

**T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BAZI ROSENAU TİPİ DENKLEMLERİN B-SPLINE
KOLLOKASYON YÖNTEMİYLE NÜMERİK
ÇÖZÜMLERİ**

**Tezi Hazırlayan
Özge TARI**

**Tez Danışmanı
Doç. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ**

**Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi**

**Ocak 2023
NEVŞEHİR**

**T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BAZI ROSENAU TİPİ DENKLEMLERİN B-SPLINE
KOLLOKASYON YÖNTEMİYLE NÜMERİK
ÇÖZÜMLERİ**

**Tezi Hazırlayan
Özge TARI**

**Tez Danışmanı
Doç. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ**

**Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi**

**Ocak 2023
NEVŞEHİR**

Doç. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ danışmanlığında **Özge TARI** tarafından hazırlanan " **Bazı Rosenau Tipi Denklemlerin B-Spline Kollokasyon Yöntemiyle Nümerik Çözümleri** " başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

16/01/2023

JÜRİ

Başkan :Prof. Dr. Danyal SOYBAŞ

Üye :Doç. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ

Üye :Prof. Dr. Yasin YAZLIK

ONAY:

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun.....tarih ve..... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

.././2023

Doç. Dr. Cemal ÇARBOĞA
Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİM SAYFASI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada yer alan bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu ve bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Özge TARI



TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim süresince bilgi ve tecrübesini benimle paylaşan Sayın Hocam Doç. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ' a ve destekleri için değerli aileme çok teşekkür ederim.



**BAZI ROSENAU TİPİ DENKLEMLERİN B-SPLINE KOLLOKASYON
YÖNTEMİYLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ
(Yüksek Lisans Tezi)**

Özge TARI

**NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Ocak 2023

ÖZET

Tezin birinci bölümünde B-spline fonksiyonlar, soliton, solitary dalgalar ve sonlu elemanlar yöntemi hakkında genel bilgiler verilmiştir. Tezin ikinci bölümünde Rosenau-KdV ve Rosenau-KdV-RLW denklemleri hakkında bilgiler verilmiştir. Tezin üçüncü bölümünde Rosenau-KdV denkleminin sayısal çözümleri kuintik (5. dereceden) B-spline kollokasyon sonlu elemanlar yöntemi ile elde edilmiştir. Tezin dördüncü bölümünde Rosenau-KdV-RLW denkleminin sayısal çözümleri septik (7.dereceden) B-spline kollokasyon sonlu elemanlar yöntemi ile bulunmuştur. Tezin beşinci bölümünde ise tartışma ve öneriler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Rosenau-KdV-RLW denklemi, sonlu elemanlar yöntemi, kollokasyon, septik B-spline, soliton

Tez Danışman: Doç. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ

Sayfa sayısı: 53

**NUMERICAL SOLUTIONS OF SOME ROSENAU'S TYPE EQUATION
WITH B-SPLINE COLLOCATION METHOD**

Özge TARI

**NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES**

January 2023

ABSTRACT

In the first part of the thesis, general information about B-spline functions, soliton, solitary waves and finite element method is given. In the second part of the thesis, information about Rosenau-KdV and Rosenau-KdV-RLW equations is given. In the third part of the thesis, numerical solutions of Rosenau-KdV equation are obtained with quintic (5th order) B-spline collocation finite elements method. In the fourth part of the thesis, numerical solutions of Rosenau-KdV-RLW equation are found by septic (7th degree) B-spline collocation finite elements method. In the fifth part of the thesis, discussion and suggestions are given.

Keywords: Rosenau-KdV-RLW equation, finite elements method, collocation, septic B-spline, soliton

Thesis Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Seydi Battal Gazi Karakoc

Page Number: 53

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY SAYFASI	i
TEZ BİLDİRİM SAYFASI	ii
TEŞEKKÜR	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
İÇİNDEKİLER	vi
TABLolar LİSTESİ	viii
ŞEKİLLER LİSTESİ	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ	xi
BÖLÜM 1	1
1.1. B-Spline Fonksiyonlar	1
1.2. Soliton ve Solitary Dalgalar	2
1.3. Sonlu Elemanlar Metodu	4
BÖLÜM 2	5
BÖLÜM 3	7
3.1. Rosenau KdV Denkleminin Kuintik B-Spline Fonksiyonlar ile Sayısal Çözümleri	7
3.2. Kararlılık Analizi	11
3.3. Sayısal Hesaplamalar ve Sonuçlar	12
3.4. Tek Solitary Dalganın Hareketi	12
BÖLÜM 4	18
4.1. Rosenau KdV-Rlw Denkleminin Septik B-spline Fonksiyonlar ile Sayısal Çözümleri	20
4.2. Kararlılık Analizi	25
4.3. Sayısal Sonuçlar	26
4.3.1. Solitary dalgalar	26
4.3.2. Şok dalgaları	29

BÖLÜM 5	35
SONUÇ VE ÖNERİLER	35
KAYNAKLAR	36
ÖZGEÇMİŞ	39



TABLULAR LİSTESİ

Tablo 3.4.1	Tek solitary dalganın $-70 \leq x \leq 100$ aralığında $h = \Delta t = 0.1$ için elde edilen hata normları ve değişmezleri.....	13
Tablo 3.4.2	Tek dalganın $-70 \leq x \leq 100$ aralığında $h = \Delta t = 0.05$ için elde edilen hata normları ve değişmezleri.....	15
Tablo 3.4.3	Tek solitary dalga için değişmezler ve hata normları $h = 0.025, \Delta t = 0.025, -70 \leq x \leq 100$	16
Tablo 4.3.1.1	$[-40,100]$ aralığında $a = 1, \gamma = 1, \beta = 1, b = 1, \alpha = 12, n = 3$ parametreleri için solitary dalganın invariant ve hata normları.....	28
Tablo 4.3.1.2	$t = 30$ ve $[-40,100]$ aralığında $a = 1, \gamma = 1, \beta = 1, b = 1, \alpha = 12, n = 3$ parametreleri için hata normlarının karşılaştırılması.....	29
Tablo 4.3.2.1	$[-200,250]$ aralığında ve $a = 1, \gamma = 0.04, \beta = 0.025, b = 1, \alpha = 12, n = 3$, parametreleri için şok solitary dalganın hata normları	31
Tablo 4.3.2.2	$[-100,100]$ aralığında $a = 0.125, \gamma = 0.5, \beta = 0.04, b = 20, \alpha = 25, n = 5$, parametreleri için solitary dalganın hata normları.....	33

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1.2.1	Basit bir dalga profili.....	2
Şekil 3.4.1	Tek dalganın $-70 \leq x \leq 100$ aralığında $h = \Delta t = 0.1$ ve $t = 0,20$ ve 40 için hareketi	14
Şekil 3.4.2.	Tek dalganın $-70 \leq x \leq 100$ aralığında $h = \Delta t = 0.1$ ve $t = 40$ zaman adımındaki hata dağılımı.....	14
Şekil 3.4.3	Tek dalganın $-70 \leq x \leq 100$ aralığında $h = \Delta t = 0.05$ ve $t = 0,20$ ve 40 için hareketi	15
Şekil 3.4.4	Tek dalganın $-70 \leq x \leq 100$ aralığında $h = \Delta t = 0.05$ ve $t = 40$ zaman adımındaki hata dağılımı.....	15
Şekil 3.4.5	Tek dalganın $-70 \leq x \leq 100$ aralığında $h = \Delta t = 0.025$ ve $t = 0,20$ ve 40 için hareketi	17
Şekil 3.4.6	Tek dalganın $-70 \leq x \leq 100$ aralığında $h = \Delta t = 0.025$ ve $t = 40$ zaman adımındaki hata dağılımı.....	17
Şekil 4.3.1.1	$[-40,100]$ aralığında $a = 1, \gamma = 1, \beta = 1, b = 1, \alpha = 12, n = 3$, olmak üzere a) $h = \Delta t = 0.25$, b) $h = \Delta t = 0.5$ için soliton dalganın hareketi	29
Şekil 4.3.1.2	$t = 40$ ve $a = 1, \gamma = 1, \beta = 1, b = 1, \alpha = 12, n = 3$, olmak üzere a) $h = \Delta t = 0.25$, b) $h = \Delta t = 0.5$ için hata dağılımları	29
Şekil 4.3.2.1	$t = 40$ ve $-200,250$ aralığında belirli zamanlarda $A = 0.00184, v = 1, a = 1, \gamma = 0.04, \beta = 0.025, b = 1, \alpha = 5, n = 3, ah = \Delta t = 0.1, bh = \Delta t = 0.2$ için şok dalgasının hareketi	31
Şekil 4.3.2.2	$t = 40$ ve $-200,250$ aralığında belirli zamanlarda $A = 0.00184, v = 1, a = 1, \gamma = 0.04, \beta = 0.025, b = 1, \alpha = 5, n = 3$, olmak üzere a) $h = \Delta t = 0.1$, b) $h = \Delta t = 0.2$ için hata dağılımları	32
Şekil 4.3.2.3	$[-100,100]$ aralığında $A = 0.02641, v = 0.12500, a = 0.125, \gamma = 0.5, \beta = 0.04, b = 1, \alpha = 25, n = 5$ olmak üzere a) $h = \Delta t = 0.1$, b) $h = \Delta t = 0.05$ parametreleri için şok dalgasının hareketi	33

Şekil 4.3.2.4 $t = 0$ ve $-100,100$ aralığında $A = 0.02641$, $v = 0.12500$, $a = 0.125$, $\gamma = 0.5$, $\beta = 0.04$, $b = 1$, $\alpha = 25$, $n = 5$, olmak üzere a) $h = \Delta t = 0.1$, b) $h = \Delta t = 0.05$ şok dalgasının hata dağılımları..... 34



SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

RLW	Düzenli uzun dalga
KdV	Korteweg-de Vries
L_2 ve L_∞	Hata normları
I_1	Kütle
I_2	Momentum
R-KdV	Rosenau Korteweg de Vries
R-KdV-RLW	Rosenau Korteweg de Vries Düzenli Uzun Dalga

BÖLÜM 1

1.1. B-Spline Fonksiyonlar

Spline fonksiyonların hesaplanması sonucunda hem lineer sistemler, hem de lineer olmayan sistemler elde edilebilir. Bu sistemler bazen istenilen parametrelerin hesaplanmasına izin vermeyebilir. Spline yaklaşımların elde edilmesi sürecinde sayısal kararsızlıklar ile de karşılaşılabilir. Karşılaşılan zorluklar Basis Spline (B-spline) adı verilen fonksiyon ile aşılabılır. Sayısal hesaplamalar için B-Spline fonksiyonlar oldukça kullanışlıdır [1].

B-spline fonksiyonlar parçalı polinom fonksiyonlardır. Belirli bir derece ve düzgünlükteki her spline fonksiyon, aynı derece ve düzgünlükteki B-spline fonksiyonların bir lineer birleşimi ile temsil edilebilir. Dolayısıyla B-spline fonksiyonlar aynı dereceye sahip spline fonksiyonlar için bir taban oluşturur. Bu nedenle bu fonksiyonlara B-spline (basis spline) denir [1].

Sıfırıncı dereceden B-spline fonksiyonları S_i^0 ile gösterilir ve

$$S_i^0(x) = \begin{cases} 1, & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. $k \geq 1$ ve $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ olmak üzere sıfırıncı dereceden S_i^0 B-spline fonksiyonları kullanılarak daha yüksek dereceden B-spline fonksiyonlar

$$S_i^k(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+k} - x_i} S_i^{k-1}(x) + \frac{x_{i+k+1} - x}{x_{i+k+1} - x_{i+1}} S_{i+1}^{k-1}(x)$$

indirgeme bağıntısı yardımıyla türetilir.

Bu tezde B-spline fonksiyonların $[a, b]$ aralığında tanımlı olduğu ve bu aralığın düzgün bir parçalanışı, alt aralık uzunluğu h olmak üzere

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$$

olarak alınacaktır. Bu durumda konum aralığındaki bölünme noktaları için

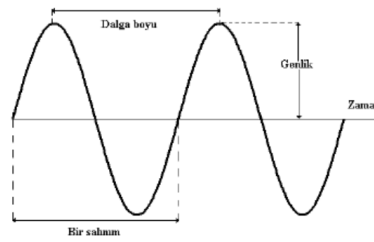
$$x_m = x_{m-1} + h, \quad m = 1, \dots, N$$

olacaktır. Dolayısıyla parçalanma düzgün olduğu için konum aralığı üzerindeki tüm aralıkların uzunluğu eşit ve h olacaktır.

