T.C.

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK İNTERVAL MATRİSİ TANIMI VE BAZI İNTERVAL MATRİS HESAPLAMALARI

Tezi Hazırlayan

Meliha CEYLAN

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Zarife ZARARSIZ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

ŞUBAT 2023

NEVŞEHİR

T.C.

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK İNTERVAL MATRİSİ TANIMI VE BAZI İNTERVAL MATRİS HESAPLAMALARI

Tezi Hazırlayan

Meliha CEYLAN

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Zarife ZARARSIZ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

ŞUBAT 2023

NEVŞEHİR

TEZ BİLDİRİM SAYFASI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada yer alan bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu ve bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Meliha CEYLAN

KABUL VE ONAY SAYFASI

Doç. Dr. Zarife ZARARSIZ danışmanlığında **Meliha CEYLAN** tarafından hazırlanan "**Genelleştirilmiş Fark İnterval Matrisi Tanımı Ve Bazı İnterval Matris Hesaplamaları**" başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

07/02/2023

JÜRİ

Başkan : Prof. Dr. Kudusi KAYADUMAN

Üye : Prof. Dr. Yasin YAZLIK

Üye : Doç. Dr. Zarife ZARARSIZ

ONAY

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun…………………tarih ve…………….. sayılı kararı ile onaylanmıştır.

../../2023

Doç. Dr. Cemal ÇARBOĞA

Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım sırasında bana destek olan hocam Doç. Dr. Zarife Zararsız' a teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca eğitimimin her aşamasında manevi destekleriyle hep yanımda olan sevgili eşim ve aileme de teşekkür ederim.

GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK İNTERVAL MATRİSİ TANIMI VE BAZI İNTERVAL MATRİS HESAPLAMALARI

(Yüksek Lisans Tezi)

Meliha CEYLAN

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Şubat 2023

ÖZET

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, interval sayılara neden ihtiyaç duyulduğu ve ortaya çıkışı ile ilgili açıklamalar verilmiştir. İkinci bölümde, interval sayılarla ilgili yapılan çalışmalar ve tezimizde ihtiyaç duyulan temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Ek olarak klasik anlamdaki küme teorisi ve interval sayıların aritmetiği anlatılmıştır. Ayrıca bu bölümde; interval sayılar kullanılarak interval matris işlemlerinin nasıl yapılabileceği verilmiştir. Bir interval matrisin kofaktörünü bulma işlemleri, bir interval matrisin transpozunu hesaplamak, onun ek matrisini bulmak ve bir interval matrisin tersini hesaplama uyarlamalarına yer verilmiştir. Ayrıca 2×2 tipindeki matrislerin tersini bulma işleminin interval matrislere uyarlaması verilmiştir. Üçüncü bölümde, genelleştirilmiş fark interval matris çalışmalarına yer verilmiştir. Genelleştirilmiş fark interval matrisleri ve genelleştirilmiş fark interval matrislerin bazı dizi uzayları tanımlanmıştır. Üstelik, sonsuz boyutlu genelleştirilmiş fark interval matrisinin tanımı yapılmıştır. Ayrıca genelleştirilmiş fark interval dizi uzayları üzerine bir izomorfizm inşa edilmiştir. Son olarak dördüncü bölümde ise sonuçlar ve öneriler verilmiştir.

Anahtar sözcükler; *İnterval sayı, genelleştirilmiş fark interval matrisi, dizi uzayı, interval matrislerin kofaktörü, adjoint interval matrisler.*

GENERALIZED DIFFERENCE INTERVAL MATRIX DEFINITION AND SOME INTERVAL MATRIX CALCULATIONS

(M. Sc. Thesis)

