathbf{A} \in \mathcal{F}(X)$ ve $\alpha \in [0,1]$ olmak üzere;

$$ \wedge(\mathbf{A}) = \{\alpha : \mathbf{A}(x) = \alpha \quad, \forall x \in X\} \tag{1.11} $$

ile tanımlı cümleye $\mathbf{A}$ fuzzy cümlesinin seviye cümlesi denir, [11].

Teorem 1.1. $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{F}(X)$ ve $\alpha, \beta \in [0,1]$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler mevcuttur, [11]:

(1) ${}^{\alpha+}\mathbf{A} \subseteq {}^{\alpha}\mathbf{A}$,

(2) $\alpha \leq \beta$ ise ${}^{\alpha}\mathbf{A} \supseteq {}^{\beta}\mathbf{A}$ ve ${}^{\alpha+}\mathbf{A} \supseteq {}^{\beta+}\mathbf{A}$,

(3) ${}^{\alpha}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = {}^{\alpha}\mathbf{A} \cap {}^{\alpha}\mathbf{B}$ ve ${}^{\alpha}(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = {}^{\alpha}\mathbf{A} \cup {}^{\alpha}\mathbf{B}$,

(4) ${}^{\alpha+}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = {}^{\alpha+}\mathbf{A} \cap {}^{\alpha+}\mathbf{B}$ ve ${}^{\alpha+}(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = {}^{\alpha+}\mathbf{A} \cup {}^{\alpha+}\mathbf{B}$.

α- kesim ve kuvvetli α- kesim cümlelerinin fuzzy cümle teorisindeki temel rolleri, fuzzy cümlelerini temsil etmektir. Bir fuzzy cümle onun α- kesim veya kuvvetli α- kesim cümleleriyle tek olarak temsil edilebilir. Bu temsillerin herbiri, bize alışılmış cümle özelliklerini genişleterek fuzzy cümlelere karşılık getirmemize imkan verir. Alışılmış cümleler yardımı ile fuzzy cümleleri açıklamanın iki yolu vardır. Basit bir örnekle bunu açıklayalım: X evrensel cümlesi $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ olsun. X'in bir $\mathbf{A}$ fuzzy alt cümlesini

$$ \mathbf{A} = 0.2/x_1 + 0.4/x_2 + 0.6/x_3 + 0.8/x_4 + 1/x_5 $$

biçiminde tanımlayalım. $\mathbf{A}$'yı onun α- kesim cümleleri ile

$$ {}^{0.2}\mathbf{A} = 1/x_1 + 1/x_2 + 1/x_3 + 1/x_4 + 1/x_5 $$

$$ {}^{0.4}\mathbf{A} = 0/x_1 + 1/x_2 + 1/x_3 + 1/x_4 + 1/x_5 $$

$$^{0.6}\mathbf{A} = 0/x_1 + 0/x_2 + 1/x_3 + 1/x_4 + 1/x_5$$

$$^{0.8}\mathbf{A} = 0/x_1 + 0/x_2 + 0/x_3 + 1/x_4 + 1/x_5$$

$$^{1}\mathbf{A} = 0/x_1 + 0/x_2 + 0/x_3 + 0/x_4 + 1/x_5$$

şeklinde yazabiliriz. Her bir $x \in X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ için

$$_{\alpha}\mathbf{A}(x) = \alpha\ {}^{\alpha}\mathbf{A}(x) \tag{1.12}$$

eşitliği mevcuttur, [11]. Buradan

$$\begin{aligned}
_{0.2}\mathbf{A} &= 0.2/x_1 + 0.2/x_2 + 0.2/x_3 + 0.2/x_4 + 0.2/x_5 \\
_{0.4}\mathbf{A} &= 0/x_1 + 0.4/x_2 + 0.4/x_3 + 0.4/x_4 + 0.4/x_5 \\
_{0.6}\mathbf{A} &= 0/x_1 + 0/x_2 + 0.6/x_3 + 0.6/x_4 + 0.6/x_5 \\
_{0.8}\mathbf{A} &= 0/x_1 + 0/x_2 + 0/x_3 + 0.8/x_4 + 0.8/x_5 \\
_{1}\mathbf{A} &= 0/x_1 + 0/x_2 + 0/x_3 + 0/x_4 + 1/x_5
\end{aligned}$$

olur. Böylece kolaylıkla görülür ki yukarıdaki beş fuzzy cümlenin standart fuzzy birleşimi tam olarak $\mathbf{A}$ fuzzy cümlesidir. Yani;

$$\mathbf{A} = {}_{0.2}\mathbf{A} \bigcup {}_{0.4}\mathbf{A} \bigcup {}_{0.6}\mathbf{A} \bigcup {}_{0.8}\mathbf{A} \bigcup {}_{1}\mathbf{A}$$

dir. Burada fuzzy cümleler α- kesim cümleleriyle temsil edilmiştir, [11].

Teorem 1.2. (Birinci Ayrışım Teoremi): $\mathcal{F}(X)$, X'in fuzzy alt cümlelerinin ailesi olmak üzere her bir $\mathbf{A} \in \mathcal{F}(X)$ için

$$\mathbf{A} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} {}_{\alpha}\mathbf{A} \tag{1.13}$$

dir, burada $_{\alpha}\mathbf{A}$, (1.12) ile tanımlı ve $\bigcup$ standart fuzzy birleşimidir, [11].

İspat: Her bir $x \in X$ için $a = \mathbf{A}(x)$ olsun. O zaman

$$\left\{ \bigcup_{\alpha \in [0,1]} {}_{\alpha}\mathbf{A} \right\}(x) = \sup_{\alpha \in [0,1]} {}_{\alpha}\mathbf{A}(x) = \max[\sup_{\alpha \in [0,a]} {}_{\alpha}\mathbf{A}(x), \sup_{\alpha \in (a,1]} {}_{\alpha}\mathbf{A}(x)].$$

Her bir $\alpha \in (a, 1]$ için $\mathbf{A}(x) = a < \alpha$ dır ve buradan $_{\alpha}\mathbf{A}(x) = 0$ olur. Diğer taraftan her bir $\alpha \in [0, a]$ için $\mathbf{A}(x) = a \geq \alpha$ dır. Buradan da ${}_{\alpha}\mathbf{A}(x) = \alpha$ olur. Böylece

$$\left\{ \bigcup_{\alpha \in [0,1]} {}_{\alpha}\mathbf{A} \right\}(x) = \sup_{\alpha \in [0,a]} \alpha = a = \mathbf{A}(x)$$

dir. Her bir $x \in X$ için aynı durum geçerli olduğundan ispat tamamlanır. Şimdi bu teoremi bir örnekle açıklayalım.

Örnek 1.7. Bir $\mathbf{A}$ fuzzy cümlesi aşağıdaki üyelik fonksiyonu ile tanımlansın.

$$\mathbf{A}(x) = \begin{cases} x-1 & , \quad x \in [1,2] \ \ ise, \\ 3-x & , \quad x \in [2,3] \ \ ise, \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda}, \end{cases} \tag{1.14}$$

Her bir $\alpha \in (0, 1]$ için $\mathbf{A}$ fuzzy cümlesinin α- kesim cümlesi

$${}^{\alpha}\mathbf{A} = [\alpha + 1, 3 - \alpha],$$

şeklindedir. Ayrıca (1.13) de verilen özel fuzzy cümle ${}_{\alpha}\mathbf{A}$

$${}_{\alpha}\mathbf{A} = \begin{cases} \alpha & , \quad x \in [\alpha+1, 3-\alpha] \ \ ise, \\ & \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda}, \end{cases} \tag{1.15}$$

ile belirli üyelik fonksiyonu ile tanımlanır. Birinci ayrışım teoremine göre her $\alpha \in [0, 1]$ için $\mathbf{A}$ fuzzy cümlesi, ${}_{\alpha}\mathbf{A}$ cümlelerinin standart fuzzy birleşimi alınarak elde edilir.

Teorem 1.3. (İkinci Ayrışım Teoremi): $\mathcal{F}(X)$, X'in fuzzy alt cümlelerinin ailesi olmak üzere her bir $\mathbf{A} \in \mathcal{F}(X)$ için

$$\mathbf{A} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} {}_{\alpha+}\mathbf{A} \tag{1.16}$$

dır, burada ${}_{\alpha+}\mathbf{A}$, ${}_{\alpha+}\mathbf{A} = \alpha^{\alpha+}\mathbf{A}(x)$ ile tanımlı özel fuzzy cümledir ve $\bigcup$ standart fuzzy birleşimidir, [11].

Teorem 1.4. (Üçüncü Ayrışım Teoremi): $\mathcal{F}(X)$, X'in fuzzy alt cümlelerinin ailesi ve $\wedge(\mathbf{A})$, $\mathbf{A}$ fuzzy cümlesinin seviye cümlesi olmak üzere $\mathbf{A}$ fuzzy cümlesi için

$$\mathbf{A} = \bigcup_{\alpha \in \wedge(\mathbf{A})} {}_{\alpha}\mathbf{A} \tag{1.17}$$

eşitliği mevcuttur, [11].

Tanım 1.7. $\mathbf{A}$ fuzzy cümlesinin α- kesim cümlesi $\forall\ \alpha \in [0,1]$ için X'in konveks alt cümlesi ise X üzerinde tanımlı $\mathbf{A}$ fuzzy cümlesi konvekstir denir, [11].

Teorem 1.5. $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı bir $\mathbf{A}$ fuzzy cümlesi $\forall\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ve $\lambda \in [0,1]$ için konvekstir $\Leftrightarrow \mathbf{A}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min[\mathbf{A}(x_1), \mathbf{A}(x_2)]$, [11].

Burada şuna dikkat etmeliyiz ki bir fonksiyonun konveksliği ile bir cümlenin konveksliği farklı kavramlardır.

Tanım 1.8.(Fuzzy Sayı:) Fuzzy cümleleri bir çok bilim dalında, elastiki yapılarından dolayı, çok geniş uygulama alanlarına sahiptir. Ancak bazı önemli ve özel sonuçları elde edebilmek için fuzzy cümleleri üzerine bazı kısıtlamalar yapılır. Aşağıda tanımını verdiğimiz fuzzy normal cümle, fuzzy konveks cümle gibi kavramlar bu kısıtlamalardan bazılarıdır.

$X = \mathbb{R}$, evrensel cümle olmak üzere $\mu : \mathbb{R} \to [0,1]$ fonksiyonu;

`FS1`. μ fonksiyonu normal, yani en az bir $x_0 \in \mathbb{R}$ için $\mu(x_0) = 1$,

`FS2`. μ fuzzy konvekstir, yani $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ve $\forall \eta \in [0,1]$ için

$$\mu\left[\eta x + (1-\eta)y\right] \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\},$$

`FS3`. μ üstten yarı sürekli,

`FS4`. $\mu^0 = \overline{\{x \in \mathbb{R} : \mu(x) \geq 0\}}$ kompakttır,

şartlarını sağlasın.

Tanım 1.9. `FS1`, `FS2`, `FS3` ve `FS4` şartlarını sağlayan $\mu : X \to [0,1]$ fonksiyonuna bir fuzzy sayı denir. Bütün fuzzy sayılarının cümlesi E^1 ile gösterilir. $\bar{r} : \mathbb{R} \to [0,1]$ fonksiyonu

$$\overline{r}(x) = \begin{cases} 1 \quad , \quad x = r \quad ise, \\ 0 \quad , \quad x \neq r \quad ise, \end{cases}$$

ile tanımlansın. $\bar{r}$ fonksiyonu `FS1`, `FS2`, `FS3` ve `FS4` şartlarını sağlar. Dolayısı ile her bir $r \in \mathbb{R}$ reel sayısı aslında bir fuzzy sayı olarak tanımlanabilir. Bu gerçek reel sayılar cümlesi, $\mathbb{R}$'nin, E^1'in içine gömülebileceğini gösterir.