1.2. Soliton ve Solitary Dalgalar

Dalga, uzayda ve maddede yayılan enerjinin iletilmesine yol açan bir titreşimdir. Dalga hareketi çok az ya da hiç kütle taşınımı olmadan enerjinin taşınmasıdır. Dalgalar titreşim doğrultusuna göre enine ve boyuna dalgalar olmak üzere ikiye ayrılır. Titreşim doğrultusu ile yayılma doğrultusu birbirine dik ise bu dalgalara enine dalgalar, titreşim doğrultusu ile yayılma doğrultusu birbirine paralel ise bu dalgalara da boyuna dalgalar denir. Elektromanyetik dalgalar enine dalgalar iken ses dalgaları boyuna dalgalardır. Yay dalgaları, deprem dalgaları ve su dalgaları ise hem enine hem de boyuna dalgalardır [2].

Dalgalar taşıdığı enerjiye göre ikiye ayrılır. Bunlar mekanik dalga ve elektromanyetik dalgadır. Bu dalgalar maddesel bir ortamda yayılabilen dalgalardır.



Şekil 1.2.1 Basit bir dalga profili

Dalgalar, ilerleyen dalgalar ve duran dalgalar olarak da sınıflandırılabilir. Duran dalgaların pozisyonu sabit olup ortamın dalgaya zıt yönde hareket etmesi ile ya da ortam durağan iken iki dalganın birbirine zıt yönde hareket etmesi sonucu oluşur. İlerleyen dalgalar ise madde taşınımı olmaksızın enerjinin yayılması ile meydana gelen dalgalardır.

Solitonlar şekilleri, hızları ve genlikleri sabit olup diğer solitonlarla etkileşebilen ve etkileşme sonrasında özelliklerini muhafaza edebilen özel tipten dalgalardır. Soliton ifadesi ilk olarak John Scott Russell tarafından 1834 yılında kullanılmıştır [2].

Çarpışma sonrası özelliklerini (şekil, genlik, hız) muhafaza etmeye çalışan ve bu özelliği nedeniyle soliton dalgalarına benzeyen dalgalara solitary dalgaları denir. Yaptığı çalışmalar sonucunda Russell solitary dalgaların özellikleri ile ilgili aşağıdaki sonuçlara ulaşmıştır.

- i) Solitary dalgalar $(\sinh^2(k - (x - vt)))$ şeklindedir.
- ii) İki veya daha fazla bağımsız solitary dalgası yeterince büyük miktardaki su kütlesi tarafından üretilir.
- iii) Diğer dalgalardan farklı olarak solitary dalgalar birleşmezler. Bu özellikten dolayı genliği küçük olan bir solitary dalga ile genliği büyük olan bir solitary dalga çarpıştıktan sonra şekillerinde herhangi bir değişiklik olmaksızın hareketlerine devam ederler [3].

O dönemde Russell'in çalışmaları deneysel olarak kalmış ve herhangi bir denklemin çözümü olacak şekilde solitary dalgalar elde edilememiştir. Fakat bir denklemin çözümü olan solitary dalga problemleri uzun bir süre bilim adamları tarafından araştırılmış. 1895 yılında Hollandalı matematikçi Korteweg ve doktora öğrencisi de Vries [4]

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + c \cdot \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} + \gamma u(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = 0$$

denkleminin;

$$u(x, t) = \gamma(x - vt)$$

formunda şekli değişmeyen bir hareketli dalga çözümüne sahip olduğunu göstermişler. Denkleminde $u(x, t)$ dalganın genliğini; $c = \sqrt{gd}$ küçük genlikli dalganın hızını; γ lineer olmayan parametreyi ; $\varepsilon = c(\frac{d^2}{6} - \frac{T}{2pg})$ dağılma parametresini, T yüzey gerilimini, p ise suyun yoğunluğunu göstermektedir.

1.3. Sonlu Elemanlar Metodu

Sonlu elemanlar yöntemi mühendislik alanında farklı problemlerin çözümü için kullanılmıştır. Karmaşık fiziksel özelliklere sahip olan bu problemleri basit forma indirgeyerek probleme çözüm arayan bir yöntemdir.

Sonlu elemanlar yönteminin diğer yöntemlere göre bazı avantajları aşağıdaki gibidir;

- Düzensiz şekildeki yapıları ve diğer yöntemlerle modellenemeyen değişik karmaşık bölgeleri daha kolay bir şekilde modelleyebilmesi.
- Eleman denklemleri ayrı ayrı oluşturulduğundan değişik malzemeden oluşan yapıları modelleyebilmesi.
- Farklı sınır şartları ile kullanılabilmesi.
- Elemanların büyüklüklerinin değiştirilebilmesi.
- Sonlu eleman modelinin ihtiyaç duyulduğunda kolaylıkla değiştirilmesi.
- Bilgisayar programlama diline uygun olması.

Sonlu elemanlar yönteminin bu avantajlarının yanında çözüm bölgesinin alt bölgelere ayrılması işlemin belirli bir tecrübeyi gerektirmesi, süreklilik şartlarının alt bölgelere uygulanmasında bazı zorluklarla karşılaşılması, bilgisayara veri girişi sırasında bazı hatalar yapılması gibi dezavantajları da vardır. Yöntemin başlıca adımları;

- Problemin çözüm bölgesinin ayrıklaştırılması.
- Problemin denklemlerini elde etmek için eleman denklemlerinin birleştirilmesi.
- Sınır şartlarının uygulanması.
- Birleştirilmiş denklemlerin çözümünün yapılması.
- Çözüm sonunda elde edilen sonuçların değerlendirilmesi [1].

BÖLÜM 2

Bu bölümde fizikteki önemli denklemlerden biri olan Rosenau-KdV denkleminin sayısal çözümleri incelenmiştir. Bunun için denkleme kuintik B-spline baz fonksiyonları kullanılarak kollokasyon sonlu elemanlar yöntemi uygulanmıştır. Yöntemin kararlılık analizi, Von-Neumann yöntemine dayanan sayısal şemanın lineer kararlılık analizi ile gösterilmiştir. Önerilen yöntemin doğruluğunu ve verimliliğini göstermek için solitary dalganın hareketi, L_2 ve L_∞ hata normları hesaplanarak incelenmiştir. Simülasyonun değişmeyen özelliklerini tanımlamak için I_1 ve I_2 değişmezleri hesaplanmıştır.

Birçok fiziksel olay Korteweg-de-Vries (KdV) denklemi ile tanımlanabilir. Korteweg-de-Vries denklemi aşağıdaki gibidir.

$$U_t + UU_x + U_{xxx} = 0. \quad (2.1)$$

Bu denklem doğrusal olmayan dağılımlı sıç su dalgalarının incelenmesinde önemli bir rol oynamaktadır. Bu tür denklemler fiziksel olaylarda sayısal simülasyonlar ile doğrusal olmayan denklemlerin önemli bir sınıfını oluşturur. Yoğun ayrık dinamik sistemlerde dalga-dalga ve dalga-duvar etkileşimleri KdV denklemi ile tanımlanamaz. KdV denkleminin bu eksikliğini gidermek için;

$$U_t + U_{xxxxt} + U_x + UU_x = 0 \quad (2.2)$$

şeklindeki Rosenau denklemi türetilmiştir.

Denklemin sayısal çözümleri için bilim adamları tarafından birçok çalışma yapılmıştır. (2.2) ile verilen denklemin çözümünün varlığı ve tekliği ile ilgili teorik sonuçlar [6] ile verilen referansta kanıtlanmıştır. Jin-Ming-Zuo [7], denklemin solitary dalga ve periyodik çözümlerini elde etmiştir.

Rosenau-KdV denklemi;

$$U_t + U_{xxxxt} + U_x + UU_x + U_{xxx} = 0 \quad (2.3)$$

şeklinde bir forma sahiptir.

Burada U_{xxx} viskoz terimdir ve bağımsız değişkenler x ve t konumsal ve zamansal değişkenleri gösterir. Yine genelleştirilmiş Rosenau-KdV denkleminin solitary dalga çözümleri Esfahani [8] tarafından elde edilmiştir. Denklemin ansatz ve exp fonksiyon yöntemleri ile elde edilen çözümleri [9] ile verilen referansta gösterilmiştir. Rosenau-KdV denkleminin bir başlangıç-sınır değer problemi için sayısal çözümler üçüncü mertebeden doğrusal sonlu fark şeması kullanılarak [10] nolu referansta elde edilmiştir. Rosenau-KdV denkleminin sayısal çözümleri çeşitli yöntemlerle elde edilmiştir. Zuo, Rosenau-KdV denklemini çözmek için sinüs-kosinüs ve tanh yöntemlerini kullanmıştır [7]. Rosenau-KdV denkleminin başlangıç-sınır değer probleminin sayısal çözümü için Hu üçüncü mertebeden lineer sonlu fark yöntemini geliştirmiştir [10]. Bu denklemin topolojik soliton çözümleri veya şok dalga çözümleri G. Ebadi tarafından incelenmiştir [11]. [12,13] referanslarında yazarlar denklemin sayısal çözümlerini sırasıyla septik B-spline baz fonksiyonları kullanarak subdomain yöntemi ile ve yine septik B-spline kollokasyon sonlu elemanlar yöntemiyle elde etmişlerdir.

$$U_t + aU_x - \gamma^{RLW}U_{xxt} + \beta^{KdV}U_{xxx} + bU_{xxxxt} + \alpha(U^n)_x = 0, \quad (2.4)$$

Razborova ve arkadaşları [14,15] Rosenau-KdV-RLW denkleminin pertürbe edilmiş soliton çözümlerini ve denklemin değişmezlerini Lie simetri analizi kullanarak göstermişlerdir. Ayrıca denklem ansatz metodu ve yarı ters varyasyon prensibi ile Razborova ve arkadaşları tarafından çözülmüştür [16]. Genelleştirilmiş Rosenau-KdV-RLW denkleminin sayısal çözümleri homojen sınır koşulları ve başlangıç Gauss şartları kullanılarak Fernandez ve Ramos tarafından elde edilmiştir [17]. Rosenau-KdV-RLW denklemini çözmek için 3. mertebeden kapalı sonlu fark algoritması Wang ve Dai tarafından sunulmuştur [18].

BÖLÜM 3

Bu bölümde S.B.G.Karakoç ve T.Ak'ın [5] nolu referans ile belirtilen makaleleri incelenmiştir.

3.1. Rosenau KdV Denkleminin Kuintik B-Spline Fonksiyonlar ile Sayısal Çözümleri

Bu bölümde (2.3) ile verilen Rosenau-KdV denklemi;

$$\begin{aligned} U(a, t) = 0, U(b, t) = 0, \\ U_x(a, t) = 0, U_x(b, t) = 0, t > 0 \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

sayısal yöntemi uygulayabilmek için problemin çözüm bölgesi $a \leq x \leq b$ aralığı ile sınırlandırılmıştır. Aralık uzunluğu eşit büyüklükte sonlu elemanlar halinde bölünür.

$$U(x, 0) = f(x), a \leq x \leq b \quad (3.1.2)$$

başlangıç şartı ile ele alınmıştır. $[a, b]$ çözüm aralığı boyunca, sayısal çözüm $U_N(x, t)$ kuintik B-spline baz fonksiyonları cinsinden aşağıdaki gibi temsil edilir.

$$U_N(x, t) = \sum_{j=-2}^{N+2} \varphi_j(x) \delta_j(t) \quad (3.1.3)$$

Aralık uzunluğu eşit büyüklükte sonlu elemanlar halinde bölünür.

