T.C.
NEVŞEHİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LAGUERRE OPERATÖRÜNÜN SPEKTRAL ANALİZİ

Tezi Hazırlayan
İbrahim ERDEM

Tezi Yöneten
Yrd. Doç. Dr. Aytekin ERYILMAZ

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Temmuz 2013
NEVŞEHİR

T.C.
NEVŞEHİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LAGUERRE OPERATÖRÜNÜN SPEKTRAL ANALİZİ

Tezi Hazırlayan
İbrahim ERDEM

Tezi Yöneten
Yrd. Doç. Dr. Aytekin ERYILMAZ

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Temmuz 2013
NEVŞEHİR

Yrd.Doç.Dr. Aytekin ERYILMAZ danışmanlığında **İbrahim ERDEM** tarafından hazırlanan **"Laguerre Operatörünün Spektral Analizi"** adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

27.08.2013

JÜRİ:

Başkan : Prof. Dr. Selçuk KERVAN

Üye : Yrd. Doç. Dr. Aytekin ERYILMAZ

Üye : Yrd. Doç. Dr. Yasin YAZLIK

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulunun 09.09.2013 tarih ve 2013/24-01 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

09/09/2013

Doç. Dr. Şahlan ÖZTÜRK
Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın belirlenmesi ve yürütülmesi esnasında ilgi ve desteğini hep gördüğüm Nevşehir Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nün değerli öğretim üyeleri, Doç. Dr. Hacı AKTAŞ'a, Doç. Dr. Mehmet ŞENGÖNÜL'e ve danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Aytekin ERYILMAZ'a teşekkürlerimi sunarım.

ÖZET

LAGUERRE OPERATÖRÜNÜN SPEKTRAL ANALİZİ

İbrahim ERDEM
Nevşehir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü

Yüksek Lisans Tezi, Temmuz 2013

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Aytekin ERYILMAZ

Bu çalışmanın giriş bölümünde Spektral teori ile ilgili bilgiler verilmiştir. Daha sonra spektral analizin temel tanım ve teoremleri verilmiştir. Disipatif operatörün tanımı verilerek, bir disipatif operatör kurmak için gerekli tanım ve teoremler verilmiş ve kısaca diferansiyel operatörü ve diferansiyel denklemlerinden bahsedilmiştir. Laguerre sınır değer problemi ele alınmış ve bu probleme uygun maksimal disipatif operatör oluşturulmuştur. Laguerre sınır değer problemi ve disipatif operatörün özvektörler ve asosye vektörler sistemi incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kendine eş operatör, disipatif operatör, maksimal operatör, Laguerre diferansiyel operatörü.

ABSTRACT

SPECTRAL PROPERTIES OF THE LAGUERRE DIFFERENTIAL OPERATOR

İbrahim ERDEM
Nevşehir University, Graduate School of Natural and Applied Sciences
M.Sc. Thesis, July 2013
Thesis Supervisor: Assist. Prof. Dr. Aytekin ERYILMAZ

Introduction of in this study, it is given information related to Spectral Theory. Then some basic definitions and main theorems of spectral analysis are given. In addition essential definitions and theorems of a dissipative operator are given to construct dissipative operator. Differential operator and differential equations are investigated. At the end, Laguerre boundary value problem is studied and maximal dissipative operator is constructed. Furthermore eigenvectors and associated vectors of the dissipative operator and Laguerre boundary value problem are investigated.

Keywords: Selfadjoint operator, dissipative operator, maximal operator, Laguerre operator.

İÇİNDEKİLER

KISALTMA ve SİMGELER

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\overline{z}$	: z karmaşık sayısının eşleniği
$D(A)$	: A operatörünün tanım kümesi
$\overline{D(A)}$	: $D(A)$ kümesinin kapanışı
$R(A)$	: A operatörünün değer kümesi
A^*	: A operatörünün eş (adjoint) operatörü
$W_n(U,V)$	: U ile V çözümlerinin wronskiyeni
$\ell(y)$	: Diferansiyel ifade
L	: Maksimal operatör
L_0	: Minimal simetrik operatör
$def\, L_0$	: L_0 operatörünün defekt sayısı
A_h	: Maksimal disipatif operatör
$\widetilde{A}$	: A operatörünün genişlemesi
$\mathrm{Im}\,\lambda$	: λ karmaşık sayısının sanal (imajiner) kısmı
R_λ	: $(A-\lambda I)$ operatörünün değer kümesi
$\mathcal{N}_\lambda$	: A operatörünün defekt uzayı
$\dim \mathcal{N}_\lambda$	: A operatörünün defekt uzayının boyutu
H	: Hilbert uzayı
$\lVert A \rVert$	: A sınırlı operatörünün normu
$\lVert x \rVert$	: x vektörünün normu
$\forall$	: Evrensel niceleyici
$\oplus$	: Direkt toplam

1. BÖLÜM

GİRİŞ

Doğada gerçekleşen fiziksel olayların incelenmesi, fizik alanında bilimsel gelişmelere yol açmıştır. Fizik alanındaki bu bilimsel çalışmalar matematik biliminin gelişmesinde büyük ölçüde etkili olmuştur. Matematiksel fiziğin ve mühendisliğin pek çok problemi diferansiyel denklemlerden oluşan sınır değer problemleri içermektedir. İlk defa 1836 yılında Charles Sturm ve Joseph Liouville tarafından ortaya konulan, literatürde Sturm-Liouville problemi olarak adlandırılan sınır değer problemi de bu problemlerden birisidir. Başlangıçta ısı iletimi problemlerine uygulanan Sturm-Liouville teorisi günümüzde bir çok fiziksel problemin araştırılmasında en etkin yöntemlerden biri olarak bilinmektedir. Genellikle kısmî türevli denklemlerde değişkenlerin ayrılması yöntemi kullanıldıktan sonra Sturm-Liouville denklemleri ile bağlantılı sınır değer problemleri ortaya çıkmıştır.

Sınır şartlarında spektral parametre bulunduran problemler matematiksel fizik ve mekanik problemlerin çözümünde ortaya çıkmıştır. İlk olarak Poisson bir mekanik probleminin sınır şartlarında spektral parametre bulunduran sınır değer problemine indirgemiştir. Bundan sonra bu problemi Walter, Fulton, Russakovskii, Hinton, Shkalikov yapmış oldukları çalışmalarda incelemişlerdir [17]. Atkinson, λ parametresinin hem aralığın uç noktalarında verilmesi hem de aralığın içindeki süreksizlik noktalarında verilmesi durumunu incelemiştir [17]. Ayrıca Altınışık, benzer durumu doktora tezi olarak çalışmıştır [14]. Kendine eş olmayan operatörlerin spektral analizini, Allahverdiev [2], Ongun [14], Toyganözü [17] yapmıştır.

Sturm-Liouville problemlerinin yanında Laguerre polinomları oldukça sık kullanılır. Ortogonal polinomların uygulama alanı ise matematiksel fizik, mühendislik ve bilgisayar bilimleri olup, matematiğin de aktif bir araştırma alanıdır. Bu alandaki problemlerin matematiksel modelleri genellikle diferansiyel denklemler veya integral denklemler olur. Bu tip denklemlerden bazıları elemanter metodlarla çözülebilir; fakat çoğunun tam çözümünün bulunması ya çok zordur ya da mümkün değildir. O zaman seri çözümlerine başvurulur. Bunlardan birisi Laguerre diferansiyel denklemlerinin çözümleri olan Laguerre polinomlarına dayalı serilerdir. Bu serilerle ilgili ilk çalışmaları Edmond Laguerre yapmıştır. Laguerre, yaklaşım metodları üzerine çalışmıştır. En çok Laguerre diferansiyel denklemlerinin çözümü olan özel fonksiyonlu Laguerre polinomlarıyla anılır. Bu çalışma, integralin x'ten sonsuza kadar olduğu yerleri araştıran 1879 yayımlanan çalışmasıyla ortaya çıktı [16].

Laguerre polinomlarıyla ilgili, Franzo ve Falquez, sayısal çözüm yaklaşımı ve sonsuzda koşulların davranışı için kullanılan spektral yöntemleri incelemişlerdir. Bunlar özellikle tau spektral ve pseudo-spektral yaklaşımlarıdır. Coulaud ise Laguerre polinomlarını kullanan bir diğer yaklaşım olan Laguerre spektral yaklaşımını incelemiştir [16].

2. BÖLÜM

ÖN BİLGİLER

Tanım 2.1 : $V \neq \emptyset$ herhangi bir küme ve K herhangi bir cisim olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa V 'ye K üzerinde lineer uzay (vektör uzayı) denir.

a) $(V, +)$ cebirsel yapısı değişmeli bir gruptur. Yani,

1. $\forall x, y \in V$ için $x + y \in V$ 'dir.
2. $\forall x, y, z \in V$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$ 'dir.
3. $\forall x \in V$ için $x + 0 = 0 + x = x \in V$ olacak şekilde bir tek $0 \in V$ vardır.
4. $\forall x \in V$ için $x + (-x) = (-x) + x = 0$ olacak şekilde bir tek $-x \in V$ vardır.
5. $\forall x, y \in V$ için $x + y = y + x$ 'dir.

b) $x, y \in V$ ve $\alpha, \beta \in K$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır.

1. $\alpha x \in V$ 'dir.
2. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ 'dir.
3. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ 'dir.
4. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ 'dir.
5. $\forall x \in V$ için $1V = V$ olacak şekilde $1 \in K$ vardır. Burada 1, K cisminin birim elemanıdır.

$K = \mathbb{R}$ olması halinde V 'ye reel lineer uzay, $K = \mathbb{C}$ olması halinde V 'ye kompleks lineer uzay denir [4].

Tanım 2.2 : Lineer uzaylarda tanımlı dönüşümlere operatör denir [13].