1.4. Fuzzy Sayı Cümlesi Üzerindeki Aritmetik İşlemler

Teorem 1.6. (Fuzzy Sayıların Temsil Teoremi): $u \in E^1$ ve herbir $\alpha \in [0,1]$ için ${}^{\alpha}u = [u^-(\alpha), u^+(\alpha)]$ olsun. O halde aşağıdaki şartlar sağlanır:

(1) $u^-(\alpha); (0,1]$ üzerinde sınırlı, soldan sürekli ve azalmayan bir fonksiyondur,

(2) $u^+(\alpha); (0,1]$ üzerinde sınırlı, soldan sürekli ve artmayan bir fonksiyondur,

(3) $u^-(\alpha)$ ve $u^+(\alpha)$ fonksiyonları, $\alpha = 0$ noktasında sağdan süreklidir,

(4) $u^-(1) \leq u^+(1)$.

Eğer, μ ve β yukarıdaki şartları sağlayan iki fonksiyon ise o zaman ${}^{\alpha}u = [\mu(\alpha), \beta(\alpha)]$ olacak şekilde bir tek $u \in E^1$ vardır. μ ve β'ya karşılık gelen u fuzzy sayısı;

$$u : \mathbb{R} \to [0,1], \quad u(x) = \sup\{\mu : \mu(\alpha) \leq x \leq \beta(\alpha)\}$$

olarak tanımlanır, [5].

α- kesim cümleleri fuzzy cümlelerle alışılmış cümleler arasında bir köprü olduğundan, fuzzy cümleler üzerindeki cebirsel işlemler α- kesim cümleleri ile tanımlanır. Şimdi fuzzy sayıları üzerindeki cebirsel işlemleri inceleyelim. $\forall u, v \in E^1$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ve her bir $\alpha \in [0,1]$ için ${}^{\alpha}u = [u^-(\alpha), u^+(\alpha)]$, ${}^{\alpha}v = [v^-(\alpha), v^+(\alpha)]$ olsun. $u, v \in E^1$ eleman çiftinin

Toplamı: ${}^{\alpha}(u+v) = {}^{\alpha}u + {}^{\alpha}v = [u^-(\alpha) + v^-(\alpha), u^+(\alpha) + v^+(\alpha)]$

Farkı: ${}^{\alpha}(u-v) = {}^{\alpha}u - {}^{\alpha}v = [u^-(\alpha) - v^+(\alpha), u^+(\alpha) - v^-(\alpha)]$

Skalar ile çarpımı: $(\lambda^{\alpha}u) = \lambda^{\alpha}u = \begin{cases} [\lambda^{\alpha}u^-, \lambda^{\alpha}u^+], & \lambda \geq 0 \text{ ise;} \\ [\lambda^{\alpha}u^+, \lambda^{\alpha}u^-], & \lambda < 0 \text{ ise.} \end{cases}$

Mutlak Değeri: ${}^{\alpha}(|u|) = [\max\{0, u^-(\alpha), -u^+(\alpha)\}, \max\{|u^-(\alpha)|, |u^+(\alpha)|\}]$

ile tanımlanır, [10].

Örnek 1.8. u, v fuzzy sayılarının üyelik fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$u(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq -1 \ \ ve \ \ x > 3 \ \ ise, \\ \frac{x+1}{2} & , \quad x \in (-1,1] \ \ ise, \\ \frac{3-x}{2} & , \quad x \in (1,3] \ \ ise. \end{cases} \tag{1.18}$$

(1.19)

$$v(x)=\begin{cases} 0 & , \quad x\le 1 \;\; ve \;\; x>5 \;\; ise,\\ \frac{x-1}{2} & , \qquad x\in(1,3] \;\; ise,\\ \frac{5-x}{2} & , \qquad x\in(3,5] \;\; ise. \end{cases} \tag{1.20}$$

$$\tag{1.21}$$

${}^{\alpha}u=[2\alpha-1,3-2\alpha]$, ${}^{\alpha}v=[2\alpha+1,5-2\alpha]$ olduğundan

$$\begin{aligned} {}^{\alpha}(u+v) &= [2\alpha-1,3-2\alpha]+[2\alpha+1,5-2\alpha]\\ &= [4\alpha,8-4\alpha] \end{aligned}$$

olur. $[2\alpha+3,8-3\alpha]$' ya karşılık gelen fuzzy sayısı ise;

$$(u+v)(x)=\begin{cases} 0 & , \quad x\le 0 \;\; ve \;\; x>8 \;\; ise,\\ \frac{x}{4} & , \qquad x\in(0,4] \;\; ise,\\ \frac{8-x}{4} & , \qquad x\in(4,8] \;\; ise. \end{cases} \tag{1.22}$$

$$\tag{1.23}$$

fonksiyonudur. Ve bu fonksiyon $\mathtt{FS}1-\mathtt{FS}4$ şartlarını sağlar.

$$\begin{aligned} {}^{\alpha}(u-v) &= [2\alpha-1,3-2\alpha]-[2\alpha+1,5-2\alpha]\\ &= [4\alpha-6,2-4\alpha] \end{aligned}$$

olur. $[4\alpha-6,2-4\alpha]$' ya karşılık gelen fuzzy sayısı ise;

$$(u-v)(x)=\begin{cases} 0 & , \quad x\le -6 \;\; ve \;\; x>2 \;\; ise,\\ \frac{x+6}{4} & , \qquad x\in(-6,-2] \;\; ise,\\ \frac{2-x}{4} & , \qquad x\in(-2,2] \;\; ise. \end{cases} \tag{1.24}$$

$$\tag{1.25}$$

fonksiyonudur. Ve bu fonksiyon $\mathtt{FS}1-\mathtt{FS}4$ şartlarını sağlar.

$${}^{\alpha}(uv)=\begin{cases} [-4\alpha^2+12\alpha-5,4\alpha^2-16\alpha+15], & \alpha\in(0,0.5] \text{ ise;}\\ [-4\alpha^2-1,4\alpha^2-16\alpha+15], & \alpha\in(0.5,1] \text{ ise.} \end{cases}$$

olur. ${}^{\alpha}(uv)$' ya karşılık gelen fuzzy sayısı ise;

$$(uv)(x)=\begin{cases} 0 & , \quad x<-5 \;\; ve \;\; x\ge 15 \;\; ise,\\ \frac{[3-(4-x)^{\frac{1}{2}}]}{2} & , \qquad x\in[-5,0) \;\; ise,\\ \frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}}{2} & , \qquad x\in[0,3) \;\; ise,\\ \frac{[4-(1+x)^{\frac{1}{2}}]}{2} & , \qquad x\in[3,15) \;\; ise. \end{cases} \tag{1.26}$$

fonksiyonudur. Ve bu fonksiyon $\mathtt{FS}1 - \mathtt{FS}4$ şartlarını sağlar.

Tanım 1.10. u, $v \in E^1$ ve $\forall\ t \in \mathbb{R}$ için $u(t) = v(t)$ ise u ile v fuzzy sayıları eşittir denir ve $u = v$ yazılır, [14].

Tanım 1.11. $u \in E^1$ olsun. Eğer $x < 0$ olan her x için $u(x) = 0$ ise u fuzzy sayısına negatif olmayan fuzzy sayısı denir, [18].

Bilindiği gibi bir cümle üzerinde bir uzaklık fonksiyonu tanımlandığında analizin önemli kavramlarına geçiş yapılır. Bu nedenle fuzzy cümle üzerindeki uzaklık tanımını burada vereceğiz.

Tanım 1.12. u, v E^1'in iki elemanı olsun. u ve v arasındaki $\overline{d}(u, v)$ uzaklığı,

$$\overline{d}(u, v) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \max\{|u^-(\alpha) - v^-(\alpha)|, |u^+(\alpha) - v^+(\alpha)|\} \tag{1.27}$$

ile verilen

$$\overline{d} : E^1 \times E^1 \longrightarrow \mathbb{R} \tag{1.28}$$

fonksiyonu ile tanımlanır.

Lemma 1.2. Bütün fuzzy sayıların cümlesi E^1, (1.27) de verilen $\overline{d}$ metriği ile beraber tam metrik uzaydır, [14].

Teorem 1.7. u, $v \in E^1$ olmak üzere

$$\overline{d}(uv, \overline{0}) \leq \overline{d}(u, \overline{0})\overline{d}(v, \overline{0}) \tag{1.29}$$

dır, [24].

İspat Her $\lambda \in [0,1]$ için $|u^-(\lambda)| \leq \overline{d}(u,\overline{0})$ ve $|u^+(\lambda)| \leq \overline{d}(u,\overline{0})$ olduğu açıktır. Buradan

$$\begin{aligned}\overline{d}(uv,\overline{0}) &= \sup_{\lambda\in[0,1]} \max\{|(uv)^-(\lambda)|, |(uv)^+(\lambda)|\} \\ &\leq \sup_{\lambda\in[0,1]} \max\{|u^-(\lambda)||v^-(\lambda)|, |u^-(\lambda)||v^+(\lambda)|, \\ &|u^+(\lambda)||v^-(\lambda)|, |u^+(\lambda)||v^+(\lambda)|\} \\ &\leq \sup_{\lambda\in[0,1]} \max\{\overline{d}(u,\overline{0})|(v)^-(\lambda)|, \overline{d}(u,\overline{0})|v^+(\lambda)|, \\ &\overline{d}(u,\overline{0})|v^-(\lambda)|, \overline{d}(u,\overline{0})|v^+(\lambda)|\} \\ &= \overline{d}(u,\overline{0}) \sup_{\lambda\in[0,1]} \max\{|v^-(\lambda)|, |v^+(\lambda)|\} \\ &= \overline{d}(u,\overline{0})\overline{d}(v,\overline{0})\end{aligned}$$

olur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Tanım 1.13.(Fuzzy Sayı Dizileri)

$f : \mathbb{N} \to E^1, k \to f(k) = u_k, u = (u_k)$ şeklinde tanımlanan fonksiyona genel terimi u_k olan fuzzy sayıların bir dizisi denir, [14].

Örnek 1.9.

$$(u_k) = \begin{cases} \frac{k}{2k-1}(x-1) & , \quad x \in [1, \frac{3k-1}{k}] \ \ ise, \\ \frac{-k}{2k-1}(x-5) & , \quad x \in [\frac{3k+1}{k}, 5] \ \ ise, \\ 1 & , \quad x \in [\frac{3k-1}{k}, \frac{3k+1}{k}] \ \ ise, \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda.} \end{cases} \tag{1.30}$$

ile tanımlı (u_k) fuzzy sayıların bir dizisidir.

Bütün fuzzy sayılarının dizilerinin cümlesini $w(E^1)$ ile gösterelim.

Tanım 1.14. Fuzzy sayıların $u = (u_k)$ dizisi sınırlıdır $\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}$ için $m \leq u_k \leq M$ olacak şekilde iki m ve M fuzzy sayısı vardır. Bu ise u_k^- ve u_k^+ fonksiyonlarının $[0,1]$ üzerinde düzgün sınırlı olması demektir.