Meliha CEYLAN

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ UNIVERSITY

INSTITUTE OF SCIE

February 2023

ABSTRACT

This thesis consist of four parts. In the first part, explanations about why it needs interval numbers and how it is heard with the emergence are given. In the second part, the basic definitions and theorems that we need in our study and thesis about interval numbers are given. In addition, ser theory in the classical sense and arithmetic of interval numbers are explained. Also in this section; It is given how interval matrix operations can be done using interval numbers. Adaptations for finding the cofactor of an interval matrix, calculating the transpose of an interval matrix, finding its additive matrix and calculating the inverse of an interval matrix are included. In addition, the adaptation of the inverse operation of 2×2 type matrices to interval matrices is given. In the third group, generalized difference interval matrix studies are given. Generalized difference interval matrices and some sequence spaces of generalized difference interval matrices are defined. Moreover, the definition of the infinite dimensional generalized difference interval matrix has been made. In addition, an isomorphism is built on generalized difference interval sequence spaces. Finally, in the fourth grade, results and recommendations are given.

Keywords; *Interval number, generalized difference interval matrix, sequence space, cofaktor of interval matrices, adjoint interval matrices*.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
W	: Tüm dizilerin kümesi
$A = (a_{mn})$	: Reel terimli sonsuz matris
$\emptyset$	: Boş küme
$\sum_{k=1}^{\infty} k$	: Birden sonsuza kadar toplam
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$	: (x_n) dizisinin limiti
$\mathcal{C} = \mathcal{C}_{nk}$	: Cesàro matrisi
$\mathbb{GD}$	: Genelleştirilmiş fark matrisi
$\mathcal{GD}_0^i$	: Sıfıra Genelleştirilmiş fark interval yakınsak dizi uzayı
$\mathcal{GD}_c^i$	: Genelleştirilmiş fark interval yakınsak dizi uzayı
$\mathcal{GD}_b^i$	: Genelleştirilmiş fark interval sınırlı dizi uzayı
c^i	: İnterval yakınsak dizi uzayı
c_0^i	: Sıfıra interval yakınsak dizi uzayı
ℓ_∞^i	: Sınırlı interval dizi uzayı
E	: İnterval sayılar kümesi
$\mathbb{E}$	: Dizi uzayları

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Matematikte, bir (gerçek) interval, kümenin herhangi iki sayısı arasında yer alan tüm gerçek sayıları içeren gerçek sayılar kümesidir. Örneğin, $0 \leq x \leq 1$ bağıntısını sağlayan x sayıları kümesi, $0, 1$ ve bunların arasındaki tüm sayıları içeren bir intervaldir. Gerçek intervaller entegrasyon teorisinde önemli bir rol oynar çünkü bunlar "boyutu" (veya "ölçü" veya "uzunluğu") tanımlaması kolay olan en basit kümelerdir. Ölçü kavramı daha sonra daha karmaşık gerçek sayı kümelerine genişletilebilir, bu da Borel ölçüsüne ve sonunda Lebesque ölçüsüne yol açar.

İntervaller, belirsizliklerin, matematiksel tahminlerin ve aritmetik yuvarlamaların gösterimini sağlayan genel bir sayısal hesaplama tekniği olan interval aritmetiğinin merkezinde yer alır. Ayrıca, tamsayılar veya rasyonel sayılar gibi tamamen sıralı keyfi bir küme üzerinde tanımlanmaktadır. Özel olarak, kapalı interval, tüm sınır noktalarını içeren ve köşeli parantez ile gösterilen bir intervaldir. Örneğin, $[0,1]$, 0'dan büyük veya eşittir ve 1'den küçük veya eşittir anlamına gelir. Bu çalışma boyunca aksi belirtilmedikçe kapalı intervallerle ilgilenilecektir.

İnterval aritmetiği ilk olarak 1951'de Dwyer tarafından ortaya atılmıştır [1]. İnterval aritmetiğinin biçimsel bir sistem olarak geliştirilmesi ve bir hesaplama aracı olarak değerlendirilmesi 1959 ve 1962'de Moore [23], [21] tarafından verilmiştir. Ayrıca Arşimet M.Ö. 3.yüzyılda π sayısının alt ve üst sınırlarını $\frac{223}{71} \leq \pi \leq \frac{22}{7}$ şeklinde belirlemiştir. Daha sonra interval sayıları 20. yüzyılın başlarında yeniden bir ortaya çıkış göstermeye başlamıştır.