Tanım 2.3 : $K = \mathbb{R}$ veya $K = \mathbb{C}$ olmak üzere X bir lineer uzay olsun.

$$(.,.): X\text{x}X \to K \tag{2.1}$$

dönüşümü aşağıdaki özellikleri sağlar ise $(.,.)$ 'ye X üzerinde bir iç çarpım, $(X,(.,.))$ ikilisine de iç çarpım uzayı (veya ön Hilbert uzayı) denir [13].

i. $\forall x \in X$ için $(x,x) \geq 0$ ve $(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
ii. $\forall x, y \in X$ için $(x,y) = \overline{(y,x)}$
iii. $\forall x, y \in X$ ve $\alpha \in K$ için $(\alpha x, y) = \alpha(x,y)$
iv. $\forall x, y, z \in X$ için $(x+y,z) = (x,z) + (y,z)$

Tanım 2.4 : $(X,(.,.))$ bir iç çarpım uzayı ve $x \in X$ olsun. x vektörünün normu,

$$\|x\| = (x,x)^{1/2} = \left(\sum_{j=i}^{\infty}\left|\varepsilon_j\right|^2\right)^{1/2} \tag{2.2}$$

olarak tanımlanır. Bu norma göre $(X,(.,.))$ iç çarpım uzayı bir normlu vektör uzayı olur [11, 13].

Tanım 2.5 : Bir $(X,(.,.))$ iç çarpım uzayı,

$$\|x\| = (x,x)^{1/2} \tag{2.3}$$

normuna göre tam ise, yani $(X,(.,.))$ içindeki her Cauchy dizisi X in bir x_0 noktasına yakınsak ise, bu iç çarpım uzayına Hilbert uzayı denir [13].

Tanım 2.6 : H Hilbert uzayının her hangi bir $D \subseteq H$ lineer alt uzayı ve bir L operatörü için,

$$L: D \subseteq H \to H \tag{2.4}$$

dönüşümü verilsin. Eğer her $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ ve her $x_1, x_2 \in D$ için,

$$L(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 L x_1 + \alpha_2 L x_2 \tag{2.5}$$

eşitliği sağlanıyorsa L dönüşümüne lineer operatör, D'ye ise L operatörünün tanım bölgesi denir ve $D(L)$ ile gösterilir. L operatörünün değer kümesi de $Im(L)$ veya $R(L)$ ile gösterilir [13].

Tanım 2.7 : $K = \mathbb{R}$ veya $K = \mathbb{C}$ olmak üzere X, K üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$$f: X \to K \tag{2.6}$$

operatörüne fonksiyonel denir. Eğer f lineer ise f 'ye lineer fonksiyonel denir [13].

Tanım 2.8 : Lineer fonksiyoneller, lineer operatör olarak sınırlı ise yani,

$$|f(x)| \leq c\|x\| \tag{2.7}$$

olacak şekilde $c \geq 0$ reel sayısı varsa f ye sınırlı lineer fonksiyonel denir [13].

Tanım 2.9 : H Hilbert uzayında tanımlanan bir lineer A operatörü için, $\forall x \in H$ olmak üzere,

$$\|Ax\| \leq c\|x\| \tag{2.8}$$

olacak şekilde bir c sayısı varsa A 'ya sınırlı operatör denir. Bu c sayılarının en küçüğüne A sınırlı operatörünün normu denir ve $\|A\|$ ile gösterilir.

$$\|A\| = \sup_{\|x\|<1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \tag{2.9}$$

eşitliği yardımı ile A sınırlı operatörünün normu hesaplanır [13].

Teorem 2.10 : Sınırlı her lineer A operatörü süreklidir [13].

Tanım 2.11 : $\forall x \in H$ için $(Ax, x) \geq 0$ ise A 'ya pozitif lineer operatör denir [13].

Tanım 2.12 : $A, D(A)$ tanım bölgesinde sınırlı lineer bir operatör olmak üzere,

$$Ay = \lambda y \tag{2.10}$$

eşitliğini sağlayan $y \neq 0$ vektörü mevcut ise, λ sayısına A operatörünün özdeğeri, y vektörüne ise özvektörü denir.

Tanım 2.13 : H Hilbert uzayı ve $A,\ H$'de bir operatör olmak üzere A'nın tanım kümesi $D(A),\ H$ kompleks Hilbert uzayında yoğun, yani $\overline{D(A)} = H$ olsun. $f \in D(A)$ için,

$$(Af, g) = (f, A^* g) \tag{2.11}$$

eşitliğini sağlayan A^* operatörüne A'nın adjoint operatörü denir. Bu eşitliği sağlayan $g \in H$ vektörler kümesine A^* 'ın tanım kümesi denir ve $D(A^*)$ ile gösterilir [13].

Tanım 2.13'ten aşağıdaki özellikler elde edilir.

i) $(A^*)^* = A$

ii) $(A+B)^* = A^* + B^*$

iii) $(AB)^* = B^* A^*$

iv) $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*\ ,\ \lambda \in K$

v) $\|A^*\| = \|A\|$, (A sınırlı ise) (2.12)

Tanım 2.14 : Eğer $A = A^*$ ise A operatörüne self adjoint (kendine eş) operatör denir [11].

Tanım 2.15 : $A: D(A) \to H$ lineer bir operatör ve $\overline{D(A)} = H$ yani$D(A)$, H 'de yoğun olmak üzere her $f, g \in D(A)$ için,

$$(Af, g) = (f, Ag) \tag{2.13}$$

ise, $A \subset A^*$ ise A'ya simetrik operatör denir. Adjoint operatör kapalı olduğundan $A \subset A^*$ bağıntısı simetrik operatörü kapanabilir olduğunu ifade eder [13].

Tanım 2.16 : $f \in D(A)$ için $\tilde{A}f = Af$ ve $D(\tilde{A}) \supset D(A)$ ise $\tilde{A}$ operatörüne A operatörünün genişlemesi denir. A'ya ise $\tilde{A}$ operatörünün kısıtlaması denir [13].

Tanım 2.17 : A, H Hilbert uzayında simetrik bir operatör, λ keyfi bir kompleks sayı, R_λ ve $R_{\bar{\lambda}}$ sırasıyla, $(A - \lambda I)$ ve $(A - \bar{\lambda} I)$ operatörlerinin değer kümesi olmak üzere,

$$\mathcal{N}_\lambda = \mathcal{H} \Theta R_\lambda \tag{2.14}$$

$$\mathcal{N}_{\bar{\lambda}} = \mathcal{H} \Theta R_{\bar{\lambda}} \tag{2.15}$$

uzaylarına A operatörünün defekt uzayları denir [13].

Lemma 2.18 : Bir A operatörünün maksimal simetrik olması için gerekli ve yeterli koşul A operatörünün diğer simetrik genişlemelerinin bulunmamasıdır [13].

Lemma 2.19 : Her self adjoint (kendine eş) A operatörü maksimal simetrik operatördür fakat tersi doğru değildir [13].

Tanım 2.20 : $Im\lambda > 0$ ve

$$m = \dim \mathcal{N}_{\lambda} \tag{2.16}$$

$$n = \dim \mathcal{N}_{\bar{\lambda}} \tag{2.17}$$

olmak üzere, (m, n) ikilisine A operatörünün indis defekti adı verilir [13].

Lemma 2.21 : Bir kapalı simetrik operatörünün kendine eş (self-adjoint) olması için gerek ve yeter koşul bu operatörün indis defektinin (0,0) olmasıdır [13].

Tanım 2.22 : A lineer operatörünün $D(A)$ tanım kümesi H Hilbert uzayında yoğun olmak üzere her $f \in D(A)$ için,

$$Im(Af, f) \geq 0 \tag{2.18}$$

ise, A operatörüne disipatif operatör denir. Her $f \in D(A)$ için,

$$Im(Af, f) \leq 0 \tag{2.19}$$

ise, A operatörüne akretif operatör denir [12].

Tanım 2.23 : Bir disipatif operatörün diğer disipatif genişlemeleri yoksa maksimal disipatif adını alır [9, 12].

3. BÖLÜM

STURM-LİOUVİLLE DİFERANSİYEL DENKLEMİ

3.1. Genel Sınır Değer Problemleri

Sınır şartları ile birlikte ikinci mertebeden değişken katsayılı homojen ve lineer bir diferansiyel denklem genel olarak,

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0, \tag{3.1}$$

$$y(a)cos\alpha + y'(a)sin\alpha = 0, \tag{3.2}$$

$$y(b)cos\beta + y'(b)sin\beta = 0 \tag{3.3}$$

şeklindedir. Yukarıdaki problemde (3.2)-(3.3) koşullarına ikinci mertebeden diferansiyel denklem için sınır koşulları; (3.1) denkleminin (3.2)-(3.3) koşullarını sağlayan çözümünün bulunmasına ise bahsedilen denklem için sınır değer problemi denir. Burada $a_0(x) \neq 0$ ve $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$ fonksiyonları $a \leq x \leq b$ aralığında sürekli fonksiyonlardır ve $cos\alpha, sin\alpha, cos\beta, sin\beta \in \mathbb{R}$ dir. Fakat bunlardan $cos\alpha$ ve $sin\alpha$ veya $cos\beta$ ve $sin\beta$ sayılarının aynı anda sıfır olması mümkün değildir. Çünkü bu durumda (3.1) denkleminin $y(x) = 0$ şeklinde bir çözümü mevcut olup, buradaki amaç eğer varsa sıfırdan farklı bir çözüm (aşikar olmayan çözüm) bulmaktır. Şimdi (3.1) denklemini aşağıdaki şekilde göz önüne alalım. $a_0(x), a_1(x), a_2(x)$ fonksiyonları periyodik olmak üzere

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0,$$

$$y(a) = y(b),$$

$$y'(a) = y'(b)$$

olsun. Bu şekildeki probleme; kısaca periyodik problem denir. $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ fonksiyonları (3.1)-(3.3) probleminin lineer bağımsız iki çözümü olmak üzere böyle bir sistemin genel çözümü

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

şeklindedir. Burada c_1 ve c_2 keyfi sabitlerdir.