Yani her $\alpha \in [0,1]$ için ${}^{\alpha}m^- \leq u_k^- \leq {}^{\alpha}M^-$ ve ${}^{\alpha}m^+ \leq u_k^+ \leq {}^{\alpha}M^+$ dir, [24]. Böylece bir $u = (u_k)$ fuzzy sayı dizisinin sınırlılığı $\forall\ k \in \mathbb{N}$ için $\sup_{\alpha\in[0,1]} \max\{|{}^{\alpha}u_k^-|, |{}^{\alpha}u_k^+|\} \leq M$ eşitsizliğine denktir.

$u = (u_k), v = (v_k) \in w(E^1)$ olmak üzere, u ve v arasındaki uzaklık;

$$D(u, v) = \sup_{k\in\mathbb{N}} \bar{d}(u_k, v_k) \tag{1.31}$$

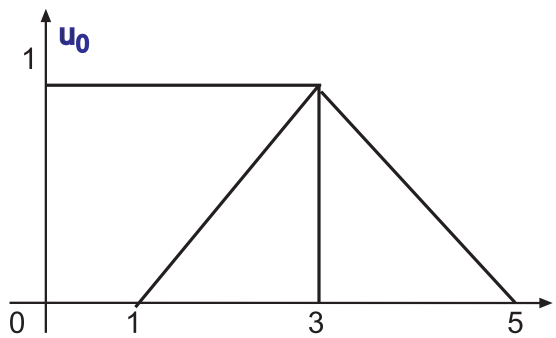
olarak tanımlanır, [17].

Tanım 1.15.(Fuzzy Sayı Dizisinin Limiti)
$\{u_n\} \subset E^1$ ve $u_0 \in E^1$ olsun. Eğer $\forall\epsilon > 0$ için en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ pozitif doğal sayısı her $n > n_0$ için $D(u_n, u_0) < \epsilon$ olacak şekilde bulunabiliyorsa (u_n) dizisi u_0'a yakınsaktır denir ve $\lim_{n\to\infty} u_n = u_0$ veya $u_n \to u_0 (n \to \infty)$ biçiminde gösterilir, [14].

Örnek 1 da verilen fuzzy sayıların (u_k) dizisi

$$u_0 = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-1) & , \quad x \in [1,3] \ \ ise, \\ 1 & , \quad x = 3 \ \ ise, \\ -\frac{1}{2}(x-5) & , \quad x \in (3,5] \ \ ise, \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda.} \end{cases} \tag{1.32}$$

limitine yakınsar. Şekil 1' yi inceleyiniz.



Şekil 1.4

Teorem 1.8. Fuzzy sayıların (u_n) dizisi yakınsak ise sadece bir tek limit noktası vardır, [14].

Teorem 1.9. $\forall n \geq n_0$ iken $u_n \leq w_n \leq v_n$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ mevcut ve $\lim_n u_n = \lim_n v_n = u_0$ ise o zaman $\lim_n w_n = u_0$ dır, [14].

Teorem 1.10. Yakınsak her fuzzy sayı dizisi sınırlıdır, [14].

Tanım 1.16. (u_n) bir fuzzy sayı dizisi ve (n_k) da doğal sayıların artan bir dizisi olsun. O zaman (u_{n_k}) dizisine (u_n) dizisinin bir alt dizisi denir.

Teorem 1.11. Bir fuzzy sayı dizisi yakınsak ise her alt dizisi de aynı noktaya yakınsaktır, [14].

Teorem 1.12. $u = (u_n), v = (v_n) \in w(E^1)$, $\lim_n u_n = u_0$, $\lim_n v_n = v_0$ ve $k \in \mathbb{R}$ olsun. O zaman aşağıdakiler mevcuttur:
(1) $\lim_n (u_n \mp v_n) = u_0 \mp v_0$,
(2) $\lim_n (ku_n) = ku_0$,
(3) $\lim_n (u_n v_n) = u_0 v_0$,
(4) $\lim_n (\frac{u_n}{v_n}) = \frac{u_0}{v_0}$, $(\forall n \in \mathbb{N}$ için $v_n \neq 0, v_0 \neq 0$ için$)$,[14].

Fuzzy sayılarının sınırlı, yakınsak, sıfıra yakınsak dizilerinin cümleleri, ki bunlar $w(E^2)$ nin bazı özel altcümleleridir, sırası ile aşağıdaki gibi tanımlanır, [24]:

$$\ell_\infty(E^1) = \left\{ (u_k) \in w(E^1) : \sup_{k \in \mathbb{N}} \bar{d}(u_k, \bar{0}) < \infty \right\}, \tag{1.33}$$

$$c(E^1) = \left\{ (u_k) \in w(E^1) : \exists u_0 \in E^1 \ni \lim_{k \to \infty} \bar{d}(u_k, u_0) = 0 \right\}, \tag{1.34}$$

$$c_0(E^1) = \left\{ (u_k) \in w(E^1) : \lim_{k \to \infty} \bar{d}(u_k, \bar{0}) = 0 \right\}. \tag{1.35}$$

Nanda fuzzy sayıların sınırlı ve yakınsak dizilerinin uzayı hakkında çalışmalar yapmış, [17] ve bu uzayların (1.31) metriğiyle beraber tam metrik uzay olduğunu göstermiştir.

Bundan başka fuzzy sayıların $\ell_p(E^1)$ cümlesi $1 \leq p < \infty$ olmak üzere

$$\ell_p(E^1) = \left\{ (u_k) \in w(E^1) : \sum_k \bar{d}(u_k, \bar{0})^p < \infty \right\} \tag{1.36}$$

ile tanımlanır, [24].

Tanım 1.17. $\lambda(E^1) \subset w(E^1)$, $\mathbb{R}^+$ pozitif fuzzy sayıların cümlesi ve $||.||$, $\lambda(E^1)$ den $\mathbb{R}^+$ ye tanımlı bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan $||.|| : \lambda(E^1) \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonuna quasi modül ya da quasi norm denir, [7].

`FN1`. $||u|| = \theta \Leftrightarrow u = \theta$,

`FN2`. $||\alpha u|| = |\alpha| ||u||$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$, FN3. $||u+v|| \leq ||u|| + ||v||$. Eğer $||.|| : \lambda(E^1) \to G$ fonksiyonu FN1, FN2, FN3 şartlarını sağlıyorsa $(\lambda(E^1), ||.||)$ ikilisine fuzzy sayıların fuzzy modül dizi uzayı denir. Ayrıca $\lambda(E^1)$ cümlesi fuzzy modül ile beraber tam ise $\lambda(E^2)$, tam fuzzy modül dizi uzayı olarak adlandırılır.

Tanım 1.18. u fuzzy sayısının fuzzy modülü u'nun $\bar{0}$ fuzzy sıfıra olan uzaklığı ile tanımlanır. Yani;

$$||u||_{E^1} = \sup_k \bar{d}(u_k, \bar{0})$$

dır, [23].

Tanım 1.19. $(u_k) \in w(E^1)$ olsun. $\sum_k u_k$ ifadesi fuzzy sayıların serisi olarak adlandırılır. Her $n \in \mathbb{N}$ için $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ olsun. Eğer (s_n) dizisi u_0 fuzzy sayısına yakınsak ise fuzzy sayıların $\sum_k u_k$ serisi de u_0 fuzzy sayısına yakınsaktır denir ve $\sum_k u_k = u_0$ şeklinde gösterilir. Yani, $n \to \infty$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$\sum_{k=0}^{n} {}^{\alpha}u_k^- \to {}^{\alpha}u_0^- \quad ve \quad \sum_{k=0}^{n} {}^{\alpha}u_k^+ \to {}^{\alpha}u_0^+$$

serileri düzgün yakınsaktır. Tersine, eğer $\alpha \in [0,1]$ ve $u_k = \{({}^{\alpha}u_k^-, {}^{\alpha}u_k^+) : \alpha \in [0,1]\}$, cümlesi için $\sum_k {}^{\alpha}u_k^- = {}^{\alpha}u_0^-$, $\sum_k {}^{\alpha}u_k^+ = {}^{\alpha}u_0^+$ serileri düzgün yakınsak oluyorsa o halde $u_0 = \{({}^{\alpha}u_0^-, {}^{\alpha}u_0^+) : \alpha \in [0,1]\}$ eşitliği $u_0 = \sum_k u_k$ olacak şekilde bir u_0 fuzzy sayısı tanımlar. Aksi takirde fuzzy sayıların serisi ıraksaktır denir, [24].

Tanım 1.20.(Cauchy Dizisi) (u_n), bir fuzzy sayı dizisi olsun. Eğer her $\epsilon > 0$ için $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ varsa öyleki $\forall\ n, m > n_0$ için $D(u_n, u_m) < \epsilon$ oluyorsa (u_n) dizisine fuzzy sayıların Cauchy dizisi denir, [17].

BÖLÜM 2

İNTERVAL DEĞERLİ FUZZY CÜMLELER

X evrensel cümlesinin bir A fuzzy alt cümlesini belirlerken, A cümlesini oluşturan elemanların görüntüleri $[0, 1]$ aralığındaki bir reel sayı ile belirlenir. Fuzzy cümlelerin belirlenmesinde kullandığımız üyelik fonksiyonları X de alınan her elemana $[0, 1]$ aralığında kesin ve tek bir değer karşılık getirir. Ancak üyelik derecelerini kesin bir değerle belirlemek yerine, bu elemanlara değer cümlesinde birden fazla değer karşılık getirilmesi fikrinin, fuzzy cümlelerin çeşitli uygulamalarında , işleri çok daha kolaylaştıracağı görülmüştür, [11]. Böylece fuzzy cümlelerin bir genişletmesi olan ve interval değerli fuzzy cümle olarak adlandırılan yeni bir cümle tanımı verilmiştir, [25,27].

Fuzzy cümleleri günlük konuşmada kullanılan belirsiz kavramları, örneğin iyi, kötü, sıcak, soğuk, v.s tanımlamak için inşa edilmiştir. Mesela, büyüklük ve küçüklük kavramı bazı x değerleri için kesin olarak küçük iken bazı değerler için kesin olarak büyük olabilmektedir. Peki ya kesin olmayıp, büyüklüğü ya da küçüklüğüne tam olarak karar veremediğimiz değerleri hangi kategoriye koymalıyız? Bir uzman her zaman verilen bir x değerinin küçük ya da büyük mü olduğuna karar veremeyebilir ve üyeliğinin derecesini de doğru olarak saptayamayabilir veya elemanın bir cümleye üyeliğinin derecesini etkileyen bir çok faktör bir arada bulunabilir. İşte bu problemlerden kurtulmak için üyelik derecelerinin hepsini ihtiva eden bir intervali x elemanının üyeliği olarak ele alma düşüncesi gelişmiştir. Bu düşünceden hareketle ortaya çıkan interval değerli fuzzy cümle teorisi özellikle uygulamalarda aktif olarak kullanılmıştır. Birçok uygulama alanında uzmanların taleplerini karşılama noktasında interval değerli fuzzy cümlelerin alışılmış fuzzy cümlelerden çok daha kullanışlı olduğu tespit edilmiştir. C. Lynch, H. Hargas ve V. Callagan dizel marine motorlarının performansını artırmak için interval değerli fuzzy cümlelerini kullanmışlardır, [28].

