

T.C.  
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLERİN B-SPLINE SONLU  
ELEMENLAR YÖNTEMİ İLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Tezi Hazırlayan  
Derya YILDIRIM SUCU

Tez Danışmanı  
Doç. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ

Matematik Anabilim Dalı  
Doktora Tezi

OCAK 2023  
NEVŞEHİR



T.C.  
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLERİN B-SPLINE SONLU  
ELEMENLAR YÖNTEMİ İLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Tezi Hazırlayan  
Derya YILDIRIM SUCU

Tez Danışmanı  
Doç. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ

Matematik Anabilim Dalı  
Doktora Tezi

OCAK 2023  
NEVŞEHİR

Doç. Dr. S. Battal Gazi KARAKOÇ danışmanlığında **Derya YILDIRIM SUCU** tarafından hazırlanan “**Bazı Kısmi Türevli Denklemlerin B-Spline Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Nümerik Çözümleri**” başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Doktora Tezi** olarak kabul edilmiştir.

... / ... / 20...

## JÜRİ

Başkan : Prof. Dr. Danyal SOYBAŞ

Üye : Doç. Dr. S. Battal Gazi KARAKOÇ

Üye : Prof. Dr. Yasin YAZLIK

Üye : Prof. Dr. Halis BİLGİL

Üye : Doç. Dr. Mehmet ŞENOL

## **TEZ BİLDİRİM SAYFASI**

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada yer alan bütün bilgilerin, bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu ve bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Derya YILDIRIM SUCU



## TEŞEKKÜR

2019 yılının Şubat ayında çıktığım bu yolda ilk günden itibaren özveriyle desteğini an be an yanımda hissettiğim tez danışmanım çok kıymetli hocam Sayın Doç. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ'a sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum. Çalışmalarımın her bir adımında bana yol gösterdiği ve danıştığım her bir konuda desteğini esirgemediği için kendisine sonsuz müteşekkirim.

Hayatımın her aşamasında yanımda olan, umut veren, çalışmaya ve başarmaya teşvik eden, bana her zaman güvenen, yol göstericim sevgili eşim Dr. Ahmet Özhan SUCU'ya, mucizelerimiz Ayşe Bahar ve Metehan'a benim yokluğumu hiçbir zaman arattırmadığı için teşekkür ediyorum.

Eğitim hayatım boyunca her zaman yanımda olan, hiçbir zaman emeklerini ödeyemeyeceğim sevgili anneme ve babama, doktora öğrenimim boyunca desteklerini her zaman hissettiren kayınpederim ve kayınvalideme sonsuz minnettarım.

Doktora öğrenimim boyunca bana umut aşıl原因, desteğini her zaman yanımda hissettiğim kıymetli hocalarım Aksaray Üniversitesi Mimarlık Fakültesi Dekanı Sayın Prof. Dr. Muhammed SARI'ya; Aksaray Üniversitesi Sağlık, Kültür ve Spor Daire Başkanı Sayın Abdülkadir SÖZCÜ'ye, Aksaray Üniversitesi İletişim Fakültesi öğretim üyeleri Sayın Doç. Dr. Selahattin ÇAVUŞ'a ve Sayın Doç. Dr. Gökhan GÜLTEKİN'e teşekkür ve şükranlarımı sunuyorum.

Tez çalışmalarım süresince yardımına ihtiyaç duyduğum her an her türlü teknik destekte yanımda olan kıymetli hocam Araş. Gör. Efe Numan CAN'a; beni her zaman yüreklendiren ve umut aşıl原因 değerli hocam Araş. Gör. Nurcan EDE'ye; verdiği güzel enerjilerle çalışmalarımın son zamanlarında bana yol arkadaşı olan mesai arkadaşım sevgili Dr. Hüsniye RÜSTEMOĞLU'na teşekkür ediyorum.

**BAZI KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLERİN B-SPLINE SONLU ELEMANLAR  
YÖNTEMİ İLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ  
(Doktora Tezi)**

**Derya YILDIRIM SUCU**

**NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**OCAK 2023**

**ÖZET**

Bu tez altı bölüm içermektedir. Birinci bölümde, tezde kullanılan bazı temel kavramlar tanıtılmış, lineer oluşum denklemleri hakkında genel bilgiler verilmiştir. Sonlu farklar ve sonlu elemanlar yöntemleri ile birlikte spline interpolasyon ve B-spline interpolasyon fonksiyonları tanımlanmıştır. Son olarak, nümerik çözümleri hesaplanacak olan dalga denklemleri test problemleri ile birlikte tanıtılmıştır.

İkinci bölümde; model problemlerden sınır şartları ile verilen Gilson-Pickering (GP) denklemi septik B-spline kollokasyon metodu kullanılarak nümerik olarak çözülmüştür. Tek solitary dalga hareketinin incelendiği test problemi ile tam çözüm ve nümerik sonuçlar karşılaştırılarak çözülmüştür. Elde edilen sonuçlar tablolaştırılmış ve denklem için kararlılık analizi yapılmıştır.

Üçüncü bölümde; Genelleştirilmiş Oskolkov denkleminin yaklaşık çözümünü hesaplamak için kuintik B-spline fonksiyonlara dayalı kollokasyon sonlu elemanlar yöntemi uygulanmıştır. Önerilen yöntem, tek solitary dalga hareketi ve Gaussian ile Undular Bore başlangıç şartları kullanılarak çözülmüştür. Elde edilen sonuçlar tablolaştırılmış ve denklem için kararlılık analizi yapılmıştır.

Dördüncü bölümde, Kudryashov-Sinelschkov denkleminin septik B-spline fonksiyonlar kullanılarak sonlu eleman modeli oluşturulmuştur. Kudryashov-Sinelschkov denkleminin şok dalga hareketi, iki solitary dalganın etkileşimi, Gaussian şartı ve Undular bore başlangıç şartı ile ele alınmıştır. Elde edilen sonuçlar tablolaştırılmış ve denklem için kararlılık analizi yapılmıştır.

Beşinci bölümde, ilk bölümde tanıtılan fifth order Korteweg de Vries (fKdV) sayısal çözümleri araştırılmıştır. Sawada-Kotera (SK), Caudrey-Dodd-Gibbon (CDG), Lax, Kaup-Kuperschmit (KK) ve Ito denklemleri için septik B-spline fonksiyonlar kullanılarak nümerik çözümleri elde edilmiştir. Her bir denklem için tek solitary dalga hareketi incelenmiş,

sonuçlar tablolafıtırılmıştır. Yine her bir denklem için kararlılık analizi yapılmıştır. Altıncı bölümde, her bir denklem için tezde kullanılan kollokasyon sonlu elemanlar yöntemi ile elde edilen sonuçlar ve öneriler verilmiştir.

**Anahtar kelimeler:** *Gilson-Pickering (GP) Denklemi, Genelleştirilmiş Oskolkov Denklemi, Kudryashov-Sinelschkov Denklemi, Beşinci Dereceden KdV (fKdV) Denklemi, Sonlu Elemanlar Yöntemi*

**Tez Danışman:** Doç. Dr. S. Battal Gazi KARAKOÇ

**Sayfa Adeti:** 142





**NUMERICAL SOLUTIONS OF SOME PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS  
WITH B-SPLINE FINITE ELEMENT METHOD  
(Ph. D. Thesis)**

**Derya YILDIRIM SUCU**

**NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ UNIVERSITY  
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES**

**JANUARY 2023**

**ABSTRACT**

This Ph.D. thesis contains six sections. In the first section, some basic concepts used in the thesis are introduced and general information about linear formation equations is given. Spline interpolation and B-spline interpolation functions are defined together with finite difference and finite element methods. Finally, wave equations, whose numerical solutions are to be calculated, are introduced together with the test problems.

In the second section; Gilson-Pickering (GP) equation given with boundary conditions from model problems is solved numerically by using septic B-spline collocation method. The test problem in which single solitary wave motion is examined is solved by comparing the exact solution and numerical results. Obtained results are tabulated and stability analysis is performed for the equation.

In the third section; To calculate the approximate solution of the generalized Oskolkov equation, the collocation finite element method based on quintic B-spline functions is applied. The proposed method is solved using single solitary wave motion and Gaussian and Undular Bore initial conditions. Obtained results are tabulated and stability analysis is performed for the equation.

In the fourth section, the finite element model of the Kudryashov-Sinelschkov equation is constructed using septic B-spline functions. Shock wave motion of Kudryashov-Sinelschkov equation, interaction of two solitary waves, Gaussian condition and Undular bore initial condition are discussed. Obtained results are tabulated and stability analysis is performed for the equation.

In the fifth section, numerical solutions of the fifth order Korteweg de Vries (fKdV) equations introduced in the first section are investigated. Numerical solutions of Sawada-Kotera (SK), Caudrey-Dodd-Gibbon (CDG), Lax, Kaup-Kuperschmit (KK) and Ito equations are obtained by using septic B-spline functions. For each equation, single solitary

wave motion is examined and the results are tabulated. Again, stability analysis is performed for each equation.

In the sixth section, the results and suggestions obtained by the collocation finite element method used in the thesis for each equation are given.

**Keywords:** *Gilson-Pickering (GP) Equation, Generalized Oskolkov Equation, Kudryashov-Sinelschkov Equation, Fifth Order KdV (fKdV) Equation, Finite Element Method.*

**Thesis Supervisor:** Assoc. Prof. Dr. S. Battal Gazi KARAKOÇ

**Page Number:** 142

## İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY SAYFASI .....	i
TEZ BİLDİRİM SAYFASI .....	ii
TEŞEKKÜR .....	iii
ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	vi
İÇİNDEKİLER .....	viii
TABLOLAR LİSTESİ.....	xiii
ŞEKİLLER LİSTESİ .....	xv
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ .....	xvii
1. BÖLÜM	
GİRİŞ .....	1
2. BÖLÜM	
TEMEL KAVRAMLAR.....	3
2.1. Dalga Tanımı ve Çeşitleri .....	3
2.1.1. Titreşim Doğrultularına Göre Dalgalar .....	3
2.1.2. Yayılma Ortamlarına Göre Dalgalar .....	4
2.1.3. Enerji Yayıdıkları Boyutların Sayısına Göre Dalgalar.....	4
2.2. Dalga İle İlgili Temel Kavramlar .....	4
2.3. Dalga Teorisi .....	5
2.3.1. Küçük Genlikli Dalgalar (Lineer Dalga Teorisi) .....	6
2.3.2. Büyük Genlikli Dalgalar (Lineer Olmayan Dalga Teorisi).....	6
2.3.2.1. <i>Büyük Genlikli Dalga Çözümleri</i> .....	7
2.3.2.2. <i>Akım Fonksiyonu Dalga Teorisi</i> .....	8
2.3.2.3. <i>Cnoidal Dalga Teorisi</i> .....	8

2.3.2.4.	<i>Solitary Dalga Teorisi ve Solitonlar</i> .....	8
2.4.	Lineer Olmayan Oluşum Denklemleri .....	13
2.4.1.	Korunum Kanunları.....	14
2.5.	Sonlu Farklar Yöntemi .....	15
2.5.1.	Crank-Nicolson Yöntemi .....	16
2.5.2.	Thomas Algoritması.....	18
2.6.	Sonlu Elemanlar Yöntemi .....	18
2.6.1.	Ağırlıklı Kalan Yöntemleri .....	22
2.6.2.	Kollokasyon Yöntemi .....	23
2.6.3.	Spline Fonksiyonlar.....	23
2.6.4.	B-Spline Fonksiyonlar.....	25
2.6.4.1.	<i>Kuintik B-Spline Fonksiyonlar</i> .....	27
2.6.4.2.	<i>Septik B-Spline Fonksiyonlar</i> .....	30
2.6.5.	Hata Tahmini.....	32
2.6.6.	Kararlılık Analizi.....	33
2.7.	Dalga Denklemleri .....	34
2.7.1.	Gilson-Pickering Denklemi, Başlangıç-Sınır Koşulları ve Test Problemleri .....	34
2.7.1.1.	<i>Solitary Dalga Çözümü</i> .....	35
2.7.2.	Genelleştirilmiş Oskolkov Denklemi, Başlangıç-Sınır Koşulları ve Test Problemleri.....	36
2.7.2.1.	<i>Şok Dalga Çözümü</i> .....	37
2.7.2.2.	<i>Gaussian Başlangıç Koşulu</i> .....	38
2.7.2.3.	<i>Undular Bore Başlangıç Koşulu</i> .....	38
2.7.3.	Kudryashov-Sinelschkov Denklemi, Başlangıç-Sınır Koşulları ve Test Problemleri.....	38

2.7.3.1.	<i>Solitary Dalga Çözümü</i> .....	40
2.7.3.2.	<i>İki Solitary Dalganın Çarpışması</i> .....	40
2.7.3.3.	<i>Gaussian Başlangıç Koşulu</i> .....	40
2.7.3.4.	<i>Undular Bore Başlangıç Koşulu</i> .....	41
2.7.4.	Beşinci Dereceden KdV Tipi Denklemler .....	41
2.7.4.1.	<i>Sawada-Kotera (SK) Denklemi, Başlangıç-Sınır Koşulları ve Test Problemleri</i> .....	43
2.7.4.2.	<i>Caudrey-Dodd-Gibbon (CDG) Denklemi, Başlangıç-Sınır Koşulları ve Test Problemleri</i> .....	44
2.7.4.3.	<i>Lax Denklemi, Başlangıç-Sınır Koşulları ve Test Problemleri</i> .....	45
2.7.4.4.	<i>Kaup-Kuperschmidt (KK) Denklemi, Başlangıç-Sınır Koşulları ve Test Problemleri</i> .....	46
2.7.4.5.	<i>Ito Denklemi, Başlangıç-Sınır Koşulları ve Test Problemleri</i> .....	47
3. BÖLÜM		
GILSON-PICKERING DENKLEMİNİN KOLLOKASYON SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE NÜMERİK ÇÖZÜMÜ .....		
		49
3.1.	Denklemin Gelişimi ve Septik B-Spline Fonksiyonlar .....	49
3.1.1.	Kollokasyon Sonlu Elemanlar Yöntemi.....	51
3.1.2.	Kararlılık Analizi.....	53
3.1.3.	Nümerik Örnekler ve Sonuçlar .....	54
3.1.3.1.	<i>Tek Solitary Dalga Hareketi</i> .....	55
4. BÖLÜM		
GENELLEŞTİRİLMİŞ OSKOLKOV DENKLEMİNİN KOLLOKASYON SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE NÜMERİK ÇÖZÜMÜ .....		
		60
4.1.	Denklemin Gelişimi ve Kuintik B-Spline Fonksiyonlar .....	60
4.1.1.	Kollokasyon Sonlu Elemanlar Yöntemi.....	62
4.1.2.	Kararlılık Analizi.....	64

4.1.3.	Nümerik Örnekler ve Sonuçlar .....	65
4.1.3.1.	<i>Şok Dalga Çözümü</i> .....	65
4.1.3.2.	<i>Solitonların Oluşumu</i> .....	70
5. BÖLÜM		
KUDRYASHOV-SINELSCHKOV DENKLEMİNİN KOLLOKASYON SONLU		
ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE NÜMERİK ÇÖZÜMÜ .....		
5.1.	Denklemin Gelişimi ve Septik B-Spline Fonksiyonlar .....	74
5.1.1.	Kollokasyon Sonlu Elemanlar Yöntemi.....	76
5.1.2.	Kararlılık Analizi.....	78
5.1.3.	Nümerik Örnekler ve Sonuçlar .....	79
5.1.3.1.	<i>Tek Solitary Dalga Hareketi</i> .....	79
5.1.3.2.	<i>İki Solitary Dalganın Etkileşimi</i> .....	84
5.1.3.3.	<i>Solitonların Oluşumu</i> .....	87
6. BÖLÜM		
fKdV DENKLEMİNİN KOLLOKASYON SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE		
NÜMERİK ÇÖZÜMÜ.....		
6.1.	Sawada-Kotera Denkleminin Kollokasyon Sonlu Elemanlar Yöntemi İle	
	Nümerik Çözümü .....	93
6.1.1.	Kararlılık Analizi.....	95
6.1.2.	Nümerik Örnekler ve Sonuçlar .....	96
6.1.2.1.	<i>Tek Solitary Dalga Hareketi</i> .....	96
6.2.	Caudrey-Dodd-Gibbon Denkleminin Kollokasyon Sonlu Elemanlar Yöntemi	
	İle Nümerik Çözümü.....	105
6.2.1.	Kararlılık Analizi.....	107
6.2.2.	Nümerik Örnekler ve Sonuçlar .....	108
6.2.2.1.	<i>Tek Solitary Dalga Hareketi</i> .....	108

6.3.	Lax Denkleminin Kollokasyon Sonlu Elemanlar Yöntemi İle Nümerik Çözümü.....	112
6.3.1.	Kararlılık Analizi.....	114
6.3.2.	Nümerik Örnekler ve Sonuçlar .....	115
6.3.2.1.	<i>Tek Solitary Dalga Hareketi</i> .....	115
6.4.	Kaup-Kuperschmidt Denkleminin Kollokasyon Sonlu Elemanlar Yöntemi İle Nümerik Çözümü.....	118
6.4.1.	Kararlılık Analizi.....	120
6.4.2.	Nümerik Örnekler ve Sonuçlar .....	121
6.4.2.1.	<i>Tek Solitary Dalga Hareketi</i> .....	121
6.5.	Ito Denkleminin Kollokasyon Sonlu Elemanlar Yöntemi İle Nümerik Çözümü.....	125
6.5.1.	Kararlılık Analizi.....	127
6.5.2.	Nümerik Örnekler ve Sonuçlar .....	128
6.5.2.1.	<i>Tek Solitary Dalga Hareketi</i> .....	128
	SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	131
	KAYNAKLAR .....	132
	ÖZGEÇMİŞ .....	142

## TABLolar LİSTESİ

Tablo 2.1	Kuintik B-spline fonksiyon ve türevlerinin $x_m$ düğümlerinde aldıkları değerler . . . . .	28
Tablo 2.2	Septik B-spline fonksiyon ve türevlerinin $x_m$ düğümlerinde aldıkları değerler	31
Tablo 3.1	$\Delta t = 0.01$ ve $h = 0.1$ değerleri için hesaplanan korunum sabiti ve hata normu değerleri . . . . .	56
Tablo 3.2	$\Delta t = 0.01$ ve $h = 0.1$ değerleri için hesaplanan korunum sabiti ve hata normu değerleri . . . . .	58
Tablo 4.1	Kuintik B-spline fonksiyon ve türevlerinin değerleri . . . . .	62
Tablo 4.2	Şok dalga hareketinin birinci durumda korunum sabiti ve hata normu değerleri . . . . .	67
Tablo 4.3	Şok dalga hareketinin ikinci durumda korunum sabiti ve hata normu değerleri	67
Tablo 4.4	Gaussian başlangıç koşulu için korunum sabiti değerleri . . . . .	71
Tablo 4.5	Undular bore başlangıç koşulu için korunum sabiti değerleri . . . . .	73
Tablo 5.1	Tek solitary dalga hareketi için korunum sabiti ve hata normu değerleri .	81
Tablo 5.2	İki solitary dalganın etkileşimi için korunum sabiti değerleri ve diğer yöntemlerle karşılaştırılması . . . . .	85
Tablo 5.3	Gaussian başlangıç şartı için korunum sabiti değerleri . . . . .	87
Tablo 5.4	Undular bore başlangıç şartı için korunum sabiti değerleri . . . . .	89
Tablo 6.1	$k = 0.01$ , $\Delta t = 0.0004$ ve $h$ nin farklı değerleri için hesaplanan hata normu değerleri . . . . .	98
Tablo 6.2	$k = 0.01$ , $\Delta t = 0.0002$ ve $h$ nin farklı değerleri için hesaplanan hata normu değerleri . . . . .	99
Tablo 6.3	$k = 0.01$ , $\Delta t = 0.0001$ ve $h$ nin farklı değerleri için hesaplanan hata normu değerleri . . . . .	100
Tablo 6.4	$k = 0.01$ , $\Delta t = 0.0002$ ve $h'$ nin farklı değerleri için hesaplanan hata normu değerleri . . . . .	101
Tablo 6.5	$k = 0.01$ , $\Delta t = 0.0004$ ve $h$ nin farklı değerleri için hesaplanan hata normu değerleri . . . . .	109



Tablo 6.6	$k = 0.01$ , $\Delta t = 0.0004$ ve $h$ nin farklı değerleri için hesaplanan hata normu değerleri . . . . .	116
Tablo 6.7	$k = 0.01$ , $\Delta t$ ve $h$ nin farklı değerleri için hesaplanan hata normu değerleri	122
Tablo 6.8	$k = 0.01$ , $\Delta t$ ve $h$ nin farklı değerleri için hesaplanan hata normu değerleri ve diğer yöntemlerle karşılaştırılması . . . . .	123
Tablo 6.9	$k = 0.01$ , $\Delta t$ ve $h$ nin farklı değerleri için hesaplanan hata normu değerleri	129
Tablo 6.10	$k = 0.01$ , $\Delta t$ ve $h$ nin farklı değerleri için hesaplanan hata normu değerleri	129



## ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.1	Basit bir dalga profili . . . . .	3
Şekil 2.2	Sinüzoidal bir dalganın karakteristik gösterimi . . . . .	5
Şekil 2.3	Küçük ve büyük genlikli dalga tipleri . . . . .	7
Şekil 2.4	Russell'ın yaptığı deneyin Union Kanalında tekrar canlandırılması . . . . .	9
Şekil 2.5	Crank-Nicolson Şeması . . . . .	17
Şekil 2.6	Birinci dereceden spline fonksiyon . . . . .	25
Şekil 2.7	Sıfırıncı dereceden B-spline Fonksiyonu . . . . .	26
Şekil 2.8	Lineer B-spline fonksiyon . . . . .	27
Şekil 2.9	Kuintik B-spline Şekil Fonksiyonları . . . . .	30
Şekil 2.10	Septik B-spline Şekil Fonksiyonları . . . . .	32
Şekil 3.1	GP denkleminin birinci durum için tek solitary dalga hareketi(3D) . . . . .	56
Şekil 3.2	GP denkleminin birinci durum için tek solitary dalga hareketi(2D) . . . . .	57
Şekil 3.3	Birinci durum için $t = 1$ zamanında hata dağılımı . . . . .	57
Şekil 3.4	GP denkleminin ikinci durum için tek solitary dalga hareketi . . . . .	59
Şekil 3.5	İkinci durum için $t = 1$ zamanında hata dağılımı . . . . .	59
Şekil 4.1	a) $p = 2, \gamma = 0.5, \sigma = 0.1, \eta = 7, h = 0.1, a = 0.3$ ve $\Delta t = 0.1$ , b) $p = 3, \gamma = 0.33, \sigma = 0.1, \eta = 7, h = 0.1, a = 0.5$ ve $\Delta t = 0.1$ için şok dalga hareketi. . . . .	68
Şekil 4.2	a) $p = 2, \gamma = 0.5, \sigma = 0.1, \eta = 7$ ve $a = 0.3$ , b) $p = 3, \gamma = 0.33, \sigma = 0.1, \eta = 7$ ve $a = 0.5$ için $t = 10$ 'da hata dağılımı . . . . .	69
Şekil 4.3	a) $p = 2, \gamma = 0.5, \sigma = 0.1, \eta = 7$ ve $a = 0.3$ , b) $p = 3, \gamma = 0.33, \sigma = 0.1, \eta = 7$ ve $a = 0.5$ için Gaussian başlangıç şartı için solitonların oluşumu . . . . .	71
Şekil 4.4	Undular bore başlangıç şartı ile a) $\gamma = 0.5, \sigma = 0.1, \eta = 7$ ve $a = 0.3$ , b) $\gamma = 0.33, \sigma = 0.1, \eta = 7$ ve $a = 0.5$ $h$ and $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için solitonların oluşumu . . . . .	73
Şekil 5.1	KS denkleminin $t = 0, 10, 20$ zamanında tek solitary dalga hareketi . . . . .	82
Şekil 5.2	$\Delta t = h = 0.1$ için $t = 20$ zamanında hata dağılımı . . . . .	82

Şekil 5.3	KS denkleminin $t = 0$ dan $t = 20$ ye kadar tek solitary dalga hareketi . . .	83
Şekil 5.4	Tek solitary dalga hareketinin kontur grafiği . . . . .	83
Şekil 5.5	KS denkleminin için iki solitary dalganın etkileşimi . . . . .	86
Şekil 5.6	İki solitary dalga etkileşimi için kontur grafiği . . . . .	86
Şekil 5.7	Gaussian başlangıç koşulu için solitonların oluşumu . . . . .	88
Şekil 5.8	Gaussian başlangıç koşulu için kontur grafiği . . . . .	88
Şekil 5.9	Undular bore başlangıç koşulu için solitonların oluşumu . . . . .	90
Şekil 5.10	Undular bore başlangıç koşulu için kontur grafiği . . . . .	90
Şekil 6.1	SK denkleminin $t = 0, 0.5, 1$ de tek solitary dalga hareketi . . . . .	102
Şekil 6.2	SK denkleminin $u(x,0)$ başlangıç şartı ile $\Delta t = 0.0004$ ve $h = 0.5$ için tek solitary dalga hareketi . . . . .	102
Şekil 6.3	SK denkleminin $\Delta t = 0.0004$ ve $h = 0.5$ için tek solitary dalga hareketi .	103
Şekil 6.4	Tek solitary dalga hareketinin kontur grafiği . . . . .	103
Şekil 6.5	Tek solitary dalganın a) $\Delta t = 0.0004$ ve $h = 0.5$ , b) $\Delta t = 0.0002$ ve $h = 0.5$ , c) $\Delta t = 0.0001$ ve $h = 0.025$ , d) $\Delta t = 0.00005$ ve $h = 0.025$ değerleri için $t = 1$ de hata dağılımı . . . . .	104
Şekil 6.6	CDG denkleminin $t = 0$ dan $t = 1$ e tek solitary dalga hareketi . . . . .	110
Şekil 6.7	Tek solitary dalga hareketinin kontur çizgisi . . . . .	110
Şekil 6.8	a) $\Delta t = 0.0004$ ve $h = 0.5$ değerleri için $t = 1$ de hata dağılımı, b) $\Delta t = 0.00001$ ve $h = 0.05$ değerleri için $t = 1$ de hata dağılımı . . . . .	111
Şekil 6.9	Lax denkleminin $\Delta t = 0.0004$ ve $h = 0.5$ için tek solitary dalga hareketi .	117
Şekil 6.10	$\Delta t = 0.0004$ ve $h = 0.5$ için $t = 1$ zamanında hata dağılımı . . . . .	117
Şekil 6.11	KK denkleminin $\Delta t = 0.0004$ ve $h = 0.5$ için Tek solitary dalga hareketi .	124
Şekil 6.12	$\Delta t = 0.0004$ ve $h = 0.5$ için $t = 1$ zamanında hata dağılımı . . . . .	124
Şekil 6.13	Ito denkleminin $\Delta t = 0.0004$ ve $h = 0.5$ için Tek solitary dalga hareketi .	130
Şekil 6.14	$\Delta t = 0.0004$ ve $h = 0.5$ için $t = 1$ zamanında hata dağılımı . . . . .	130

## SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

<b>GP</b>	Gilson Pickering
<b>KS</b>	Kudryashov Sinelschkov
<b>KdV</b>	Korteweg-de Vries
<b>fKdV</b>	Fifth Korteweg-de Vries
<b>SK</b>	Sawada-Kotera
<b>CDG</b>	Caudrey-Dodd-Gibbon
<b>KK</b>	Kaup-Kuperschmit



# 1. BÖLÜM

## GİRİŞ

Fiziksel olayları modellemek, mühendis ve bilim adamlarının başvurduğu en önemli olgulardan biridir. Gerek biyolojik, kimyasal ya da jeolojik olsun gerekse havacılık gibi çeşitli iş sektörlerinde olsun, hemen hemen doğadaki tüm olaylar fizik kanunları ve aksiyomlarının veya diğer alanların yardımı ile cebirsel, diferansiyel ve/veya integral denklemler cinsinden tanımlanabilir. İlgili değişkenler açısından fiziksel veya fizyolojik süreçlerin analitik tanımlarına *matematiksel modeller* denir. Bir sürecin matematiksel modelleri, sürecin nasıl çalıştığına ilişkin varsayımlar ile süreci yöneten uygun aksiyomlar ve yasalar kullanılarak geliştirilir. Genellikle geometrik olarak karmaşık alanlara yerleştirilmiş karmaşık cebirsel, diferansiyel ve/veya integral denklemlerle karakterize edilirler. Dünyada meydana gelen doğa olaylarını tanımlamak için kullanılan kavramlar büyük ölçüde diferansiyel denklemlere dayanmaktadır. Katıların titreşimleri, sıvıların akışı, kimyasalların difüzyonu, ısının yayılması, moleküllerin yapısı, elektronların etkileşimleri ve elektromanyetik dalgaların radyasyonu bunlara örnek verilebilir. Kısmi diferansiyel denklemler teorisi modern matematikte, özellikle geometri ve analizde merkezi bir rol oynamaktadır. Yüksek hızlı bilgisayarların ortaya çıkması daha fazla sayıda bilim insanının kısmi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri ile ilgilenmesine sebep olmuştur. Çoğu durumda, kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerini hesaplamının ve anlamının tek yolu, önemli bir konu olan sayısal yaklaşım şemalarının tasarımıdır. Ancak, çözümlerin analitik özellikleri derinlemesine anlaşılmadan sayısal çözümleri hakkında yeterli bilgi sahibi olunamaz. Bununla birlikte denklemler için elde edilen analitik ve sayısal yaklaşımlar ayrılmaz bir şekilde iç içedir. Çoğu problem için analitik yöntemler ile tam çözümlerin elde edilmesi aşırı derecede zor olmasa da geometrik ve malzeme karmaşıklıkları nedeniyle bazı durumlarda güç olabilmektedir. Bu tür durumlarda, sayısal analiz yöntemlerini kullanmak denklemlerin çözümünü bulmanın bir yolunu sağlar. Sayısal yöntemlerin denklemlere uygulanması ile cebirsel denklemler sistemleri elde edilir bu cebirsel denklemler uygun bilgisayar programları kullanılarak çözülür. Bahsedilen sayısal çözüm metotları arasında en çok kullanılan metotlar sonlu farklar metodu, varyasyonel, ağırlıklı kalan ve sonlu elemanlar metotlarıdır.

İlk olarak 1960 larda ortaya atılan sonlu elemanlar yöntemi, kısmi diferansiyel denklemlerle modellenen problemlerin nümerik olarak çözülmesinde kullanılan etkili tekniklerden biridir. Yöntem; çoklu fizik, karmaşık geometri ve sınır koşullarını içeren çok sayıda

gerçek dünya problemlerine kolaylıkla uygulanabilir. Sonlu elemanlar yönteminde, belirli bir alan, alt alanlar topluluğu olarak görülür ve her bir alt alan üzerinde denkleme varyasyon yöntemlerinden uygun olan herhangi biri uygulanır. Bir alt alan topluluğu üzerinde yaklaşık çözümler aramanın ana nedeni, karmaşık bir işlevi basit polinomlar olarak temsil etmenin daha kolay olmasıdır. Böylece sürekli olan problem, tamamen zaman-konum olarak ayrılmış bir sonlu elemanlar problemine dönüşür. Elde edilen probleme sonlu elemanlar yönteminin basamakları uygulanarak nümerik çözümleri bulunur.

Bu bölümde dalgalarla ilgili temel kavramlar, soliton dalga teorisi tanıtıldıktan sonra kuintik ve septik B-spline interpolasyon polinomları ile ilgili kısa bilgiler verilmiştir. Tezde, nümerik çözümleri araştırılacak olan Gilson-Pickering (GP) denklemi, Genelleştirilmiş Oskolkov denklemi, Kudryashov-Sinelschkov (KS) denklemi ve beşinci dereceden KdV (fKdV) denklemleri (Sawada-Kotera denklemi, Caudrey-Dodd-Gibbon denklemi, Lax denklemi, Kaup-Kuperschmidt denklemi ve İto denklemi) tam çözümleri ile birlikte verilmiştir.

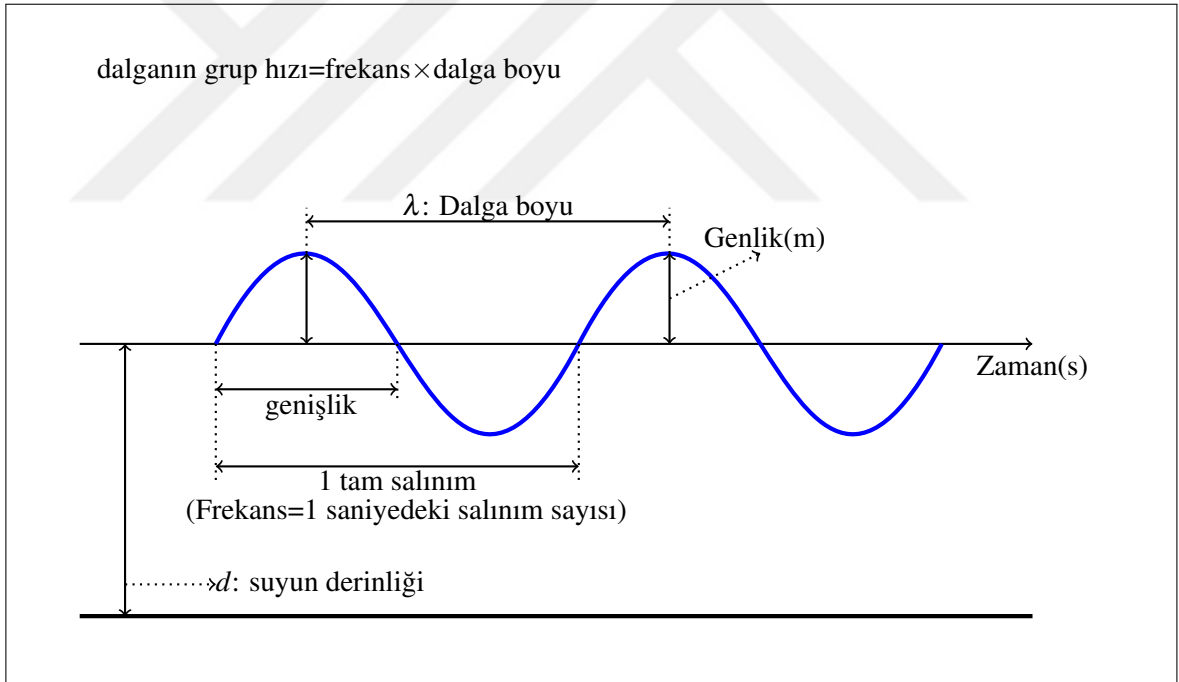
## 2. BÖLÜM

### TEMEL KAVRAMLAR

Bu kısımda kullanılan temel kavramlar hakkında bilgiler verilmiştir.

#### 2.1 Dalga Tanımı ve Çeşitleri

Bir fizik terimi olarak dalga, parçacıkların net hareketi olmadan enerji taşıyan bir ortamdaki periyodik bozulmadır. Dalgalar elastik deformasyon, basınç değişimi, elektrik veya manyetik yoğunluk, elektrik potansiyeli veya sıcaklık şeklinde olabilmektedir. Başka bir deyişle dalga, katı, sıvı veya gaz halindeki bir ortamın maruz kaldığı etkiyi iletmesidir. Dalgalar, sabit konumlarda meydana gelen titreşimlerden oluşur ve bir süreç boyunca nasıl hareket ettiklerini betimleyen bir dalga denklemi ile tanımlanırlar. Bu denklemlerin cebirsel ifadesi dalga tipine göre çeşitlilik göstermektedir [1].



Şekil 2.1 Basit bir dalga profili

##### 2.1.1 Titreşim Doğrultularına Göre Dalgalar

Titreşim doğrultularına bağlı olarak enine dalgalar veya boyuna dalgalar meydana gelebilir. Yayılmaya enerji transferine dik yönde bir titreşim meydana gelmesi enine dalgaların oluşmasına sebep olur. Işık dalgaları mekanik olmamakla birlikte enine dalgalardır. Eğer

titreşimler yayılma tarafına paralel ise boyuna dalgalar oluşur. Gaz içindeki ses dalgaları boyuna dalgalara bir örnektir.

### 2.1.2 Yayılma Ortamlarına Göre Dalgalar

Mekanik ve elektromanyetik dalgalar bu sınıfın içinde yer alır. Sabit konumlarda titreşimlerden oluşan dalgalar, belirli bir sürede nasıl ilerlediğini tanımlayan denklemlerle ifade edilirler. Yayılabilmesi için maddesel ortama ihtiyaç duyan bu tür dalgalara, mekanik dalgalar denir. Elektromanyetik dalgalar ise maddesel ortam olmadığı durumlarda da iletilebilirler. Yıldızlardan gelen ışığın boşluğa yakın bir ortamdan geçerek yeryüzüne ulaşması olayı örnek olarak verilebilir.

### 2.1.3 Enerji Yayıdıkları Boyutların Sayısına Göre Dalgalar

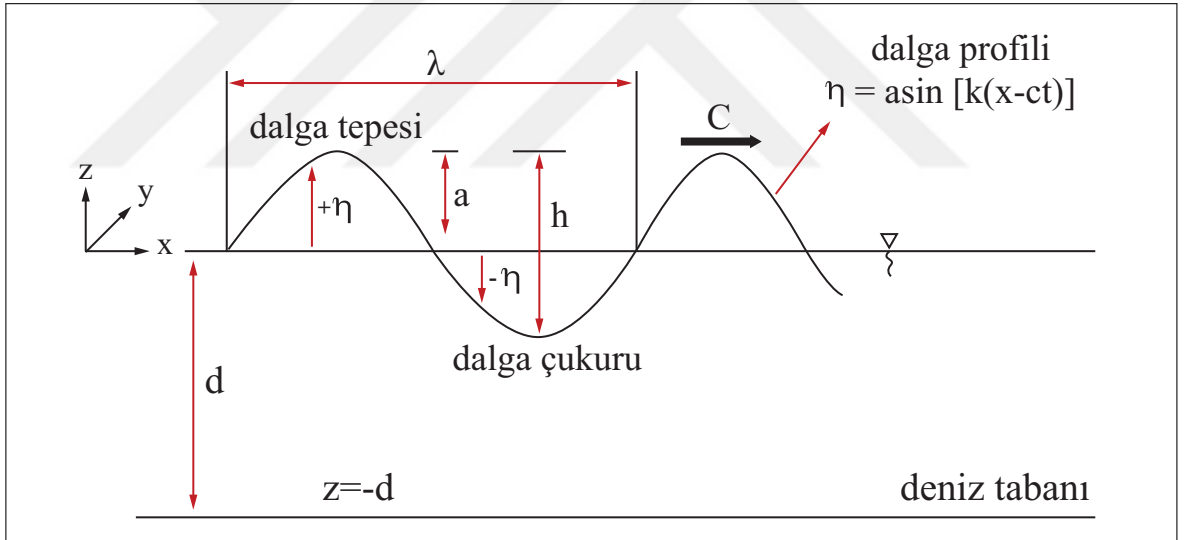
Dalgalar sınıflandırılırken enerji yaydıkları boyutların sayısal değerine göre *1-boyutlu*, *2-boyutlu* ve *3-boyutlu dalgalar* olarak isimlendirilirler. *1-boyutlu dalgalar* sicim ve yay boyunca hareket eden dalgalar örnek olarak gösterilebilir. Belirli bir yerde sabit duran bir su kütesine atılan sert bir cisim su yüzeyinde *2-boyutlu* bir dalga oluşturur. *3-boyutlu* dalgalara örnek olarak ise kaynağı tek bir nokta olan ve ışınsal yönde yayılan ses veya ışık dalgaları verilebilir [2].

## 2.2 Dalga İle İlgili Temel Kavramlar

- **Dalga Yönü (C):** Dalganın ilerlediği taraftır.
- **Dalga Profili ( $\eta$ ):** Su seviyesinden başlayarak dalganın yaptığı yer değiştirme eylemidir.
- **Dalga Tepesi:** Dalga profilinin en yüksek kısmıdır.
- **Dalga Çukuru:** Dalga profilinin en dip kısmıdır.
- **Dalga Boyu ( $\lambda$ ):** Ardışık iki dalga tepesi ya da iki ardışık dalga çukuru arasındaki mesafedir.
- **Dalga Sayısı ( $k = 2\pi/\lambda$ ):** Yatay uzunluktaki birim dalga boyunun  $2\pi$  katıdır.
- **Dalga Yüksekliği (h):** Art arda gelen dalga tepesi ve dalga çukuru arasındaki düşey mesafedir.



- **Dalga genliği ( $a$ ):** Bir dalgayı oluşturana taneciklerin denge noktasıyla, denge noktasına en uzakta buldukları noktanın arasındaki mesafedir.
- **Dalga Periyodu ( $T$ ):** Bir dalga boyunun belirli bir noktadan geğmesi için geçen süredir. Yani bir dalgaboyu bir periyot sürede üretilir. Dalga periyodu genellikle saniye cinsinden belirtilir. Örneğin; her 6 saniyede bir dalga gibi.
- **Dalga Frekansı ( $f = 1/T$ ):** Belirli bir zaman diliminde sabit bir noktadan birim zamanda geçen dalga sayısıdır.
- **Dalga Yayılma Hızı ( $c = \lambda/T$ ):** Faz hızı olarak da adlandırılan dalga yayılma hızı, ilerleyen bir dalganın hızını ifade eder. Dalga yayılma hızı  $m/sn$  cinsinden ifade edilir.
- **Dalga Dikliği ( $h/\lambda$ ):** Dalga yüksekliğinin dalga boyuna oranıdır. Bu değer büyüdükçe dalga daha dik ve sivri bir hal alacaktır.



şekil 2.2 Sinüzoidal bir dalganın karakteristik gösterimi

### 2.3 Dalga Teorisi

Dalga konusunun tanımlanması matematiksel ifadelerle tam olarak mümkün olmamaktadır ve bu sorun hala araştırmacıların önemli ölçüde dikkatini çekmektedir. Dalganın matematiksel hesaplamalarda kullanılabilmesi için birtakım farklı bakış açılarıyla dalga formları tanımlanmaya çalışılmıştır. Bir dalgaya ait tüm gruplarda oluşan dalgalar cebirsel olarak tanımlanan dalga denklemleri formu ile eşdeğer olmak zorundadır. Bu eşdeğer olma durumu lineer veya lineer olmama şeklinde ifade edilebilen sınır şartlarına bağlıdır.

Dalga yüksekliği; dalga boyu ve su derinliği ile kıyaslandığında oldukça küçük ise matematiksel ifadeler lineer formda ifade edilebildiğinden literatürde bu tip dalgalar lineer veya Airy dalga olarak adlandırılırlar.

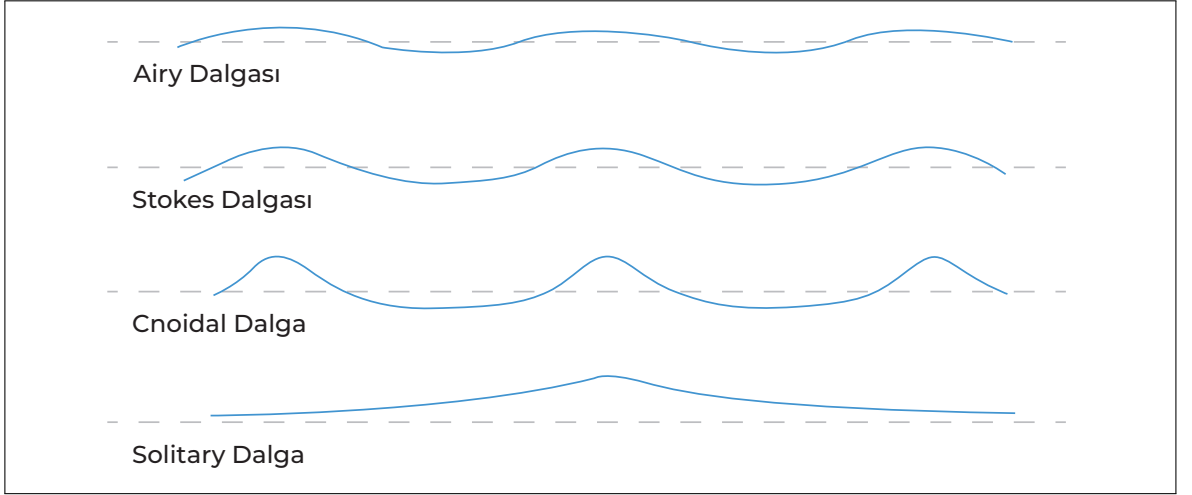
### 2.3.1 Küçük Genlikli Dalgalar (Lineer Dalga Teorisi)

Kaynaklarda *Airy 1. mertebe dalga teorisi* veya *sinüzoidal dalga teorisi* olarak da ifade edilebilen lineer dalga teorisi, ilk olarak 1845 te ortaya konmuştur. Airy dalgası, iki boyutlu ideal sıvı akışı kavramları kullanılarak türetilmiştir. Bu, viskozite, yüzey gerilimi veya türbülansın büyük ölçüde etkilenmeyen okyanus dalgaları için makul bir başlangıç noktasıdır. Teorinin uygulanması oldukça basit olmasının yanı sıra pek çok problemin çözümünde epey kullanışlı ve pratik çözümlere sahip olduğundan konu ile ilgili mühendisler tarafından tercih sebebi olmuştur. Fakat bu, teorinin her durum ve şartta uygulanabilir olacağı anlamına gelmemektedir. Lineer dalga teorisinin en önemli avantajı teorinin süperpozisyon ilkesine dayalı olmasıdır. Bu durum, sadece sinüzoidal formdaki küçük genlikli dalgalar için geçerlidir.

Küçük genlikli dalgalarda  $h/\lambda$  oranının limiti sifıra yaklaşmalıdır. Bu dalgaların formu matematiksel olarak ifade edilirken sinüs eğrisine karşılık gelmektedir (sinüzoidal dalgalar). Küçük genlikli dalga teorisi  $h/\lambda < 1/20$  olduğu durumlarda genellikle doğru sonuç veriyor denilebilir. Küçük genlikli dalgalar matematiksel olarak tanımlanırken sınır şartlarındaki ikinci veya daha yüksek mertebeden olan şartlar ihmal edilir.

### 2.3.2 Büyük Genlikli Dalgalar (Lineer Olmayan Dalga Teorisi)

Stokes, Cnoidal ve Solitary dalga teorileri farklı derinlikler için oldukça yaygın şekilde kullanılan lineer olmayan dalga teorileridir. Stokes dalga teorisi orta derinlikte ve derin sulardaki dalgalar için pratik bir şekilde kullanılabilir. 5.mertebeden Stokes dalga teorisi gerçek dalga profillerini vakit geçtikçe tahmin etmeyi başarmıştır. Bu dalga teorisi, dalga kinematikini belirlemek için kıyı ve açık deniz yapılarının tasarımında kullanılır ve dalga problemleri için kayda değer bir analitik çözüm sunar. Gerçek bir dalga profili, bir sinüs eğrisine göre daha kısa, daha yüksek tepelere; daha uzun ve daha sığ çukurlara sahiptir.



Şekil 2.3 Küçük ve büyük genlikli dalga tipleri

### 2.3.2.1 Büyük Genlikli Dalga Çözümleri

#### Lineer Olmayan Dalgalarda Stokes'un Pertürbasyon yaklaşımı

Stokes, kendi adı ile anılan teorisini geliştirirken sonlu yükseklikteki yer çekimi merkezli dalgaları inceleyebilmek için pertürbasyon etkisinden yararlanmıştır. Stokes Teorisi'nde hız potansiyeli, boyutsuz bir parametrenin  $\varepsilon = ka$  şeklindeki kuvvet serileri olarak gösterilmektedir. Bu kuvvet serileri yerlerine konulurken sınır ve süreklilik koşulları esas alınmıştır. Bu şekilde meydana gelen bağıntılar  $\varepsilon$  un artan kuvvetleri baz alınarak, düzenlenip oluşan seri katsayılarından yüksek mertebeden dalga teorileri oluşturulmuştur. Kullanılan boyutsuz parametre pertürbasyon parametresi ismini alır. Problemin çözümünü elde edebilmek için Laplace denklemi ve belirlenen sınır ve süreklilik koşullarını pertürbasyon parametresi formunda yazmak gerekir. Bu haliyle, “g” yerçekimi ivmesini , “a” dalga genliğini ve “k” ise dalga sayısını göstermek üzere aşağıdaki boyutsuz parametreler tanımlanabilir:

$$\begin{aligned}
 X &= kx, \\
 Z &= kz, \\
 \Phi &= \frac{k\phi}{a\sqrt{gk}}.
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

Yeni tanımlanan değişkenlerle Laplace denklemi

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Z^2} = 0,
 \tag{2.2}$$

şeklini alır.

Küçük genlikli dalga teorisinde ise, lineer olmayan koşullar ortalama su seviyesinde  $Z = 0$  civarında incelenir ve  $(\frac{\partial \Phi}{\partial X})^2$  gibi minimal ifadeler ihmal edilir. Sonuç olarak,  $(ka)^2$  terimi  $ka$  ile karşılaştırıldığında çok daha küçük olduğu görülür. Fakat pertürbasyon yaklaşımında sonucun  $\varepsilon$  ile ifade edilen  $ka$  ifadesine bağlı olduğu düşünülür. Bunun sonucu olarak lineer çözüm  $\varepsilon$  a bağlı olmadığı durumlarda ikinci, üçüncü mertebeden çözümler  $\varepsilon^2, \varepsilon^3$  gibi büyüklüklere bağlı olacaktır.

### 2.3.2.2 Akım Fonksiyonu Dalga Teorisi

Yüksek mertebeden problem çözümlerinin hesaplanması zor olduğundan, Stokes Teorisi'nin bilgisayar ortamında veya daha farklı yollarla hesaplanabilmesi için daha kolay teorilere ihtiyaç duyulmuştur. Bu teorilerden biri Dean tarafından Akım Fonksiyonu Dalga Teorisi olarak adlandırılmıştır [3]. Schwarz [4] tarafından ortaya konulan ve Cokelet [5] tarafından geliştirilen bir metotla ilk olarak tepe noktasındaki dalga yüksekliğini ve daha sonra su dalgalarının karakteristiklerini hesaplamak mümkün olmuştur. Bu metot, Fourier serisi ile kompleks bir çözümü ve pertürbasyon terimleri şeklindeki Fourier çarpanlarını içerir.

### 2.3.2.3 Cnoidal Dalga Teorisi

$h/\lambda$  dalga dikliğini göstermek üzere, cnoidal dalga teorisi  $1/50 < h/\lambda < 1/10$  aralığında geçerlidir. Bu aralık, bazı durumlarda hem Stokes hem de solitary dalga teorileri için de geçerli olmaktadır. Cnoidal dalga teorisi eliptik fonksiyonlarla ifade edilmekte olup cnoidal ifadesi “*elliptic cosine*” fonksiyonunun kısaltması olan *cn.*'den gelmektedir [6].

### 2.3.2.4 Solitary Dalga Teorisi ve Solitonlar

Solitonlar ve solitary dalgaların tarihi 1800 lü yılların başlarına kadar uzanmaktadır. Solitary dalgaların ilk keşfi 1834 yılında İskoçyalı gemi inşaatı mühendisi olan John Scott Russell tarafından yapılmıştır. Hermiston'da bulunan Union kanalında kat kanallarına yönelik mavna tasarımlarının verimliliğinin nasıl artırılacağına dair araştırmalar yapan Russell, hem hızında hem de şeklinde hiçbir değişim olmaksızın iki mil civarında ilerleyen yuvarlak, pürüzsüz ve sakin bir su kütlesi gözlemlemiştir.

Russell, bu gözlemini “Report on Waves” adlı eserinde şöyle dile getirmiştir [7]:

*“Dar bir kanal boyunca bir çift at tarafından hızla çekilen bir teknenin hareketini gözlemliyordum, tekne aniden durduğunda kanalda teknenin harekete geçirdiği su kütlesi hareket etmeye başladı; şiddetli çalkalanma durumunda teknenin burun kısmı etrafında*

*birikti ve daha sonra su öbeği aniden bulunduğu yerden ayrıldı; Büyük bir tek yükselti formunda, yuvarlak ve pürüzsüz bir su yığını hızla ileriye doğru yuvarlandı. Hızında bir azalma ve şeklinde bir değişiklik olmaksızın ilerlemeye devam etti. Saatte sekiz veya dokuz mil hız ile otuz fit uzunluğunda ve bir, bir buçuk yarı yüksekliğinde şeklini koruyarak hala yuvarlanıyordu. Yüksekliği kademeli olarak azaldı ve bir iki mil onu kovaladıktan sonra kanalın kavislerinde onu kaybettim. Böylece, 1834 yılının Ağustos ayında “çevirimli dalga” olarak adlandırdığım yegane ve güzel oluşum ile tanışma şansım oldu.”*

1995 yılında Russell’ın deneyi İskoçya’nın başkenti Edinburgh şehrinde bulunan Heriott-Watt Üniversitesi öğrencileri tarafından yeniden canlandırılmış ve bu canlandırma olayı Şekil 2.3 te gösterilmiştir:



Şekil 2.4 Russell’ın yaptığı deneyin Union Kanalında tekrar canlandırılması

Russell bu tesadüfi gözlemin peşine düşmüş ve daha sonra bir dalga tankı kullanarak kontrollü laboratuvar deneyleri yapmıştır. Solitary dalgaları elde edebilmek için su tanklarının bir tarafına ağırlık koyarak deneyler yapmış ve bunun sonucunda solitary dalgalara dair aşağıda belirtilen ispatları yapmıştır [7]:

- Gözlemlenen solitary dalgalar hiperbolik sekant fonksiyonu  $h \sec h^2(k(x - vt))$  şeklindedir.

- Başlangıçta yeteri kadar büyük bir su kütlesi, artan zaman adımlarında birbirinden ayrılabilen iki ya da daha fazla bağımsız tek dalga üretebilir.
- Solitary dalgalar çarpıştıktan sonra, ”*özelliklerinde herhangi bir değişiklik olmaksızın*” hareketlerine devam edebilir ve uzun mesafeler boyunca kararlı bir şekilde ilerleyebilirler.
- $h$  yüksekliğindeki sığ bir su kanalında,  $A$  genliğine sahip bir solitary dalga  $g$  yerçekimi ivmesi olmak üzere,  $v = \sqrt{g(d+h)}$  hızında hareket eder. Yani, daha büyük genlikli dalgaların küçük genlikli olanlardan daha hızlı hareket edebildiği gözlemlenmiştir.

Bir solitary dalganın hızı ve genliği birbiriyle orantılıdır. Büyük genlikli solitary dalga, küçük genlikli solitary dalgaya göre daha hızlı hareket eder. Bunun sonucunda solitary dalgaların normal dalgalardan farklı olduğu söylenebilir. Mesela farklı frekanslardan gelen ses dalgalarını kulağımız aynı anda duyar. Bu iletim solitary dalgası ile yapılmış olsaydı yüksek frekanslı ses daha önce duyulurdu. Yine insan vücudunda bulunan sinirler arasındaki iletişim normal dalgalar ile gerçekleşmez. Sinirler insan beynine gelen bilgileri bir solitary dalga oluşturarak normal dalgalara kıyasla daha kısa ve daha hızlı bir şekilde iletirler.

Büyük öteleme dalgası adı verilen bu ilk keşiften sonra Russell, solitary dalgaların büyük öneme sahip olduğunu iddia etmiş, ancak birçok bilim adamı onunla aynı fikirde olmamıştır. George Airy ve George G. Stokes gibi önde gelen bilim adamları solitary dalgaların teorik bir açıklamasını yapmaya çalışmışlar, ancak başarılı olamamışlardır. Airy, tek bir dalganın doğrusal sığ su teorisinin bir sonucu olduğunu yanlış bir şekilde savunmuş, Stokes ise solitary dalgaların kalıcı biçiminden şüphe etmiştir. Solitary dalgaların ilk teorik tanımı 1871 yılında Boussinesq [8] ve 1876 yılında ise Rayleigh [9] tarafından yapılmıştır. Ancak, solitary dalgaları içeren tartışmalar Korteweg ve de Vries’in 1895 yılında ünlü KdV denklemi üzerindeki çalışmalarına kadar devam etmiştir.

Korteweg ile öğrencisi Gustav de Vries doğrusal olmayan bir kısmi diferansiyel denklem olan KdV denkleminin Russell’ın çalışmalarını destekleyebileceğini de Vries’in doktora tezinde savunmuşlardır. KdV denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \epsilon \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \gamma u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.3)$$

şeklinde olup, sığ su dalga hareketini betimleyen bir denklemdir.