Kuintik B-spline fonksiyonlar $a \leq x_1 \leq b$ çözüm aralığında bir baz oluşturur. Kuintik B-spline fonksiyonlar $\phi_m(x)$, $m = -2(1)N + 2$, x_m düğüm noktalarında $[a, b]$ aralığında aşağıdaki gibi verilir [18];

$$\Phi_m(x) = \begin{cases} (x - x_{m-3})^5, & [x_{m-3}, x_{m-2}] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5, & [x_{m-1}, x_m] \\ \frac{1}{h^5} \left\{ \begin{aligned} & (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5 - 20(x - x_m)^5 \\ & (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5 - 20(x - x_m)^5 + 15(x - x_{m+1})^5 \\ & (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5 - 20(x - x_m)^5 + \\ & 15(x - x_{m+1})^5 - 6(x - x_{m+2})^5 \end{aligned} \right. & [x_m, x_{m+1}] \\ & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ & [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ & \text{diğer durumlarda.} \end{cases} \quad (3.1.4)$$

Her kuintik B-spline altı elemanı kapsar, böylece her $[x_m, x_{m+1}]$, elemanı altı kuintik B-spline fonksiyon ile örtülür. Tipik bir sonlu aralık olan $[x_m, x_{m+1}]$, $h\xi = x - x_m$ bir yerel koordinat dönüşümü ile $[0,1]$ aralığına dönüşür. Böylece $[0,1]$ aralığı üzerinde kuintik B-spline fonksiyonları ξ cinsinden aşağıdaki gibi verilebilir.

$$\begin{aligned} \Phi_{m-2} &= 1 - 5\xi + 10\xi^2 - 10\xi^3 + 5\xi^4 - \xi^5, \\ \Phi_{m-1} &= 26 - 50\xi + 20\xi^2 + 20\xi^3 + 20\xi^4 + 5\xi^5, \\ \Phi_m &= 66 + 60\xi^2 + 30\xi^4 - 10\xi^5, \\ \Phi_{m+1} &= 26 + 50\xi + 20\xi^2 - 20\xi^3 - 20\xi^4 + 10\xi^5, \\ \Phi_{m+2} &= 1 + 5\xi + 10\xi^2 + 10\xi^3 + 5\xi^4 - 5\xi^5, \\ \Phi_{m+3} &= \xi^5. \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

x_m düğüm noktalarında U, U', U'', U''' ve U^{IV} değerleri δ_m eleman parametreleri cinsinden

$$\begin{aligned} U_N(x_m, t) &= U_m = \delta_{m-2} + 26\delta_{m-1} + 66\delta_m + 26\delta_{m+1} + \delta_{m+2}, \\ U'_m &= \frac{5}{h}(-\delta_{m-2} + 10\delta_{m-1} + \delta_{m+2}), \\ U''_m &= \frac{20}{h^2}(\delta_{m-2} + 2\delta_{m-1} + 6\delta_m + 2\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \\ U'''_m &= \frac{60}{h^3}(-\delta_{m-2} + 2\delta_{m-1} - 2\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \\ U^{IV}_m &= \frac{120}{h^4}(\delta_{m-2} - 4\delta_{m-1} + 6\delta_m - 4\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

şeklinde verilir.

Burada U', U'', U''' ve U^{IV} x e göre türevi göstermektedir. Kuintik B-spline fonksiyonlar olan $\Phi_m(x)$ ve dördüncü mertebeden türevleri $[x_{m-3}, x_{m+3}]$ aralığı dışında sıfırdır.

(3.1.3) ve (3.1.6) ile verilen eşitlikler (2.3) ile verilen Rosenau-KdV denkleminde yerine yazılırsa ;

$$\begin{aligned}
& \delta_{m-2} + 26\delta_{m-1} + 66\delta_m + 26\delta_{m+1} + 2\delta_{m+2} \\
& + \frac{120}{h^4} (\delta_{m-2} - 4\delta_{m-1} + 6\delta_m - 4\delta_{m+1} + \delta_{m+2}) \\
& + \frac{5}{h} (-\delta_{m-2} - 10\delta_{m-1} + 10\delta_{m+1} + \delta_{m+2}) \\
& + \frac{5Z_m}{h} (-\delta_{m-2} - 10\delta_{m-1} + 10\delta_{m+1} + \delta_{m+2}) \\
& + \frac{60}{h^3} (-\delta_{m-2} + 2\delta_{m-1} - 2\delta_{m+1} + \delta_{m+2}) = 0
\end{aligned} \tag{3.1.7}$$

cebirsel denklem sistemi elde edilir ve burada $Z_m = U_m = \delta_{m-2} + 26\delta_{m-1} + 66\delta_m + 26\delta_{m+1} + \delta_{m+2}$ olup ve δ , t ye göre türevi göstermektedir. (3.1.7) denklemindeki δ_i ve bunun zamana bağlı türevleri olan δ_i yerlerine sırasıyla aşağıda verilen Crank Nicolson formülü ve sonlu fark yaklaşımı yazılırsa;

$$\delta_i = \frac{1}{2}(\delta^n + \delta^{n+1}), \quad \delta_i = \frac{\delta^{n+1} - \delta^n}{\Delta t} \tag{3.1.8}$$

(n) ve ($n + 1$) ile gösterilen iki zaman seviyesi arasında aşağıdaki tekraralama bağıntısı

$$\begin{aligned}
\gamma_1 \delta_{m-2}^{n+1} + \gamma_2 \delta_{m-1}^{n+1} + \gamma_3 \delta_m^{n+1} + \gamma_4 \delta_{m+1}^{n+1} + \gamma_5 \delta_{m+2}^{n+1} &= \gamma_5 \delta_{m-2}^{n+1} + \gamma_4 \delta_{m-1}^n + \gamma_3 \delta_m^n + \\
\gamma_2 \delta_{m+1}^n + \gamma_1 \delta_{m+2}^n &
\end{aligned} \tag{3.1.9}$$

şeklinde bulunur.

Burada;

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= [1 - E(1 + Z_m) - M + K], \\
\gamma_2 &= [26 - 10E(1 + Z_m) + 2M - 4K], \\
\gamma_3 &= [66 + 6K], \\
\gamma_4 &= [26 + 10E(1 + Z_m) - 2M - 4K], \\
\gamma_5 &= [1 + E(1 + Z_m) + M + K],
\end{aligned} \tag{3.1.10}$$

$$m = 0, 1, \dots, N, \quad E = \frac{5}{2h} \Delta t, \quad M = \frac{30}{h^3} \Delta t, \quad K = \frac{120}{h^4} \quad \text{dır.}$$

Lineerleştirme tekniği için, lineer olmayan UU_x terimindeki U terimi

$$Z_m = U_m = \delta_{m-2} + 26\delta_{m-1} + 66\delta_m + 26\delta_{m+1} + \delta_{m+2} \quad (3.1.11)$$

şeklinde alınmıştır.

(3.1.9) ile verilen sistem $(N + 1)$ tane lineer denklem $(N + 5)$ tane $(\delta_{-2}, \delta_{-1}, \dots, \delta_{N+2})$ bilinmeyenden oluşur. Sistemin bir tek çözümünü elde etmek için dört tane ek şarta ihtiyaç vardır. Sınır koşulları uygulanarak $(\delta_{-2}, \delta_{-1}$ ve $\delta_{m+1}, \delta_{m+2})$ parametreleri yok edilerek aşağıdaki $(N + 1) \times (N + 1)$ tipindeki bir matris elde edilir.

$$Ad^{n+1} = Bd^n \quad (3.1.12)$$

A ve B matrisleri $(N + 1) \times (N + 1)$ tipinde pentagonal matrisler olup bu matris pentodiyagonal algoritması ile çözülebilir. Z_m den kaynaklanan lineer olmama durumunun üstesinden gelmek için iki veya üç defa $\delta^{n*} = \delta^n + \frac{1}{2}(\delta^n - \delta^{n-1})$ iç iterasyon uygulanır. Çözüme başlamadan önce $d^0 = (\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{N-1}, \delta_N)$ başlangıç vektörü aşağıdaki başlangıç ve sınır şartlarının türevlerinden elde edilir.

$$\begin{aligned} U_N(x, 0) &= U(x_m, 0), & m &= 0, 1, 2, \dots, N \\ (U_N)_x(a, 0) &= 0, & (U_N)_x(b, 0) &= 0, \\ (U_N)_{xx}(a, 0) &= 0, & (U_N)_{xx}(b, 0) &= 0. \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

Böylelikle d^0 vektörü;

$$Wd^0 = B \quad (3.1.14)$$

sisteminden kolaylıkla bulunur. Burada

3.3. Sayısal Hesaplamalar ve Sonuçlar

Bu bölümde Rosenau–KdV denklemi ile dağılık sığ su dalgalarının sayısal simülasyonunun doğruluğunu göstermek ve elde edilen sonuçları hem tam değerler hem de literatürde verilen diğer sonuçlarla karşılaştırmak için kullanılan L_2 ve L_∞ hata normları aşağıdaki gibidir.

$$L_2 = \|U^{tam} - U_N\|_2 \cong \sqrt{h \sum_{j=1}^N |U_j^{tam} - (U_N)_j|^2}, \quad (3.3.1)$$

$$L_\infty = \|U^{tam} - U_N\|_\infty \cong \max_j |U_j^{tam} - (U_N)_j|, \quad j = 1, 2, \dots, N - 1 \quad (3.3.2)$$

Rosenau-KdV denklemi,

$$I_1 = \int_a^b U dx \cong h \sum_{j=1}^N U_j^n,$$

$$I_2 = \int_a^b [U^2 + (U_{xx})^2] dx \cong h \sum_{j=1}^N [(U_j^n)^2 + (U_{xx})_j^n]. \quad (3.3.3)$$

şeklindeki gibi tanımlanan sadece iki korunum yasasına sahiptir [20]. Tek dalga hareketinin simülasyonunda sayısal algoritmanın doğruluğunu göstermek için yukarıda verilen I_1 ve I_2 değişmezleri hesaplanmıştır.

3.4. Tek Solitary Dalganın Hareketi

Bu problem için (2.3) ile verilen Rosenau–KdV denklemi $U \rightarrow 0$ için $x \rightarrow \pm\infty$ alınarak incelenmiştir. Başlangıç koşulu;

$$U(x, 0) = \left(-\frac{35}{24} + \frac{35}{312}\sqrt{313}\right) \sec h^4 \left(\frac{1}{24}\sqrt{-26 + 2\sqrt{313}}x\right) \quad (3.4.1)$$

olup denklemin tam çözümü ise;

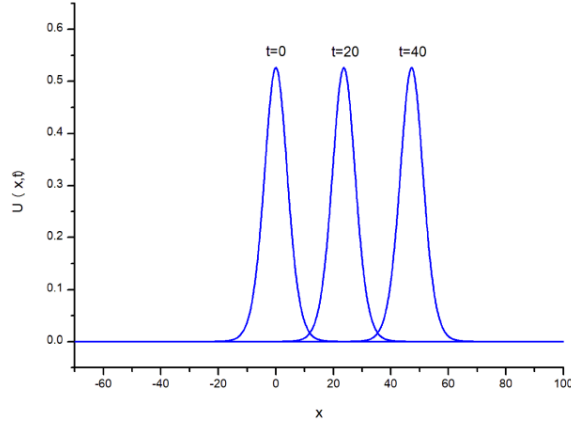
$$U(x, t) = \left(-\frac{35}{24} + \frac{35}{312}\sqrt{313}\right) \sec h^4 \left[\frac{1}{24}\sqrt{-26 + 2\sqrt{313}} \left(x - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{26}\sqrt{313}\right)t\right)\right] \quad (3.4.2)$$

şeklindedir.

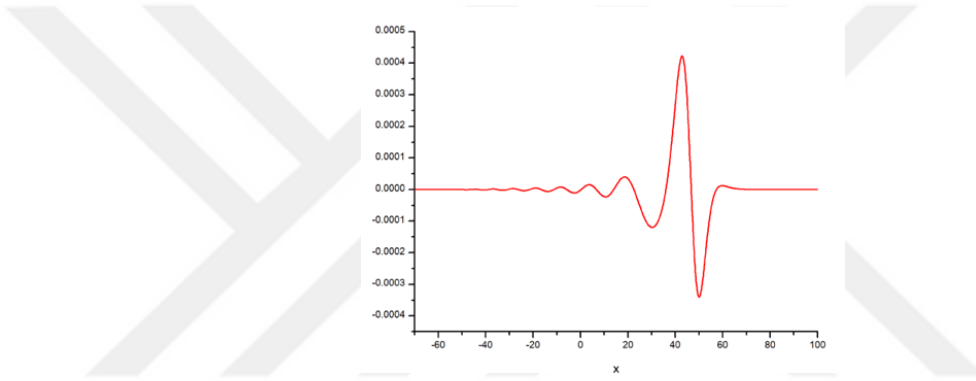
Bu bölümde sayısal yöntemi uygulamak için üç parametre ailesi ele alınmıştır. Öncelikle $[-70,100]$ aralığı üzerinde $h = 0.1$ ve $t = 0.1$ parametreleri [18] ile verilen referans ile örtüşmesi için seçilmiştir. Bu parametreler kullanıldığında solitary dalga 0.52632 genliğine sahip olup çeşitli zamanlarda L_2 ve L_∞ hata normlarını elde etmek için hesaplamalar $t = 40$ zamanına kadar yapılmıştır. Rosenau–KdV denkleminin L_2 ve L_∞ hata normlarının ve iki değişiminin değerleri Tablo 3.4.1 de listelenmiştir. Tablodan hata normlarının yeterince küçük olduğu görülmektedir. I_1 ve I_2 büyüklüklerinin bağlı hata yüzdesi, korunan büyüklüklere göre $t = 0$ da hesaplanmıştır. I_1 ve I_2 nin bağlı değişimlerinin yüzdesi $1.177 \times 10^{-7} \%$ $9.86 \times 10^{-8} \%$ olarak bulunur. Şekil 3.4.1 , çeşitli zaman seviyelerinde $h = 0.1$, $t = 0.1$ seçilmesi ile elde edilen solitary dalganın hareketini göstermektedir. Hataların $t = 0$ anındaki dağılımları Şekil 3.4.2 de gösterilmiş olup solitary dalga 0.5263 genliğine sahiptir.