Yine G.Prasad, P. Herman ve T. M. McGinnity interval değerli fuzzy cümleler tarafından formülüze edilen komutların kullanıcının beyin dalgalarını yorumlamada çok kullanışlı olduğunu göstermişlerdir, [28]. İnterval değerli fuzzy cümleler bu özellikleriyle kullanıcıya sadece düşünce yoluyla bilgisayarı kontrol edebilme yeteneği kazandırmıştır.

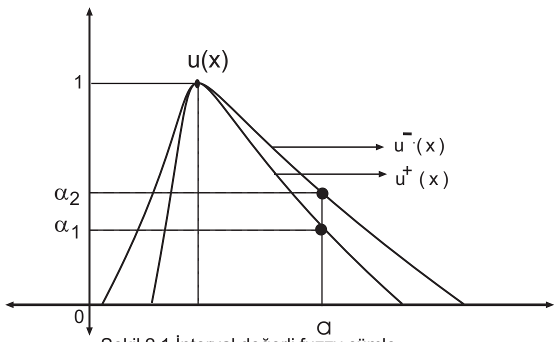
Tanım 2.1. (İnterval Değerli Fuzzy Cümle): $I = [0, 1]$ intervalinin kapalı alt intervallerinin cümlesi $[I]$ ve X de bir evrensel cümle olmak üzere $u : X \to [I],\ \ x \to u(x)$ fonksiyonuna veya başka bir ifade ile

$$A = \{(x, [\alpha_1, \alpha_2]) : x \in X, 0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1\}$$

cümlesine X üzerinde interval değerli fuzzy cümle denir, [25].

$\forall x \in X$ için $\alpha_1 = \alpha_2$ olduğunda interval değerli fuzzy cümle bildiğimiz klâsik fuzzy cümleye dönüşür.

İnterval değerli fuzzy cümlelerde bir elemanın cümleye üyeliğinin derecesi, fuzzy cümleler de olduğu gibi kesin değildir. Şekil 2.1. de bir interval değerli fuzzy cümle gösterilmiştir ve burada "a" elemanının üyeliğinin derecesinin $[\alpha_1, \alpha_2]$ olduğu görülmektedir. Bir X cümlesi üzerindeki bütün interval değerli fuzzy cümlelerin cümlesini



Şekil 2.1 İnterval değerli fuzzy cümle

$\mathcal{F}^2(X)$ ile gösterelim. $u \in \mathcal{F}^2(X)$ elemanı için $u^-(x) = \alpha_1 \leq \alpha_2 = u^+(x)$ olduğundan, E^1 üzerindeki kısmi sıralama göz önünde tutulursa, $u(x) = [u^-(x), u^+(x)]$ yazılabilir.

$u = [u^-(x), u^+(x)],\ \ v = [v^-(x), v^+(x)]$, X evrensel cümlesi üzerinde iki interval değerli fuzzy cümle olsun. Her $x \in X$ için;

$$(u \cap v)(x) \ = [\min(u^-(x), v^-(x)), \min(u^+(x), v^+(x))]$$

$$(u \cup v)(x) \ = [\max(u^-(x), v^-(x)), \max(u^+(x), v^+(x))]$$

$$u^{'}(x) \quad = [1 - u^{+}(x), 1 - u^{-}(x)]$$

şeklinde tanımlıdır, [4].

ÖRNEK 2.1. X evrensel cümlesi

$$X = \{-1, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

olarak verilsin. $u = [u^{-}(x), u^{+}(x)]$, $v = [v^{-}(x), v^{+}(x)]$ iki interval değerli fuzzy cümle olsun. Burada u^{-}, u^{+}, v^{-},v^{+} aşağıdaki şekildedir;

$$u^{-} = \left\{(-1,0), (1, \frac{1}{2}), (2,1), (3,0), (4,0), (5,0)\right\},$$

$$u^{+} = \left\{(-1, \frac{1}{2}), (1, \frac{7}{10}), (2,1), (3,0), (4,0), (5,0)\right\},$$

$$v^{-} = \left\{(-1, \frac{1}{3}), (1,1), (2,0), (3,1), (4,0), (5,0)\right\},$$

$$v^{+} = \left\{(-1,0), (1,0), (2, \frac{1}{2}), (3, \frac{1}{3}), (4,0), (5,0)\right\},$$

$$\min\{u^{-}, v^{-}\} = \left\{(-1,0), (1, \frac{1}{2}), (2,0), (3,0), (4,0), (5,0)\right\},$$

$$\min\{u^{+}, v^{+}\} = \left\{(-1,0), (1,0), (2, \frac{1}{2}), (3,0), (4,0), (5,0)\right\},$$

$$\max\{u^{-}, v^{-}\} = \left\{(-1, \frac{1}{3}), (1,1), (2,1), (3,1), (4,0), (5,0)\right\},$$

$$\max\{u^{+}, v^{+}\} = \left\{(-1, \frac{1}{2}), (1, \frac{7}{10}), (2,1), (3, \frac{1}{3}), (4,0), (5,0)\right\},$$

olmak üzere $u = [u^{-}(x), u^{+}(x)]$ ile $v = [v^{-}(x), v^{+}(x)]$ interval değerli fuzzy cümlelerinin, $u \cap v$, kesişimi,

$$u \cap v = [\min(u^{-}, v^{-}), \min(u^{+}, v^{+})]$$

$u \cup v$ birleşimi,

$$u \cup v = [\max(u^{-}, v^{-}), \max(u^{+}, v^{+})]$$

olur.

Fuzzy cümlelerde olduğu gibi interval değerli fuzzy cümlelerin kesim cümleleri aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 2.2. u bir interval değerli fuzzy cümle ve $[\alpha, \beta] \in [I]$ olsun.

$$^{[\alpha,\beta]}u = \{x \in X : \alpha \leq u^-(x) \;\text{ ve }\; \beta \leq u^+(x)\}$$

eşitliğine u' nun $[\alpha, \beta]$- kesimi denir. Burada

$$^{\alpha}u^- = \{x \in X : u^-(x) \geq \alpha\}, \quad ^{\beta}u^+ = \{x \in X : u^+(x) \geq \beta\}$$

ile tanımlı cümleler olup

$$^{[\alpha,\beta]}u = {}^{\alpha}u^- \cap {}^{\beta}u^+$$

eşitliği mevcuttur, [19].

Açık olarak $\alpha = \beta$ ise $[\alpha, \beta]$- kesimi fuzzy cümlelerdeki α- kesim tanımına indirgenmiş olur.

Tanım 2.3.(İnterval Değerli Fuzzy Sayı)

$$u : \mathbb{R} \to [I]$$

fonksiyonu aşağıdaki İDFS1, İDFS2, İDFS3 ve İDFS4 şartlarını sağlıyorsa u'ya interval değerli fuzzy sayı denir, [12].

İDFS1. u fonksiyonu normaldir. Yani en az bir $x_0 \in \mathbb{R}$ vardır öyleki $u(x_0) = [u^-(x_0), u^+(x_0)] = [1, 1]$ dir.

İDFS2. u fonksiyonu fuzzy konvekstir. Yani $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ve $\mu \in [0, 1]$ için $u\left[\mu x + (1 - \mu)y\right] \geq \min\{u(x), u(y)\}$ dir.

İDFS3. u^- ve u^+ üstten yarı süreklidir.

İDFS4. $\{x \in \mathbb{R} : u^-(x) > 0,\; u^+(x) > 0\}$ cümlesinin kapanışı kompakttır.

Çalışmamız boyunca bütün interval değerli fuzzy sayılarının cümlesini E^2 ile göstereceğiz. Her bir $u \in E^2$ için $u(x) = [u^-(x), u^+(x)]$, $u^-(x) \leq u^+(x)$ ve $x \in \mathbb{R}$ dir. O halde

$$u^-(x) : \mathbb{R} \to I \;\text{ ve }\; u^+(x) : \mathbb{R} \to I, \tag{2.1}$$

$\mathbb{R}$ üzerinde iki fuzzy sayısını göstermektedir.

Şimdi interval değerli fuzzy sayıya bir örnek verelim.

Örnek 2.2.

$$u = \left[\begin{cases} x-2, & x \in [2,3] \\ 4-x, & x \in (3,4] \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}, \begin{cases} \frac{x-1}{2}, & x \in [1,3] \\ \frac{5-x}{2}, & x \in [3,5] \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \right].$$

İnterval değerli fuzzy sayı tanımı göz önüne alındığında, "$u \in E^2 \Leftrightarrow u^- \in E^1, u^+ \in E^1$ ise" önermesi geçerlidir, [26].

Tanım 2.4. E^2 üzerindeki kısmi sıralama bağıntısı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$u \leq v \Leftrightarrow [u^-, u^+] \leq [v^-, v^+] \Leftrightarrow u^- \leq v^- \quad ve \quad u^+ \leq v^+.$$

Tanım 2.5. (Dejenere İnterval Değerli Fuzzy Sayı): $u = [u^-, u^+] \in E^2$ olsun. Eğer $u^- = u^+$ ise o zaman u'ya dejenere interval değerli fuzzy sayı denir.

Teorem 2.1. Bütün fuzzy sayıların cümlesi E^1, interval değerli fuzzy sayılarının cümlesi, E^2'nin içine gömülebilir, [21].

Tanım 2.6. u bir interval değerli fuzzy sayı olsun.
(1) Eğer her bir $x \leq 0$ için $u^+(x) = 0$ ise u ya pozitif interval değerli fuzzy sayı denir.
(2) Eğer her bir $x \geq 0$ için $u^+(x) = 0$ ise u ya negatif interval değerli fuzzy sayı denir, [19].

$u, v \in E^2$ olmak üzere iki interval değerli fuzzy sayı arasındaki uzaklık;

$$\mathfrak{D}(u,v) = \max \left\{ \sup_{\alpha \in [0,1]} d({}^\alpha u^-, {}^\alpha v^-), \sup_{\alpha \in [0,1]} d({}^\alpha u^+, {}^\alpha v^+) \right\} \tag{2.2}$$

ile verilir, [12].

Lemma 2.1. Bütün interval değerli fuzzy sayıların cümlesi E^2, (2.2) de verilen metrikle beraber bir metrik uzaydır, [12].

2.1.İnterval Değerli Fuzzy Sayı Cümleleri Üzerindeki Cebirsel İşlemler

$u, v \in E^2$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere iki interval değerli fuzzy sayının toplamı,

$$u + v = [u^-(x), u^+(x)] + [v^-(x), v^+(x)] = [({}^\alpha u^- +^\alpha v^-), ({}^\alpha u^+ +^\alpha v^+)], \quad \text{çarpımı},$$

$$u.v = [{}^\alpha u^-,^\alpha u^+][{}^\alpha v^-,^\alpha v^+] = [\min\{{}^\alpha u^{-\alpha} v^-,^\alpha u^{-\alpha} v^+, {}^\alpha u^{+\alpha} v^-, {}^\alpha u^{+\alpha} v^+\},$$

$$\max\{{}^\alpha u^{-\alpha} v^-,^\alpha u^{-\alpha} v^+, {}^\alpha u^{+\alpha} v^-, {}^\alpha u^{+\alpha} v^+\}],$$

skalerle çarpımı,

$$\textbf{(1)}\ \lambda \geq 0 \ \text{ için } \ u = [u^-(x), u^+(x)] \Rightarrow \lambda.u = [\lambda u^-(x), \lambda u^+(x)]$$

$$\textbf{(2)}\ \lambda < 0 \ \text{ için } \ u = [u^-(x), u^+(x)] \Rightarrow \lambda.u = [\lambda u^+(x), \lambda u^-(x)]$$

olarak tanımlanır.