Bu denklem,  $u(x,t) = h \sec h^2(x-vt)$  biçiminde bir tam çözüme sahiptir. Korteweg ve öğrencisi de Vries, Russell’ın gözlemlendiği dalgaya benzeyen solitary dalga çözümüne ek

olarak, denklemin periyodik çözümlerinin pozitif dikey düzlemde yalnız bir tepe formunda olabileceğini göstermişlerdir. Yine doktora tezinde denklemin ürettiği dalgaların kararlı olup olmadıkları ve iki solitary dalganın çarpışmadan sonra şekillerinde bir değişiklik olup olmayacağı hakkında yeterli bir bilgi vermemişlerdir. 1950 li yılların sonlarına doğru Gardner ve Morikawa, KdV denkleminin çarpışmasız hidro-magnetik dalgalar üzerine ilginç yeni bir uygulamasını keşfetmişlerdir [10]. Çünkü o zamana kadar KdV denkleminin genellikle küçük fakat sonlu genlikteki dalgaların doğrusal olmayan dağıtıcı ortamlardaki tek yönlü dağılımlarını açıkladığı düşünülmekteydi. 1965 yılına gelindiğinde ise N. J. Kruskal [11] ve M. D. Zabusky [12], KdV denkleminin çözümlerini sonlu farklar yöntemi ile incelerken, solitary dalgaların çarpışmadan sonra da şekillerini muhafaza ettiklerini fark etmişler ve bu özelliğin proton, nötron, foton gibi parçacıkların çarpışmasına benzemesinden hareketle bu tip dalgalara ”*soliton*” adını vermişlerdir. Bu çalışma ile soliton dalgaların keşfedilmesi, dalgalar teorisi tarihinde önemli bir dönüm noktası olmuştur. Şöyle ki soliton çözümlerinin bulunmasından önce lineer olmayan oluşum denklemlerinin tam çözümlerinin elde edilemeyeceği düşünülüyordu. Ancak geliştirilen Ters saçılma dönüşümü, Hirota teknikleri ve Lax çiftleri gibi metotlar ile integrallenebilen ve doğrusal olmayan denklemlerin çözümleri elde edilebilmiştir. Yine soliton çözümlerinin elde edilmesinden önce lineer olmayan denklemlerin çözümlerinin lineer birleşimi bir çözüm olarak belirtilemiyordu. Buna rağmen solitonların keşfedilmesi ile birlikte soliton tipinde çözümü var olan lineer olmayan dalgalar için süperpozisyon prensibi tanımlanmıştır. Nihayet 1967 yılında Gardner, Kruskal, Greene ve Miura tarafından Ters saçılma dönüşüm yöntemi keşfedilerek KdV denkleminin soliton tipi analitik çözümleri bulunmuştur [13].

Solitary dalgalar, sonlu genliğe sahip, sabit hız ve şekil ile ilerleyen hareketli dalgalardır. Bir çarpışmadan sonra dağılırlar ve tek bir dalga paketinde birleşirler. Bir süre sonra bu tek dalga, çarpışmadan önceki aynı hız ve şekle sahip iki solitary dalgaya ayrılır. Dolayısıyla çarpışma, hiçbir dalga formuna zarar vermez. Lineer olmama durumu, bir solitary dalganın daha uzakta toplanmasına neden olur. Dağılma, bir yerde toplanmış dalganın yayılma efektidir. Dağılmayan dalgalar olarak bilinen solitonlar ise,

1. Sabit hızla hareket ederken şekillerini koruyan,
2. Başka bir soliton ile etkileşime girdiğinde, muhtemelen bir faz kayması dışında, ”çarpışmadan” değişmeden çıkan,

ve

3. "Parçacık" gibi davranan,  
solitary dalgalar olarak tanımlanabilir [2].

Literatürde soliton ve solitary dalga terimleri sıklıkla birbirinin yerine kullanılmaktadır. Solitary dalgalar ve solitonlar, hem KdV denklemi gibi sürekli sistemlerde hem de Toda kafesi gibi ayrık sistemlerde bir veya çoklu boyutlarda ortaya çıkar. Birçok fiziksel sistem, soliton çözümleri kabul eden denklemler kullanılarak oldukça başarılı bir şekilde modellenenbilir. Gerçekten de solitonlar ve solitary dalgalar birçok durumlarda gözlemlenmiştir ve genellikle uzun süreli davranışlara hakimdirler. Solitonlar birçok lineer olmayan sistemin teorik ve bilimsel araştırmalarda kullanılmasını sağlayan yaygın çözümlere sahiptirler.

Solitonların özellikleri aşağıdaki gibi sıralanabilir:

**İntegrallenebilirlik:** Soliton çözümler bulunmadan önce lineer olmayan oluşum denklemlerinin analitik çözümlerine ulaşamayacağı düşünülüyordu. İntegrallenebilen lineer olmayan oluşum denklemlerinin çözümleri için ters saçılma yöntemi, Hirota teknikleri ve Lax çiftleri gibi yöntemler keşfedilmiştir.

**Parçacık tipi davranış:** Solitonların parçacık şeklindeki davranışı çoğu lineer olmayan sistemlerin uygulama alanlarının bulunması konusunda yol gösterici olmuştur. Solitonların başka bir soliton ile etkileşime girdiğinde şeklini koruması ve dağılmaması özelliği, teorik fizikçilerin parçacıkları soliton gibi modellemesi adına ikna edici olmuştur. Dolayısıyla parçacıkları anlamının en iyi yolu solitonlardır. Özellikle kuantum fiziğinde parçacıkların hareketleri solitonlar şeklinde ifade edilebiliyor. Solitonlar yardımı ile okyanustaki iç dalgalar ya da fiber optik kablolarındaki ışığın hareketi ifade edilebilir.

Solitary dalgaların ve solitonların keşfinden bu yana, hem tek hem de çoklu boyutlarda yerleştirilmiş dalgaların birkaç çeşidi aşağıdaki gibi verilebilir:

1. **Süreksiz türevli solitary dalgalar:** Bu tür solitary dalgalara örnek olarak, sonlu dalga uzunluğuna sahip kompaktlar (dirençli solitonlar) verilebilir.
2. **Topolojik solitonlar:** Sinüs-Gordon denkleminin bazı çözümleri gibi topolojik kısıtlamalar nedeniyle ortaya çıkan solitonlardır. En yaygın örneklerinden biri genellikle saat yönünde sarılmış eski moda sarmal telefon ahizesi kablolarında görülür. Ahizeyi yıllarca elinize almanız, kablonun parçalarının saat yönünün tersi yönünde sarılmasına neden olabilir ve bu olduğunda, iki sarma yönünü ayıran belirgin daha büyük bir halka olacaktır. Ne saat yönünde ne de saat yönünün tersine olan bu tuhaf



görünümlü geçiş döngüsü, topolojik solitonun mükemmel bir örneğidir.

3. **Girdap (Vortex) Solitonlar:** Girdap halkaları ve girdap çizgileri gibi olaylarda sıklıkla karşılaşılan bir solitondur.
4. **Dağıtıcı Solitonlar:** Bu solitonlara mekânsal olarak genişletilmiş enerji tüketen sistemlerde ortaya çıkan kararlı yerel solitonlar örnek verilebilir.
5. **Osillonlar:** Bu tür solitonlara örnek olarak tanecikli ve enerji tüketen ortamlarda ortaya çıkan serbest parçacık tabakasıyla kaplanmış bir plakanın dikey titreşiminden kaynaklanan lokalize dalgalar verilebilir.
6. **Gap Solitonlar:** Sürekli sistemlerin spektrumunda sonlu boşluklarda meydana gelen solitary dalgalardır [2].

## 2.4 Lineer Olmayan Oluşum Denklemleri

Hem  $t$  zamanını hem de  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  uzayını bağımsız değişkenler olarak içeren kısmi türevli diferansiyel denklemlere oluşum denklemleri denir.  $F[u]$ ;  $u$  terimini ve  $u$  nun  $x$  değişkenine göre türevlerini kapsayan bir fonksiyon olacak biçimde,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F[u], \quad (2.4)$$

şeklinde ifade edilir.  $F[u]$  fonksiyonunun  $u$  terimine göre lineer olduğu durumda, lineer oluşum denklemleri adını alır.  $F[u]$  nun  $u$  terimine göre lineer olmadığı durumda ise lineer olmayan oluşum denklemleri denilmektedir [17].

Lineer oluşum denklemlerine örnek olarak lineer dalga denklemleri ve bir teldeki titreşimi, ısı iletimini ifade eden denklemler verilebilir. Lineer olmayan oluşum denklemleri fizik, mekanik ve kimya gibi çeşitli alanlardaki problemlerde ortaya çıkmaktadır. Örneğin, en bilinen lineer olmayan difüzyon denklemi aşağıda verilen Burgers denklemi olarak bilinir:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (2.5)$$

Bu denklem, hem lineer olmayan hem de viskoz etkileri birleştiren basitleştirilmiş bir akışkan dinamiği modeli olarak kabul edilebilir. İkinci mertebeden lineer olmayan oluşum denklemlerine örnek olarak, birim zamanda ısı üreten bir ısı kaynağı ile herhangi bir cisimde meydana gelen ısı transferi incelendiğinde

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}(k\nabla u) + F[u] \quad (2.6)$$

biçimindeki lineer olmayan ısı denkleminde ulaşılabilir.

Travelling wave olarak da bilinen ilerleyen dalgalar, bir ortamda (ya da uzayda) hareket eden herhangi bir şekil oluşturmayan sabit titreşimli dalgalardır. Bu dalgaların varlığı hiperbolik denklemler ile gösterilen olguların tanımlanmasıyla ortaya çıkmıştır. Sinir impulsların ilerlemesi, genetiği değiştirilmiş (veya klonlanmış) organizmalar veya kimyasal yanma olayı bir ilerleyen dalga davranışı gösterir. Tüm bu alanlardaki ortak nokta, dalga ilerleyişi teriminin en basit bir boyutlu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.7)$$

şeklindeki lineer olmayan dalga denklemi ile modellenmesidir. Burada  $c$ , denklemin başlangıç koşulları tarafından belirlenen pozitif keyfi bir sabittir. Dalga denklemi esasında bir keman telinin titreşimini tanımlamak için geliştirilmiştir. Lineer olmayan oluşum denklemleri ile Kuantum mekaniğinde de karşılaşılmaktadır. Örneğin; Klein-Gordon Denklemi, (Klein-Fock-Gordon Eşitliği olarak da bilinir.) O. Klein ve W. Gordon tarafından bulunan denklem Schrödinger denkleminin bağıl versiyonudur. Atomaltı fizik alanında kendi eksenini etrafında dönmeyen parçacıkları tanımlar. Bu denklem aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + \alpha u + \beta u^3 = 0. \quad (2.8)$$

Kübik-Kuintik Schrödinger denklemi ilk olarak 2003 yılında  $\alpha, \gamma$  reel değerli sabitler olmak üzere,

$$i \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \gamma |u|^2 u = 0 \quad (2.9)$$

biçiminde verilmiştir. Bu denklem, lineer olmayan optikte ve matematiksel fizikte büyük bir öneme sahiptir. Yüksek mertebeden lineer olmayan oluşum denklemlerine diğer bir örnek ise

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (2.10)$$

formundaki KdV denklemdir [17].

#### 2.4.1 Korunum Kanunları

Oluşum denklemlerinin korunum kanunu,  $Z[u]$  ve  $I[u]$  sırasıyla,  $u$  ve  $u$  fonksiyonunun  $x$  değişkenine göre türevlerini içeren korunumlu yoğunluk ve ilgili akı olmak üzere

$$Z_t + I_x = 0 \quad (2.11)$$

biçimindedir.  $Z_t$ ;  $t$  ye göre ve  $I_x$ ;  $x$  e göre tam diferansiyeli göstermek üzere aşağıdaki gibi tanımlanırlar:

$$\begin{aligned} Z_t &= \frac{\partial Z}{\partial u} u_t + \frac{\partial Z}{\partial u_x} u_{tx} + \dots, \\ I_x &= \frac{\partial I}{\partial u} u_x + \frac{\partial I}{\partial u_x} u_{xx} + \dots \end{aligned} \quad (2.12)$$

Eğer  $Z$  ve  $I$ ,  $u$  nun lokal bir fonksiyonu ise, (2.11) ile belirtilen eşitlik lokal korunum kanununu ifade eder.  $Z$ ,  $u$  ve  $u$  nun  $x$  e göre türevlerine bağlıysa,  $Z$  polinomsal korunumlu yoğunluk adını alır.  $I$  ifadesi polinom ifadesi ise, (2.11) polinomsal korunum kanunu olur. (2.11) denkleminin  $x$  değişkenine göre, bir  $(A, B)$  aralığı üzerinde integrali alındığında

$$\int_A^B \frac{\partial}{\partial t} Z dx + I|_A^B = 0 \quad (2.13)$$

olur.  $x \rightarrow \pm\infty$  ve  $(A, B) = (-\infty, +\infty)$  iken  $u(x, t) \rightarrow 0$  gibi periyodik sınır şartları göz önüne alınarak (2.13) eşitliğinden

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_A^B Z dx = 0 \quad (2.14)$$

bulunur.  $t$  değişkenine göre integrali alındığında

$$\int_A^B Z dx = sbt \quad (2.15)$$

şeklinde korunum sabiti bulunur [18]. Soliton teoride en fazla bahsi geçen (2.10) KdV denklemi, sonsuz sayıda korunum kanununa sahiptir. Bu ifadeler KdV denklemi için sırasıyla kütle, momentum ve enerjiyi gösterir:

$$\begin{aligned} Z_0 &= u, & I_0 &= -u_{xx} - 3u^2, \\ Z_1 &= \frac{1}{2}u^2, & I_1 &= -uu_{xx} + \frac{1}{2}u_x^2 - 2u^3, \\ Z_2 &= u^3 - \frac{1}{2}u_x^2, & I_2 &= u_x u_{xxx} - \frac{1}{2}u_{xx}^2 - 3u^2 u_{xx} + 6uu_x^2 - \frac{9}{2}u^4, \end{aligned} \quad (2.16)$$

şeklindedir.

## 2.5 Sonlu Farklar Yöntemi

Bir çok alanda karşılaşılan kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümleri mevcut olmadığında veya çok karmaşık olduğunda, bu denklemleri çözmek için nümerik yöntemler kullanılır. Sonlu farklar yöntemi, bu denklemlerin yaklaşık çözümlerinde yaygın olarak kullanılan sayısal yöntemlerden biridir. Sonlu farklar yöntemi; bir diferansiyel denklemin çözüm bölgesinin sonlu sayıda eşit veya farklı boyutta kafeslere bölünerek, her bir bölünme noktasındaki türev değerleri yerine, Taylor seri açılımı yardımı ile hesaplanan sonlu fark

yaklaşımlarından birinin yazılması ile elde edilen nümerik yöntemdir. Elde edilen sonlu fark denkleminde çözüm bölgesinde yer almayan hayali düğüm noktalarını yok etmek amacıyla problem ile birlikte verilen sınır şartları yerine sonlu fark yaklaşımları yazılır. Bu şekilde bilinmeyen sayısı kadar cebirsel denklemden oluşan bir denklem sistemi elde edilir. Bu cebirsel denklem sistemi direkt ya da çeşitli iteratif yöntemler ile bilgisayar programları yardımıyla çözülebilmektedir. Bu cebirsel denklemlerin çözümü, bazı komşu noktalardaki değerlere bağlıdır.

Bir diferansiyel denklem sonlu fark formunda aşağıdaki yöntemlerden biri ile çözülebilir:

1. Açık Yöntem (Explicit),
2. Kapalı Yöntem (Implicit),
3. Crank-Nicolson Yöntemi.

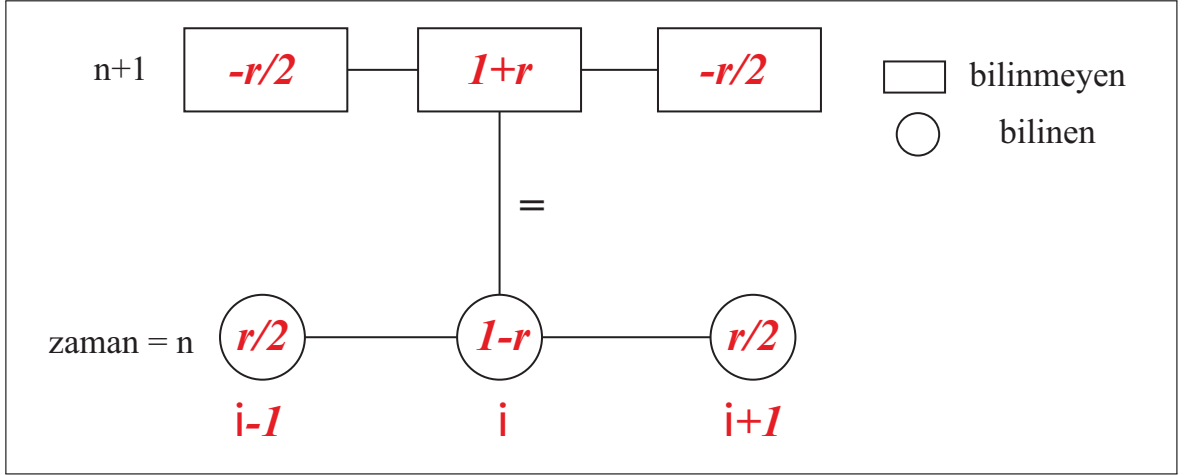
### 2.5.1 Crank-Nicolson Yöntemi

Nümerik analizde ikinci mertebeden bir sonlu fark metodu olan Crank-Nicolson formülasyonu, 1947 de J. Crank ve P. Nicolson tarafından ortaya atılmıştır [14]. Bu iki bilim insanı, çalışmalarında iki değişkenli bilinmeyen içeren  $u(x,t)$  diferansiyel denkleminin sonlu fark yaklaşımı ile sayısal çözümünü araştırmak amacıyla bilinmeyen fonksiyon ve onun türevlerine,  $\Delta t$  zamanı göstermek üzere

$$\begin{aligned}u_t &\simeq \frac{u^{n+1}-u^n}{\Delta t}, \\u &= \frac{u^{n+1}+u^n}{2}, \\u_x &= \frac{u_x^{n+1}+u_x^n}{2},\end{aligned}\tag{2.17}$$

formunda yaklaşımlar önermişlerdir. Burada,  $u(x,t)$  nin zamana göre türevi alınırken ileri sonlu fark yaklaşımı kullanılırken bilinmeyen fonksiyon ve konuma göre ardışık iki ayrık zamandaki ortalamaları hesaplanır. Zamana göre türev alındığında geri sonlu fark ve merkezi sonlu fark yaklaşımları da kullanılabilir.

Denkleminde birden fazla bilinmeyen bulunduğundan, Crank-Nicolson şeması da örtük bir şemadır, dolayısıyla  $u$  alan değişkenini elde etmek için her zaman seviyesinde bir lineer cebirsel denklem sisteminin çözülmesi gerekir. Crank-Nicolson şemasının taslağı şu şekildedir:



Şekil 2.5 Crank-Nicolson Şeması

Herhangi bir  $t^{n+1}$  zaman seviyesi için Crank-Nicolson yönteminde üretilen lineer cebirsel denklem sistemi seyrektr. Çünkü herhangi bir uzay düğüm noktasında,  $i$  ve  $t^{n+1}$  zaman adımında elde edilen sonlu fark denklemi, uzayı içeren sadece üç bilinmeyen katsayıya sahiptir.  $i-1$ ,  $i$  ve  $i+1$  düğümleri  $t^{n+1}$  zaman adımındadır, bu nedenle matris notasyonunda bu denklem sistemi  $AU = B$  olarak yazılabilir. Burada  $U$ ; herhangi bir  $t^{n+1}$  zaman adımında  $(N-1)$ . mertebeden bilinmeyen vektördür.  $B$ ,  $n$  inci zaman adımında  $U$  nun değerlerine sahip olan  $(N-1)$ . mertebeden bilinen bir vektördür.  $A$  matrisi ise  $(N-1) \times (N-1)$  mertebesinde  $3$  - bant katsayı matrisidir.

Zamana bağlı tek boyutlu ısı denklemi;  $c$  reel bir değer,  $h$  konum,  $t$  zaman koordinatı ve  $u$  ise sabit kesitli uzun ince bir çubuk üzerindeki sıcaklık dağılımı ve ısı ileten malzeme olmak üzere,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (2.18)$$

biçimindeki bir kısmi türevli diferansiyel denklemdir. Bu denklemdeki zaman türevi terimine ileri sonlu fark yaklaşımı ve konum türev terimi için merkezi fark yaklaşımı uygulandığında,

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = c \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{h^2}, \quad (2.19)$$

elde edilir. İlgili türevler için Crank-Nicolson şeması ise bu iki şemanın ortalaması olarak elde edilir:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{c}{2} \left[ \frac{u_{i-1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1}}{h^2} + \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{h^2} \right], i = 1, 2, 3, \dots, n-1, n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.20)$$

(2.20) denklemindeki her bir  $i$  için birden fazla bilinmeyen olduğundan, Crank-Nicolson şeması kapalı (örtük) bir şemadır. Dolayısıyla,  $u$  değişkenini elde etmek için her zaman adımında lineer cebirsel denklem sistemini çözmek gerekir.

### 2.5.2 Thomas Algoritması

Sonlu elemanlar yöntemi ile diferansiyel denklemlerin sayısal ayrıştırılması esnasında meydana gelen cebirsel denklem sistemlerinin katsayı matrisleri bant matrisleri şeklindedir. Katsayı matrisleri bant matrisler olan cebirsel sistemlerin çözümlerinde sıklıkla başvurulan metotlardan biri Thomas algoritmasıdır. Bu algoritma genellikle katsayı matrisinin çoğu sıfır olan elemanları için bilgisayar hafızasında gereksiz yer işgal etmemek ve gereksiz işlemlerden kaçınmak amacıyla  $(N \times N)$  boyutunda bir katsayılar matrisi yerine  $(N \times 3)$  boyutlarında bir katsayılar matrisi kullanacak biçimde bir düzenleme ve buna uygun bir çözüm algoritması kullanılması durumunda tercih edilir. Thomas algoritması aslında Gauss eliminasyon yönteminin üç kolonlu bir dikdörtgensel matris kullanılarak yapılan özel bir uygulamasıdır. Temel mantığı, Gauss eliminasyon metodunda katsayıları sıfır geldiğinde yok etmelerin gerçekleştirilmemesidir. Thomas algoritması 3 – bant, 5 – bant, 7 – bant, ... gibi tek bant matrisler için kullanılmaktadır. Algoritma çift bant genişliğine sahip olan matrisler için modifiye edilmiş hali ile kullanılır. Algoritma genellikle iki temel kısımdan oluşur. İlk olarak, katsayı matrisinin köşegeni altındaki elemanlarının elenmesi işlemi, ikinci kısımda ise çözümün ortaya konulmasıdır.

Thomas algoritması, 3 – bant matris sistemlerini çözmek için etkili bir yoldur. Algoritmadaki yenilik, Gauss eliminasyonunun ileri eleme ve geriye doğru yerine koyma yöntemi ile çözümün elde edilmesidir.

### 2.6 Sonlu Elemanlar Yöntemi

Diferansiyel denklem şeklinde ifade edilen bir fiziksel problemi çözmek için en iyi yolu, kapalı bir analitik çözüm elde etmektir. Ne yazık ki, analitik çözümün elde edilmesinin zor olduğu veya analitik bir çözümün bulunmadığı birçok durum vardır. Analitik çözüm elde etmek için fiziksel olayın matematiksel formda ifade edilebilmesi gerekir. Bu, uygun sınır koşullarının

uygulanması için gereklidir. Ancak, matematiksel temsil yapılamıyorsa o zaman problemi analitik yöntemle çözmek imkansız bir hale gelir. Bazı durumlarda ise problemin esas diferansiyel denklemi doğrusal olmayabilir. Doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü için genel bir analitik yöntem yoktur. Bu gibi durumlarda, problemi çözmek için sayısal tekniklere başvurulur. Mühendislikte ve matematiksel modellerde sıklıkla kullanılan sonlu elemanlar yöntemi, fiziksel problemlere yaklaşık çözüm elde etmek için kullanılır. Özellikle ısı aktarımı, yapı statığı, elektrik potansiyeli ve akışkanlar mekaniği problemlerinin çözümlerinde kullanılmaktadır. Metot, iki boyutlu ve üç boyutlu kısmi türevli diferansiyel denklemlerin ve sınır değer problemlerinin çözümünde uygulanmaktadır. İlk defa 1940 lı yıllarda ortaya çıkmış ve 1950 lerde uçak kanatlarını modellemek amacıyla kullanılmaya başlanmıştır. Sonlu elemanlar yaklaşımı, karmaşık yapıdaki problemlerin basit alt bölgelere ayrılarak her bir alt bölgenin kendi içinde çözümlenmesi ve sonra bulunan bu çözümlerin birleştirilmesi ile sayısal çözümlerin bulunduğu bir nümerik yöntemdir. Buradaki alt alanlara “sonlu eleman (finite element)”, bağlantı noktalarına ise “düğüm (node)” veya “düğüm noktaları (nodal points)” adı verilir. Yöntemde, yaklaşık fonksiyonlar, araştırılan bir fiziksel bölgenin düğüm noktalarındaki değerleri cinsinden belirlenir. Bu şekilde süreklilik arzeden fiziksel problem, düğüm noktaları yardımıyla ayrıklaştırılmış sonlu eleman problemine dönüştürülür. Bu problemdeki bilinmeyen değerler, düğüm noktaları yardımıyla bulunabilir. Sonlu elemanlar yönteminin diğer nümerik yöntemlere göre tercih edilmesine sebep olan iki özellik vardır:

1. Sonlu elemanlar üzerinde aranan fiziksel bölgelerin parça bazındaki yaklaşımları, basit yaklaşım fonksiyonlarında dahi iyi bir kesinlik sağlar (bir kesinliğe ulaşabileceğimiz eleman sayısını artırarak).
2. Yerel (lokal) olarak belirlenen interpolasyon polinomları, cebirsel denklem sistemine dönüştürülen problem matrisinin seyrek matris olmasına sebep olur.

Sonlu elemanlar yöntemi sadece geleneksel varyasyonel yöntemlerin eksikliklerinin üstesinden gelmekle kalmaz, aynı zamanda oldukça etkin bir hesaplama tekniğidir. Bir problemin sonlu eleman analizinde izlenen temel adımlar şunlardır:

1. **Problemin çözüm bölgesinin ayrıklaştırılması:** Sonlu elemanlar yönteminde ilk iş, verilen bölgeyi önceden belirlenmiş ”sonlu eleman” denilen alt bölgelere ayırmaktır.

Bu işleme ayrıklaştırma veya diskritizasyon adı verilir. Böylece, önceden belirlenmiş elemanların sonlu elemanlar ağı oluşturulur. Bu elemanlar ve düğüm noktaları numaralandırılır. Burada dikkat edilmesi gereken en önemli unsur elemanların üst üste gelmemesi ve hiç boşluk bırakılmadan bütün bölgenin kaplanmasıdır. Ayrıca elemanların ne oranda küçük seçilmesi gerektiğine ve seçilen eleman sayısının yaklaşımı ne kadar etkileyebileceğine de dikkat edilmesi gerekir.

2. **Tipik eleman için eleman denklemlerinin oluşturulması:** Oluşturulan sonlu eleman ağı içindeki her bir tipik elemana göre eleman denklemleri türetilir. “ $u$ ” bağımlı değişkeninin

$$u_N = \sum_{i=1}^N u_i \varphi_i \quad (2.21)$$

biçiminde yaklaşık çözümü aranır ve  $u_N$  sayısal çözümünün varyasyonel formdaki diferansiyel denklemde yazılması ile karakteristik bir “ $e$ ” elemanı için genel denklem,

$$[K^e] \{u^e\} = \{F^e\} \quad (2.22)$$

cebirsal formunda yazılabilir. Burada  $K^e$ ,  $e$  inci elemana ait katsayılar matrisi,  $u^e$  bilinmeyenleri kapsayan vektördür.  $F^e$  ise denklemin kuvvet vektörünü simgeler.  $\varphi_i$  eleman şekil fonksiyonları seçilir ya da türetilir ve sonra eleman matrisleri hesaplanır. Genellikle türev ve integral işlemlerinin kolay yapılabilmesi adına bu fonksiyonlar basit trigonometrik fonksiyonlar veya düşük dereceden polinomlar olarak seçilir. Çünkü yaklaşık çözümün yakınsaklığı eleman şekil fonksiyonlarının seçimine bağlıdır. Bölgede bulunan mesh (ağ) sayısının ve eleman şekil fonksiyonlarının derecelerinin yükseltilmesi ise daha iyi sonuçlar verir.

3. **Eleman denklemlerinin birleştirilmesi:** Verilen çözüm bölgesi üzerinde global denklemi oluşturabilmek için eleman denklemleri birleştirilir ve genel denklemi ifade eden bir cebirsal denklem sistemi bulunur. Bu global sistemin özellikleri, ayrıklaştırma işlemi için kullanılan her eleman için yazılan lokal denklemlerin birleşimi üzerinden belirlenebilir.

4. **Problemin sınır şartlarının uygulanması:** Birleştirilmiş eleman denklemlerine problem ile birlikte verilen sınır şartları ve birincil değişkenler uygulanır. Zayıf formdaki sınır terimleri iki parçaya ayrılarak problemin birincil ve ikincil değişkenleri saptanır. Ağırlık fonksiyonu ve türevleri birinci parçayı; bağımlı değişken ve türevleri ikinci



parçayı temsil eder. Birinci parçada yer alan ağırlık fonksiyonu ve bağımlı değişken aynı formda olursa bu parça 'birincil değişken' olarak adlandırılır. Fiziksel niceliklerle ilgili olan ikinci parça ise 'ikincil değişkeni' ifade eder. Birincil ve ikincil değişkenler tanımlandıktan sonra sınır koşulları belirlenip probleme uygulanır.

5. **Denklemin çözümü:** Lokal elemanların birleştirilmesi sonucunda oluşturulan cebirsel denklem sistemi çözülür ve düğüm noktalarında bulunan bilinmeyen parametreler bulunur. Çözüm, herhangi bir programlama dilinde yazılan bilgisayar programı yardımıyla bulunabilir.
6. **Sonuçların değerlendirilmesi:** Hesaplama sonrasında elde edilen sonuçlar değerlendirilir. Sonuçlar tablo ve grafikler halinde verilerek çözüme daha somut bir boyut kazandırılır.

Sonlu elemanlar yönteminin avantajları şu şekilde sıralanabilir:

- Sonlu elemanlar yöntemi uygulama alanı bakımından çok geniş bir alanda kullanılabilir. Örneğin ısı transferinde, titreşim ve gerilme analizleri, manyetik alanlar, dinamik, ısı ve elektrostatik problemler vb.
- Sonlu elemanlar yönteminin kullanılması belirli kolaylıklar sağlamaktadır. Özellikle karmaşık geometriye birden fazla delik ve köşegene sahip bölgelerde çalışırken çok büyük kolaylıklar sağlamaktadır. Çalışılan kısmın geometrisi istenilen boyutta ve kavisi elemanlar da kullanılarak tam olarak temsil edilebilmektedir.
- Heterojen yapıdaki sistem çözümlerinde değişik özellikteki elemanların kullanılmasıyla hesaplamalarda daha hassas sonuçlar elde edilebilir.
- Global denklem sistemine sınır koşulları satır ve sütun işlemleri yardımıyla kolay bir şekilde uygulanabilir.
- Sonlu elemanlar metodu matematiksel olarak genelleştirilebilir özelliğine sahiptir. Esas sistem belirlendikten sonra başlangıç ve sınır koşulları değiştirilerek farklı problemlerin tek bir sistemde çözülmesi kolaylığı sağlar [15].

### 2.6.1 Ağırlıklı Kalan Yöntemleri

Sonlu elemanlar metodunun integral formları, varyasyonel ve ağırlıklı kalan (rezidü) yöntemleri olmak üzere iki şekilde elde edilir. Varyasyonel yöntemlerde; analitik çözüm yerine kullanılan nümerik çözüm, diferansiyel denklemin zayıf formundan veya ağırlıklı integral ifadesinden bulunur. Zayıf form, denkleminde bulunan türevin bağımlı değişken ile ağırlık fonksiyonu arasında paylaşılan ve verilen problemin doğal sınır şartlarını kapsayan ağırlıklı integral ifadesidir. Bu yöntem, her denklemin zayıf formu oluşturulamayabileceği için sınırlı sayıda denkleme uygulanabilir. Geleneksel varyasyonel yöntemlerde karşılaşılan bu bir takım zorluklar ile sonlu elemanlar yönteminde genellikle karşılaşılmaz. Bunun sebebi, problemin çözüm bölgesinin alt bölgelerinde, yaklaşım fonksiyonlarının sistematik biçimde elde edilmesidir. Rayleigh-Ritz yöntemi bir varyasyonel yöntem iken Galerkin, Petrov-Galerkin, kollokasyon ve subdomain yöntemleri de ağırlıklı kalan yöntemleridir. Kısmi türevli bir diferansiyel denklemin analitik ile nümerik çözümü arasındaki farkın bir ağırlık fonksiyonu ile çarpılarak toplamlarının en küçük yapılması işlemine *ağırlıklı kalan yöntemi* denir. Yöntemde aranan  $u$  çözüm fonksiyonu yerine  $u_N$  sonlu yaklaşım serisi kullanılır.

$L$ ,  $u$  nun türevlerini içeren bir diferansiyel operatör ve  $g(x)$  belirli bir fonksiyon olmak üzere,  $L[u] = g(x)$  eşitliğinde  $u(x)$  tam çözümü yerine  $j = 1, 2, \dots, N$  olacak şekilde

$$u(x) \approx u_N(x) = \sum_{j=1}^N a_j \phi_j \quad (2.23)$$

formundaki  $u_N(\cdot)$  yaklaşım serisi yazılır.

Bir  $\Omega$  bölgesinde tanımlı  $\phi_j(\cdot)$  interpolasyon fonksiyonları problem ile birlikte verilen sınır koşullarını sağlamak üzere seçilirler fakat genellikle diferansiyel denklemini sağlamayabilirler. Ağırlıklı kalan yöntemleri,  $u_N(x)$  yaklaşık çözümü ile esas denklem arasındaki hata değerini minimuma indirmeyi hedefler. Bu sapma miktarı aşağıda belirtilen kalan (rezidü) ile gösterilir:

$$R(x) = Lu_N(x) - f(x) = Lu_N(x) - Lu(x). \quad (2.24)$$

$V_j$  ile gösterilen ağırlık fonksiyonları integrasyonu minimuma indirgeyecek formda tanımlanmış özel fonksiyonlar olacak şekilde, (2.24) da tanımlanan kalan ifadesi;  $V_j(x)$  ağırlık fonksiyonları ile çarpılır ve  $\Omega$  bölgesi üzerinde integrali alınırsa

$$\int_{\Omega} V_j(x) R(x) dx = 0, \quad j = 1, \dots, N \quad (2.25)$$

biçiminde  $N$  bilinmeyenli  $N$  tane denklemden meydana gelen cebirsel denklem sistemi bulunur. Denklem sisteminden  $a_j$  bilinmeyen parametreleri bulunarak (2.23) eşitliğinde yazılırsa  $u_N(x)$  yaklaşık çözümü elde edilir.

### 2.6.2 Kollokasyon Yöntemi

Kollokasyon yöntemi, adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerini elde etmek için kullanılan ağırlıklı kalan yöntemlerinden biridir. Kollokasyon yönteminde tanımlanan yaklaşım fonksiyonları, denklemlerde yerlerine yazılarak bölünme noktalarındaki değerler cinsinden cebirsel denklemler elde edilir ve bilinmeyenler içeren bu cebirsel denklemler çözülür. Kollokasyon yönteminde, ağırlıklı kalan yöntemindeki  $V_j$  ağırlık fonksiyonları yerine aşağıda tanımı verilen Dirac Delta fonksiyonları yazılır:

$$\delta(x - x_j) = \begin{cases} 1, & x = x_j \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (2.26)$$

Dirac Delta fonksiyonu, (2.25) ile verilen cebirsel denklem sisteminde yerine yazılırsa,

$$\int_{\Omega} \delta(x - x_j)(x)R(x)dx = 0, j = 1, \dots, N \quad (2.27)$$

eşitliği elde edilir. Buradan,

$$\int_{\delta} (x - x_j)(x)L\left(\sum_{j=1}^N a_j \phi_j - f(x)\right)dx = 0, j = 1, \dots, N \quad (2.28)$$

bulunur. Dirac Delta fonksiyonunun özelliğinden dolayı

$$R(x_j) = 0, \quad (2.29)$$

olur. Yani  $x_j$  düğüm noktalarında kalan (rezidü) sıfır olarak kabul edilir. Verilen sınır şartları uygulanarak, denklemdaki  $a_j$  bilinmeyenleri bulunarak  $u_N(x)$  yaklaşık çözümü hesaplanır.

### 2.6.3 Spline Fonksiyonlar

Nümerik analizde çoğunlukla yaklaşım fonksiyonları olarak polinom fonksiyonları tercih edilmektedir. Tanım bölgesi genişledikçe polinomları kullanarak problemlerin iyi bir yaklaşımına ulaşabilmek için pek çok nokta kullanmak gerekebilir. Bununla birlikte, yüksek dereceli polinomlar, düzgün olmayan ve istenen yaklaşımı temsil etmeyen yüksek salınım davranışına sahiptirler. Ek olarak, lokal anlamda çok küçük olan bir hata global olarak çok büyük etkiler yaratabilmektedir. Bu zorluklar, belirli düzgünlük (smoothing) şartını sağlayan

parçalı polinomlar kullanılarak aşılabilir. Bunun için bölge içinde sürekliliği sağlamak adına spline fonksiyonları adı verilen özel bir parçalı polinom sınıfı kullanılır. Spline interpolasyonu; tanımlı aralık üzerinde, birbirlerini örtmeyen alt aralıklarda, daha küçük dereceli polinom bulma sürecidir.

“Spline” terimi kelime manası olarak ahşap ya da metal halde bulunan kıvrılabilir çita anlamına gelmektedir. Uçak ve gemi tasarımı ile uğraşan mühendisler kullanabilecekleri eğri yüzeyleri elde etmek için ince metal ya da ahşap parçaları kurşun ağırlıklarla kıvrımayı denemişlerdir. Çizim yüzeyindeki belirli noktalara kurşun ağırlıkları yerleştirerek spline çubuğu bu noktalardan geçirmişlerdir. Kurşun ağırlıkların yerleri veya ağırlıkları değiştirilerek esnek tahta spline çubuklar ile istenilen şekilleri elde etmişlerdir. 1946 yılında Isaac Jacob Schoenberg ilk olarak küçük esneme hareketleriyle fiziksel spline şeklinin parçalı polinomlar olabileceğini keşfetmiş ve bu şekilde matematiksel spline notasyonunu türetmiştir [19]. Bu keşif matematiksel model tasarım ve ölçümlerde oldukça kolaylık sağlamıştır. Sonraki yıllarda bilgisayar sistemlerinin gelişmesiyle özel programlarda kullanılmaya başlanmıştır. Spline fonksiyonlar animasyon teknolojisi, tıbbi görüntüleme, MR, uçak ve gemi gövdelerinin modellenmesi gibi farklı alanlarda ortaya çıkmaktadır. Problemin tanımlandığı bölgede, bütün noktalarda sürekli olması adına düzgün parçalı polinomlar kullanılarak daha verimli bir yaklaşım yapılabilir.

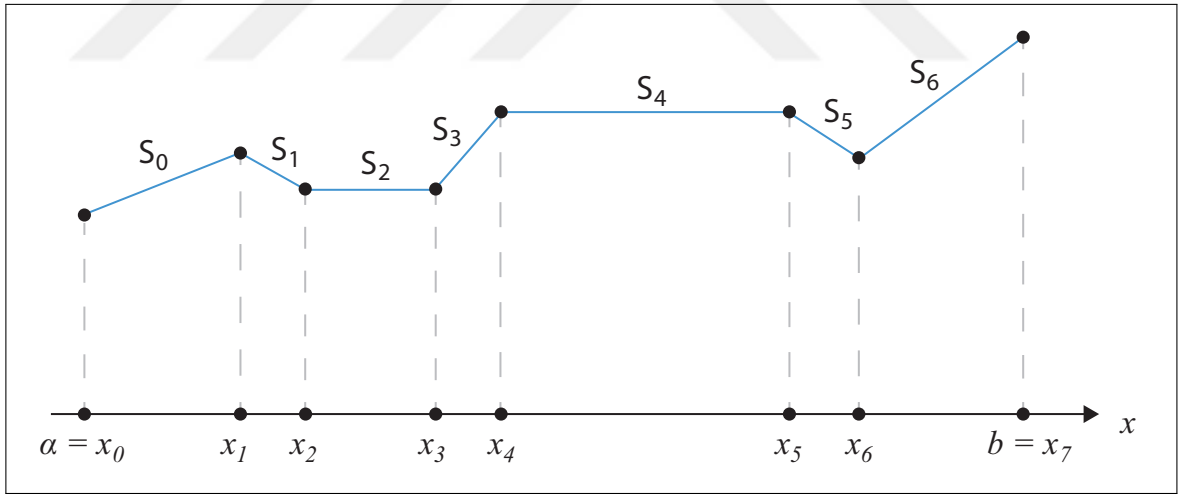
Spline fonksiyonlar şu şekilde tanımlanır:  $x_i$  ler  $-\infty = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = \infty$  şeklinde gerçel sayıların monoton artan bir dizisi olsun.  $x_i$ , ( $i = 1(1)n$ ) düğüm noktaları ile birlikte  $m$ . dereceden bir  $S(x)$  spline fonksiyonu reel doğru üzerinde tanımlı ve aşağıdaki iki özelliğe sahip bir fonksiyondur:

1.  $x_0 = -\infty$  ve  $x_{n+1} = \infty$  olarak kabul edilsin.  $S(x)$  her bir  $(x_i, x_{i+1})$ ,  $i = 0(1)n$  aralığı üzerinde  $m$ . ya da daha küçük dereceden bir polinomdur.
2.  $S(x)$  ve onun  $1., 2., \dots, (m-1)$ . mertebeden türevleri bölünme noktaları dahil her yerde süreklidir.

Spline fonksiyonlara dair bazı özellikler aşağıda sıralanmıştır:

- Spline fonksiyonlar yeterli mertebeden türevlere sahip olan sürekli fonksiyonlardır.
- Spline fonksiyonlar üzerinde türev ve integral işlemleri yapıldığında yine bir spline fonksiyon elde edilir.

- Spline fonksiyonlar düzgün (smooth) fonksiyonlardır.
- Spline fonksiyonlar kullanıldığında yakınsaklığın ve kararlılığın incelenmesi daha kolaydır.
- Bilgisayar teknolojisinde hesaplanmaya ve uzun süre depolanmaya uygundur.
- Düşük dereceden spline fonksiyonlar polinomlarda olduğu gibi keskin bir salınım sergilemezler, yani kayda değer ölçüde esnektirler.
- Determinant özellikleri bakımından, spline fonksiyonlar kullanılarak oluşturulan matrisler ile kolayca hesaplama yapılabilir.
- Spline fonksiyonlar baz fonksiyonlara sahiptirler ve sonlu boyutlu lineer (doğrusal) uzaylardır.
- Spline fonksiyonlar yardımıyla sadece fonksiyonlara değil, bununla birlikte onların türevlerine de ulaşılabilir [20].



Şekil 2.6 Birinci dereceden spline fonksiyon

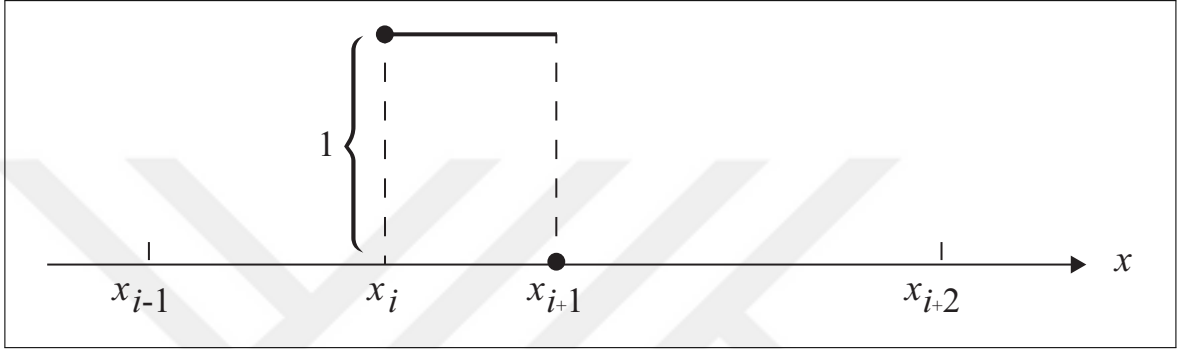
#### 2.6.4 B-Spline Fonksiyonlar

Spline interpolasyonunu elde etme süreci boyunca bir takım sayısal kararsızlıklar ile karşılaşılabilir. Bahsi geçen kararsızlık durumlarının üstesinden B-spline adı verilen spline fonksiyon sınıfı ile gelinir. B-spline fonksiyonlar parçalı polinom fonksiyonlar olup, bütün spline fonksiyon kümesi için bir baz oluştururlar. Başka bir deyişle, bütün spline fonksiyonlar kendisi ile aynı derecede olan B-spline fonksiyonların lineer birleşimi olarak yazılabilir.

Herhangi tanımlı bir aralıkta B-spline baz fonksiyonu bütün değerler için sıfırdan farklıdır. En temel B-spline fonksiyon denilen sıfırıncı dereceden B-spline interpolasyon fonksiyonu, adım fonksiyonu biçimindedir ve

$$B_i^0(x) = \begin{cases} 1, & x_i \leq x < x_{i+1} \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (2.30)$$

formundadır.



Şekil 2.7 Sıfırıncı dereceden B-spline Fonksiyonu

$[x_i, x_{i+1})$  yarı açık aralığı dışındaki bütün noktalarda sıfırdır.  $B_i^0(x)$  in süreksiz olduğu açıktır [21]. Fakat  $B_i^0(x)$ , sıçramanın olduğu tüm düğüm noktalarında sağdan süreklidir. Bütün  $i$  ve  $x_i$  değerleri için

$$\lim_{x \rightarrow x_i^+} B_i^0(x) = 1 = B_i^0(x_i), \quad (2.31)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_{i+1}^+} B_i^0(x) = 0 = B_i^0(x_{i+1})$$

dir. Buradan  $B_i^0(x) \geq 0$  ve  $\sum_{i=-\infty}^{\infty} B_i^0(x) = 1$  olduğu aşıkardır. Yüksek dereceli B-spline yaklaşım fonksiyonları,  $k = 1, 2, \dots$ , ve  $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  olmak üzere aşağıda verilen

$$B_i^k(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+k} - x_i} B_i^{k-1}(x) + \frac{x_{i+k+1} - x}{x_{i+k+1} - x_{i+1}} B_{i+1}^{k-1}(x) \quad (2.32)$$

indirgeme bağıntısı ile türetilebilir [22]. Ek olarak, B-spline fonksiyonlar geometrik olarak farklı uzunluklardaki alt aralıklar üzerinde de tanımlanabilir.  $[a, b]$  aralığının düzgün bir parçalanması  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$  ve  $x_m$  ler düğüm noktaları olsun.

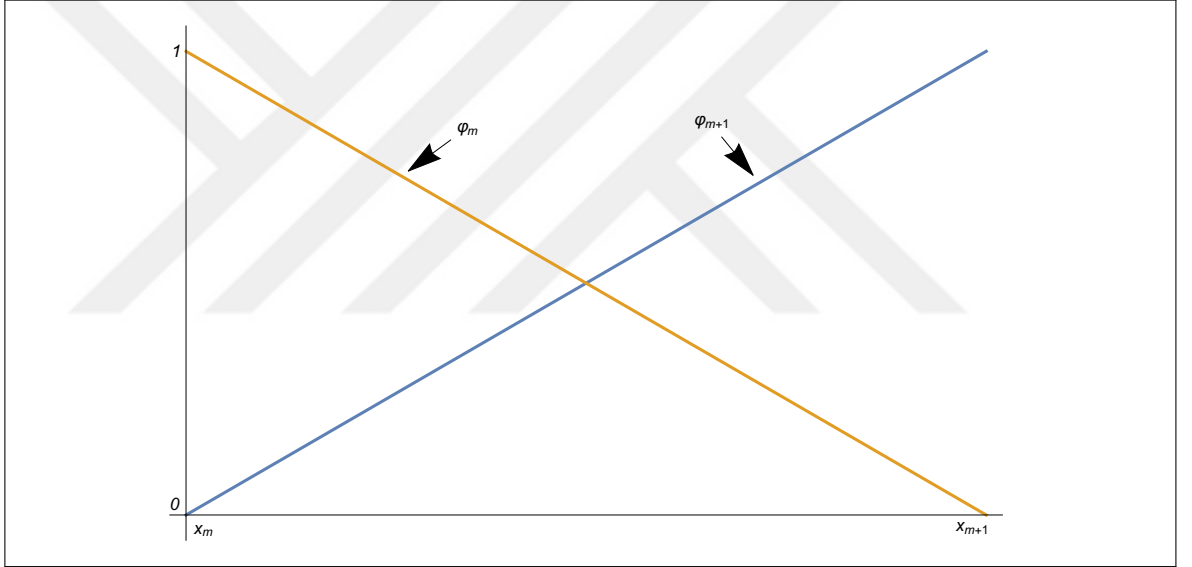
$m = 0, 1, \dots, N$  ve  $h = x_{m+1} - x_m$  olmak üzere, (2.31) de verilen indirgeme bağıntısı yardımıyla  $B_m^1(x)$  lineer B-spline fonksiyon

$$B_m^1(x) = \Phi_m(x) = \frac{1}{h} \begin{cases} \alpha - 2\beta, & x_{m-1} \leq x < x_m, \\ \alpha, & x_m \leq x < x_{m+1}, \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (2.33)$$

formunda olup burada  $\alpha = (x_{m+1} - x)$  ve  $\beta = (x - x_m)$  dir.  $\{B_0^1(x), B_1^1(x), \dots, B_N^1(x)\}$  kümesi,  $[a, b]$  aralığı üzerinde tanımlı fonksiyonlar için bir taban oluşturur [23]. Linear B-spline baz fonksiyonları  $[x_m, x_{m+1})$  ve  $[x_{m+1}, x_{m+2})$  yarı açık aralıkları dışında sıfır değerine karşılık gelir.  $\varphi_m(x)$  ve  $\varphi_{m+1}(x)$  şeklindeki iki linear B-spline fonksiyonu, tipik bir  $[x_m, x_{m+1}]$  sonlu elemanını tamamen örtmektedir.  $h\omega = x - x_m$ , ( $0 \leq \omega \leq 1$ ) lokal dönüşümü ile bir  $[x_m, x_{m+1}]$  sonlu elemanı  $[0, 1]$  kapalı aralığına dönüştürülür. Bu şekilde linear B-spline fonksiyonlar  $[0, 1]$  aralığı üzerinde  $\omega$  cinsinden

$$\begin{aligned}\varphi_m(x) &= 1 - \omega, \\ \varphi_{m+1}(x) &= \omega,\end{aligned}\tag{2.34}$$

şeklinde yazılabilir.



Şekil 2.8 Linear B-spline fonksiyon

#### 2.6.4.1 Kuintik B-Spline Fonksiyonlar

$[a, b]$  aralığının düzgün bir parçalanması  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$  olsun.  $m = -2(1)N + 2$  ve  $h = x_{m+1} - x_m$  için,  $x_m$  düğüm noktalarında  $\varphi_m(x)$  kuintik B-spline

fonksiyonları,

$$\varphi_m(x) = \frac{1}{h^5} \begin{cases} \alpha^5, & [x_{m-3}, x_{m-2}] \\ \alpha^5 - 6\beta^5, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ \alpha^5 - 6\beta^5 + 15\gamma^5, & [x_{m-1}, x_m] \\ \alpha^5 - 6\beta^5 + 15\gamma^5 - 20\eta^5, & [x_m, x_{m+1}] \\ \alpha^5 - 6\beta^5 + 15\gamma^5 - 20\eta^5 + 15\sigma^5, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ \alpha^5 - 6\beta^5 + 15\gamma^5 - 20\eta^5 + 15\sigma^5 - 6\mu^5, & [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (2.35)$$

şeklinde olup burada  $\alpha = (x - x_{m-3})$ ,  $\beta = (x - x_{m-2})$ ,  $\gamma = (x - x_{m-1})$ ,  $\eta = (x - x_m)$ ,  $\sigma = (x - x_{m+1})$  ve  $\mu = (x - x_{m+2})$  dir.  $[a, b]$  aralığı üzerinde tanımlı fonksiyonlar için  $\{\varphi_m(x)\}$  kümesi bir baz oluşturmaktadır.  $\varphi_m(x)$  kuintik B-spline baz fonksiyonunun kendisi ve türevlerinin tümü  $[x_{m-3}, x_{m+3}]$  aralığı dışında sıfırdır.  $\varphi_m(x)$  kuintik B-spline fonksiyonu  $[x_{m-3}, x_{m+3}]$  aralığında bulunan ardışık altı elemanı örtmektedir yani her  $[x_m, x_{m+1}]$  sonlu elemanı  $\varphi_{m-2}(x), \varphi_{m-1}(x), \varphi_m(x), \varphi_{m+1}(x), \varphi_{m+2}(x), \varphi_{m+3}(x)$  şeklindeki altı kuintik B-spline fonksiyon tarafından örtülmektedir.  $\varphi_m(x)$  ve dördüncü mertebeye kadar alınan türevlerinin düğüm noktalarında aldıkları değerler Tablo 2.1 de belirtilmiştir.

Tablo 2.1 Kuintik B-spline fonksiyon ve türevlerinin  $x_m$  düğümlerinde aldıkları değerler

$x$	$x_{m-3}$	$x_{m-2}$	$x_{m-1}$	$x_m$	$x_{m+1}$	$x_{m+2}$	$x_{m+3}$
$\varphi_m$	0	1	26	66	26	1	0
$h\varphi'_m$	0	5	50	0	-50	-5	0
$h^2\varphi''_m$	0	20	40	-120	40	20	0
$h^3\varphi'''_m$	0	60	-120	0	120	-60	0
$h^4\varphi^{(iv)}_m$	0	120	-480	720	-480	120	0

Tipik  $[x_m, x_{m+1}]$  sonlu elemanı,  $h\omega = x - x_m$ , ( $0 \leq \omega \leq 1$ ) şeklindeki lokal dönüşüm ile  $[0, 1]$  aralığına dönüştürülür. Nitekim kuintik B-spline baz fonksiyonları  $[0, 1]$  aralığı üzerinde  $\omega$



cinsinden

$$\begin{aligned}
\varphi_{m-2} &= 1 - 5\omega + 10\omega^2 - 10\omega^3 + 5\omega^4 - \omega^5, \\
\varphi_{m-1} &= 26 - 50\omega + 20\omega^2 + 20\omega^3 - 20\omega^4 + 5\omega^5, \\
\varphi_m &= 66 - 60\omega^2 + 30\omega^4 - 10\omega^5, \\
\varphi_{m+1} &= 26 + 50\omega + 20\omega^2 - 20\omega^3 - 20\omega^4 + 10\omega^5, \\
\varphi_{m+2} &= 1 + 5\omega + 10\omega^2 + 10\omega^3 + 5\omega^4 - 5\omega^5, \\
\varphi_{m+3} &= \omega^5
\end{aligned} \tag{2.36}$$

olarak yazılabilir [15].