Son zamanlarda, Chiao [24] interval sayılar üzerinde dizi tanımını vermiş, Şengönül ve Eryılmaz hem interval sayı dizilerinin yakınsaklığını tanımlamış hem de bu uzayların tam metrik uzaylar olduğunu göstermişlerdir [36]. Ayrıca Zararsız ve Şengönül interval sayıların bazı özel dizi uzaylarını incelemiştir [40].

İnterval aritmetiğinden bilinen iki intervalin toplama işleminden faydalanıp bulanık sayıların cebirsel özellikleri hakkında da yorumlar yapılır, sonuçlar çıkarılır. İnterval aritmetiğinin özellikleri bir genetik özellik gibi bulanık kümelere geçer. Bu da intervallerin bulanık kümeler içinde önemli bir alt yapı oluşturduğu anlamına gelir.

Son zamanlarda, mühendislik yapılarının dinamik özelliklerini belirlenmesi, iyileştirilmesi ve optimize edilmesi aşamalarında interval analizi sıklıkla kullanılmaktadır [23],[34],[30].

1.1. Tezin Amacı ve Önemi

Bu çalışmanın temel amacı,

$$\mathbb{GD} = \begin{cases} r, & k = n, \\ s, & k = n-1, \\ 0, & 0 \leq k < n-1, k > n. \end{cases}$$

genelleştirilmiş fark matrisini,

$$\mathcal{GD} = (\mathcal{GD}_{nk}) \begin{cases} [-r, r]\,, & k = n, \\ [-s, s], & k = n-1, \\ [0,0], \textit{diğer durumlarda}. \end{cases}$$

genelleştirilmiş fark interval matrislerine genişletilerek, genişletilen fark interval matrisinin sağ genelleştirilmiş fark interval matris ve sol genelleştirilmiş fark interval matris durumlarını elde etmektir.

BÖLÜM 2

2.1. Kaynak Araştırması

Bu bölümde interval sayılar, interval matrisler ve dizi uzayları ile ilgili literatürde yapılmış olan çalışmalardan bahsedilecektir.

Altay ve Başar Euler dizi uzaylarını tanıtmış sürekliliklerini göstermiş ve sonsuz matrisler için gerekli koşulları vermişlerdir [2]. Altay ve Başar dizi uzaylarının matris eşleşmelerinden bahsetmiştir [3], [8]. Başarır sonsuz dizi uzaylarını tanımlayıp incelemiş ve bazı matris dönüşümlerini verebilmek için gerekli koşulları incelemiştir [6]. Malkowsky ve Savaş bazı dizi uzaylarını tanıtmış ve bunların aralarındaki matris dönüşümlerini vermişlerdir [25]. Aydın ve Başar mutlak olmayan dizi uzaylarını tanıtmış ve yeni dizi uzaylarının matris dönüşümlerini vermişlerdir [5], [4]. Hayes dijital makinelerin sınırlamalarından kaynaklanan hataları azaltmak için alt ve üst sınır bilinmesi gerektiği ve böylece en azından ne kadarlık bir hata paylarının olduğunun bilinebileceğini söylemiştir. Bu tür sayısal sorunlarla başa çıkabilmek için interval aritmetiği tekniğinin kullanılması gerektiği ile ilgili bilgiler vermiştir [22]. Moore ve Yang dijital hesaplamalardaki eş zamanlı hata analizi için bir interval aritmetiği tasarlamıştır [30]. Duracz, Farjudian, Konecny ve Taha fonksiyon interval aritmetiği ve aritmetiği uygulayan yazılımlarla ile ilgili uygulama alanlarını sunmuşlardır [12]. Costa, Cholco-Cano, Lodwick ve Silva genelleştirilmiş interval uzaylarının vektör uzaylarını ve cebirsel hesaplamalar gibi yöntemlerini vermişlerdir [10]. Warmus, Sunago tarafından önerilen fiziksel olarak gerçekleştirilebilir ve ölçülebilir nicelikler için sonlu interval tabanlı ölçülerin nokta benzeri gerçek sayılardan daha doğru sonuçlar vereceğine dair kullanımıyla ilgili bilgiler vermiştir [36]. Esi intervaller için λ- yakınsama ve istatistiksel olarak λ- yakınsama kavramlarını tanıtmış ve incelemiştir [16]. Esi fark operatörü ve orlicz fonksiyonlarını kullanarak interval sayıların bazı genelleştirilmiş fark dizi uzaylarını tanıtmış ve incelemiştir [14]. Esi topolojik gruplarda interval sayıların istatiksel ve interval istatiksel yakınsama kavramlarını tanıtmıştır [15]. Esi ve Braha interval sayılar için asimptotikler üzerine λ-istatiksel eş değer ve güçlü dizi kavramlarını vermişlerdir [19]. Esi ve Esi interval sayılarının istatiksel olarak asimptotik çift uzay eş değeri ve interval sayılarının güçlü asimptotik çift uzay eş değer kavramlarını tanıtmıştır [17].