Şimdi iki interval değerli fuzzy sayının toplamına bir örnek verelim.

Örnek 2.3. $u = [u^-(x), u^+(x)]$, $v = [v^-(x), v^+(x)] \in E^2$ sırası ile aşağıdaki gibi olsun:

$$u = u(x) = \left[\begin{cases} x-2 & , \quad x \in [2,3] \ \ ise, \\ 4-x & , \quad x \in (3,4] \ \ ise, \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda.} \end{cases} \begin{cases} \frac{x-1}{2} & , \quad x \in [1,3] \ \ ise, \\ \frac{5-x}{2} & , \quad x \in (3,5] \ \ ise, \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda.} \end{cases} \right], \tag{2.3}$$

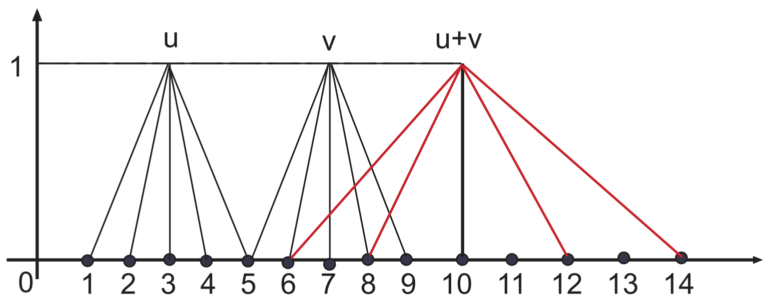
$$v = v(x) = \left[\begin{cases} x-6 & , \quad x \in [6,7] \ \ ise, \\ 8-x & , \quad x \in (7,8] \ \ ise, \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda.} \end{cases} , \begin{cases} \frac{x-5}{2} & , \quad x \in [5,7] \ \ ise, \\ \frac{9-x}{2} & , \quad x \in (7,9] \ \ ise, \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda.} \end{cases} \right]. \tag{2.4}$$

O halde

$$\begin{aligned} {}^\alpha(u+v) &:= [{}^\alpha u^- + {}^\alpha v^-, {}^\alpha u^+ + {}^\alpha v^+] \\ &= [[4\alpha + 6, 14 - 4\alpha], [8 + 2\alpha, 12 - 2\alpha]] \end{aligned}$$

olur. u ve v interval değerli fuzzy sayılarının $u+v$ toplamına karşılık gelen üyelik fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$(u+v)(x) = \left[\begin{cases} \frac{x-6}{4} & , \quad x \in [6,10] \quad ise, \\ \frac{14-x}{4} & , \quad x \in (10,14] \quad ise, \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda.} \end{cases} , \begin{cases} \frac{x-8}{2} & , \quad x \in [8,10] \quad ise, \\ \frac{12-x}{2} & , \quad x \in (10,12] \quad ise, \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda.} \end{cases} \right] \tag{2.5}$$



2.2. İnterval Değerli Fuzzy Sayıların Dizileri

Bu bölümde interval değerli fuzzy sayılarının dizileri tanımlanacak ve arkasından interval değerli fuzzy sayılarının bazı özel dizi uzayları tanıtılacaktır.

Tanım 2.7.

$$w(E^2) = \{(u_k) = ([u_k^-, u_k^+]) : u : \mathbb{N} \to E^2, k \to u(k) = [u_k^-, u_k^+] \quad ve \quad u_k^-, u_k^+ \in E^1\}$$

cümlesine interval değerli fuzzy sayıların dizilerinin cümlesi denir, [21].

Tanım 2.8. $u = (u_k) \in w(E^2)$ olsun. u'ya sınırlıdır denir $\Leftrightarrow \widetilde{m}, \widetilde{M} \in E^2 \ni \forall k \in \mathbb{N}$ için $\widetilde{m} \leq u_k \leq \widetilde{M}$ ise, [21].

Tanım 2.9. $u = (u_k)$ interval değerli fuzzy sayı dizisi, $u_0 \in E^2$' ye yakınsaktır $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0$ için m pozitif tamsayısı vardır öyleki $\forall k \geq m$ için $\widetilde{\mathfrak{D}}(u_k, u_0) < \epsilon$ ise. Eğer bu limit mevcutsa kısaca, $\lim\limits_k u_k = u_0$, şeklinde gösterilir.

Başka bir ifade ile eğer $\forall \epsilon > 0$ için $k \geq m$ olacak şekilde $m \in \mathbb{N}$ mevcut öyleki

$$\widetilde{\mathfrak{D}}(u_k, u_0) = \sup_{k \in \mathbb{N}} \max \left\{ \bar{d}(u_k^-, v_k^-), \bar{d}(u_k^+, v_k^+) \right\} < \epsilon \tag{2.6}$$

ise interval değerli fuzzy sayıların dizisi (u_k), u_0' a yakınsaktır denir, [12].

Tanım 2.10. İnterval değerli fuzzy sayılarının u dizisine Cauchy dizisi denir $\Leftrightarrow$ $\forall\epsilon > 0$ ve $i, j > k$ olacak şekilde i, j pozitif tamsayıları için $\widetilde{\mathfrak{D}}(u_i, u_j) < \epsilon$ ise, [21].

2.3. İnterval Değerli Fuzzy Sayıların Dizi Uzayları

İnterval değerli fuzzy sayılarının, yakınsak, sıfıra yakınsak ve sınırlı dizilerinin uzayları, sırasıyla $c(E^2)$, $c_0(E^2)$ ve $\ell_\infty(E^2)$ ile temsil edilen; aşağıdaki biçimde tanımlı cümlelerdir:

$$c(E^2) = \{u \in w(E^2) : \lim_k \max\{\overline{d}(u_k^-, u_0^-), \overline{d}(u_k^+, u_0^+)\} = 0\}, \tag{2.7}$$

$$c_0(E^2) = \{u \in w(E^2) : \lim_k \max\{\overline{d}(u_k^-, \theta^-), \overline{d}(u_k^+, \theta^+)\} = 0\}, \tag{2.8}$$

$$\ell_\infty(E^2) = \{u \in w(E^2) : \sup_k \max\{\overline{d}(u_k^-, \theta^-), \overline{d}(u_k^+, \theta^+) < \infty\} \tag{2.9}$$

ile tanımlı cümlelerdir, burada $\theta = [\theta^-, \theta^+]$ dir, [**21**].

Teorem 2.2. $c_0(E^2) \subset c(E^2) \subset \ell_\infty(E^2)$ kapsamaları mevcuttur, [**21**].

Teorem 2.3. Sıfıra yakınsak fuzzy sayıların cümlesi $c_0(E^1)$, yakınsak fuzzy sayıların cümlesi $c(E^1)$ ve sınırlı fuzzy sayıların cümlesi $\ell_\infty(E^1)$ sırasıyla $c_0(E^2)$, $c(E^2)$ ve $\ell_\infty(E^2)$ cümleleri içine gömülebilir, [21].

İspat: $c_0(E^1)(veya\ \ c(E^1),\ \ \ell_\infty(E^1))$ dizi uzaylarının bütün elemanları Tanım 1.23 ve Önerme 2 de görülebileceği gibi interval değerli fuzzy sayılarının dejenere dizi uzayları olacağından ispat açıktır.

Teorem 2.4. Her $(u_k), (v_k) \in w(E^2)$ için eğer $(u_k) \to u_0, (k \to \infty)$ ve $(v_k) \to v_0, (k \to \infty)$ ise aşağıdaki özellikler mevcuttur, [21]:

(1) $u_k + v_k \to u_0 + v_0,\ k \to \infty$,

(2) $u_k - v_k \to u_0 - v_0,\ k \to \infty$,

(3) $u_k v_k \to u_0 v_0,\ k \to \infty$.

Teorem 2.5. $u,\ v,\ w \in c(E^2), (veya\ \ c_0(E^2), \ell_\infty(E^2))$ ve $\rho \in \mathbb{R}$ için aşağıdakiler mevcuttur, [21]:

$\mathfrak{D}(u + w, v + w) \leq \mathfrak{D}(u, w) + \mathfrak{D}(w, v)$,

$$\mathfrak{D}(\rho u, \rho v) = |\rho|\mathfrak{D}(u, v),$$
$$\mathfrak{D}(u + v, w + z) \leq \mathfrak{D}(u, w) + \mathfrak{D}(v, z) \text{ ve}$$
$$\mathfrak{D}(uv, \theta) = \mathfrak{D}(u, \theta)\mathfrak{D}(v, \theta).$$

İspat: (1), (2), (3) ve (4)'ün ispatı birbirine benzediğinden biz sadece (3) numaralı durumu ispatlayacağız.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D}(u + v, w + z) &= \sup_k \max\{\bar{d}(u_k^- + v_k^-, w_k^- + z_k^-), \bar{d}(u_k^+ + v_k^+, w_k^+ + z_k^+)\} \\
&\leq \sup_k \max\{(\bar{d}(u_k^-, w_k^-), \bar{d}(u_k^+, w_k^+)) + (\bar{d}(v_k^- + z_k^-), \bar{d}(v_k^+ + z_k^+))\} \\
&\leq \sup_k \max\{(\bar{d}(u_k^-, w_k^-), \bar{d}(u_k^+, w_k^+))\} + \sup_k \max\{(\bar{d}(v_k^- + z_k^-), \bar{d}(v_k^+ + z_k^+))\} \\
&= \mathfrak{D}(u, w) + \mathfrak{D}(v, z).
\end{aligned}$$

BÖLÜM 3

ZWEIER YAKINSAK İNTERVAL DEĞERLİ FUZZY SAYILARININ DİZİ UZAYLARI

Bu bölümde her terimi pozitif olan sonsuz bir matrisin etki alanından faydalanarak yeni interval değerli fuzzy sayı dizi cümleleri inşa edeceğiz.

3.1. Bir Matrisin Etki Alanı

$\lambda(E^2)$ ve $\mu(E^2)$ interval değerli fuzzy sayıların iki dizi uzayı ve $A = (a_{nk})$ da a_{nk} reel sayıların sonsuz matrisi olsun, $(n, k \in \mathbb{N})$. Eğer her bir $u = (u_k) \in \lambda(E^2)$ için u'nun A altındaki resmi, $Au = \{(Au)_n\} \in \mu(E^2)$ ise A' ya $\lambda(E^2)$ den $\mu(E^2)$ ye bir matris dönüşümü denir.

İnterval değerli fuzzy sayıların $\lambda(E^2)$ dizi uzayı verilsin.

$$\lambda_A(E^2) = \left\{u = (u_k) \in w(E^2) \ : \ Au \in \lambda(E^2)\right\} \tag{3.1}$$

ile tanımlı $\lambda_A(E^2)$ cümlesi, A matrisinin etki alanı olarak adlandırılır. $p \neq 1$ olmak üzere Z^p;

$$Z^p = (z_{nk}) = \begin{cases} p, & n = k \ \ ise, \\ 1-p, & n-1 = k; \ ise, (i, k \in \mathbb{N}) \\ 0, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases} \tag{3.2}$$

şeklinde tanımlanan sonsuz matrise Zweier matrisi denir. Eğer $A = Z$ olarak alınırsa (3.1) ile tanımlı cümle genel Zweier matrisinin etki alanı olarak adlandırılır.