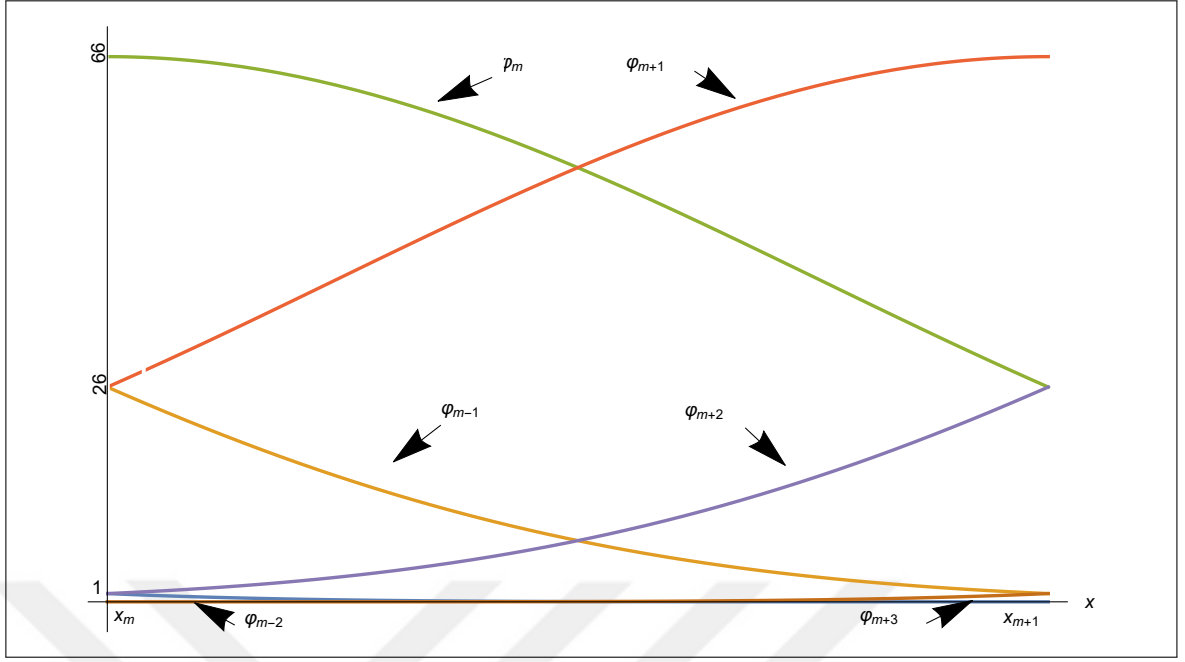
Tipik bir  $[x_m, x_{m+1}]$  aralığı (2.35) te tanımlanan kuintik B-spline yaklaşım fonksiyonları tarafından örtülmesi sebebiyle bu aralıktaki herhangi bir  $u(x, t)$ ;  $x_m$  noktasındaki baz fonksiyonu ve  $x$  e göre dördüncü mertebeye kadar türevleri  $\delta_m$  parametreleri cinsinden]

$$u_m(x_m, t) = \sum_{i=m-2}^{m+3} \varphi_i(x_m) \delta_i(t) \tag{2.37}$$

eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
u_N(x_m, t) &= U_m = \delta_{m-2} + 26\delta_{m-1} + 66\delta_m + 26\delta_{m+1} + \delta_{m+2}, \\
u'_m &= \frac{5}{h}(-\delta_{m-2} - 10\delta_{m-1} + 10\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \\
u''_m &= \frac{20}{h^2}(\delta_{m-2} + 2\delta_{m-1} - 6\delta_m + 2\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \\
u'''_m &= \frac{60}{h^3}(-\delta_{m-2} + 2\delta_{m-1} - 2\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \\
u^{iv}_m &= \frac{120}{h^4}(\delta_{m-2} - 4\delta_{m-1} + 6\delta_m - 4\delta_{m+1} + \delta_{m+2})
\end{aligned} \tag{2.38}$$

yazılabilir.



Şekil 2.9 Kuintik B-spline Şekil Fonksiyonları

#### 2.6.4.2 Septik B-Spline Fonksiyonlar

$[a, b]$  aralığının düzgün bir parçalanması  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$  olsun.  $m = -3(1)N + 3$  ve  $h = x_{m+1} - x_m$  için,  $x_m$  düğüm noktalarında  $\varphi_m(x)$  septik B-spline fonksiyonları,

$$\varphi_m(x) = \frac{1}{h^7} \begin{cases} \alpha^7, & [x_{m-4}, x_{m-3}] \\ \alpha^7 - 8\beta^7, & [x_{m-3}, x_{m-2}] \\ \alpha^7 - 8\beta^7 + 28\gamma^7, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ \alpha^7 - 8\beta^7 + 28\gamma^7 - 56\eta^7, & [x_{m-1}, x_m] \\ \sigma^7 - 8\mu^7 + 28\kappa^7 - 56\lambda^7, & [x_m, x_{m+1}] \\ \sigma^7 - 8\mu^7 + 28\kappa^7, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ \sigma^7 - 8\mu^7, & [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ \sigma^7, & [x_{m+3}, x_{m+4}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (2.39)$$

şeklinde olup burada  $\alpha = (x - x_{m-4})$ ,  $\beta = (x - x_{m-3})$ ,  $\gamma = (x - x_{m-2})$ ,  $\eta = (x - x_{m-1})$ ,  $\sigma = (x_{m+4} - x)$ ,  $\mu = (x_{m+3} - x)$ ,  $\kappa = (x_{m+2} - x)$  ve  $\lambda = (x_{m+1} - x)$ 'dir.  $[a, b]$  aralığı üzerinde tanımlı fonksiyonlar için  $\{\varphi_m(x)\}$  kümesi bir baz oluşturmaktadır.  $\varphi_m(x)$  septik B-spline baz fonksiyonunun kendisi ve türevlerinin tümü  $[x_{m-4}, x_{m+4}]$  aralığı dışında sıfırdır.  $\varphi_m(x)$  septik B-spline fonksiyonu  $[x_{m-4}, x_{m+4}]$  aralığında bulunan ardışık sekiz elemanı örtmektedir yani

her  $[x_m, x_{m+1}]$  sonlu elemanı  $\varphi_{m-3}(x), \varphi_{m-2}(x), \varphi_{m-1}(x), \varphi_m(x), \varphi_{m+1}(x), \varphi_{m+2}(x), \varphi_{m+3}(x)$  ve  $\varphi_{m+4}(x)$  şeklindeki sekiz septik B-spline fonksiyon tarafından örtülmektedir.  $\varphi_m(x)$  ve altıncı mertebeye kadar türevlerinin düğüm noktalarında aldıkları değerler Tablo 2.2 de belirtilmiştir.

Tablo 2.2 Septik B-spline fonksiyon ve türevlerinin  $x_m$  düğümlerinde aldıkları değerler

$x$	$x_{m-4}$	$x_{m-3}$	$x_{m-2}$	$x_{m-1}$	$x_m$	$x_{m+1}$	$x_{m+2}$	$x_{m+3}$	$x_{m+4}$
$\varphi_m$	0	1	120	1191	2416	1191	120	1	0
$h\varphi'_m$	0	-7	-392	-1715	0	1715	392	7	0
$h^2\varphi''_m$	0	42	1008	630	-3360	630	1008	42	0
$h^3\varphi'''_m$	0	-210	-1680	3990	0	-3990	1680	210	0
$h^4\varphi_m^{(iv)}$	0	840	0	-7560	13440	-7560	0	840	0
$h^5\varphi_m^{(v)}$	0	-2520	10080	-12600	0	12600	-10080	2520	0
$h^6\varphi_m^{(vi)}$	0	5040	-30240	75600	-100800	75600	-30240	5040	0

Tipik  $[x_m, x_{m+1}]$  sonlu elemanı,  $h\omega = x - x_m$ , ( $0 \leq \omega \leq 1$ ) şeklindeki lokal dönüşüm ile  $[0, 1]$  aralığına dönüştürülür [16]. Nitekim septik B-spline baz fonksiyonları  $[0, 1]$  aralığı üzerinde  $\omega$  cinsinden

$$\begin{aligned}
\varphi_{m-3} &= 1 - 7\omega + 21\omega^2 - 35\omega^3 + 35\omega^4 - 21\omega^5 + 7\omega^6 - \omega^7, \\
\varphi_{m-2} &= 120 - 392\omega + 504\omega^2 - 280\omega^3 + 84\omega^5 - 42\omega^6 + 7\omega^7, \\
\varphi_{m-1} &= 1191 - 1715\omega + 315\omega^2 + 665\omega^3 - 315\omega^4 - 105\omega^5 + 105\omega^6 - 21\omega^7, \\
\varphi_m &= 2416 - 1680\omega + 560\omega^4 - 140\omega^6 + 35\omega^7, \\
\varphi_{m+1} &= 1191 + 1715\omega + 315\omega^2 - 665\omega^3 - 315\omega^4 + 105\omega^5 + 105\omega^6 - 35\omega^7, \\
\varphi_{m+2} &= 120 + 392\omega + 504\omega^2 + 280\omega^3 - 84\omega^5 - 42\omega^6 + 21\omega^7, \\
\varphi_{m+3} &= 1 + 7\omega + 21\omega^2 + 35\omega^3 + 35\omega^4 + 21\omega^5 + 7\omega^6 - \omega^7, \\
\varphi_{m+4} &= \omega^7
\end{aligned} \tag{2.40}$$

olarak yazılabilir.

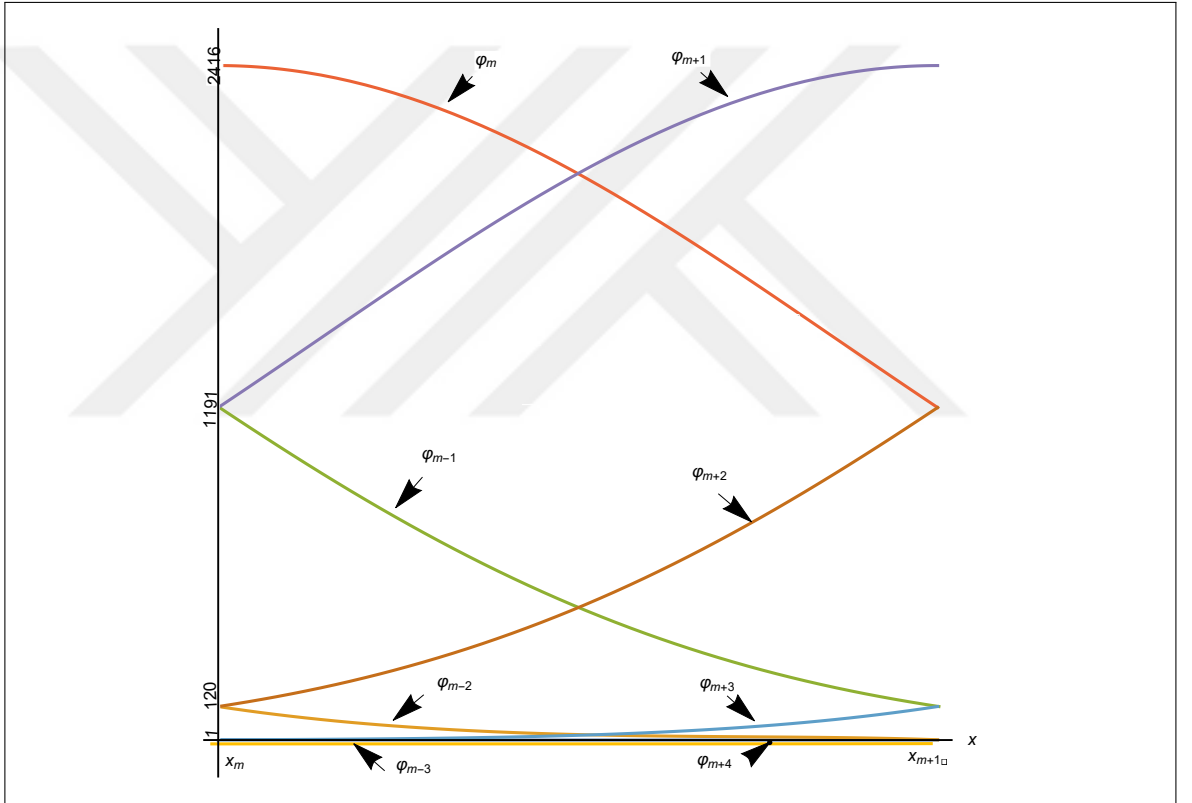
Tipik bir  $[x_m, x_{m+1}]$  aralığı (2.39) da tanımlanan septik B-spline yaklaşım fonksiyonları tarafından örtüldüğü için bu aralıktaki bir  $u(x, t)$  değeri için  $x_m$  düğüm noktasındaki interpolasyon fonksiyonu ve  $x$  e göre altıncı mertebeye kadar türevleri  $\delta_m$  parametreleri cinsinden

$$u_m(x_m, t) = \sum_{i=m-2}^{m+3} \varphi_i(x_m) \delta_i(t) \tag{2.41}$$

eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
 u_N(x_m, t) &= u_m = \delta_{m-3} + 120\delta_{m-2} + 1191\delta_{m-1} + 2416\delta_m + 1191\delta_{m+1} + 120\delta_{m+2} + \delta_{m+3}, \\
 u'_m &= \frac{7}{h}(-\delta_{m-3} - 56\delta_{m-2} - 245\delta_{m-1} + 245\delta_{m+1} + 56\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \\
 u''_m &= \frac{42}{h^2}(\delta_{m-3} + 24\delta_{m-2} + 15\delta_{m-1} - 80\delta_m + 15\delta_{m+1} + 24\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \\
 u'''_m &= \frac{210}{h^3}(-\delta_{m-3} - 8\delta_{m-2} + 19\delta_{m-1} - 19\delta_{m+1} + 8\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \\
 u^{iv}_m &= \frac{840}{h^4}(\delta_{m-3} - 9\delta_{m-1} + 16\delta_m - 9\delta_{m+1} + \delta_{m+3})
 \end{aligned}
 \tag{2.42}$$

yazılabilir.



Şekil 2.10 Septik B-spline Şekil Fonksiyonları

### 2.6.5 Hata Tahmini

Sonlu elemanlar yönteminin doğruluğunu ve etkinliğini test etmek ve  $u_N$  nümerik çözümünün  $u^{tam}$  tam çözümüne yakınlığını göstermek amacıyla hata normları kullanılmaktadır. Genellikle analitik çözüme sahip olan problemlerin yaklaşık çözümleri sıcaklık dağılımı, hareketli sınırın hızı ve yeri için uygun hata normları hesaplanarak

değerlendirilir. Bu sebeple

$$L_2 = \|u^{tam} - u_N\|_2 \simeq \sqrt{h \sum_{j=1}^N |u_j^{tam} - (u_N)_j|^2}, \quad (2.43)$$

ortalama hata normu ve

$$L_\infty = \|u^{tam} - u_N\|_\infty \simeq \max_j |u_j^{tam} - (u_N)_j|, j = 1, 2, \dots, N \quad (2.44)$$

maksimum hata normu kullanılır.

### 2.6.6 Kararlılık Analizi

Sayısal algoritmalar, ayrıklaştırılan kısmi türevli diferansiyel denklemler için kurulduğunda nümerik halde kararlı olması gerekir. Kimi zaman sayısal algoritmalarda zaman geçtikçe yuvarlama hatalarının artması ya da başlangıç verilerinde ihmal edilen küçük bir kararsızlıkla karşılaşılması nümerik çözümü analitik çözümden uzaklaştırabilir. Ancak problemin çözümüne dahil edilen bu hataların kontrol edilemediği zamanlarda çözüm süresi boyunca büyüyen hatalar kararsız çözümlere sebep olabilmektedir. Bir kararlılık analizi ile hataların anlaşılması ve kontrol edilmesi kısmi diferansiyel denklem çözümünün başarısı için esastır. Bu sebeplerden dolayı tezde ele alınan problemlere Von Neumann kararlılık analizi uygulanmıştır.

Von Neumann kararlılık teorisi, genellikle sonlu fark denklemlerinin kararlılık gereksinimlerinin belirlenmesi adına tercih edilen bir yöntemdir. Bu teoride denklemin bir çözümü Fourier serisine açılır. Böylece büyüme faktöründe görülen artma ya da azalma, nümerik algoritmanın kararlı olup olmadığını gösterir.

İncelenmekte olan kısmi türevli diferansiyel denklem doğrusal ise Fourier serisindeki yalnızca bir terimin incelenmesi yeterli olacaktır. Aslında Von Neumann kararlılık teorisinin uygulanması için temel şart diferansiyel denklemin lineer olmasıdır. Bu yöntem ile sınır şartlarının çözümün kararlılığı üzerinde yaratabileceği etki dikkate alınmaz. Bu engelleri aşabilmek için lineer olmayan denklemler lokal olarak lineerleştirilir ve sonrasında Von Neumann kararlılık analizi uygulanır. Böylece nihai kararlılık koşulu lokal olarak sağlanmış olur. Gerekli olan kararlılık koşulu ise Von Neumann yöntemi ile elde edilenden daha kısıtlayıcıdır. Buna rağmen yapılan kararlılık analizi çalışması ile elde edilen sonuçlar kararlılık gerekleriyle ilgili oldukça faydalı bilgiler verecektir.

Kararlılık analizi sürecini gösterebilmek amacıyla,  $\tau$  dalga sayısı,  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\xi$  genlikteki

büyüme faktörü ve  $\Delta x$  eleman büyüklüğü olmak üzere,

$$\delta_m^n = \xi^n e^{im\tau\Delta x}, \quad (2.45)$$

sayısal algoritmanın doğrusallaştırılmış formundan belirlenir. (2.45) eşitliği ile gösterilen Fourier mod, lineer denklem sisteminde yerine yazılır ve (2.45) deki eşitliğe

$$e^{i\tau\Delta x} = \cos(\tau\Delta x) + i \sin(\tau\Delta x), \quad (2.46)$$

formundaki Euler formülü uygulanırsa,  $\xi$  büyüme faktörü bulunur. Büyüme faktörünün modülü sınırlı olması kararlı bir çözümü de beraberinde getirmektedir. Yani  $\tau\Delta x$  ifadesinin tüm değerleri için  $\xi$  nin mutlak değerinin sınırlı olması kararlı bir çözüm anlamına gelmektedir. Matematiksel olarak bu koşul  $|\xi| \leq 1$  biçiminde ifade edilir.

## 2.7 Dalga Denklemleri

Bu bölümde tezde incelenecek olan dalga denklemleri hakkında kısa bilgiler verilecek ve daha sonra denklemlerle ilgili literatürdeki çalışmalara değinilecektir.

### 2.7.1 Gilson-Pickering Denklemi, Başlangıç-Sınır Koşulları ve Test Problemleri

Claire Gilson ve Andrew Pickering, 1995 yılında Gilson–Pickering (GP) denklemi adını verdikleri bir denklem geliştirdiler.  $u = u(x, t)$  yeterli mertebeden türevlenebilir bir fonksiyon,  $\varepsilon$ ,  $\kappa$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  pozitif reel değerler,  $x$  konum ve  $t$  indisi ise zamana göre türevi simgelemek üzere Gilson–Pickering (GP) denklemi

$$u_t - \varepsilon u_{xxt} + 2\kappa u_x - uu_{xxx} - \alpha uu_x - \beta u_x u_{xx} = 0 \quad (2.47)$$

şeklinde kısmi türevli bir diferansiyel denklemdir [24]. GP denklemi, ikinci mertebeden lineer olmayan bir oluşum denklemdir. GP denklemi,  $u(x, 0)$  ve  $u_t(x, 0)$  şeklindeki başlangıç şartları ile incelenir. Bu denklem, aşağıda belirtilen doğrusal olmayan modelleri içermektedir:

- $\varepsilon = 1$ ,  $\alpha = -3$  ve  $\beta = 2$  için, Fuchssteiner–Fokas–Camassa–Holm denklemi [25],
- $\varepsilon = 1$ ,  $\alpha = -1$ ,  $\kappa = 0.5$  ve  $\beta = 3$  için, Fornberg–Whitham denklemi [26],
- $\varepsilon = 0$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\kappa = 0$  ve  $\beta = 3$  için, Rosenau–Hyman denklemi. [27, 28].

Literatürde Gilson-Pickering denklemi adına yapılan çok az sayıda sayısal çalışma ile karşılaşılmaktadır. Aslan, birinci integral yönteminin (first integral method) bir parametre koşulu altında Gilson-Pickering denkleminin uygulanabilirliği incelemiştir [29]. A. Chen ve arkadaşları tarafından polinom diferansiyel sisteminin nitel teorisi kullanılarak GP denkleminin nitel davranışı ve tam hareket dalga çözümleri gösterilmiştir [30]. G. Ebadi tarafından denklemin 1-soliton çözümünü elde etmek için ansatz yöntemi uygulanmıştır [28]. Yine GP denklemi farklı analitik yöntemlerle çözülmüştür. Örneğin, düğüm ağsız yöntem [31], Bernoulli alt denklem fonksiyonu yöntemi [32], integral yöntemi [26],  $G'/G$  yöntemi [33] bunlardan bazılarıdır. Bu çalışmada, (2.47) formundaki GP denkleminin sayısal çözümü araştırılırken

$$\begin{aligned} u_N(a,t) &= 0, & u_N(b,t) &= 0, \\ (u_N)_x(a,t) &= 0, & (u_N)_x(b,t) &= 0, \\ (u_N)_{xx}(a,t) &= 0, & (u_N)_{xx}(b,t) &= 0, t > 0 \end{aligned} \quad (2.48)$$

şeklindeki sınır şartları ve  $f(x)$  daha sonra belirlenecek bir fonksiyon olmak üzere

$$u(x,0) = f(x) \quad a \leq x \leq b \quad (2.49)$$

ile verilen başlangıç şartı kullanılacaktır.

GP denklemi için korunum kanunları ise aşağıdaki formdadır:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_a^b u dx \simeq h \sum_{j=1}^N u_j^n, \\ I_2 &= \int_a^b \left[ \frac{1}{6} (3u^2 + \varepsilon u_x^2 - 2\varepsilon u u_{xx}) \right] dx \\ &\simeq h \sum_{j=1}^N \left[ \frac{1}{6} \left( 3 (u_j^n)^2 + \varepsilon (u_x)_j^2 - 2\varepsilon q_j^n (u_{xx})_j \right) \right], \end{aligned} \quad (2.50)$$

(2.50) eşitliğinde  $I_1$  ve  $I_2$  sırasıyla sığ su dalgalarının kütlelerinin ve enerjisinin korunmasına karşılık gelir [28].

Belirlenen bölünme noktaları üzerinde problemin analitik ve nümerik değerleri hesaplanır ve uygulanan sayısal metodun doğruluğu ve etkinliği (2.43) ile verilen  $L_2$  ortalama hata normu ve (2.44) ile verilen  $L_\infty$  maksimum hata normu yardımıyla gösterilir.

### 2.7.1.1 Solitary Dalga Çözümü

Gilson-Pickering denkleminin solitary dalga analitik çözümü

$$u(x,t) = A \left( -1 + \tanh^2 [B(x - ct)] \right), \quad (2.51)$$

biçimindedir. Burada  $A = \frac{3(c-2\kappa)\varepsilon c}{\alpha\varepsilon c - c + 2\kappa}$  ve  $B = \frac{1}{2} \sqrt{-\frac{2\kappa - c}{\varepsilon c}}$  dir [28].  $\varepsilon$ ,  $\kappa$ ,  $\alpha$  ve  $\beta$  ise keyfi pozitif parametrelerdir. Bu analitik çözüm  $c$  nin işaretine bağlı olarak  $x$  in pozitif ya da negatif

yönünde hareket eden solitary dalga hareketlerine karşılık gelir. GP denkleminin solitary dalga hareketi,

$$u(x, 0) = A (-1 + \tanh^2 [B(x)]), \quad (2.52)$$

şeklindeki başlangıç şartı ve  $x \rightarrow \pm\infty$  için  $u(x, t) \rightarrow 0$  sınır şartları ile ele alınmıştır. Burada  $h = 0.1, \varepsilon = 1, \Delta t = 0.01$  ile  $x \in [-10, 10]$  aralığı dikkate alınmıştır.

## 2.7.2 Genelleştirilmiş Oskolkov Denklemi, Başlangıç-Sınır Koşulları ve Test Problemleri

$x$  konum ve  $t$  zamana göre türevi simgelemek üzere tek boyutlu Oskolkov denklemi aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$u_t - \lambda u_{xxt} - \alpha u_{xx} + uu_x = 0. \quad (2.53)$$

Tek boyutlu düzenlenmiş Oskolkov denklemi ise

$$u_t - \lambda u_{xxt} - \alpha u_{xx} + u^2 u_x = 0. \quad (2.54)$$

şeklinde tanımlıdır. Gerçekte, (2.53) ve (2.54) denklemleri Oskolkov denkleminin tek boyutu analoglarıdır.

$$(1 - \lambda \nabla^2) u_t = \alpha \nabla^2 u - (u \cdot \nabla) u - \nabla^2 p + f, \quad \nabla \cdot u = 0 \quad (2.55)$$

şeklinde belirtilen Oskolkov sistemi ise, sıkıştırılmaz viskoelastik akışkanların Kelvin-Voigt modelinin dinamik davranışını gösterir.  $u$  ve  $\lambda$  parametreleri sırasıyla sıvının viskoz ve elastik özelliklerini gösterir.  $\lambda$  parametresi negatif bir değer olabilir ve bu durum, Oskolkov denkleminin fiziksel anlamını bozmaz [34].

$\gamma, \sigma$  ve  $\eta$  pozitif reel değerler olmak üzere,

$$u_t + \gamma(u^p)_x + \sigma u_{xx} + \eta u_{xxt} = 0 \quad (2.56)$$

şeklinde tanımlanan genelleştirilmiş Oskolkov denklemi,  $x \rightarrow \pm\infty$  iken  $u \rightarrow 0$  fiziksel sınır koşulları altında incelenecektir.

Oskolkov denkleminin çeşitli türlerinin tam çözümleri bir çok farklı yöntemle incelenmiştir [35–37]. Oskolkov denkleminin hareketli dalga çözümleri  $G'/G$ -açılım yöntemi ile elde edilmiştir [38]. Roshid, MSE (Modified Simple Equation) yöntemi ile Oskolkov denkleminin tam çözümünü bulmuştur [39]. Faruk ve arkadaşları [40], tanh-coth yöntemi ile denklemin farklı çözümlerini elde etmişlerdir.



Bu çalışmada, (2.56) formundaki genelleştirilmiş Oskolkov denkleminin sayısal çözümü araştırılırken

$$\begin{aligned} u_N(a,t) &= 0, & u_N(b,t) &= 0, \\ (u_N)_x(a,t) &= 0, & (u_N)_x(b,t) &= 0, > 0 \end{aligned} \quad (2.57)$$

sınır şartları ve

$$u(x,0) = f(x) \quad a \leq x \leq b. \quad (2.58)$$

ile verilen başlangıç şartı kullanılacaktır.

Sığ su dalgalarının kütesinin korunmasına karşılık gelen genelleştirilmiş Oskolkov denklemi için korunum yasası aşağıdaki forma sahiptir:

$$I_1 = \int_a^b u dx \simeq h \sum_{j=1}^N u_j^n. \quad (2.59)$$

Belirlenen bölünme noktaları üzerinde problemin analitik ve nümerik değerleri hesaplanır ve uygulanan sayısal metodun doğruluğu ve etkinliği (2.43) ile verilen  $L_2$  ortalama hata normu ve (2.44) ile verilen  $L_\infty$  maksimum hata normu yardımıyla gösterilir.

### 2.7.2.1 Şok Dalga Çözümü:

Genelleştirilmiş Oskolkov denkleminin şok dalga analitik çözümü

$$u(x,t) = \left[ A + BD \left( \frac{\mu}{2} - \frac{a\mu}{a + \cosh[\mu(x - \kappa t)] - \sinh[\mu(x - \kappa t)]} \right) \right]^{2/(p-1)}, \quad (2.60)$$

biçimindedir. Bu denklemde

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{2} \frac{\sigma^{(p-1)} \sqrt{\frac{\gamma \sigma \left( \sigma^2 - \frac{8\sigma^2(p+1)}{(p+3)^2} \right) \sqrt{2\eta(p+1)}}{\gamma(p+3)}}}{\gamma(p+3) \left( \sigma^2 - \frac{8\sigma^2(p+1)}{(p+3)^2} \right)}, \\ B &= \frac{1}{\gamma(p+3) \left( \sigma^2 - \frac{8\sigma^2(p+1)}{(p+3)^2} \right)}, \\ D &= \sigma \sqrt{2\eta(p+1)} \sqrt{\frac{\gamma \sigma \left( \sigma^2 - \frac{8\sigma^2(p+1)}{(p+3)^2} \right) \sqrt{2\eta(p+1)}}{\eta(p+3)}}, \\ \mu &= \frac{\sqrt{8}}{4} \sqrt{\frac{p^2 - 2p + 1}{\eta(p+1)}}, \\ \kappa &= \frac{\sigma \sqrt{2\eta(p+1)}}{\eta(p+3)} \end{aligned} \quad (2.61)$$

ve  $a$ ,  $\kappa$ ,  $\mu$ ,  $p$  reel sabitlerdir. Genelleştirilmiş Oskolkov denkleminin şok dalga çözümü için başlangıç şartı ise

$$u(x,0) = \left[ A + BD \left( \frac{\mu}{2} - \frac{a\mu}{a + \cosh(\mu x) - \sinh(\mu x)} \right) \right]^{2/(p-1)}. \quad (2.62)$$

biçimindedir.

### 2.7.2.2 Gaussian Başlangıç Koşulu

Genelleştirilmiş Oskolkov denklemi yardımıyla dalgaların oluşumu için

$$u(x, 0) = \exp(-x^2), \quad (2.63)$$

Gauss başlangıç koşulu ve

$$u(-10, t) = u(10, t) = 0, \quad t > 0 \quad (2.64)$$

şeklinde belirtilen sınır koşulu kullanılarak  $h$  ve  $\Delta t$  nin çeşitli değerleri için solitonların oluşumu üzerinde çalışılmıştır.

### 2.7.2.3 Undular Bore Başlangıç Koşulu

Genelleştirilmiş Oskolkov denklemi yardımıyla dalgaların oluşumu için

$$u(x, 0) = \frac{1}{2}U_0 \left[ 1 - \tanh\left(\frac{|x| - x_0}{d}\right) \right], \quad (2.65)$$

Undular bore başlangıç koşulu ve

$$u(-60, t) = u(60, t) = 0, \quad t > 0 \quad (2.66)$$

şeklinde belirtilen sınır koşulu kullanılarak  $h$  ve  $\Delta t$  nin çeşitli değerleri için solitonların oluşumu üzerinde çalışılmıştır. Derinlikler arasındaki geçiş sadece hafif bir eğime sahipse, durgun su alanına daha derin bir su akışı aktığında bir delik oluşur [41]. Genlikteki değişim  $x = x_0$  üzerinde merkezlenir ve değişimin dikliği  $d$  ile ölçülür.  $d$  nin değerleri diklik ile ters orantılıdır.

### 2.7.3 Kudryashov-Sinelschkov Denklemi, Başlangıç-Sınır Şartları ve Test Problemleri

Kudryashov ve Sinelshchikov, ilk kez 2010 yılında Kudryashov-Sinelshchikov denklemi (KS) adını verdikleri bir doğrusal olmayan oluşum denklemini tanıtmışlardır. KS denklemi,  $u = u(x, t)$  yeterli mertebeden türevlenebilir fonksiyon,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  ve  $\theta$  pozitif reel değerler,  $x$  konum ve  $t$  zaman değişkeni olmak üzere,

$$u_t + \alpha uu_x + \beta u_{xxx} + \gamma (uu_{xx})_x + \theta u_x u_{xx} = 0, \quad (2.67)$$

formunda lineer olmayan kısmi türevli bir diferansiyel denklemdir. Kudryashov-Sinelshchikov (KS) denklemi, ısı transferi ve viskoziteyi hesaba katarak sıvı ve gaz

kabarcıklarının karışımlarındaki basınç dalgaları olgusunu açıklamaktadır [42].

KS denklemi,  $\gamma = \theta = 0$  olduğunda KdV denkleminin genelleştirilmesine indirgenir. KS denklemi için literatür incelendiğinde pek çok çalışma ile karşılaşılır. Bunlara örnek olarak, Bruzon ve arkadaşları, KS denklemi için en basit denklem yöntemini (simple equation method) uygulayarak bazı tam dalga çözümleri elde etmişlerdir [43]. Ryabov, denklemin tam çözümünü elde etmek için kesilmiş genişleme yönteminin (truncated expansion method) modifikasyonunu kullanmıştır [44]. Randrüt [45] çalışmasında, dalga profillerine ek olarak denklemle ilgili faz eğrilerini sunmuştur. Mirzazadeh ve Eslami, birinci integral yöntemini kullanarak KS denkleminin tam ilerleyen dalga (travelling wave) çözümlerini bulmuşlardır [46]. He, dinamik sistemlerin çatallanma yöntemini ve faz portreleri analizi yöntemini kullanarak KS denklemini araştırmıştır [47]. Seadawy [48], değiştirilmiş matematiksel yöntemi (modified mathematical method) uygulayarak KS denkleminin tam ilerleyen ve solitary dalga çözümlerini oluşturmuştur. İlerleyen dalga sisteminin farklı faz yörüngelerine karşılık gelen açık bir ilerleyen dalga çözümü Li ve Chen tarafından elde edilmiştir [49]. Yine beşinci mertebeden doğrusal olmayan KS denklemi için Lie simetri yöntemi Nadjafikhah tarafından uygulanmıştır [50].

Son yıllarda, matematiksel fizikte KS denkleminin tam çözümlerini bulmak için  $F$ -genişletme ( $F$ -expansion) yöntemi,  $G'/G$  –polinom açılım yöntemi ( $G'/G$  –polynomial expansion method), çatallanmalar ve faz portreleri (bifurcation and phase portraits), çoklu genişleme yöntemi (multiple expansion method), Jacobi eliptik fonksiyon yöntemi gibi çeşitli güçlü yöntemler de sunulmuştur [51–54]. Ayrıca KS denkleminin sayısal olarak çözüldüğü çok az sayıda çalışma bulunmaktadır. Gupta, doğrusal olmayan zaman-fraksiyonel Kudryashov-Sinelshchikov denklemini radyal temel fonksiyon (RBF) yöntemini kullanarak sayısal olarak çözmüştür [55]. KS denkleminin polinom ve rasyonel dalga çözümleri ve dinamik hareketler için sayısal simülasyonlar [56] da incelenmiştir.

Bu çalışmada, (2.67) formundaki Kudryashov-Sinelshchikov denkleminin sayısal çözümü araştırılırken

$$\begin{aligned} u_N(a, t) &= 0, & u_N(b, t) &= 0, \\ (u_N)_x(a, t) &= 0, & (u_N)_x(b, t) &= 0, \\ (u_N)_{xx}(a, t) &= 0, & (u_N)_{xx}(b, t) &= 0, t > 0 \end{aligned} \quad (2.68)$$

sınır şartları ve

$$u(x, 0) = f(x), \quad a \leq x \leq b \quad (2.69)$$

başlangıç şartı kullanılacaktır.

Sayısal şemanın dalga hareketi boyunca fiziksel durumu koruduğunu göstermek için  $I_1$  ve  $I_2$  ile gösterilen

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) dx, \\ I_2 &= \int_a^b \left[ \frac{1}{(\gamma+\theta)} ((\gamma u + \beta)^{\gamma\theta+1} - \beta^{\gamma\theta+1} \gamma^{-\gamma\theta}) \right] dx \end{aligned} \quad (2.70)$$

şeklindeki değişmezler hesaplanmıştır.

Belirlenen bölünme noktaları üzerinde problemin analitik ve nümerik değerleri hesaplanır ve uygulanan sayısal metodun doğruluğu ve etkinliği (2.43) ile verilen  $L_2$  ortalama hata normu ve (2.44) ile verilen  $L_\infty$  maksimum hata normu yardımıyla gösterilir.

### 2.7.3.1 Solitary Dalga Çözümü

Kudryashov-Sinelshchikov denkleminin solitary dalga çözümü

$$u(x,t) = \frac{3\beta\kappa^2\mu^2}{\alpha - \gamma\kappa^2\mu^2} \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{\kappa\mu}{2} (x - ct) \right], \quad (2.71)$$

olup, burada  $c = \beta\kappa^2\mu^2$  dalganın yayılma hızını ve  $\sqrt{\frac{v(p+2)}{2p}}$  ise, dalganın genliğini gösterir.  $x_0$  sabit reel sayıdır. Kudryashov-Sinelshchikov denkleminin tek solitary dalga çözümü

$$u(x,0) = \frac{3\beta\kappa^2\mu^2}{\alpha - \gamma\kappa^2\mu^2} \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{\kappa\mu}{2} x \right], \quad (2.72)$$

başlangıç şartı ve  $x \rightarrow \pm\infty$  için  $u(x,t) \rightarrow 0$  sınır şartları ile ele alınmıştır.

### 2.7.3.2 İki Solitary Dalganın Çarpışması

(2.67) formundaki KS denkleminin (2.71) da belirtilen solitary dalga çözümüne sahip olduğu belirtilmişti. Bu durumda KS denklemi, iki pozitif solitary dalganın etkileşimi problemi için  $c_1, c_2, x_1, x_2$  reel sabit değerler olmak üzere

$$u(x,0) = \sum_{i=1}^2 \frac{3\beta\kappa^2\mu_i^2}{\alpha - \gamma\kappa^2\mu_i^2} \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{\kappa\mu_i}{2} (x_i - c_i t) \right], \quad (2.73)$$

şeklinde bir başlangıç çözümüne sahiptir. Burada,  $\frac{3\beta\kappa^2\mu_i^2}{\alpha - \gamma\kappa^2\mu_i^2}$  ve  $\frac{\kappa\mu_i}{2}$  terimleri sırasıyla solitary dalgalarının genlik ve hızlarına karşılık gelmektedir.

### 2.7.3.3 Gaussian Başlangıç Koşulu

Kudryashov-Sinelshchikov denklemi yardımıyla dalgaların oluşumu için

$$u(x,0) = \exp(-x^2), \quad (2.74)$$

Gaussian başlangıç koşulu ve

$$u(-200,t) = u(100,t) = 0 , t > 0 \quad (2.75)$$

şeklinde belirtilen sınır koşulu kullanılarak  $h$  ve  $\Delta t$  nin değişik değerleri için solitonların oluşumu üzerinde çalışılmıştır.

#### 2.7.3.4 Undular Bore Başlangıç Koşulu

Kudryashov-Sinelshchikov denklemi yardımıyla dalgaların oluşumu için

$$u(x,0) = \frac{1}{2}U_0 \left[ 1 - \tanh \left( \frac{|x| - x_0}{d} \right) \right], \quad (2.76)$$

biçimindeki Undular bore başlangıç koşulu ve

$$u(-200,t) = u(100,t) = 0 , t > 0 \quad (2.77)$$

şeklinde belirtilen sınır koşulu kullanılarak  $h$  ve  $\Delta t$  nin farklı değerleri için solitonların oluşumu üzerinde çalışılmıştır.

#### 2.7.4 Beşinci Dereceden KdV Tipi Denklemler

Günümüzde modern soliton çalışmalarına yön veren ilk solitary dalga keşfi 1834 yılında yapılmıştır. Gemi inşaat mühendisi J. S. Russell'ın daha verimli çalışacak kanal teknelerini tasarlamak için Union kanal şirketi adına bir dizi çalışmalar yaptığı sırada ortaya çıkmıştır [57]. Son yıllarda optoelektronik ve telekomünikasyon alanlarında solitary dalgalar ile ilgili bu gözlemin önemi oldukça açık bir şekilde ortaya çıkmaktadır. Bu keşiften sonra Russell, laboratuvarında sabit hız ve şekilde ilerleyen solitary dalgalarını daha iyi inceleyebilmek için su tankları oluşturarak birçok deney yapmış ve bu deneyler sonucunda solitary dalgalar ile ilgili önemli bilgiler elde etmiştir [58]. Yaklaşık 50 yıl boyunca Russell'ın çalışmaları deney seviyesinde kalmış ve hiçbir denklemin çözümü solitary dalga olarak elde edilememiştir. 1895 yılında Hollandalı matematikçi Korteweg ve doktora öğrencisi olan de Vries ile birlikte geniş dalgaların sığ suda yayılımını modelleyen ve bugün kendi adları ile anılan (KdV)

$$u_t + \alpha u_x + \beta u_{xxx} + \kappa uu_x = 0 \quad (2.78)$$

şeklinde yeni bir lineer olmayan denklem tanımlamışlardır. Bu denklemde  $x$  konum ve  $t$  zaman değişkeni olmak üzere  $u(x,t)$  dalganın genliğini,  $\alpha = \sqrt{gd}$  küçük genlikli dalganın hızını,  $\beta = \alpha(d^2/6 - G/2\rho g)$  dağılma parametresini,  $\kappa$  lineer olmayan parametreyi,

$G$  su yüzeyinin gerilimini ve  $\rho$  suyun yoğunluğunu göstermektedir [59]. Korteweg ve de Vries araştırmaları sonucunda bu yeni denklemin  $u(x,t) = h \operatorname{sech}^2(x - \alpha t)$  biçiminde bir çözüme sahip olduğunu kanıtlamışlardır. Ayrıca KdV denkleminin pozitif dikey düzlemde periyodik çözümlerinin yalnızca bir tepe formunda olabileceğini göstermişlerdir. Böylece Russell'ın bahsettiği solitary dalgaların varlığını kanıtlamış ve de Vries'in doktora tezinde yayınlamışlardır. Ancak bu doktora tezinde denklemin ürettiği dalgaların kararlı olup olmadıkları ve iki solitary dalganın çarpışmadan sonra şekillerinde bir değişiklik olup olmadığı hakkında bir bilgi yer almamıştır. Çünkü o zamana kadar KdV denkleminin genellikle, küçük fakat sonlu genlikteki dalgaların doğrusal olmayan dağıtıcı ortamlardaki tek yönlü dağılımlarını açıkladığı düşünülmekteydi. Fakat Kruskal ve Zabusky, Fermi-Pasta-Ulam problemi olarak adlandırılan KdV denkleminin eşit kütlelerle birleştirilmiş doğrusal olmayan yaylarda ve tek boyutlu kafesteki uzunlamasına dağılımını yönlendirdiğini göstermişlerdir [60]. Daha sonra denklemin yine birçok farklı alanda yeni uygulamaları keşfedilmiştir. Örneğin KdV denkleminin plazma fiziğindeki uygulamalarını soğuk plazmadaki iyon akustik dalgalar üzerine yaptıkları çalışmalarıyla Washimi ile Taniuti göstermişlerdir [61]. KdV denkleminin soliton çözümlerinin nümerik ve analitik olarak elde edilmesi ile soliton dalgalar üzerinde yapılan çalışmalar oldukça hızlanmıştır. Soliton dalgalar günümüzde genellikle mühendislik, kimya, akışkanlar mekaniği, kuantum mekaniği, fiber optik, hidrodinamik, süper iletkenlik fiziği, biyofizik gibi fiziğin farklı alanlarında oldukça yoğun bir şekilde kullanılmaktadır. Örneğin fiber optikte normal dalganın yerine solitonlar kullanıldığında iletilen verilerde hiçbir kayıp olmaksızın birçok veri yüksek hızda çok uzun mesafeler boyunca taşınabilecektir. Buna ek olarak solitonlar elektronları lazer ışınları ile hasarlı dokuya ulaştırıp hücreye yeterli besinin ulaştırılması adına DNA'yı uyarır ve bunun sonucunda hücrenin onarımı sağlanır [62]. 2013 yılında Tsukuba Üniversitesinde görev yapan bilim adamı H. Kuwayama bazı hücrelerde soliton dalga hareketlerini gözlemlemiştir. Andrea Blanco-Redondo ve bir grup fizikçiden oluşan araştırmacı 2016 yılında Sydney Üniversitesi'nde optik solitonların iletişim teknolojileri ve hassas lazer cerrahisi görüntüleme cihazları gibi pek çok alandaki uygulamalar için yol gösterici olacak "saf-kuartik solitonlar" adı verilen yeni bir soliton türünü keşfetmişlerdir. Bu tip solitonların en önemli özelliği mevcut solitonlardan güçlü ve farklı bir şekle sahip olmalarıdır [63].

Bu tezde çözümlerini incelediğimiz beşinci mertebeden KdV denkleminin genel şekli

$$u_t + \alpha u^2 u_x + \beta u_x u_{xx} + \gamma u u_{xxx} + u_{xxxx} = 0, \quad (2.79)$$

biçiminde olup burada  $u(x,t)$  yeterince türetilen bir fonksiyondur. Genelleştirilmiş KdV olarak da adlandırılan beşinci mertebeden KdV denklemi, kuantum mekaniği ve doğrusal olmayan optikteki çok sayıda fiziksel olay için vazgeçilmez bir modeldir. Beşinci mertebeden KdV denkleminin soliton dalgalarının özel durumu için tam çözüm bilinmekle beraber, genel çözümü tam olarak bilinmemektedir. Bu denklemin sayısal çözümleri için çeşitli yöntemler kullanılmıştır. Örneğin tanh ve sine-cosine yöntemi [84], sonlu fark şemaları, Exp fonksiyon yöntemi, homojen denge yöntemi gibi [64]. Yine Abbasbandy ve Zakaria denklemin soliton çözümü için homotopi analiz yöntemini [57], Goswami ve arkadaşları homotopi pertürbasyon dönüşüm yöntemini (HPTM) [57]; Kaya, Adomian ayrıştırma yöntemini kullanmıştır [103].

Denklemdaki parametreler denklemin özelliklerini güçlü bir şekilde değiştirir. Bu parametrelerin farklı değerleri kullanılarak fKdV denkleminin birçok versiyonu oluşturulabilir, ancak bu versiyonlardan aşağıda belirtilenler özellikle ilgi çekicidir:

- a.  $\alpha = 45$ ,  $\beta = 15$ , ve  $\gamma = 15$  için, Sawada-Kotera (SK) denklemi [65],
- b.  $\alpha = 180$ ,  $\beta = 30$ , ve  $\gamma = 30$  için, Caudrey-Dodd-Gibbon (CDG) denklemi [66],
- c.  $\alpha = 30$ ,  $\beta = 20$ , ve  $\gamma = 10$  için, Lax denklemi [67],
- d.  $\alpha = 20$ ,  $\beta = 25$ , ve  $\gamma = 10$  için, Kaup-Kuperschmidt (KK) denklemi [68,69] ve
- e.  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 6$ , ve  $\gamma = 3$  için, Ito denklemi [70].

#### 2.7.4.1 Sawada-Kotera Denklemi, Başlangıç-Sınır Koşulları ve Test Problemleri

Sawada-Kotera (SK) denklemi,  $u = u(x,t)$  yeterince türevlenebilir bir fonksiyon,  $x$  konum ve  $t$  zaman değişkenini simgelemek üzere,

$$u_t + 45u^2u_x + 15u_xu_{xx} + 15uu_{xxx} + u_{xxxxx} = 0, \quad a \leq x \leq b, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (2.80)$$

formunda lineer olmayan kısmi türevli bir diferansiyel denklemdir [65]. Sawada-Kotera denklemi için literatür araştırması yapıldığında birçok sayısal çalışma ile karşılaşılır: Gupta ve Ray, zaman-kesirli SK denklemini çözmek için iki boyutlu Chebyshev dalgacık yöntemini uygulamışlardır [71]. Kumar ve arkadaşları, sıvılarda meydana gelen iki modlu Sawada-Kotera (tmSK) denklemi için değiştirilmiş Kudryashov ve yeni yardımcı denklem (new auxiliary equation methods) yöntemlerini ve yeni çift dalga soliton çözümlerini incelemişlerdir

[72]. Manafian ve Lakestani, çift yönlü Sawada-Kotera (bSK) denkleminin tam çözümlerini Hirota bilinear yöntemi ile bulmuşlardır [73]. Liu ve Dai, Hirota bilinear yöntemini kullanarak beşinci dereceden SK denklemi için tam soliton çözümleri belirlemişlerdir [74]. Özkan ve Uyhan, SK denklemini radyal temel fonksiyonlar yardımıyla ağsız çizgiler metodu ile çözmüşlerdir [75]. Durur ve Yokuş, SK denkleminin hiperbolik hareketli dalga çözümlerini,  $1/G'$ -genişleme yöntemini kullanarak elde etmişlerdir [76]. Adem, matematiksel fizikteki çeşitli problemlerde ortaya çıkan iki boyutlu genelleştirilmiş bir SK denklemi üzerinde Lie simetri analizi gerçekleştirmişdir [77]. Ray ve Sahoo, kesirli karmaşık dönüşüm aracılığıyla tanh-sech yöntemini kullanarak zaman-fraksiyonel beşinci dereceden SK denkleminin analitik olarak tam çözümlerini bulmuşlardır [78].

Belirlenen bölünme noktaları üzerinde problemin analitik ve nümerik değerleri hesaplanır ve uygulanan sayısal metodun doğruluğu ve etkinliği (2.43) ile verilen  $L_2$  ortalama hata normu ve (2.44) ile verilen  $L_\infty$  maksimum hata normu yardımıyla gösterilir.

### **Solitary Dalga Çözümü**

Sawada-Kotera denkleminin solitary dalga analitik çözümü

$$u(x, t) = 2k^2 \left( -1 + \operatorname{sech}^2 \left[ k(x - 16k^2t - x_0) \right] \right), \quad (2.81)$$

biçimindedir [79]. Bu analitik çözüm  $k$  nın işaretine bağlı olarak  $x$  in pozitif ya da negatif yönünde hareket eden solitary dalga hareketlerine karşılık gelir.

Sawada-Kotera denkleminin solitary dalga hareketi için başlangıç şartı

$$u(x, 0) = 2k^2 \left( -1 + \operatorname{sech}^2 \left[ k(x - x_0) \right] \right), \quad (2.82)$$

olup,  $x \rightarrow \pm\infty$  için  $u(x, t) \rightarrow 0$  sınır şartları ile ele alınmıştır.

### **2.7.4.2 Caudrey-Dodd-Gibbon (CDG) Denklemi, Başlangıç-Sınır Şartları ve Test Problemleri**

$u = u(x, t)$  yeteri kadar mertebeden türevlenebilir bir fonksiyon,  $x$  konum ve  $t$  ise zamana göre türevi belirtmek üzere, Caudrey-Dodd-Gibbon (CDG) denklemi,

$$u_t + 180u^2u_x + 30u_xu_{xx} + 30uu_{xxx} + u_{xxxxx} = 0, \quad (2.83)$$

formunda lineer olmayan bir kısmi diferansiyel denklemdir.

Bu denklemin tamamen integrallenebilir olduğu bilinmektedir. Bu, denklemin çoklu soliton çözümlerine sahip olduğu anlamına gelmektedir [80]. Weiss tarafından CDG denkleminin Painlevé özelliğine sahip olduğu kanıtlanmıştır [81]. Literatürde, CDG denkleminin



birkaç yöntemle çözüldüğü görülmektedir: Hirota'nın çift doğrusal yöntemi [82], Hirota'nın doğrudan yöntemi [80], Riccati denklem yöntemi [83], tanh yöntemi [84], exp-fonksiyon yöntemi [85,86], sonlu eleman yaklaşımında kollokasyon yöntemi [87].

Belirlenen bölünme noktaları üzerinde problemin analitik ve nümerik değerleri hesaplanır ve uygulanan sayısal metodun doğruluğu ve etkinliği  $L_2$  ortalama hata normu ve  $L_\infty$  maksimum hata normu yardımıyla gösterilir.

### Solitary Dalga Çözümü

Caudrey-Dodd-Gibbon (CDG) denkleminin solitary dalga analitik çözümü

$$u(x,t) = \frac{k^2 \exp(k(x - k^4 t))}{(1 + \exp(k(x - k^4 t)))^2}, \quad (2.84)$$

biçimindedir. Bu analitik çözüm  $k$  nın işaretine bağlı olarak  $x$  in pozitif ya da negatif yönünde hareket eden solitary dalga hareketlerine karşılık gelir. CDG denkleminin solitary dalga hareketi için başlangıç şartı

$$u(x,0) = f(x) = \frac{k^2 \exp(kx)}{(1 + \exp(kx))^2}, \quad (2.85)$$

olup,  $x \rightarrow \pm\infty$  için  $u(x,t) \rightarrow 0$  sınır şartları ile ele alınmıştır.

### 2.7.4.3 Lax Denklemi, Başlangıç-Sınır Şartları ve Test Problemleri

Lax Denklemi,  $u = u(x,t)$  türevlenebilir bir fonksiyon,  $x$  konum ve  $t$  ise zaman değişkenini belirtmek üzere,

$$u_t + 30u^2 u_x + 30u_x u_{xx} + 10uu_{xxx} + u_{xxxxx} = 0, \quad (2.86)$$

formunda lineer olmayan bir kısmi diferansiyel denklemdir.

Lax denklemi iyon akustik, uzun iç ve sığ su dalgalarını içeren fiziksel olaylarda uzun bir boyutlu dalgaların oluşumunu belirler. Literatürde, denklemin farklı yöntemlerle çözüldüğü görülebilir: Adomian yöntemi [103], genişletilmiş tanh yöntemi [104], Haar dalgacık sıralama yöntemi [105], Hirota'nın bilinear yöntemi [106], auto-Bäcklund ve Hirota dönüşümü [107], ters saçılma dönüşümü [108]. Yedinci mertebeden Lax denklemi Darvishi tarafından psödospektral yöntemle analiz edilmiştir [109].

Belirlenen bölünme noktaları üzerinde problemin analitik ve nümerik değerlerin hesaplanması yapılır ve uygulanan sayısal metodun doğruluğu ve ne kadar etkili olduğu  $L_2$  ortalama hata normu ve  $L_\infty$  maksimum hata normu yardımıyla incelenir.

## Solitary Dalga Çözümü

Lax denkleminin solitary dalga analitik çözümü

$$u(x,t) = 2k^2 (2 - 3 \tanh^2 [k(x - 56k^4t - x_0)]), \quad (2.87)$$

biçimindedir. Bu analitik çözüm  $k$  nın işaretine bağlı olarak  $x$  in pozitif ya da negatif yönünde hareket eden solitary dalga hareketlerine karşılık gelir.

Lax denkleminin solitary dalga hareketi için başlangıç şartı

$$u(x,0) = 2k^2(2 - 3 \tanh^2 [k(x - x_0)]), \quad (2.88)$$

olup,  $x \rightarrow \pm\infty$  için  $u(x,t) \rightarrow 0$  sınır şartları ile ele alınmıştır.

### 2.7.4.4 Kaup–Kuperschmidt (KK) Denklemi, Başlangıç-Sınır Şartları ve Test Problemleri

$u = u(x,t)$  yeteri kadar mertebeden türevlenebilir bir fonksiyon,  $x$  konum ve  $t$  ise zamana göre türevi belirtmek üzere, Kaup–Kuperschmidt (KK) denklemi,

$$u_t + 20u^2u_x + 25u_xu_{xx} + 10uu_{xxx} + u_{xxxxx} = 0, \quad (2.89)$$

formunda lineer olmayan kısmi türevli bir diferansiyel denklemdir.

İntegrallenebilir olduğu bilinen ve çift doğrusal gösterimleri olan ancak  $N$ -soliton çözümlerinin açık biçimi bilinmeyen Kaup–Kuperschmidt (KK) denklemi için literatür araştırıldığında bir takım sayısal çalışmalar yapıldığı görülmektedir [68, 69]. KK denklemi ilk olarak 1980 yılında Kaup tarafından tanıtılmıştır [68]. Çalışmada, Kaup tarafından solitary dalga çözümleri elde etmek için ters saçılma teknikleri kullanılmış, ancak daha önce  $N$ -soliton analitik çözümleri araştırılmamıştır. Zaman-kesirli KK denklemi için Lie simetri analizi ve grup sınıflandırması Jafari ve çalışma arkadaşları tarafından yapılmıştır [88]. 1997 yılında Hirota bilinear yöntemi kullanılarak KK denkleminin iki soliton ve üç soliton analitik çözümleri Hereman ve Nuseir tarafından sunulmuştur [89]. Musette ve Zait, Painlevé-Gambier sınıflandırmasına dayalı tekillik analizini kullanarak KK denkleminin Backlund dönüşümünü türetmiştir [90, 91]. Parker, KK denkleminin çift doğrusal biçimine dönüştürülmesi için doğrudan yaklaşımı tanıtmış ve genel  $N$ -soliton çözümlerini sunmuştur [92, 93]. Ablowitz ve Clarkson, soliton çözümlerinin geliştirildiği fiziksel öneme sahip doğrusal olmayan denklemleri işlemek için ters saçılma dönüşümü yöntemini uygulamıştır [94]. Sahoo, gelişmiş  $G'/G$ -genişletme ve genişletilmiş  $G'/G$ -genişletme

yöntemleri gibi yeni teknikler kullanarak zaman-kesirli KK denklemi için yeni analitik çözümler oluşturmuştur [95]. Lokal olmayan simetri, KK denklemi için Reyes tarafından tanıtılmıştır [96,97].

Belirlenen bölünme noktaları üzerinde problemin analitik ve nümerik değerlerin hesaplanması yapılır ve uygulanan sayısal metodun doğruluğu ve etkinliği  $L_2$  ortalama hata normu ve  $L_\infty$  maksimum hata normu yardımıyla incelenir.

### Solitary Dalga Çözümü

Kaup-Kupershmidt denkleminin solitary dalga analitik çözümü

$$u(x,t) = \frac{24k^2 e^{(kx-k^5t)} (4e^{(kx-k^5t)} + e^{2(kx-k^5t)} + 16)}{(16e^{(kx-k^5t)} + e^{2(kx-k^5t)} + 16)^2}, \quad (2.90)$$

biçimindedir. Bu analitik çözüm  $k$  nın pozitif ya da negatif olmasına bağlı olarak  $x$  in pozitif ya da negatif yönde hareket eden solitary dalga hareketlerine karşılık gelir.

Kaup-Kupershmidt denkleminin solitary dalga hareketi için başlangıç şartı

$$u(x,0) = \frac{24k^2 e^{kx} (4e^{kx} + e^{2kx} + 16)}{(16e^{kx} + e^{2kx} + 16)^2}, \quad (2.91)$$

olup,  $x \rightarrow \pm\infty$  için  $u(x,t) \rightarrow 0$  sınır şartları ile ele alınmıştır [98].