Chiao interval vektörünün normunu tanımlamıştır. İnterval vektörleri için Holder eşitsizliği ve Minkowski eşitsizliklerini tanımlayıp ispatlamıştır [24]. Nuray, Ulusu ve Dündar iki boyutlu interval dizilerin yakınsaklık kavramını tanıtmışlar ve tüm iki boyutlu interval sayılar kümesinin bir metrik uzay olduğundan bahsetmişlerdir [29]. Or ve Savaşkan sonsuz interval matris oyunlarının çözümünün ve oyun değerinin ne zaman ve hangi koşullar altında var olacağını belirlemişlerdir [34]. Tripathy, Debnath ve Saha interval sayılarının $c_0^i(\Delta), c^i(\Delta)$ ve $\ell_\infty^i(\Delta)$ dizi uzaylarını tanıtarak bazı cebirsel ve topolojik özelliklerini incelemişlerdir [35]. Şengönül ve Eryılmaz interval sayıların yakınsak ve sınırlı dizi uzaylarını tanımlamışlar. Ayrıca interval sayılarının dizi uzayları ile ilgili teoremler vermişlerdir [33]. Moore, Kearfott ve Cloud interval sayılarla ilgili hesaplamalar için Matlapp tabanlı uygulamalı örnekleri metinlere entegre ederek Intlab tabanlı örnekler ve açıklamalar yapmışlar. Ayrıca kapsamlı bir dizi alıştırma ve çözüm içeren Intlab komutları hakkında bilgi vermişlerdir [26]. Dawood interval aritmetiği teorilerinin yanı sıra bunların hesaplama ve bilimsel uygulamalarına dair bilgiler vermiştir [11]. Esi ve Bipan fark operatörü ve orlicz fonksiyonlarını kullanarak interval sayılarının bazı genelleştirilmiş fark dizi uzaylarını tanıtmışlardır [18]. Esi, Yasemin ve Değer interval sayı dizilerini

1) $\lim\limits_{k,l\to\infty} \psi(k,l) = 0$

2) $\Delta_2\psi(k,l) = \psi(k-1,l-1) - 2\psi(k+1,l+1) \geq 0$ ve $\psi(k,l) = 1$

iki koşul altında genelleyerek vermişlerdir [21].

2.2. Temel Tanım ve Teoremler

Tezde kullanılacak olan bazı temel tanım ve teoremlere bu bölümde yer verilmiştir.