Tablo 3.4.1 Tek solitary dalganın $-70 \leq x \leq 100$ aralığında $h = \Delta t = 0.1$ için elde edilen hata normları ve değişmezleri

t		0	10	20	30	40
I_1	Mevcut	5.4981750556	5.4981750556	5.4981750556	5.4981750555	5.4981750621
	Yöntem [18]	5.4977225480	5.4977249365	5.4977287449	5.4977319638	5.4977342352
I_2	Mevcut	1.9897841615	1.9897841624	1.9897841629	1.9897841633	1.9897841635
	Yöntem [18]	1.9845533653	1.9845950759	1.9846459641	1.9846798272	1.9847015013
$L_2 \times 10^4$	Mevcut	0.000000	0.370348	0.665684	0.924741	1.187411
	Yöntem [18]	0.000000	1.641934	3.045414	4.241827	5.297873
$L_\infty \times 10^4$	Mevcut	0.000000	0.149073	0.253418	0.336342	0.422656
	Yöntem [18]	0.000000	0.631419	1.131442	1.533771	1.878952



Şekil 3.4.1. Tek dalganın $-70 \leq x \leq 100$ aralığında $h = \Delta t = 0.1$ ve $t = 0, 20$ ve 40 için hareketi

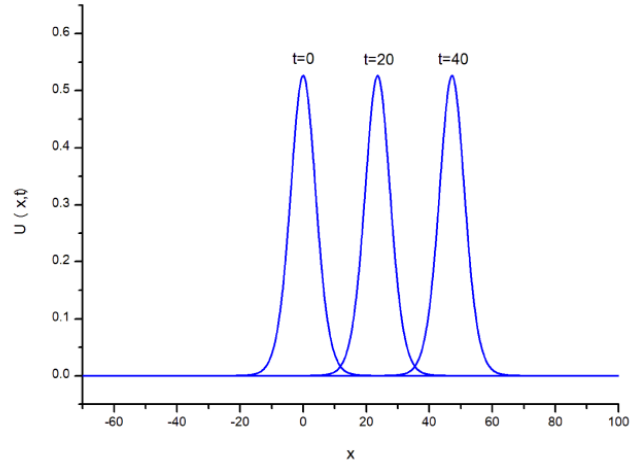


Şekil 3.4.2. Tek dalganın $-70 \leq x \leq 100$ aralığında $h = \Delta t = 0.1$ ve $t = 40$ zaman adımındaki hata dağılımı

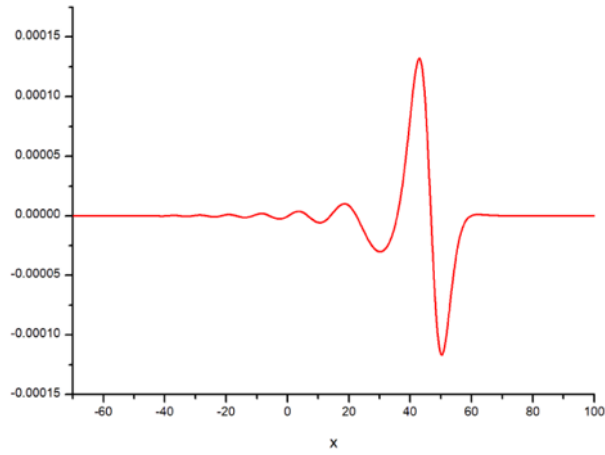
İkinci durum için $[-70, -100]$ aralığı ile $h = 0.05$ ve $t = 0.05$ parametreleri alınmıştır. Bu durumda tek dalganın genliği 0.52632 olup program değişmezleri ve hataları elde etmek için $t = 40$ süresine kadar çalıştırılmıştır. L_2 ve L_∞ hata normları ile değişmezlerin elde edilen değerleri [18] ile verilen referanstaki sonuçlar ile birlikte Tablo 3.4.2 de verilmiştir. Tablodan kolayca görülebildiği gibi mevcut yöntem ile elde edilen sonuçların daha iyi olduğu söylenebilir. Ayrıca sayısal çözüm ve tam çözüm arasındaki uyumun oldukça iyi olduğu görülür. I_1 ve I_2 değişmezlerinin göreceli değişikliklerinin yüzdesi sırasıyla 3.30×10^{-8} ve 6.7×10^{-9} dur.

Tablo 3.4.2 Tek dalganın $-70 \leq x \leq 100$ aralığında $h = \Delta t = 0.05$ için elde edilen hata normları ve değışmezleri

t		0	10	20	30	40
I_1	Mevcut Yöntem	5.4981692134	5.4981692136	5.4981692136	5.4981692134	5.4981692116
	[18]	5.4980606845	5.4980608372	5.4980610805	5.4980612870	5.4980613985
I_2	Mevcut Yöntem	1.9897831853	1.9897831855	1.9897831855	1.9897831854	1.9897831852
	[18]	1.9843901753	1.9844010295	1.9844143675	1.9844232703	1.9844289740
$L_2 \times 10^4$	Mevcut Yöntem	0.000000	0.888297	1.823510	2.862236	3.842086
	[18]	0.000000	4.113510	7.631169	10.62971	13.27645
$L_\infty \times 10^4$	Mevcut Yöntem	0.000000	0.362314	0.649564	1.000742	1.320897
	[18]	0.000000	1.582641	2.835874	3.843906	4.709118



Şekil 3.4.3 Tek dalganın $-70 \leq x \leq 100$ aralığında $h = \Delta t = 0.05$ ve $t = 0, 20$ ve 40 için hareketi



Şekil 3.4.4 Tek dalganın $-70 \leq x \leq 100$ aralığında $h = \Delta t = 0.05$ ve $t = 40$ zaman adımındaki hata dağılımı

Solitary dalganın çeşitli zaman seviyelerindeki hareketleri Şekil 3.4.3 te gösterilmiş olup $t = 40$ anındaki hataların dağılımları ise Şekil 3.4.4 te verilmiştir.

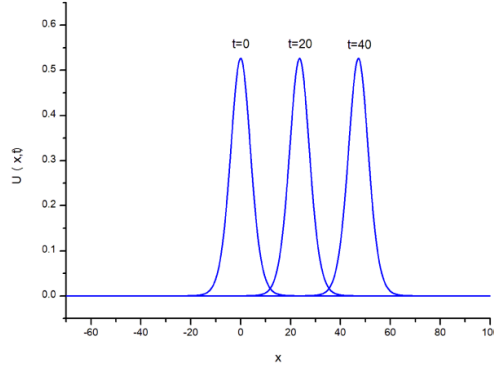
Son olarak üçüncü durum için $[-70, 100]$ aralığında $h = 0.025$ ve $t = 0.025$ parametreleri seçilmiştir. Bu durumda solitary dalganın genliği 0.52632 olup hesaplamalar $t = 0$ zamanından $t = 40$ zamanına kadar yapılmıştır. L_2 ve L_∞ hata normları ile değişmezlerin elde edilen değerleri [18] ile verilen referanstaki sonuçlar ile birlikte Tablo 3.4.3 de verilmiştir. Tablodan kolayca görülebildiği gibi mevcut yöntem ile elde edilen sonuçların daha iyi olduğu söylenebilir.

L_2 ve L_∞ hata normlarının bağıl değişim yüzdeleri sırasıyla $2.812 \times 10^{-7}\%$, $4.369 \times 10^{-7}\%$ olarak bulunmuştur.

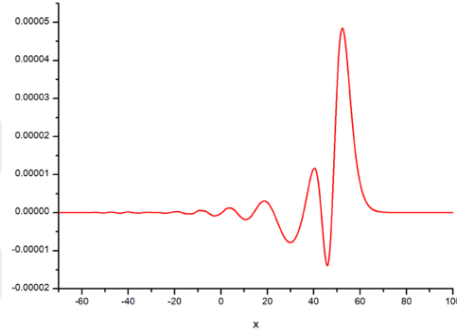
Tablo 3.4.3 Tek solitary dalga için değişmezler ve hata normları $h = 0.025, \Delta t = 0.025, -70 \leq x \leq 100$

t		0	10	20	30	40
I_1	Mevcut Yöntem	5.4981698357	5.4981698365	5.4981698322	5.1981698290	5.4981698203
	[18]	5.4981454184	5.4981454791	5.4981455454	5.4981456095	5.4981456591
I_2	Mevcut Yöntem	1.9897809062	1.9897809077	1.9897809038	1.9897809019	1.9897808975
	[18]	1.9843493353	1.9843521098	1.9843555206	1.9843578113	1.9843592922
$L_2 \times 10^4$	Mevcut Yöntem	0.000000	0.357060	0.925408	1.057023	1.183710
	[18]	0.000000	1.028173	1.905450	2.650990	3.306738
$L_\infty \times 10^5$	Mevcut Yöntem	0.000000	1.421479	3.264848	4.742297	4.846861
	[18]	0.000000	3.965867	7.097948	9.610332	11.76011

Solitary dalganın farklı zaman seviyelerindeki profilleri, Şekil 3.4.5 de $t = 40$ anındaki hata dağılımları Şekil 3.4.6 da verilmiştir.



Şekil 3.4.5 Tek dalganın $-70 \leq x \leq 100$ aralığında $h = \Delta t = 0.025$ ve $t = 0, 20$ ve 40 için hareketi



Şekil 3.4.6 Tek dalganın $-70 \leq x \leq 100$ aralığında $h = \Delta t = 0.025$ ve $t = 40$ zaman adımındaki hata dağılımı

Sonuç olarak üç durumdan da görüldüğü gibi değişmezlerin değişiklikleri kabul edilebilir derecede küçük ve elde edilen hata normlarının değerleri önceki sayısal yöntemlerle uyumlu ve bazen daha iyi olduğu görülmektedir.

BÖLÜM 4

Bu bölümde S.B.G.Karakoç, F.Gao ve S.K.Bhowmik' in [21] numaralı referansı ile belirtilen çalışmaları incelenmiştir.

Sığ su dalgaları teorisi, plazma, katı hal fiziği, uygulamalı matematik, akışkan ve su dalgası mekaniği ve lineer olmayan optiklerin çok önemli bir araştırma alanıdır. Korteweg-de Vries (KdV),

$$U_t + aUU_x + bU_{xxx} = 0 \quad (4.1)$$

ve düzenli uzun dalga (RLW) denklemi

$$U_t + U_x + aUU_x - bU_{xxt} = 0 \quad (4.2)$$

sığ su dalgalarının dinamiklerini tanımlamak için iki önemli matematiksel modeldir. RLW denklemi, özellikle Undular bore davranışını tanımlamak için Peregrine tarafından önerilmiştir [22].

Birçok fiziksel olay, örneğin sığ su dalgalarında uzun dalgaların yayılması, kabarcık-sıvı karışımları, iyon akustik plazma dalgaları ve dalga olaylarındaki enharmonik kristaller, KdV denklemi ile tanımlanabilir [23]. Ancak KdV denkleminin birtakım eksiklikleri vardır. Mesela, dalgaların sadece tek yönlü yayılımını tanımlar. Bu nedenle dalga-dalga ve dalga-duvar etkileşimlerini tanımlayamaz. Yine, zayıf anharmoniklik varsayımı altında elde edildiğinden, yüksek genlikli dalgaların oluşumu KdV denklemi ile tam olarak tahmin edilemez [24].