#### 2.7.4.5 Ito Denklemi, Başlangıç-Sınır Şartları ve Test Problemleri

Ito denklemi,  $u = u(x,t)$  yeteri kadar mertebeden türevlenebilir bir fonksiyon,  $x$  konum ve  $t$  zaman değişkeni olmak üzere,

$$u_t + 2u^2 u_x + 6u_x u_{xx} + 3uu_{xxx} + u_{xxxxx} = 0, \quad (2.92)$$

formunda lineer olmayan kısmi türevli bir diferansiyel denklemdir.

Ito denklemi kesinlikle integrallenemez, ancak sınırlı sayıda korunum yasasına sahiptir [99]. Son zamanlarda, birçok integrallenebilir özellik ve (2.92) denkleminin tam çözümleri farklı bakış açılarından geniş çapta araştırılmaktadır [70]. Wang ve arkadaşları tarafından zaman-kesirli Ito denklemini çözmek için Bernstein polinomlarını kullanarak Chebyshev dalgacıkları yöntemi önerilmiştir [100]. Xu ve arkadaşı 2006 yılında Ito tipi birleştirilmiş KdV denklemlerini çözmek için yerel süreksiz bir Galerkin yöntemi geliştirmişlerdir [101]. Projektif Riccati denklem yöntemini kullanarak standart Ito denklemi için ilerleyen dalga çözümleri Gomez'in çalışmasında elde edilmiş ve denklemin tam çözümleri türetilmiştir [102].

Belirlenen bölünme noktaları üzerinde problemin analitik ve nümerik değerlerin hesaplanması yapılır ve uygulanan sayısal metodun doğruluğu ve ne kadar etkili olduğu  $L_2$  ortalama

hata normu ve  $L_\infty$  maksimum hata normu yardımıyla incelenir.

### **Solitary Dalga Çözümü**

Ito denkleminin solitary dalga analitik çözümü

$$u(x,t) = 20k^2 - 30k^2 \tanh^2(kx - 96k^5t + kx_0), \quad (2.93)$$

biçimindedir. Ito denkleminin solitary dalga hareketi için başlangıç şartı

$$u(x,0) = 20k^2 - 30k^2 \tanh^2(kx + kx_0). \quad (2.94)$$

olup,  $x \rightarrow \pm\infty$  için  $u(x,t) \rightarrow 0$  sınır şartları ile ele alınmıştır.



### 3. BÖLÜM

#### GILSON PICKERING DENKLEMİNİN KOLLOKASYON SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde, doğrusal olmayan Gilson-Pickering denkleminin septik B-spline kollokasyon metodu kullanılarak nümerik çözümleri araştırılmıştır. Bilinmeyen fonksiyonun zaman ayrıştırması Crank-Nicolson metodu ile yapılmıştır. Zaman ayrıştırması ile denklemden lineer olmayan terimler lineerleştirilir ve septik B-spline bazların yardımıyla tamamen zaman-konum ayrışmış olan bir cebirsel denklem elde edilir. Bilinmeyen sayısı ile denklem sayıları, başlangıç ve sınır koşulları kullanılarak eşitlenip çözülebilir hale getirildikten sonra  $(N+1) \times (N+1)$  boyutlu matris sistemi ile ifade edilebilen denklem sistemi Thomas algoritması ile çözülmüştür. Von Neumann tekniği uygulanarak yöntemin kararlılığı araştırılmıştır. Sayısal algoritma tek solitary dalga hareketini içeren test problemi üzerinden hata miktarları ile korunum sabitleri hesaplanmış ve grafikler çizilerek yorumlanmıştır.

#### 3.1 Denklem Gelişimi ve Septik B-Spline Fonksiyonlar

Bu kısımda, birinci bölümde verilen septik B-spline kollokasyon yöntemi ile Gilson-Pickering denkleminin nümerik çözümü için çözüm adımları verilmiştir.  $\varepsilon$ ,  $\kappa$ ,  $\alpha$  ve  $\beta$  pozitif reel sabitler,  $x$  indisi konum ve  $t$  indisi zaman değişkenini belirtmek üzere  $x \rightarrow \pm\infty$  iken  $u \rightarrow 0$  sınır şartları ile Gilson-Pickering (GP) denklemi

$$u_t - \varepsilon u_{xxt} + 2\kappa u_x - uu_{xxx} - \alpha uu_x - \beta u_x u_{xx} = 0. \quad (3.1)$$

üzerinde durulmuştur. Bu denklem,

$$\begin{aligned} u_N(a, t) &= 0, & u_N(b, t) &= 0, \\ (u_N)_x(a, t) &= 0, & (u_N)_x(b, t) &= 0, \\ (u_N)_{xx}(a, t) &= 0, & (u_N)_{xx}(b, t) &= 0, \quad t > 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

şeklindeki sınır şartları ve

$$u(x, 0) = f(x), \quad a \leq x \leq b \quad (3.3)$$

başlangıç şartı ile ele alınmıştır.

İlk olarak problemin çözüm bölgesi;  $[a, b]$  kapalı aralığına kısıtlanır.  $[a, b]$  kapalı aralığı,  $x_m$  düğüm noktalarını kullanarak  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$  şeklinde  $N$  adet birbirine eşit alt aralıklara bölünür.  $m = 1, 2, \dots, N$  için bu alt aralıkların uzunlukları  $h = \frac{b-a}{N} = (x_{m+1} - x_m)$

formundadır.  $a \leq x \leq b$  aralığında  $x_m$  düğüm noktaları ile  $\varphi_m(x)$  septik B-spline interpolasyon fonksiyonları

$$\varphi_m(x) = \frac{1}{h^7} \begin{cases} \alpha^7, & [x_{m-4}, x_{m-3}] \\ \alpha^7 - 8\beta^7, & [x_{m-3}, x_{m-2}] \\ \alpha^7 - 8\beta^7 + 28\gamma^7, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ \alpha^7 - 8\beta^7 + 28\gamma^7 - 56\eta^7, & [x_{m-1}, x_m] \\ \sigma^7 - 8\mu^7 + 28\kappa^7 - 56\lambda^7, & [x_m, x_{m+1}] \\ \sigma^7 - 8\mu^7 + 28\kappa^7, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ \sigma^7 - 8\mu^7, & [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ \sigma^7, & [x_{m+3}, x_{m+4}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (3.4)$$

şeklinde olup burada  $\alpha = (x - x_{m-4})$ ,  $\beta = (x - x_{m-3})$ ,  $\gamma = (x - x_{m-2})$ ,  $\eta = (x - x_{m-1})$ ,  $\sigma = (x_{m+4} - x)$ ,  $\mu = (x_{m+3} - x)$ ,  $\kappa = (x_{m+2} - x)$  ve  $\lambda = (x_{m+1} - x)$  dir [15].  $[a, b]$  aralığı üzerinde tanımlı fonksiyonlar için  $\{\varphi_{-3}(x), \varphi_{-2}(x), \dots, \varphi_{N+3}(x)\}$  kümesi bir baz oluşturmaktadır. Problemin tam çözümü olan  $u(x, t)$  fonksiyonuna yaklaşan  $u_N(x, t)$  nümerik çözümü

$$u_N(x, t) = \sum_{m=-3}^{N+3} \varphi_m(x) \delta_m(t), \quad (3.5)$$

şeklinde verilir. Bu ifadede sınır şartları ile elde edilecek olan  $\delta_m(t)$  ler zamana bağlı parametrelerdir.  $0 \leq \omega \leq 1$  için  $h\omega = x - x_m$  şeklindeki lokal dönüşüm ile  $[x_m, x_{m+1}]$  aralığı  $[0, 1]$  kapalı aralığına dönüştürülür. Nitekim septik B-spline baz fonksiyonları  $[0, 1]$  aralığı üzerinde  $\omega$  cinsinden aşağıdaki şekilde tanımlanabilir:

$$\begin{aligned} \varphi_{m-3} &= 1 - 7\omega + 21\omega^2 - 35\omega^3 + 35\omega^4 - 21\omega^5 + 7\omega^6 - \omega^7, \\ \varphi_{m-2} &= 120 - 392\omega + 504\omega^2 - 280\omega^3 + 84\omega^5 - 42\omega^6 + 7\omega^7, \\ \varphi_{m-1} &= 1191 - 1715\omega + 315\omega^2 + 665\omega^3 - 315\omega^4 - 105\omega^5 + 105\omega^6 - 21\omega^7, \\ \varphi_m &= 2416 - 1680\omega + 560\omega^4 - 140\omega^6 + 35\omega^7, \\ \varphi_{m+1} &= 1191 + 1715\omega + 315\omega^2 - 665\omega^3 - 315\omega^4 + 105\omega^5 + 105\omega^6 - 35\omega^7, \\ \varphi_{m+2} &= 120 + 392\omega + 504\omega^2 + 280\omega^3 - 84\omega^5 - 42\omega^6 + 21\omega^7, \\ \varphi_{m+3} &= 1 + 7\omega + 21\omega^2 + 35\omega^3 + 35\omega^4 + 21\omega^5 + 7\omega^6 - \omega^7, \\ \varphi_{m+4} &= \omega^7. \end{aligned}$$

$\delta_{m-4}$ ,  $\delta_{m-3}$ ,  $\delta_{m-2}$ ,  $\delta_{m-1}$ ,  $\delta_m$ ,  $\delta_{m+1}$ ,  $\delta_{m+2}$  ve  $\delta_{m+3}$  eleman parametreleri ile  $\varphi_{m-3}$ ,  $\varphi_{m-2}$ ,  $\varphi_{m-1}$ ,  $\varphi_m$ ,  $\varphi_{m+1}$ ,  $\varphi_{m+2}$ ,  $\varphi_{m+3}$  ve  $\varphi_{m+4}$  yaklaşım fonksiyonları olacak şekilde,  $u(x, t)$  fonksiyonuna

$$u_N(x, t) = \sum_{m=-3}^{N+3} \varphi_m(x) \delta_m(t), \quad (3.6)$$

deneme fonksiyonu ile yaklaşım yapılır.

(3.4) te verilen septik B-spline baz fonksiyonları ve (3.5) te tanımlanan eşitlikten yararlanarak,  $u'$ ,  $u''$ ,  $u'''$ ,  $u^{iv}$ ,  $u^v$  ve  $u^{vi}$  nun  $x$  e göre türevlerinin düğüm noktalarındaki değerleri  $\delta_m$  parametreleri cinsinden

$$\begin{aligned} u_N(x_m, t) &= u_m = \delta_{m-3} + 120\delta_{m-2} + 1191\delta_{m-1} + 2416\delta_m + 1191\delta_{m+1} + 120\delta_{m+2} + \delta_{m+3}, \\ u'_m &= \frac{7}{h}(-\delta_{m-3} - 56\delta_{m-2} - 245\delta_{m-1} + 245\delta_{m+1} + 56\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \\ u''_m &= \frac{42}{h^2}(\delta_{m-3} + 24\delta_{m-2} + 15\delta_{m-1} - 80\delta_m + 15\delta_{m+1} + 24\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \\ u'''_m &= \frac{210}{h^3}(-\delta_{m-3} - 8\delta_{m-2} + 19\delta_{m-1} - 19\delta_{m+1} + 8\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \\ u^{iv}_m &= \frac{840}{h^4}(\delta_{m-3} - 9\delta_{m-1} + 16\delta_m - 9\delta_{m+1} + \delta_{m+3}), \\ u^v_m &= \frac{2520}{h^5}(-\delta_{m-3} + 4\delta_{m-2} - 5\delta_{m-1} + 5\delta_{m+1} - 4\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \\ u^{vi}_m &= \frac{5040}{h^6}(\delta_{m-3} - 6\delta_{m-2} + 15\delta_{m-1} - 20\delta_m + 15\delta_{m+1} - 6\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) \end{aligned} \quad (3.7)$$

olarak elde edilir.

### 3.1.1 Kollokasyon Sonlu Elemanlar Yöntemi

(3.7) ile verilen eşitlikler, (3.1) ile tanımlanan Gilson-Pickering denkleminde yerlerine yazıldığında

$$\begin{aligned} &\dot{\delta}_{m-3} + 120\dot{\delta}_{m-2} + 1191\dot{\delta}_{m-1} + 2416\dot{\delta}_m + 1191\dot{\delta}_{m+1} + 120\dot{\delta}_{m+2} + \dot{\delta}_{m+3} \\ &- \frac{42\varepsilon}{h^2}(\dot{\delta}_{m-3} + 24\dot{\delta}_{m-2} + 15\dot{\delta}_{m-1} - 80\dot{\delta}_m + 15\dot{\delta}_{m+1} + 24\dot{\delta}_{m+2} + \dot{\delta}_{m+3}) \\ &+ \frac{14\kappa}{h}(-\delta_{m-3} - 56\delta_{m-2} - 245\delta_{m-1} + 245\delta_{m+1} + 56\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) \\ &- \frac{210}{h^3}Z_{m1}(\delta_{m-3} - 8\delta_{m-2} + 19\delta_{m-1} - 19\delta_{m+1} + 8\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) \\ &- \frac{7\alpha}{h}Z_{m1}(-\delta_{m-3} - 56\delta_{m-2} - 245\delta_{m-1} + 245\delta_{m+1} + 56\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) \\ &- \beta \frac{7}{h}Z_{m2}(-\delta_{m-3} - 56\delta_{m-2} - 245\delta_{m-1} + 245\delta_{m+1} + 56\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) = 0, \end{aligned} \quad (3.8)$$

şeklindeki cebirsel denklem elde edilir. Lineerleştirme tekniğini uygulayabilmek için, (3.1) denkleminde lineer olmayan  $uu_{xxx}$  ve  $uu_x$  teriminde  $u$  terimi

$$u_m = Z_{m1} = \delta_{m-3} + 120\delta_{m-2} + 1191\delta_{m-1} + 2416\delta_m + 1191\delta_{m+1} + 120\delta_{m+2} + \delta_{m+3},$$

ve  $u_x u_{xx}$  teriminde  $u_{xx}$  terimi

$$u_{xx} = Z_{m2} = \frac{42}{h^2}(\delta_{m-3} + 24\delta_{m-2} + 15\delta_{m-1} - 80\delta_m + 15\delta_{m+1} + 24\delta_{m+2} + \delta_{m+3}),$$

şeklinde alınarak lokal sabit olarak kabul edilmiştir. (3.8) denkleminde  $\delta_m$  ve  $\dot{\delta}_m$  eleman parametreleri yerine ayrı ayrı

$$\delta_i = \frac{\delta_i^{n+1} + \delta_i^n}{2}, \quad \dot{\delta}_i = \frac{\delta_i^{n+1} - \delta_i^n}{\Delta t} \quad (3.9)$$

olacak şekilde Crank-Nicolson formülasyonu ve ileri sonlu fark yaklaşımı yazılırsa,  $n$  ve  $n+1$  olarak ifade edilen iki zaman kademesi arasındaki ilişki  $\delta^n$  ve  $\delta^{n+1}$  parametreleri cinsinden

$$\begin{aligned} & \gamma_1 \delta_{m-3}^{n+1} + \gamma_2 \delta_{m-2}^{n+1} + \gamma_3 \delta_{m-1}^{n+1} + \gamma_4 \delta_m^{n+1} + \gamma_5 \delta_{m+1}^{n+1} + \gamma_6 \delta_{m+2}^{n+1} + \gamma_7 \delta_{m+3}^{n+1} \\ & = \gamma_7 \delta_{m-3}^n + \gamma_6 \delta_{m-2}^n + \gamma_5 \delta_{m-1}^n + \gamma_4 \delta_m^n + \gamma_3 \delta_{m+1}^n + \gamma_2 \delta_{m+2}^n + \gamma_1 \delta_{m+3}^n \end{aligned} \quad (3.10)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\begin{aligned} A &= -\frac{42}{h^2} \varepsilon, \\ B &= \frac{7}{2h} \Delta t, \\ C &= \frac{105}{h^3} \Delta t, \\ D &= \frac{7}{2h} \beta \Delta t \end{aligned} \quad (3.11)$$

ve  $\Delta t$  zaman adımını belirtmek üzere, (3.10) denkleminde  $\delta$  zaman parametrelerinin çarpanları

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= [1 - A - B(2\kappa - \alpha Z_{m1}) + CZ_{m1} + DZ_{m2}], \\ \gamma_2 &= [120 - 24A - 56B(2\kappa - \alpha Z_{m1}) + 8CZ_{m1} + 56DZ_{m2}], \\ \gamma_3 &= [1191 - 15A - 245B(2\kappa - \alpha Z_{m1}) - 19CZ_{m1} + 245DZ_{m2}], \\ \gamma_4 &= [2416 + 80A], \\ \gamma_5 &= [1191 - 15A + 245B(2\kappa - \alpha Z_{m1}) + 19CZ_{m1} - 245DZ_{m2}], \\ \gamma_6 &= [120 - 24A + 56B(2\kappa - \alpha Z_{m1}) - 8CZ_{m1} - 56DZ_{m2}], \\ \gamma_7 &= [1 - A + B(2\kappa - \alpha Z_{m1}) - CZ_{m1} - DZ_{m2}] \end{aligned} \quad (3.12)$$

şeklinde alınır. (3.10) denklem sistemi,  $\delta_{-3}, \delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_{N+1}, \delta_{N+2}$  ve  $\delta_{N+3}$  olmak üzere  $(N+7)$  adet bilinmeyen parametre ve  $(N+1)$  tane lineer denklem içermektedir. Bu denklem sisteminin çözülebilmesi için (3.2) ile verilen sınır şartlarını kullanarak elde edilebilecek altı adet ek koşula daha ihtiyaç olduğu görülür. Ek koşullar yardımı ile (3.10) denklem sistemindeki  $\delta_{-3}, \delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_{N+1}, \delta_{N+2}$  ve  $\delta_{N+3}$  parametreleri yok edilir ve  $d^n = (\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_N)^T$  gibi  $(N+1)$  adet bilinmeyen parametreden oluşan

$$Ad^{n+1} = Bd^n \quad (3.13)$$

$(N+1) \times (N+1)$  formunda diagonal matris sistemi bulunur ve bu sistem Thomas algoritması kullanılarak çözülür. Çözüm yapılırken lineer olmama etkisini en aza indirmek için her bir



zaman adımı iki veya üç kez

$$\delta^{n*} = \delta^n + \frac{1}{2}(\delta^n - \delta^{n-1}) \quad (3.14)$$

şeklinde bir iç iterasyon işlemi uygulanır. (3.10) denklem sisteminde iterasyon işlemine başlayabilmek için, ilk olarak başlangıç ve sınır şartları yardımıyla  $d^0 = (\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_N)^0$  ile gösterilen başlangıç vektörü hesaplanır. Bu yüzden  $t = 0$  zamanında  $[a, b]$  aralığındaki

$$u_N(x, 0) = \sum_{m=-3}^{N+3} \phi_m(x) \delta_m^0, \quad (3.15)$$

yaklaşımı ile

$$\begin{aligned} u_N(x, 0) &= u(x_m, 0); & m &= 0, 1, 2, \dots, N \\ (u_N)_x(a, 0) &= 0, & (u_N)_x(b, 0) &= 0, \\ (u_N)_{xx}(a, 0) &= 0, & (u_N)_{xx}(b, 0) &= 0, \\ (u_N)_{xxx}(a, 0) &= 0, & (u_N)_{xxx}(b, 0) &= 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

şartları kullanılırsa,

$$Wd^0 = b, \quad (3.17)$$

şeklinde elde edilen matris sistemi için Thomas algoritması uygulanır ve  $\delta_m^0$  başlangıç vektörü hesaplanır. Burada

$$W = \begin{bmatrix} 1536 & 2712 & 768 & 24 & & & & & & & \\ \frac{82731}{81} & \frac{210568.5}{81} & \frac{104796}{81} & \frac{10063.5}{81} & 1 & & & & & & \\ \frac{9600}{81} & \frac{96597}{81} & \frac{195768}{81} & \frac{96474}{81} & 120 & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & 1 & 120 & 1191 & 2416 & 1191 & 120 & 1 \\ & & & & & & & 1 & 120 & \frac{96474}{81} & \frac{195768}{81} & \frac{96597}{81} & \frac{9600}{81} \\ & & & & & & & & 1 & \frac{10063.5}{81} & \frac{104796}{81} & \frac{210568.5}{81} & \frac{82731}{81} \\ & & & & & & & & & 24 & 768 & 2712 & 1536 \end{bmatrix}$$

$d^0 = (\delta_0, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{N-2}, \delta_{N-1}, \delta_N)^T$  ve  $b = (u(x_0, 0), u(x_1, 0), \dots, u(x_{N-1}, 0), u(x_N, 0))^T$  dir.

### 3.1.2 Kararlılık Analizi

Lineerleştirilmiş sayısal algoritmanın kararlılık analizi için Von Neumann teorisi uygulanmıştır.  $\tau$  dalga sayısı ve  $\Delta x$  eleman büyüklüğünü göstermek üzere, genlikteki  $\xi$  ile ifade edilen büyüme faktörü

$$\delta_m^n = \xi^n e^{im\tau\Delta x}, \quad (3.18)$$

şeklindeki sayısal şemanın lineerleştirilmiş formundan belirlenir. (3.18) eşitliğinde tanımlanan Fourier modu, (3.10) lineer denklem sisteminde yazıldığında

$$\begin{aligned} & \xi^{n+1} (\gamma_1 e^{i(m-3)\tau\Delta x} + \gamma_2 e^{i(m-2)\tau\Delta x} + \gamma_3 e^{i(m-1)\tau\Delta x} + \gamma_4 e^{im\tau\Delta x} \\ & + \gamma_5 e^{i(m+1)\tau\Delta x} + \gamma_6 e^{i(m+2)\tau\Delta x} + \gamma_7 e^{i(m+3)\tau\Delta x}) = \\ & \xi^n (\gamma_7 e^{i(m-3)\tau\Delta x} + \gamma_6 e^{i(m-2)\tau\Delta x} + \gamma_5 e^{i(m-1)\tau\Delta x} + \gamma_4 e^{im\tau\Delta x} \\ & + \gamma_3 e^{i(m+1)\tau\Delta x} + \gamma_2 e^{i(m+2)\tau\Delta x} + \gamma_1 e^{i(m+3)\tau\Delta x}). \end{aligned} \quad (3.19)$$

eşitliği ortaya çıkar. (3.19) eşitliğine

$$e^{i\tau\Delta x} = \cos(\tau\Delta x) + i \sin(\tau\Delta x), \quad (3.20)$$

formundaki Euler formülü uygulanıp gereken işlemler yapılırsa,  $\xi$  büyüme faktörü

$$\xi = \frac{\rho_1 - i\rho_2}{\rho_1 + i\rho_2}, \quad (3.21)$$

olarak elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} \rho_1 &= 2416 + 2382 \cos(\tau\Delta x) + 240 \cos(2\tau\Delta x) + 2 \cos(3\tau\Delta x), \\ \rho_2 &= [-490B(2\kappa - \alpha Z_{m1}) - 38CZ_{m1} + 490DZ_{m2}] \sin(\tau\Delta x) \\ &+ [-112B(2\kappa - \alpha Z_{m1}) + 16CZ_{m1} + 112DZ_{m2}] \sin(2\tau\Delta x) \\ &+ [-2B(2\kappa - \alpha Z_{m1}) + 2CZ_{m1} + 2DZ_{m2}] \sin(3\tau\Delta x), \end{aligned} \quad (3.22)$$

olup,  $|\xi| = 1$  koşulu sağlanır. Böylece lineerleştirilmiş sonlu eleman şeması şartsız kararlı olarak bulunur.

### 3.1.3 Nümerik Örnekler ve Sonuçlar

Bu kısımda, belirlenen bölünme noktaları üzerinde tek solitary dalga problemi için GP denkleminin nümerik çözümleri elde edilmiştir. Uygulanan sayısal metodun doğruluğu ve etkinliği seçilen zaman adımlarında tam ve yaklaşık çözüm arasındaki farkın hesaplanmasını sağlayan

$$L_2 = \|u^{tam} - u_N\|_2 \simeq \sqrt{h \sum_{j=1}^N |u_j^{tam} - (u_N)_j|^2}, \quad (3.23)$$

$L_2$  ortalama hata normu ve

$$L_\infty = \|u^{tam} - u_N\|_\infty \simeq \max_j |u_j^{tam} - (u_N)_j|, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (3.24)$$

$L_\infty$  sonsuz hata normu yardımıyla incelenmiştir. (3.1) ile verilen GP denkleminin kütle ve momentuma karşılık gelen

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_a^b u dx \simeq h \sum_{j=1}^N u_j^n, \\ I_2 &= \int_a^b \left[ \frac{1}{6} (3u^2 + \varepsilon u_x^2 - 2\varepsilon u u_{xx}) \right] dx \\ &\simeq h \sum_{j=1}^N \left[ \frac{1}{6} \left( 3 (u_j^n)^2 + \varepsilon (u_x)_j^2 - 2\varepsilon q_j^n (u_{xx})_j \right) \right], \end{aligned} \quad (3.25)$$

şeklinde ifade edilen iki korunum sabitine sahiptir. Korunan büyüklükler  $I_1$  ve  $I_2$  sayısal şemanın dalga hareketi sırasında fiziksel durumu koruduğunu kaydetmek için araştırılır.

### 3.1.3.1 Tek Solitary Dalga Hareketi

Bu dalga problemi için GP denkleminin  $x \rightarrow \pm\infty$  iken  $u \rightarrow 0$  sınır şartı ve  $t = 0$  olmak üzere

$$u(x, 0) = A (-1 + \tanh^2 [B(x)]), \quad (3.26)$$

başlangıç koşulu ile solitary dalga çözümleri elde edilmiştir.  $\varepsilon$ ,  $\kappa$ ,  $\alpha$  ve  $\beta$  keyfi sabitler olacak şekilde GP denkleminin analitik çözümü

$$u(x, t) = A (-1 + \tanh^2 [B(x - ct)]), \quad (3.27)$$

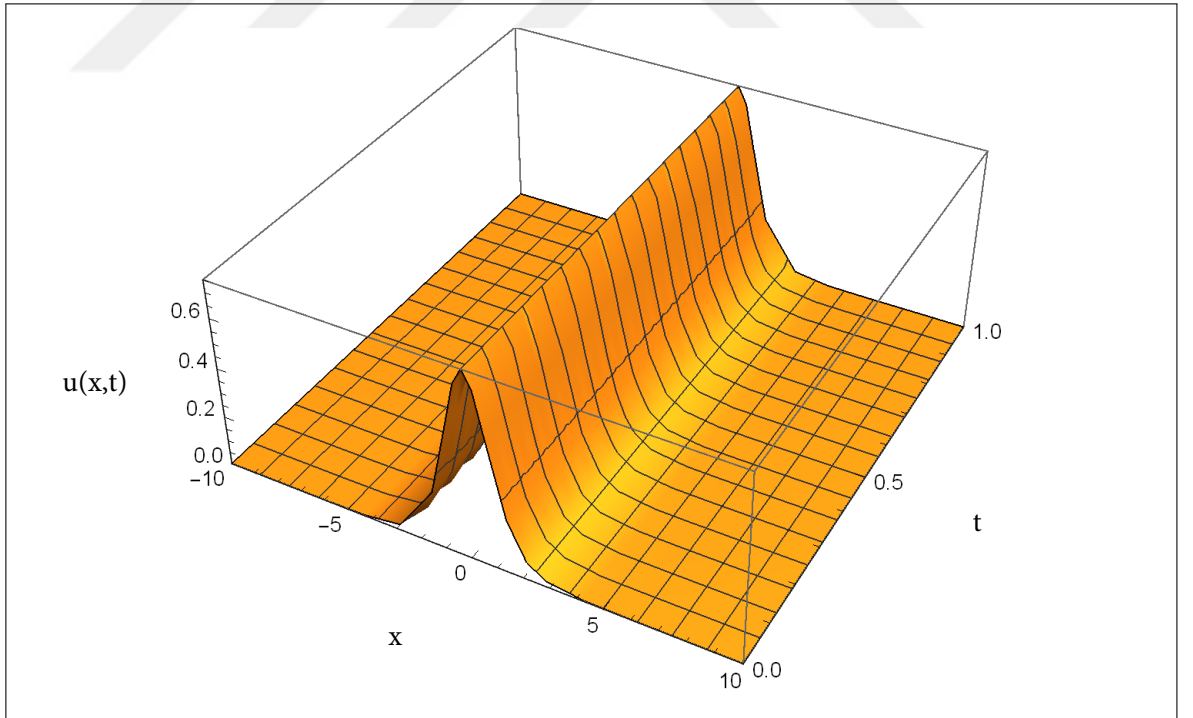
şeklindedir. Bu çözümde  $A = \frac{3(c-2\kappa)\varepsilon c}{\alpha \varepsilon c - c + 2\kappa}$ ,  $B = \frac{1}{2} \sqrt{-\frac{2\kappa - c}{\varepsilon c}}$  ve  $c$  ifadeleri sırayla dalganın genliğini, değerini ve hızını temsil etmektedir.

#### Birinci Durum

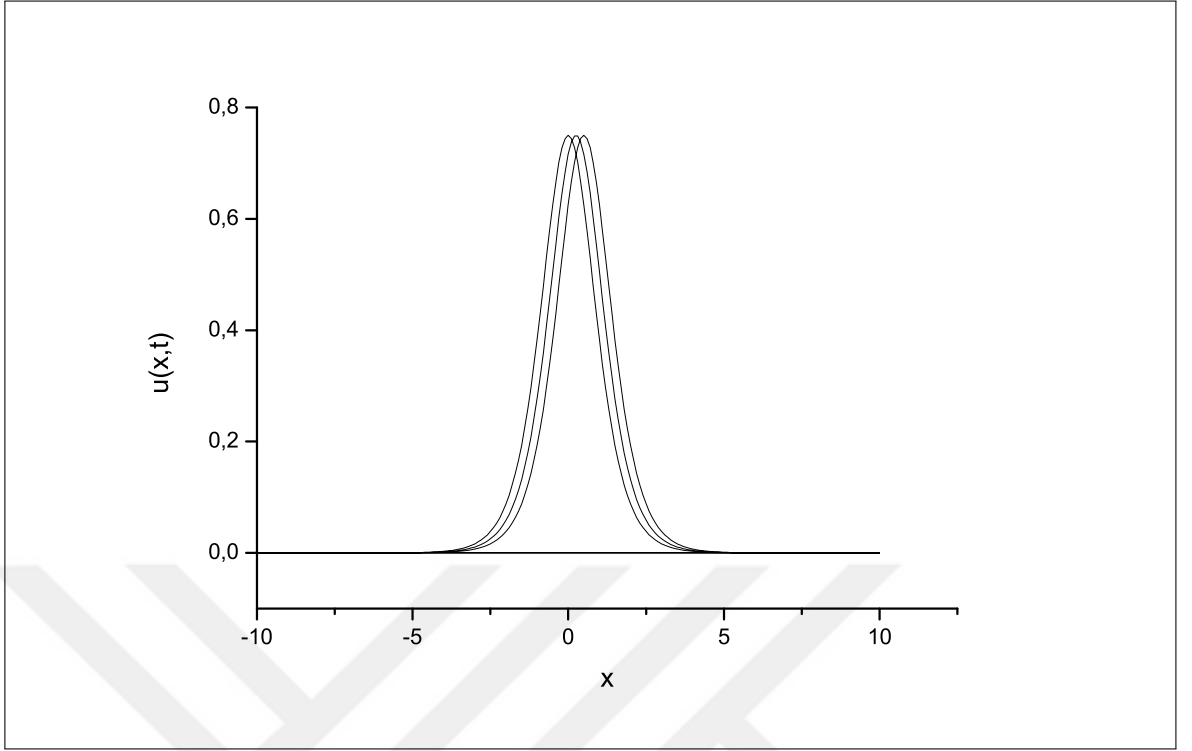
Solitary dalga çözümü için,  $[-10, 10]$  aralığı üzerinde  $\varepsilon = 1$ ,  $\kappa = -0.5$ ,  $\alpha = -3$ ,  $\beta = -1.5$ ,  $c = 0.5$ ,  $\Delta t = 0.01$  ve  $h = 0.1$  parametreleri belirlenmiştir. Bu parametreler ile ulaşılan solitary dalga  $A = -0.75$  genliğindedir. Buna ek olarak,  $t = 1$  anına kadar seçili zaman adımlarında  $I_1$  ve  $I_2$  korunum sabitleri ile  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata norm değerleri hesaplanarak bulunan değerler Tablo 3.1 de listelenmiştir.  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normlarının yeterince küçük ve korunum sabitlerinin ise neredeyse sabit kaldığı Tablo 3.1 den açıkça görülebilir. Burada  $t = 1$  de hata normu değerinin  $\Delta t = 0.01$  için sırasıyla 0.1115790714 ve 0.0665106554 olduğu görülür. Şekil 3.1,  $t = 0$  ile  $t = 1$  arasında seçilen zamanlarda çizilmiştir. Şekil 3.2 de ise dalga hareketi,  $t = 0$ ,  $t = 5$  ve  $t = 10$  zaman adımlarında gösterilmiştir. Önerilen şemalar kullanılarak  $A = -0.75$  genliğine sahip olan tek bir dalganın sayısal çözümü  $t = 1$  anında aynı diyagramda çizildiğinde eğriler ayırt edilemez. Şekilden maksimum hataların  $-8 \times 10^{-2}$  ila  $8 \times 10^{-2}$  arasında olduğu ve maksimum hataların solitary dalganın merkezi konumu etrafında kaldığı açıktır. Problemin çözüm bölgesinde  $t = 1$  zamanında analitik ve nümerik sonuçlar arasındaki hata farkını görebilmek için, hata dağılımı grafiği Şekil 3.3 de gösterilmiştir.

Tablo 3.1  $\Delta t = 0.01$  ve  $h = 0.1$  değerleri için hesaplanan korunum sabiti ve hata normu değerleri

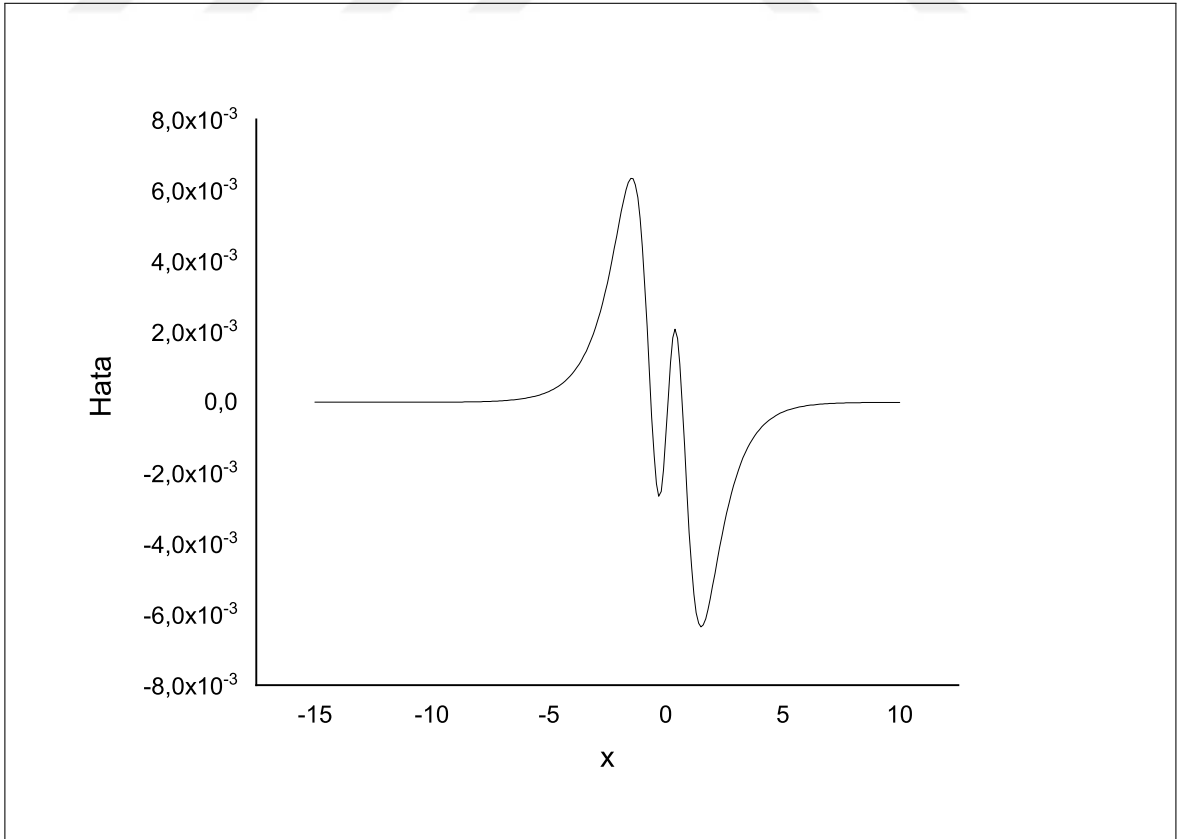
$t$	$I_1$	$I_2$	$L_2$	$L_\infty$
0.0	1.7320506923	.6928203409	.0000000000	.0000000000
0.1	1.7320539139	.6922972521	.0102526817	.0063523550
0.2	1.7320559682	.6907326639	.0205660540	.0127017392
0.3	1.7320570436	.6881405274	.0309994467	.0190989473
0.4	1.7320573095	.6845438026	.0416095452	.0255739130
0.5	1.7320569166	.6799740306	.0524492501	.0320755635
0.6	1.7320559975	.6744707513	.0635667332	.0385876322
0.7	1.7320546674	.6680807859	.0750047221	.0454235307
0.8	1.7320530251	.6608574018	.0868000289	.0523507186
0.9	1.7320511534	.6528593872	.0989833149	.0593493612
1.0	1.7320491200	.6441500580	.1115790714	.0665106554



Şekil 3.1 GP denkleminin birinci durum için tek solitary dalga hareketi(3D)



Şekil 3.2 GP denkleminin birinci durum için tek solitary dalga hareketi(2D)



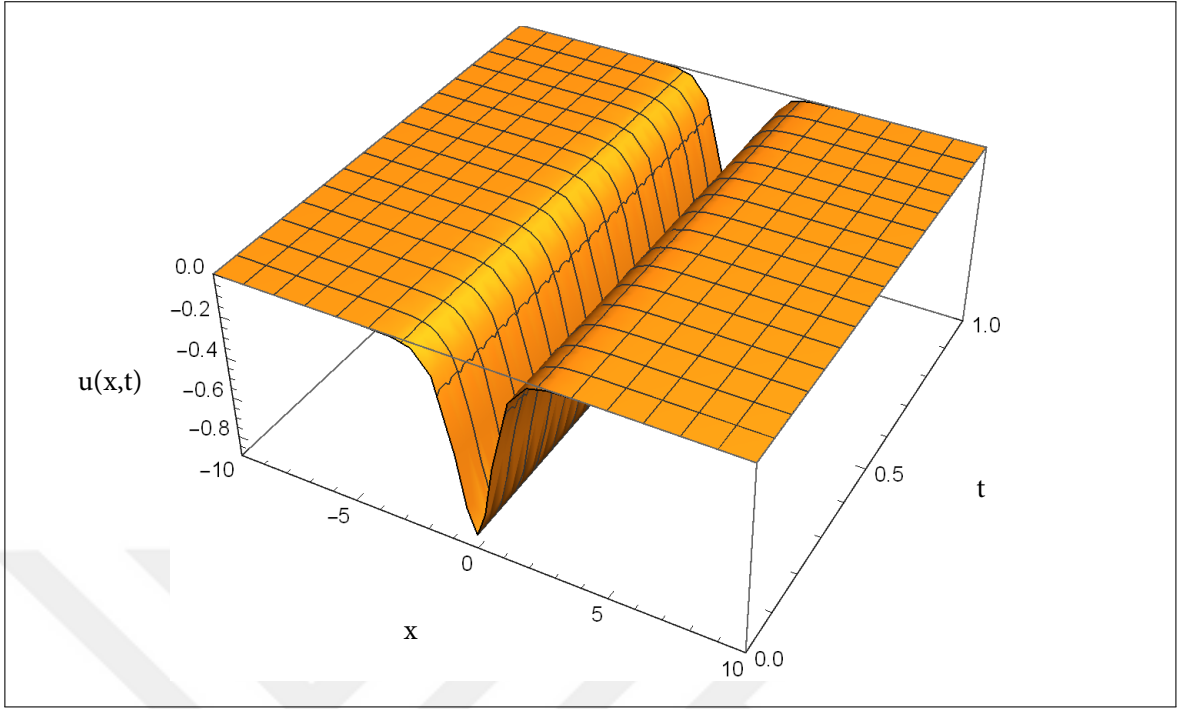
Şekil 3.3 Birinci durum için  $t = 1$  zamanında hata dağılımı

## İkinci Durum

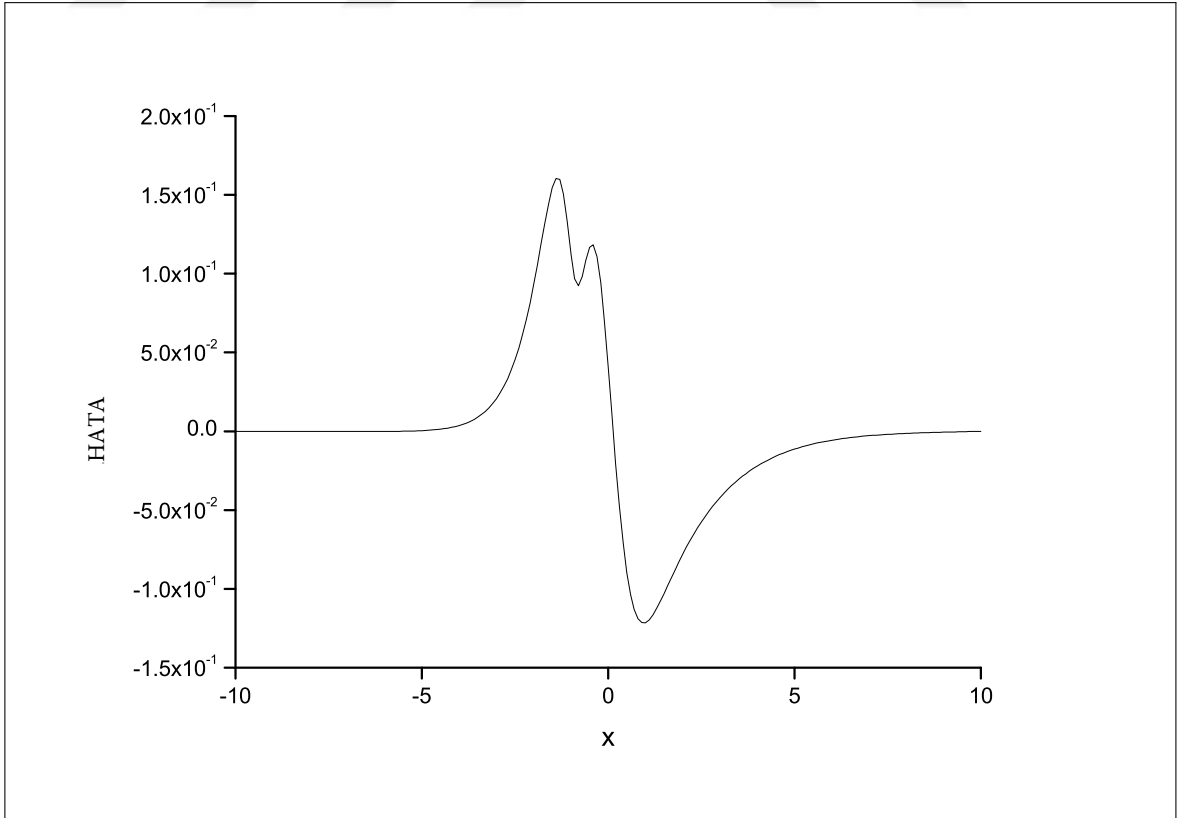
Solitary dalga probleminin çözümü için,  $[-10, 10]$  aralığında  $\varepsilon = 1$ ,  $\kappa = 1$ ,  $\alpha = -4$ ,  $\beta = -1$ ,  $h = 0.1$ ,  $c = -0.5$  ve  $\Delta t = 0.01$  parametreleri alınmıştır. Bu değerler ile elde edilen solitary dalga  $A = 0.83$  genliğindedir. Buna ek olarak,  $t = 1$  anına kadar seçili zaman kademelerinde  $I_1$  ve  $I_2$  korunum sabitleri ile  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları hesaplanarak bulunan değerler Tablo 3.2 te verilmiştir.  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normlarının yeterince küçük ve korunum sabitlerinin ise neredeyse sabit kaldığı Tablo 3.2 ten açıkça görülebilir. Burada  $t = 1$  de hata norm değerinin  $\Delta t = 0.01$  için sırasıyla 0.2347163210 ve 0.1603806847 olduğu görülür. Şekil 3.4 de tek solitary dalganın yayılımı, bu durum için  $-10 \leq x \leq 10$  konumsal aralığı ve  $0 \leq t \leq 1$  zaman aralığı içinde gösterilmektedir. Ayrıca Şekil 3.4, kullanılan yöntemin tek bir solitary dalganın yayılma hareketini istenilen ölçüde gerçekleştirdiğini, sabit bir hızla hareket ettiğini ve artan bir süre boyunca şeklini ve genliğini koruduğunu göstermektedir. Problemin çözüm bölgesinde  $t = 1$  zamanında analitik ve nümerik sonuçlar arasındaki hata farkı, hata dağılım grafiği Şekil 3.5 te gösterilmiştir.

Tablo 3.2  $\Delta t = 0.01$  ve  $h = 0.1$  değerleri için hesaplanan korunum sabiti ve hata normu değerleri

$t$	$I_1$	$I_2$	$L_2$	$L_\infty$
0.0	-1.4907119030	.8281733851	.0000000000	.0000000000
0.1	-1.4907112084	.8261877045	.0192209295	.0128570987
0.2	-1.4907090396	.8202778182	.0387697276	.0260406734
0.3	-1.4907051404	.8105829002	.0589552705	.0396119351
0.4	-1.4906990801	.7973274456	.0800511183	.0537768219
0.5	-1.4906902479	.7808106929	.1022837858	.0688809698
0.6	-1.4906778456	.7613929741	.1258263864	.0848775401
0.7	-1.4906608774	.7394799982	.1507973202	.1018775502
0.8	-1.4906381394	.7155061610	.1772629349	.1199785118
0.9	-1.4906082057	.6899179608	.2052428023	.1392565064
1.0	-1.4905694141	.6631584850	.2347163210	.1603806847



Şekil 3.4 GP denkleminin ikinci durum için tek solitary dalga hareketi



Şekil 3.5 İkinci durum için  $t = 1$  zamanında hata dağılımı

## 4. BÖLÜM

### GENELLEŞTİRİLMİŞ OSKOLKOV DENKLEMİNİN KOLLOKASYON SONLU ELEMENLAR YÖNTEMİ İLE NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde, lineer olmayan genelleştirilmiş Oskolkov denkleminin kuintik B-spline yaklaşım fonksiyonları ile kollokasyon metodu kullanılarak nümerik çözümleri araştırılmıştır. Bilinmeyen fonksiyonun zaman ayrışımı Crank-Nicolson metodu ile yapılmıştır. Zaman ayrışımı ile denklemdaki lineer olmayan terimler lineerleştirilir ve kuintik B-spline bazlar yardımıyla tamamen zaman-konum ayrışmış olan bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu sistemde de bilinmeyen sayısı ile denklem sayıları, başlangıç ve sınır koşulları kullanılarak eşitlenip çözülebilir hale getirildikten sonra  $(N + 1) \times (N + 1)$  boyutlu matris sistemi ile ifade edilebilen denklem sisteminin çözümü Thomas algoritması ile yapılmıştır. Von Neumann kararlılık teorisi uygulanarak şemanın kararlılığı araştırılmıştır. Sayısal algoritma, tek solitary dalga hareketi, Gaussian başlangıç koşulu ve Undular Bore başlangıç koşulu ile solitonların gelişimini kapsayan test problemleri çalışılmıştır. Test problemleri üzerinden hata normları ve korunum sabiti hesaplanmış ve grafikler çizilerek yorumlanmıştır.

#### 4.1 Denklem Gelişimi ve Kuintik B-Spline Fonksiyonlar

Bu kısımda, birinci bölümde verilen kuintik B-spline kollokasyon yöntemi ile genelleştirilmiş Oskolkov denkleminin nümerik çözümü için çözüm adımları verilmiştir.  $\varepsilon$ ,  $\kappa$ ,  $\alpha$  ve  $\beta$  pozitif reel sabitler,  $x$  indisi konum ve  $t$  indisi zaman değişkenini simgelemek üzere  $x \rightarrow \pm\infty$  iken  $u \rightarrow 0$  sınır şartları ile genelleştirilmiş Oskolkov denklemi

$$u_t + \gamma(u^p)_x + \sigma u_{xx} + \eta u_{xxt} = 0 \quad (4.1)$$

incelenmiştir. Bu denklem,

$$\begin{aligned} u_N(a, t) = 0, \quad u_N(b, t) = 0, \\ (u_N)_x(a, t) = 0, \quad (u_N)_x(b, t) = 0, t > 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

sınır şartları ve

$$u(x, 0) = f(x), \quad a \leq x \leq b \quad (4.3)$$

başlangıç şartı ile ele alınmıştır.

İlk olarak problemin çözüm bölgesi;  $[a, b]$  kapalı aralığına kısıtlanır.  $[a, b]$  kapalı aralığı,  $x_m$



düğüm noktalarını kullanarak  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$  şeklinde  $N$  adet birbirine eşit alt aralıklara bölünür.  $m = 1, 2, \dots, N$  için bu alt aralıkların uzunlukları  $h = \frac{b-a}{N} = (x_{m+1} - x_m)$  formunda yazılabilir.  $a \leq x \leq b$  aralığında  $x_m$  düğüm noktaları ile  $\phi_m(x)$  kuintik B-spline interpolasyon fonksiyonları

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^5} \begin{cases} \alpha^5, & [x_{m-3}, x_{m-2}] \\ \alpha^5 - 6\beta^5, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ \alpha^5 - 6\beta^5 + 15\gamma^5, & [x_{m-1}, x_m] \\ \alpha^5 - 6\beta^5 + 15\gamma^5 - 20\eta^5, & [x_m, x_{m+1}] \\ \alpha^5 - 6\beta^5 + 15\gamma^5 - 20\eta^5 + 15\sigma^5, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ \alpha^5 - 6\beta^5 + 15\gamma^5 - 20\eta^5 + 15\sigma^5 - 6\mu^5, & [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (4.4)$$

şeklinde olup burada  $\alpha = (x - x_{m-3})$ ,  $\beta = (x - x_{m-2})$ ,  $\gamma = (x - x_{m-1})$ ,  $\eta = (x - x_m)$ ,  $\sigma = (x - x_{m+1})$  ve  $\mu = (x - x_{m+2})$  dir.  $[a, b]$  aralığı üzerinde tanımlı fonksiyonlar için  $\{\phi_{-2}(x), \phi_{-1}(x), \dots, \phi_{N+2}(x)\}$  kümesi bir baz oluşturmaktadır. Problemin tam çözümü olan  $u(x, t)$  fonksiyonuna yaklaşan  $u_N(x, t)$  nümerik çözümü

$$u_N(x, t) = \sum_{m=-2}^{N+2} \phi_m(x) \delta_m(t), \quad (4.5)$$

şeklinde verilir. Bu ifadede sınır şartları ile elde edilecek olan  $\delta_m(t)$  ler zamana bağlı parametrelerdir.  $0 \leq \omega \leq 1$  için  $h\omega = x - x_m$  şeklindeki lokal dönüşüm ile  $[x_m, x_{m+1}]$  aralığı  $[0, 1]$  kapalı aralığına dönüştürülür.  $\delta_{m-3}, \delta_{m-2}, \delta_{m-1}, \delta_m, \delta_{m+1}, \delta_{m+2}$  ve  $\delta_{m+3}$  parametreleri ile  $\phi_{m-2}, \phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}, \phi_{m+2}$  ve  $\phi_{m+3}$  baz fonksiyonları olacak şekilde,  $u(x, t)$  fonksiyonuna

$$u_N(x, t) = \sum_{m=-3}^{N+3} \phi_m(x) \delta_m(t), \quad (4.6)$$

deneme fonksiyonu ile yaklaşım yapılır.  $x_m$  düğüm değerleri üzerindeki  $\phi_m(x)$  kuintik B-spline fonksiyonlar ve türevleri Tablo 4.1 de verilmiştir.  $'$ ,  $''$ ,  $'''$  ve  $iv$  simgeleri sırasıyla  $x$  e göre dördüncü mertebeye kadar türevleri ifade etmesi kaydıyla, (4.4) ile tanımlanan kuintik B-spline fonksiyonları ve (4.6) da verilen eşitlikten yararlanılarak,  $u'$ ,  $u''$ ,  $u'''$  ve  $u^{iv}$  nun  $x$  e

Tablo 4.1 Kuintik B-spline fonksiyon ve türevlerinin değerleri

$x$	$x_{m-3}$	$x_{m-2}$	$x_{m-1}$	$x_m$	$x_{m+1}$	$x_{m+2}$	$x_{m+3}$
$\varphi_m$	0	1	26	66	26	1	0
$h\varphi'_m$	0	5	50	0	-50	-5	0
$h^2\varphi''_m$	0	20	40	-120	40	20	0
$h^3\varphi'''_m$	0	60	-120	0	120	-60	0
$h^4\varphi^{(iv)}_m$	0	120	-480	720	-480	120	0

göre düğüm noktalarındaki değerleri  $\delta_m$  parametreleri cinsinden

$$\begin{aligned}
 u_N(x_m, t) &= U_m = \delta_{m-2} + 26\delta_{m-1} + 66\delta_m + 26\delta_{m+1} + \delta_{m+2}, \\
 u'_m &= \frac{5}{h}(-\delta_{m-2} - 10\delta_{m-1} + 10\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \\
 u''_m &= \frac{20}{h^2}(\delta_{m-2} + 2\delta_{m-1} - 6\delta_m + 2\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \\
 u'''_m &= \frac{60}{h^3}(-\delta_{m-2} + 2\delta_{m-1} - 2\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \\
 u^{iv}_m &= \frac{120}{h^4}(\delta_{m-2} - 4\delta_{m-1} + 6\delta_m - 4\delta_{m+1} + \delta_{m+2})
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

olarak elde edilir.