Tanım 2.2.1. F boş olmayan bir küme ve $*: F \times F \to F$ ile tanımlı $*$ dönüşümüne F de ikili işlem denir. Eğer $*$ işlemi birleşmeli ise $(F,*)$ ikilisine yarı grup adı verilir. Eğer $*$ işlemine göre F kümesinin bir birim elemanı varsa $(F, *)$ ikilisine monoid denir.

Tanım 2.2.2. H boş olmayan bir küme ve $X_A: H \to [0,1]$ olsun. $H \times [0,1]$ in boş olmayan $\{(x, X_A(x)) : x \in H\}$ ile tanımlı alt kümesine H da bir bulanık küme denir.

Tanım 2.2.3. $A\ ve\ B$ bir F evrensel kümesinin bulanık olmayan herhangi iki alt kümesi olmak üzere $A \times B$ nin her alt kümesine bir bağıntı denir.

Tanım 2.2.4. G boş olmayan bir küme ve $*, G$ de bir ikili işlem olsun. $(G,*)$ cebirsel yapısına;

1) Her $a, b, c \in G$ için $a * (b * c) = (a * b) * c$ (birleşme özelliği) sağlanır.

2) Her $a \in G$ için $a * e = e * a = a$ olacak şekilde $e \in G$ (e ye birim eleman denir) vardır.

3) Her $a \in G$ için $a^{-1} * a = a * a^{-1} = e$ olacak şekilde $a^{-1} \in G$ (a^{-1} elamanına a nın tersi denir) vardır.

Aksiyomlarını sağlıyorsa bir grup denir. $(G,*)$ bir grup her $a, b \in G$ için $a * b = b * a$ değişme özelliği sağlanıyorsa G grubuna değişmeli grup veya Abel grubu denir.

Tanım 2.2.5. Arakesitleri boş olmayan ve birbirini kapsamayan kümelere overlap denir.

Tanım 2.2.6. $X \neq \emptyset$ küme ve $F \in \mathbb{C}$ kompleks bir cisim olsun. $+: X \times X \to X$ ve $\cdot: F \times X \to X$ olmak üzere eğer her $x, y, z \in X$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ için;

1) $x + y = y + x$,

2) $(x + y) + z = x + (y + z)$,

3) $x + \theta = x$ olacak şekilde bir $\theta \in X$ mevcuttur,

4) $x + (-x) = \theta$ olacak şekilde bir $-x \in X$ vardır,

5) $1. x = x$,

6) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$,

7) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$,

8) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$,

durumları mevcut ise, X kümesine $\mathbb{C}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı denir [32].

Tanım 2.2.7. $X \neq \emptyset$ bir küme olmak üzere,

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

2. Her $x, y \in X$ için $d(x, y) = d(y, x)$ (simetri),

3. Her $x, y, z \in X$ için $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (üçgen eşitsizliği), koşullarını sağlayan $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna X üzerinde bir metrik ve (X, d) ikilisine de bir metrik uzay denir [32]. Üçüncü koşuldan metrik fonksiyonunun negatif olmayan bir fonksiyon olduğu görülebilir.

Tanım 2.2.8. X bir vektör uzayı ve $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. Her $x, y \in X$ vektörü her α skaleri için,

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$,
2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$,
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,

durumları mevcutsa $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine normlu uzay denir [32].

Tanım 2.2.9. Bir matrisin satır sayısı, sütun sayısına eşit ise bu matrise kare matris denir. $n \times n$ biçimindeki bir kare matrise kısaca n'inci mertebeden kare matris adı verilir [30].

Tanım 2.2.10. Bir $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrisi için $A.B = I_n$ ve $B.A = I_n$ olacak biçimde $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrisi varsa bu B matrisine, A matrisinin çarpmaya göre tersi denir ve A^{-1} ile gösterilir [30].

Tanım 2.2.11. Bir $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrisinin çarpmaya göre tersi varsa A matrisine tersinir(regüler) matris denir. Bir $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrisinin çarpmaya göre tersi yoksa A matrisine tekil (singüler) matris denir [30].