(4.1) denkleminin eksikliklerinin üstesinden gelmek için aşağıdaki denklem;

$$U_t + U_x + U_{xxxxt} + (U^2)_x = 0, \quad (4.3)$$

Rosenau tarafından tanıtılmıştır [25,26]. M. A. Park, Rosenau denkleminin çözümlerinin varlığını ve tekliğini göstermiştir. Aynı zamanda dalgaların farklı doğrusal olmayan

davranışlarını keşfetmek için (4.3) denkleminde U_{xxx} terimi eklenerek Rosenau-KdV denklemi olarak bilinen aşağıdaki denklem elde edilmiştir.

$$U_t + U_x + U_{xxx} + U_{xxxxt} + (U^2)_x = 0. \quad (4.4)$$

Rosenau-KdV denkleminin sayısal çözümleri çeşitli yöntemlerle elde edilmiştir. Zuo, Rosenau-KdV denklemini çözmek için sinüs-kosinüs ve tanh yöntemlerini kullanmıştır [10]. Rosenau-KdV denkleminin başlangıç-sınır değer probleminin sayısal çözümü için Hu üçüncü mertebeden lineer sonlu fark yöntemini geliştirmiştir [7]. Bu denklemin topolojik soliton çözümleri veya şok dalga çözümleri G. Ebadi tarafından incelenmiştir [10]. [13, 14] referanslarında yazarlar denklemin sayısal çözümlerini sırasıyla septik B-spline baz fonksiyonları kullanarak subdomain yöntemi ile ve yine septik B-spline kollokasyon sonlu elemanlar yöntemiyle elde etmişlerdir. Aynı zamanda, dalgaların farklı doğrusal olmayan davranışlarını keşfetmek için (4.3) denkleminde $-U_{xxt}$ terimi eklendiğinde,

$$U_t + U_x - U_{xxt} + U_{xxxxt} + (U^2)_x = 0 \quad (4.5)$$

şeklindeki Rosenau-RLW denklemi elde edilmiştir. Rosenau-RLW denkleminin sayısal çözümleri son yıllarda bazı bilim adamları tarafından elde edilmiştir. Pan ve Zhang [27], genel Rosenau-RLW denklemi için bir başlangıç-sınır değer problemini, sonlu fark şemasıyla elde etmişlerdir. Pan ve arkadaşları [28] Crank-Nicolson sonlu fark yöntemini kullanarak Rosenau-RLW denkleminin sayısal çözümlerini geliştirmişler ve Brouwer sabit nokta teoremi ile sayısal çözümlerin varlığını göstermişlerdir. Yeni bir fark şeması Zuo ve arkadaşları tarafından geliştirilmiştir [29]. Yarı ayrık Galerkin yöntemi ile denklemin çözümlerinin yakınsaklığı Atouani ve Omrani tarafından incelenmiştir [30]. Ayrıca, Yağmurlu ve arkadaşları kübik B-spline baz fonksiyonları kullanılarak Rosenau-RLW denkleminde Galerkin sonlu elemanlar yöntemini uygulamışlardır [31]. Rosenau-KdV ve Rosenau-RLW denklemlerini birleştirerek lineer olmayan dalganın çözümünü elde etmek için matematiksel bir form Wongsajjai ve Poochinapan tarafından önerilmiştir [32]. (4.4) ve (4.5) denklemlerinin birleştirilmesi ile aşağıda verilen Rosenau-KdV-RLW denklemi;

$$U_t + aU_x - \gamma^{RLW}U_{xxt} + \beta^{KdV}U_{xxx} + bU_{xxxxt} + \alpha(U^n)_x = 0, \quad (4.6)$$

elde edilmiştir. Bu kısımda (4.6) ile verilen Rosenau-KdV-RLW denklemi;

$$\begin{aligned} U(a, t) = U(b, t) = 0, U_x(a, t) = U_x(b, t) = 0, \\ U_{xx}(a, t) = U_{xx}(b, t) = 0, t > 0, \end{aligned} \quad (4.7)$$

sınır koşulları ve

$$U(x, 0) = f(x), a \leq x \leq b \quad (4.8)$$

başlangıç koşulu ile ele alınmıştır.

(4.6) denkleminde, ilk terim doğrusallığı temsil ederken, a parametresi adveksiyon terimi ve α ve β dağıtıcı terimlerdir. Yüksek mertebeden dağıtıcı ve doğrusal olmamayı temsil eden parametreler α ve β ile temsil edilir. Eğer parametre β^{kdv} ve γ^{-rlw} Kdv sıfır alınır ise, (4.6) denklemi sırasıyla Rosenau-RLW ve Rosenau-KdV denklemlerine dönüşür. Razborova ve arkadaşları [13,14] Rosenau-KdV-RLW denkleminin pertürbe edilmiş soliton çözümlerini ve denklemin değişmezlerini Lie simetri analizi kullanarak göstermişlerdir. Ayrıca denklem ansatz metodu ve yarı ters varyasyon prensibi ile Razborova ve arkadaşları tarafından çözülmüştür [15]. Genelleştirilmiş Rosenau-KdV-RLW denkleminin sayısal çözümleri homojen sınır koşulları ve başlangıç Gauss şartları kullanılarak Fernandez ve Ramos tarafından elde edilmiştir [16]. Rosenau-KdV-RLW denklemini çözmek için 3. mertebeden kapalı sonlu fark algoritması Wang ve Dai tarafından sunulmuştur [17].

4.1. Rosenau KdV-Rlw Denkleminin Septik B-spline Fonksiyonlar ile Sayısal Çözümleri

Sayısal hesaplamalara uygun olarak problemin çözüm bölgesi $a \leq x \leq b$ olarak alınmış ve $h = (b - a)/N$ olmak üzere $[a, b]$ aralığı $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ şeklinde N aralığa bölünmüştür. $\Phi_m(x)$ ($m = -3, -2, \dots, N + 2, N + 3$) septik b-spline fonksiyonları düğüm noktalarında

$$\varphi_m(x) = \frac{1}{h^7} \begin{cases} (x - x_{m-4})^7 & [x_{m-4}, x_{m-3}] \\ (x - x_{m-4})^7 - 8(x - x_{m-3})^7 & [x_{m-3}, x_{m-2}] \\ (x - x_{m-4})^7 - 8(x - x_{m-3})^7 + 28(x - x_{m-2})^7 & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ (x - x_{m-4})^7 - 8(x - x_{m-3})^7 + 28(x - x_{m-2})^7 - 56(x - x_{m-1})^7 & [x_{m-1}, x_m] \\ (x_{m+4} - x)^7 - 8(x_{m+3} - x)^7 + 28(x_{m+2} - x)^7 - 56(x_{m+1} - x)^7 & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+4} - x)^7 + 8(x_{m+3} - x)^7 + 28(x_{m+2} - x)^7 & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+4} - x)^7 + 8(x_{m+3} - x)^7 & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+4} - x)^7 & [x_m, x_{m+1}] \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (4.1.1)$$

şeklinde tanımlanır.

Yaklaşık çözüm $U_N(x, t)$, $\varphi_m(x)$ septik B-spline fonksiyonlar ve $\delta_m(t)$ zamana bağlı katsayılar olmak üzere;

$$U_N(x, t) = \sum_{m=-3}^{N+3} \varphi_m(x) \delta_m(t) \quad (4.1.2)$$

şeklinde verilir.

Her septik B-spline sekiz elemanı kapsar. Dolayısıyla her eleman $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı sekiz B-spline ile örtülür. $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu aralığı, $h\xi = x - x_m$ $0 \leq \xi \leq 1$ olarak tanımlanan yerel bir koordinat dönüşümü ile $[0,1]$ bölgesine dönüşür. (4.1.1) ile verilen septik B-Spline fonksiyonlar $[0,1]$ kapalı aralığında ξ cinsinden aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned} \Phi_{m-3} &= 1 - 7\xi + 21\xi^2 - 35\xi^3 + 35\xi^4 - 21\xi^5 + 7\xi^6 - \xi^7, \\ \Phi_{m-2} &= 120 - 392\xi + 504\xi^2 - 280\xi^3 + 84\xi^5 - 42\xi^6 + 7\xi^7, \\ \Phi_{m-1} &= 1191 - 1715\xi + 315\xi^2 + 665\xi^3 - 315\xi^4 - 105\xi^5 + 105\xi^6 - 21\xi^7, \\ \Phi_m &= 2416 - 1680\xi + 560\xi^4 - 140\xi^6 + 35\xi^7, \\ \Phi_{m+1} &= 1191 + 1715\xi + 315\xi^2 - 665\xi^3 - 315\xi^4 + 105\xi^5 + 105\xi^6 - 35\xi^7, \\ \Phi_{m+2} &= 120 + 392\xi + 504\xi^2 + 280\xi^3 - 85\xi^5 - 42\xi^6 + 21\xi^7, \\ \Phi_{m+3} &= 1 + 7\xi + 21\xi^2 + 35\xi^3 + 35\xi^4 + 21\xi^5 + 7\xi^6 - \xi^7, \\ \Phi_{m+4} &= \xi^7. \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

(4.1.1) ve (4.1.2) denklemleri kullanılarak, U_m, U'_m, U''_m, U'''_m , ve U_m^{IV} terimleri δ_m eleman parametreleri cinsinden;

$$\begin{aligned}
U_N(x_m, t) &= U_m = \delta_{m-3} + 120\delta_{m-2} + 1191\delta_{m-1} + 2416\delta_m + 1191\delta_{m+1} + \\
&120\delta_{m+2} + \delta_{m+3}, \\
U'_m &= \frac{7}{h}(-\delta_{m-3} - 56\delta_{m-2} - 245\delta_{m-1} + 245\delta_{m+1} + 56\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \\
U''_m &= \frac{42}{h^2}(\delta_{m-3} + 24\delta_{m-2} + 15\delta_{m-1} - 80\delta_m + 15\delta_{m+1} + 24\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \\
U'''_m &= \frac{210}{h^3}(-\delta_{m-3} - 8\delta_{m-2} + 19\delta_{m-1} - 19\delta_{m+1} + 8\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \\
U^{IV}_m &= \frac{840}{h^4}(\delta_{m-3} - 9\delta_{m-1} + 16\delta_m - 9\delta_{m+1} + \delta_{m+3}).
\end{aligned} \tag{4.1.4}$$

şeklinde elde edilir ve U nun $[x_m, x_{m+1}]$ elemanı üzerindeki değişimi

$$U = \sum_{m=-3}^{N+3} \varphi_m \delta_m \tag{4.1.5}$$

olarak gösterilebilir. (3.4) ile verilen eşitlikler (2.6) denkleminde yerine yazılırsa;

$$Z_m = U_m = (\delta_{m-3} + 120\delta_{m-2} - 1191\delta_{m-1} + 2416\delta_m + 1191\delta_{m+1} + 120\delta_{m+2} + \delta_{m+3})^{p-1}$$

olmak üzere ;

$$\begin{aligned}
&\dot{\delta}_{m-3} + 120\dot{\delta}_{m-2} + 1191\dot{\delta}_{m-1} + 2416\dot{\delta}_m + 1191\dot{\delta}_{m+1} + 120\dot{\delta}_{m+2} + \dot{\delta}_{m+3} \\
&+ \frac{7}{h}(-\delta_{m-3} - 56\delta_{m-2} - 245\delta_{m-1} + 245\delta_{m+1} + 56\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) \\
&- \frac{42}{h^2}(\dot{\delta}_{m-3} + 24\dot{\delta}_{m-2} + 15\dot{\delta}_{m-1} - 80\dot{\delta}_m + 15\dot{\delta}_{m+1} + 24\dot{\delta}_{m+2} + \dot{\delta}_{m+3}) \\
&+ \frac{210}{h^3}(-\delta_{m-3} - 8\delta_{m-2} + 19\delta_{m-1} - 19\delta_{m+1} + 8\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) \\
&+ \frac{840}{h^4}(\dot{\delta}_{m-3} - 9\dot{\delta}_{m-1} + 16\dot{\delta}_m - 9\dot{\delta}_{m+1} + \dot{\delta}_{m+3}) \\
&+ p \frac{7}{h} Z_m (-\delta_{m-3} - 56\delta_{m-2} - 245\delta_{m-1} + 245\delta_{m+1} + 56\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) = 0
\end{aligned} \tag{4.1.6}$$

adi diferansiyel denklem sistemi elde edilir.