#### 4.1.1 Kollokasyon Sonlu Elemanlar Yöntemi

(4.7) ile verilen eşitlikler (4.1) ile tanımlanan genelleştirilmiş Oskolkov denkleminde yerlerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
 & \left( \dot{\delta}_{m-2} + 26\dot{\delta}_{m-1} + 66\dot{\delta}_m + 26\dot{\delta}_{m+1} + \dot{\delta}_{m+2} \right) \\
 & + \frac{5\gamma z_m}{h} (-\delta_{m-2} - 10\delta_{m-1} + 10\delta_{m+1} + \delta_{m+2}) \\
 & + \frac{20\sigma}{h^2} (\delta_{m-2} + 2\delta_{m-1} - 6\delta_m + 2\delta_{m+1} + \delta_{m+2}) \\
 & + \frac{20\eta}{h^2} (\dot{\delta}_{m-2} + 2\dot{\delta}_{m-1} - 6\dot{\delta}_m + 2\dot{\delta}_{m+1} + \dot{\delta}_{m+2}) = 0,
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

şeklindeki cebirsel denklem elde edilir. Lineerleştirme tekniğini uygulayabilmek için, (4.8) denkleminde lineer olmayan  $pu^{p-1}u_x$  teriminde  $pu^{p-1}$  terimi

$$z_m = pu_m^{p-1} = p(\delta_{m-2} + 26\delta_{m-1} + 66\delta_m + 26\delta_{m+1} + \delta_{m+2})^{p-1}, \tag{4.9}$$

şeklinde lokal sabit kabul edilmiştir. (4.8) denkleminde  $\delta_m$  ve  $\dot{\delta}_m$  parametreleri yerine sırasıyla (3.9) da verilen Crank-Nicolson formülasyonu ve ileri sonlu fark yaklaşımı kullanılırsa,  $n$  ve  $n+1$  olarak ifade edilen iki zaman seviyesi arasındaki ilişki  $\delta^n$  ve  $\delta^{n+1}$  eleman

parametreleri cinsinden

$$\begin{aligned} \gamma_1 \delta_{m-2}^{n+1} + \gamma_2 \delta_{m-1}^{n+1} + \gamma_3 \delta_m^{n+1} + \gamma_4 \delta_{m+1}^{n+1} + \gamma_5 \delta_{m+2}^{n+1} = \\ \gamma_5 \delta_{m-2}^n + \gamma_4 \delta_{m-1}^n + \gamma_3 \delta_m^n + \gamma_2 \delta_{m+1}^n + \gamma_1 \delta_{m+2}^n \end{aligned} \quad (4.10)$$

olarak yazılabilir. Burada

$$\begin{aligned} E &= \frac{5\gamma}{2h} \Delta t, \\ K &= \frac{10\sigma}{h^2} \Delta t, \\ M &= \frac{20\eta}{h^2} \Delta t \end{aligned} \quad (4.11)$$

ve  $\delta$  parametrelerinin çarpanları

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= [1 - Ez_m + K + M], \\ \gamma_2 &= [26 - 10Ez_m + 2K + 2M], \\ \gamma_3 &= [66 - 6K - 6M], \\ \gamma_4 &= [26 + 10Ez_m + 2K + 2M], \\ \gamma_5 &= [1 + Ez_m + K + M], \end{aligned} \quad (4.12)$$

şeklinde alınır. (4.10) denklem sistemi,  $\delta_{-2}, \delta_{-1}$  ve  $\delta_{N+1}, \delta_{N+2}$  olmak üzere  $(N + 5)$  adet bilinmeyen parametre ve  $(N + 1)$  tane lineer denklem içermektedir. Bu denklem sisteminin çözümü için (4.2) ile verilen sınır şartlarını kullanarak elde edilebilecek dört adet ek koşula daha ihtiyaç olduğu görülür. Ek koşullar yardımı ile (4.10) denklem sistemindeki  $\delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_{N+1}, \delta_{N+2}$  parametreleri yok edilir ve  $d^n = (\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_N)^T$  şeklinde  $(N + 1)$  adet bilinmeyen parametreden oluşan

$$Ad^{n+1} = Bd^n \quad (4.13)$$

$(N + 1) \times (N + 1)$  formunda matris sistemi bulunur [34]. Bu sistem ise Thomas algoritması kullanılarak çözülür. Çözüm işlemlerinde lineer olmama etkisini en aza indirmek için her bir zaman kademesinde iki veya üç kez (3.14) de verilen bir iç iterasyon işlemi uygulanır. (4.10) denklem sisteminde iterasyon işlemine başlayabilmek için, ilk olarak başlangıç ve sınır şartları yardımıyla  $d^0 = (\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_N)^0$  ile gösterilen başlangıç vektörü hesaplanır. Bu yüzden  $t = 0$  zamanında  $[a, b]$  aralığındaki

$$u_N(x, 0) = \sum_{m=-2}^{N+2} \phi_m(x) \delta_m^0, \quad (4.14)$$

yaklaşımı ile

$$\begin{aligned} u_N(x, 0) &= u(x_m, 0); \quad m = 0, 1, 2, \dots, N \\ (u_N)_x(a, 0) &= 0, \quad (u_N)_x(b, 0) = 0, \\ (u_N)_{xx}(a, 0) &= 0, \quad (u_N)_{xx}(b, 0) = 0, \end{aligned}$$



formundaki Euler formülü uygulanıp gereken işlemler yapılırsa,  $\xi$  büyüme faktörü

$$\xi = \frac{\rho_1 - i\rho_2}{\rho_1 + i\rho_2} \quad (4.20)$$

olarak elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} \rho_1 &= (2A + 2C + 2D) \cos(2\tau\Delta x) + (48A + 4C + 4D) \cos(\tau\Delta x) + 66A - 6C - 6D, \\ \rho_2 &= 2B \sin(2\tau\Delta x) + 20B \sin(\tau\Delta x), \end{aligned}$$

ve

$$A = 1, \quad B = \frac{5\gamma}{2h} \Delta t Z_m, \quad C = \frac{10\sigma}{h^2} \Delta t, \quad D = \frac{20}{h^2} \eta \Delta t, \quad m = 0, 1, \dots, N$$

olup,  $|\xi| = 1$  koşulu sağlanır. Böylece lineerleştirilmiş sonlu eleman şeması şartsız kararlı olarak bulunur.

### 4.1.3 Nümerik Örnekler ve Sonuçlar

Bu kısımda, belirlenen bölünme noktaları üzerinde tek solitary dalga problemi için genelleştirilmiş Oskolkov denkleminin nümerik çözümleri elde edilmiştir. Uygulanan sayısal metodun doğruluğu ve etkinliği seçilen zaman adımlarında tam ve yaklaşık çözüm arasındaki farkın hesaplanmasını sağlayan

$$L_2 = \|u^{tam} - u_N\|_2 \simeq \sqrt{h \sum_{j=1}^N |u_j^{tam} - (u_N)_j|^2}, \quad (4.21)$$

ortalama hata normu ve

$$L_\infty = \|u^{tam} - u_N\|_\infty \simeq \max_j |u_j^{tam} - (u_N)_j|, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (4.22)$$

maksimum hata normu kullanılmıştır. Genelleştirilmiş Oskolkov denklemi kütleye karşılık gelen

$$I = \int_a^b u dx \simeq h \sum_{j=1}^N u_j^n, \quad (4.23)$$

şeklinde bir korunum sabitine sahiptir. Korunan büyüklük  $I$ , sayısal şemanın dalga hareketi sırasında fiziksel durumu koruduğunu kaydetmek için araştırılır.

#### 4.1.3.1 Şok Dalga Çözümü

Bu bölümde,  $x \rightarrow \pm\infty$  için  $u \rightarrow 0$  sınır şartı ve  $t = 0$  olmak üzere,

$$u(x, 0) = \left[ A + BD \left( \frac{\mu}{2} - \frac{a\mu}{a + \cosh(\mu x) - \sinh(\mu x)} \right) \right]^{2/(p-1)} \quad (4.24)$$

başlangıç koşulu ile (4.1) de tanımı verilen genelleştirilmiş Oskolkov denkleminin şok dalga çözümü üzerinde çalışılmıştır.  $\gamma$ ,  $\sigma$  ve  $\eta$  keyfi seçilmiş reel değerler olmak üzere genelleştirilmiş Oskolkov denkleminin analitik çözümü

$$u(x,t) = \left[ A + BD \left( \frac{\mu}{2} - \frac{a\mu}{a + \cosh[\mu(x - \kappa t)] - \sinh[\mu(x - \kappa t)]} \right) \right]^{2/(p-1)}, \quad (4.25)$$

şeklindedir. Bu ifadede

$$A = -\frac{1}{2} \frac{\sigma(p-1) \sqrt{\frac{\gamma\sigma \left( \sigma^2 - \frac{8\sigma^2(p+1)}{(p+3)^2} \right) \sqrt{2\eta(p+1)}}{\gamma(p+3)}}}{\gamma(p+3) \left( \sigma^2 - \frac{8\sigma^2(p+1)}{(p+3)^2} \right)},$$

$$B = \frac{1}{\gamma(p+3) \left( \sigma^2 - \frac{8\sigma^2(p+1)}{(p+3)^2} \right)},$$

$$D = \sigma \sqrt{2\eta(p+1)} \sqrt{\frac{\gamma\sigma \left( \sigma^2 - \frac{8\sigma^2(p+1)}{(p+3)^2} \right) \sqrt{2\eta(p+1)}}{\eta(p+3)}},$$

$$\mu = \frac{\sqrt{8}}{4} \sqrt{\frac{p^2 - 2p + 1}{\eta(p+1)}},$$

$$\kappa = \frac{\sigma \sqrt{2\eta(p+1)}}{\eta(p+3)}$$

olup,  $a$ ,  $\kappa$ ,  $\mu$ ,  $p$  keyfi pozitif sabitlerdir.

### Birinci Durum

Şok dalga çözümünü yapabilmek amacıyla,  $[-10, 10]$  aralığında  $p = 2$ ,  $\gamma = 0.5$ ,  $\sigma = 0.1$ ,  $\eta = 7$ ,  $h = 0.1$ ,  $a = 0.3$  ve  $\Delta t = 0.1$  parametreleri seçilmiştir. Seçilen bu değerler ile ulaşılan şok dalga  $A = -0.096$  genliğine sahiptir. Buna ek olarak,  $t = 5$  anına kadar kadar seçili zaman kademelerinde  $I$  değişmezi ile  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata norm değerleri hesaplanarak bulunan değerler Tablo 4.2 de listelenmiştir.  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normlarının büyüklüğünün beklendiği gibi artan zaman ve hıza rağmen yeterince küçük kaldığı Tablo 4.2 den açıkça görülmektedir. Şekil 4.1,  $t = 0$  ile  $t = 10$  arasında seçilen zamanlarda çizilmiştir. Şok dalgasının farklı zaman seviyelerindeki davranışı Şekil 4.1 de gösterilmektedir. Problemin çözüm bölgesinde  $t = 1$  zamanında  $-10 \leq x \leq 10$  aralığında analitik ve nümerik sonuçlar arasındaki hatayı görebilmek için hata dağılımı Şekil 4.2 de gösterilmiştir. Maksimum hataların  $2 \times 10^{-3}$  ile  $4 \times 10^{-3}$  arasında olduğu ve maksimum hataların solitary dalganın merkezi konumu etrafında kaldığı açıktır. Hata sapması,  $p = 2$  için  $-2 \times 10^{-3}$  ile  $2 \times 10^{-3}$  arasında değişmektedir.

Tablo 4.2 Şok dalga hareketinin birinci durumda korunum sabiti ve hata normu değerleri

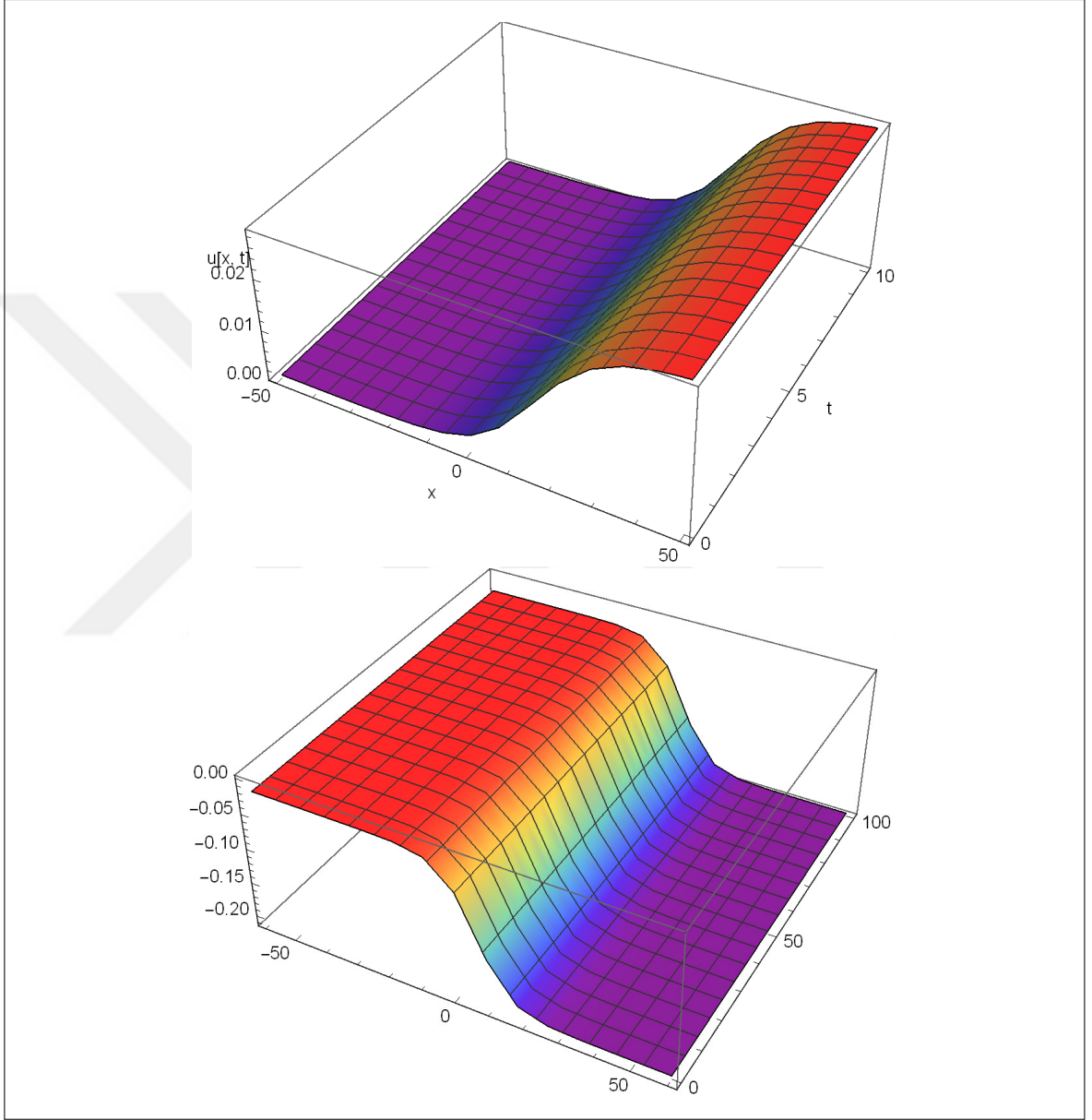
$t$	$I$	$L_2$	$L_\infty$
0.0	0.0705095703	0.00000000	0.00000000
1.0	0.0688729173	0.00219512	0.00450895
2.0	0.0684210594	0.00262091	0.00462410
3.0	0.0679864368	0.00307562	0.00473738
4.0	0.0675684286	0.00354994	0.00484890
5.0	0.0671664551	0.00403901	0.00495867

### İkinci Durum

İkinci durum olarak, simülasyonu  $-10 \leq x \leq 10$  aralığında göstermek için,  $p = 3$  için  $\gamma = 0.33$ ,  $\sigma = 0.1$ ,  $\eta = 7$ ,  $a = 0.5$ ,  $h = 0.1$  ve  $\Delta t = 0.1$  parametreleri seçilmiştir. Burada şok dalgasının genliği  $A = -0.116$  olarak hesaplanmıştır. Hesaplanan hata normları ve koruma sabitinin değerleri Tablo 4.3 de listelenmiştir. Tablodan sonlu eleman yaklaşımı ile bulunan hata norm değerlerinin istenilen seviyede minimum olduğu netlikle görülmektedir. Ayrıca Tablo 4.3 den yaklaşık çözümün analitik çözümle oldukça tutarlı olduğu anlaşılabilir, bu da sayısal yöntemin doğru uygulandığını göstermektedir. Bu durumda,  $x \in [-10, 10]$  konumsal aralık ve  $0 \leq t \leq 5$  zaman aralığındaki dalga çözümleri için Şekil 4.1 incelenmiştir. Görüldüğü gibi şok dalgaları beklendiği gibi artan zamanla şekillenmektedir.  $t = 10$  daki hata dağılımı, sırasıyla  $p = 2$  ve  $p = 3$  için Şekil 4.2 de gösterilmektedir. Hata sapması,  $p = 3$  için  $-4 \times 10^{-2}$  ve  $4 \times 10^{-2}$  arasında değişmektedir.

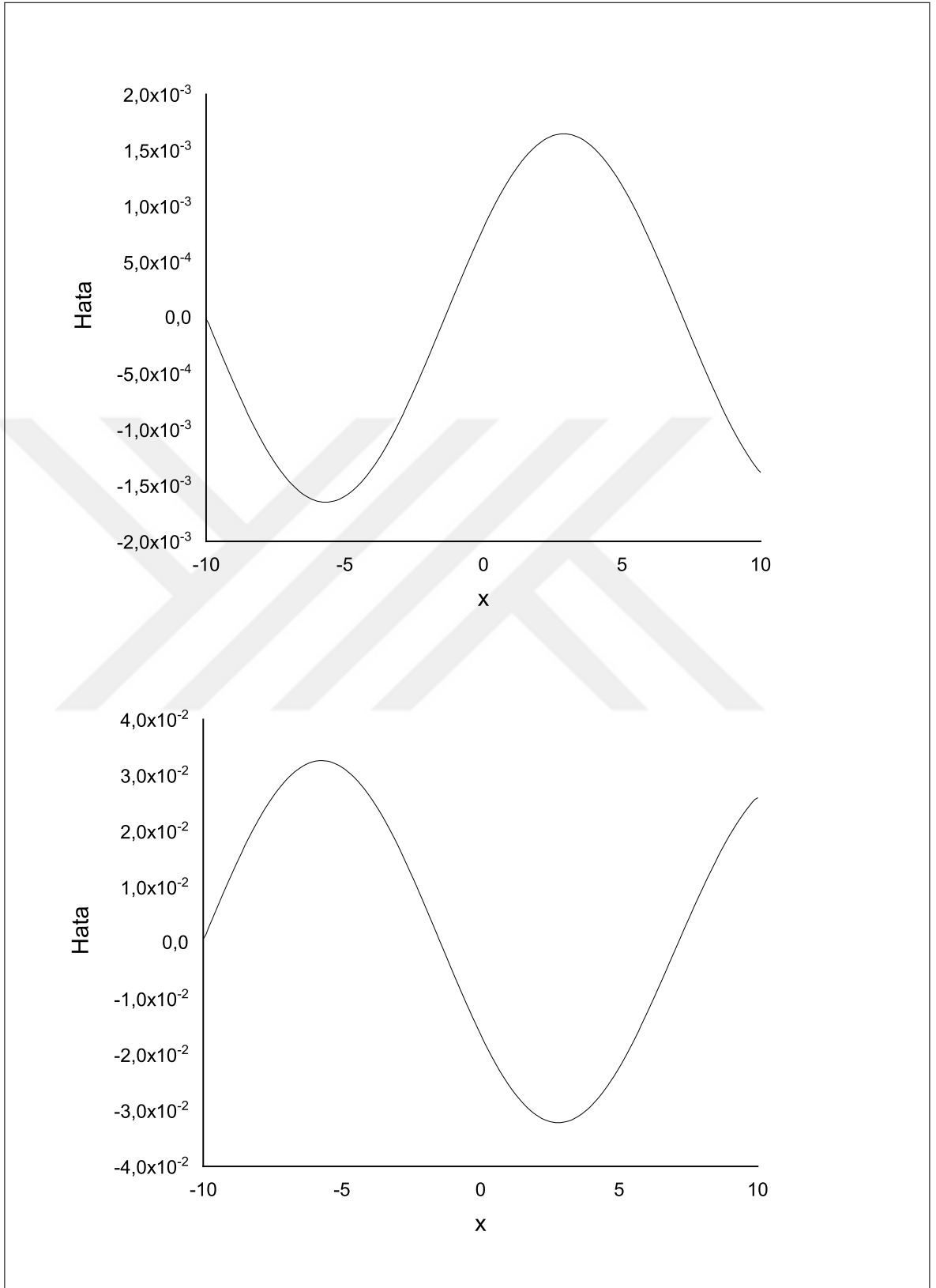
Tablo 4.3 Şok dalga hareketinin ikinci durumda korunum sabiti ve hata normu değerleri

$t$	$I$	$L_2$	$L_\infty$
0.0	-2.33523963	0.00000000	0.00000000
1.0	-2.32880100	0.00679857	0.00204288
2.0	-2.32274406	0.01338439	0.00406700
3.0	-2.31704365	0.01977795	0.00607621
4.0	-2.31167526	0.02599985	0.02599985
5.0	-2.30661498	0.03207079	0.01006373



Şekil 4.1 a)  $p = 2$ ,  $\gamma = 0.5$ ,  $\sigma = 0.1$ ,  $\eta = 7$ ,  $h = 0.1$ ,  $a = 0.3$  ve  $\Delta t = 0.1$ , b)  $p = 3$ ,  $\gamma = 0.33$ ,  $\sigma = 0.1$ ,  $\eta = 7$ ,  $h = 0.1$ ,  $a = 0.5$  ve  $\Delta t = 0.1$  için şok dalga hareketi.





Şekil 4.2 a)  $p = 2, \gamma = 0.5, \sigma = 0.1, \eta = 7$  ve  $a = 0.3$ , b)  $p = 3, \gamma = 0.33, \sigma = 0.1, \eta = 7$  ve  $a = 0.5$  için  $t = 10$ 'da hata dağılımı

### 4.1.3.2 Solitonların Oluşumu

#### Gaussian Başlangıç Şartı

Genelleştirilmiş Oskolkov denklemi için,

$$u(x, 0) = \exp(-x^2), \quad (4.26)$$

Gaussian başlangıç koşulu ve

$$u(-10, t) = u(10, t) = 0, \quad t > 0 \quad (4.27)$$

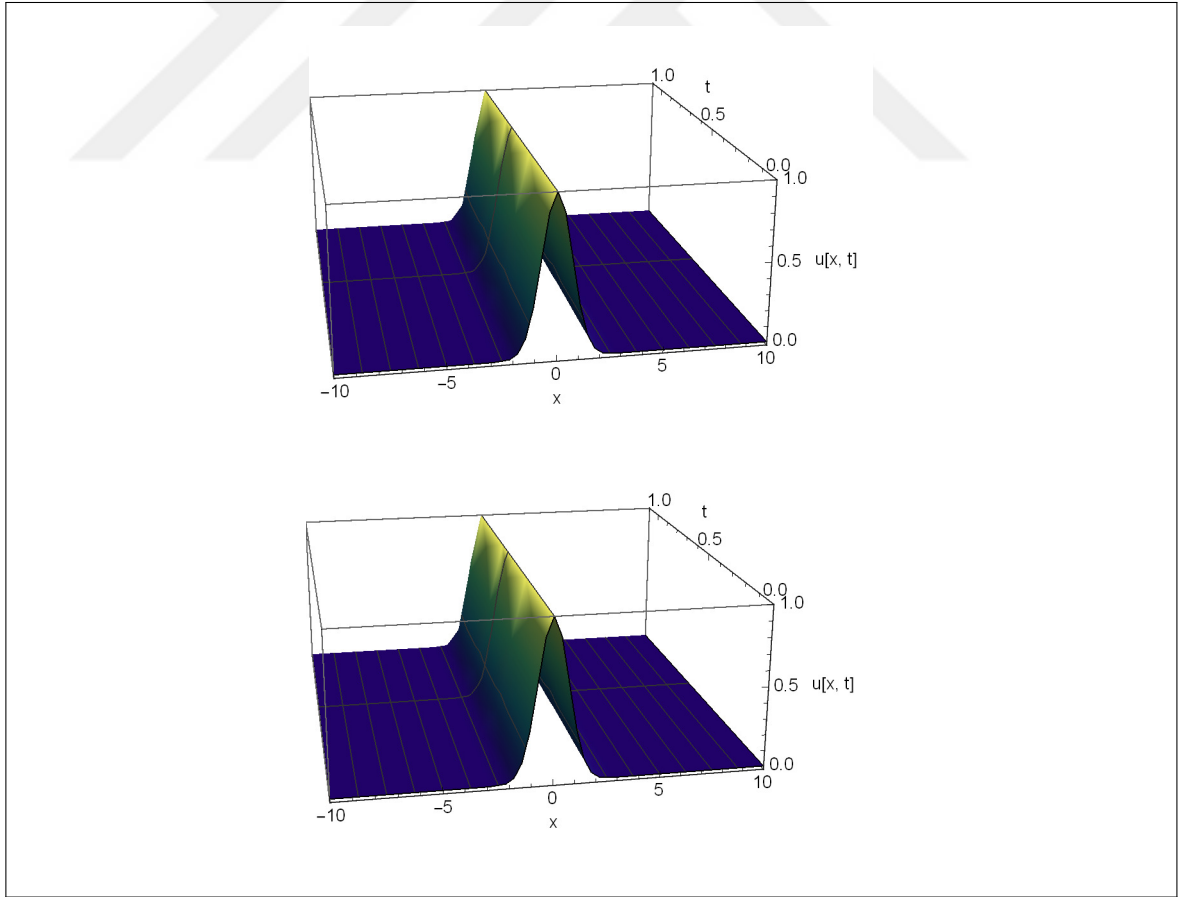
şeklindeki sınır koşulu uygulanarak, bir dizi solitonun oluşumu incelenmiş ve yorumlanmıştır.

Birinci durumda;  $p = 2$  için  $-10 \leq x \leq 10$  aralığı üzerinde  $\gamma = 0.5$ ,  $\sigma = 0.1$ ,  $\eta = 7$ ,  $a = 0.3$ ,  $h = \Delta t = 0.1$  ve  $h = \Delta t = 0.01$  değerleri seçilmiştir. Algoritma *I* değişmez değerlerini hesaplamak için  $t = 5$  anına kadar çalıştırılmıştır. İki farklı  $\Delta t$  ve  $h$  değeri için değişmez değerleri Tablo 4.4 da gösterilmektedir. Şekil 4.3, Gauss başlangıç koşulunun  $x \in [-10, 10]$  aralığı boyunca dalgalara dönüşmesini göstermektedir. Gaussian başlangıç koşulu uygulandığında herhangi bir soliton oluşumu gözlenmemekle birlikte ilerleyen zamanlarda giderek artan sayıda düzensiz salınımlı dalgaların oluştuğunu ispatlamıştır.

İkinci durumda;  $p = 3$  için  $\gamma = 0.33$ ,  $\sigma = 0.1$ ,  $\eta = 7$ ,  $a = 0.5$ ,  $h = \Delta t = 0.1$  ve  $h = \Delta t = 0.01$  değerleri kullanılmıştır. Hesaplamalar  $t = 0$  anından  $t = 5$  anına kadar yapılmış ve korunan değişmez değerleri, farklı zaman ve konum adımları için Tablo 4.4 te verilmiştir. Tablodan zaman arttıkça değişmez değerlerini birbirine çok yakın olduğu görülmektedir. Bu nedenle, yöntemimizin makul ölçüde tutarlı olduğu söylenebilir. Gauss başlangıç koşuluna sahip bir dalga dizisinin oluşumu Şekil 4.3 de  $p = 3$  için gösterilmektedir. Şekilden bir dalga ve ardından salınan bir kuyruğun oluştuğu görülmektedir.

Tablo 4.4 Gaussian başlangıç koşulu için korunum sabiti değerleri

$t$	$p = 2$		$p=3$	
	$h=\Delta t=0.1$	$h=\Delta t=0.01$	$h=\Delta t=0.1$	$h=\Delta t=0.01$
	I	I	I	I
0.0	1.7724537283	1.7724549574	1.7724537283	1.7724549574
1.0	1.8025375281	1.8025515254	1.8022592747	1.8024322019
2.0	1.8315838133	1.8316063645	1.8310659550	1.8314024588
3.0	1.8590051123	1.8590509111	1.8586491384	1.8591428539
4.0	1.8842829125	1.8843701948	1.8848031508	1.8854496139
5.0	1.9065605329	1.9071105522	1.9093419082	1.9101386384



Şekil 4.3 a)  $p = 2, \gamma = 0.5, \sigma = 0.1, \eta = 7$  ve  $a = 0.3$ , b)  $p = 3, \gamma = 0.33, \sigma = 0.1, \eta = 7$  ve  $a = 0.5$  için Gaussian başlangıç şartı için solitonların oluşumu

### Undular Bore Başlangıç Şartı

Son olarak, genelleştirilmiş Oskolkov denklemi için,

$$u(x,0) = \frac{1}{2}U_0 \left[ 1 - \tanh\left(\frac{|x| - x_0}{d}\right) \right], \quad (4.28)$$

undular bore başlangıç koşulu ve

$$u(-60,t) = u(60,t) = 0, \quad t > 0 \quad (4.29)$$

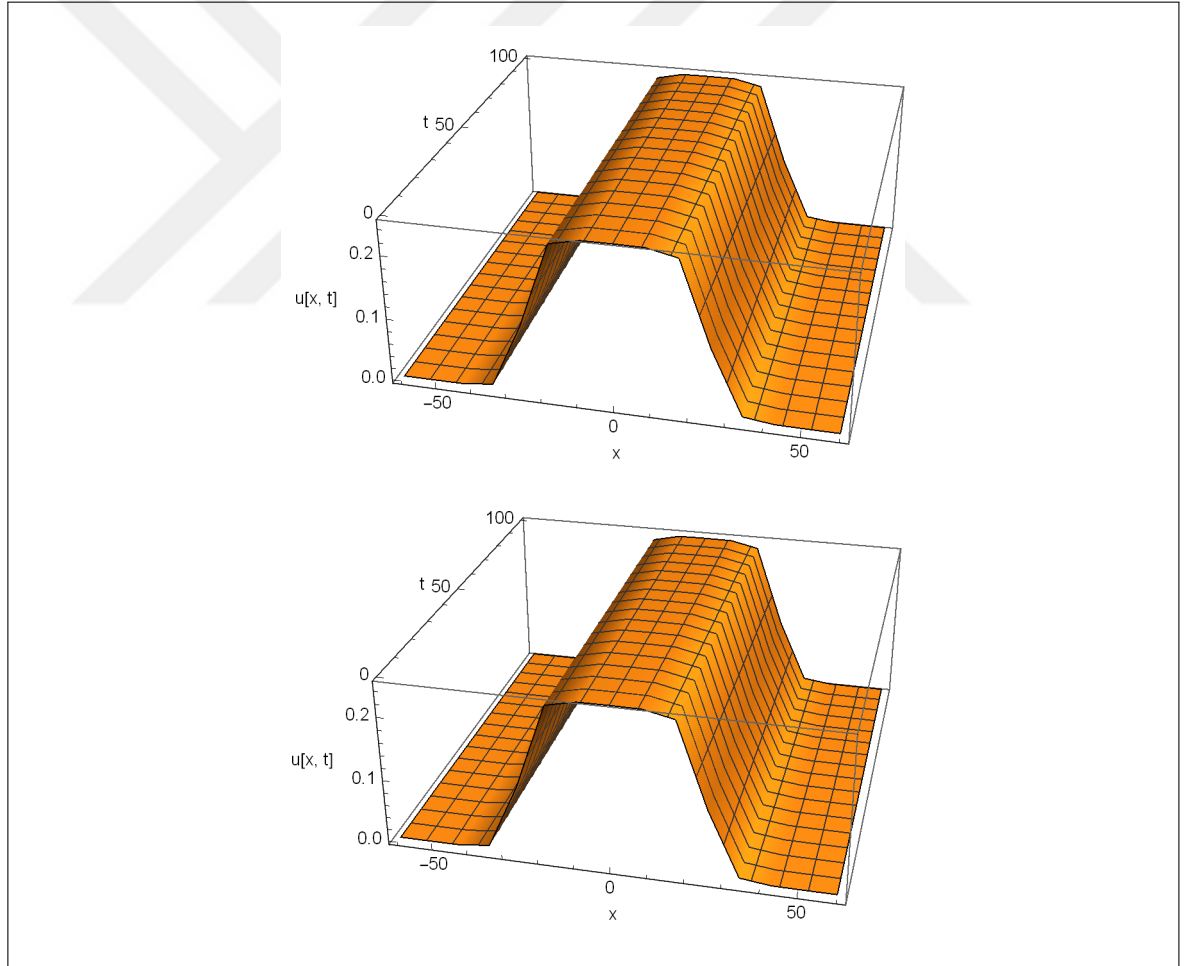
sınır şartı kullanılarak, solitonların oluşumu üzerinde çalışılmıştır. Undular bore şartı,  $t = 0$  zaman adımıdaki denge yüzeyi üzerinde suyun yüksekliğini ifade eder. Genlikteki değişim  $x = x_0$  üzerinde merkezlenir ve değişimin dikliği  $d$  ile ölçülür.  $d$  değerleri diklik ile ters orantılıdır.  $d$  nin aldığı değerler küçüldükçe değişim daha dik olmaya meyilli bir hale gelir. Nümerik hesaplamalarda, (4.28) denkleminde parametreler  $\sigma = 0.1$ ,  $\eta = 7$ ,  $U_0 = 0.25$ ,  $x_0 = 25$  ve  $d = 5$  olarak belirlenmiştir.

İlk durumda; parametreler  $p = 2$  için  $\gamma = 0.5$ ;  $\sigma = 0.1$ ;  $\eta = 7$ ;  $h = \Delta t = 0.1, 0.02$  ve  $a = 0.3$  olarak seçilmiştir. Sayısal çalışma  $t = 5$  e kadar hesaplanmıştır. Korunan değişmez elde edilen değerleri Tablo 4.5 de listelenmiştir. Şekil 4.4,  $t = 5$  teki dalgaların simülasyonunu gösterir. Şekil 4.4 de  $t = 0$  dan  $t = 100$  e kadar görülebilen dalgalanma deliğinin çalışma sırasında sabit durumu koruduğu açıkça söylenebilir.

İkinci durumda; önceki durumla karşılaştırma yapabilmek için  $p = 3$ ;  $\gamma = 0.33$ ;  $\sigma = 0.1$ ;  $\eta = 7$ ;  $h = \Delta t = 0.1, 0.02$  ve  $a = 0.5$  alınmıştır. Algoritmanın çalışmasına  $-60 \leq x \leq 60$  problem bölgesi üzerinde  $t = 5$  zamanına kadar devam edilmiştir. Mevcut yöntemden elde edilen değişmez değerleri Tablo 4.5 te gösterilmiştir. Şekil 4.4 te, dalgaların oluşumu  $t = 0$  dan  $t = 100$  zaman adımına kadar çizilmiştir.

Tablo 4.5 Undular bore başlangıç koşulu için korunum sabiti değerleri

$t$	$p = 2$		$p=3$	
	$h=\Delta t=0.1$	$h=\Delta t=0.02$	$h=\Delta t=0.1$	$h=\Delta t=0.02$
	I	I	I	I
0.0	12.5000275676	12.4998649440	12.5000275676	12.4998649440
1.0	12.4968960273	12.4967407712	12.4986970475	12.4985477436
2.0	12.4870227201	12.4869144654	12.4947142014	12.4945965316
3.0	12.4687265050	12.4687427378	12.4873844225	12.4873318673
4.0	12.4396450182	12.4399136353	12.4757710379	12.4758377388
5.0	12.3966116239	12.3973296490	12.4586439575	12.4589122926



Şekil 4.4 Undular bore başlangıç şartı ile a)  $\gamma = 0.5, \sigma = 0.1, \eta = 7$  ve  $a = 0.3$ , b)  $\gamma = 0.33, \sigma = 0.1, \eta = 7$  ve  $a = 0.5$   $h$  and  $\Delta t$ 'nin farklı değerleri için solitonların oluşumu

## 5. BÖLÜM

### KUDRYASHOV-SINELSKOV DENKLEMİNİN KOLLOKASYON SONLU ELEMENLAR YÖNTEMİ İLE NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde, lineer olmayan Kudryashov-Sinelschkov (KS) denkleminin septik B-spline kollokasyon metodu kullanılarak nümerik çözümleri araştırılmıştır. Bilinmeyen fonksiyonun zaman ayrıştırması Crank-Nicolson metodu ile yapılmıştır. Zaman ayrıştırması ile denklemdaki lineer olmayan terimler lineerleştirilir ve septik B-spline bazların yardımıyla tamamen zaman-konum ayrılmış olan bir cebirsel denklem elde edilir. Bu denklem sisteminde bilinmeyen sayısı ile denklem sayıları, başlangıç ve sınır koşulları kullanılarak eşitlenip çözülebilir hale getirildikten sonra  $(N + 1) \times (N + 1)$  boyutlu matris sistemi ile ifade edilebilen denklem sisteminin Thomas algoritması ile çözümü yapılmıştır. Von Neumann kararlılık teorisi uygulanarak şemanın kararlılığı araştırılmıştır. Sayısal algoritma, tek solitary dalga hareketi, iki solitary dalganın etkileşimi, Gaussian başlangıç koşulu ve Undular bore başlangıç koşulu ile soliton oluşumu ve gelişimini kapsayan test problemleri çalışılmıştır. Test problemleri üzerinden hata normları ve korunum sabiti hesaplanmış ve grafikler çizilerek yorumlanmıştır.

#### 5.1 Denklem Gelişimi ve Septik B-Spline Fonksiyonlar

Bu kısımda, birinci bölümde verilen septik B-spline kollokasyon yöntemi ile Kudryashov-Sinelschkov (KS) denkleminin sayısal çözümü için çözüm adımları verilmiştir.  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  ve  $\theta$  pozitif reel değerler,  $x$  indisi konum ve  $t$  indisi zamana göre türevi simgelemek üzere  $x \rightarrow \pm\infty$  iken  $u \rightarrow 0$  sınır şartları ile KS denklemi

$$u_t + \alpha uu_x + \beta u_{xxx} + \gamma(uu_{xx})_x + \theta u_x u_{xx} = 0, \quad (5.1)$$

şeklindedir. Burada KS denklemi

$$\begin{aligned} u_N(a, t) &= 0, & u_N(b, t) &= 0, \\ (u_N)_x(a, t) &= 0, & (u_N)_x(b, t) &= 0, \\ (u_N)_{xx}(a, t) &= 0, & (u_N)_{xx}(b, t) &= 0, t > 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

sınır şartları ve  $f(x)$  sonradan belirlenmek üzere

$$u(x, 0) = f(x), \quad a \leq x \leq b \quad (5.3)$$

başlangıç şartı ile ele alınmıştır.

İlk olarak problemin çözüm bölgesi;  $[a, b]$  kapalı aralığına kısıtlanır.  $[a, b]$  kapalı aralığı,  $x_m$

düğüm noktalarını kullanarak  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$  şeklinde  $N$  adet birbirine eşit alt aralıklara bölünür.  $m = 1, 2, \dots, N$  için bu alt aralıkların uzunlukları  $h = \frac{b-a}{N} = (x_{m+1} - x_m)$  formundadır.  $a \leq x \leq b$  aralığında  $x_m$  düğüm noktaları ile  $\varphi_m(x)$  septik B-spline interpolasyon fonksiyonları

$$\varphi_m(x) = \frac{1}{h^7} \begin{cases} \alpha^7, & [x_{m-4}, x_{m-3}] \\ \alpha^7 - 8\beta^7, & [x_{m-3}, x_{m-2}] \\ \alpha^7 - 8\beta^7 + 28\gamma^7, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ \alpha^7 - 8\beta^7 + 28\gamma^7 - 56\eta^7, & [x_{m-1}, x_m] \\ \sigma^7 - 8\mu^7 + 28\kappa^7 - 56\lambda^7, & [x_m, x_{m+1}] \\ \sigma^7 - 8\mu^7 + 28\kappa^7, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ \sigma^7 - 8\mu^7, & [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ \sigma^7, & [x_{m+3}, x_{m+4}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (5.4)$$

şeklinde olup burada  $\alpha = (x - x_{m-4})$ ,  $\beta = (x - x_{m-3})$ ,  $\gamma = (x - x_{m-2})$ ,  $\eta = (x - x_{m-1})$ ,  $\sigma = (x_{m+4} - x)$ ,  $\mu = (x_{m+3} - x)$ ,  $\kappa = (x_{m+2} - x)$  ve  $\lambda = (x_{m+1} - x)$  dir.  $[a, b]$  aralığı üzerinde tanımlı fonksiyonlar için  $\{\varphi_{-3}(x), \varphi_{-2}(x), \dots, \varphi_{N+3}(x)\}$  kümesi bir baz oluşturmaktadır. Problemin tam çözümü olan  $u(x, t)$  fonksiyonuna yaklaşan  $u_N(x, t)$  nümerik çözümü

$$u_N(x, t) = \sum_{m=-3}^{N+3} \varphi_m(x) \delta_m(t), \quad (5.5)$$

şeklinde verilir. Bu ifadede sınır şartları ile elde edilecek olan  $\delta_m(t)$  ler zamana bağlı parametrelerdir.  $0 \leq \omega \leq 1$  için  $h\omega = x - x_m$  şeklindeki lokal dönüşüm ile  $[x_m, x_{m+1}]$  aralığı  $[0, 1]$  aralığına dönüştürülür.  $\delta_{m-4}$ ,  $\delta_{m-3}$ ,  $\delta_{m-2}$ ,  $\delta_{m-1}$ ,  $\delta_m$ ,  $\delta_{m+1}$ ,  $\delta_{m+2}$ ,  $\delta_{m+3}$  ve  $\delta_{m+3}$  eleman parametreleri ve  $\varphi_{m-3}$ ,  $\varphi_{m-2}$ ,  $\varphi_{m-1}$ ,  $\varphi_m$ ,  $\varphi_{m+1}$ ,  $\varphi_{m+2}$ ,  $\varphi_{m+3}$  ve  $\varphi_{m+4}$  yaklaşım fonksiyonları olacak şekilde,  $u(x, t)$  fonksiyonuna

$$u_N(x, t) = \sum_{m=-3}^{N+3} \varphi_m(x) \delta_m(t),$$

deneme fonksiyonu ile yaklaşım yapılır.

$'$ ,  $''$ ,  $'''$ ,  $iv$ ,  $v$  ve  $vi$  simgeleri  $x$  e göre altıncı mertebeye kadar olan türevleri ifade edecek şekilde, (5.4) de verilen septik B-spline baz fonksiyonları ve (5.5) de tanımlanan sayısal fonksiyonundan yararlanarak,  $u'$ ,  $u''$ ,  $u'''$ ,  $u^{iv}$ ,  $u^v$  ve  $u^{vi}$  nun  $x$  e göre türevlerinin düğüm noktalarındaki

değerleri  $\delta_m$  zaman parametreleri cinsinden

$$\begin{aligned}
u_N(x_m, t) &= U_m = \delta_{m-2} + 26\delta_{m-1} + 66\delta_m + 26\delta_{m+1} + \delta_{m+2}, \\
u'_m &= \frac{5}{h}(-\delta_{m-2} - 10\delta_{m-1} + 10\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \\
u''_m &= \frac{20}{h^2}(\delta_{m-2} + 2\delta_{m-1} - 6\delta_m + 2\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \\
u'''_m &= \frac{60}{h^3}(-\delta_{m-2} + 2\delta_{m-1} - 2\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \\
u_m^{iv} &= \frac{120}{h^4}(\delta_{m-2} - 4\delta_{m-1} + 6\delta_m - 4\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \\
u_m^v &= \frac{2520}{h^5}(-\delta_{m-3} + 4\delta_{m-2} - 5\delta_{m-1} + 5\delta_{m+1} - 4\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \\
u_m^{vi} &= \frac{5040}{h^6}(\delta_{m-3} - 6\delta_{m-2} + 15\delta_{m-1} - 20\delta_m + 15\delta_{m+1} - 6\delta_{m+2} + \delta_{m+3})
\end{aligned} \tag{5.6}$$

olarak elde edilir.

### 5.1.1 Kollokasyon Sonlu Elemanlar Yöntemi

(5.6) ile verilen eşitlikler, (5.1) ile tanımlanan Kudryashov-Sinelschkov (KS) denkleminde yerlerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
&\dot{\delta}_{m-3} + 120\dot{\delta}_{m-2} + 1191\dot{\delta}_{m-1} + 2416\dot{\delta}_m + 1191\dot{\delta}_{m+1} + 120\dot{\delta}_{m+2} + \dot{\delta}_{m+3} \\
&+ Z_{m1} \frac{7\alpha}{h}(-\delta_{m-3} - 56\delta_{m-2} - 245\delta_{m-1} + 245\delta_{m+1} + 56\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) \\
&+ (\beta + \gamma Z_{m1}) \frac{210}{h^3}(-\delta_{m-3} - 8\delta_{m-2} + 19\delta_{m-1} - 19\delta_{m+1} + 8\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) \\
&+ (\gamma + \theta) Z_{m2} \frac{2520}{h^5}(-\delta_{m-3} + 4\delta_{m-2} - 5\delta_{m-1} + 5\delta_{m+1} - 4\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) = 0,
\end{aligned} \tag{5.7}$$

şeklindeki cebirsel denklem bulunur. Lineerleştirme tekniğini uygulayabilmek için, KS denkleminde lineer olmayan  $uu_{xxx}$  ve  $uu_x$  teriminde yer alan  $u$  terimi

$$Z_{m1} = u_m,$$

ve  $u_x u_{xx}$  teriminde yer alan  $u_{xx}$  terimi

$$Z_{m2} = u_{xx},$$

olacak şekilde lokal sabit kabul edilmiştir. (5.7) eşitliğinde yer alan  $\delta_m$  ve  $\dot{\delta}_m$  eleman parametreleri yerine sırasıyla (3.9) ta verilen Crank-Nicolson formülasyonu ve ileri sonlu fark yaklaşımı uygulandığında,  $n$  ve  $n + 1$  olarak seçilen iki zaman seviyesi arasındaki ilişki  $\delta^n$  ve  $\delta^{n+1}$  terimleri cinsinden

$$\begin{aligned}
&\gamma_1 \delta_{m-3}^{n+1} + \gamma_2 \delta_{m-2}^{n+1} + \gamma_3 \delta_{m-1}^{n+1} + \gamma_4 \delta_m^{n+1} + \gamma_5 \delta_{m+1}^{n+1} + \gamma_6 \delta_{m+2}^{n+1} + \gamma_7 \delta_{m+3}^{n+1} \\
&= \gamma_7 \delta_{m-3}^n + \gamma_6 \delta_{m-2}^n + \gamma_5 \delta_{m-1}^n + \gamma_4 \delta_m^n + \gamma_3 \delta_{m+1}^n + \gamma_2 \delta_{m+2}^n + \gamma_1 \delta_{m+3}^n
\end{aligned} \tag{5.8}$$



olarak yazılabilir. Burada

$$\begin{aligned}
A &= \frac{7}{2h} \alpha \Delta t, \\
B &= \frac{105}{h^3} \beta \Delta t, \\
C &= \frac{105}{h^3} \gamma \Delta t, \\
D &= \frac{147}{h^3} (\gamma + \theta) \Delta t
\end{aligned} \tag{5.9}$$

ve  $\Delta t$  zaman adımını belirtecek şekilde olup  $\delta$  parametrelerinin çarpanları

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= [1 - AZ_{m1} - B - CZ_{m1} - DZ_{m2}], \\
\gamma_2 &= [120 - 56AZ_{m1} - 8B - 8CZ_{m1} - 56DZ_{m2}], \\
\gamma_3 &= [1191 - 245AZ_{m1} + 19B + 19CZ_{m1} - 245DZ_{m2}], \\
\gamma_4 &= [2416], \\
\gamma_5 &= [1191 + 245AZ_{m1} - 19B - 19CZ_{m1} + 245DZ_{m2}], \\
\gamma_6 &= [120 + 56AZ_{m1} + 8B + 8CZ_{m1} + 56DZ_{m2}], \\
\gamma_7 &= [1 + AZ_{m1} + B + CZ_{m1} + DZ_{m2}],
\end{aligned} \tag{5.10}$$

şeklinde. (5.8) denklem sistemi,  $\delta_{-3}, \delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_{N+1}, \delta_{N+2}$  ve  $\delta_{N+3}$  olmak üzere  $(N+7)$  adet bilinmeyen parametre ve  $(N+1)$  tane lineer denklem içermektedir. Bu denklem sisteminin çözümü için (5.2) ile verilen sınır şartları kullanılarak elde edilebilecek altı adet ek koşula daha ihtiyaç olduğu görülür. Ek koşullar yardımı ile (5.9) denklem sistemindeki  $\delta_{-3}, \delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_{N+1}, \delta_{N+2}$  ve  $\delta_{N+3}$  parametreleri yok edilir ve  $d^n = (\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_N)^T$  formunda  $(N+1)$  adet bilinmeyen parametreden oluşan

$$Ad^{n+1} = Bd^n. \tag{5.11}$$

$(N+1) \times (N+1)$  tipinde diagonal matris sistemi bulunur. Bu ise Thomas algoritması kullanılarak çözülür. Çözüm işlemi yapılırken lineer olmama etkisini en aza indirmek için her bir zaman kademesinde iki veya üç kez (3.14) ile gösterilen iç iterasyon işlemi uygulanır. (5.8) denklem sisteminde iterasyon işlemine başlayabilmek için, ilk olarak başlangıç ve sınır şartları yardımıyla  $d^0 = (\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_N)^0$  ile gösterilen başlangıç vektörü hesaplanır. Bu yüzden  $t = 0$  zamanında  $[a, b]$  aralığındaki

$$u_N(x, 0) = \sum_{m=-3}^{N+3} \phi_m(x) \delta_m^0,$$

yaklaşımı ile

$$\begin{aligned}
u_N(x, 0) &= u(x_m, 0); \quad m = 0, 1, 2, \dots, N \\
(u_N)_x(a, 0) &= 0, \quad (u_N)_x(b, 0) = 0, \\
(u_N)_{xx}(a, 0) &= 0, \quad (u_N)_{xx}(b, 0) = 0, \\
(u_N)_{xxx}(a, 0) &= 0, \quad (u_N)_{xxx}(b, 0) = 0.
\end{aligned} \tag{5.12}$$



olarak elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}\rho_1 &= 2416 + 2382 \cos(\tau \Delta x) + 240 \cos(2\tau \Delta x) + 2 \cos(3\tau \Delta x), \\ \rho_2 &= [-490(AZ_{m1} + DZ_{m2}) + 38(B + CZ_{m1})] \sin(\tau \Delta x) \\ &+ [-112(AZ_{m1} + DZ_{m2}) - 16(B + CZ_{m1})] \sin(2\tau \Delta x) \\ &+ [-2(AZ_{m1} + DZ_{m2}) - 2(B + CZ_{m1})] \sin(3\tau \Delta x),\end{aligned}$$

olup,  $|\xi| = 1$  koşulu sağlanır. Böylece lineerleştirilmiş sonlu eleman şeması şartsız kararlı olarak bulunur.

### 5.1.3 Nümerik Örnekler ve Sonuçlar

Bu kısımda, belirlenen bölünme noktaları üzerinde tek solitary dalga problemi için Kudryashov-Sinelschkov denkleminin nümerik çözümleri elde edilmiştir. Uygulanan sayısal metodun doğruluğu ve etkinliği seçilen zaman adımlarında tam ve yaklaşık çözüm arasındaki farkın hesaplanmasını sağlayan

$$L_2 = \|u^{tam} - u_N\|_2 \simeq \sqrt{h \sum_{j=1}^N |u_j^{tam} - (u_N)_j|^2}, \quad (5.17)$$

ortalama hata normu ve

$$L_\infty = \|u^{tam} - u_N\|_\infty \simeq \max_j |u_j^{tam} - (u_N)_j|, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (5.18)$$

maksimum hata normu yardımıyla incelenmiştir. (5.1) ile tanımlanan KS denklemi sırasıyla kütle ve momentuma karşılık gelen

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx, \\ I_2 &= \int_a^b \left[ \frac{1}{(\gamma + \theta)} ((\gamma u + \beta)^{\gamma\theta + 1} - \beta^{\gamma\theta + 1} \gamma^{-\gamma\theta}) \right] dx\end{aligned}$$

şeklinde iki korunum sabitine sahiptir. Korunan büyüklükler  $I_1$  ve  $I_2$  sayısal şemanın dalga hareketi sırasında fiziksel durumu koruduğunu kaydetmek için araştırılır.

#### 5.1.3.1 Tek Solitary Dalga Hareketi

Burada  $x \rightarrow \pm\infty$  iken  $u \rightarrow 0$  sınır şartı ile  $t = 0$  olarak kabul edilmek üzere

$$u(x, 0) = \frac{3\beta\kappa^2\mu^2}{\alpha - \gamma\kappa^2\mu^2} \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{\kappa\mu}{2} x \right],$$

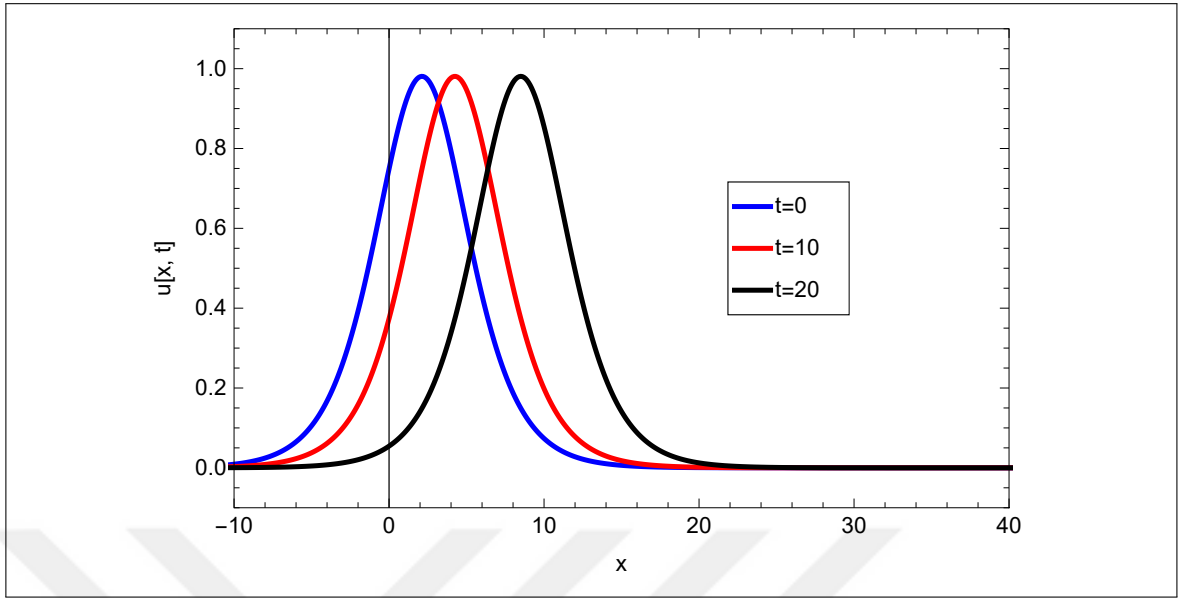
başlangıç koşulu ile KS denkleminin solitary dalga çözümleri bulunmuştur.  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\kappa$ ,  $\mu$  ve  $\gamma$  reel değerler olmak üzere KS denkleminin analitik çözümü

$$u(x, t) = \frac{3\beta\kappa^2\mu^2}{\alpha - \gamma\kappa^2\mu^2} \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{\kappa\mu}{2} (x - ct) \right], \quad (5.19)$$

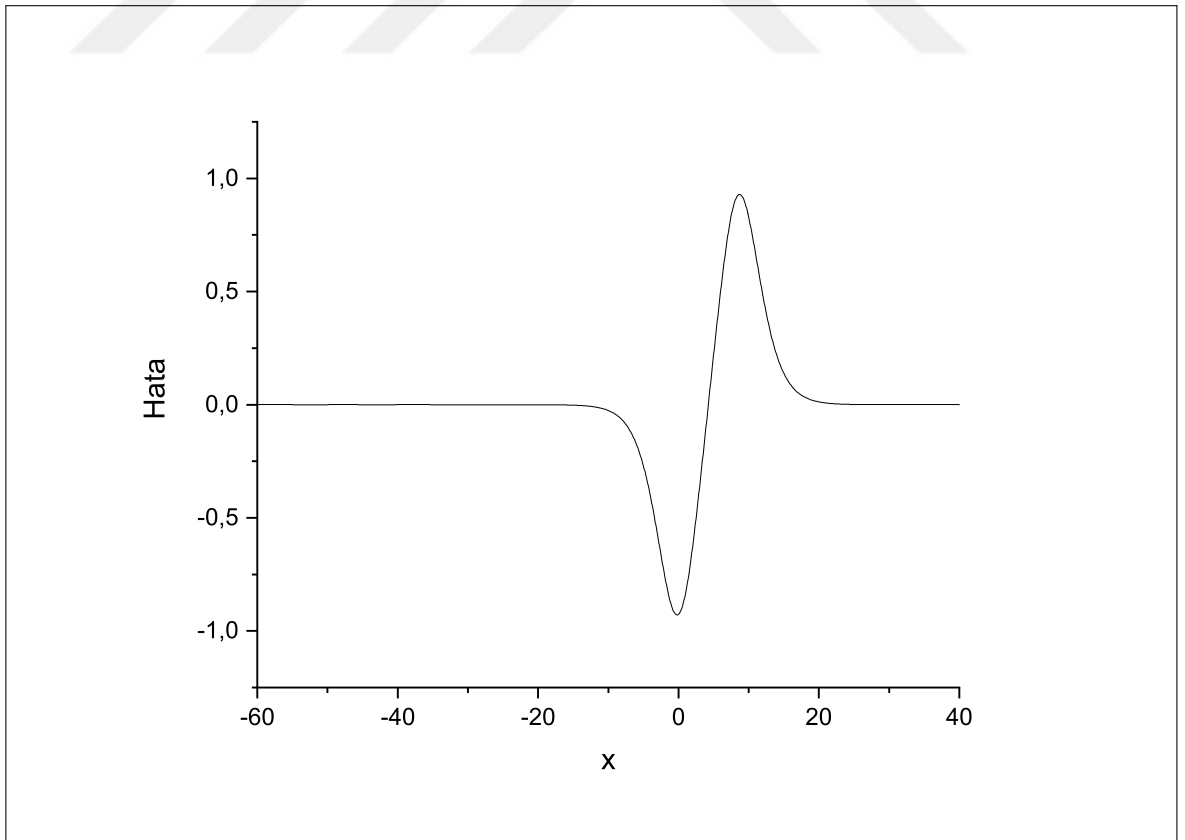
biçimindedir. Burada  $\sqrt[p]{\frac{v(p+2)}{2p}}$  ifadesi dalga genliğini ve  $c = \beta \kappa^2 \mu^2$  dalga hızını simgelemektedir. Tek solitary dalga çözümü için, sayısal algoritma  $[-60, 40]$  hesaplama aralığı üzerinde  $t = 20$  ye kadar hesaplanmıştır.  $\alpha = 1.5$ ,  $\beta = 1.7$ ,  $\gamma = 0.8$ ,  $\theta = -2.4$ ,  $\kappa = 1$ ,  $c = 0.425$ ,  $\mu = 0.5$  parametreleri seçilmiştir. Simü lasyon hesaplamalarında  $\Delta t_1 = 0.1$ ,  $\Delta t_2 = 0.025$ ,  $h_1 = 0.1$  ve  $h_2 = 0.025$  olarak alınmıştır. Bu değerler ile elde edilen solitary dalganın  $x = 0$  konumunda ve  $t = 0$  anında  $A = 0.98077$  genliğine sahip olduğu görülmüştür. Diğer yandan  $t = 20$  zaman adımına kadar seçilmiş zamanlarda  $I_1$  ve  $I_2$  korunum sabitleri,  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata norm değerleri hesaplanarak, bulunan sonuçlar Tablo 5.1 de verilmiştir. Tablo 5.1, iki korunan miktarın zaman içinde neredeyse sabit kaldığını ve miktarlardaki değişikliklerin analitik değerleriyle iyi bir uyum içinde olduğunu göstermektedir. Hesaplanan  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları tatmin edici derecede küçük bulunmuştur. Bu hataların zaman ilerledikçe değişmediği görülmektedir. Ek olarak, Tablo 5.1, bulunan değişmezlerin ve hata norm değerlerinin,  $t = 20$  anında [56] referansında elde edilen değerlerle karşılaştırılmasını göstermektedir. Kollokasyon metodu ile bulunan hata normlarının [56] çalışmasında yer alan yöntemlerden daha küçük olduğu, analitik ve sayısal çözümler arasındaki uyumun mükemmel olduğu tablodan açıkça görülmektedir. Şekil 5.1,  $t = 0$  dan  $t = 20$  ye kadar üretilen çan şeklindeki soliter dalga çözümlerinin iki boyutlu halini göstermektedir. Ek olarak, tek dalganın hareketi için kontur çizgisi ile üç boyutlu dalga hareketi Şekil 5.3 ve Şekil 5.4 te verilmektedir. Şekillerden, incelenen şemanın tek bir dalganın yayılma hareketini gerçekleştirdiği, genlik ve şeklin korunduğu görülmektedir. Öte yandan, Şekil 5.2 de farklı  $h$  ve  $\Delta t$  değerleri için  $t = 20$  anında sayısal hata dağılımı çizilmiştir.