Tanım 2.2.12. Bir $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrisinin satırları sütun, sütunlarının da satır yapılarak elde edilen yeni matrise A matrisinin devriği (transpozu) denir ve A^T ile gösterilir [30].

Tanım 2.2.13. $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ve $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ olsun. $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ sayısına A matrisinin izi denir ve trA biçiminde gösterilir [30].

Tanım 2.2.14. $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrisindeki elemanların tamamı "0" ise A matrisine sıfır matrisi denir [30].

2.3. İnterval Sayılar

C. Cantor (1815-1918) tarafından matematiğe kazandırılan küme tanımı "gördüğümüz belirli ve birbirinden farklı şeylerin veya düşündüğümüz belirli kavramların bir topluluğu" olarak verilmiştir. Klasik anlamda bir küme "belli özelliklere sahip nesnelerin topluluğu" olarak tanımlanabilir. Bu tanımdan açıkça anlaşıldığı gibi kümenin kesin sınırları vardır, yani ancak P özelliğine sahip α nesnesi P özelliğindeki nesnelerin A kümesine ait olabilir ve sembolik olarak $\alpha \in A$ ile gösterilir. Eğer tam olarak P özelliğine sahip değilse $\alpha,\ A$ kümesinin elamanı olamaz ve bu $\alpha \notin A$ ile gösterilir, diğer bir durum yoktur. Eğer A kümesi D şehrindeki caddelerin kümesi ise bu durumda,

$$A = \{\alpha : \alpha,\ D\ şehrinde\ cadde\} \tag{2.3.1}$$

ile verilebilir. Fakat bu küme net bir bilgi vermez. Örneğin caddelerin uzunluğu veya genişliği hakkında bir bilgiyi ihtiva etmez. Eğer (2.3.1) de verilen küme

$$A = \{\alpha : \alpha,\ D\ şehrindeki\ 5\ metreden\ uzun\ cadde\} \tag{2.3.2}$$

şeklinde değiştirilirse o zaman (2.3.2) in küme olup olmadığı sorgulanır. Gerçek yaşamda birçok durum bu şekildedir. Görülür ki (2.3.2) ile verilen A, (2.3.1) ile verilen A dan daha fazla bilgi içermektedir. Bu doğal genelleme olarak görülebilir. Bütün kümeleri kapsadığı varsayılan kümeye evrensel küme denir. Bir evrensel küme içindeki bir kümeyi tanımlamak için;

1. A kümesi tüm elemanları tek tek yazılarak liste biçiminde gösterilebilir. Bu daha çok sonlu kümeler için kullanılan bir yazım biçimidir.

2. A kümesi ortak özellik yardımı ile, yani P özelliğine sahip nesnelerin topluğu $\{A = \alpha : \alpha, P\ \ özelliğinde\}$ ile ifade edilebilir.

3. Kümeler arasındaki mantıksal ilişkiyi gösteren şemalardan biriside Venn şemasıdır. Küme elemanları kümeyi belirten kapalı bir şekil içindeki birer nokta olarak gösterilir; boş kümeyi göstermek için içi boş bir daire kullanılır.

4. Son olarak bir S evrensel kümesinin bir A alt kümesi

$$K_A(x) = \begin{cases} 1, \alpha \in A\ ise \\ 0, \alpha \notin A\ ise \end{cases} \tag{3.3}$$

olmak üzere $K_A\colon S \to \{0,1\}$ fonksiyonu ile tanımlanabilir.

(3.3) de verilen K_A fonksiyonuna S de A yı belirleyen karakteristik fonksiyon denir.

(3.3) den anlaşılması gereken şey eğer $\alpha \in A$ ise $K_A(\alpha) = 1$ ve eğer $\alpha \notin A$ ise

$K_A(\alpha) = 0$ olduğudur.