Eğer δ_i konum parametreleri ve (4.2.6) denklemindeki $\dot{\delta}_i$ zaman türevleri yerine sırasıyla Crank-Nicolson

$$\delta_i = \frac{\delta_i^{n+1} + \delta_i^n}{2} \quad (4.1.7)$$

ve sonlu fark yaklaşımı

$$\dot{\delta}_i = \frac{\delta_i^{n+1} - \delta_i^n}{\Delta t} \quad (4.1.8)$$

yazılırsa $(n + 1)$ inci ve (n) inci zaman adımlarında $(i = m - 3, m - 2, \dots, m + 2, m + 3)$ δ_i^{n+1} ve δ_i^n bilinmeyenleri için;

$$\begin{aligned} \gamma_1 \delta_{m-3}^{n+1} + \gamma_2 \delta_{m-2}^{n+1} + \gamma_3 \delta_{m-1}^{n+1} + \gamma_4 \delta_m^{n+1} + \gamma_5 \delta_{m+1}^{n+1} + \gamma_6 \delta_{m+2}^{n+1} + \gamma_7 \delta_{m+3}^{n+1} = \gamma_7 \delta_{m-3}^n + \\ \gamma_6 \delta_{m-2}^n + \gamma_5 \delta_{m-1}^n + \gamma_4 \delta_m^n + \gamma_3 \delta_{m+1}^n + \gamma_2 \delta_{m+2}^n + \gamma_1 \delta_{m+3}^n \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

tekrarlama bağıntısı elde edilir.

Burada

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= [1 - E(1 + pZ_m) - M + K + T], \\ \gamma_2 &= [-120 - 56E(1 + pZ_m) - 24M - 8K], \\ \gamma_3 &= [1191 - 245E(1 + pZ_m) - 15M + 19K - 9T], \\ \gamma_4 &= [2416 + 80M + 16T], \\ \gamma_5 &= [1191 + 245E(1 + pZ_m) - 15M - 19K - 9T], \\ \gamma_6 &= [120 + 56E(1 + pZ_m) - 24M + 8K], \\ \gamma_7 &= [1 + E(1 + pZ_m) - M + K + T]. \\ m &= 0, 1, \dots, N, \quad E = \frac{7}{2h} \Delta t, \quad M = \frac{42}{h^2} \Delta t, \quad K = \frac{120}{h^3} \Delta t, \quad T = \frac{840}{h^4} \Delta t \quad \text{dır.} \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

(4.2.9) sistemi $(\delta_{-3}, \delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_{N+1}, \delta_{N+2}, \delta_{N+3})^T$ şeklinde $(N + 7)$ tane bilinmeyen ve $(N + 1)$ tane lineer denklem içerir. Dolayısıyla sistemin bir tek çözümünü elde edebilmek için altı tane ek şarta ihtiyaç vardır. (2.7) ile verilen sınır şartları kullanılarak

4.2. Kararlılık Analizi

Önerilen yöntemin kararlılık analizini göstermek için Fourier metoduna dayanan Von-Neumann teorisi kullanılmıştır. Bunun için denklemdeki lineer olmayan $U^p U_x$ terimindeki U^p yerel olarak sabit alınır. $\delta_m^n = \xi^n e^{i\sigma m h}$, ($i = \sqrt{-1}$) biçimindeki Fourier eşitliği (3.2.9) denklem sisteminde kullanılırsa σ mod numarası, h ise eleman büyüklüğü ve $\theta = \sigma h$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} \xi^{n+1}(\eta_1 e^{i(m-3)\theta} + \eta_2 e^{i(m-2)\theta} + \eta_3 e^{i(m-1)\theta} + \eta_4 e^{im\theta} + \eta_5 e^{i(m+1)\theta} + \eta_6 e^{i(m+2)\theta} + \\ \eta_7 e^{i(m+3)\theta}) = \xi^n(\eta_7 e^{i(m-3)\theta} + \eta_6 e^{i(m-2)\theta} + \eta_5 e^{i(m-1)\theta} + \eta_4 e^{im\theta} + \eta_3 e^{i(m+1)\theta} + \\ \eta_2 e^{i(m+2)\theta} + \eta_1 e^{i(m+3)\theta}) \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

denklem sistemi elde edilir.

Burada;

$$\begin{aligned} n_1 &= 1 - \beta_1 - \beta_2 - \beta_3 + \beta_4, \\ n_2 &= 120 - 56\beta_1 - 24\beta_2 - 8\beta_3, \\ n_3 &= 1191 - 245\beta_1 - 15\beta_2 + 19\beta_3 - 9\beta_4, \\ n_4 &= 2416 - 80\beta_2 + 16\beta_4, \\ n_5 &= 1191 + 245\beta_1 - 15\beta_2 - 19\beta_3 - 9\beta_4, \\ n_6 &= 120 + 56\beta_1 - 24\beta_2 + 8\beta_3, \\ n_7 &= 1 + \beta_1 - \beta_2 + \beta_3 + \beta_4, \\ m = 0, 1, \dots, N \quad \beta_1 &= \frac{7\Delta t}{2h}(1 + Z_m), \beta_2 = \frac{42}{h^2}, \beta_3 = \frac{105}{h^3}\Delta t, \beta_4 = \frac{840}{h^4} \end{aligned}$$

dır. (4.2.1) denklemi sadeleştirilirse

$$\begin{aligned} A &= (2382 - 30\beta_2 - 18\beta_4) \cos(\theta) + (240 \\ &\quad - 48\beta_2) \cos(2\theta) + (2 - 2\beta_2 + 2\beta_4) \cos(3\theta) + (2416 + 80\beta_2 + 16\beta_4), \\ B &= (490E(1 + Z_m) - 38\beta_3) \sin(\theta) + (112E(1 + Z_m) + 16\beta_3) \sin(2\theta) + (2E(1 + Z_m) + \\ &\quad 2\beta_3) \sin(3\theta) \end{aligned}$$

olmak üzere büyüme faktörü; $\xi = \frac{A+iB}{A-iB}$ şeklinde bulunur.

Büyüme faktörünün modülü 1 olarak bulunur ki bu ise lineerleştirilen şemanın şartsız kararlı olduğunu gösterir.

4.3. Sayısal Sonuçlar

Bu bölümde sayısal algoritmanın doğruluğunu göstermek için tek ve şok dalgaların hareketleri incelenmiştir. Her iki problem için yöntemin etkinliği;

$$L_2 = \|U^{exact} - U_N\|_2 = \sqrt{h \sum_{j=0}^N |U_j^{exact} - (U_N)_j|^2}$$

ve

$$L_\infty = \|U^{exact} - U_N\|_\infty = \max_j |U_j^{exact} - (U_N)_j|$$

hata normları hesaplanarak gösterilmiştir. Rosenau-KdV-RLW denkleminin

$$\begin{aligned} I_M &= \int_{-\infty}^{\infty} U(x, t) dx \\ I_E &= \int_{-\infty}^{\infty} [U^2(x, t) + \gamma U_x^2(x, t) + b U_{xx}^2(x, t)] dx \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

şeklinde sırasıyla dalganın momentum ve enerjisine karşılık gelen iki adet değişmezi vardır [33].

4.3.1. Solitary dalgalar

İlk olarak (1.6) denklemini $U \rightarrow 0$ iken $x \rightarrow \pm \infty$ sınır şartları ve

$$U(x, 0) = A \operatorname{sech} h^{4/n-1} [B(x - x_0)]$$

başlangıç şartı ile ele alınmıştır.

Denklemin tam çözümü

$$U(x, t) = A \sec h^{4/n-1}[B(x - vt - x_0)]$$

şeklinde olup burada A ;

$$A = \left[\frac{8(n+1)(n+3)(3n+1)\beta b B^4}{k(n-1)^2[(n-1)^2\gamma + 4(n^2 + 2n + 5)bB^2]} \right]^{4/n-1}$$

dalganın genliği,

$$B = \frac{n-1}{n+1} \left[\frac{D - (n^2 + 2n + 5)ab}{32\beta b} \right]^{1/2}$$

B ters genişlik,

$$D = \sqrt{a^2 b^2 (n^2 + 2n + 5)^2 + 16(n+1)^2 \beta b (\beta - a\gamma)}$$

$$v = \left[\frac{\beta(n-1)^2}{(n-1)^2\gamma + 4b\beta^2(n^2 + 2n + 5)} \right]$$

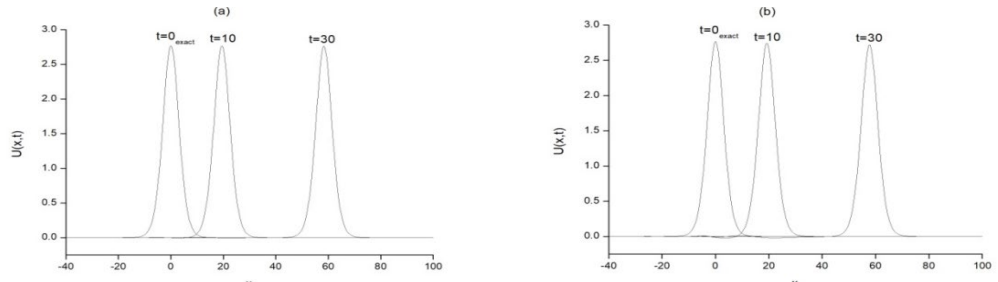
v solitonun hızı ve x_0 solitary dalganın merkezidir.

[15, 23] referansları ile karşılaştırma yapabilmek için $[-40,100]$ aralığında $a = 1, \gamma = 1, \beta = 1, b = 1, \alpha = 1/2, n = 3$ parametreleri seçilmiştir. Hata normlarını ve değişmezleri hesaplayabilmek için program $t = 30$ zamanına kadar çalıştırılmış, h ve Δt nin farklı değerleri için elde edilen değerler Tablo 4.3.1.1 de verilmiştir. Tablo 4.3.1.1 den değişmezlerin zaman ilerledikçe neredeyse sabit kaldığı görülmektedir. Yine tablodan h nin farklı değerleri için değişmezler olan I_m ve I_E lerin başlangıç değerlerine göre 1×10^{-5} den daha az değiştiği görülmektedir. Aynı zamanda L_2 ve L_∞ hata normlarının da programın çalışması boyunca yeterince küçük kaldığı söylenebilir. Dolayısıyla yöntemimizin denklem için uygun olduğu söylenebilir. Elde edilen hata normlarının değerleri [15,23] referanslarıyla karşılaştırılmış ve Tablo 4.3.1.2 de

verilmiştir. Tablodan açıkça görüldüğü gibi yöntemimiz ile elde edilen sonuçlar diğer sonuçlardan daha küçüktür. $h = \Delta t = 0.25$ ve 0.5 ve $t = 10,30$ zamanlarındaki sayısal sonuçlara ilişkin şekiller Şekil 4.3.1.1 de gösterilmiştir. Sayısal çözümlerin tam çözümlerle iyi bir uyum içinde olduğu Şekil 4.3.1.1 den gözlemlenebilir. Ayrıca bu şekil tek solitonun sabit bir hızla sağa doğru hareket ettiğini ve beklenen bir şekilde artan zamanla genliğini ve şeklini koruduğunu göstermektedir. 0.25 ve 0.5 için tam ve sayısal çözümler arasındaki hata değerleri sırasıyla Şekil 4.3.1.2 de gösterilmiştir. Görüldüğü gibi maksimum hata solitary dalganın merkezi konumu etrafında meydana gelmektedir.