Tablo 5.1 Tek solitary dalga hareketi için korunum sabiti ve hata normu değerleri

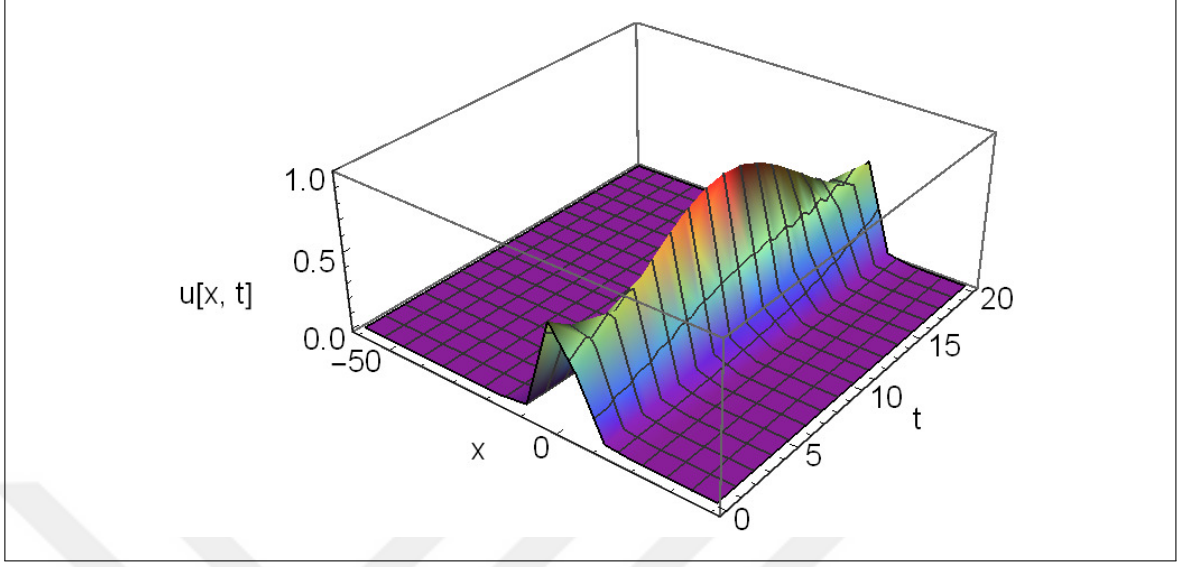
$\Delta t = h = 0.1$				
$t$	$I_1$	$I_2$	$L_2$	$L_\infty$
0.0	7.8461558037	-12.3622484349	.0000000000	.0000000000
2.5	7.8461557509	-12.3622484790	.0000136334	.0000057199
5.0	7.8461557630	-12.3622484940	.0000219328	.0000100722
7.5	7.8461556690	-12.3622485121	.0000308925	.0000140065
10.0	7.8461557968	-12.3622484879	.0000400526	.0000180416
12.5	7.8461541918	-12.3622487491	.0000488115	.0000212898
15.0	7.8461557286	-12.3622484900	.0000574197	.0000244747
17.5	7.8461522685	-12.3622490603	.0000656080	.0000270435
20.0	7.8461528682	-12.3622489534	.0000736396	.0000286451
20.0 [56]	7.8461511588	-12.3622507074	.0000741380	.0000295908
$\Delta t = h = 0.025$				
$t$	$I_1$	$I_2$	$L_2$	$L_\infty$
0.0	7.8461455100	-12.3522244940	.0000000000	.0000000000
2.5	7.8461454585	-12.3522245046	.0000024114	.0000010779
5.0	7.8461454889	-12.3522244910	.0000031100	.0000013154
7.5	7.8461453248	-12.3522245104	.0000042124	.0000017679
10.0	7.8461452763	-12.3522245133	.0000057796	.0000020899
12.5	7.8461445220	-12.3522246352	.0000082685	.0000034587
15.0	7.8461447008	-12.3522246037	.0000120139	.0000054335
17.5	7.8461430323	-12.3522248797	.0000170331	.0000081227
20.0	7.8461421379	-12.3522250263	.0000226732	.0000108488
20.0 [56]	7.8461418312	-12.3522265463	.0000226579	.0000106351



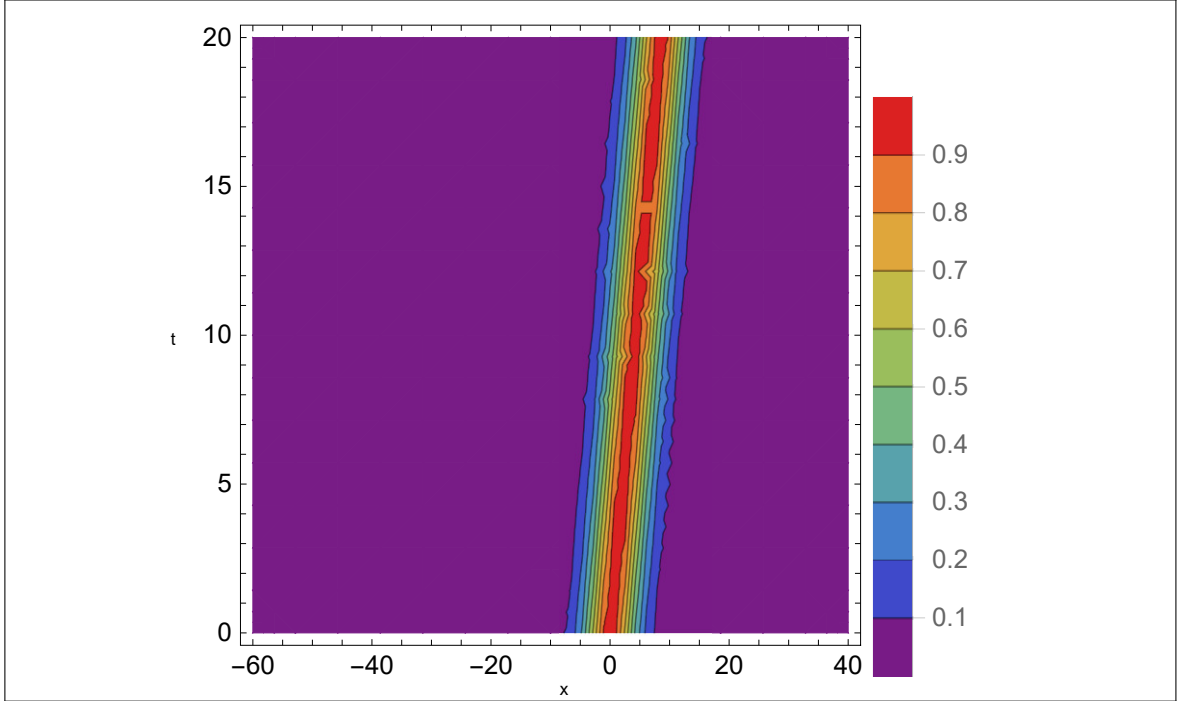
Şekil 5.1 KS denkleminin  $t = 0, 10, 20$  zamanında tek solitary dalga hareketi



Şekil 5.2  $\Delta t = h = 0.1$  için  $t = 20$  zamanında hata dağılımı



Şekil 5.3 KS denkleminin  $t = 0$  dan  $t = 20$  ye kadar tek solitary dalga hareketi



Şekil 5.4 Tek solitary dalga hareketinin kontur grafiği

### 5.1.3.2 İki Solitary Dalganın Etkileşimi

Bu kısımda aynı yönde ilerleyen pozitif iki solitary dalganın etkileşimi,  $x_i$  ( $i = 1, 2$ ) değerleri keyfi sabitler ve  $t = 0$  için

$$u(x, 0) = \sum_{i=1}^2 \frac{3\beta\kappa^2\mu_i^2}{\alpha - \gamma\kappa^2\mu_i^2} \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{\kappa\mu_i}{2} (x_i - c_it) \right], \quad (5.20)$$

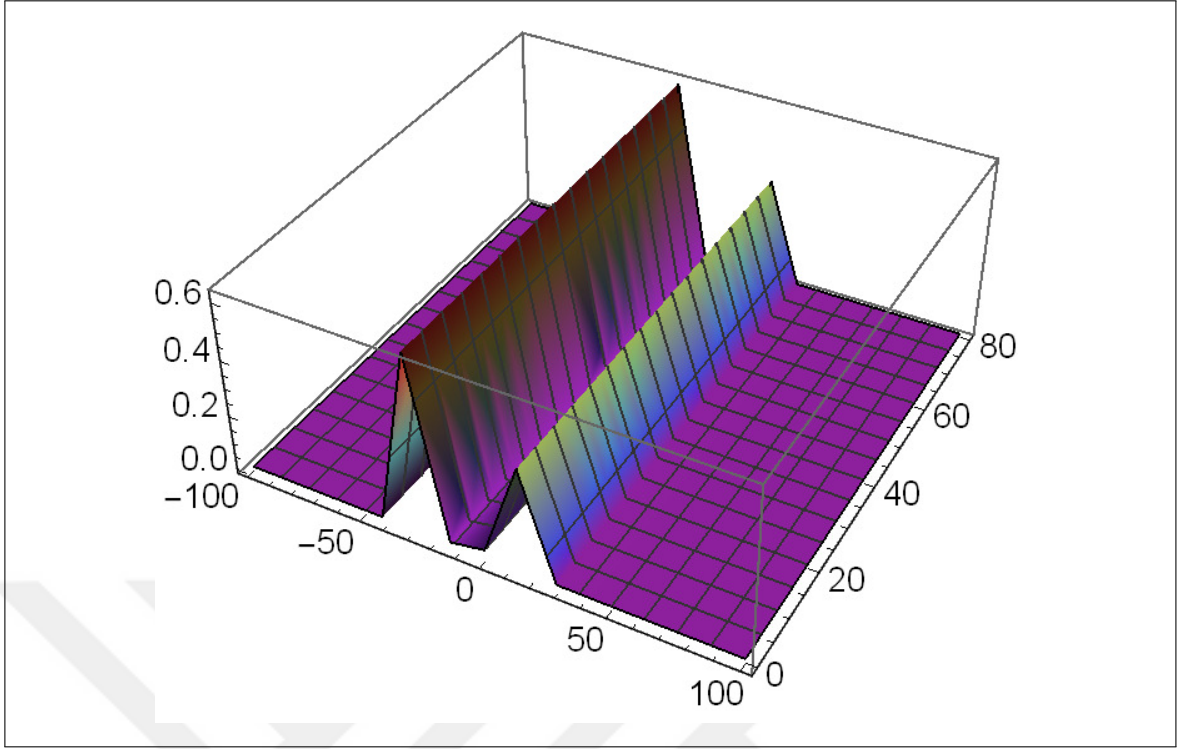
biçimindeki başlangıç koşulu kullanılarak, farklı büyüklüklere sahip aynı tarafa doğru ilerleyen iki solitary dalganın etkileşimi araştırılmıştır.

Simülasyon hesaplamalarında  $-100 \leq x \leq 100$  bölgesi üzerinde kullanılan tipik değerler  $\Delta t_1 = h_1 = 0.1$  and  $\Delta t_2 = 0.01$ ,  $h_2 = 0.025$  şeklindedir. Sayısal hesaplamalar için  $\alpha = 1.5$ ,  $\beta = 1.7$ ,  $\gamma = 0.8$ ,  $\theta = -2.4$ ,  $\kappa = 1$ ,  $c_1 = 0.833$ ,  $c_2 = 0.425$ ,  $\mu_1 = 0.7$ ,  $\mu_2 = 0.5$ ,  $x_1 = -35$ ,  $x_2 = 10$  parametreleri seçilmiştir. Parametreler, merkezleri  $x_1 = -35$  ve  $x_2 = 10$  olan iki farklı genliğe sahip solitary dalgalar üretir. İki solitary dalganın etkileşimi sırasında korunmuş değişmez değerler, farklı  $h$  ve  $\Delta t$  değerleri için Tablo 5.2 da listelenmiştir. Hesaplama verileri,  $t = 80$  anındaki değişmez miktarlarının mantıksal olarak sabit kaldığını ve [56] çalışmasında bulunan değerler ile uyumlu olduğunu göstermiştir. İki solitary dalganın etkileşimi Şekil 5.5 te  $t = 0$  ile  $t = 80$  arasında gösterilmiştir. Bu şekilden görülebileceği gibi,  $t = 0$  zamanında daha yüksek enerjili solitary dalga, daha küçük enerjili ikinci dalganın gerisinde kalmaktadır. Her iki dalga da boyutlarına göre sağa doğru hareket etmektedir. Solitary dalga teorisine göre daha fazla enerji, daha fazla hızı ifade etmektedir. Böylece zamanla daha büyük olan dalga daha küçük olana ulaşır ve etkileşim meydana gelir. Sonrasında daha büyük enerjiye sahip dalga, ikinci dalgayı daha az enerjiyle terk eder ve bu böyle devam eder. Bu işlemin sonunda solitary dalgalar orijinal genliklerini ve şekillerini korurlar. Ayrıca, iki solitary dalganın etkileşimi için kontur çizgisi de yine Şekil 5.6 da gösterilmiştir.

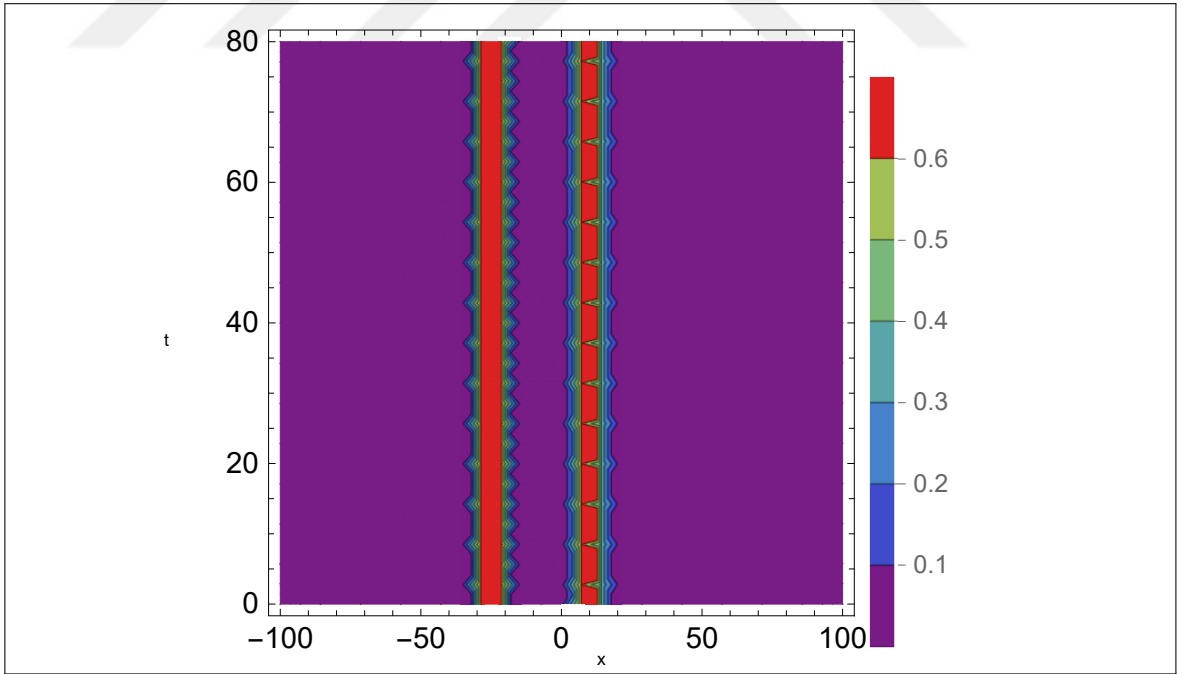


Tablo 5.2 İki solitary dalganın etkileşimi için korunum sabiti değerleri ve diğer yöntemlerle karşılaştırılması

$t$	$\Delta t = 0.1, h = 0.1$		$\Delta t = 0.01, h = 0.025$	
	$I_1$	$I_2$	$I_1$	$I_2$
0	20.7343904244	-24.4006256585	.0003587404	-6.6868049607
10	20.7344063542	-24.4006260021	.0001356449	-6.6868420105
20	20.7344055097	-24.4006258771	.0001132442	-6.6868457307
30	20.7344153509	-24.4006241598	.0000214651	-6.6868609726
40	20.7343865445	-24.4006265804	.0000435684	-6.6868573018
50	20.7344190100	-24.4006055123	.0001315385	-6.6868426925
60	20.7343583263	-24.4004975009	.0000616997	-6.6868542907
70	20.7343580040	-24.3996662836	.0000517916	-6.6868559362
80	20.7344096755	-24.3947688982	.0000449051	-6.6868570798
80 [56]	20.7343755930	-24.4007677831	.0000338496	-6.6868596667



Şekil 5.5 KS denklemleri için iki solitary dalganın etkileşimi



Şekil 5.6 İki solitary dalga etkileşimi için kontur grafiği

### 5.1.3.3 Solitonların Oluşumu

#### Gaussian Başlangıç Şartı

Bir soliton dizisinin oluşumunu incelemek için,

$$u(x, 0) = \exp(-x^2), \quad (5.21)$$

Gaussian başlangıç koşulu ve

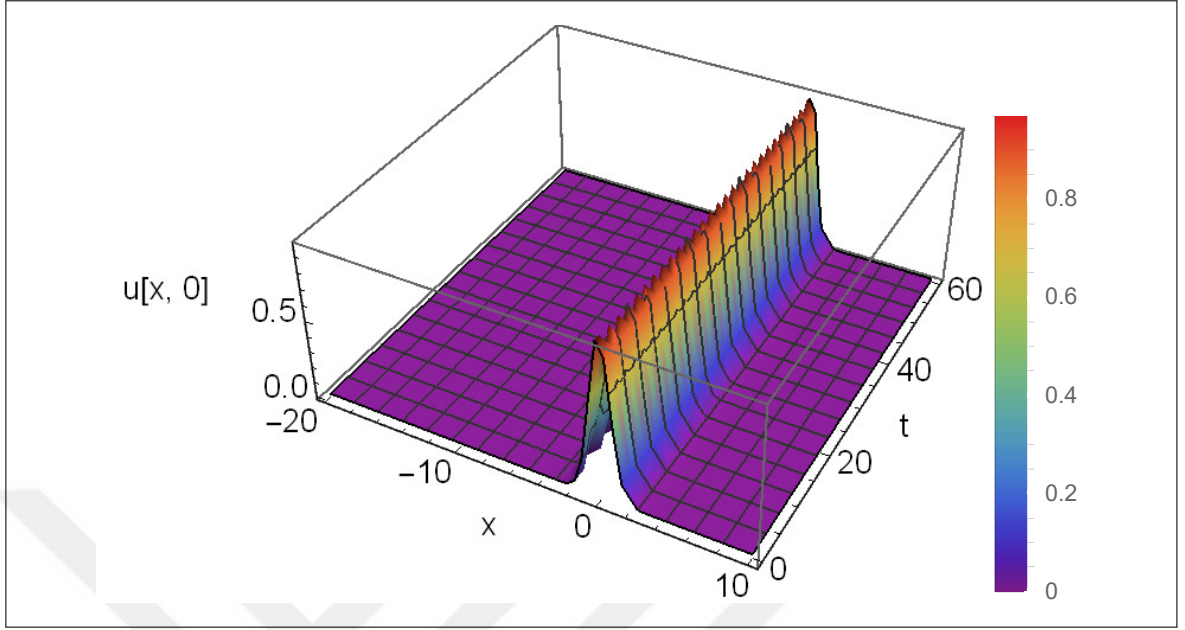
$$u(-200, t) = u(100, t) = 0, \quad t > 0 \quad (5.22)$$

formundaki sınır koşulu uygulanmıştır.

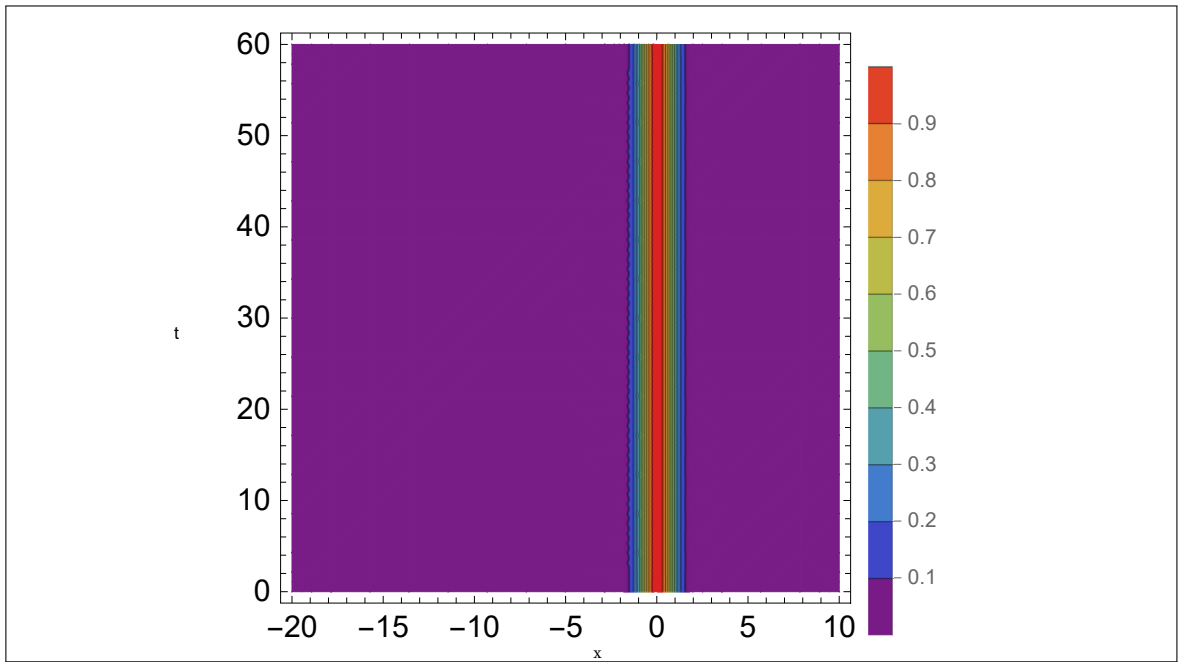
Dalga oluşumunu incelemek için,  $[-200, 100]$  aralığında  $\alpha = 1.5$ ,  $\beta = 1.7$ ,  $\gamma = 0.8$ ,  $\theta = -2.4$ ,  $\kappa = 1$ ,  $c = 0.425$ ,  $\mu = 0.5$ ,  $\kappa = 1$  değerleri seçilmiştir. Algoritmanın çalışması, değişmezlerin değerlerini elde etmek için  $t = 60$  zamanına kadar çalıştırılır.  $h = \Delta t = 0.1$  için değişmezlerin değerleri Tablo 5.3 te gösterilmiştir. Burada özellikle  $I_2$  değişmezi,  $h$  ve  $\Delta t$  nin küçük değerleri için daha iyi korunur. Hesaplama verileri, değişmezlerin miktarlarının ilk değerlerden çok az değiştiğini ve bunların [56] çalışması ile uyumlu olduğunu gösterir. Şekil 5.7, Gaussian başlangıç koşulunun  $x \in [-20, 10]$  aralığı boyunca dalgalar halinde gelişimini göstermektedir. Ayrıca, Gaussian başlangıç koşuluyla solitary dalgaların oluşumu için kontur çizgisi Şekil 5.8 de gösterilmiştir.

Tablo 5.3 Gaussian başlangıç şartı için korunum sabiti değerleri

$t$	$\Delta t = 0.1, h = 0.1$		$\Delta t = 0.05, h = 0.08$	
	$I_1$	$I_2$	$I_1$	$I_2$
0	1.7724537283	-39.8889700118	1.7724537633	-39.8862965986
10	1.7724538764	-39.8832761702	1.7613889237	-39.8822598689
20	1.7528601543	-39.8864239546	1.7206085400	-39.8890190286
30	1.8141115219	-39.8762288511	1.8014002402	-39.8754990028
40	1.7534279381	-39.8862071517	1.7728849421	-39.8804324692
50	1.6501981380	-39.9035615128	1.7128751190	-39.8905335893
60	1.7910174161	-39.8797764293	1.8108387814	-39.8739125552



Şekil 5.7 Gaussian başlangıç koşulu için solitonların oluşumu



Şekil 5.8 Gaussian başlangıç koşulu için kontur grafiği

### Undular Bore Başlangıç Şartı

Son olarak, KS denklemi ile

$$u(x,0) = \frac{1}{2}U_0 \left[ 1 - \tanh \left( \frac{|x| - x_0}{d} \right) \right], \quad (5.23)$$

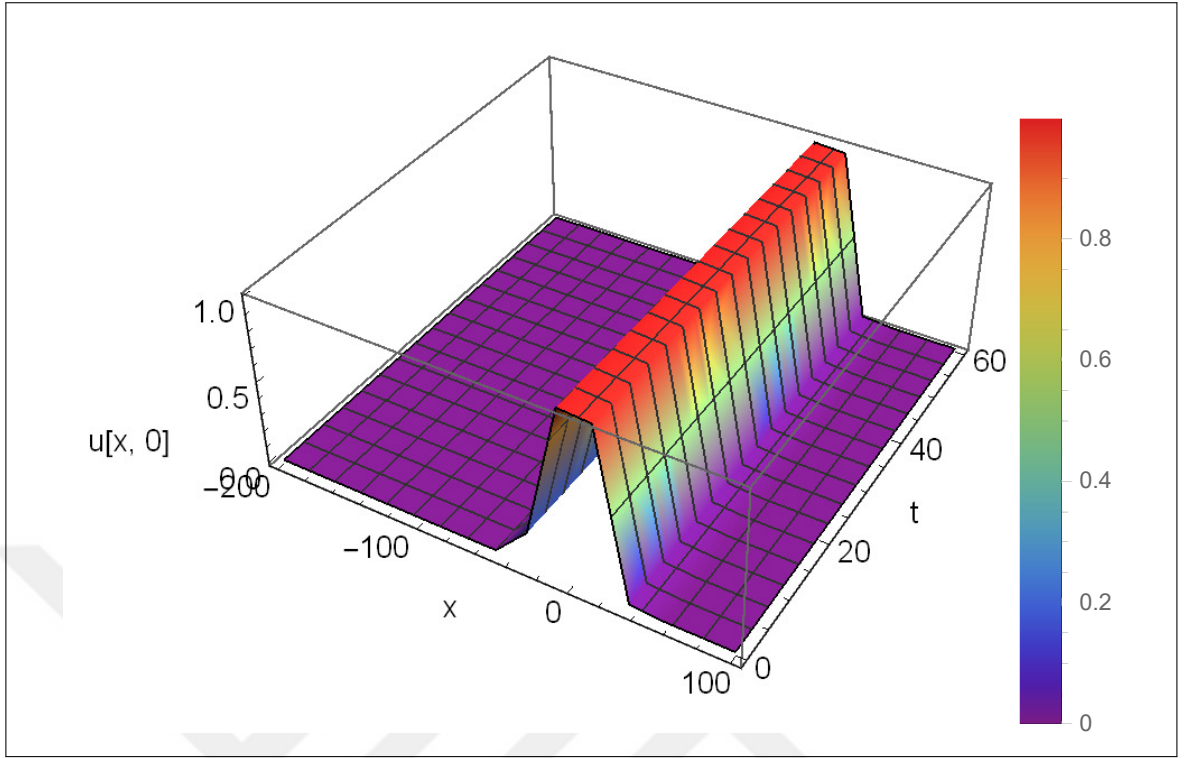
undular bore başlangıç koşulu ve

$$u(-200,t) = u(100,t) = 0, \quad t > 0 \quad (5.24)$$

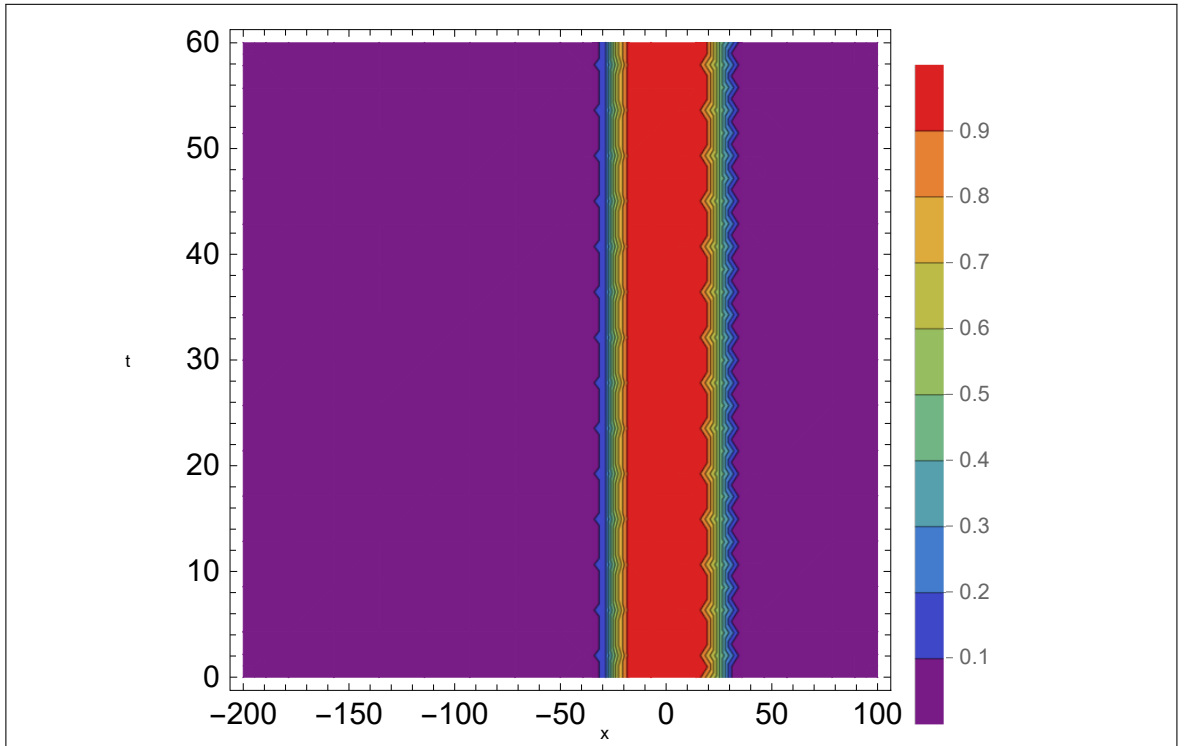
sınır şartı kullanılarak, solitonların oluşumu üzerinde çalışılmıştır. Undular bore başlangıç şartı,  $t = 0$  zaman adımıdaki denge yüzeyi üzerinde suyun yüksekliğini ifade eder. Genlikteki değişim  $x = x_0$  üzerinde merkezlenir ve değişimin dikliği  $d$  ile ölçülür.  $d$  değerleri diklik ile ters orantılıdır.  $d$  nin aldığı değerler küçüldükçe değişim daha dik olmaya eğimli bir hale gelir. Sayısal hesaplamalar için, (5.23) denkleminde parametreler  $\sigma = 0.1$ ,  $\eta = 7$ ,  $U_0 = 0.25$ ,  $x_0 = 25$  ve  $d = 5$  olarak alınmıştır. Burada  $\alpha = 1.5$ ,  $\beta = 1.7$ ,  $\gamma = 0.8$ ,  $\theta = -2.4$ ,  $\kappa = 1$ ,  $c = 0.425$ ,  $\mu = 0.5$ ,  $\Delta t = h = 0.1$  ve  $\Delta t = h = 0.025$  parametreleri kullanılmıştır. Değişmezlerin elde edilen değerleri Tablo 5.4 da sunulmuştur. Bu tablodan, değişmezlerin değerlerindeki değişimin oldukça küçük olduğu gözlemlenir. Şekil 5.9 da dalga deliğinin  $t = 0$  dan  $t = 60$  anına kadar kararlı durumunu koruduğu görülmektedir. Undular bore başlangıç koşuluyla solitary dalgaların oluşumu için kontur çizgisi ise Şekil 5.10 da gösterilmiştir.

Tablo 5.4 Undular bore başlangıç şartı için korunum sabiti değerleri

$t$	$\Delta t = h = 0.1$		$\Delta t = h = 0.25$	
	$I_1$	$I_2$	$I_1$	$I_2$
0	50.0001143463	-34.1735891453	50.0002271836	-34.1936262616
10	50.0001143460	-34.1802028975	50.0002271810	-34.2002208329
20	50.0001134509	-34.1998801798	50.0002273214	-34.2198395753
30	50.0000927379	-34.2188518043	50.0002633112	-34.2387621127
40	50.0003021467	-34.2302125686	50.0003913890	-34.2501269880
50	50.0009309940	-34.2358207444	50.0006735889	-34.2557906661
60	50.0002530719	-34.2386700079	50.0003564708	-34.2585855993



Şekil 5.9 Undular bore başlangıç koşulu için solitonların oluşumu



Şekil 5.10 Undular bore başlangıç koşulu için kontur grafiği

## 6. BÖLÜM

### fKdV DENKLEMİNİN KOLLOKASYON SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

Bu kısımda, birinci bölümde verilen septik B-spline kollokasyon metodu ile beşinci dereceden KdV (fKdV) denkleminin sayısal çözümü için çözüm adımları verilmiştir.  $\alpha$ ,  $\beta$  ve  $\gamma$  keyfi pozitif reel sabitler,  $x$  indisi konum ve  $t$  indisi zamana göre türevi simgelemek üzere  $x \rightarrow \pm\infty$  iken  $u \rightarrow 0$  sınır şartları ile

$$u_t + \alpha u^2 u_x + \beta u_x u_{xx} + \gamma u u_{xxx} + u_{xxxxx} = 0, \quad (6.1)$$

şeklinde tanımlanan fKdV denklemi incelenmiştir.

$$\begin{aligned} u_N(a, t) &= 0, & u_N(b, t) &= 0, \\ (u_N)_x(a, t) &= 0, & (u_N)_x(b, t) &= 0, \\ (u_N)_{xx}(a, t) &= 0, & (u_N)_{xx}(b, t) &= 0, t > 0 \end{aligned} \quad (6.2)$$

sınır şartları ve  $f(x)$  daha sonra belirlenmek üzere

$$u(x, 0) = f(x), \quad a \leq x \leq b \quad (6.3)$$

başlangıç şartı ile ele alınmıştır.

İlk olarak problemin çözüm bölgesi;  $[a, b]$  kapalı aralığına kısıtlanır.  $[a, b]$  kapalı aralığı,  $x_m$  düğüm noktalarını kullanarak  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$  şeklinde  $N$  adet birbirine eşit alt aralıklara bölünür.  $m = 1, 2, \dots, N$  için bu alt aralıkların uzunlukları  $h = \frac{b-a}{N} = (x_{m+1} - x_m)$  formundadır.  $a \leq x \leq b$  aralığında  $x_m$  düğüm noktaları ile  $\varphi_m(x)$  septik B-spline interpolasyon fonksiyonları

$$\varphi_m(x) = \frac{1}{h^7} \begin{cases} \alpha^7, & [x_{m-4}, x_{m-3}] \\ \alpha^7 - 8\beta^7, & [x_{m-3}, x_{m-2}] \\ \alpha^7 - 8\beta^7 + 28\gamma^7, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ \alpha^7 - 8\beta^7 + 28\gamma^7 - 56\eta^7, & [x_{m-1}, x_m] \\ \sigma^7 - 8\mu^7 + 28\kappa^7 - 56\lambda^7, & [x_m, x_{m+1}] \\ \sigma^7 - 8\mu^7 + 28\kappa^7, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ \sigma^7 - 8\mu^7, & [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ \sigma^7, & [x_{m+3}, x_{m+4}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (6.4)$$

şeklinde olup burada  $\alpha = (x - x_{m-4})$ ,  $\beta = (x - x_{m-3})$ ,  $\gamma = (x - x_{m-2})$ ,  $\eta = (x - x_{m-1})$ ,  $\sigma = (x_{m+4} - x)$ ,  $\mu = (x_{m+3} - x)$ ,  $\kappa = (x_{m+2} - x)$  ve  $\lambda = (x_{m+1} - x)$  dir.  $[a, b]$  aralığı üzerinde tanımlı fonksiyonlar için  $\{\varphi_{-3}(x), \varphi_{-2}(x), \dots, \varphi_{N+3}(x)\}$  kümesi bir baz oluşturmaktadır. Problemin tam çözümü olan  $u(x, t)$  fonksiyonuna yaklaşan  $u_N(x, t)$  nümerik çözümü

$$u_N(x, t) = \sum_{m=-3}^{N+3} \phi_m(x) \delta_m(t), \quad (6.5)$$

şeklinde verilir. Bu ifadede sınır şartları ile elde edilecek olan  $\delta_m(t)$  ler zamana bağlı parametrelerdir.  $0 \leq \omega \leq 1$  için  $h\omega = x - x_m$  şeklindeki lokal dönüşüm ile  $[x_m, x_{m+1}]$  aralığı  $[0, 1]$  kapalı aralığına dönüştürülür. Nitekim septik B-spline baz fonksiyonları  $[0, 1]$  aralığı üzerinde  $\omega$  cinsinden aşağıdaki şekilde tanımlanabilir:

$$\begin{aligned} \varphi_{m-3} &= 1 - 7\omega + 21\omega^2 - 35\omega^3 + 35\omega^4 - 21\omega^5 + 7\omega^6 - \omega^7, \\ \varphi_{m-2} &= 120 - 392\omega + 504\omega^2 - 280\omega^3 + 84\omega^5 - 42\omega^6 + 7\omega^7, \\ \varphi_{m-1} &= 1191 - 1715\omega + 315\omega^2 + 665\omega^3 - 315\omega^4 - 105\omega^5 + 105\omega^6 - 21\omega^7, \\ \varphi_m &= 2416 - 1680\omega + 560\omega^4 - 140\omega^6 + 35\omega^7, \\ \varphi_{m+1} &= 1191 + 1715\omega + 315\omega^2 - 665\omega^3 - 315\omega^4 + 105\omega^5 + 105\omega^6 - 35\omega^7, \\ \varphi_{m+2} &= 120 + 392\omega + 504\omega^2 + 280\omega^3 - 84\omega^5 - 42\omega^6 + 21\omega^7, \\ \varphi_{m+3} &= 1 + 7\omega + 21\omega^2 + 35\omega^3 + 35\omega^4 + 21\omega^5 + 7\omega^6 - \omega^7, \\ \varphi_{m+4} &= \omega^7. \end{aligned}$$

$\delta_{m-4}$ ,  $\delta_{m-3}$ ,  $\delta_{m-2}$ ,  $\delta_{m-1}$ ,  $\delta_m$ ,  $\delta_{m+1}$ ,  $\delta_{m+2}$  ve  $\delta_{m+3}$  eleman parametreleri ve  $\varphi_{m-3}$ ,  $\varphi_{m-2}$ ,  $\varphi_{m-1}$ ,  $\varphi_m$ ,  $\varphi_{m+1}$ ,  $\varphi_{m+2}$ ,  $\varphi_{m+3}$  ve  $\varphi_{m+4}$  yaklaşım fonksiyonları olacak şekilde,  $u(x, t)$  fonksiyonuna

$$u_N(x, t) = \sum_{m=-3}^{N+3} \varphi_m(x) \delta_m(t),$$

deneme fonksiyonu ile yaklaşılır.  $'$ ,  $''$ ,  $'''$ ,  $iv$ ,  $v$  ve  $vi$  simgeleri  $x$  e göre altıncı mertebeye kadar olan türevleri ifade edecek şekilde, (6.4) te verilen septik B-spline baz fonksiyonları ve (6.5) te tanımlanan sayısal fonksiyonundan yararlanarak  $u$ ,  $u'$ ,  $u''$ ,  $u'''$ ,  $u^{iv}$ ,  $u^v$  ve  $u^{vi}$  nun  $x$  e göre



türevlerinin düğüm noktalarındaki değerleri  $\delta_m$  zaman parametreleri cinsinden

$$\begin{aligned}
u_N(x_m, t) &= u_m = \delta_{m-3} + 120\delta_{m-2} + 1191\delta_{m-1} + 2416\delta_m + 1191\delta_{m+1} + 120\delta_{m+2} + \delta_{m+3}, \\
u'_m &= \frac{7}{h}(-\delta_{m-3} - 56\delta_{m-2} - 245\delta_{m-1} + 245\delta_{m+1} + 56\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \\
u''_m &= \frac{42}{h^2}(\delta_{m-3} + 24\delta_{m-2} + 15\delta_{m-1} - 80\delta_m + 15\delta_{m+1} + 24\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \\
u'''_m &= \frac{210}{h^3}(-\delta_{m-3} - 8\delta_{m-2} + 19\delta_{m-1} - 19\delta_{m+1} + 8\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \\
u^{iv}_m &= \frac{840}{h^4}(\delta_{m-3} - 9\delta_{m-1} + 16\delta_m - 9\delta_{m+1} + \delta_{m+3}), \\
u^v_m &= \frac{2520}{h^5}(-\delta_{m-3} + 4\delta_{m-2} - 5\delta_{m-1} + 5\delta_{m+1} - 4\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \\
u^{vi}_m &= \frac{5040}{h^6}(\delta_{m-3} - 6\delta_{m-2} + 15\delta_{m-1} - 20\delta_m + 15\delta_{m+1} - 6\delta_{m+2} + \delta_{m+3})
\end{aligned} \tag{6.6}$$

şeklinde ifade edilir.

### 6.1 Sawada-Kotera Denkleminin Kollokasyon Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Nümerik Çözümü

(6.1) ile verilen fKdV denkleminde  $\alpha = 45$ ,  $\beta = 15$  ve  $\gamma = 15$  değerleri alındığında Sawada-Kotera Denklemi,  $u = u(x, t)$  türevlenebilir fonksiyon,  $x$  konum ve  $t$  zamana göre türevi simgelemek üzere,

$$u_t + 45u^2u_x + 15u_xu_{xx} + 15uu_{xxx} + u_{xxxxx} = 0, \quad a \leq x \leq b, \quad 0 \leq t \leq 1, \tag{6.7}$$

formunda lineer olmayan kısmi türevli bir diferansiyel denklem olarak elde edilir [65]. (6.6) denklemindeki ifadeler, (6.7) ile verilen denklemde yerlerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
&\dot{\delta}_{m-3} + 120\dot{\delta}_{m-2} + 1191\dot{\delta}_{m-1} + 2416\dot{\delta}_m + 1191\dot{\delta}_{m+1} + 120\dot{\delta}_{m+2} + \dot{\delta}_{m+3} \\
&+ (45Z_{m1} + 15Z_{m2})\frac{7}{h}(-\delta_{m-3} - 56\delta_{m-2} - 245\delta_{m-1} + 245\delta_{m+1} + 56\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) \\
&+ 15Z_{m3}\frac{210}{h^3}(-\delta_{m-3} - 8\delta_{m-2} + 19\delta_{m-1} - 19\delta_{m+1} + 8\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) \\
&+ \frac{2520}{h^5}(-\delta_{m-3} + 4\delta_{m-2} - 5\delta_{m-1} + 5\delta_{m+1} - 4\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) = 0,
\end{aligned} \tag{6.8}$$

cebirsel denklem sistemi oluşturulur. Lineerleştirme tekniğini uygulayabilmek için, (6.7) denkleminde lineer olmayan  $u^2u_x$ ,  $u_xu_{xx}$ , ve  $uu_{xxx}$  terimlerinde sırasıyla  $u^2$ ,  $u_{xx}$  ve  $u$  terimleri

$$\begin{aligned}
Z_{m1} &= u^2 = (\delta_{m-3} + 120\delta_{m-2} + 1191\delta_{m-1} + 2416\delta_m + 1191\delta_{m+1} + 120\delta_{m+2} + \delta_{m+3})^2, \\
Z_{m2} &= u_{xx} = \frac{42}{h^2}(\delta_{m-3} + 24\delta_{m-2} + 15\delta_{m-1} - 80\delta_m + 15\delta_{m+1} + 24\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \\
Z_{m3} &= u = \delta_{m-3} + 120\delta_{m-2} + 1191\delta_{m-1} + 2416\delta_m + 1191\delta_{m+1} + 120\delta_{m+2} + \delta_{m+3},
\end{aligned}$$

şeklinde lokal sabitler olarak kabul edilmiştir. (6.8) eşitliğinde yer alan  $\delta_m$  ve  $\dot{\delta}_m$  eleman parametreleri yerine sırasıyla (3.9) eşitliği ile verilen Crank-Nicolson formülasyonu ve ileri

sonlu fark yaklaşımı uygulandığında,  $n$  ve  $n + 1$  şeklinde ifade edilen iki zaman seviyesi arasındaki ilişki  $\delta^n$  ve  $\delta^{n+1}$  cinsinden

$$\begin{aligned} & \gamma_1 \delta_{m-3}^{n+1} + \gamma_2 \delta_{m-2}^{n+1} + \gamma_3 \delta_{m-1}^{n+1} + \gamma_4 \delta_m^{n+1} + \gamma_5 \delta_{m+1}^{n+1} + \gamma_6 \delta_{m+2}^{n+1} + \gamma_7 \delta_{m+3}^{n+1} \\ & = \gamma_7 \delta_{m-3}^n + \gamma_6 \delta_{m-2}^n + \gamma_5 \delta_{m-1}^n + \gamma_4 \delta_m^n + \gamma_3 \delta_{m+1}^n + \gamma_2 \delta_{m+2}^n + \gamma_1 \delta_{m+3}^n, \end{aligned} \quad (6.9)$$

olarak yazılabilir. Burada

$$\begin{aligned} E &= \frac{a}{2} \Delta t, \\ T &= \frac{b}{2} \Delta t, \\ M &= \frac{2520}{2h^5} \Delta t, \\ a &= [45Z_{m1} + 15Z_{m2}], \\ b &= \left[ \frac{3150}{h^3} Z_{m3} \right] \end{aligned} \quad (6.10)$$

ve  $\Delta t$  zaman adımını gösterecek şekilde,  $\delta$  parametrelerinin çarpanları

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= [1 - E - T - M], \\ \gamma_2 &= [120 - 56E - 8T + 4M], \\ \gamma_3 &= [1191 - 245E + 19T - 5M], \\ \gamma_4 &= [2416], \\ \gamma_5 &= [1191 + 245E - 19T + 5M], \\ \gamma_6 &= [120 + 56E + 8T - 4M], \\ \gamma_7 &= [1 + E + T + M], \end{aligned} \quad (6.11)$$

şeklindedir. (6.9) denklem sistemi,  $\delta_{-3}, \delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_{N+1}, \delta_{N+2}$  ve  $\delta_{N+3}$  olmak üzere  $(N + 7)$  adet bilinmeyen parametre ve  $(N + 1)$  tane lineer denklem içermektedir. Bu denklem sisteminin çözümü için (6.2) ile verilen sınır şartlarını kullanarak elde edilebilecek altı adet ek koşula daha ihtiyaç olduğu görülür. Ek koşullar yardımı ile (6.9) denklem sistemindeki  $\delta_{-3}, \delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_{N+1}, \delta_{N+2}$  ve  $\delta_{N+3}$  parametreleri yok edilir ve  $d^n = (\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_N)^T$  şeklinde  $(N + 1)$  adet bilinmeyen parametreden oluşan

$$Ad^{n+1} = Bd^n \quad (6.12)$$

$(N + 1) \times (N + 1)$  tipinde diagonal matris sistemi bulunur. Bu sistem ise Thomas algoritması kullanılarak çözülür. Çözüm işlemi yapılırken lineer olmama etkisini en aza indirmek için her bir zaman adımında (3.14) şeklinde bir iç iterasyon işlemi uygulanır. (6.9) denklem sisteminde iterasyon işlemine başlayabilmek için, ilk olarak başlangıç ve sınır şartları yardımıyla  $d^0 = (\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_N)^0$  ile gösterilen başlangıç vektörü hesaplanır. Bu yüzden  $t = 0$  zamanında



sayısal şemanın lineerleştirilmiş formundan belirlenir. (6.14) eşitliğinde tanımlanan Fourier modu, (6.9) lineer denklem sisteminde yazıldığına

$$\begin{aligned} \xi^{n+1} (\gamma_1 e^{i(m-3)\tau\Delta x} + \gamma_2 e^{i(m-2)\tau\Delta x} + \gamma_3 e^{i(m-1)\tau\Delta x} + \gamma_4 e^{im\tau\Delta x} \\ + \gamma_5 e^{i(m+1)\tau\Delta x} + \gamma_6 e^{i(m+2)\tau\Delta x} + \gamma_7 e^{i(m+3)\tau\Delta x}) = \\ \xi^n (\gamma_7 e^{i(m-3)\tau\Delta x} + \gamma_6 e^{i(m-2)\tau\Delta x} + \gamma_5 e^{i(m-1)\tau\Delta x} + \gamma_4 e^{im\tau\Delta x} \\ + \gamma_3 e^{i(m+1)\tau\Delta x} + \gamma_2 e^{i(m+2)\tau\Delta x} + \gamma_1 e^{i(m+3)\tau\Delta x}). \end{aligned} \quad (6.15)$$

eşitliği ortaya çıkar. (6.15) eşitliğine

$$e^{i\tau\Delta x} = \cos(\tau\Delta x) + i \sin(\tau\Delta x), \quad (6.16)$$

formundaki Euler formülü uygulanıp gereken işlemler yapılırsa,  $\xi$  büyüme faktörü

$$\xi = \frac{\rho_1 - i\rho_2}{\rho_1 + i\rho_2}$$

olarak elde edilir. Burada

$$\rho_1 = 2 \cos(3\tau\Delta x) + 240 \cos(2\tau\Delta x) + 2382 \cos(\tau\Delta x) + 2416,$$

$$\rho_2 = (2M + 2T + 2E) \sin(3\tau\Delta x)$$

olup,  $|\xi| = 1$  koşulu sağlanır. Böylece lineerleştirilmiş sonlu eleman şeması şartsız kararlı olarak bulunur.

## 6.1.2 Nümerik Örnekler ve Sonuçlar

### 6.1.2.1 Tek Solitary Dalga Hareketi

Bu kısımda, belirlenen bölünme noktaları üzerinde tek solitary dalga problemi için SK denkleminin nümerik çözümleri elde edilmiştir. Uygulanan sayısal metodun doğruluğu ve etkinliği, seçilen zaman adımlarında tam ve yaklaşık çözüm arasındaki farkın hesaplanmasını sağlayan

$$L_2 = \|u^{tam} - u_N\|_2 \simeq \sqrt{h \sum_{j=1}^N |u_j^{tam} - (u_N)_j|^2}, \quad (6.17)$$

ortalama hata normu ve

$$L_\infty = \|u^{tam} - u_N\|_\infty \simeq \max_j |u_j^{tam} - (u_N)_j|, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (6.18)$$

maksimum hata normu yardımıyla incelenmiştir.  $x \rightarrow \pm\infty$  iken  $u \rightarrow 0$  sınır şartı ve  $t = 0$  için

$$u(x, 0) = 2k^2 \operatorname{sech}^2[k(x - x_0)], \quad (6.19)$$

başlangıç koşulu kullanılarak SK denkleminin tek solitary dalga çözümleri araştırılmıştır.  $k$  ve  $x_0$  keyfi reel değerler olacak şekilde, SK denkleminin analitik çözümü

$$u(x,t) = 2k^2 (-1 + \operatorname{sech}^2 [k(x - 16k^2t - x_0)]), \quad (6.20)$$

biçimindedir. SK denkleminin tek solitary dalga çözümü için,  $x \in [-15, 15]$  hesaplama aralığı üzerinde  $x_0 = 0$  ve  $k = 0.01$  parametreleri ile sayısal algoritma  $t = 1$  zamanına kadar çalıştırılır. Solitary dalganın  $x = 0$  da ve  $t = 0$  ın ilk anında  $A = 0.0002$  genliğine sahip olduğu kaydedilmiştir. Simülasyon hesaplamalarında  $\Delta t = 0.0004; 0.0002; 0.0001$  ile  $0.00005$  ve  $h = 0.5; 0.05; 0.025; 0.075$  ve  $1$  değerleri kullanılmıştır. Tablo 6.1, Tablo 6.2, Tablo 6.3 ve Tablo 6.4 te hata normlarının değerleri sunulmuştur. Böylece bölünme noktalarının sayısal yöntem üzerindeki etkilerini daha kolay görülebilir. Hesaplanan  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata norm değerleri yeterince küçük bulunmuştur.  $\Delta t = 0.0004$  ve  $h = 0.05$  parametreleri ile hesaplanan minimum  $L_\infty$  hata normu  $1.952867 \times 10^{-4}$  olarak bulunmuştur. Bu hataların zaman ilerledikçe hemen hemen değişmediği gözlenmektedir. Ayrıca verilen tablolardan hata normlarının değerlerine bakılarak analitik ve sayısal çözümlerin uyum içinde olduğu ve yöntemin etkili olduğu gözlemlenmiştir. Şekil 6.1 ve Şekil 6.3 incelendiğinde, çan şeklindeki tek solitary dalga çözümlerinin iki ve üç boyutlu hallerinin  $t = 0$  anından  $t = 1$  anına kadar üretildiği açıkça görülebilir. Ek olarak, tek solitary dalganın hareketi için kontur çizgisi ise Şekil 6.4 de görülebilir. Şekillerden, incelenen şemanın tek bir dalganın yayılma hareketini gerçekleştirdiği, genlik ve şeklin korunduğu görülmektedir. Şekil, dalganın yavaş hareket ederken ve şeklini değiştirmeden davranışını ortaya koymaktadır. Öte yandan, Şekil 6.5 te  $h$  ve  $\Delta t$  nin aldığı çeşitli değerler için  $t = 1$  zamanında sayısal hata dağılımı çizilmiştir.