3.2. Sturm-Liouville Problemi

Sınır değer problemleri arasında Sturm-Liouville probleminin önemli bir yeri vardır. Genel olarak sınır değer problemi denildiği zaman akla ilk gelen, Sturm-Liouville problemidir. Şimdi (3.1) denklemine benzer olarak

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + [\lambda + a_3(x)]y = 0 \tag{3.4}$$

denklemi gözönüne alınsın. Denklemin iki tarafı $a_0(x) \neq 0$ ile bölünürse,

$$y'' + \frac{a_1(x)}{a_0(x)}y' + \frac{\lambda}{a_0(x)}y + \frac{a_3(x)}{a_0(x)}y = 0$$

olur. Eğer $p(x) = e^{\int \frac{a_1}{a_0}dx}$ olarak seçilip denklemin iki tarafı $p(x)$ ile çarpılırsa

$$p(x)y'' + p(x)\frac{a_1(x)}{a_0(x)}y' + \frac{\lambda}{a_0(x)}p(x)y + p(x)\frac{a_3(x)}{a_0(x)}y = 0 \tag{3.5}$$

elde edilir. Böylece (3.4) denklemi,

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] + q(x)y + \lambda r(x)y = 0$$

olur. Burada $q(x) = p(x)\frac{a_3(x)}{a_0(x)}$, $r(x) = \frac{p(x)}{a_0(x)}$ şeklindedir. Bu denklemdeki p, q ve r fonksiyonları kapalı $[a, b]$ aralığında her x için reel değerli, sürekli ve türevlenebilir fonksiyonlardır. Ayrıca λ, x ten bağımsız ve $[a,b]$ aralığında $p,r \geq 0$ dır. Şimdi (3.2) ve (3.3) sınır şartları göz önüne alınsın. (3.2) denkleminin iki tarafı $sin\alpha \neq 0$ ve (3.3) denkleminin iki tarafı $sin\beta \neq 0$ ile bölünürse

$$y'(a) + \frac{cos\alpha}{sin\alpha} y(a) = 0$$

ve

$$y'(b) + \frac{cos\beta}{sin\beta} y(b) = 0$$

olur.

$\frac{cos\alpha}{sin\alpha} = cot\alpha = H\,, (H \neq 0)$ ve $\frac{cos\beta}{sin\beta} = cot\beta = h\,, (h \neq 0)$

ile gösterilirse, böylece

$$\frac{d}{dx}[p(x)y'] + [q(x) + \lambda r(x)]y = 0, \tag{3.6}$$

$$y'(a) + Hy(a) = 0, \tag{3.7}$$

$$y'(b) + hy(b) = 0 \tag{3.8}$$

sistemi elde edilir ki böyle bir sisteme Sturm-Liouville problemi denir [3, 5, 10, 15]. Eğer

$$L = \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right] + q(x)$$

olarak alınırsa bu şekildeki L operatörü self-adjointtir. Eğer $p(x)$ ve $r(x)$ fonksiyonları $[a,b]$ aralığında pozitif ise Sturm-Liouville denklemine $[a,b]$ aralığında regülerdir denir. Eğer aralık yarı sonsuz, sonsuz veya $p(x)$ ile $r(x)$ ten biri aralığın bir veya her iki ucunda sıfır ise Sturm-Liouville denklemine singülerdir denir. Bundan sonraki incelemelerde göz önüne alınacak problemler singüler olacaktır.

Örnek 3.2.1

$$y'' + \lambda y = 0 \tag{3.9}$$
$$y(0) = 0\,, y(\pi) = 0 \tag{3.10}$$

şeklindeki sınır değer problemi göz önüne alınsın. Bu şekildeki bir denklemin çözümü λ nın alacağı değerlere göre değişir:

(i) λ=0 durumunda (3.9) denklemi

$$y'' = 0$$

şekline indirgenir ve genel çözümü

$$y = c_1 + c_2 x \tag{3.11}$$

olur. Şimdi (3.10) şartları (3.11) de yerine yazılırsa.

$$y(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

ve

$$y(\pi) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2\pi \text{ ya da } c_2\pi = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

olur. Böylece (3.11) çözümünün (3.10) şartlarını sağlaması için $c_1 = 0$ ve $c_2 = 0$ olması gerekir. Bu ise $y = 0$ demektir. Bu da demek oluyor ki; $\lambda = 0$ iken verilen denklemin tek çözümü $y = 0$ aşikar çözümüdür.

(ii) $\lambda < 0$ durumunda (3.9) denkleminin karakteristik denklemi $m^2 + \lambda$ ve kökleri $\pm\sqrt{-\lambda}$ dır. $\lambda < 0$ olduğunda bu kökler pozitif olduklarından $\alpha = \sqrt{-\lambda}$ denilerek (3.9) denkleminin çözümünü

$$y = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{-\alpha x} \tag{3.12}$$

olduğu görülür. (3.10) şartlarını (3.12) a uygularsak,

$$y(0) = 0 \Rightarrow c_1e^0 + c_2e^0 = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0 \tag{3.13}$$
$$y(\pi) = 0 \Rightarrow c_1e^{\alpha\pi} + c_2e^{-\alpha\pi} = 0 \Rightarrow c_1e^{\alpha\pi} + c_2e^{-\alpha\pi} = 0 \tag{3.14}$$

elde ederiz. Bu nedenle c_1 ve c_2 nin (3.13) ve (3.14) sağlanacak şekilde belirlenmesi gerekir. Yani (3.12) deki fonksiyonun (3.9) denkleminin bir çözümü olması için c_1 ve c_2 nin

$$\begin{aligned} &c_1 + c_2 = 0 \\ &c_1e^{\alpha\pi} + c_2e^{-\alpha\pi} = 0 \end{aligned} \tag{3.15}$$

denklem sistemini sağlaması gerekir. $c_1 = 0$ ve $c_2 = 0$ ın bu sistemin bir çözümü olduğu açıkça görülür. Ancak, bu durumda $y = 0$ sıfır çözümü bulunur ki bu sonucun bir faydası yoktur. Bu nedenle (3.13) ve (3.14) i sağlayan sıfırdan farklı c_1 ve c_2 değerlerinin bulunması gerekiyor. Lineer cebirden hatırlanacağı gibi (3.15) denklem sisteminin sıfırdan farklı bir çözümünün olması için katsayılar determinantının sıfır olması gerekir. Yani,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\alpha\pi} & e^{-\alpha\pi} \end{vmatrix} = 0$$

olması gerekir. Bu ise $e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi} = 0$ yani $\alpha = 0$ olmasını gerektirir. $\alpha = \sqrt{-\lambda}$ olduğundan $\lambda = 0$ olması gerekiyor. Halbuki $\lambda = 0$ durumunda sadece $y = 0$ çözümü bulunabilmişti. O halde $\lambda < 0$ ise (3.9) denkleminin sıfırdan farklı bir çözümü yoktur.

(iii) $\lambda > 0$ durumunda (3.9) denkleminin karakteristik denkleminin kökleri olan $\pm\sqrt{-\lambda}$ değerleri birbirine eşlenik $\pm i\sqrt{-\lambda}$ şeklinde sayılar olduklarından bu durumda (3.9) denkleminin genel çözümü

$$y = c_1sin\sqrt{\lambda}x + c_2cos\sqrt{\lambda}x \tag{3.16}$$

şeklindedir. (3.10) şartları bu (3.16) çözümüne uygulanırsa,

$$y(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$
$$y(\pi) = 0 \Rightarrow c_1 sin\sqrt{\lambda}\pi + c_2 cos\sqrt{\lambda}\pi = 0$$

bulunur. Fakat $c_2 = 0$ olduğundan,

$$c_1 sin\sqrt{\lambda}\pi = 0$$

olur. Bu durumda ya $c_1 = 0$ ya da $sin\sqrt{\lambda}\pi = 0$ dır. $c_1 = 0$ durumunda $y = 0$ sıfır çözümü bulunur. Bunun da bir faydası yoktur. O halde

$$sin\sqrt{\lambda}\pi = 0 \tag{3.17}$$

dır. $k = 0$ için $sink\pi = 0 \Leftrightarrow k,\ \ n = 1,2,3, ...$ gibi bir pozitif tam sayıdır. Bu nedenle (3.17) nin sağlanması için $\sqrt{\lambda} = n\,,\ \ n = 1,2,3, ...$ olması gerekir. Bir başka ifadeyle

$$\lambda = n^2,\ \ n = 1,2,3, ... \tag{3.18}$$

olması gerekir. Kısaca özetlersek; $\lambda \leq 0$ ise (3.9) ve (3.10) den oluşan Sturm-Liouville probleminin sıfırdan farklı bir çözümü yoktur. $\lambda > 0$ ise sadece λ nın (3.18) deki değerleri için sıfırdan farklı çözüm vardır. Gerçekten $\lambda > 0$ durumunda (3.16) dan $\lambda = n^2,\ \ (n = 1,2,3, ...)$ ‘e karşılık

$$y = c_n sinnx \qquad (n = 1,2,3, ...)$$

çözümü elde edilir. Burada c_n ler keyfi sabit sayılardır.

3.3. Özdeğerler ve Özfonksiyonlar

Yukarıdaki örnekte de görüldüğü üzere bir Sturm-Lioville probleminin aşikar olmayan yani sıfırdan farklı bir çözümünün olması, diferansiyel denklemdeki λ parametresine bağlıdır.

Tanım 3.3.1 : (3.6) diferansiyel denklemi ve (3.7) ve (3.8) şartlarından oluşan Sturm-Liouville probleminin sıfırdan farklı yani aşikar olmayan çözümleri olacak şekilde denklemdeki λ lara karşılık gelen sıfırdan farklı çözümlere de problemin özfonksiyonları denir.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0 \tag{3.19}$$

$$y(0) = 0\ ,\ y(\pi) = 0 \tag{3.20}$$

Sturm-Liouville problemini ele alalım. Tanım (3.3.1) e göre bu problemin özdeğerleri

$$\lambda = n^2 \qquad (n = 1,2,3,\dots)$$

ve problemin bu özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonları da

$$y = c_n sinnx \qquad (n = 1,2,3,\dots)$$

dır. Burada c_n ler keyfi sabit sayılardır.

Örnek 3.3.1. $\lambda \geq 0$ olmak üzere

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) + \frac{\lambda}{x}y = 0 \tag{3.21}$$

$$y'(1) = 0,\ y'(e^{2\pi}) = 0 \tag{3.22}$$

Sturm-Liouville probleminin λ özdeğerlerini ve özvektörlerini bulunuz.