Genel Zweier yakınsak interval değerli fuzzy sayıların yakınsak, sıfıra yakınsak ve sınırlı dizi cümleleri sırasıyla,

$$c(E^2, Z^p) = \{u = (u_k) \in w(E^2) : (Z^p u) \in c(E^2)\}, \tag{3.3}$$

$$c_0(E^2, Z^p) = \{u = (u_k) \in w(E^2) : (Z^p u) \in c_0(E^2)\} \text{ ve} \tag{3.4}$$

$$\ell_\infty(E^2, Z^p) = \{u = (u_k) \in w(E^2) : (Z^p u) \in \ell_\infty(E^2)\} \tag{3.5}$$

ile tanımlanır. Çalışmamızın bundan sonraki kısmında $p = \frac{1}{2}$ alınacaktır.

$u = (u_i)$ dizisinin $Z^{\frac{1}{2}}$- dönüşümü $v = (v_i)$ olsun, yani

$$v_i = \frac{1}{2}u_i + \frac{1}{2}u_{i-1} = \frac{1}{2}(u_i + u_{i-1}) \text{ olacaktır.} \tag{3.6}$$

Teorem 3.1. $c(E^2, Z^{\frac{1}{2}}), c_0(E^2, Z^{\frac{1}{2}})$ ve $\ell_\infty(E^2, Z^{\frac{1}{2}})$ uzayları sırasıyla $c(E^2)$, $c_0(E^2)$ ve $\ell_\infty(E^2)$ quasilineer uzaylarına lineer olarak izomorfiktir. Yani;

$$c(E^2, Z^{\frac{1}{2}}) \cong c(E^2), c_0(E^2, Z^{\frac{1}{2}}) \cong c_0(E^2), \ell_\infty(E^2, Z^{\frac{1}{2}}) \cong \ell_\infty(E^2)$$

dir.

İspat: Bunun için ilk olarak $\ell_\infty(E^2, Z^{\frac{1}{2}})$ ve $\ell_\infty(E^2)$ uzayları arasında lineer, birebir, örten bir dönüşümün varlığını göstermeliyiz. Bu dönüşümü T ile gösterelim, yani;

$$T : \ell_\infty(E^2, Z^{\frac{1}{2}}) \to \ell_\infty(E^2),\ Tu = z, z = (z_i),\quad i \in \mathbb{N},$$

$$z_i = \frac{1}{2}(u_i + u_{i-1}) = \frac{1}{2}([u_i^-, u_i^+] + [u_{i-1}^-, u_{i-1}^+]) = \frac{1}{2}[u_i^- + u_{i-1}^-, u_i^+ + u_{i-1}^+]$$

olsun. Öncelikle $u, v \in \ell_\infty(E^2, Z^{\frac{1}{2}})$ olmak üzere;

(1) $T(u + v) = Tu + Tv$ ve

(2) $T(\alpha u) = \alpha Tu$,

şartlarının sağlandığını göstermeliyiz.

$$\begin{aligned}
(1)\quad T(u + v) &= \frac{1}{2}[(u_i + v_i) + (u_{i-1} + v_{i-1})] \\
&= \frac{1}{2}\{[u_i^- + v_i^-, u_i^+ + v_i^+] + [u_{i-1}^- + v_{i-1}^-, u_{i-1}^+ + v_{i-1}^+]\} \\
&= \frac{1}{2}\{[u_i^- + u_{i-1}^-, u_i^+ + u_{i-1}^+] + [v_i^- + v_{i-1}^-, v_i^+ + v_{i-1}^+]\} \\
&= \frac{1}{2}(u_i + u_{i-1}) + \frac{1}{2}(v_i + v_{i-1}) = Tu + Tv.
\end{aligned}$$

(2)Eğer $\alpha \in \mathbb{R}$ ise

$$T(\alpha[u_i^-, u_i^+]) = T([\alpha u_i^-, \alpha u_i^+]) = \frac{1}{2}([\alpha u_i^-, \alpha u_i^+] + [\alpha u_{i-1}^-, \alpha u_{i-1}^+])$$

$$= \alpha Tu \text{ dir.}$$

(1) ve (2) den T dönüşümü lineerdir.

Şimdi $T : \ell_\infty(E^2, Z^{\frac{1}{2}}) \to \ell_\infty(E^2),\ Tu = v$ dönüşümünün birebirliğini araştıralım.

$T(u_i) = T(v_i) \Rightarrow u_i = v_i$ midir? $T(u_i) = \frac{1}{2}u_i + \frac{1}{2}u_{i-1}, T(v_i) = \frac{1}{2}v_i + \frac{1}{2}v_{i-1}$ dir. $T(u_i) = T(v_i)$ ise $\frac{1}{2}u_i + \frac{1}{2}u_{i-1} = \frac{1}{2}v_i + \frac{1}{2}v_{i-1}$ eşitliği $i = 0$ için $\frac{1}{2}u_0 = \frac{1}{2}v_0 \Rightarrow u_0 = v_0$, $i = 1$ için $\frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_0 = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_0 \Rightarrow u_1 = v_1$ dir. $i = r$ için doğru olduğunu kabul edelim. Yani $u_r = v_r$ olsun. Buradan $\frac{1}{2}u_{r+1} + \frac{1}{2}u_r = \frac{1}{2}v_{r+1} + \frac{1}{2}v_r \Rightarrow u_{r+1} = v_{r+1}$ olduğundan matematik indiksiyon prensibi gereğince $\forall i$ için $u_i = v_i$ olur. O halde T birebirdir. Son olarak T'nin örten olup olmadığını inceleyelim. $v \in \ell_\infty(E^2)$ için $u_i = 2\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i-j}v_j, i \in \mathbb{N}$ dizisini göz önüne alalım.

$$\lim_{i\to\infty} \frac{1}{2}(u_i + u_{i-1}) = \frac{1}{2}\lim_{i\to\infty} 2\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i-j}v_j + \frac{1}{2}\lim_{i\to\infty} 2\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^{i-1-j}v_j$$

$$= \lim_{i\to\infty} v_i \Rightarrow u \in \ell_\infty(E^2, Z^{\frac{1}{2}}) \text{ dir. Yani } \ell_\infty(E^2, Z^{\frac{1}{2}}) \cong \ell_\infty(E^2) \text{ dir.}$$

Benzer olarak $c(E^2, Z^{\frac{1}{2}}) \cong c(E^2), c_0(E^2, Z^{\frac{1}{2}}) \cong c_0(E^2)$ olduğu görülür.

Teorem 3.2. (u_n) fuzzy sayıların bir dizisi olsun. Eğer $n \to \infty$ için $\bar{d}(u_n, u_0) \to 0$ ise o zaman $n \to \infty$ için $\bar{d}(pu_n + (1-p)u_{n-1}, u_0) \to 0$ dır. Yani $Z^{\frac{1}{2}}$, Zweier matrisi regülerdir,[1][21].

İspat: Fuzzy sayıların u_n dizisi u_0 fuzzy sayısına yakınsak olsun. O zaman $\forall\epsilon > 0$ için bir n_0 pozitif tamsayısı vardır öyleki $\forall n \geq n_0$ için $\bar{d}(u_n, u_0) < \frac{\epsilon}{2M}$ olur. $\bar{d}(Z^{\frac{1}{2}}u, u_0) = \bar{d}(pu_n + (1-p)u_{n-1}, u_0) \leq p\,\bar{d}(u_n, u_0) + (1-p)\bar{d}(u_{n-1}, u_0)$ yazılabilir. $M = \max\{p, (1-p)\}$ olarak seçilirse $\bar{d}(Z^{\frac{1}{2}}u, u_0) < \epsilon$ olur. Yani $\lim_n(pu_n + (1-p)u_{n-1}) = u_0$ eşitliği sağlanır.

3.2. Kapsama Bağıntıları

Teorem 3.3. $c_0(E^2, Z^{\frac{1}{2}}) \subset c(E^2, Z^{\frac{1}{2}}) \subset \ell_\infty(E^2, Z^{\frac{1}{2}})$ kapsamaları geçerlidir.

İspat: $c_0(E^2, Z^{\frac{1}{2}}) \subset c(E^2, Z^{\frac{1}{2}})$ olduğu açıktır. $c(E^2, Z^{\frac{1}{2}}) \subset \ell_\infty(E^2, Z^{\frac{1}{2}})$ olduğunu gösterelim:

[1]Silvermann Toeplitz şartlarını sağlar.

$(u_k) \in c(E^2, Z^{\frac{1}{2}})$ olsun. Bu $\lim_k \max\{\bar{d}(Z^{\frac{1}{2}} u_k^-, u_0^-), \bar{d}(Z^{\frac{1}{2}} u_k^+, u_0^+)\} = 0$ demek olduğundan $\bar{d}(Z^{\frac{1}{2}} u_k^-, u_0^-) < \epsilon$ ve $\bar{d}(Z^{\frac{1}{2}} u_k^+, u_0^+) < \epsilon$ yazılabilir. Dolayısı ile $(Z^{\frac{1}{2}} u_k^-) \in c(E^1, Z^{\frac{1}{2}})$ ve $(Z^{\frac{1}{2}} u_k^+) \in c(E^1, Z^{\frac{1}{2}})$ olup $c(E^1, Z^{\frac{1}{2}}) \subset \ell_\infty(E^1, Z^{\frac{1}{2}})$ kapsaması mevcuttur. Şu halde $(Z^{\frac{1}{2}} u_k^-) \in \ell_\infty(E^1, Z^{\frac{1}{2}})$ ve $(Z^{\frac{1}{2}} u_k^+) \in \ell_\infty(E^1, Z^{\frac{1}{2}})$ yazılabilir. Demekki $(Z^{\frac{1}{2}} u_k) \in \ell_\infty(E^2, Z^{\frac{1}{2}})$ dır. Bu ise $(u_k) \in \ell_\infty(E^2, Z^{\frac{1}{2}})$ olması demektir.
Şimdi bir $u = (u_k) \in \ell_\infty(E^2, Z^{\frac{1}{2}})$ dizisini; eğer k çift ise,

$$u_k = \left[\begin{cases} x-1, & x \in [1,2] \;\; ise \\ 3-x, & x \in [2,3] \;\; ise \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}, \begin{cases} \frac{x}{2}, & x \in [0,2] \;\; ise \\ \frac{5-x}{3}, & x \in [2,5] \;\; ise \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \right]$$

ve eğer k tek ise,

$$u_k = \left[\begin{cases} x+3, & x \in [-3,-2] \;\; ise \\ -1-x, & x \in [-2,-1] \;\; ise \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}, \begin{cases} \frac{x+5}{3}, & x \in [-5,-2] \;\; ise \\ \frac{-x}{2}, & x \in [-2,0] \;\; ise \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \right]$$

biçiminde tanımlayalım. Açık olarak $\lim_k u_k$ mevcut değildir. $u = (u_k)$ dizisinin α-kesimleri

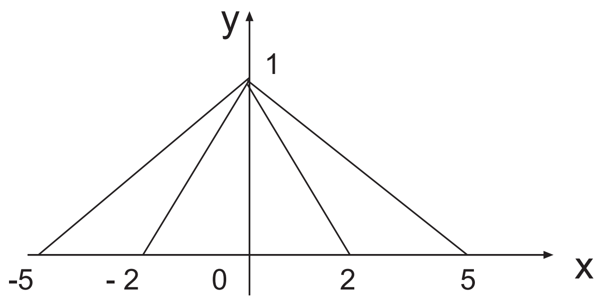
$${}^\alpha u_k = [[\alpha+1, 3-\alpha], [2\alpha, 5-3\alpha]], \quad k \;\; \text{tek ise},$$

$${}^\alpha u_k = [[\alpha-3, -1-\alpha], [3\alpha-5, -2\alpha]], \quad k \;\; \text{çift ise}$$

olduğundan $v_k = Z^{\frac{1}{2}}({}^\alpha u_k) = \frac{1}{2}[[2\alpha-2, 2-2\alpha], [5\alpha-5, 5-5\alpha]]$ elde edilir. $\alpha = 0$ için ${}^0 v_k = [[-2,2], [-5,5]]$ ve $\alpha = 1$ için ${}^1 v_k = [[0,0], [0,0]]$ bulunur. $Z^{\frac{1}{2}}({}^\alpha u_k)$ ya karşılık gelen üyelik fonksiyonu aşağıdaki gibi verilir:

$$v(x) = Z^{\frac{1}{2}} u(x) = \left[\begin{cases} \frac{-2-x}{-2}, & x \in [-2,0] \;\; ise \\ \frac{2-x}{2}, & x \in [0,2] \;\; ise \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}, \begin{cases} \frac{-5-x}{-5}, & x \in [-5,0] \;\; ise \\ \frac{5-x}{5}, & x \in [0,5] \;\; ise \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \right]$$

Bu ise $c(E^2, Z^{\frac{1}{2}}) \subset \ell_\infty(E^2, Z^{\frac{1}{2}})$ anlamına gelir. (u_k) dizisinin terimleri ve $Z^{\frac{1}{2}}$ dönüşümü altındaki limiti aşağıdaki şekil 3.1 de gösterilmiştir.