Tablo 4.3.1.1 $[-40, 100]$ aralığında $a = 1, \gamma = 1, \beta = 1, b = 1, \alpha = 1/2, n = 3$ parametreleri için solitary dalganın invariant ve hata normları

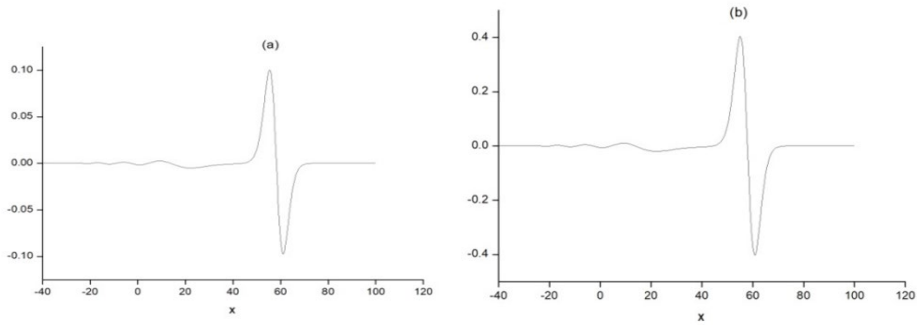
$h = \Delta t = 0.25$	I_m	I_E	L_2	L_∞
t				
0	21.6792588	43.7172029	0	0
10	21.6683535	43.6837260	$9.586739E - 02$	$3.788153E - 02$
20	21.6575653	43.6506230	$1.789812E - 01$	$6.803490E - 02$
30	21.6468150	43.6176305	$2.669906E - 01$	$1.001786E - 01$
$h = \Delta t = 0.125$				
t				
0	21.6792588	43.7172029	0	0
10	21.6778511	43.7128691	$2.376454E - 02$	$9.470963E - 03$
20	21.6764468	43.7085460	$4.357827E - 02$	$1.674689E - 02$
30	21.6750448	43.7042252	$6.392907E - 02$	$2.424693E - 02$
$h = \Delta t = 0.0625$				
t				
0	21.6792588	43.7172029	0	0
10	21.6790815	43.7166564	$5.895794E - 03$	$2.360596E - 03$
20	21.6789042	43.7161102	$1.069907E - 02$	$4.134279E - 03$
30	21.6787273	43.7155640	$1.553975E - 02$	$5.925496E - 03$
$h = \Delta t = 0.03125$				
t				
0	21.6792588	43.7172029	0	0
10	21.6792366	43.7171345	$1.466514E - 03$	$5.885398E - 04$
20	21.6792144	43.7170660	$2.646387E - 03$	$1.025324E - 03$
30	21.6791923	43.7169976	$3.823146E - 03$	$1.462069E - 03$



Şekil 4.3.1.1 $[-40, 100]$ aralığında $a = 1, \gamma = 1, \beta = 1, b = 1, \alpha = 1/2, n = 3$, olmak üzere a) $h = \Delta t = 0.25$, b) $h = \Delta t = 0.5$ için soliton dalganın hareketi

Tablo 4.3.1.2 $t = 30$ ve $[-40, 100]$ aralığında $a = 1, \gamma = 1, \beta = 1, b = 1, \alpha = 1/2, n = 3$ parametreleri için hata normlarının karşılaştırılması

	L_2			L_∞		
	Mevcut	[15]	[18]	Mevcut	[15]	[18]
$h = \Delta t = 0.25$	2.66E-01	5.56E-01	1.86E-00	1.00E-01	2.14E-01	6.99E-01
$h = \Delta t = 0.125$	6.39E-02	1.34E-01	5.18E-01	2.42E-02	5.19E-02	1.97E-01
$h = \Delta t = 0.625$	1.55E-02	3.34E-02	1.33E-01	5.92E-03	1.28E-02	5.06E-02
$h = \Delta t = 0.03125$	3.82E-03	-	3.35E-02	1.46E-03	-	1.27E-02



Şekil 4.3.1.2 $t = 40$ ve $a = 1, \gamma = 1, \beta = 1, b = 1, \alpha = 1/2, n = 3$, olmak üzere a) $h = \Delta t = 0.25$, b) $h = \Delta t = 0.5$ için hata dağılımları

4.3.2. Şok dalgaları

Bu bölümde yöntemin etkinliğini ve doğruluğunu göstermek için farklı sayısal hesaplamalar yapılmıştır. Daha önce tam çözümleri verilmiş olan şok dalgasının sayısal simülasyonları için iki parametre ailesi kullanılmıştır. Problemin tam çözümü

$$U(x, t) = A \tan h^{4/n-1} [B(x - vt - x_0)],$$

olduğundan başlangıç koşulu;

$$U(x, 0) = A \tan h^{4/n-1} [B(x - x_0)]$$

olur. Burada A solitonun genliği, B genişliği, v de hızıdır.

Durum 1 : İlk sayısal hesaplama için problem $[-200,250]$ aralığı boyunca $a = 1$, $\gamma = 0.04$, $\beta = 0.025$, $b = 1$, $\alpha = 1/2$, $n = 3$ parametreleriyle ele alınmıştır. Bu durumda;

$$A = 2B^2 \left[\frac{30bv}{\alpha} \right]^{1/2}, v = \left[\frac{\alpha - 8\beta B^2}{136bB^4 - 8\gamma B^2 + 1} \right]$$

ve

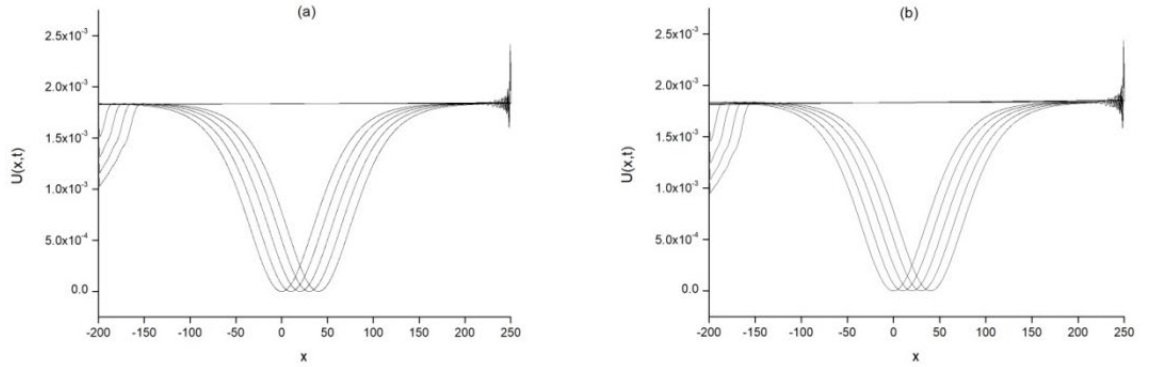
$$B = \left[\frac{10ab - \sqrt{100a^2b^2 + 46\beta b(\beta - \alpha\gamma)}}{92\gamma b} \right]^{1/2}$$

olur.

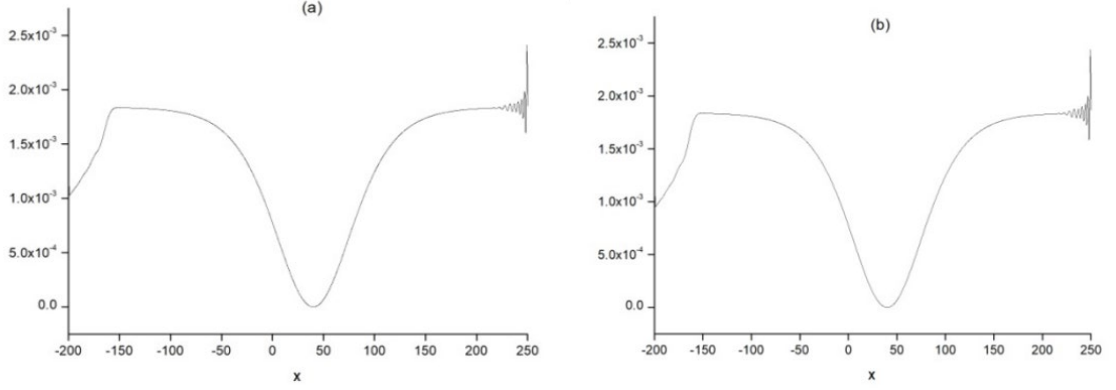
Solitary dalganın genliği ve hızı sırasıyla 0.00184 , $v = 1.00000$ olarak bulunur. Program $t = 0$ dan $t = 40$ a kadar çalıştırılarak elde edilen değerler Tablo 4.3.2.1 de verilmiştir. Tablo 4.3.2.1 L_2 ve L_∞ hata normlarının yeterince küçük olduğunu göstermektedir. Bu nedenle sayısal yöntemin makul ölçüde kabul edilebilir olduğu söylenebilir. $t = 0,10,20,30$ ve 40 zamanlarında $h = \Delta t = 0.1, 0.2$ parametreleri için solitary dalganın hareketi Şekil 4.3.2.1 de gösterilmiştir. Şekilden anlaşıldığı gibi solitary dalga zaman ilerledikçe hızını, genliğini ve şeklini koruyarak sağa doğru ilerlemektedir. Şekil 4.3.2.2 de $t = 40$ ve $h = \Delta t = 0.1, 0.2$ parametreleri için elde edilen hata dağılımları gösterilmiştir. Şekil 4.3.2.2 den görüldüğü gibi maksimum hata solitary dalganın merkezinde oluşmaktadır.

Tablo 4.3.2.1 $[-200, 250]$ aralığında ve $a = 1, \gamma = 0.04, \beta = 0.025, b = 1, \alpha = 1/2, n = 3$, parametreleri için şok solitary dalganın hata normları

t	$h = \Delta t = 0.1$		$h = \Delta t = 0.2$	
	L_2	L_∞	L_2	L_∞
0	0	0	0	0
10	$7.61502E-04$	$3.21635 - 04$	$8.97653E-04$	$3.77313E-04$
20	$1.64258E-03$	$5.21024 - 04$	$1.89156E-03$	$5.92167E-04$
30	$2.56864E-03$	$6.77248E-04$	$2.90744E-03$	$7.53014E-04$
40	$3.52276E-03$	$8.10797E-04$	$3.93320E-03$	$8.87275E-04$



Şekil 4.3.2.1 $t = 40$ ve $[-200, 250]$ aralığında belirli zamanlarda $A = 0.00184, v = 1, a = 1, \gamma = 0.04, \beta = 0.025, b = 1, \alpha = 5, n = 3, (a)h = \Delta t = 0.1, (b)h = \Delta t = 0.2$ için şok dalgasının hareketi



Şekil 4.3.2.2 $t = 40$ ve $[-200, 250]$ aralığında belirli zamanlarda $A = 0.00184$, $v = 1$, $a = 1$, $\gamma = 0.04$, $\beta = 0.025$, $b = 1$, $\alpha = 5$, $n = 3$, olmak üzere a) $h = \Delta t = 0.1$, b) $h = \Delta t = 0.2$ için hata dağılımları

Durum 2: İkinci nümerik hesaplamalar için $[-100, 100]$ aralığında $n = 5$, $h = \Delta t = 0.05$ ve 0.1 parametreleri seçilmiştir. Bu durumda

$$A = B \left[\frac{24bv}{\alpha} \right]^{1/4}, v = \left[\frac{\alpha - 2\beta B^2}{16bB^4 - 2\gamma B^2 + 1} \right]$$

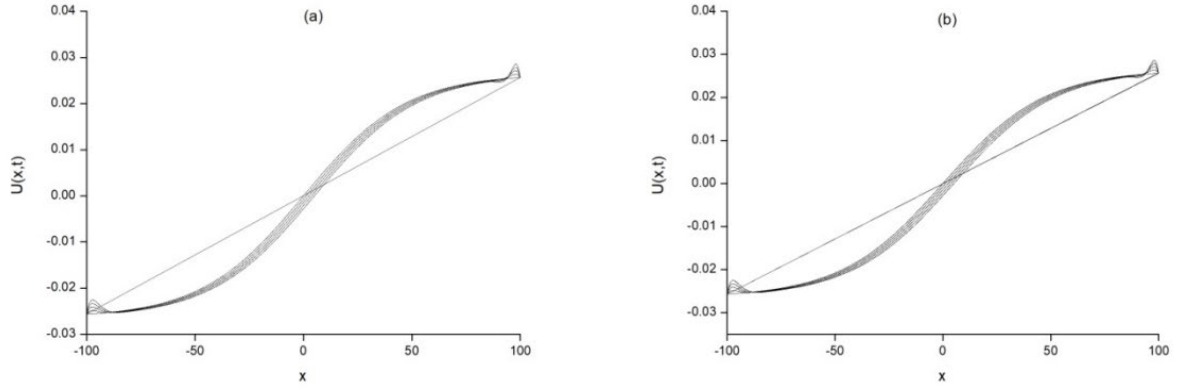
$$B = \left[\frac{5ab - \sqrt{25a^2b^2 + 6\beta b(\beta - a\gamma)}}{12\gamma b} \right]^{1/2}$$

dir.