Çözüm:

Burada;

$$a = 0,\ b = e^{2\pi},\ A_1 = 0,\ A_2 = 1; \quad B_1 = 1,\ B_2 = 0$$

$\lambda = 0$ ve $\lambda > 0$ durumları ayrı ayrı göz önüne alınsın; $\lambda = 0$ ise (3.21) diferansiyel denklemi

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

şekline indirgenir. Bu denklemin genel çözümü

$$y = c_1 ln|x| + c_2$$

dir. Burada c_1 ve c_2 keyfi sabitlerdir. (3.22) şartları bulunan bu çözüme uygulanırsa

$$y'(1) = 0 \Rightarrow c_1\frac{1}{1} = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$
$$y'(e^{2\pi}) = 0 \Rightarrow c_1\frac{1}{e^{2\pi}} = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

bulunur. Fakat (3.22) şartları c_2 üzerinde herhangi bir kısıtlama getirmiyor. Bu yüzden $\lambda = 0$ için $y = c_2$ çözümü elde edilir. Yani $c_2 \neq 0$ olmak suretiyle $\lambda = 0$, problemin bir özdeğeri olur. Buna karşılık gelen özfonksiyonlar ise $y = c_2$ olur.

$\lambda > 0$ ise $x \neq 0$ için verilen denklem bir Cauchy-Euler denklemi olan

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + \lambda y = 0 \tag{3.23}$$

denklemine indirgenir. Burada $x = e^t$ dönüşümü yapılarak

$$y(x) = y(e^t) = Y(t)$$
$$y'(x) = Y'(t)\frac{dt}{dx} = y'(t)\frac{1}{x} \Rightarrow xy' = Y'$$
$$y''(x) = Y''(t)\frac{1}{x^2} - Y'(t)\frac{1}{x^2} \Rightarrow x^2y'' = Y'' - Y'$$

değerleri bulunur. Bu değerler (3.23) de yerlerine yazılırsa

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \lambda Y = 0 \tag{3.24}$$

bulunur. $\lambda > 0$ olduğundan (3.24) denkleminin genel çözümü

$$Y = c_1 sin\sqrt{\lambda}t + c_2 sin\sqrt{\lambda}t$$

dir. Bu nedenle $\lambda > 0$ ve $x \neq 0$ için (3.24) denkleminin genel çözümü

$$Y = c_1 \sin\left(\sqrt{\lambda} lnx\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\lambda} lnx\right) \tag{3.25}$$

dir. Şimdi (3.22) şartlarını (3.25) deki fonksiyona uygulayalım

$$Y'(x) = c_1 \frac{\sqrt{\lambda}}{x} cos\left(\sqrt{\lambda} lnx\right) - c_2 \frac{\sqrt{\lambda}}{x} \sin\left(\sqrt{\lambda} lnx\right)$$

olduğundan

$$Y'(1) = 0 \Rightarrow c_1 \frac{\sqrt{\lambda}}{1} \cos\left(\sqrt{\lambda}.0\right) - c_2 \frac{\sqrt{\lambda}}{1} sin\left(\sqrt{\lambda}.0\right)$$

dan $c_2\sqrt{\lambda} = 0$ bulunur. Ancak $\lambda \neq 0, \lambda > 0$ olduğundan $c_1 = 0$ bulunur. Benzer şekilde

$$y'(e^{2\pi}) = 0 \Rightarrow c_1\sqrt{\lambda}e^{-2\pi} \cos\left(2\pi\sqrt{\lambda}\right) - c_2\sqrt{\lambda}e^{-2\pi} \sin\left(2\pi\sqrt{\lambda}\right) = 0$$
$$\Rightarrow c_1 \cos\left(2\pi\sqrt{\lambda}\right) - c_2 \sin\left(2\pi\sqrt{\lambda}\right) = 0 \qquad (e^{-2\pi} \neq 0, \lambda \neq 0)$$

Fakat önceden $c_1 = 0$ bulunduğundan

$$c_2 \sin\left(2\pi\sqrt{\lambda}\right) = 0$$

olması gerekir. Bu ise sadece $n = 1,2,3, \ldots$ olmak üzere $2\sqrt{\lambda} = n$ ya da $\lambda = \frac{n^2}{4}$ olması durumunda mümkündür. λ nın bu değerlerine karşılık $x \neq 0$ için c_n keyfi sabit sayılar olmak üzere

$$y = c_n cos\left(\frac{nlnx}{2}\right) \qquad (n = 1,2,3, \dots)$$

sıfırdan farklı çözümler bulunur. O halde verilen problemin özdeğerleri

$$\lambda = 0, \frac{1}{4}, 1, \frac{9}{4}, 4, \frac{25}{4}, \dots, \frac{n^2}{4}, \dots$$

ve bunlara karşılık gelen özfonksiyonları da, c_i ler keyfi sabit sayılar olmak üzere

$$c_0, c_1 cos\left(\frac{lnx}{2}\right), c_2 cos(lnx), c_3 cos\left(\frac{3lnx}{2}\right), \dots,$$

dır. Son iki örnekten elde edilen bazı gözlemler aşağıda verilmiştir:

(i) Örnek (3.4) ve örnek (3.19) Sturm-Liouville problemlerinin her biri için sonsuz sayıda özdeğerler elde edildi. Yine bu iki örnekteki her iki problemin özdeğerlerinin sonsuz kümesini $\lambda_n \to \infty, n \to \infty$ için olmak üzere

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots$$

biçiminde monoton artan bir dizi olarak ifade edilebilir. Örneğin; örnek (3.4) deki problemin özdeğerleri

$$1 < 4 < 9 < 16 < \cdots \quad ; \quad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$$

biçiminde sıralanabilir.

(ii) Her iki örnekteki problemlerin özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonların tek parametreli bir ailesi mevcuttur ve aynı özdeğere karşılık gelen iki özfonksiyon sadece bir diğerinin sabit çarpımıdır (Yani $F_1 = dF_2$; d sabit). Mesela, örnek (3.4) de $\lambda = n^2$ özdeğerlerine karşılık gelen tek parametreli özfonksiyonlar ailesi $c_n \neq 0$ parametre olmak üzere $c_n sinnx$ dir.

Acaba bu son örneklerde gözlenen sonuçlar herhangi bir Sturm-Liouville probleminde geçerli olur mu? Bu sorunun cevabı da aşağıdaki teoremde verilebilir.

Teorem 3.3.1.

(i) p, q ve r; $a \leq x \leq b$ reel aralığındaki her x için p nin türevi sürekli; $p(x) > 0$, $r(x) > 0$ ve q ile r sürekli olacak şekilde reel fonksiyonlar, ayrıca λ, x ten bağımsız bir parametre olmak üzere

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dy}{dx}\right] + [q(x) + \lambda r(x)]y = 0 \tag{3.26}$$

diferansiyel denklemi ve

(ii) A_1, A_2, B_1 ve B_2, A_1 ve A_2 nin her ikisi ve aynı anda sıfır olmayan ve B_1 ile B_2 nin her ikisi aynı anda sıfır olmayan sabitler olmak üzere

$$\begin{aligned} &A_1 y(a) + A_2 y'(a) = 0 \\ &B_1 y(b) + B_2 y'(b) = 0 \end{aligned} \tag{3.27}$$

sınır şartları göz önüne alınsın. Bu durumda aşağıdaki sonuçlar sağlanır;

1. Verilen problemin sonsuz sayıda $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ öz değerleri vardır ve bu λ_n öz değerleri $n \to \infty$ için $\lambda_n \to \infty$ olmak üzere

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots$$

şeklinde monoton artan diziler oluşturulur.

2. Her bir λ_n öz değerine karşılık φ_n öz fonksiyonlarının her biri $a \leq x \leq b$ aralığında tanımlıdır ve aynı öz değere karşılık gelen herhangi iki öz fonksiyon lineer bağımlıdır. Yani $\varphi_i = c\varphi_i \qquad (c \neq 0)$ dır.

3. λ_n $(n = 1,2,3, \dots)$ öz değerine karşılık gelen her bir φ_n öz fonksiyonunun $a < x < b$ açık aralığında $(n - 1)$ tane kökü vardır.

Şimdi tekrar

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0$$
$$y(0) = 0, y(\pi) = 0$$

örneğine geri dönülsün. Bu problemin yukarıdaki teoremin (1) ve (2) sonuçlarını sağladığı daha önce gösterilmişti. Yani $(n = 1,2,3, \dots)$ için $\lambda n = n^2$ sonsuz sayıdaki özdeğerler tarafından

$$1 < 4 < 9 < 16 < \cdots$$

şeklinde monoton artan bir dizi oluşturulur. $\lambda n = n^2$ özdeğerlerine karşılık gelen $c_n sinnx$ özfonksiyonları da tek parametreli bir aile oluşturur. Şimdi (3) sonucu bu örnek üzerinde görülsün. Yani $\lambda n = n^2$ ye karşılık gelen $c_n sinnx$ özfonksiyonunun $0 < x < \pi$ aralığında $n = 1$ tane köke sahip olduğuna bakılsın;
$c_n sinnx$ ve kökleri

$$x_k = \frac{k\pi}{n} \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

dır. Bu köklerden $0 < x < \pi$ açık aralığında kalanlar

$$x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$$

dir. Bunların sayısı ise $n - 1$ tanedir. Yani teoremin (3) üncü sonucu sağlanır.

4. BÖLÜM

SINIR KOŞULLARINDA SPEKTRAL PARAMETRE BULUNDURAN BİR SİNGÜLER NOKTAYA SAHİP LAGUERRE PROBLEMİ

Bu bölümde, $[0,\infty)$ aralığında, sonsuzda disipatif ve spektral parametrenin aralığın sol uç noktasında Weyl limit-çember durumunda araştırılan sınır değer problemine uygun olarak tanımlanan özel Hilbert uzayında, verilmiş sınır değer problemi ile aynı özdeğerlere sahip olan lineer operatör oluşturulmuştur. Daha sonra operatörün spektral özellikleri incelenmiştir.