Şekil 3.1

Teorem 3.4. $c(E^2) \subset c(E^2, Z^{\frac{1}{2}})$ ve $c_0(E^2) \subset c_0(E^2, Z^{\frac{1}{2}})$ kapsamaları sağlanır.

İspat:$c(E^2) \subset c(E^2, Z^{\frac{1}{2}})$ olduğunu gösterelim. $x \in c(E^2)$ olsun. $Z^{\frac{1}{2}}$'nin regüler olmasından dolayı $Z^{\frac{1}{2}}x \in c(E^2, Z^{\frac{1}{2}})$ yazabiliriz. Bu ise $x \in c(E^2, Z^{\frac{1}{2}})$ olması demektir. Buradan $c(E^2) \subset c(E^2, Z^{\frac{1}{2}})$ kapsaması elde edilir.

3.3. Tamlık

Bu bölümde $\lambda(E^2, Z^{\frac{1}{2}}) \in \{c_0(E^2, Z^{\frac{1}{2}}), c(E^2, Z^{\frac{1}{2}}), \ell_\infty(E^2, Z^{\frac{1}{2}})\}$ olmak üzere $\lambda(E^2, Z^{\frac{1}{2}})$ cümlesi üzerindeki metrik ve bu metriğe göre tamlık üzerinde durulacaktır.
$u, v \in \lambda(E^2, Z^{\frac{1}{2}})$ ise u ile v arasındaki uzaklık;

$$D_{Z^{\frac{1}{2}}}(u, v) = \sup_k \max\{\mathcal{U}, \mathcal{V}\} \tag{3.7}$$

şeklinde tanımlanır.

Burada $\mathcal{U} = \sup_{\alpha \in [0,1]} d(Z^{\frac{1}{2}}({}^{\alpha}u_k^-), Z^{\frac{1}{2}}({}^{\alpha}v_k^-))$ ve $\mathcal{V} = \sup_{\alpha \in [0,1]} d(Z^{\frac{1}{2}}({}^{\alpha}u_k^+), Z^{\frac{1}{2}}({}^{\alpha}v_k^+))$ dir.

Lemma 3.1.[22]

$$\ell_\infty(E^1, Z^p) = \left\{u = (u_k) \in w(E^1) : (Z^p u) \in \ell_\infty(E^1)\right\}, \tag{3.8}$$

$$c(E^1, Z^p) = \left\{u = (u_k) \in w(E^1) : (Z^p u) \in c(E^1)\right\} \tag{3.9}$$

ve

$$c_0(E^1, Z^p) = \left\{u = (u_k) \in w(E^1) : (Z^p u) \in c_0(E^1)\right\} \tag{3.10}$$

ile verilen $\ell_\infty(E^1, Z^p), c(E^1, Z^p)$ ve $c_0(E^1, Z^p)$ cümleleri

$$||u||_{\ell_\infty(E^1,Z^\eta)} = ||u||_{c(E^1,Z^\eta)} = ||u||_{c_0(E^1,Z^\eta)} = ||Z^\eta u||_{c(E^1)}, \tag{3.11}$$

burada $||Z^\eta u||_{c(E^1)} = \sup_k \overline{d}(Z^\eta u_k, \overline{0})$ dir, normuna göre tamdır.

Teorem 3.5. $\lambda(E^2, Z^{\frac{1}{2}}) \in \{c_0(E^2, Z^{\frac{1}{2}}), c(E^2, Z^{\frac{1}{2}}), \ell_\infty(E^2, Z^{\frac{1}{2}})\}$ olmak üzere $\lambda(E^2, Z^{\frac{1}{2}})$, (3.7) de verilen $D_{Z^{\frac{1}{2}}}$ metriği ile beraber tam metrik uzaydır.

İspat:İspatları birbirine benzediğinden biz sadece $(\ell_\infty(E^2, Z^{\frac{1}{2}}), D_{Z^{\frac{1}{2}}})$'nin tam metrik uzay olduğunu göstereceğiz.

(1) $D_{Z^{\frac{1}{2}}}(u,v) = 0 \Leftrightarrow u = v$ midir? $D_{Z^{\frac{1}{2}}}(u,v) = \sup\limits_k \max\{\sup\limits_{\alpha\in[0,1]} d(Z^{\frac{1}{2}}(^\alpha u_k^-), Z^{\frac{1}{2}}(^\alpha v_k^-)),$ $\sup_{\alpha\in[0,1]} d(Z^{\frac{1}{2}}(^\alpha u_k^+), Z^{\frac{1}{2}}(^\alpha v_k^+))\} = 0 \Leftrightarrow |Z^{\frac{1}{2}}(^\alpha u_{\ell k}^-) - Z^{\frac{1}{2}}(^\alpha v_{\ell k}^-)| = 0$, $|Z^{\frac{1}{2}}(^\alpha u_{rk}^-) - Z^{\frac{1}{2}}(^\alpha v_{rk}^-)| = 0$, $|Z^{\frac{1}{2}}(^\alpha u_{\ell k}^+) - Z^{\frac{1}{2}}(^\alpha v_{\ell k}^+)| = 0$, $|Z^{\frac{1}{2}}(^\alpha u_{rk}^+) - Z^{\frac{1}{2}}(^\alpha v_{rk}^+)| = 0 \Leftrightarrow$ $Z^{\frac{1}{2}}(^\alpha u_{\ell k}^-) = Z^{\frac{1}{2}}(^\alpha v_{\ell k}^-)$, $Z^{\frac{1}{2}}(^\alpha u_{rk}^-) = Z^{\frac{1}{2}}(^\alpha v_{rk}^-)$, $Z^{\frac{1}{2}}(^\alpha u_{\ell k}^+) = Z^{\frac{1}{2}}(^\alpha v_{\ell k}^+)$, $Z^{\frac{1}{2}}(^\alpha u_{rk}^+) = Z^{\frac{1}{2}}(^\alpha v_{rk}^+) \Leftrightarrow^\alpha u_k^- =^\alpha v_k^-$, $^\alpha u_k^+ =^\alpha v_k^+$ $\Leftrightarrow u_k^- = v_k^-$, $u_k^+ = v_k^+$ $\Leftrightarrow u = v$.

(2) $D_{Z^{\frac{1}{2}}}(u,v) = \sup\limits_k \max\{\sup\limits_{\alpha\in[0,1]} d(Z^{\frac{1}{2}}(^\alpha u_k^-), Z^{\frac{1}{2}}(^\alpha v_k^-)), \sup\limits_{\alpha\in[0,1]} d(Z^{\frac{1}{2}}(^\alpha u_k^+), Z^{\frac{1}{2}}(^\alpha v_k^+))\} =$ $\sup\limits_k \max\{\sup\limits_{\alpha\in[0,1]} d(Z^{\frac{1}{2}}(^\alpha v_k^-), Z^{\frac{1}{2}}(^\alpha u_k^-)), \sup\limits_{\alpha\in[0,1]} d(Z^{\frac{1}{2}}(^\alpha v_k^+), Z^{\frac{1}{2}}(^\alpha u_k^+))\} = D_{Z^{\frac{1}{2}}}(v,u)$ olduğu mutlak değer tanımından açıktır.

(3) $D_{Z^{\frac{1}{2}}}(u,v) \le D_{Z^{\frac{1}{2}}}(u,w) + D_{Z^{\frac{1}{2}}}(w,v)$ eşitsizliğinin sağlandığını gösterelim.

$$\begin{aligned} D_{Z^{\frac{1}{2}}}(u,v) = \sup_k \max\Big\{ &\sup_{\alpha\in[0,1]} \{|Z^{\frac{1}{2}}(^\alpha u_{\ell k}^-) - Z^{\frac{1}{2}}(^\alpha v_{\ell k}^-) + Z^{\frac{1}{2}}(^\alpha w_{\ell k}^-) - Z^{\frac{1}{2}}(^\alpha w_{\ell k}^-)|, \\ &|Z^{\frac{1}{2}}(^\alpha u_{rk}^-) - Z^{\frac{1}{2}}(^\alpha v_{rk}^-) + Z^{\frac{1}{2}}(^\alpha w_{rk}^-) - Z^{\frac{1}{2}}(^\alpha w_{rk}^-)|\Big\}, \\ &\sup_{\alpha\in[0,1]} \Big\{|Z^{\frac{1}{2}}(^\alpha u_{\ell k}^+) - Z^{\frac{1}{2}}(^\alpha v_{\ell k}^+) + Z^{\frac{1}{2}}(^\alpha w_{\ell k}^+) - Z^{\frac{1}{2}}(^\alpha w_{\ell k}^+)|, \\ &|Z^{\frac{1}{2}}(^\alpha u_{rk}^+) - Z^{\frac{1}{2}}(^\alpha v_{rk}^+) + Z^{\frac{1}{2}}(^\alpha w_{rk}^+) - Z^{\frac{1}{2}}(^\alpha w_{rk}^+)|\Big\}\Big\} \end{aligned}$$

$$\leq \sup_k \max\{\sup_{\alpha\in[0,1]} |Z^{\frac{1}{2}}(^{\alpha}u_{\ell k}^{-}) - Z^{\frac{1}{2}}(^{\alpha}w_{\ell k}^{-})| + |Z^{\frac{1}{2}}(^{\alpha}w_{\ell k}^{-}) - Z^{\frac{1}{2}}(^{\alpha}v_{\ell k}^{-})|,$$

$$|Z^{\frac{1}{2}}(^{\alpha}u_{rk}^{-}) - Z^{\frac{1}{2}}(^{\alpha}w_{rk}^{-})| + |Z^{\frac{1}{2}}(^{\alpha}w_{rk}^{-}) - Z^{\frac{1}{2}}(^{\alpha}v_{rk}^{-})|\Big\}\Big\},$$