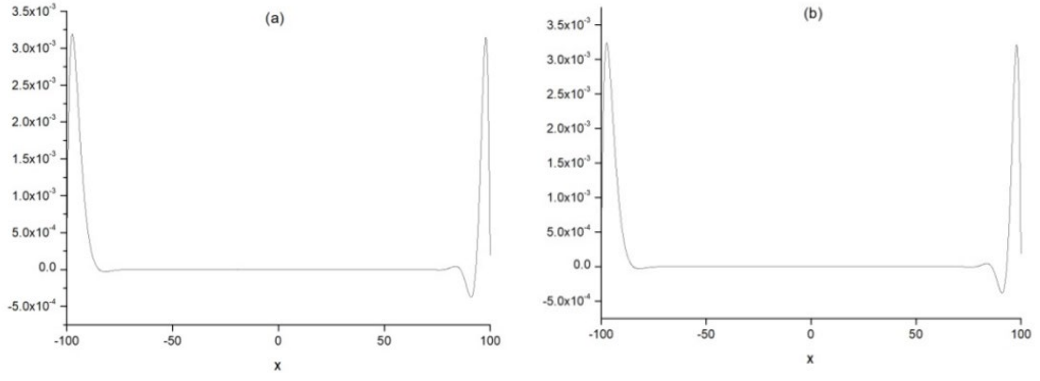
Solitary dalganın genliği ve hızı sırasıyla 0.02641 , $v = 0.12500$ olarak bulunur. Program $t = 0$ dan $t = 40$ a kadar çalıştırılarak elde edilen değerler Tablo 4.3.2.2 de verilmiştir. Tablo 4.3.2.2 L_2 ve L_∞ hata normlarının yeterince küçük olduğunu göstermektedir. Bu nedenle sayısal yöntemin makul ölçüde kabul edilebilir olduğu söylenebilir. $t = 0, 10, 20, 30$ ve 40 zamanlarında $h = \Delta t = 0.1, 0.05$ parametreleri için solitary dalganın hareketi Şekil 4.3.2.3 de gösterilmiştir. Şekilden anlaşıldığı gibi solitary dalga zaman ilerledikçe hızını, genliğini ve şeklini koruyarak sağa doğru ilerlemektedir. Şekil 4.3.2.3 de $t = 40$ ve $h = \Delta t = 0.1, 0.05$ parametreleri için elde edilen hata dağılımları gösterilmiştir. Şekil 4.3.2.4 den görüldüğü gibi maksimum hata solitary dalganın uç kısmında oluşmaktadır.

Tablo 4.3.2.2 $[-100, 100]$ aralığında $a = 0.125, \gamma = 0.5, \beta = 0.04, b = 20, \alpha = 25, n = 5$, parametreleri için solitary dalganın hata normları

t	$h = \Delta t = 0.1$		$h = \Delta t = 0.05$	
	L_2	L_∞	L_2	L_∞
0	0	0	0	0
10	$2.15972E$ - 03	$8.34524E$ - 04	$2.19797E$ - 03	$8.50263E$ - 04
20	$4.32163E$ - 03	$1.63917E$ - 03	$4.39753E$ - 03	$1.67045E$ - 03
30	$6.50620E$ - 03	$2.41090E$ - 03	$6.61959E$ - 03	$2.45838E$ - 03
40	$8.73147E$ - 03	$3.19204E$ - 03	$8.88257E$ - 03	$3.24193E$ - 03



Şekil 4.3.2.3 $[-100, 100]$ aralığında $A = 0.02641, v = 0.12500, a = 0.125, \gamma = 0.5, \beta = 0.04, b = 1, \alpha = 25, n = 5$ olmak üzere a) $h = \Delta t = 0.1$, b) $h = \Delta t = 0.05$ parametreleri için şok dalgasının hareketi



Şekil 4.3.2.4 $t = 0$ ve $[-100, 100]$ aralığında $A = 0.02641$, $v = 0.12500$, $a = 0.125$, $\gamma = 0.5$, $\beta = 0.04$, $b = 1$, $\alpha = 25$, $n = 5$, olmak üzere a) $h = \Delta t = 0.1$, b) $h = \Delta t = 0.05$ şok dalgasının hata dağılımları

BÖLÜM 5

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde dağınık sığ su dalgalarının sayısal simülasyonlarını göstermek için ilk olarak [5] referansında olduğu gibi Rosenau-KdV denkleminin sayısal çözümleri elde edilmiş olup daha sonra [21] referansında yapıldığı gibi Rosenau-KdV-RLW denkleminin sayısal çözümleri elde edilmiştir. Bunun için denklemlere sırasıyla kuintik ve septik B-spline kollokasyon sonlu elemanlar yöntemi uygulanmıştır. Rosenau-KdV denkleminin tek solitary dalga hareketi incelenirken Rosenau-KdV-RLW denkleminin tek ve şok dalga hareketleri incelenmiştir. Her iki denklem için kararlılık analizi yapılarak yöntemin şartsız kararlı olduğu gösterilmiştir. Sayısal çözümlerin etkinliğini ve doğruluğunu göstermek için L_2 ve L_∞ hata normları ile değışmezlerin değerleri hesaplanmıştır. Elde edilen değerlere ait tablolar yapılmış ve bu değerlere göre şekiller çizilmiştir. Tablolar incelendiğinde hata norm değerlerinin yeterince küçük ve değışmezlerin ise hesaplamalar boyunca neredeyse sabit kaldığı görölmektedir. Şekillerden de göröldüğü gibi solitary dalganın başlangıç zamanından bitiş zamanına kadar genliğini, hızını ve şeklini hemen hemen muhafaza ettiği görölmektedir.

Sonuç olarak Rosenau-KdV ve Rosenau-KdV-RLW denklemleri ile temsil edilen ve oldukça geniş uygulamaları olan problemler için kollokasyon sonlu elemanlar yönteminin etkili, pratik ve güçlü bir yöntem olduğu söylenebilir. Aynı zamanda bu yöntem başka alanlardaki lineer olmayan problemlere de başarı ile uygulanabilir.

KAYNAKLAR

1. Güzelokur, M., “Genelleştirilmiş Rosenau-KdV ve Genelleştirilmiş Rosenau-RLW Denklemlerinin Kollokasyon Yöntemi ile Nümerik Çözümleri”, *Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi, Yüksek Lisans Tezi*, 3, Nevşehir, 2020.
2. Hepson, Ö.E., “Bazı Kısmi Diferansiyel Denklem Sistemlerinin Üstel Kübik B-spline Kolokeyşin Çözümlerinin Üretilmesi”, *Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Doktora tezi*, 22 Eskişehir, 2015.
3. Russel, J. S., “Report of the 14th Meeting of the British Association for the Advancement of Science”, *Report on waves*, (John Murray), London, 311-390, 1844.
4. Gardner, C.S., Greene, J.M., Kruskal, M.D., Miura, R.M., “Method for solving the Korteweg-deVries equation”, *Physical Review Letters*, 19, 1095-1097, 1967.
5. Karakoç, S.B. G. , Ak, T., “Numerical Simulation of Dispersive Shallow Water Waves With Rosenau-KdV Equation”, *International Journal of Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, 3(3), 32-40, 2016.
6. Park, M.A., “On the Rosenau Equation”, *Matematica Aplicada e Computacional* , 9(2), 145–152, 1990.
7. Zuo, J.M., “Solitons And Periodic Solutions For The Rosenau-KdV and Rosenau-Kawahara Equations”, *Applied Mathematics and Computation*, 2015(2), 835–840, 2009.
8. Esfahani, A., “Solitary Wave Solutions For Generalized Rosenau-KdV Equation”, *Communications in Theoretical Physics*, 55(3), 396–398, 2011.
9. Saha, A. , “Topological 1-Soliton Solutions For The Generalized Rosenau-KdV Equation”, *Fundamental Journal of Mathematical Physics*, 2(1), 19–23, 2012.
10. Hu, J., Xu, Y. , and Hu, B., “Conservative Linear Difference Scheme for Rosenau-KdV Equation”, *Advances in Mathematical Physics*, 2013, 1-7, 2013.
11. Ebadi, G., Mojaver, A., Triki, H., Yildirim, A., Biswas, A., “Topological solitons and other solutions of the Rosenau-KdV equation with power law nonlinearity” *Romanian Journal of Physics*, 58(1-2), 3-14, 2013.
12. Ak,T., Karakoç, S.B.G., Triki, H., “Numerical simulation for treatment of dispersive shallow water waves with Rosenau-KdV equation”, *The European Physical Journal Plus* 131, 356-370, 2016.
13. Ak,T., Dhawan, S., Karakoç, S.B.G., Bhowmik, S. K., Raslan, K.R., “Numerical study of Rosenau KdV equation using finite element method based on collocation approach”, *Mathematical modelling and Analysis*, 22(3),373-388, 2017.
14. Razborova, P., Moraru, L., Biswas, A., “Perturbation of Dispersive Shallow Water Waves with Rosenau-KdV-RLW Equation and Power Law Nonlinearity” *Romanian Journal of Physics*, 59 (7-8), 658-676, 2014.

15. Razborova, P., Kara, Abdul H., Biswas, A., “Additional conservation laws for Rosenau–KdV–RLW equation with power law nonlinearity by Lie symmetry”, *Nonlinear Dynamics*, 79(1), 743-748, 2014.
16. Ak, T., Karakoc, S.B.G., Biswas, A., “Numerical Scheme to Dispersive Shallow Water Waves”, *Journal of Computational and Theoretical Nanoscience*, 13, 7084-7092, 2016.
17. Apolinar-Fernández, A., Ramos, J.I., “Numerical solution of the generalized, dissipative KdV–RLW–Rosenau equation with a compact method”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 60, 165-183, 2018.
18. Wang, X., Dai, W., “A three-level linear implicit conservative scheme for the Rosenau– 2018.
19. P. M. Prenter, “Splines and Variational Methods”, *John Wiley*, New York, 1975.
20. Manickam, S. A. V., Pani, A. K. and Chung, S. K. , “A Second-order splitting combined with orthogonal cubic spline collocation method for the Rosenau equation”, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 14(6), 695–716, 1998.
21. Karakoç, S.B.G., Gao, F., Bhowmik, S. K., “Solitons and shock waves solutions for the Rosenau-KdV-Rlw equation”, *Journal of Science and Arts*, 4(45), 1073-1088, 2018.
22. Korteweg, D. J. and de Vries, G. , “On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary wave”, *Philosophical Magazine*, 39 422–443, 1895.
23. Irk, D. , Dağ, I, and Saka, B., “A small time solutions for the Korteweg-de Vries equation using spline approximation”, *Applied Mathematics and Computation* 173(2), 834–846, 2006.
24. Biswas, A., “Solitary wave solution for KdV equation with power-law nonlinearity and time-dependent coefficients”, *Nonlinear Dynamics*, 58(1-2), 345–348, 2009.
25. L. Wei, “Exact soliton solutions for the general fifth Korteweg-de Vries equation”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics* , 49(8) 1429–1434, 2009.
26. Dutykh, M. Chhay and F. Fedele, “Geometric numerical schemes for the KdV equation”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 53(2), 221–236, 2013.
27. Park, M. A. , “On the Rosenau equation”, *Matematica Aplicada e Computacional*, 9(2), 145–152, 1990.
28. Chung, S. K. , and Ha, S. N. , “Finite element Galerkin solutions for the Rosenau equation”, *Applicable Analysis*, 54(1-2), 39–56, 1994.

29. Omrani, K., Abidi, F., Achouri, T. and Khiari, N., “A new conservative finite difference scheme for the Rosenau equation”, *Applied Mathematics and Computation*, 201(1-2), 35–43, 2008.
30. Chung, S. K., “Finite difference approximate solutions for the Rosenau equation”, *Applicable Analysis*, 69(1-2), 149–156, 1998.
31. Chung, S. K. and Pani, A. K. “Numerical methods for the Rosenau equation”, *Applicable Analysis* 77(3-4), 351–369, 2001.
32. Manickam, S. A. V., Pani, A. K. and S. K. Chung, S. K., “A second-order splitting combined with orthogonal cubic spline collocation method for the Rosenau equation”, *Numerical Methods for Partial Differential Equations* 14(6), 695–716, 1998.
33. Esfahani, A., “Solitary Wave Solutions for generalized Rosenau-KdV equation”, *Communications in Theoretical Physics*, 55(3), 396–398, 2011.