4.1 Probleme Giriş

$$xy'' + (1-x)y' + \mu y = 0\,,\ \ 0 < x < \infty \tag{4.1}$$

Laguerre diferansiyel denklemi;

$$y'' + \frac{(1-x)}{x}y' + \mu\frac{1}{x}y = 0\,,\ \ 0 < x < \infty \tag{4.2}$$

biçiminde yazılır ve

$$p(x) = e^{\int \rho(x)dx} = e^{\int \frac{(1-x)}{x}dx} = e^{lnx - x} = xe^{-x} \tag{4.3}$$

integrasyon çarpanı ile diferansiyel denklem çarpılırsa ,

$$(xe^{-x}y')' + \mu e^{-x}y = 0\,, \qquad 0 < x < \infty\,. \tag{4.4}$$

Sturm-Liouville tipi diferansiyel denklem ortaya çıkar [7].

$$l(y) := (xe^{-x}y')' + \mu e^{-x}y = 0\,,\ x \in \mathbb{R}_+ := [0,\infty) \tag{4.5}$$

diferansiyel ifadesini ele alalım.

$$l(y) := -\big(p(x)y'(x)\big)' + q(x)y(x),\ \ x \in \mathbb{R}_+ = [0,\infty)$$

diferansiyel ifadesinde l diferansiyel ifadesinden operatöre geçmek istersek;

$$(y,z) = \int_0^\infty y(x)\,\overline{z(x)}dx \tag{4.6}$$

iç çarpımı sağlayan $\int_0^\infty |y(x)|^2\,dx < 0$ şeklindeki bütün kompleks değerli y fonksiyonlarının oluşturduğu $L^2(\mathbb{R}_+)$ Hilbert uzayı kurulmalıdır. (4.5) ifadesiyle gösterilen minimal simetrik operatörün kapanışını L_0 ile gösterelim. D_0, L_0 operatörünün tanım bölgesi olsun. D ile $L^2(\mathbb{R}_+)$ Hilbert uzayındaki öyle y fonksiyonlarının oluşturduğu küme olsun ki, y' lokal mutlak sürekli ve $l(y) \in L^2(\mathbb{R}_+)$ dır. D, maksimal L operatörünün tanım bölgesi olup $L = L_0^*$ dır [13-14, 17].

L_0 simetrik operatörünün defekt sayısı $defL_0 = defL_0^- + defL_0^+ - 2$ formülü ile ifade edilir. $b \in (0,\infty)$ herhangi bir sayı olmak üzere, bu aralık $(0,b)$ ve (b,∞) biçiminde parçalanabilir. L_0 operatörünü oluşturan aynı diferansiyel ifade ile, $(0,b)$ aralığında L_0^- ve (b,∞) aralığında L_0^+ operatörleri oluşturulur. L_0^- ve L_0^+ operatörlerinin defekt sayıları belirlenerek L_0 simetrik operatörünün defekt sayısı hesaplanır. L_0 operatörünün indis defekti (2,2) olduğunu kabul edelim. O halde $defL_0^- = 2$ ve $defL_0 = 2$ olup $defL_0^+ = 2$ olarak hesaplanır. Bu durum Weyl-çember durumudur, $x = \infty$ da sınır koşulları verilir [1-2, 13-14]. Bu sebeple, sıfırda spektral parametre ve sonsuzda disipatif koşul verilmesi durumu incelenecektir.

$$l(y) = 0, \quad x \in \mathbb{R}_+ \tag{4.7}$$

denkleminin

$$v_1(c) = 1,\ v_1'(c) = 0,\ v_2(c) = 1,\ v_2'(c) = 0,\ c \in (0,\infty) \tag{4.8}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümleri $v_1(x)$ ve $v_2(x)$ olsun. $v_1(x)$ ve $v_2(x)$ fonksiyonlarının lineer bağımsız ve Wronskiyenlerinin 1 olduğu açıktır. Yani

$$W[v_1, v_2]_x := (v_1 v_2' - v_1' v_2)\,|_x = W[v_1, v_2]_c = 1,\; x \in \mathbb{R}_+ \tag{4.9}$$

dır. L_0 operatörünün indis defekti (2,2) olduğundan $v_1(x), v_2(x) \in D$ dir.

Her $y, z \in D$ için

$$\int_0^x l(y)\bar{z}dt - \int_0^x y\overline{l(z)}\,dt = W[y, \bar{z}]_x - W[y, \bar{z}]_0 \tag{4.10}$$

Green formülü geçerlidir ve

$$W[y, \bar{z}]_\infty = \lim_{x\to+\infty} W[y, \bar{z}]_x\,,\; W[y, \bar{z}]_0 = \lim_{x\to 0} W[y, \bar{z}]_x \tag{4.11}$$

limitleri var ve sonludur. Burada her $y, z \in D$ için

$$W[y, \bar{z}]_x = W[y, v_1]_x W[\bar{z}, v_2]_x - W[y, v_2]_x W[\bar{z}, v_1]_x,\; x \in \mathbb{R}_+ \tag{4.12}$$

dır.

$(0, \infty)$ aralığında verilen (4.5) diferansiyel ifadesi için, sonsuzda disipatif, sol uç noktada singüler ve spektral parametrenin aralığın sol uç noktasında verilmesi durumunda aşağıdaki sınır değer problemini ele alalım:

$$l(y) = \lambda y, y \in D,\; x \in \mathbb{R}_+ \tag{4.13}$$

$$\alpha_1 W[y, v_1]_0 - \alpha_2 W[y, v_2]_0 = \lambda(\alpha_1' W[y, v_1]_0 - \alpha_2' W[y, v_2]_0) \tag{4.14}$$

$$W[y, v_1]_\infty - hW[y, v_2]_\infty = 0,\; Imh > 0 \tag{4.15}$$

burada λ, kompleks spektral parametre, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1', \alpha_2' \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ ve

$$\alpha = \begin{vmatrix} \alpha_1' & \alpha_1 \\ \alpha_2' & \alpha_2 \end{vmatrix} = \alpha_1'\alpha_2 - \alpha_2'\alpha_1 > 0$$

dır. Aşağıdaki kabulleri yapalım:

$$R_0(y) = \alpha_1 W[y, v_1]_0 - \alpha_2 W[y, v_2]_0$$
$$R_0'(y) = \alpha_1' W[y, v_1]_0 - \alpha_2' W[y, v_2]_0$$
$$B_1^\infty(y) = W[y, v_1]_\infty$$
$$B_2^\infty(y) = W[y, v_2]_\infty$$
$$B_1^0(y) = W[y, v_1]_0$$
$$B_2^0(y) = W[y, v_2]_0$$
$$R_\infty(y) = B_1^\infty(y) - hB_2^\infty(y)$$

Keyfi $y, z \in D$ için $R_0(\bar{z}) = \overline{R_0(z)}, R_0'(\bar{z}) = \overline{R_0'(z)}, B_1^\infty(\bar{z}) = \overline{B_1^\infty(z)}, B_2^\infty(\bar{z}) = \overline{B_2^\infty(z)}$ olmak üzere

$$W[y, \bar{z}]_0 = \frac{1}{\alpha}[R_0(y)\overline{R_0'(z)} - R_0'(y)\overline{R_0(y)}], \tag{4.16}$$

$$W[y, \bar{z}]_\infty = B_1^\infty(y)B_2^\infty(\bar{z}) - B_1^\infty(\bar{z})B_2^\infty(y), \tag{4.17}$$

dir [6, 8, 13-14, 17].

4.2 Verilmiş Sınır Değer Probleminin Hilbert Uzayında Ürettiği Lineer Operatör

$F_1(x) \in L^2(\mathbb{R}_+), F_2 \in \mathbb{C}$ olmak üzere $\hat{F} = \begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2 \end{pmatrix}$ şeklinde iki bileşenli elemanların lineer uzayını $H = L^2(\mathbb{R}_+) \oplus \mathbb{C}$ şeklinde gösterelim. Eğer $\alpha = \begin{vmatrix} \alpha_1' & \alpha_1 \\ \alpha_2' & \alpha_2 \end{vmatrix}$ olmak üzere $\alpha > 0$ kabul edersek,

$$\hat{F} = \begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2 \end{pmatrix}, \hat{G} = \begin{pmatrix} G_1(x) \\ G_2 \end{pmatrix} \in H$$

olmak üzere

$$(\hat{F},\hat{G})_H = \int_0^\infty F_1(x).\overline{G_1(x)}\,dx + \frac{1}{\alpha}F_2\overline{G_2} \tag{4.18}$$

formülü H lineer uzayında bir iç çarpım tanımlar. Bu iç çarpıma göre H lineer uzayı bir Hilbert uzayı olur. Böylece verilmiş sınır değer problemine uygun Hilbert uzayı tanımlanmış oldu. Verilen sınır değer problemine uygun olan

$$A_h : H \to H$$

operatörü,

$$D(A_h) = \left\{\begin{pmatrix} F_1(x) \\ R_0'(F_1)\end{pmatrix} \in H \middle| F_1 \in D, R_1(F_1) = 0, F_2 = R_0'(F_1)\right\} \tag{4.19}$$

$$A_h\hat{F} = \tilde{l}(\hat{F}) = \begin{pmatrix} l(F_1) \\ R_0(F_1)\end{pmatrix} \tag{4.20}$$

şeklinde tanımlansın.