$$\{\sup_{\alpha\in[0,1]} |Z^{\frac{1}{2}}(^{\alpha}u_{\ell k}^{+}) - Z^{\frac{1}{2}}(^{\alpha}w_{\ell k}^{+})| + |Z^{\frac{1}{2}}(^{\alpha}w_{\ell k}^{+}) - Z^{\frac{1}{2}}(^{\alpha}v_{\ell k}^{+})|,$$

$$|Z^{\frac{1}{2}}(^{\alpha}u_{rk}^{+}) - Z^{\frac{1}{2}}(^{\alpha}w_{rk}^{+})| + |Z^{\frac{1}{2}}(^{\alpha}w_{rk}^{+}) - Z^{\frac{1}{2}}(^{\alpha}v_{rk}^{+})|\Big\}$$

$$\leq \sup_k \max\{\sup_{\alpha\in[0,1]} |Z^{\frac{1}{2}}(^{\alpha}u_{\ell k}^{-}) - Z^{\frac{1}{2}}(^{\alpha}w_{\ell k}^{-})|, |Z^{\frac{1}{2}}(^{\alpha}u_{rk}^{-}) - Z^{\frac{1}{2}}(^{\alpha}w_{rk}^{-})|,$$

$$\sup_{\alpha\in[0,1]} \Big\{|Z^{\frac{1}{2}}(^{\alpha}u_{\ell k}^{+}) - Z^{\frac{1}{2}}(^{\alpha}w_{\ell k}^{+})|, |Z^{\frac{1}{2}}(^{\alpha}u_{rk}^{+}) - Z^{\frac{1}{2}}(^{\alpha}w_{rk}^{+})|\Big\} +$$

$$\sup_k \max\{\sup_{\alpha\in[0,1]} |Z^{\frac{1}{2}}(^{\alpha}w_{\ell k}^{-}) - Z^{\frac{1}{2}}(^{\alpha}v_{\ell k}^{-})|, |Z^{\frac{1}{2}}(^{\alpha}w_{rk}^{-}) - Z^{\frac{1}{2}}(^{\alpha}v_{rk}^{-})|\},$$

$$\{\sup_{\alpha\in[0,1]} |Z^{\frac{1}{2}}(^{\alpha}w_{\ell k}^{+}) - Z^{\frac{1}{2}}(^{\alpha}v_{\ell k}^{+})|, |Z^{\frac{1}{2}}(^{\alpha}w_{rk}^{+}) - Z^{\frac{1}{2}}(^{\alpha}v_{rk}^{+})|\}$$

$$= D_{Z^{\frac{1}{2}}}(u,w) + D_{Z^{\frac{1}{2}}}(w,v)$$

$$\Rightarrow D_{Z^{\frac{1}{2}}}(u,v) \leq D_{Z^{\frac{1}{2}}}(u,w) + D_{Z^{\frac{1}{2}}}(w,v)$$

dır. Böylece metrik şartları sağlanmış olur.

Varsayalım ki $(u_k{}^i) = (u_0{}^i, u_1{}^i, u_2{}^i, ...)$ herbir $i \in \mathbb{N}$ için $\ell_\infty(E^2, Z^{\frac{1}{2}})$ de bir Cauchy dizisi olsun. O halde $\forall\epsilon > 0$ için en az bir n_0 doğal sayısı vardır öyleki her $i, j > n_0$ için $D_{Z^{\frac{1}{2}}}(u_k{}^i, u_k{}^j) < \epsilon$ dır. Yani

$$D_{Z^{\frac{1}{2}}}(u_k^i, u_k^j) = \sup_k \max\left\{\sup_{\alpha\in[0,1]} d(Z^{\frac{1}{2}}(^{\alpha}u_k^{i-}), Z^{\frac{1}{2}}(^{\alpha}u_k^{j-})),\right. \qquad (3.12)$$

$$\left.\sup_{\alpha\in[0,1]} d(Z^{\frac{1}{2}}(^{\alpha}u_k^{i+}), Z^{\frac{1}{2}}(^{\alpha}u_k^{j+}))\right\} < \epsilon$$

olur. Buradan;

$$d(Z^{\frac{1}{2}}(^{\alpha}u_k^{i-}), Z^{\frac{1}{2}}(^{\alpha}u_k^{j-})) < \epsilon \quad \text{ve} \quad d(Z^{\frac{1}{2}}(^{\alpha}u_k^{i+}), Z^{\frac{1}{2}}(^{\alpha}u_k^{j+})) < \epsilon$$

olduğu görülür. $Z^{\frac{1}{2}}(^{\alpha}u_k^{i-})$ ve $Z^{\frac{1}{2}}(^{\alpha}u_k^{i+})$ dizileri $c(E^1, Z^{\frac{1}{2}})$ de birer Cauchy dizisidir. Lemma 3 den, $c(E^1, Z^{\frac{1}{2}})$ tam metrik uzay olduğundan
$\lim_i Z^{\frac{1}{2}}(^{\alpha}u_k^{i-}) = u_0^-$ ve $\lim_i Z^{\frac{1}{2}}(^{\alpha}u_k^{i+}) = u_0^+$ olacak şekilde u_0^- ve u_0^+ limitleri mevcuttur. Her $i, j \geq n_0$ için

$$\lim_{j\to\infty} D_{Z^{\frac{1}{2}}}(u_k^i, u_k^j) = D_{Z^{\frac{1}{2}}}(u_k^i, \lim_{j\to\infty} u_k^j) = D_{Z^{\frac{1}{2}}}(u_k^i, u_0) < \epsilon$$

olduğundan $\lim_i u_k{}^i = u_0$ dir. Diğer taraftan $u_0 \in \ell_\infty(E^2, Z^{\frac{1}{2}})$ olduğu açıktır.

Kaynakça

[1] Chen, Shi-Jay, Chen, Shyi-Ming, Handling Information Filtering Problems Based on Interval Valued Fuzzy Numbers , Journal of the Chinese Institute of Engineers, 29, No. 1, pp. 83-96, 2006.

[2] Chiao, K., Fundamental Properties of Interval Vector max-norm, Tamsui Oxford Journal of Mathematical Sciences, 18(2), 219-233, 2002.

[3] Diamond, P., Kloeden, P., Metric Spaces of Fuzzy Sets-Theory and Applications, World Scientific, Singapore, 1994.

[4] Dubois, D., Prade, H., Interval Valued Fuzzy Sets , Possibility Theory and Imprecise Probability

[5] Goetschel, R., W. Voxman, W., Elementary Fuzzy Calculus, Fuzzy Sets Syst., 18, 31-43, 1986.

[6] Gorzalczany, B., Aproximate Inference With Interval Valued Fuzzy Sets, Proc. Polish Symp. On İnterval and Fuzzy Math., Poznan, Poland, 89-95, 1983.

[7] Guangquan, Z., Fuzzy Continuous Function and its Properties, Fuzzy Sets Syst., 43, 159-171, 1991.

[8] Guijun, W. and Xiaoping, L., The Applications of Interval Valued Fuzzy Num- bers and Interval-Distribution Numbers, Fuzzy Sets and Systems, 98 (1998), 331-335.

[9] Hong, D.H., Moon, E.L., Kim, J.D., A Note On The Core of Fuzzy Numbers, Fuzzy Sets and Systems, 98, 331-335, 1998.

[10] Kaufmann, A., Gupta, M.M, Introduction to Fuzzy Arithmetic, Van Nostrand Reinhold, New York, 1984.

[11] Klir, G., ve Yuan, B., Fuzzy Sets and Fuzzy Logic, Prentice Hall PTR, New Jersey, 07458.

[12] Li, C., Distance Between Interval-Valued Fuzzy Sets, The 28th North American Fuzzy Information Processing Society Annual Conference, Cincinnati, Ohio, USA, 2009.

[13] Markov, S., Quasilinear Spaces and Their Relation to Vector Spaces, Eletronic Journal on Mathematic of Computation 2-1, 2005.

[14] Matloka, M., Sequence of Fuzzy Numbers, BUSEFAL 28, 28-37, 1986.

[15] Meenakshi, A.R., Kaliraja, M., Regular Interval Valued Fuzzy Matrices, Advanced in Fuzzy Mathematics, 5, 7-15, 2010.

[16] Moore, R.E., Automatic Error Analysis in Digital Computation, LSMD- 48421, Lockheed Missiles And Space Company, 1959.

[17] Nanda, S., On Sequence Spaces of Fuzzy Numbers, Fuzzy Sets and Systems, 33, 123-126, 1989.

[18] O. Kaleva, S. Seikkala, On Fuzzy Metric Spaces, Fuzzy Sets Syst., 12, 215-229, 1984.

[19] Sheng-xian, X., On Interval Valued Fuzzy Numbers

[20] Şengönül, M., Eryılmaz, A., On The Sequence Spaces of Interval Numbers, Thai Journal of Mathematics,

[21] Şengönül, M., The Interval Valued Fuzzy Sequence Spaces , (under comminication).

[22] Şengönül, M., On The Zweier Sequence Spaces of Fuzzy Numbers , (under comminication with Hacettepe Math. and Stat. J.).

[23] Şengönül, M., Zararsız, Z., Some Additions to the Fuzzy Convergent and Fuzzy Bounded Sequence Spaces of Fuzzy Numbers, Hindawi Publishing Corporation Abstract and Applied Analysis Volume 2011, Article ID: 837584, Doi:10.1155/2011/837584.

[24] Talo, Ö., Başar, F., Determination Of The Duals Of Classical Sets Of Sequences of Fuzzy Numbers and Related Matrix Transformations, Computers and Mathematics with Applications, 58, 717-733, 2009.

[25] Turksen, B., Interval Valued Fuzzy Sets Based on Normal Forms, Fuzzy Sets and Systems, 20, 191-210, 1986.

[26] Wang, G., Li, X., The Application to Interval-Valued Fuzzy Numbers and Interval Distribution Numbers, Fuzzy Sets and Systems, 98, 331-335, 1998.

[27] Zadeh, L. A. , Fuzzy Sets , Inf. Control 8, 338-353, 1965.

[28] Interval Talks at the International Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Sytstems IPMU' 2006, Paris, France, July 2-7, 2006.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Zarife ZARARSIZ

Doğum Tarihi : 10 . 04 . 1985

Öğrenim Durumu:

Derece	Bölüm/Program	Üniversite	Yıl
Lisans	Kırşehir Fen Ed. Fak. Matematik Böl.	Gazi Üniv.	2009
Yüksek Lisans	Nevşehir Üniv. Fen Bil. Enst.	Nevşehir Üniv.	2010-

Görevleri:

Görev Ünvanı	Görev Yeri	Yıl
Arş. Görv.	Nevşehir Üniv.	2010-

Eserler:

A. Uluslararası Hakemli Dergilerde Yayınlanan Makaleler :

1-Şengönül, M., Zararsız, Z., *Some Additions to the Fuzzy Convergent and Fuzzy Bounded Sequence Spaces of Fuzzy Numbers*, Abstract and Applied Analysis, doi:10.1155/2011/837584.

B. Ulusal Bilimsel Toplantılarda Sunulan ve Bildiri Kitaplarında Basılan Bildiriler:

1-Şengönül, M., Zararsız, Z., *Some Additions to the Fuzzy Convergent and Fuzzy Bounded Sequence Spaces of Fuzzy Numbers*, Conference on Summability and Applications, İstanbul Ticaret Üniversitesi, Mayıs, 2011.

C-Projelerde Yaptığı Görevler :

Fuzzy Nakano Dizi Uzayları Üzerine, Nevşehir Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projesi, Proje No:2010-2, Araştırmacı, 2009-2011.

D-İdari Görevleri :