Fakat gerçek hayatta durum her zaman bu şekilde değildir. Örneğin; Çay ılık mıdır, soğuk mudur? Bu kime ve neye göredir? Pembe elbise güzel mi değil mi? Bu durum görecelidir ve kişiden kişiye değişiklik gösterir. Örneğin $100^{\circ}C$ maksimum sıcaklık ve $30^{\circ}C$ soğuk sınıfın üst sınırı ve sıcak sınıfın alt sınırı olduğu kabul edilirse klasik anlamdaki küme teorisine göre $29^{\circ}C$ derecenin soğuk sınıfındaki üyelik fonksiyonu (kümeye dahil olma derecesi) 1 iken $31^{\circ}C$ soğuk sınıfındaki üyelik fonksiyon karşılığı 0 olur. Aynı şekilde $31^{\circ}C$ sıcak sınıfındaki üyelik fonksiyonu karşılığı 1 iken $19^{\circ}C$ sıcak sınıfındaki üyelik fonksiyonu karşılığı 0 dır. Öte yandan günlük yaşamımızda bu iki farklı sıcaklıktaki ısıyı, bir bireye "Isılar sıcak mı, soğuk mu?" diye soracak olursak muhtemelen "İkisi de ılık" cevabı verilecektir. İşte buradan da anlaşıldığı gibi iki farklı nesnenin biri klasik anlamdaki kümelerde net bir şekilde eleman olurken, diğer nesne aynı netlikle eleman olmayabiliyor. Fakat bulanık anlamda bu iki nesne aynı kümenin belirli derecelerde elemanı yani üyesi olmaktadır. Aynı örnek bulanık kümelerde şu şekilde açıklanabilir; $29^{\circ}C$ soğuk sınıfındaki üyelik fonksiyonu 0.29 dir. $31^{\circ}C$ soğuk sınıfındaki üyelik fonksiyonu 0.31 dur. $29^{\circ}C$ sıcak sınıfındaki üyelik fonksiyonu 0.29 iken $31^{\circ}C$ sıcak sınıfındaki üyelik fonksiyonu 0.31 dir. Buradan da anlaşıldığı gibi bulanık kümeler teorisinde bir nesnenin bir kümeye üye olma durumu $[0,1]$ aralığında derecelendirilmektedir.

Dolayısıyla klasik anlamdaki küme ile bulanık küme arasındaki kaçınılmaz köprü aralıklar veya bir diğer adıyla intervallerdir.

İntervaller reel sayıların bir genellemesidir ve intervaller üzerindeki aritmetik işlemler de reel sayılar kümesi üzerinde tanımlanan aritmetik işlemlerin bir genellemesi olacaktır. Bu tip problemler interval aritmetiğinin konusu içine girmektedir.

Hiç şüphesiz ki bulanık kümelerle, klasik kümeleri birbirine bağlayan yol intervaller olduğundan ilk önce intervallerin ilginç özellikleri, cebirsel yapıları, intervallerin kümesi üzerinde tanımlı metrik gibi birçok özellik bu bölümde ele alınacaktır.

İntervaller birer sayı gibi göz önüne alınacak ve genelleştirilmiş intervaller hakkında bazı bilgilere de burada yer verilecektir.

Aslında interval yerine aralık demek daha uygun olsa da, genel kullanım interval olduğundan bu çalışmada da interval yazımını tercih edilecektir.