Lemma 4.2.1. $H = L^2(\mathbb{R}_+) \oplus \mathbb{C}$ Hilbert uzayında (4.19) ve (4.20) eşitlikleri ile tanımlı A_h operatörü için

$$\left(A_h\hat{F},\hat{G}\right) - \left(\hat{F},A_h\hat{G}\right) = W[F_1,\overline{G_1}]_\infty - W[F_1,\overline{G_1}]_0 + \frac{1}{\alpha}\left[R_0(F_1)\overline{R_0'(G_1)} - R_0'(F_1)\overline{R_0(G_1)}\right] \tag{4.21}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Tanımlanan iç çarpımdan

$$\left(A_h\hat{F},\hat{G}\right) = \int_0^\infty (-(pF_1')' + qF_1)\overline{G_1}dx + \frac{1}{\alpha}F_2\overline{G_2}$$

$$= -\int_0^\infty (pF_1')'\,\overline{G_1}dx + \int_0^\infty qF_1\overline{G_1}\,dx + \frac{1}{\alpha}F_2\overline{G_2}$$

yazılabilir. Eşitliğin sağ tarafındaki ilk iki integrale iki defa kısmi integrasyon yöntemi uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
\left(A_h\hat{F},\hat{G}\right) &= -(pF_1')\overline{G_1} + F_1\left(\overline{pG_1'}\right)|_0^\infty - \int_0^\infty F_1(\,\overline{pG_1'})'dx + \int_0^\infty qF_1\overline{G_1}dx + \frac{1}{\alpha}F_2\overline{G_2} \\
&= -(pF_1')\overline{G_1} + F_1\left(\overline{pG_1'}\right)|_0^\infty + \int_0^\infty (-(\,pG_1')' + qG_1)\overline{F_1}dx + \frac{1}{\alpha}F_2\overline{G_2} \\
&= -(pF_1')\overline{G_1} + F_1\left(\overline{pG_1'}\right)|_0^\infty + \left(\hat{F},A_h\hat{G}\right) - \frac{1}{\alpha}\overline{F_2}G_2 + \frac{1}{\alpha}F_2\overline{G_2}
\end{aligned}$$

bulunur ve buradan

$$\begin{aligned}
\left(A_h\hat{F},\hat{G}\right) - \left(\hat{F},A_h\hat{G}\right) &= F_1\left(\overline{pG_1'}\right) - (pF_1')\overline{G_1}|_0^\infty + \tfrac{1}{\alpha}[F_2\overline{G_2} - \overline{F_2}G_2] \\
&= W[F_1,\overline{G_1}]_\infty - W[F_1,\overline{G_1}]_0 \\
&\quad + \tfrac{1}{\alpha}\left[R_0(F_1)\overline{R_0'(G_1)} - R_0'(F_1)\overline{R_0(G_1)}\right]
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.1. A_h operatörü H de disipatiftir.

İspat. $y \in D(A_h)$ ve $\overline{D(A_h)} = H$ için (4.16), (4.17) ve (4.21) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
(A_h\hat{y},\hat{y}) - (\hat{y},A_h\hat{y}) &= W[y_1,\overline{y_1}]_\infty - W[y_1,\overline{y_1}]_0 + \tfrac{1}{\alpha}\left[R_0(y_1)\overline{R_0'(y_1)}\right] \\
&\quad - R_0'(y_1)\overline{R_0(y_1)} \\
&= W[y_1,\overline{y_1}]_\infty \\
&= B_1^\infty(y_1)B_2^\infty(\overline{y_1}) - B_1^\infty(\overline{y_1})B_2^\infty(y_1)
\end{aligned}$$

olur ve $R_\infty(y_1) = 0$ iken $B_1^\infty(y_1) = h = B_2^\infty(y_1)$ olduğundan

$$(A_h\hat{y},\hat{y}) - (\hat{y},A_h\hat{y}) = hB_2^\infty(y_1)B_2^\infty(\overline{y_1}) - \bar{h}B_2^\infty(\overline{y_1})B_2^\infty(y_1)$$

$$= (h - \bar{h})B_2^{\infty}(y_1)B_2^{\infty}(\overline{y_1})$$
$$= 2iImh|B_2^{\infty}(y_1)|^2 \quad (4.22)$$

olur. Buradan

$$Im(A_h\hat{y}, \hat{y}) = Imh|B_2^{\infty}(y_1)|^2 \geq 0$$

bulunur. O halde, A_h operatörü H de disipatiftir.

4.3 Problemin Hilbert Uzayında Ürettiği Operatörün Özdeğerleri ve Özvektörleri

$\lambda \in \mathbb{C}$ için (4.13) denkleminin

$$B_1^{\infty}(x_\lambda) = W[x_\lambda, v_1]_\infty = h$$
$$B_2^{\infty}(x_\lambda) = W[x_\lambda, v_2]_\infty = \infty \quad (4.23)$$
$$B_1^{0}(\varphi_\lambda) = W[\varphi_\lambda, v_1]_0 = \alpha_2 - \lambda\alpha_2'$$
$$B_2^{0}(\varphi_\lambda) = W[\varphi_\lambda, v_2]_0 = \alpha_1 - \lambda\alpha_1' \quad (4.24)$$

koşullarını sağlayan çözümleri φ_λ ve x_λ olsun. (4.16) dan $\Delta_0(\lambda)$ ile gösterilen $x = 0$ daki Wronskiyeni,

$$\Delta_0(\lambda) = W[x_\lambda, \varphi_\lambda]_0 = -W[\varphi_\lambda, x_\lambda]_0$$
$$= -\frac{1}{\alpha}[R_0(\varphi_\lambda)R_0'(x_\lambda) - R_0'(\varphi_\lambda)R_0(x_\lambda)]$$
$$= -\frac{1}{\alpha}\big[\big(\alpha_1 B_1^0(\varphi_\lambda) - \alpha_2 B_2^0(\varphi_\lambda)\big)(\alpha_1' B_1^0(x_\lambda) - \alpha_2' B_2^0(x_\lambda)) - (\alpha_1' B_1^0(\varphi_\lambda)$$
$$- \alpha_2' B_2^0(\varphi_\lambda))\big(\alpha_1 B_1^0(x_\lambda) - \alpha_2 B_2^0(x_\lambda)\big)\big]$$
$$= -\frac{1}{\alpha}[\alpha_1\alpha_1' B_1^0(\varphi_\lambda)B_1^0(x_\lambda) - \alpha_1\alpha_2' B_2^0(x_\lambda)B_1^0(\varphi_\lambda)$$
$$-\alpha_1'\alpha_2 B_2^0(\varphi_\lambda)B_1^0(x_\lambda) + \alpha_2\alpha_2' B_2^0(\varphi_\lambda)B_2^0(x_\lambda)$$
$$-\alpha_1\alpha_1' B_1^0(\varphi_\lambda)B_1^0(x_\lambda) + \alpha_1'\alpha_2 B_1^0(\varphi_\lambda)B_2^0(x_\lambda)$$
$$+\alpha_1\alpha_2' B_2^0(\varphi_\lambda)B_1^0(x_\lambda) - \alpha_2\alpha_2' B_2^0(\varphi_\lambda)B_2^0(x_\lambda)]$$
$$= -\frac{1}{\alpha}[(\alpha_1'\alpha_2 - \alpha_1\alpha_2')(B_1^0(\varphi_\lambda)B_2^0(x_\lambda) - B_2^0(\varphi_\lambda)B_1^0(x_\lambda))]$$
$$= B_1^0(x_\lambda)(\alpha_1 - \lambda\alpha_1') - B_2^0(x_\lambda)(\alpha_2 - \lambda\alpha_2')$$
$$= \alpha_1 B_1^0(x_\lambda) - \alpha_2 B_2^0(x_\lambda) - \lambda(\alpha_1' B_1^0(x_\lambda) - \alpha_2' B_2^0(x_\lambda))$$

$$= R_0(x_\lambda) - \lambda R_0'(x_\lambda)$$

ve (4.17) den, $\Delta_\infty(\lambda)$ ile gösterilen $x = \infty$ daki Wronskiyeni,

$$\begin{aligned}\Delta_\infty(\lambda) = W[x_\lambda, \varphi_\lambda]_\infty &= -W[\varphi_\lambda, x_\lambda]_\infty \\ &= -B_1^\infty(\varphi_\lambda)B_2^\infty(x_\lambda) + B_1^\infty(x_\lambda)B_2^\infty(\varphi_\lambda) \\ &= hB_2^\infty(\varphi_\lambda) - B_1^\infty(\varphi_\lambda) \\ &= -R_1(\varphi_\lambda)\end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

Lemma 4.3.1. (4.13)-(4.15) sınır değer problemlerinin özdeğerleri ancak ve ancak $\Delta_0(\lambda)(\Delta_\infty(\lambda))$ nın sıfır yerlerinden oluşur. $\Delta_0(\lambda)$ veya $\Delta_\infty(\lambda)$ fonksiyonlarının sıfırları λ_n $(n = 0,1,2,3, \dots)$ ile gösterilirse,

$$\hat{\varphi}_n = \begin{pmatrix} \varphi_{\lambda_n}(x) \\ R_0'(\varphi_{\lambda_n}) \end{pmatrix} \in D(A_h)$$

vektörleri $A_h\hat{\varphi}_n = \lambda_n\hat{\varphi}_n$ eşitliğini sağlar. Yani $\hat{\varphi}_n$ ler, A_h operatörünün özfonksiyonlarıdır [14, 17].

Tanım 4.3.2. Eğer λ_0 özdeğerine karşılık gelen

$$\begin{aligned}&l(y_0) = \lambda_0 y_0 \\ &R_0(y_0) - \lambda_0 R_0'(y_0) = 0 \\ &R_1(y_0) = 0 \\ &l(y_s) - \lambda_0 y_s - y_{s-1} = 0 \\ &R_0(y_s) - \lambda_0 R_0'(y_s) - R_0'(y_{s-1}) = 0 \\ &R_\infty(y_s) = 0,\ s = 1,2,3, \dots, n\end{aligned} \tag{4.25}$$

şartları sağlanıyorsa, $y_0, y_1, \dots, y_n$ vektörler sistemine, (4.13)-(4.15) sınır değer probleminin öz ve birleştirilmiş (asosye) vektörler zinciri denir.