Tablo 6.1  $k = 0.01$ ,  $\Delta t = 0.0004$  ve  $h$  nin farklı değerleri için hesaplanan hata normu değerleri

$\Delta t = 0.0004, h = 0.5$		$\Delta t = 0.0004, h = 0.05$		
$t$	$L_2$	$L_\infty$	$L_2$	$L_\infty$
0.1	.0003897280	.0001963318	.0003058283	.0001952867
0.2	.0004199834	.0001993970	.0003481541	.0002018881
0.3	.0004200863	.0002034935	.0003734871	.0002236170
0.4	.0004238960	.0001965485	.0003842107	.0002127314
0.5	.0004296385	.0002019456	.0004137712	.0002246730
0.6	.0004589187	.0001964568	.0003786667	.0002193855
0.7	.0004443475	.0001964073	.0004130480	.0002419442
0.8	.0004361081	.0001963227	.0004328883	.0002287259
0.9	.0004410263	.0002024476	.0004571366	.0002882061
1.0	.0004630430	.0002026032	.0004334676	.0002940639
$\Delta t = 0.0004, h = 1.0$		$\Delta t = 0.0004, h = 0.025$		
$t$	$L_2$	$L_\infty$	$L_2$	$L_\infty$
0.1	.0004120889	.0001964902	.0003123659	.0002732523
0.2	.0004434713	.0001967970	.0003556654	.0002661242
0.3	.0004530678	.0001967384	.0003793715	.0002635280
0.4	.0004501468	.0001967637	.0003802906	.0002501869
0.5	.0004900659	.0001966680	.0004185681	.0002785621
0.6	.0004911857	.0001965993	.0003786123	.0002458203
0.7	.0004806675	.0001966740	.0003949258	.0002282299
0.8	.0004762369	.0001967189	.0004184658	.0002254764
0.9	.0004903186	.0002026213	.0004358981	.0002388241
1.0	.0005285952	.0001993651	.0004553100	.0003073716

Tablo 6.2  $k = 0.01$ ,  $\Delta t = 0.0002$  ve  $h$  nin farklı değerleri için hesaplanan hata normu değerleri

		$\Delta t = 0.0002, h = 0.5$		$\Delta t = 0.0002, h = 0.05$	
$t$	$L_2$	$L_\infty$	$L_2$	$L_\infty$	
0.1	.0003921206	.0001963918	.0003213598	.0002028188	
0.2	.0004211019	.0001996477	.0003583082	.0002257130	
0.3	.0004212967	.0002009204	.0003856881	.0002357532	
0.4	.0004243411	.0001962768	.0003859955	.0002016646	
0.5	.0004295068	.0002007955	.0004223828	.0002661426	
0.6	.0004595302	.0001963019	.0003953679	.0002402624	
0.7	.0004453736	.0001961864	.0004191496	.0002144172	
0.8	.0004375435	.0001962753	.0004459888	.0002208510	
0.9	.0004412608	.0002029458	.0004589295	.0002843700	
1.0	.0004641926	.0002025728	.0004696933	.0002783798	
		$\Delta t = 0.0002, h = 1.0$		$\Delta t = 0.0002, h = 0.025$	
$t$	$L_2$	$L_\infty$	$L_2$	$L_\infty$	
0.1	.0004113887	.0001965496	.0003245690	.0002515219	
0.2	.0004433501	.0001967244	.0003561999	.0002323548	
0.3	.0004529720	.0001966955	.0003841843	.0002491443	
0.4	.0004501177	.0001967117	.0003829335	.0002250044	
0.5	.0004898604	.0001966571	.0004250210	.0002743170	
0.6	.0004911122	.0001966236	.0003715594	.0002131929	
0.7	.0004806774	.0001966633	.0004020995	.0002155670	
0.8	.0004762010	.0001966879	.0004296452	.0002368535	
0.9	.0004904130	.0002030155	.0004523098	.0002816025	
1.0	.0005287098	.0001996320	.0004358698	.0002590057	

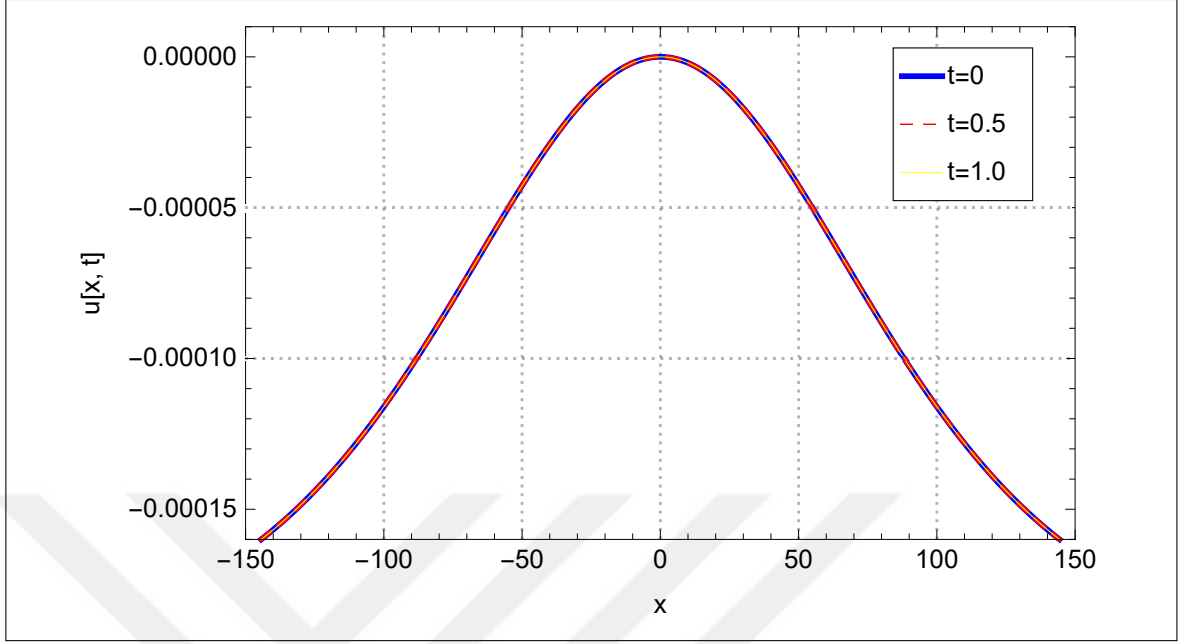
Tablo 6.3  $k = 0.01$ ,  $\Delta t = 0.0001$  ve  $h$  nin farklı değerleri için hesaplanan hata normu değerleri

		$\Delta t = 0.0001, h = 0.5$		$\Delta t = 0.0001, h = 0.05$	
$t$	$L_2$	$L_\infty$	$L_2$	$L_\infty$	
0.1	.0003926211	.0001962774	.0003265343	.0002125448	
0.2	.0004198083	.0001994069	.0003664168	.0001966571	
0.3	.0004209236	.0002021619	.0003916621	.0002134395	
0.4	.0004245712	.0001961008	.0004392917	.0002388329	
0.5	.0004308756	.0002006042	.0004873988	.0002657225	
0.6	.0004619205	.0001961641	.0004940887	.0003446806	
0.7	.0004456845	.0001961078	.0005602560	.0006052958	
0.8	.0004389422	.0001962864	.0007508712	.0014398061	
0.9	.0004427242	.0002029987	.0013047290	.0038713052	
1.0	.0004668532	.0002038084	.0032477767	.0112212137	
		$\Delta t = 0.0001, h = 1.0$		$\Delta t = 0.0001, h = 0.025$	
$t$	$L_2$	$L_\infty$	$L_2$	$L_\infty$	
0.1	.0004110276	.0001965810	.0003213651	.0002136187	
0.2	.0004432869	.0001966881	.0003559211	.0002292736	
0.3	.0004529218	.0001966742	.0003788928	.0002324356	
0.4	.0004501060	.0001966855	.0003838614	.0002150487	
0.5	.0004897548	.0001966519	.0004204813	.0002661475	
0.6	.0004910746	.0001966360	.0003808861	.0002168998	
0.7	.0004806818	.0001966581	.0004124385	.0002641821	
0.8	.0004761789	.0001966725	.0004350348	.0002400273	
0.9	.0004904130	.0002032179	.0004353742	.0002739368	
1.0	.0005287739	.0001997693	.0004422661	.0002786564	

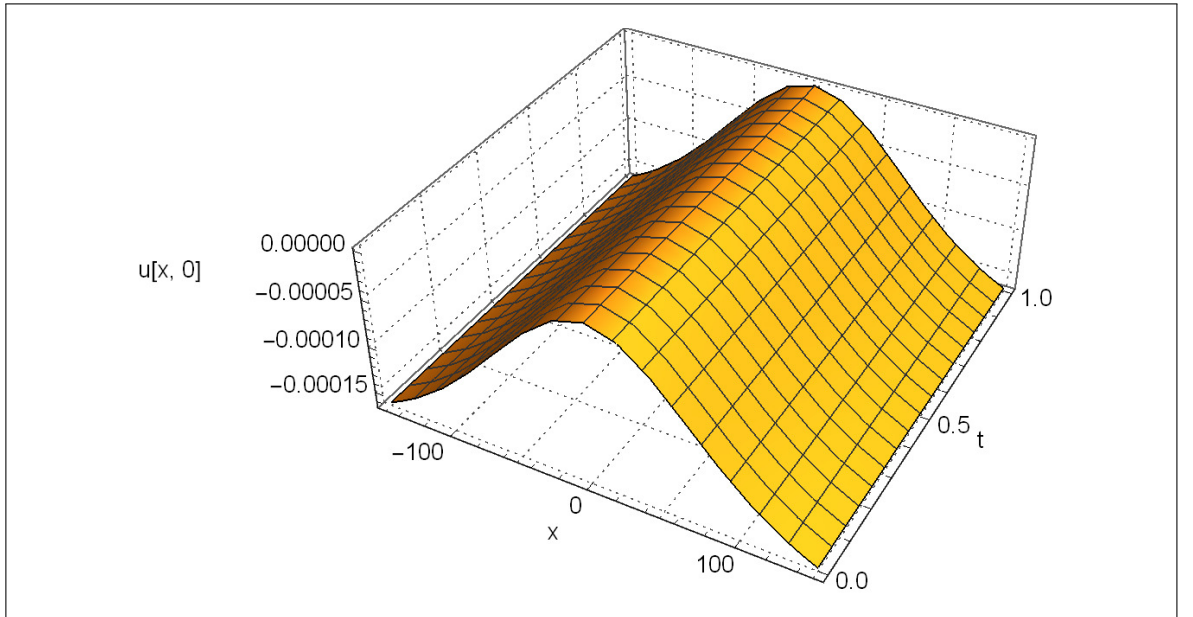


Tablo 6.4  $k = 0.01$ ,  $\Delta t = 0.0002$  ve  $h$ 'nin farklı değerleri için hesaplanan hata normu değerleri

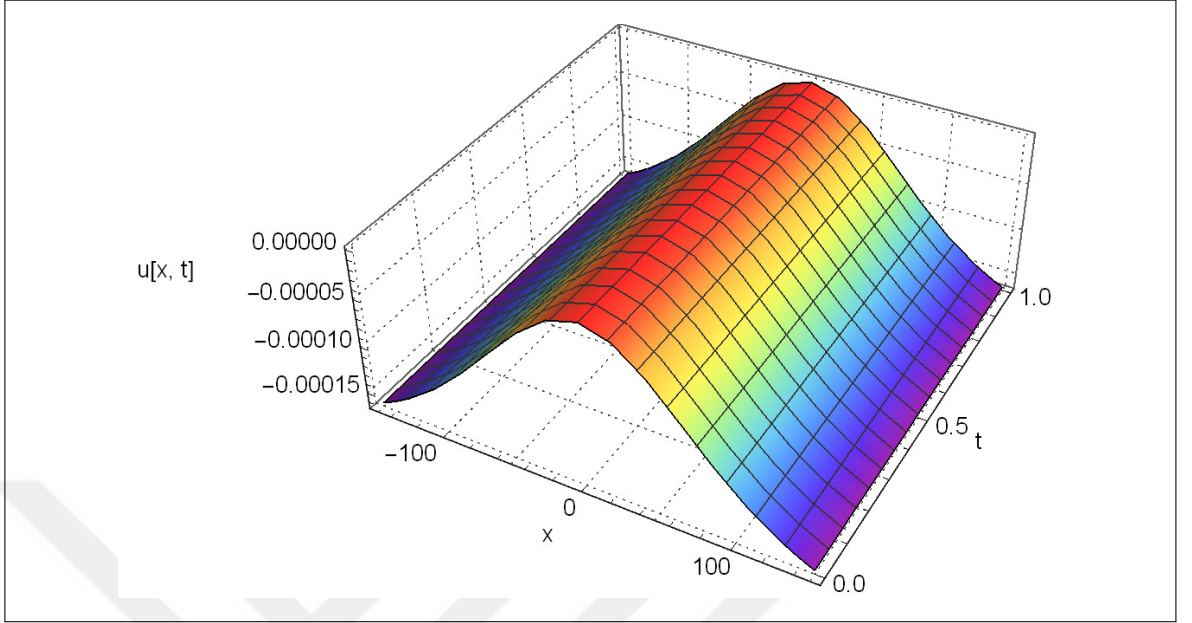
		$\Delta t = 0.00005, h = 0.5$		$\Delta t = 0.00005, h = 0.75$	
$t$	$L_2$	$L_\infty$	$L_2$	$L_\infty$	
0.1	.0003924963	.0001961487	.0004164312	.0001964215	
0.2	.0004222374	.0001989456	.0004445533	.0002022589	
0.3	.0004225752	.0002040583	.0004465732	.0002022391	
0.4	.0004259622	.0001961158	.0004412326	.0001964122	
0.5	.0004310519	.0002023106	.0004645575	.0001994408	
0.6	.0004631192	.0001966913	.0004856543	.0001964041	
0.7	.0004471402	.0001961600	.0004591653	.0001963933	
0.8	.0004402354	.0001963438	.0004552334	.0001964366	
0.9	.0004446504	.0002037541	.0004694588	.0002000873	
1.0	.0004691530	.0002048498	.0005000673	.0001979467	
		$\Delta t = 0.00005, h = 1.0$		$\Delta t = 0.00005, h = 0.025$	
$t$	$L_2$	$L_\infty$	$L_2$	$L_\infty$	
0.1	.0004108442	.0001965972	.0003156026	.0002032268	
0.2	.0004432545	.0001966701	.0003580826	.0002389803	
0.3	.0004528961	.0001966636	.0003764621	.0002125420	
0.4	.0004501009	.0001966724	.0003928999	.0002271285	
0.5	.0004897011	.0001966494	.0004219305	.0002299891	
0.6	.0004910557	.0001966423	.0003858070	.0002335514	
0.7	.0004806838	.0001966555	.0004079689	.0002294114	
0.8	.0004761668	.0001966648	.0004459103	.0002457748	
0.9	.0004904885	.0002033204	.0004555991	.0002644993	
1.0	.0005288076	.0001998389	.0004459714	.0002361445	



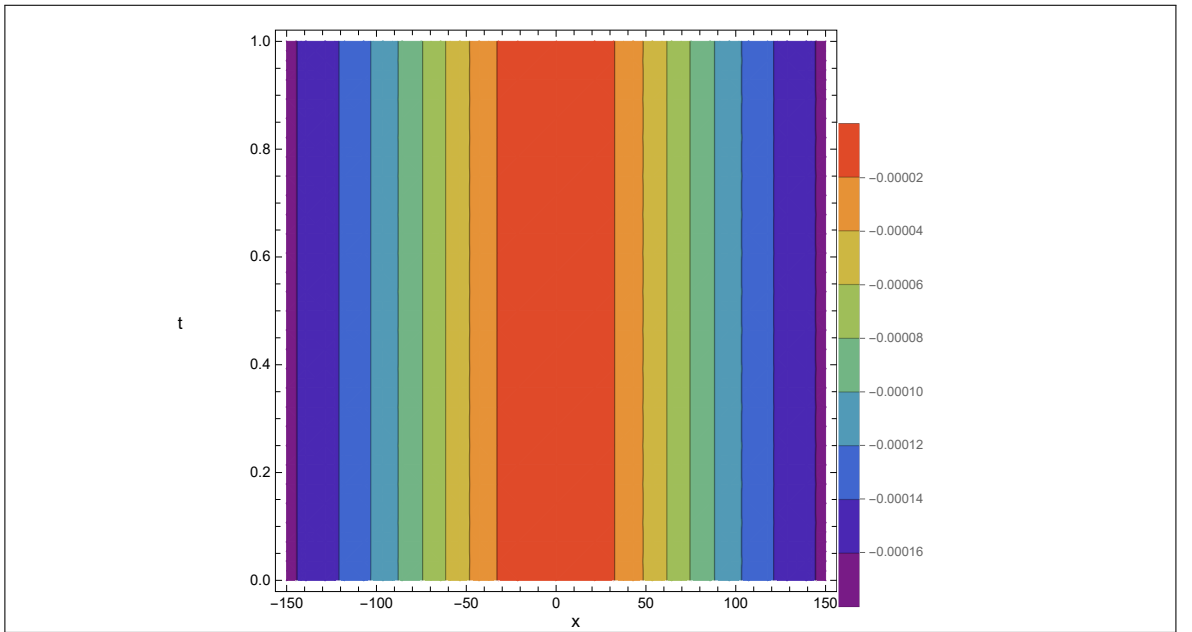
Şekil 6.1 SK denkleminin  $t = 0, 0.5, 1$  de tek solitary dalga hareketi



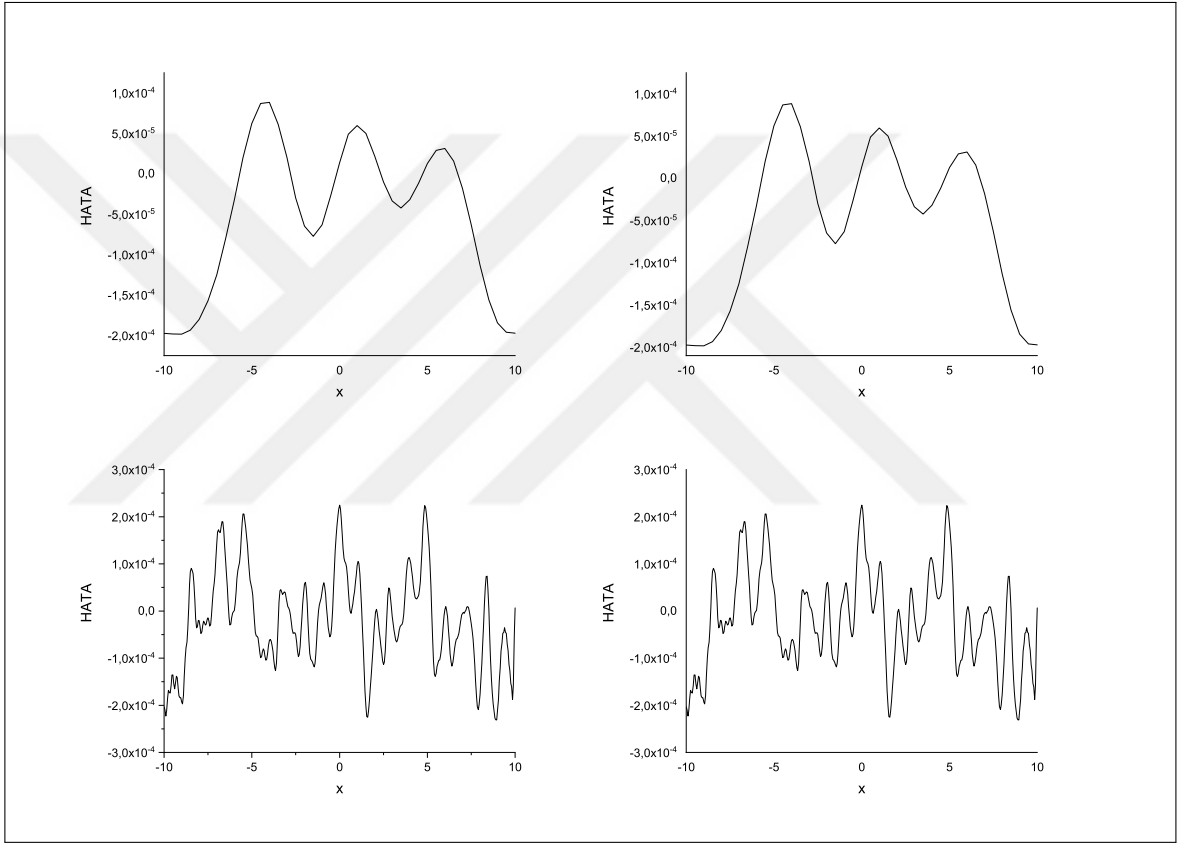
Şekil 6.2 SK denkleminin  $u(x,0)$  başlangıç şartı ile  $\Delta t = 0.0004$  ve  $h = 0.5$  için tek solitary dalga hareketi



Şekil 6.3 SK denkleminin  $\Delta t = 0.0004$  ve  $h = 0.5$  için tek solitary dalga hareketi



Şekil 6.4 Tek solitary dalga hareketinin kontur grafiği



Şekil 6.5 Tek solitary dalganın a)  $\Delta t = 0.0004$  ve  $h = 0.5$ , b)  $\Delta t = 0.0002$  ve  $h = 0.5$ , c)  $\Delta t = 0.0001$  ve  $h = 0.025$ , d)  $\Delta t = 0.00005$  ve  $h = 0.025$  değerleri için  $t = 1$  de hata dağılımı

## 6.2 Caudrey-Dodd-Gibbon Denkleminin Septik B-Spline Kollokasyon Yöntemi İle Nümerik Çözümü

(6.1) ile belirtilen denklemde  $\alpha = 180$ ,  $\beta = 30$ , ve  $\gamma = 30$  değerleri alındığında Caudrey-Dodd-Gibbon (CDG) Denklemi,  $u = u(x, t)$  türevlenebilir fonksiyon,  $x$  konum ve  $t$  zaman değişkenini simgelemek üzere,

$$u_t + 180u^2u_x + 30u_xu_{xx} + 30uu_{xxx} + u_{xxxxx} = 0, \quad (6.21)$$

formunda lineer olmayan kısmi türevli bir diferansiyel denklem olarak elde edilir [66]. (6.6) denklemindeki ifadeler, (6.21) ile verilen denklemde yerlerine yazıldığında

$$\begin{aligned} & \dot{\delta}_{m-3} + 120\dot{\delta}_{m-2} + 1191\dot{\delta}_{m-1} + 2416\dot{\delta}_m + 1191\dot{\delta}_{m+1} + 120\dot{\delta}_{m+2} + \dot{\delta}_{m+3} \\ & + (180Z_{m1} + 30Z_{m2})\frac{7}{h}(-\delta_{m-3} - 56\delta_{m-2} - 245\delta_{m-1} + 245\delta_{m+1} + 56\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) \\ & + 30Z_{m3}\frac{210}{h^3}(-\delta_{m-3} - 8\delta_{m-2} + 19\delta_{m-1} - 19\delta_{m+1} + 8\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) \\ & + \frac{2520}{h^5}(-\delta_{m-3} + 4\delta_{m-2} - 5\delta_{m-1} + 5\delta_{m+1} - 4\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) = 0, \end{aligned} \quad (6.22)$$

cebirsel denklem sistemi bulunur. Lineerleştirme tekniğini uygulayabilmek için, (6.21) denklemine lineer olmayan  $u^2u_x$ ,  $u_xu_{xx}$ , ve  $uu_{xxx}$  terimlerinde sırasıyla  $u^2$ ,  $u_{xx}$  ve  $u$  terimleri

$$\begin{aligned} Z_{m1} &= u^2, \\ Z_{m2} &= u_{xx}, \\ Z_{m3} &= u, \end{aligned} \quad (6.23)$$

şeklinde lokal sabitler olarak kabul edilmiştir. (6.22) eşitliğinde yer alan  $\delta_m$  ve  $\dot{\delta}_m$  eleman parametreleri yerine sırasıyla (3.9) da verilen Crank-Nicolson formülasyonu ve ileri sonlu fark yaklaşımı uygulandığında,  $n$  ve  $n+1$  şeklinde ifade edilen iki zaman seviyesi arasındaki ilişki  $\delta^n$  ve  $\delta^{n+1}$  parametreleri cinsinden

$$\begin{aligned} & \gamma_1\delta_{m-3}^{n+1} + \gamma_2\delta_{m-2}^{n+1} + \gamma_3\delta_{m-1}^{n+1} + \gamma_4\delta_m^{n+1} + \gamma_5\delta_{m+1}^{n+1} + \gamma_6\delta_{m+2}^{n+1} + \gamma_7\delta_{m+3}^{n+1} \\ & = \gamma_7\delta_{m-3}^n + \gamma_6\delta_{m-2}^n + \gamma_5\delta_{m-1}^n + \gamma_4\delta_m^n + \gamma_3\delta_{m+1}^n + \gamma_2\delta_{m+2}^n + \gamma_1\delta_{m+3}^n, \end{aligned} \quad (6.24)$$

olarak yazılabilir. Burada

$$\begin{aligned} E &= \frac{a}{2}\Delta t, \\ T &= \frac{b}{2}\Delta t, \\ M &= \frac{2520}{2h^5}\Delta t; \\ a &= [180Z_{m1} + 30Z_{m2}], \\ b &= [\frac{6300}{h^3}Z_{m3}], \end{aligned} \quad (6.25)$$

ve  $\Delta t$  ifadeleri zaman adımlarını ifade edecek şekilde,  $\delta$  terimlerinin katsayıları

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= [1 - E - T - M], \\
\gamma_2 &= [120 - 56E - 8T + 4M], \\
\gamma_3 &= [1191 - 245E + 19T - 5M], \\
\gamma_4 &= [2416], \\
\gamma_5 &= [1191 + 245E - 19T + 5M], \\
\gamma_6 &= [120 + 56E + 8T - 4M], \\
\gamma_7 &= [1 + E + T + M],
\end{aligned} \tag{6.26}$$

şeklindedir. (6.24) denklem sistemi,  $\delta_{-3}, \delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_{N+1}, \delta_{N+2}$  ve  $\delta_{N+3}$  olmak üzere  $(N + 7)$  adet bilinmeyen parametre ve  $(N + 1)$  tane lineer denklem içermektedir. Bu denklem sisteminin çözümü için (6.2) ile verilen sınır şartlarını kullanarak elde edilebilecek altı adet ek koşullar yardımı ile (6.24) denklem sistemindeki  $\delta_{-3}, \delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_{N+1}, \delta_{N+2}$  ve  $\delta_{N+3}$  parametreleri yok edilir ve  $d^n = (\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_N)^T$  şeklinde  $(N + 1)$  adet bilinmeyen parametreden oluşan

$$Ad^{n+1} = Bd^n, \tag{6.27}$$

$(N + 1) \times (N + 1)$  tipinde diagonal matris sistemi bulunur. Bu sistem ise Thomas algoritması kullanılarak çözülür. Çözüm işlemi yapılırken (3.14) teki iç iterasyon işlemi uygulanır. (6.24) denklem sisteminde iterasyon işlemine başlayabilmek için, ilk olarak başlangıç ve sınır şartları yardımıyla  $d^0 = (\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_N)^0$  ile gösterilen başlangıç vektörü hesaplanır. Bu yüzden  $t = 0$  zamanında  $[a, b]$  aralığındaki

$$u_N(x, 0) = \sum_{m=-3}^{N+3} \varphi_m(x) \delta_m^0,$$

yaklaşımı ile

$$\begin{aligned}
u_N(x, 0) &= u(x_m, 0); & m &= 0, 1, 2, \dots, N \\
(u_N)_x(a, 0) &= 0, & (u_N)_x(b, 0) &= 0, \\
(u_N)_{xx}(a, 0) &= 0, & (u_N)_{xx}(b, 0) &= 0, \\
(u_N)_{xxx}(a, 0) &= 0, & (u_N)_{xxx}(b, 0) &= 0.
\end{aligned}$$

şartları kullanılırsa,

$$Wd^0 = b,$$



olup,  $|\xi| = 1$  koşulu sağlanır. Böylece lineerleştirilmiş sonlu eleman şeması şartsız kararlı olarak bulunur.

## 6.2.2 Nümerik Örnekler ve Sonuçlar

### 6.2.2.1 Tek Solitary Dalga Hareketi

Bu kısımda, belirlenen bölünme noktaları üzerinde tek solitary dalga problemi için CDG denkleminin nümerik çözümleri elde edilmiştir. Uygulanan sayısal metodun doğruluğu ve etkinliği, seçilen zaman adımlarında tam ve yaklaşık çözüm arasındaki farkın hesaplanmasını sağlayan (6.17) ve (6.18) eşitliğinde verilen  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları yardımıyla araştırılmıştır.

$x \rightarrow \pm\infty$  iken  $u \rightarrow 0$  sınır şartı ve  $t = 0$  için

$$u(x, 0) = f(x) = \frac{k^2 \exp(kx)}{(1 + \exp(kx))^2}, \quad (6.32)$$

başlangıç koşulu ile birlikte CDG denkleminin solitary dalga çözümleri hesaplanmıştır.  $k$  ve  $x_0$  reel değerler olmak üzere, CDG denkleminin analitik çözümü

$$u(x, t) = \frac{k^2 \exp(k(x - k^4 t))}{(1 + \exp(k(x - k^4 t)))^2}, \quad (6.33)$$

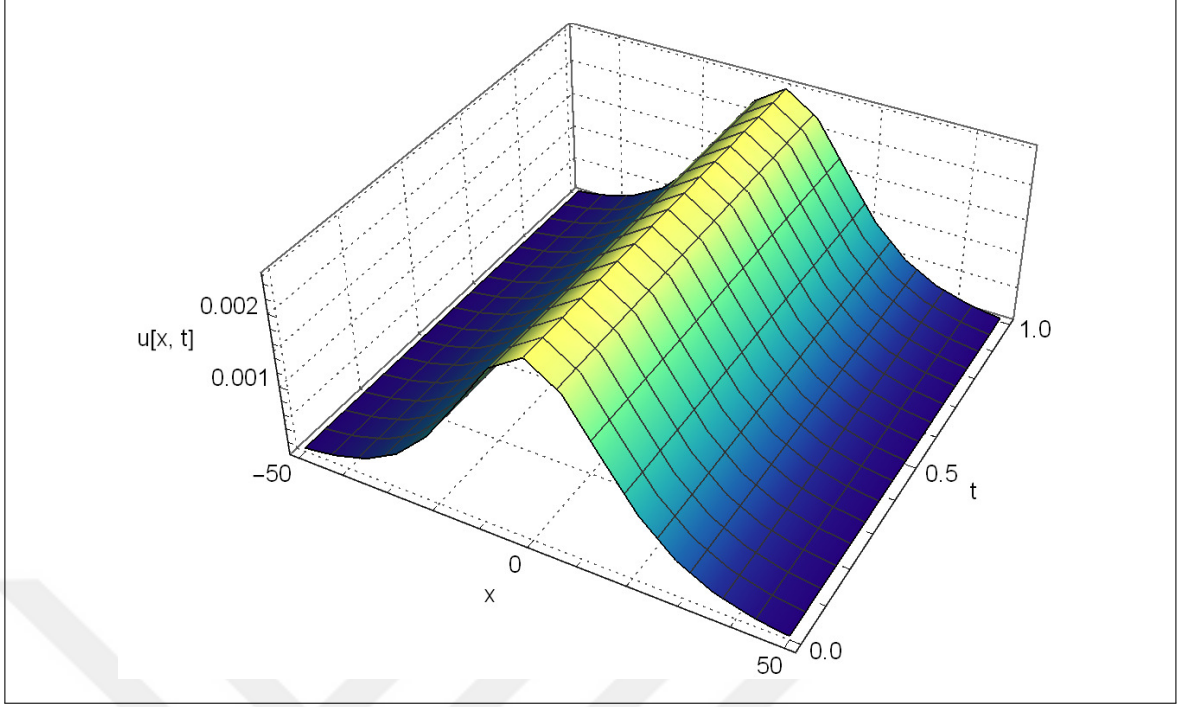
şeklindedir.

Sayısal şemanın geçerliliğini göstermek için, algoritma  $x \in [-15, 15]$  hesaplama aralığında ve  $t = 1$  zamanına kadar çalıştırılır. Solitary dalganın  $x = 0$  konumunda ve  $t = 0$  ın ilk anında  $A = 0.0001$  genliğine sahip olduğu kaydedilmiştir. Simülasyon hesaplamalarında  $h = 0.5$  ve  $0.05$  ile  $\Delta t = 0.0004$  ve  $0.0001$  değerleri kullanılmıştır. Tablo 6.5 te, farklı zaman seviyeleri ve farklı adım boyutları için  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normu değerleri listelenmiştir.  $\Delta t = 0.0001$  ve  $h = 0.05$  parametreleri ile hesaplanan minimum  $L_\infty$  hata normunun  $2.4892 \times 10^{-5}$  olarak bulunmuştur. Bu hataların zaman ilerledikçe pek değişmediği gözlenmektedir. Ayrıca tablolardan hata normlarının değerlerine bakılarak analitik ve sayısal çözümlerin iyi bir uyum içinde olduğu ve yöntemin verimli olduğu görülmektedir. Şekil 6.6 incelendiğinde, çan şeklindeki solitary dalga çözümlerinin  $t = 0$  anından  $t = 1$  anına kadar üretildiği açıkça görülebilir. Ek olarak, tek solitary dalganın hareketi için kontur çizgisi Şekil 6.7 da görülebilir. Şekillerden, incelenen şemanın tek bir dalganın yayılma hareketini gerçekleştirdiği, genlik ve şeklin korunduğu görülmektedir. Şekil, dalganın yavaş hareket ederken ve şeklini değiştirmeden davranışını ortaya koymaktadır. Öte yandan, Şekil 6.8 de  $h$  ve  $\Delta t$  ye verilen çeşitli değerler için  $t = 1$  zamanında sayısal hata dağılımı çizilmiştir.

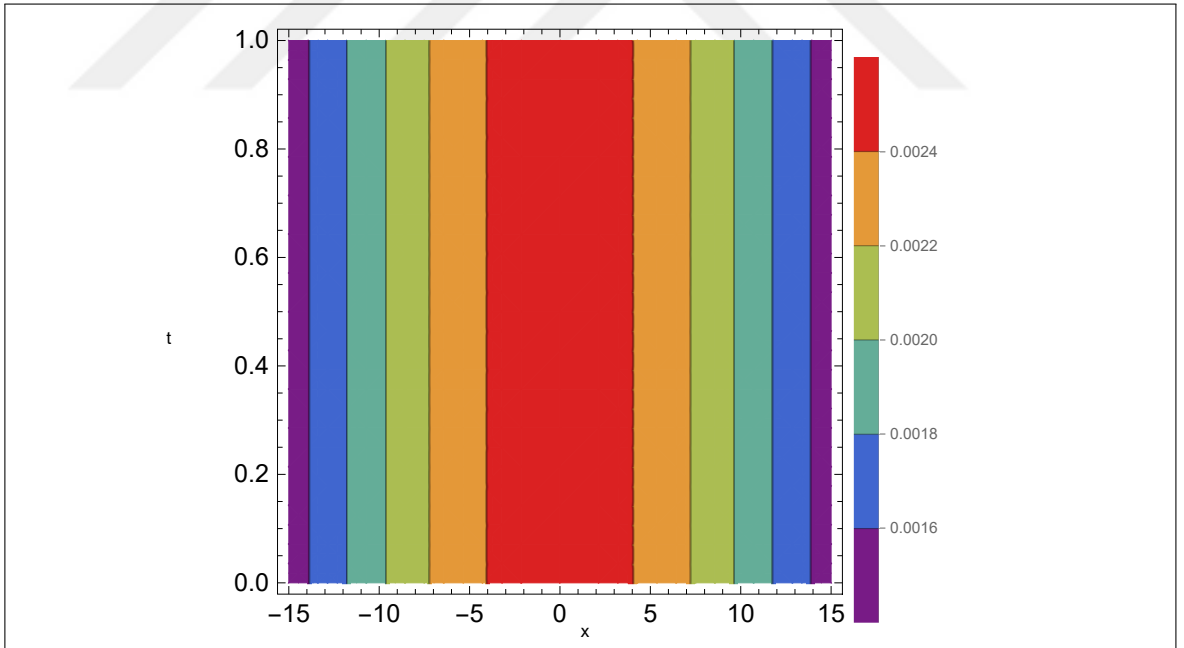


Tablo 6.5  $k = 0.01$ ,  $\Delta t = 0.0004$  ve  $h$  nin farklı değerleri için hesaplanan hata normu değerleri

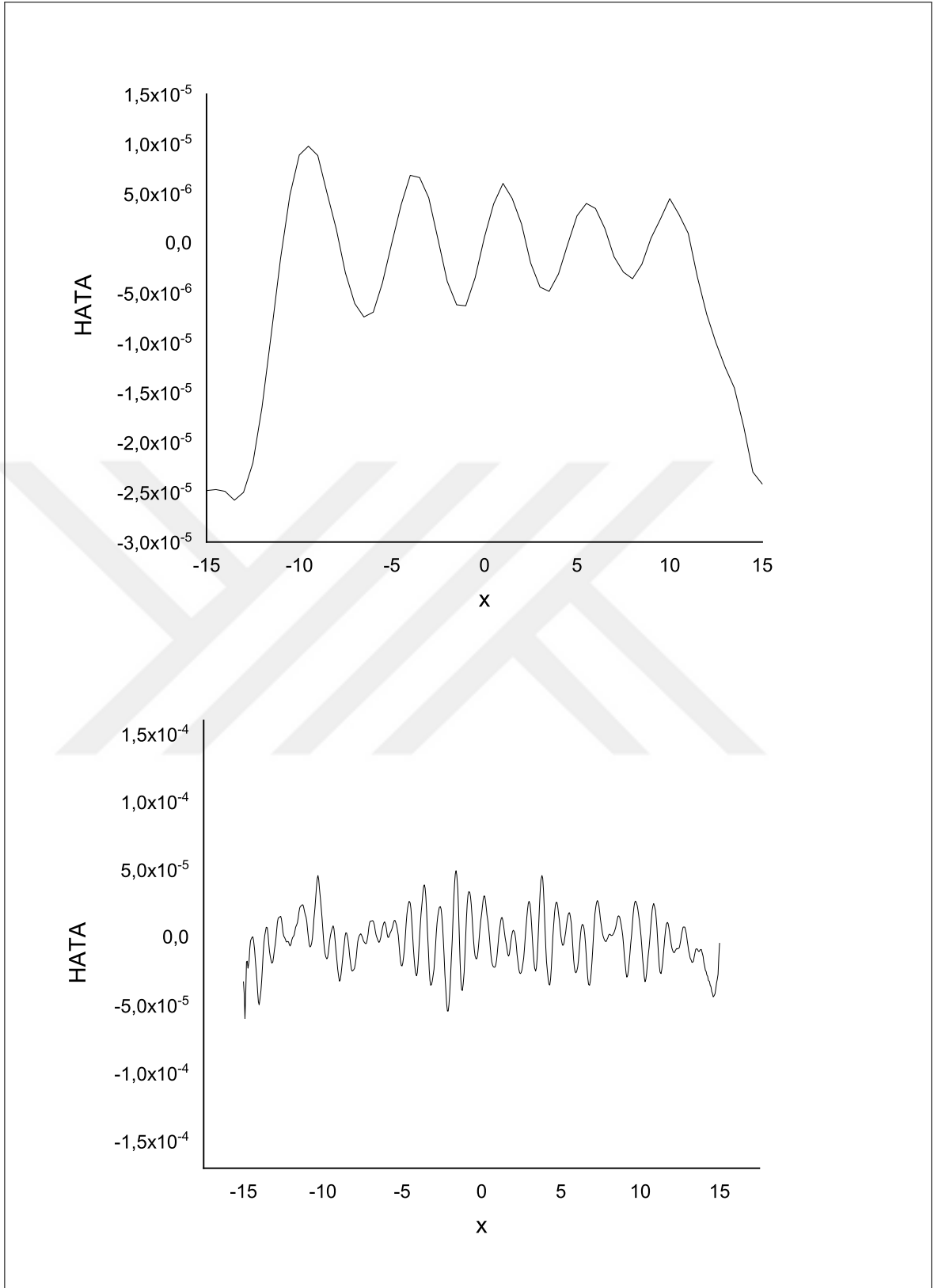
$t$	$\Delta t = 0.0004, h = 0.5$		$\Delta t = 0.0001, h = 0.05$	
	$L_2$	$L_\infty$	$L_2$	$L_\infty$
0.1	.0000494593	.0000249293	.0000414945	.0000270235
0.2	.0000532876	.0000252706	.0000465528	.0000248927
0.3	.0000532946	.0000257885	.0000497414	.0000271132
0.4	.0000537765	.0000249308	.0000557418	.0000303556
0.5	.0000544981	.0000255910	.0000617223	.0000337686
0.6	.0000582073	.0000249191	.0000619409	.0000441115
0.7	.0000563601	.0000249129	.0000679581	.0000468114
0.8	.0000553124	.0000249021	.0000803376	.0000475394
0.9	.0000559314	.0000256542	.0000912949	.0000595731
1.0	.0000587193	.0000256739	.0001058028	.0000597128



Şekil 6.6 CDG denkleminin  $t = 0$  dan  $t = 1$  e tek solitary dalga hareketi



Şekil 6.7 Tek solitary dalga hareketinin kontur grafiği



Şekil 6.8 a)  $\Delta t = 0.0004$  ve  $h = 0.5$  değerleri için  $t = 1$  de hata dağılımı, b)  $\Delta t = 0.00001$  ve  $h = 0.05$  değerleri için  $t = 1$  de hata dağılımı

### 6.3 Lax Denkleminin Septik B-Spline Kollokasyon Yöntemi İle Nümerik Çözümü

(6.1) ile belirtilen fKdV denkleminde  $\alpha = 30$ ,  $\beta = 30$ , ve  $\gamma = 10$  değerleri alındığında Lax Denklemi,  $u = u(x, t)$  istenilen mertebeye kadar türevlenebilen fonksiyon,  $x$  konum ve  $t$  alt indisi ise zaman değişkenini simgelemek üzere,

$$u_t + 30u^2u_x + 30u_xu_{xx} + 10uu_{xxx} + u_{xxxxx} = 0, \quad (6.34)$$

formunda lineer olmayan kısmi türevli bir diferansiyel denklem olarak elde edilir [67]. (6.6) denklemindeki ifadeler, (6.34) ile verilen denklemde yerlerine yazıldığında

$$\begin{aligned} & \dot{\delta}_{m-3} + 120\dot{\delta}_{m-2} + 1191\dot{\delta}_{m-1} + 2416\dot{\delta}_m + 1191\dot{\delta}_{m+1} + 120\dot{\delta}_{m+2} + \dot{\delta}_{m+3} \\ & + (30Z_{m1} + 30Z_{m2})\frac{7}{h}(-\delta_{m-3} - 56\delta_{m-2} - 245\delta_{m-1} + 245\delta_{m+1} + 56\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) \\ & + 10Z_{m3}\frac{210}{h^3}(-\delta_{m-3} - 8\delta_{m-2} + 19\delta_{m-1} - 19\delta_{m+1} + 8\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) \\ & + \frac{2520}{h^5}(-\delta_{m-3} + 4\delta_{m-2} - 5\delta_{m-1} + 5\delta_{m+1} - 4\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) = 0, \end{aligned} \quad (6.35)$$

cebirsal denklem sistemi oluşturulur. Lineerleştirme tekniğini uygulayabilmek için, (6.34) denkleminde lineer olmayan  $u^2u_x$ ,  $u_xu_{xx}$ , ve  $uu_{xxx}$  terimlerinde sırasıyla  $u^2$ ,  $u_{xx}$  ve  $u$  terimleri

$$\begin{aligned} Z_{m1} &= u^2, \\ Z_{m2} &= u_{xx}, \\ Z_{m3} &= u, \end{aligned} \quad (6.36)$$

alınarak lokal sabit kabul edilmiştir. (6.34) denkleminde  $\delta_m$  ve  $\dot{\delta}_m$  eleman parametreleri yerine sırasıyla (3.9) ile verilen Crank-Nicolson formülasyonu ve ileri sonlu fark yaklaşımı uygulandığında,  $n$  ve  $n + 1$  şeklinde ifade edilen iki zaman seviyesi arasındaki ilişki  $\delta^n$  ve  $\delta^{n+1}$  cinsinden

$$\begin{aligned} & \gamma_1\delta_{m-3}^{n+1} + \gamma_2\delta_{m-2}^{n+1} + \gamma_3\delta_{m-1}^{n+1} + \gamma_4\delta_m^{n+1} + \gamma_5\delta_{m+1}^{n+1} + \gamma_6\delta_{m+2}^{n+1} + \gamma_7\delta_{m+3}^{n+1} \\ & = \gamma_7\delta_{m-3}^n + \gamma_6\delta_{m-2}^n + \gamma_5\delta_{m-1}^n + \gamma_4\delta_m^n + \gamma_3\delta_{m+1}^n + \gamma_2\delta_{m+2}^n + \gamma_1\delta_{m+3}^n, \end{aligned} \quad (6.37)$$

olarak yazılabilir. Burada

$$\begin{aligned} E &= \frac{a}{2}\Delta t, \\ T &= \frac{b}{2}\Delta t, \\ M &= \frac{2520}{2h^5}\Delta t, \\ a &= [300Z_{m1} + 30Z_{m2}], \\ b &= [\frac{2100}{h^3}Z_{m3}], \end{aligned}$$

ve  $\Delta t$  zaman adımlarını belirttiği halde,  $\delta$  terimlerinin çarpanları

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= [1 - E - T - M], \\
\gamma_2 &= [120 - 56E - 8T + 4M], \\
\gamma_3 &= [1191 - 245E + 19T - 5M], \\
\gamma_4 &= [2416], \\
\gamma_5 &= [1191 + 245E - 19T + 5M], \\
\gamma_6 &= [120 + 56E + 8T - 4M], \\
\gamma_7 &= [1 + E + T + M],
\end{aligned} \tag{6.38}$$

şeklindedir.

Sınır koşulları yardımı ile (6.37) denklem sistemindeki  $\delta_{-3}, \delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_{N+1}, \delta_{N+2}$  ve  $\delta_{N+3}$  parametreleri yok edilir ve  $d^n = (\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_N)^T$  şeklinde  $(N + 1)$  adet bilinmeyen parametreden oluşan

$$Ad^{n+1} = Bd^n \tag{6.39}$$

$(N + 1) \times (N + 1)$  tipinde diagonal matris sistemi bulunur. Bu sistem ise Thomas algoritması kullanılarak çözülür. Çözüm yapılırken (3.14) şeklinde bir iç iterasyon işlemi uygulanır. (6.37) denklem sisteminde iterasyon işlemine başlayabilmek için, ilk olarak başlangıç ve sınır şartları yardımıyla  $d^0 = (\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_N)^0$  ile gösterilen başlangıç vektörü hesaplanmalıdır. Bu yüzden  $t = 0$  zamanında  $[a, b]$  aralığındaki

$$u_N(x, 0) = \sum_{m=-3}^{N+3} \varphi_m(x) \delta_m^0,$$

yaklaşımı ile

$$\begin{aligned}
u_N(x, 0) &= u(x_m, 0); & m &= 0, 1, 2, \dots, N \\
(u_N)_x(a, 0) &= 0, & (u_N)_x(b, 0) &= 0, \\
(u_N)_{xx}(a, 0) &= 0, & (u_N)_{xx}(b, 0) &= 0, \\
(u_N)_{xxx}(a, 0) &= 0, & (u_N)_{xxx}(b, 0) &= 0.
\end{aligned}$$

şartları kullanılırsa,

$$Wd^0 = b,$$



olup,  $|\xi| = 1$  koşulu sağlanır. Böylece lineerleştirilmiş sonlu eleman şeması şartsız kararlı olarak bulunur.

## 6.3.2 Nümerik Örnekler ve Sonuçlar

### 6.3.2.1 Tek Solitary Dalga Hareketi

Bu kısımda, belirlenen bölünme noktaları üzerinde tek solitary dalga problemi için Lax denkleminin nümerik çözümleri elde edilmiştir. Uygulanan sayısal metodun doğruluğu ve etkinliği, seçilen zaman adımlarında tam ve yaklaşık çözüm arasındaki farkın hesaplanmasını sağlayan (6.17) ve (6.18) de tanımlanan  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları yardımıyla araştırılmıştır.

$x \rightarrow \pm\infty$  iken  $u \rightarrow 0$  sınır şartı ve  $t = 0$  için

$$u(x, 0) = 2k^2 \tanh^2 [k(x - x_0)], \quad (6.42)$$

başlangıç koşulunu kullanarak Lax denkleminin solitary dalga çözümleri üzerinde çalışılmıştır.  $k$  ve  $x_0$  reel değerler olacak şekilde, Lax denkleminin analitik çözümü

$$u(x, t) = 2k^2 (2 - 3 \tanh^2 [k(x - 56k^4 t - x_0)]), \quad (6.43)$$

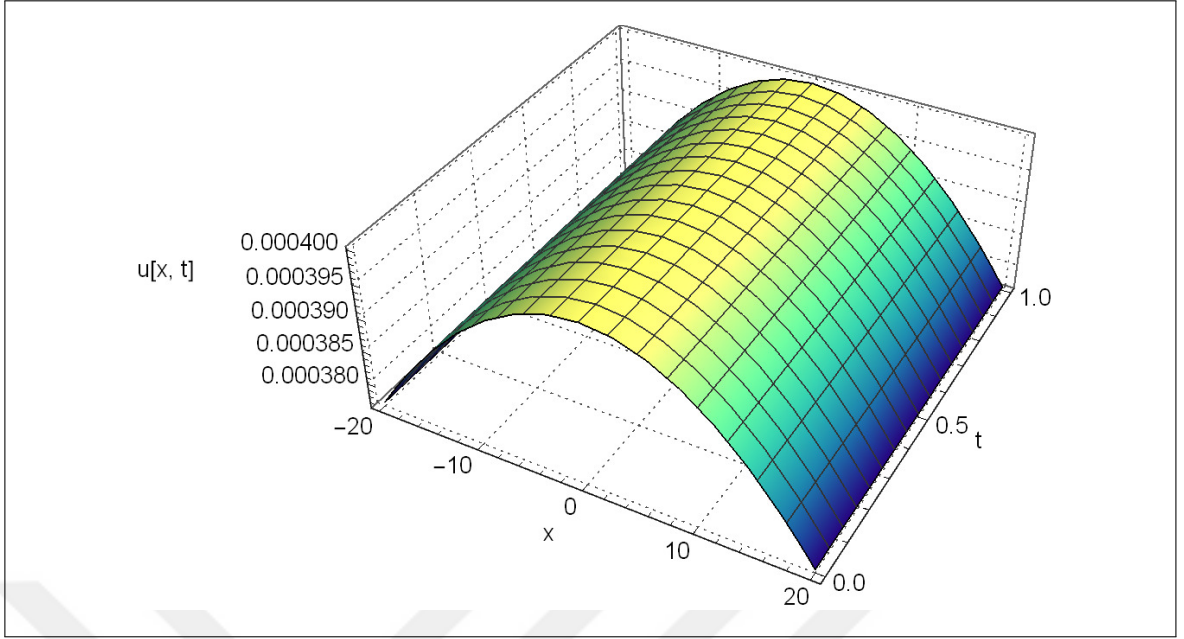
şeklindedir.

Sayısal çözümler sunmak için, algoritma  $x \in [-20, 20]$  aralığında  $x_0 = 0$  ve  $k = 0.01$  olmak üzere  $t = 1$  zamanına kadar çalıştırılmıştır. Solitary dalganın  $x = 0$  da ve  $t = 0$  in ilk anında  $A = 0.0002$  genliğine sahip olduğu görülmüştür. Simülasyon hesaplamalarında  $h = 0.5$  ve  $0.05$  ile  $\Delta t = 0.0004$  ve  $0.0001$  değerleri kullanılmıştır.  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata değerleri Tablo 6.6 da gösterilmektedir. Hata normlarının hesaplanan değerlerinin yeterince küçük olduğu görülmüştür.  $\Delta t = 0.0004$  ve  $h = 0.5$  parametreleriyle hesaplanan minimum  $L_\infty$  hata normu  $3.786723 \times 10^{-4}$  olarak bulunmuştur. Bu hataların zaman ilerledikçe hemen hemen değişmediği gözlenmektedir. Ayrıca tablodan hata normlarının değerlerine bakıldığında analitik ve sayısal çözümlerin uyum içinde olduğu ve yöntemin verimli olduğu görülmektedir. Şekil 6.9 incelenirse,  $t = 0$  anından  $t = 1$  anına kadar üretilen çan şeklindeki solitary dalga çözümlerinin üç boyutlu halleri açıkça görülebilir. Buna ek olarak, şekilden genlik ve şeklin zaman geçtikçe korunduğu söylenebilir. Öte yandan, Şekil 6.10 da  $h$  ve  $\Delta t$  nin farklı değerleri için  $t = 1$  zamanında sayısal hata dağılımı da çizilmiştir.

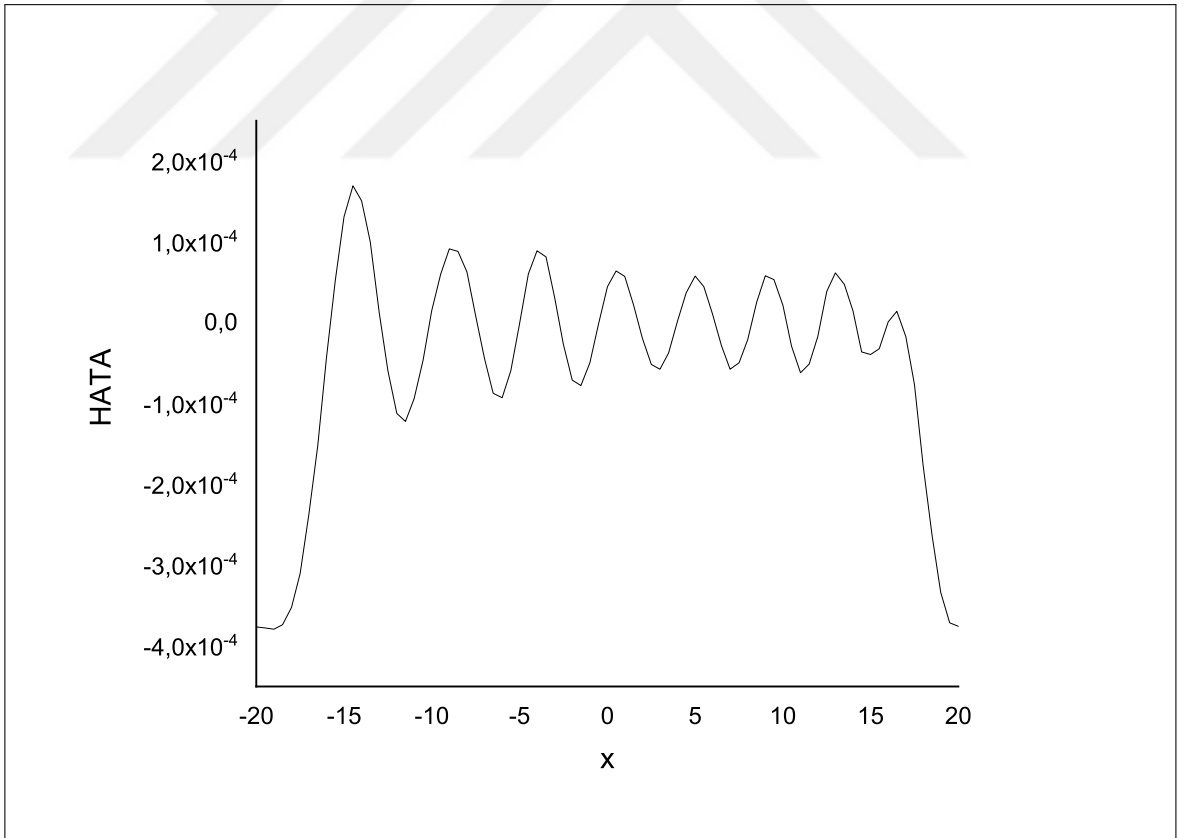
Tablo 6.6  $k = 0.01$ ,  $\Delta t = 0.0004$  ve  $h$  nin farklı değerleri için hesaplanan hata normu değerleri

$t$	$\Delta t = 0.0004, h = 0.5$		$\Delta t = 0.0001, h = 0.05$	
	$L_2$	$L_\infty$	$L_2$	$L_\infty$
0.1	.0007476185	.0003786723	.0006605026	.0003870472
0.2	.0008112957	.0003797258	.0006965400	.0004162210
0.3	.0008167458	.0003793303	.0007209887	.0003999905
0.4	.0008542324	.0003784037	.0007876002	.0004253867
0.5	.0008354053	.0003899616	.0008298723	.0005542919
0.6	.0008850945	.0003787136	.0009135698	.0009698522
0.7	.0008491875	.0003800426	.0011118805	.0022608287
0.8	.0008693723	.0003949290	.0019634349	.0059890208
0.9	.0009128289	.0003794148	.0048874414	.0170258202
1.0	.0008974475	.0003791528	.0140005587	.0499546306





Şekil 6.9 Lax denkleminin  $\Delta t = 0.0004$  ve  $h = 0.5$  için tek solitary dalga hareketi



Şekil 6.10  $\Delta t = 0.0004$  ve  $h = 0.5$  için  $t = 1$  zamanında hata dağılımı

#### 6.4 Kaup-Kuperschmidt (KK) Denkleminin Septik B-Spline Kollokasyon Yöntemi İle Nümerik Çözümü

(6.1) ile belirtilen fKdV denkleminde  $\alpha = 20$ ,  $\beta = 25$ , ve  $\gamma = 10$  değerleri alındığında Kaup-Kuperschmidt (KK) Denklemi,  $u = u(x, t)$  türevlenebilir fonksiyon,  $x$  konum ve  $t$  alt indisi ise zaman değişkenini simgelemek üzere,

$$u_t + 20u^2u_x + 25u_xu_{xx} + 10uu_{xxx} + u_{xxxxx} = 0, \quad (6.44)$$

formunda lineer olmayan kısmi türevli bir diferansiyel denklem olarak elde edilir [68]. (6.6) denklemindeki ifadeler, (6.44) ile verilen denkleme yerlerine yazıldığında

$$\begin{aligned} & \dot{\delta}_{m-3} + 120\dot{\delta}_{m-2} + 1191\dot{\delta}_{m-1} + 2416\dot{\delta}_m + 1191\dot{\delta}_{m+1} + 120\dot{\delta}_{m+2} + \dot{\delta}_{m+3} \\ & + (20Z_{m1} + 25Z_{m2})\frac{7}{h}(-\delta_{m-3} - 56\delta_{m-2} - 245\delta_{m-1} + 245\delta_{m+1} + 56\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) \\ & + 10Z_{m3}\frac{210}{h^3}(-\delta_{m-3} - 8\delta_{m-2} + 19\delta_{m-1} - 19\delta_{m+1} + 8\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) \\ & + \frac{2520}{h^5}(-\delta_{m-3} + 4\delta_{m-2} - 5\delta_{m-1} + 5\delta_{m+1} - 4\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) = 0, \end{aligned} \quad (6.45)$$

cebirsel denklem sistemi oluşturulur. Lineerleştirme tekniği için, (6.44) denkleminde lineer olmayan  $u^2u_x$ ,  $u_xu_{xx}$ , ve  $uu_{xxx}$  terimlerinde sırasıyla  $u^2$ ,  $u_{xx}$  ve  $u$  terimleri

$$Z_{m1} = u^2,$$

$$Z_{m2} = u_{xx},$$

$$Z_{m3} = u,$$

şeklinde lokal sabitler olarak kabul edilmiştir. (6.45) denkleminde  $\delta_m$  ve  $\dot{\delta}_m$  parametreleri yerine sırayla (3.9) ta tanımlanan Crank-Nicolson formülasyonu ve ileri sonlu fark yaklaşımı uygulandığında,  $n$  ve  $n + 1$  şeklinde ifade edilen iki zaman kademesi arasındaki ilişkiyi  $\delta^n$  ve  $\delta^{n+1}$  parametreleri cinsinden

$$\begin{aligned} & \gamma_1\delta_{m-3}^{n+1} + \gamma_2\delta_{m-2}^{n+1} + \gamma_3\delta_{m-1}^{n+1} + \gamma_4\delta_m^{n+1} + \gamma_5\delta_{m+1}^{n+1} + \gamma_6\delta_{m+2}^{n+1} + \gamma_7\delta_{m+3}^{n+1} \\ & = \gamma_7\delta_{m-3}^n + \gamma_6\delta_{m-2}^n + \gamma_5\delta_{m-1}^n + \gamma_4\delta_m^n + \gamma_3\delta_{m+1}^n + \gamma_2\delta_{m+2}^n + \gamma_1\delta_{m+3}^n, \end{aligned} \quad (6.46)$$

olarak yazılabilir. Burada

$$E = \frac{a}{2}\Delta t,$$

$$T = \frac{b}{2}\Delta t,$$

$$M = \frac{2520}{2h^5}\Delta t, \quad (6.47)$$

$$a = [20Z_{m1} + 25Z_{m2}],$$

$$b = [\frac{2100}{h^3}Z_{m3}],$$

ve  $\delta$  eleman parametrelerinin çarpanları

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= [1 - E - T - M], \\
\gamma_2 &= [120 - 56E - 8T + 4M], \\
\gamma_3 &= [1191 - 245E + 19T - 5M], \\
\gamma_4 &= [2416], \\
\gamma_5 &= [1191 + 245E - 19T + 5M], \\
\gamma_6 &= [120 + 56E + 8T - 4M], \\
\gamma_7 &= [1 + E + T + M],
\end{aligned} \tag{6.48}$$

şeklindedir.