Lemma 4.3.3. (4.13)-(4.15) sınır değer probleminin özdeğerleri ve A_h disipatif operatörünün özdeğerleri çakışır. Yani, (4.13)-(4.15) sınır değer probleminin λ_0 özdeğerine karşılık gelen her bir özvektörler zinciri ve birleştirilmiş özvektörleri A_h disipatif operatörünün aynı λ_0 özdeğerine karşılık gelen $y_0, y_1, \dots, y_n$ birleştirilmiş vektörler ve özvektörler zincirine karşılık gelir. Bu durumda,

$$\hat{y}_k = \begin{pmatrix} y_k \\ R_0'(y_k) \end{pmatrix}, k = 0,1,2,3, \dots, n$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Eğer,

$$\begin{gathered} \hat{y}_0 \in D(A_h) \\ A_h \hat{y}_0 = \lambda_n \hat{y}_0 \end{gathered} \tag{4.26}$$

ise,

$$\begin{gathered} \ell(y)_0 = \lambda_0 y_0 \\ R_\infty(y_0) - \lambda_0 R_\infty^{'}(y_0) = 0 \end{gathered} \tag{4.27}$$

eşitlikleri sağlanır. Yani (4.13)-(4.15) sınır değer probleminin özvektörü y_0 'dır. Tersine olarak, eğer (4.25) şartları varsa,

$$\begin{gathered} \begin{pmatrix} y_0 \\ R_\infty^{'}(y_0) \end{pmatrix} = \hat{y}_0 \in D(A_h) \\ A_h \hat{y}_0 = \lambda_n \hat{y}_0 \end{gathered} \tag{4.28}$$

dır. Yani $\hat{y}_0$, A_h operatörünün özvektörüdür. Ayrıca, eğer A_h operatörünün λ_0 özdeğerine karşılık gelen $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ birleştirilmiş vektörleri ve özvektörler zinciri ise,

$$\hat{y}_k \in D(A_h) \quad (k = 0,1,2,\dots,n) \tag{4.29}$$

ve

$$A_h\hat{y}_0 = \lambda_0\hat{y}_0$$
$$A_h\hat{y}_s = \lambda_0\hat{y}_s + \hat{y}_{s-1} \qquad s = 0,1,2,...,n \tag{4.30}$$

şartları ile birlikte (4.25) eşitliğini elde ederiz. Burada $y_0, y_1, y_2, ..., y_n$'ler $\hat{y}_0, \hat{y}_1, \hat{y}_2, ..., \hat{y}_n$ vektörlerinin birinci bileşenleridir. Eğer, (4.35)-(4.37) problemine karşılık gelen $y_0, y_1, y_2, ..., y_n$ bileşenleri,

$$\hat{y}_k = \begin{pmatrix} y_k \\ R_\infty^{'}(y_k) \end{pmatrix} \in D(A_h), \qquad k = 0,1,2,...,n \tag{4.31}$$

(4.24)'de yerine yazılırsa, (4.30) elde edilir.

Yani (4.13)-(4.15) sınır değer probleminin özdeğerleri ve A_h disipatif operatörünün özdeğerleri çakışır.

4.4 Problemin Green Fonksiyonu

φ_λ ve x_λ fonksiyonları, (4.13) denkleminin (4.23) ve (4.24) koşullarını sağlayan çözümleri olsun. $\lambda \in \mathbb{C}$ parametresi, (4.13)-(4.15) probleminin bir özdeğeri değilse, $\Delta(\lambda) \neq 0$ dır. Buradan, φ_λ ve x_λ fonksiyonları, lineer bağımsız olacağından, (4.13) denkleminin genel çözümü

$$y(x,\lambda) = c_1(\lambda)\varphi_\lambda(x) + c_2(\lambda)\mathcal{X}_\lambda(x) \tag{4.32}$$

şeklinde düşünülebilir. Sabitlerin değişimi yöntemi yardımıyla,

$$l(y) = \lambda y - F(x) \tag{4.33}$$

denkleminin genel çözümü

$$y(x,\lambda) = c_1(x,\lambda)\varphi_\lambda(x) + c_2(x,\lambda)\mathcal{X}_\lambda(x) \tag{4.34}$$

şeklinde aransın. (4.34) ifadesinin x değişkenine göre türevi alınırsa,

$$y'(x,\lambda) = c_1'(x,\lambda)\varphi_\lambda(x) + c_1(x,\lambda)\varphi_\lambda'(x) + c_2'(x,\lambda)\mathcal{X}_\lambda(x) + c_2(x,\lambda)\mathcal{X}_\lambda'(x)$$

olur. Burada $c_i(x,\lambda),\ i = 1{,}2$ fonksiyonlarını öyle seçelim ki

$$c_1'(x,\lambda)\varphi_\lambda(x) + c_2'(x,\lambda)\mathcal{X}_\lambda(x) = 0 \tag{4.35}$$

eşitliği sağlansın. $y'(x,\lambda)$ ifadesinin bir kez daha türevi alınıp $l(y) = \lambda y$ diferansiyel denkleminde yazılıp düzenlenirse,

$$c_1'(x,\lambda)\varphi_\lambda'(x) + c_2'(x,\lambda)\mathcal{X}_\lambda'(x) = F(x) \tag{4.36}$$

elde edilir (4.35) ve (4.36) ifadeleri, değişkenlerine göre lineer denklem sistemi gibi düşünülürse,

$$c_1'(x,\lambda) = -\frac{1}{\Delta(\lambda)}\mathcal{X}_\lambda(x)F(x)$$
$$c_2'(x,\lambda) = \frac{1}{\Delta(\lambda)}\varphi_\lambda(x)F(x)$$

olur. Buradan

$$c_1(x,\lambda) = \frac{1}{\Delta(\lambda)}\int_x^0 \mathcal{X}_\lambda(x)F(x)dx + c_1(\lambda)$$
$$c_2(x,\lambda) = \frac{1}{\Delta(\lambda)}\int_0^x \varphi_\lambda(x)F(x)dx + c_2(\lambda)$$

elde edilir. $c_i(x,\lambda), i = 1{,}2$ fonksiyonları λ nın keyfi fonksiyonları olduğundan

$$y(x,\lambda) = \frac{1}{\Delta(\lambda)}\left\{\varphi_\lambda(x)\int_x^0 \mathcal{X}_\lambda(\xi)F(\xi)d\xi + \mathcal{X}_\lambda(x)\int_0^x \varphi_\lambda(\xi)F(\xi)d\xi\right\} + c_1(\lambda)\varphi_\lambda(x) + c_2(\lambda)\mathcal{X}_\lambda(x) \tag{4.37}$$

bulunur. Bu genel çözüm, sınır şartlarında yerine yazılarak $c_i(\lambda)$ fonksiyonları bulunabilir. (4.37) ifadesinin x değişkenine göre türevini alırsak,

$$y'(x,\lambda) = c_1(\lambda)\varphi_\lambda'(x) + c_2(\lambda)\mathcal{X}_\lambda'(x) + \frac{1}{\Delta(\lambda)}\Big\{\varphi_\lambda'(x)\int_x^0 \mathcal{X}_\lambda(\xi)F(\xi)d\xi +$$
$$\mathcal{X}_\lambda'(x)\int_0^x \varphi_\lambda(\xi)F(\xi)d\xi\Big\} + c_1(\lambda)\varphi_\lambda(x) + c_2(\lambda)\mathcal{X}_\lambda(x) \tag{4.38}$$

elde edilmiş olur ve (4.14) şartından

$$c_1(\lambda)\{W[\varphi_\lambda, v_1]_0(\alpha_1 - \lambda\alpha_1')\} - \{W[\varphi_\lambda, v_2]_0(\alpha_2 - \lambda\alpha_2')\}$$
$$+c_2(\lambda)\{W[\mathcal{X}_\lambda, v_1]_0(\alpha_1 - \lambda\alpha_1')\} - \{W[\mathcal{X}_\lambda, v_2]_0(\alpha_2 - \lambda\alpha_2')\}$$
$$+\frac{1}{\Delta(\lambda)}\{W[\varphi_\lambda, v_1]_0(\alpha_1 - \lambda\alpha_1')\}$$
$$-\{W[\varphi_\lambda, v_2]_0(\alpha_2 - \lambda\alpha_2')\}\int_0^x \mathcal{X}_\lambda(\xi)F(\xi)d\xi = 0$$

bulunur ve $c_2(\lambda)\Delta_0(\lambda) = 0$ olur. λ, bir özdeğer olmadığı için $\Delta_0(\lambda) \neq 0$ olacağından $c_2(\lambda) = 0$ olarak hesaplanır. (4.15) şartından

$$c_1(\lambda)\{W[\varphi_\lambda, v_1]_\infty - hW[\varphi_\lambda, v_2]_\infty\} + c_2(\lambda)\{W[X_\lambda, v_1]_\infty - hW[\mathcal{X}_\lambda, v_2]_\infty\}$$
$$+\frac{1}{\Delta(\lambda)}\{W[\mathcal{X}_\lambda, v_1]_\infty - hW[\mathcal{X}_\lambda, v_2]_\infty\}\int_x^\infty \varphi_\lambda(\xi)F(\xi)d\xi = 0$$

yazılabileceğinden ve $-R_\infty(\mathcal{X}_\lambda) = 0$ şartından $-c_1(\lambda)\Delta_\infty(\lambda) = 0$ ve λ, bir özdeğer olmadığından $\Delta_\infty(\lambda) \neq 0$ olacağından $c_1(\lambda) = 0$ olur. Böylece $(4.13) - (4.15)$ sınır değer probleminin genel çözümü

$$y(x,\lambda) = \frac{1}{\Delta(\lambda)}\Big\{\varphi_\lambda(x)\int_x^0 \mathcal{X}_\lambda(\xi)F(\xi)d\xi + \mathcal{X}_\lambda(x)\int_0^x \varphi_\lambda(\xi)F(\xi)d\xi\Big\} \tag{4.39}$$

olarak bulunur. Burada;

$$G(x,\xi,\lambda)=\begin{cases}\dfrac{\varphi_\lambda(x)\mathcal{X}_\lambda(\xi)}{\Delta(\lambda)} & , \; x\le\xi\\ \dfrac{\mathcal{X}_\lambda(x)\varphi_\lambda(\xi)}{\Delta(\lambda)} & , \; \xi\le x\end{cases} \tag{4.40}$$

olarak alınırsa, (4.37) eşitliği

$$y(x,\lambda)=\int_0^\infty G(x,\xi,\lambda)F(\xi)d\xi \coloneqq R_\lambda \tag{4.41}$$

şeklinde yazılabilir. Böylece (4.13)-(4.15) sınır değer probleminin Green fonksiyonu oluşturulmuş olur $G(x,.,\lambda)$ fonksiyonu (4.13) denklemini ve (4.14)-(4.15) sınır koşullarını sağlar.

4.5 Operatörün Rezolventi

A_h operatörünün rezolventini hesaplamak için

$$(\lambda-A_h)\hat{\varphi}=\hat{y} \tag{4.42}$$

denklemi ele alınsın. Burada

$$\hat{\varphi}=\begin{pmatrix}\varphi(x)\\ R_0'(\varphi)\end{pmatrix}\in D(A_h) \text{ ve } \hat{y}=\begin{pmatrix}y_1(x)\\ y_2\end{pmatrix}\in H$$

olmak üzere, (4.42) denklemi, aşağıdaki sınır değer problemi şeklinde yazılabilir:

$$\lambda\varphi-l(\varphi)=y_1(x) \tag{4.43}$$
$$-\lambda R_0'(\varphi)+R_0(\varphi)=y_2 \tag{4.44}$$

(4.43)-(4.44) probleminin çözümü bulunsun. Tahmin edildiği üzere, bu problemin genel çözümü (4.37) şeklinde olacaktır. $\hat{\varphi}\in D(A_h)$ olduğundan $\varphi(x)$ fonksiyonu (4.14) ve

(4.44) koşullarını sağlar. (4.14) şartı gereği, Green fonksiyonunun hesaplanmasındaki yol, aynı şekilde takip edilirse,

$$c_2(\lambda) = 0 \tag{4.45}$$

olur. (4.44) şartından da

$$c_1(\lambda)\{W[\varphi_\lambda, v_1]_0(\alpha_1 - \lambda\alpha_1')\} - \{W[\varphi_\lambda, v_2]_0(\alpha_2 - \lambda\alpha_2')\}$$
$$+\frac{1}{\Delta(\lambda)}\left\{W[\varphi_\lambda, v_1]_0(\alpha_1 - \lambda\alpha_1') - W[\varphi_\lambda, v_2]_0(\alpha_2 - \lambda\alpha_2')\int_x^0 \varphi_\lambda(\xi)F(\xi)d\xi\right\} = y_2$$

elde edilir. Buradan $c_1(\lambda)\Delta_0(\lambda) = y_2$ ise,

$$c_1(\lambda) = \frac{y_2}{\Delta_0(\lambda)}$$

bulunmuş olur. Diğer taraftan

$$R_0'\big(G(x,.,\lambda)\big) = R_0'\left(\frac{\mathcal{X}_\lambda(x)\varphi_\lambda(.)}{\Delta(\lambda)}\right) = \frac{\mathcal{X}_\lambda(x)}{\Delta(\lambda)}R_0'(\varphi_\lambda) = \frac{\mathcal{X}_\lambda(x)}{\Delta(\lambda)}\alpha$$

olur. O halde, (4.43) ve (4.44) ifadelerini, (4.45) denkleminde yerine yazarsak,

$$\varphi_\lambda(x,\lambda) = \frac{y_2}{\Delta_0(\lambda)} + \frac{1}{\Delta(\lambda)}\left\{\varphi_\lambda(x)\int_x^0 \mathcal{X}_\lambda(\xi)F(\xi)d\xi + \mathcal{X}_\lambda(x)\int_0^x \varphi_\lambda(\xi)F(\xi)d\xi\right\}$$
$$= \int_0^x G(x,\xi,\lambda)F(\xi)d\xi + \frac{1}{\alpha}y_2R_0'(G(x,.,\lambda))$$

elde edilir. (4.18) iç çarpımı gereği

$$\varphi_\lambda(x,\lambda) = \langle \tilde{G}_{x,\lambda}, \hat{y}\rangle \tag{4.46}$$

olur. Burada

$$\tilde{G}_{x,\lambda} = \begin{pmatrix} G(x,.,\lambda) \\ R_0'(G(x,.,\lambda)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G(x,.,\lambda) \\ \dfrac{\mathcal{X}_\lambda(x)}{\Delta(\lambda)}\alpha \end{pmatrix} \tag{4.47}$$

dir. Böylece (4.42) ve (4.44) probleminin çözümü

$$\hat{\varphi} = \begin{pmatrix} \langle \tilde{G}_{x,\lambda}, \hat{y} \rangle \\ R_0'(\tilde{G}_{x,\lambda}, \hat{y}) \end{pmatrix} = R(\lambda; A_h)\hat{y} \tag{4.48}$$

şeklinde bulunmuş olur.

Teorem 4.5.1. A_h operatörü H de maksimal disipatif operatördür.

İspat. A_h operatörünün H de maksimal disipatif operatör olduğunu göstermek için

$$(A_h - \lambda I)D(A_h) = H, \ \ Im\lambda < 0 \tag{4.49}$$

şartının sağlanıp sağlanmadığına bakmak gerekir. (4.49) şartının sağlanması için $F \in H$, $Im\lambda < 0$ için (4.48) eşitliğini alalım. $x \to (G(x,.,\lambda), y_1)$ fonksiyonu $l(y) - \lambda y = y_1$, $(x \in \mathbb{R}_+)$ ve (4.14)-(4.15) sınır koşullarını sağlar. Ayrıca ek olarak $F \in H$, $Im\lambda < 0$ için $(A_h - \lambda I)\hat{\chi} = \hat{y}$ alırız. Sonuç olarak $Im\lambda < 0$ için, $(A_h - \lambda I)D(A_h) = H$ olur. Böylece Teorem 4.5.1. ispat edilmiş olur.

5. BÖLÜM
TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada, önce sınır şartlarında spektral parametre bulunduran tek singüler noktaya sahip Sturm-Liouville tipinde Laguerre problemi çalışılmıştır. Bunun için $[0, \infty)$ aralığında sonsuzda disipatif ve spektral parametrenin aralığın sol uç noktasında Weyl limit-çember durumu verilmişken sınır değer problemi ele alınmıştır.

Bu çalışma [8], [14] ve [17] nin çalışmalarına benzer olarak geliştirilmiştir. [8], çalışmasında sürekli katsayılı ikinci mertebeden regüler Sturm-Liouville denklemi ile ilgilenmiş, buna bağlı olarak, sınır şartlarda spektral parametre bulunduran sınır değer probleminin ürettiği kendine eş operatörün spektral özelliklerini incelemiştir.

KAYNAKLAR

1. Akhiezer, N.I., and Glazman, I.M., Theory of Linear Operators in Hilbert Space, New York, 1963.
2. Allahverdiev, B.P., Dissipative Sturm-Liouville operators with non-separated boundary conditions, Monatsh, Math. 140: 1-17, 2003.
3. Aydın, M., vd, Diferansiyel Denklemler Ve Uygulamaları, Fakülteler Kitabevi Barış Yayınları, İzmir, 2009.
4. Bozkurt, D., ve Türen, B., Lineer Cebir, Selçuk Üniversitesi Yayınları, Konya, 2000.
5. Edwards, C.H., and Penney, D.E., Differential Equations and Boundary Value Problems, 3th edition, Pearson Education, Inc, 2008.
6. Eryılmaz, A., Fark Operatörlerinin Spektral Teorisi, Doktora Tezi, Süleyman Demirel Üniversitesi, Isparta, 2006.
7. Fakıoğlu, S., Fen Ve Mühendislikte Matematik Temeller, İstanbul Arel Üniversitesi Yayınları, İstanbul, 2009.
8. Fulton, C.T., Two-Point Boundary Value Problems with Eigenvalues parameter Contained in the Boundary Conditions, Proc. Royal Soc., Edinburg, 77A: 293-308, 1977.
9. Gorbachuk, M.L. and Gorbachuk, V.I., Boundary Value Problems for Operator Differential Equations, Naukova Dumka, Kiev, 1984; English transl. Birkhauser Verlag, 1991.
10. Halilov, H., Diferansiyel Denklemler ve Lineer Cebrin Elemanları, Literatür Yayınları, İstanbul, 2003.
11. Kreyszig, E., Introductory Functional Analysis with Applications, John Willey and Sons, New York, 1978.
12. Kuzhel, A.V., Characteristics Functions and Models of Nonselfadjoint Operators, Kluwer Academic Publisher, Boston, London, 1996.
13. Naimark, M.A., Linear Differential Operators, 2nd ed., Nauka Moskow, 1968, English transl., of 1st ed. Vols. 1, 2, Ungar, New York, 1969.
14. Ongun, M.Y., Sınır Koşullarında Spektral Parametre Bulunduran İkinci Mertebeden Adi Diferansiyel Denklemler İçin Sınır Değer Problemi, Doktora Tezi, Süleyman Demirel Üniversitesi, Isparta, 2004.

15. Ross, S.L., Diferential Equations, 3th edition, John Wiley and Sons, New York, 1984.
16. Sarı, H.E., Diferansiyel Denklemlerin Laguerre Polinom Çözümleri, Yüksek Lisans Tezi, Muğla Üniversitesi, Muğla, 2009.
17. Toyganözü, C., Sınır Koşulunda Spektral Parametre Bulunduran Sturm-Liouville Problemleri, Doktora Tezi, Süleyman Demirel Üniversitesi, Isparta, 2009.

ÖZGEÇMİŞ

İbrahim ERDEM 1986 yılında İstanbul'da doğdu. İlk öğrenimini İstanbul'da orta öğrenimini Nevşehir'de tamamladı. 2000 yılında Nevşehir Anadolu Öğretmen Lisesini kazandı. 2004'de kazandığı Gazi Üniversitesi Eğitim Fakültesi Orta Öğretim Matematik Öğretmenliği Bölümünden 2009 yılında mezun oldu. 2010 yılında Milli Eğitim Bakanlığında öğretmen olarak göreve başladı ve halen Bitlis Adilcevaz Lisesinde matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır.

Adres : Cevher Dudayev Mah. Acarkent Sitesi C Blok / NEVŞEHİR
Telefon : 05058848539
E-posta :i.erdem86@hotmail.com