Sınır koşulları yardımı ile (6.46) denklem sistemindeki  $\delta_{-3}, \delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_{N+1}, \delta_{N+2}$  ve  $\delta_{N+3}$  parametreleri yok edilebilir ve  $d^n = (\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_N)^T$  formunda  $(N + 1)$  adet bilinmeyen parametreden oluşan

$$Ad^{n+1} = Bd^n, \tag{6.49}$$

ile gösterilen  $(N + 1) \times (N + 1)$  formunda diagonal matris sistemi bulunur. Bu sistem ise Thomas algoritması kullanılarak çözülür. Çözüm işlemleri yapılırken (3.14) şeklinde bir iç iterasyon işlemi uygulanır. (6.46) denklem sisteminde iterasyon işlemine başlayabilmek için, ilk olarak başlangıç ve sınır şartları yardımıyla  $d^0 = (\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_N)^0$  ile gösterilen başlangıç vektörü hesaplanmalıdır. Bu yüzden  $t = 0$  zamanında  $[a, b]$  aralığındaki

$$u_N(x, 0) = \sum_{m=-3}^{N+3} \phi_m(x) \delta_m^0,$$

yaklaşımı ile

$$\begin{aligned}
u_N(x, 0) &= u(x_m, 0); & m &= 0, 1, 2, \dots, N \\
(u_N)_x(a, 0) &= 0, & (u_N)_x(b, 0) &= 0, \\
(u_N)_{xx}(a, 0) &= 0, & (u_N)_{xx}(b, 0) &= 0, \\
(u_N)_{xxx}(a, 0) &= 0, & (u_N)_{xxx}(b, 0) &= 0.
\end{aligned}$$

şartları kullanılırsa,

$$Wd^0 = b,$$



olup,  $|\xi| = 1$  koşulu sağlanır. Böylece lineerleştirilmiş sonlu eleman şeması şartsız kararlı olarak bulunur.

## 6.4.2 Nümerik Örnekler ve Sonuçlar

### 6.4.2.1 Tek Solitary Dalga Hareketi

Bu kısımda, belirlenen bölünme noktaları üzerinde tek solitary dalga problemi için KK denkleminin nümerik çözümleri elde edilmiştir. Uygulanan sayısal metodun doğruluğu ve etkinliği, seçilen zaman adımlarında tam ve yaklaşık çözüm arasındaki farkın hesaplanmasını sağlayan (6.17) ve (6.18) de tanımlanan  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları yardımıyla araştırılmıştır.

$x \rightarrow \pm\infty$  iken  $u \rightarrow 0$  sınır şartı ve  $t = 0$  için

$$u(x, 0) = \frac{24k^2 e^{kx} (4e^{kx} + e^{2kx} + 16)}{(16e^{kx} + e^{kx} + 16)^2}, \quad (6.53)$$

başlangıç koşulu ile KK denkleminin solitary dalga çözümleri çalışılmıştır.  $k$  ve  $x_0$  keyfi reel sabitler olacak şekilde, KK denkleminin analitik çözümü

$$u(x, t) = \frac{24k^2 e^{(kx-k^5t)} (4e^{(kx-k^5t)} + e^{2(kx-k^5t)} + 16)}{(16e^{(kx-k^5t)} + e^{2(kx-k^5t)} + 16)^2}, \quad (6.54)$$

şeklindedir.

Sayısal şemanın geçerliliğini göstermek için, algoritma  $[-15, 15]$  hesaplama aralığında ve  $t = 1$  zamanına kadar çalıştırılmıştır. Solitary dalga,  $x = 0$  da ve  $t = 0$  ın ilk anında  $A = 0.0002$  genliğine sahiptir. Simülasyon hesaplamalarında  $\Delta t = 0.0004$ ;  $0.0001$ ,  $h = 0.5$  ve  $0.05$  değerleri kullanılmıştır. Tablo 6.7 de, farklı zaman seviyeleri ve farklı adım boyutları için  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normlarının değerleri verilmektedir. Böylece sıralama noktalarının miktarının sayısal yöntem üzerindeki etkilerini daha kolay görülebilir. Hesaplanan  $L_2$  ve  $L_\infty$  hataları tatmin edici derecede küçük bulunmuştur.  $\Delta t = 0.0001$  ve  $h = 0.05$  parametreleri ile hesaplanan minimum  $L_\infty$  hata normunun  $4.47 \times 10^{-5}$  olarak bulunmuştur. Bu hataların zaman ilerledikçe hemen hemen değişmediği gözlenmektedir. Program, önceki çalışmalar ile karşılaştırma yapabilmek için  $t = 1$  zamanına kadar çalıştırılmıştır. Elde edilen sonuçlar [111] ve [105] çalışmaları ile karşılaştırılmış ve Tablo 6.8 de listelenmiştir. Tablo 6.8, tez çalışmasında elde edilen hata norm değerlerinin [111] çalışmasında elde edilenlerden daha küçük olduğunu ve [105] çalışması ile uyum içinde olduğunu açıkça göstermektedir. Şekil 6.11 incelendiğinde,  $t = 0$  dan  $t = 1$  e kadar üretilen çan şeklindeki solitary dalga çözümlerinin üç boyutlu hali açıkça görülebilir. Şekil, dalganın yavaş hareket ederken ve

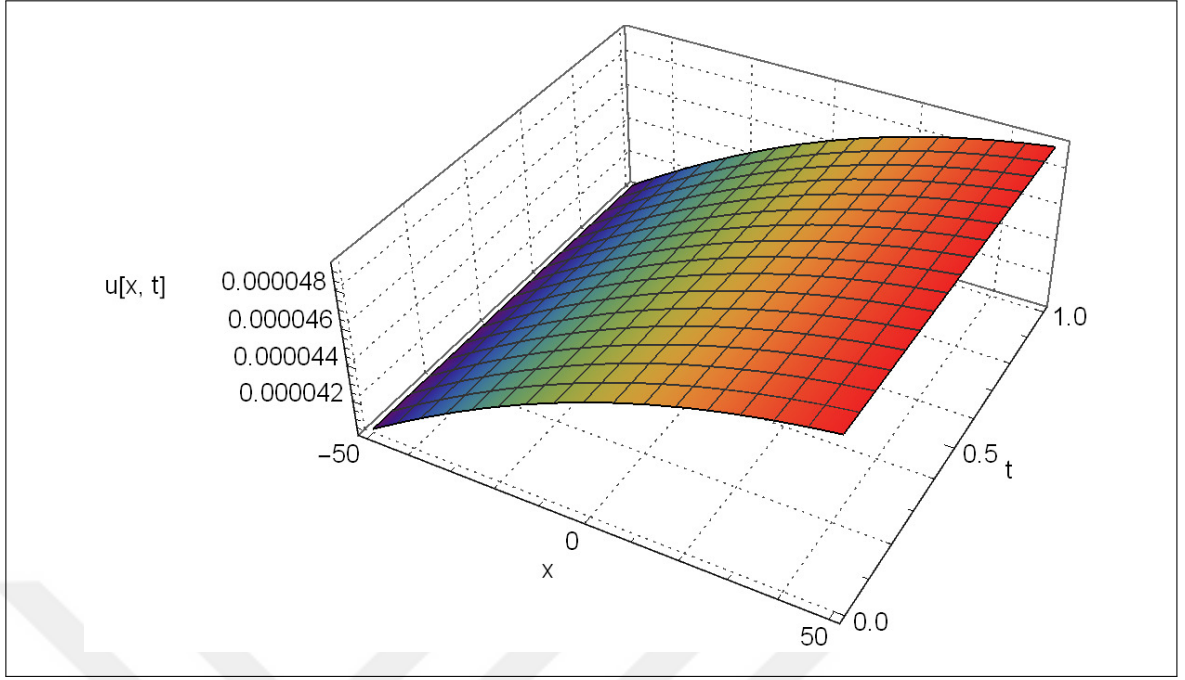
şeklini değiştirmeden davranışını ortaya koymaktadır. Ayrıca, Şekil 6.12 de  $h$  ve  $\Delta t$  nin çeşitli değerleri için  $t = 1$  zamanında sayısal hata dağılımını çizilmiştir.

Tablo 6.7  $k = 0.01$ ,  $\Delta t$  ve  $h$  nin farklı değerleri için hesaplanan hata normu değerleri

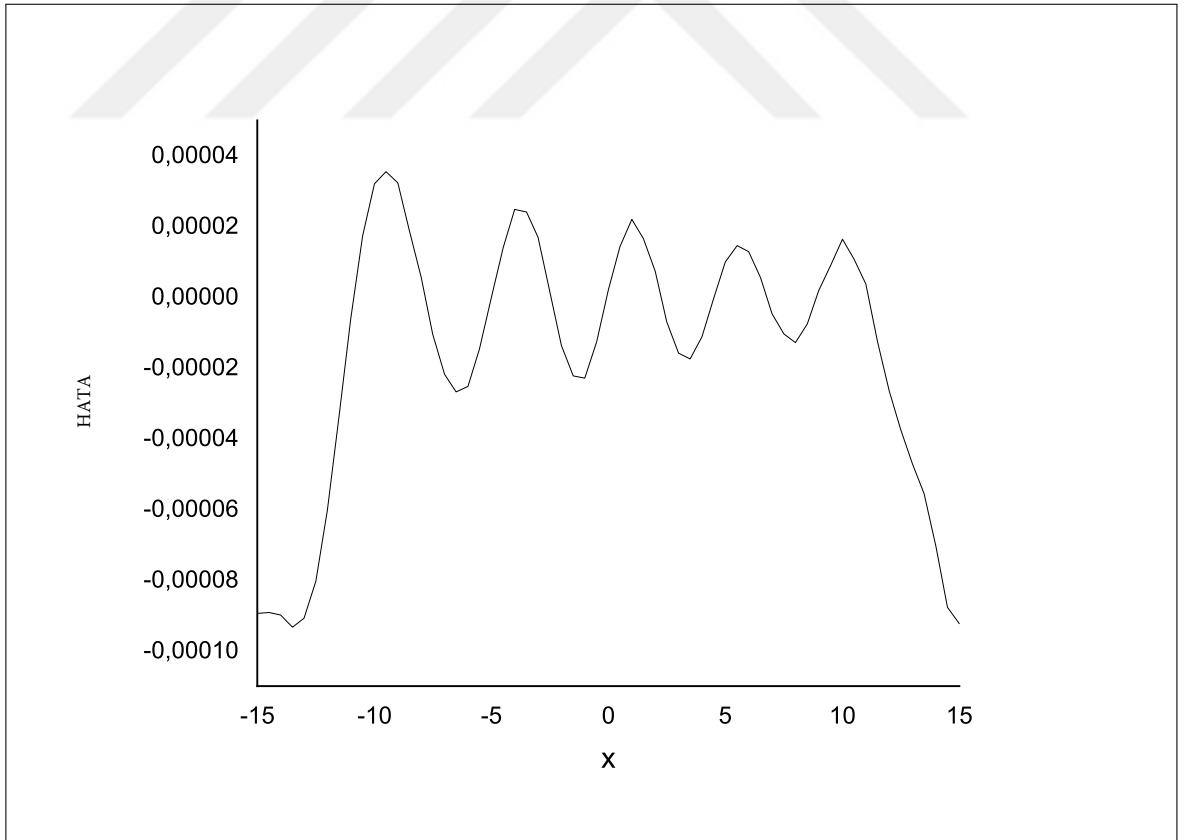
$t$	$dt = 0.0004, h = 0.5$		$dt = 0.0001, h = 0.05$	
	$L_2 \times 10^{-5}$	$L_\infty \times 10^{-5}$	$L_2 \times 10^{-5}$	$L_\infty \times 10^{-5}$
0.1	9.08	4.49	7.22	4.47
0.2	9.79	4.58	8.21	4.64
0.3	9.79	4.67	8.81	5.16
0.4	9.88	4.60	9.06	5.11
0.5	10.01	4.63	9.76	5.42
0.6	10.71	4.67	8.93	5.05
0.7	10.36	4.64	9.75	5.84
0.8	10.16	4.50	10.21	5.46
0.9	10.28	4.64	10.78	6.68
1.0	10.80	4.64	10.22	6.85

Tablo 6.8  $k = 0.01$ ,  $\Delta t$  ve  $h$  nin farklı değerleri için hesaplanan hata normu değerleri ve diğer yöntemlerle karşılaştırılması

$t$	$L_2 \times 10^{-9}$	$L_\infty \times 10^{-9}$
0.1	8.00	6.60
0.2	9.00	7.30
0.3	9.20	6.80
0.4	9.00	6.60
0.5	9.50	6.60
0.6	9.30	7.30
0.7	9.50	6.80
0.8	10.70	7.50
0.9	11.20	7.40
1.0	9.80	6.80
[111] $t = 0.5$	36.40	-
[105] $t = 1$	-	0.50



Şekil 6.11 KK denkleminin  $\Delta t = 0.0004$  ve  $h = 0.5$  için Tek solitary dalga hareketi



Şekil 6.12  $\Delta t = 0.0004$  ve  $h = 0.5$  için  $t = 1$  zamanında hata dağılımı



## 6.5 Ito Denklemine Septik B-Spline Kollokasyon Yöntemi İle Nümerik Çözümü

(6.1) ile belirtilen denklemde  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 6$ , ve  $\gamma = 3$  değerleri alındığında Ito Denklemi,  $u = u(x, t)$  türevlenebilir fonksiyon,  $x$  konum ve  $t$  zaman değişkenini simgelemek üzere,

$$u_t + 2u^2 u_x + 6u_x u_{xx} + 3uu_{xxx} + u_{xxxxx} = 0, \quad (6.55)$$

formunda lineer olmayan kısmi türevli bir diferansiyel denklem olarak elde edilir [70]. (6.6) denklemdeki ifadeler, (6.55) ile verilen denklemde yerlerine yazıldığında

$$\begin{aligned} & \delta_{m-3} + 120\delta_{m-2} + 1191\delta_{m-1} + 2416\delta_m + 1191\delta_{m+1} + 120\delta_{m+2} + \delta_{m+3} \\ & + (2Z_{m1} + 6Z_{m2}) \frac{7}{h} (-\delta_{m-3} - 56\delta_{m-2} - 245\delta_{m-1} + 245\delta_{m+1} + 56\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) \\ & + 3Z_{m3} \frac{210}{h^3} (-\delta_{m-3} - 8\delta_{m-2} + 19\delta_{m-1} - 19\delta_{m+1} + 8\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) \\ & + \frac{2520}{h^5} (-\delta_{m-3} + 4\delta_{m-2} - 5\delta_{m-1} + 5\delta_{m+1} - 4\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) = 0, \end{aligned} \quad (6.56)$$

cebirsal denklem sistemi oluşturulur. Lineerleştirme tekniği için, (6.55) denklemine lineer olmayan  $u^2 u_x$ ,  $u_x u_{xx}$ , ve  $uu_{xxx}$  terimlerinde sırasıyla  $u^2$ ,  $u_{xx}$  ve  $u$  terimleri

$$\begin{aligned} Z_{m1} &= u^2, \\ Z_{m2} &= u_{xx}, \\ Z_{m3} &= u, \end{aligned} \quad (6.57)$$

şeklinde lokal sabitler olarak kabul edilmiştir. (6.56) denklemine  $\delta_m$  ve  $\delta_m$  parametreleri yerine sırasıyla (3.9) ile verilen Crank-Nicolson formülasyonu ve ileri fark yaklaşımı kullanılırsa,  $n$  ve  $n + 1$  şeklinde ifade edilen iki zaman kademesi arasındaki ilişki  $\delta^n$  ve  $\delta^{n+1}$  cinsinden

$$\begin{aligned} & \gamma_1 \delta_{m-3}^{n+1} + \gamma_2 \delta_{m-2}^{n+1} + \gamma_3 \delta_{m-1}^{n+1} + \gamma_4 \delta_m^{n+1} + \gamma_5 \delta_{m+1}^{n+1} + \gamma_6 \delta_{m+2}^{n+1} + \gamma_7 \delta_{m+3}^{n+1} \\ & = \gamma_7 \delta_{m-3}^n + \gamma_6 \delta_{m-2}^n + \gamma_5 \delta_{m-1}^n + \gamma_4 \delta_m^n + \gamma_3 \delta_{m+1}^n + \gamma_2 \delta_{m+2}^n + \gamma_1 \delta_{m+3}^n, \end{aligned} \quad (6.58)$$

olarak yazılabilir. Burada

$$\begin{aligned} E &= \frac{a}{2} \Delta t, \\ T &= \frac{b}{2} \Delta t, \\ M &= \frac{2520}{2h^5} \Delta t, \\ a &= [2Z_{m1} + 6Z_{m2}], \\ b &= [\frac{630}{h^3} Z_{m3}], \end{aligned}$$

ve  $\delta$  eleman parametrelerinin çarpanları

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= [1 - E - T - M], \\
\gamma_2 &= [120 - 56E - 8T + 4M], \\
\gamma_3 &= [1191 - 245E + 19T - 5M], \\
\gamma_4 &= [2416], \\
\gamma_5 &= [1191 + 245E - 19T + 5M], \\
\gamma_6 &= [120 + 56E + 8T - 4M], \\
\gamma_7 &= [1 + E + T + M],
\end{aligned} \tag{6.59}$$

şeklindedir.

Sınır koşulları yardımı ile (6.58) denklem sistemindeki  $\delta_{-3}, \delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_{N+1}, \delta_{N+2}$  ve  $\delta_{N+3}$  parametreleri yok edilir ve  $d^n = (\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_N)^T$  şeklinde  $(N+1)$  adet bilinmeyen parametreden oluşan

$$Ad^{n+1} = Bd^n, \tag{6.60}$$

$(N+1) \times (N+1)$  tipinde diagonal matris sistemi bulunur. Bu sistem ise Thomas algoritması kullanılarak çözülür. Çözüm yapılırken her bir zaman kademesinde iki veya üç kez (3.14) şeklinde bir iç iterasyon işlemi uygulanır. (6.58) denklem sisteminde iterasyon işlemine başlayabilmek için, ilk olarak başlangıç ve sınır şartları yardımıyla  $d^0 = (\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_N)^0$  ile gösterilen başlangıç vektörü hesaplanmalıdır. Bu yüzden  $t = 0$  zamanında  $[a, b]$  aralığındaki

$$u_N(x, 0) = \sum_{m=-3}^{N+3} \phi_m(x) \delta_m^0,$$

yaklaşımı ile

$$\begin{aligned}
u_N(x, 0) &= u(x_m, 0); & m &= 0, 1, 2, \dots, N \\
(u_N)_x(a, 0) &= 0, & (u_N)_x(b, 0) &= 0, \\
(u_N)_{xx}(a, 0) &= 0, & (u_N)_{xx}(b, 0) &= 0, \\
(u_N)_{xxx}(a, 0) &= 0, & (u_N)_{xxx}(b, 0) &= 0.
\end{aligned}$$

şartları kullanılırsa,

$$Wd^0 = b,$$



ve  $|\xi| = 1$  koşulu sağlanır. Böylece lineerleştirilmiş sonlu eleman şeması şartsız kararlı olarak bulunur.

## 6.5.2 Nümerik Örnekler ve Sonuçlar

### 6.5.2.1 Tek Solitary Dalga Hareketi

Bu kısımda, belirlenen bölünme noktaları üzerinde tek solitary dalga problemi için Ito denkleminin nümerik çözümleri elde edilmiştir. Uygulanan sayısal metodun doğruluğu ve etkinliği, seçilen zaman adımlarında tam ve yaklaşık çözüm arasındaki farkın hesaplanmasını sağlayan (6.17) ve (6.18) de tanımlanan  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları yardımıyla araştırılmıştır.

$x \rightarrow \pm\infty$  iken  $u \rightarrow 0$  sınır şartı ve  $t = 0$  zamanı için

$$u(x, 0) = 20k^2 - 30k^2 \tanh^2(kx + kx_0) \quad (6.63)$$

başlangıç koşulu ile Ito denkleminin solitary dalga çözümleri üzerinde çalışılmıştır.  $k$  ve  $x_0$  pozitif değerleri için, İto denkleminin analitik çözümü

$$u(x, t) = 20k^2 - 30k^2 \tanh^2(kx - 96k^5t + kx_0) \quad (6.64)$$

şeklindedir.

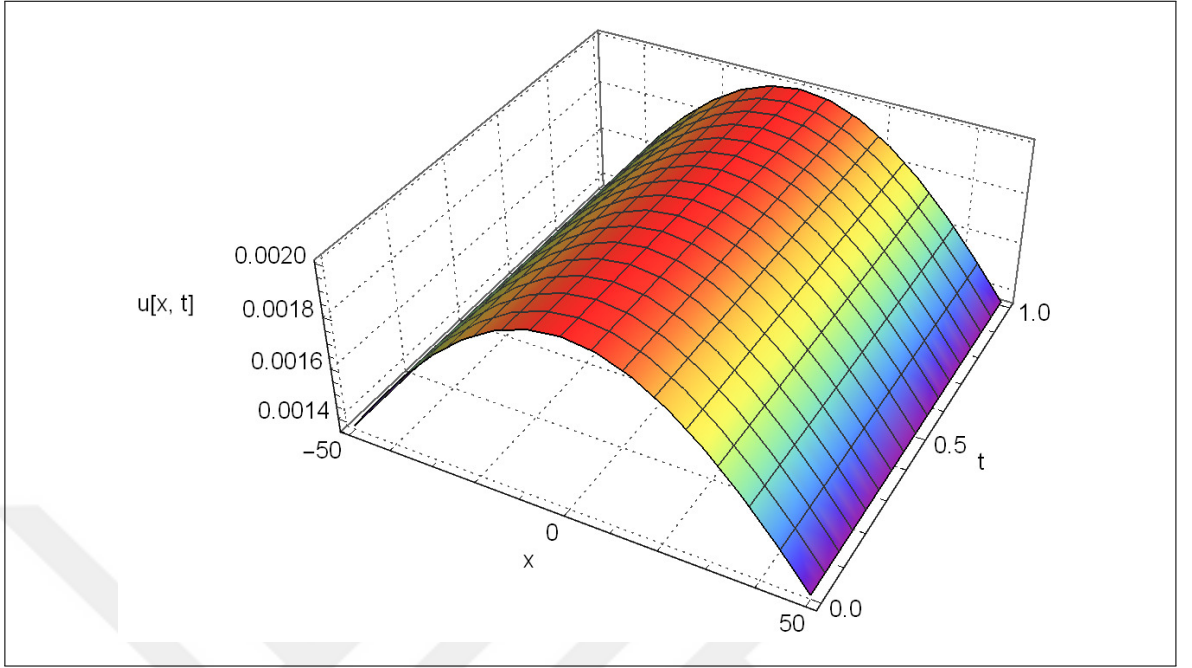
Sayısal şemanın geçerliliğini göstermek için, algoritma  $[-15, 15]$  hesaplama aralığında ve  $t = 1$  zamanına kadar çalıştırılmıştır. Solitary dalga,  $x = 0$  konumunda ve  $t = 0$  in ilk anında  $A = 0.0002$  genliğine sahiptir. Simülasyon hesaplamalarında kullanılan değerler  $\Delta t = 0.0004$ ,  $\Delta t = 0.0001$ ,  $h = 0.5$  ve  $h = 0.05$  olarak belirlenmiştir. Tablo 6.9 da, Ito denklemini için farklı zaman seviyeleri ve farklı adım boyutları için  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normlarının değerleri gösterilmektedir. Böylece sıralama noktalarının miktarının sayısal yöntem üzerindeki etkileri daha kolay görülebilir. Program, önceki çalışmalarla karşılaştırma yapabilmek için  $t = 1$  anına kadar çalıştırılmıştır. Elde edilen sonuçlar [105] çalışması ile karşılaştırmalar yapılarak Tablo 6.10 da listelenmiştir. Bu yöntemle hesaplanan  $L_\infty$  hata norm değerinin [105] çalışmasında elde edilenden daha küçük olduğu tablodan görülebilir. Şekil 6.13 incelenirse,  $t = 0$  dan  $t = 1$  e kadar üretilen çan şeklindeki solitary dalga çözümlerinin üç boyutlu hali açıkça görülebilir. Ayrıca, Şekil 6.14 te  $h$  ve  $\Delta t$  nin çeşitli değerleri için  $t = 1$  zamanında sayısal hata dağılımı çizilmiştir.

Tablo 6.9  $k = 0.01$ ,  $\Delta t$  ve  $h$  nin farklı değerleri için hesaplanan hata normu değerleri

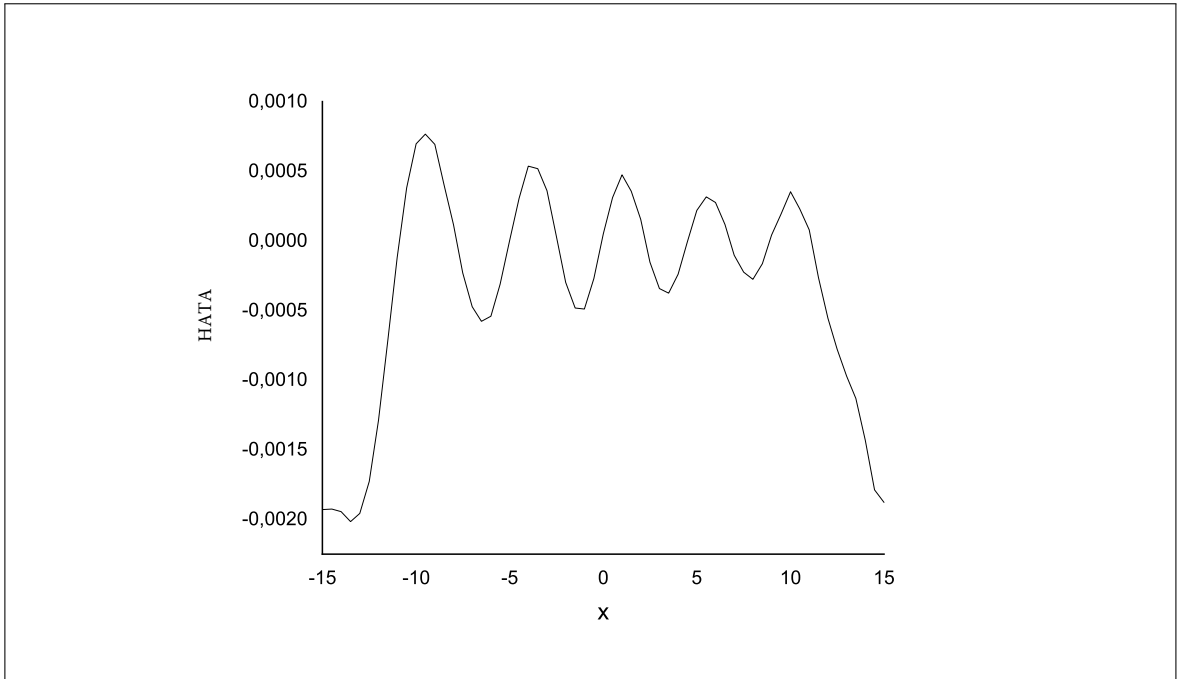
$t$	$\Delta t = 0.0004, h = 0.5$		$\Delta t = 0.0001, h = 0.05$	
	$L_2 \times 10^{-3}$	$L_\infty \times 10^{-3}$	$L_2 \times 10^{-3}$	$L_\infty \times 10^{-3}$
0.1	3.85	1.94	3.02	1.93
0.2	4.15	1.97	3.44	1.99
0.3	4.15	2.01	3.69	2.21
0.4	4.19	1.94	3.79	2.10
0.5	4.25	2.00	4.09	2.22
0.6	4.54	1.94	3.74	2.17
0.7	4.39	1.94	4.08	2.39
0.8	4.31	1.94	4.28	2.26
0.9	4.36	2.00	4.52	2.84
1.0	4.58	2.00	4.28	2.90

Tablo 6.10  $k = 0.01$ ,  $\Delta t$  ve  $h$  nin farklı değerleri için hesaplanan hata normu değerleri

$t$	$L_2 \times 10^{-7}$	$L_\infty \times 10^{-7}$
0.1	4.31	3.69
0.2	3.18	1.93
0.3	5.01	3.72
0.4	3.65	1.82
0.5	5.53	3.76
0.6	4.05	1.73
0.7	5.96	3.79
0.8	4.38	2.16
0.9	6.34	3.82
1.0	4.88	2.64
[105] $t = 1$	-	44.56



Şekil 6.13 Ito denkleminin  $\Delta t = 0.0004$  ve  $h = 0.5$  için Tek solitary dalga hareketi



Şekil 6.14  $\Delta t = 0.0004$  ve  $h = 0.5$  için  $t = 1$  zamanında hata dağılımı

## SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tezde Gilson-Pickering (GP) denklemi, genelleştirilmiş Oskolkov denklemi, Kudryashov-Sinelschkov (KS) denklemi, beşinci dereceden fKdV denklemlerinden Sawada-Kotera (SK) denklemi, Caudrey-Dodd-Gibbon (CDG) denklemi, Lax denklemi, Kaup-Kuperschmit (KK) denklemi ve Ito kısmi diferansiyel denklemlerinin kuintik B-spline ve septik B-spline interpolasyon fonksiyonlarına dayalı kollokasyon sonlu elemanlar yaklaşım metodu ile nümerik çözümleri bulunmuş ve çözümlerin doğruluğu test problemleri yardımıyla incelenmiştir.

Birinci bölümde, kullanılan yöntem hakkında geniş bir giriş yapılarak tezin amaç ve kapsamı ortaya konulmuştur. Sonlu farklar, sonlu elemanlar, Crank-Nicolson ve kollokasyon yöntemleri tanıtılmıştır. B-spline interpolasyon fonksiyonlarını tanıtmak için öncelikle spline fonksiyonların tanım ve özelliklerine ve ardından tezde kullanılacak olan kuintik ve septik B-spline baz fonksiyonlarının özelliklerine yer verilmiştir. Sayısal çözümü araştırılan model problemler başlangıç ve sınır koşulları ile üzerinde çalışılan test problemleri ile birlikte verilmiştir. Test problemleri için hesaplanan  $I_1$ ,  $I_2$  ve  $I_3$  korunum kanunlarından ve  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normlarından bahsedilmiştir.

İkinci, üçüncü, dördüncü ve beşinci bölümlerde, ilgili denklemler için kollokasyon sonlu eleman modelleri oluşturulmuştur. Her bir denklem için farklı test problemleri ele alınmış ve sayısal çözümlerin hataları  $L_2$  ortalama hata normu ve  $L_\infty$  maksimum hata normu elde edilerek analitik çözüm ile sayısal yöntemin ne kadar uyum içinde olduğu gösterilmiştir. Ayrıca her bölüm sonunda yapılan von Neumann tekniğine dayalı kararlılık analizi ile sunulan yöntemin koşulsuz olarak kararlı olduğu gösterilmiştir. Önemli ölçüde yüksek dereceden seçilen kuintik B-spline ve septik B-spline yaklaşım fonksiyonlarının kullanılması ile denklemlerin sayısal çözümlerinde iyileşmeler gözlemlenmiştir. Literatürde daha önce nümerik çözümü verilen bazı denklemlerin sonuçları, tezde elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmış ve tablolar halinde verilmiştir.

Bölüm sonlarında çizilen sayısal grafiklerden de görüldüğü gibi, büyük genlikli ve küçük genlikli dalgaların şekillerinin çarpışma öncesi ve sonrası tüm durumlar için korunduğu görülmektedir. Bu, soliton ve solitary dalgalarının önemli bir özelliğidir.

Sonuç olarak kollokasyon yöntemi, uygulama kolaylığı ve her bir denklem sisteminin sayısal çözümlerinde oldukça iyi sonuçlar vermesi nedeniyle benzer türdeki kısmi türevli diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerinin bulunması için önerilmektedir.

## KAYNAKLAR

1. Ostrovsky, L. A., Alexander I. P., "Modulated Waves: Theory and Applications, vol 9", *JHU Press*, s.125, 1999.
2. Scott, A. C., "Encyclopedia of Nonlinear Science", *Routledge*, s. 580, 2005.
3. Dean, R. G., "Water Wave Mechanics for Engineers and Scientists", *Advanced series on ocean engineering*, 2, s. 353, 1984.
4. Schwartz, L. W., Fenton, J. D., "Strongly nonlinear waves", *Annual review of fluid mechanics*, 14 (1), 39-60, 1982.
5. Cokelet, E. D., "Steep gravity waves in water of arbitrary uniform depth", *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 286 (1335), 183-230, 1977.
6. Patel, M. H., Seyed, F. B., "Internal flow-induced behaviour of flexible risers", *Engineering Structures*, 11(4), 266-280, 1989.
7. Murray, J., "British Association for the Advancement of Science", *Report of the Fourteenth Meeting of the British Association for the Advancement of Science*, Albemarle Street, London, September 1845.
8. Boussinesq, J., "Essai sur la théorie des eaux courantes", *Impr. nationale*, s. 74, 1877.
9. Rayleigh, L., "LIII. On the resistance of fluids", *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 2 (13), 430-441, 1876.
10. Aiyer, R.N., Fuchssteiner, B. O. W. "Solitons and discrete eigen functions of the recursion operator of non-linear evolution equations: the Caudrey-Dodd-Gibbon and Sawada-Kotera equations", *J. Phys. A: Math. Gen.*, 19, 3755-3770, 1986.
11. Argyris, J. H., "Energy theorems and structural analysis: a generalized discourse with applications on energy principles of structural analysis including the effects of temperature and nonlinear stress-strain relations", *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*, 26 (10), 347-356, 1954.
12. Arıkan, M. A. S., "Sonlu elemanlar metodunun mühendislikte uygulamaları", *Middle East Technical University*, s. 20, Ankara, 2000.



13. De Boor, C., "A practical guide to splines", *Springer, Verlag*, 1978.
14. Crank, J., Nicolson, P., "A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type", *In Mathematical proceedings of the Cambridge philosophical society*, 43 (1), s. 50-67, Cambridge University Press, January, 1947.
15. Karakoc, S. B. G., "Sonlu elemanlar yöntemi ile modifiye edilmiş eşit genişlikli dalga denkleminin sayısal çözümleri", *İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi*, s. 14-15, Malatya, 2011.
16. Karakoc, S. B. G., Omrani, K., Sucu, D., "Numerical investigations of shallow water waves via Generalized Equal Width (GEW) equation", *Applied Numerical Mathematics*, 162, 249-264, 2021.
17. Irk, D., "Bazı kısmi türevli diferensiyel denklem sistemlerinin B-spline sonlu elemanlar çözümleri", *Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi*, s. 6-8, 2007.
18. Taşcan, F., "İntegrallenebilirlik ve pertürbasyon teori", *Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi*, s. 63, 2002.
19. Walkley, M. A., "A Numerical method for extended Boussinesq shallow-water wave equations", *The University of Leeds School of Computer Studies, Doktora Tezi*, s.55, 1999.
20. Schumaker, L. L., "Spline functions: Basic theory", *Cambridge university press*, United Kingdom, s.92, 2007.
21. Yağmurlu, N. M., "2-boyutlu kısmi diferansiyel denklemlerin B-spline sonlu eleman yöntemleri ile nümerik çözümleri", *İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi*, s. 25-29, 2011.
22. Höllig, K., "Finite element methods with B-splines", *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 2003.
23. Prenter, P. M., "Splines and variational methods", Wiles, New York, 1975.
24. Gilson, C., Pickering, A., "Factorization and painleve analysis of a class of nonlinear third-order partial differential equations", *J. Phys. A: Math. Gen.*28, 2871–2888, 1995.

25. Li, C., Tang, S., Huang, W., Chen, A., "Peakons, Solitary Patterns and Periodic Solutions for Generalized Gilson-Pickering Equations", *Far East J. Appl. Math.*, 35, 301–307, 2009.
26. Zabihi, F., Saffarian, M., "A Meshless Method Using the Radial Basis Functions for Numerical Solution of the Gilson-Pickering Equation", *In Proceedings of the 46th Annual Iranian Mathematics Conference*, s. 1-4, Iran, 2015.
27. Fan, X., Yang, S., Zhao, D., "Travelling wave solutions for the Gilson–Pickering equation by using the simplified  $G'/G$ -expansion method", *Int. J. Nonlinear Sci.*, 8, 368–373 2009.
28. Ebadia, G., Karab, A.H., Petkovic, M.D., Biswas, A., "Soliton solutions and conservation laws of the Gilson–Pickering equation", *Waves Random Complex Media*, 21, 378–385, 2011.
29. Aslan, I., "Exact and explicit solutions to nonlinear evolution equations using the division theorem", *Appl. Math. Comput.* 217, 8134–8139, 2011.
30. Chen, A., Huang, W., Tang, S., "Bifurcations of travelling wave solutions for the Gilson-Pickering equation", *Nonlinear Anal.: Real World Appl.*, s.5-6, 2008.
31. Miura, R.M., "Backlund Transformation", *Springer-Verlag*, New York, 1973.
32. Malfliet, W., Hereman, W., "The tanh method I: Exact solutions of nonlinear evolution and wave equations", *Phys. Scr.*, 563–569, 1996.
33. Li, C., Tang, S., Huang, W., Chen, A., "Peakons, Solitary Patterns and Periodic Solutions for Generalized Gilson-Pickering Equations", *Far East J. Appl. Math*, 35, 301-307, 2009.
34. Karakoc, S. B. G., Bhowmik, S. K., Sucu, D. Y., "A Novel Scheme Based On Collocation Finite Element Method to Generalised Oskolkov Equation", *Journal of Science and Arts*, 21 (4), 895-908, 2021.
35. Alquran, M., "Bright and dark soliton solutions to the Ostrovsky-Benjamin-Bona-Mahony (OS-BBM) equation", *J. Math. Comput. Sci.*, 15-22, 2012.

36. Khan, K., Akbar, M. A., Alam, M. N., "Traveling wave solutions of the nonlinear Drinfel'd–Sokolov–Wilson equation and modified Benjamin–Bona–Mahony equations", *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, 233-240, 2013.
37. Sviridyuk, G. A., Shipilov, A. S., "On the stability of solutions of the Oskolkov equations on a graph", *Differential Equations*, 46 (5), 2010.
38. Akçagil, S., Aydemir, T., Gözükızıll, Ö. F., "Exact travelling wave solutions of nonlinear pseudoparabolic equations by using the  $G'/G$ –Expansion Method", *New Trends in Mathematical Sciences*, 4 (4), 51-66, 2016.
39. Roshid, M. M., Roshid, H. O., "Exact and explicit traveling wave solutions to two nonlinear evolution equations which describe incompressible viscoelastic Kelvin-Voigt fluid", *Heliyon*, 4, 2018.
40. Gözükızıll, Ö. F., Akçagil, S., "The tanh-coth method for some nonlinear pseudoparabolic equations with exact solutions", *Advances in Difference Equations*, 143, 2013.
41. Dhawan, S., Ak, T., Apaydın, G., "Algorithms for numerical solution of the equal width wave equation using multi-quadric quasi-interpolation method", *International Journal of Modern Physics C (IJMPC)*, 30 (11), 1-17, 2019.
42. Kudryashov, N. A., Sinelshchikov, D. I., "Nonlinear waves in bubbly liquids with consideration for viscosity and heat transfer", *Physics Letters A*, 374 (19-20), 2011-2016, 2010.
43. Bruzón, M. S., Recio, E., de la Rosa, R., Gandarias, M. L., "Local conservation laws, symmetries, and exact solutions for a Kudryashov-Sinelshchikov equation", *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 41(4), 1631–1641, 2018.
44. Ryabov, P. N., "Exact solutions of the Kudryashov–Sinelshchikov equation", *Applied Mathematics and Computation*, 217 (7), 3585-3590, 2010.
45. Randrüüt, M., "On the Kudryashov–Sinelshchikov equation for waves in bubbly liquids", *Physics Letters A*, 375 (42), 3687-3692, 2011.

46. Mirzazadeh, M., Eslami, M., "Exact solutions of the Kudryashov–Sinelnshchikov equation and nonlinear telegraph equation via the first integral method", *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, 17 (4), 481-488, 2012.
47. He, B., Meng, Q., Zhang, J., Long, Y., "Periodic loop solutions and their limit forms for the Kudryashov-Sinelnshchikov equation", *Mathematical Problems in Engineering*, 2012, 2012.
48. Seadawy, A. R., Iqbal, M., Lu, D., "Nonlinear wave solutions of the Kudryashov–Sinelnshchikov dynamical equation in mixtures liquid-gas bubbles under the consideration of heat transfer and viscosity", *Journal of Taibah University for Science*, 13 (1), 1060-1072, 2010.
49. Li, J., Chen, G., "Exact traveling wave solutions and their bifurcations for the Kudryashov–Sinelnshchikov equation", *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 22 (05), 1250118, 2012.
50. Nadjafikhah, M., Shirvani-Sh, V., "Lie symmetry analysis of Kudryashov-Sinelnshchikov equation", *Mathematical Problems in Engineering*, 2011.
51. Zhao, Y. M., "F-expansion method and its application for finding new exact solutions to the Kudryashov-Sinelnshchikov equation", *Journal of Applied Mathematics*, 2013, 2013.
52. Lu, J., "New exact solutions for Kudryashov–Sinelnshchikov equation", *Advances in Difference Equations*, 2018 (1), 1-17, 2018.
53. Feng, Y. L., Shan, W. R., Sun, W. R., Zhong, H., Tian, B. "Bifurcation analysis and solutions of a three-dimensional Kudryashov–Sinelnshchikov equation in the bubbly liquid", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 19 (4), 880-886, 2014.
54. He, Y., Li, S., Long, Y., "Exact Solutions of the Kudryashov-Sinelnshchikov Equation Using the Multiple-Expansion Method", *Mathematical Problems in Engineering*, 2013, 2013.
55. Gupta, A. K., Ray, S. S., "On the solitary wave solution of fractional Kudryashov–Sinelnshchikov equation describing nonlinear wave processes in a liquid containing gas bubbles", *Applied Mathematics and Computation*, 298, 1-12, 2017.

56. Ak, T., Osman, M. S., Kara, A. H., "Polynomial and rational wave solutions of Kudryashov-Sinelshchikov equation and numerical simulations for its dynamic motions", *Journal of Applied Analysis & Computation*, 10 (5), 2145-2162, 2020.
57. Abbasbandy, S., Zakaria, F. S., "Soliton solutions for the fifth-order KdV equation with the homotopy analysis method", *Nonlin. Dyn.*, 51 (1), 83–87, 2008.
58. Ahmad, H., Khan, T. A., Yao, S. W., "An efficient approach for the numerical solution of fifth-order KdV equations", *Open Mathematics*, 18 (1), 738-748, 2020.
59. Allen, L. J. S., "An Introduction to Mathematical Biology", *Pearson-Prentice Hall*, Upper Saddle River, s. 224, New Jersey, 2007.
60. Arshad, M., Lu, D., Wang, J., "Exact traveling wave solutions of a fractional Sawada-Kotera equation", *East Asian Journal on Applied Mathematics*, 8 (2), 211-223, 2018.
61. Bakodah, H. O., "Modified adomain decomposition method for the generalized fifth order KdV equations", *Am. J. Comput. Math.*, 3, 53–58, 2013.
62. Fermi, E., Pasta, P., Ulam, S., Tsingou, M., "Studies of the nonlinear problems", *Los Alamos Scientific Lab.*, N. Mex., 1955.
63. Goswami, A., Singh, J., Kumar, D., "Numerical simulation of fifth order KdV equations occurring in magneto-acoustic waves", *Ain Shams Eng. J.*, 9 (4), 2265–2273, 2018.
64. Hepson Ö., "Bazı Kısmi Diferensiyel Denklemlerinin Üstel Kübik B-spline Kolokeyşın Çözümlerinin Üretilmesi", *Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi*, s. 24, Eskişehir, 2015.
65. Sawada, K., Kotera, T., "A method for finding N-soliton solutions for the KdV equation and KdV-like equation", *Prog. Theor. Phys.*, 51, 1355–1367, 1974.
66. Konopelchenko, B. G., Dubrovsky, V. G., "Some new integrable nonlinear evolution equations in 2+ 1 dimensions", *Physics Letters A*, 102 (1-2), 15-17, 1984.
67. Lax, P. D., "Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves", *Commun. Pure Appl. Math.*, 62, 467–490, 1968.
68. Kaup, D., "On the inverse scattering problem for the cubic eigenvalue problems of the class  $\psi_{3x} + 6Q\psi_x + 6R\psi = \lambda\psi$ ", *Stud. Appl. Math.*, 62, 189–216, 1980.

69. Kupershmidt, B. A., "A super KdV equation: an integrable system", *Phys. Lett. A*, 102, 213–215, 1984.
70. Ito, M., "An extension of nonlinear evolution equations of the KdV (mKdV) type to higher orders", *J. Phys. Soc. Jpn.*, 49, 771–778, 1980.
71. Gupta, A.K., Ray, S.S., "Numerical treatment for the solution of fractional fifth-order Sawada–Kotera equation using second kind Chebyshev wavelet method", *Appl. Math. Model.*, 39, 5121–5130, 2015.
72. Kumar, D., Park, C., Tamanna, N., Paul, G. C., Osman, M. S., "Dynamics of two-mode Sawada-Kotera equation: Mathematical and graphical analysis of its dual-wave solutions", *Results in Physics*, 19, 103581, 2020.
73. Manafian, J., Lakestani, M., "Lump-type solutions and interaction phenomenon to the bidirectional Sawada–Kotera equation", *Pramana*, 92 (3), 1-13, 2019.
74. Liu, C., Dai, Z. "Exact soliton solutions for the fifth-order Sawada–Kotera equation", *Applied Mathematics and Computation*, 206 (1), 272-275, 2008.
75. Özkan, Z., Uyhan, R. "Sawada-Kotera Denkleminin Nümerik Yöntemlerle Çözümü ve Çözümlerin Karşılaştırılması", *Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Fen Dergisi*, 14 (2), 256-268, 2019.
76. Durur, H., Yokuş, A., "Hyperbolic Traveling Wave Solutions for Sawada–Kotera Equation Using  $(1/G')$ -Expansion Method", *Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi*, 19 (3), 615-619, 2019.
77. Adem, A. R., Lü, X., "Travelling wave solutions of a two-dimensional generalized Sawada–Kotera equation", *Nonlinear Dynamics*, 84 (2), 915-922, 2016.
78. Ray, S. S., Sahoo, S., "A novel analytical method with fractional complex transform for new exact solutions of time-fractional fifth-order Sawada-Kotera equation", *Reports on Mathematical Physics*, 75 (1), 63-72, 2015.
79. Karakoc, S. B. G., Saha, A., Sucu, D. Y., "A collocation algorithm based on septic B-splines and bifurcation of traveling waves for Sawada–Kotera equation", *Mathematics and Computers in Simulation*, 203, 12-27, 2023.

80. Wazwaz, A. M., "Multiple-soliton solutions for the fifth order Caudrey–Dodd–Gibbon (CDG) equation", *Applied Mathematics and Computation*, 197, 719–724, 2008.
81. Weiss, J., "On classes of integrable systems and the Painlevé property", *J. Math. Phys.*, 25 (1), 13–24, 1984.
82. Jiang, B., Bi, Q., "A study on the bilinear Caudrey Dodd Gibbon equation", *Nonlinear Analysis*, 72, 4530-4533, 2010.
83. Salas, A., "Some exact solutions for the Caudrey-Dodd-Gibbon equation", arXiv preprint, Cornell University arXiv:0805.2969, 23008.
84. Wazwaz, A. M., "Analytic study of the fifth order integrable nonlinear evolution equations by using the tanh method", *Appl. Math. Comput.*, 174, 289-299, 2006.
85. Salas, A., "Exact solutions for the general fifth KdV equation by the exp function method", *Appl. Math. Comput.*, 205, 291-297, 2008.
86. Xu, Y. G., Zhou, X. W., Yao, L., "Solving the fifth order Caudrey Dodd Gibbon (CDG) equation using the exp-function method", *Appl. Math. Comput.*, 206, 70-73, 2008.
87. Karaağaç, B., "A numerical approach to Caudrey Dodd Gibbon equation via collocation method using quintic B-spline basis", *TWMS J. App. and Eng. Math.*, 9 (1), Special Issue, 1-8, 2019.
88. Jafari, H., Kadkhoda, N., Azadi, M., Yaghobi, M., "Group classification of the time-fractional Kaup-Kupershmidt equation", *Scientia Iranica*, 24, 302-307, 2017.
89. Hereman, W., Nuseir, A., "Symbolic methods to construct exact solutions of nonlinear partial differential equations", *Math. Comput. Simul.*, 43, 13–27, 1997.
90. Musette, M., Conte, R., "Bäcklund transformation of partial differential equations from the Painlevé–Gambier classification I. Kaup–Kupershmidt equation", *J. Math. Phys.*, 39, 5617, 1998.
91. Zait, R. A., "Bäcklund transformations, cnoidal wave and travelling wave solutions of the SK and KK equations", *Chaos, Solitons & Fractals*, 15 (4), 673-678, 2003.
92. Parker, A., "On soliton solutions of the Kaup–Kupershmidt equation. I. Direct bilinearisation and solitary wave", *Physica D*, 137 (1-2), 25-33, 2000.

93. Parker, A., "On soliton solutions of the Kaup–Kupershmidt equation. II. 'Anomalous' N-soliton solutions", *Physica D*, 137 (1), 34-48, 2000.
94. Ablowitz, M. J., Clarkson, P. A., "Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering", *Cambridge University Press*, Cambridge, 1991.
95. Sahoo, S., Ray, S. S., Abdou, M. A., "New exact solutions for time-fractional Kaup–Kupershmidt equation using improved  $G'/G$ - expansion and extended  $G'/G$ -expansion methods", *Alexandria Engineering Journal*, 59, 3105–3110, 2020.
96. Reyes, E. G., "Nonlocal symmetries and the Kaup–Kupershmidt equation", *Journal of Mathematical Physics*, 46 (7), 073507, 2005.
97. Reyes, E. G., Sanchez, G., "Explicit Solutions to the Kaup–Kupershmidt Equation via Nonlocal Symmetries", *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 17 (8), 2749-2763, 2007.
98. Karakoc, S. B. G., Ali, K. K., Sucu, D. Y., "A new perspective for analytical and numerical soliton solutions of the Kaup–Kupershmidt and Ito equations", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 114850, 2022.
99. Ito, M., "A reduce program for finding symmetries of nonlinear evolution equations with uniform rank", *Computer physics communications*, 42 (3), 351-357, 1986.
100. Wang, J., Xu, T. Z., Wang, G. W., "Numerical algorithm for time-fractional Sawada-Kotera equation and Ito equation with Bernstein polynomials", *Applied Mathematics and Computation*, 338, 1-11, 2018.
101. Xu, Y., Shu, C. W., "Local discontinuous Galerkin methods for the Kuramoto–Sivashinsky equations and the Ito-type coupled KdV equations", *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 195 (25-28), 3430-3447, 2006.
102. Gomez S, C. A., "New traveling waves solutions to generalized Kaup–Kupershmidt and Ito equations", *Applied Mathematics and Computation*, 216 (1), 241-250, 2010.
103. Kaya, D., "An explicit and numerical solutions of some fifth-order KdV equation by decomposition method", *Appl. Math. Comput.*, 144, 353–363, 2003.



104. Wazwaz, A. M., "The extended tanh method for new solitons solutions for many forms of the fifth-order KdV equations", *Applied Mathematics and Computation*, 184 (2), 1002-1014, 2007.
105. Saleem, S., Hussain, M. Z., "Numerical Solution of Nonlinear Fifth-Order KdV-Type Partial Differential Equations via Haar Wavelet", *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, 6 (164), 1-16, 2020.
106. Wazwaz, A. M., "N-soliton solutions for the combined KdV–CDG equation and the KdV–Lax equation", *Applied mathematics and computation*, 203 (1), 402-407, 2008.
107. Lei, Y., Fajiang, Z., Yinghai, W., "The homogeneous balance method, Lax pair, Hirota transformation and a general fifth-order KdV equation", *Chaos, Solitons & Fractals*, 13 (2), 337-340, 2002.
108. Ablowitz, M. J., Ablowitz, M. A., Clarkson, P. A., Clarkson, P. A., "Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering", *Cambridge university press*, 149, 1991.
109. Darvishi, M. T., Khani, F., Kheybari, S., "A Numerical Solution of the Lax's 7th-order KdV equation by Pseudospectral Method and Darvishi's Preconditioning", *Int. J. Contemp. Math. Sci*, 2 (22), 1097-1106, 2007.
110. Geyikli, T., "Modelling Solitary Waves of a Fifth-Order Non-Linear Wave Equation", *International Journal of Computer Mathematics*, 84, (7), 1079-1087, 2007.
111. Inc, M., "On numerical soliton solution of the Kaup–Kupershmidt equation and convergence analysis of the decomposition method", *Applied Mathematics and Computation*, 172, 72–85, 2006.