2.4. İnterval Sayılar Kümesi ve Bazı Özellikleri

Tanım 2.4.1. $E = \{[u^-, u^+]: u^-, u^+ \in \mathbb{R}, u^-, u^+\}$ ile tanımlı kümeye interval sayılar veya kısaca intervallerin kümesi, E interval sayılar kümesinin her bir elemanına da interval adı verilir. Bazen E interval sayılar kümesinin elemanları interval sayı olarak adlandırılır ve interval sayı denilince $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinin $[a, b], (a, b \in \mathbb{R}\ ve\ a \leq b)$ gibi kapalı alt aralıkları akla gelir. Fakat; örneğin 'hemen hemen kırmızı gibi' için [0,1] ya da "üç aşağı beş yukarı 7" için [5,9] kapalı aralığını kullanmak teorik olarak herhangi bir sorun çıkarmasa bile pratikte anlamsızdır. Hem teorik hesaplamalara uygunluğu hem de pratik anlamda bir sorun teşkil etmeyecek ise interval sayı denildiğinde Tanım 2.4.1. de verilen E interval sayılar kümesinin bir elemanından söz ediliyor olacaktır.

$\varepsilon > 0$ olmak üzere E nin $[u_0 - \varepsilon, u_0 + \varepsilon]$ formundaki bir elemanı için

$$[u_0 - \varepsilon, u_0 + \varepsilon] = u_0 + \varepsilon[-1,1] \tag{2.4.1}$$

olduğundan $u_0 \mp \varepsilon$ kısaltması uygun yerlerde kullanılacaktır.

Tanım 2.4.2. Her $u = [u^-, u^+] \in E$ için eğer $u^- > 0$ ise u ya pozitif interval; $u^+ < 0$ ise u ya negatif interval sayı denir. Eğer $u^- < 0 < u^+$ ise u ne pozitif ne de negatiftir. Açık, yarı açık ve kapalı interval çalışmaları olduğu biliniyor lakin bu çalışmada kapalı intervaller kullanılmıştır. Genel olarak u^- ye u interval sayısının başlangıç noktası, u^+ ya da u interval sayısının bitiş noktası denir. Buradan anlaşılacağı gibi $u^- = u^+$ ise u interval sayısı bir reel sayıyı temsil eder. Dolayısıyla her bir reel sayı; başlangıç noktası ve bitiş noktası aynı olan bir interval sayı olarak kabul edilebilir. Ve bu intervallere dejenere interval denir.

2.5. İnterval Sayılar İçin Eşitlik ve Sıralama Aksiyomları

Tanım 2.5.1. $\mathrm{u} = [u^-, u^+]$ ve $\mathrm{v} = [v^-, v^+]$ interval sayıları verilsin. Eğer $u^- = v^-$ ve $u^+ = v^+$ ise $u = v$ dir. Mesela, 1 ± 0.2 interval sayısı $v = v_0 \mp \varepsilon_1$ interval sayısına eşit ise açık olarak $v_0 = 1$ ve $\varepsilon = 0.2$ dir.

Tanım 2.5.2. u ve v inteval sayıları için $u^- \leq v^-$ ve $u^+ \leq v^+$ ise u ya v den küçüktür veya eşittir denir ve $u \preccurlyeq v$ ile gösterilir. Bu tip bir sıralamanın E interval sayılar kümesinin her elemanını karşılaştıramayacağı açıktır. Mesela, $u = [0,6]$ ve $v = [-2,8]$ interval sayıları karşılaştırılamaz. Kısaca $u \subset v$ veya $v \subset u$ ise u ve v sayıları arasındaki büyüklük küçüklük ilişkisi belirlenemez. E interval sayılar kümesinin ancak ve ancak overlap ve Tanım 2.5.2. şartlarını sağlayan elemanları karşılaştırılabilir. Buradan anlaşılıyor ki E interval sayılar kümesinin $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinde olduğu gibi tam olarak sıralanmasından söz edilemez.

E interval sayılar kümesinin sıralanabilen elemanları $E^* \subseteq E$ olsun. Her $u, v, z \in E^*$ için aşağıdaki sıralama özellikleri geçerlidir;

1. $u \preccurlyeq v$ dir.
2. $v \preccurlyeq u$ ve $u \preccurlyeq v$ ise $u = v$ dir.
3. $u \preccurlyeq v$ ve $v \preccurlyeq z$ ise $u \preccurlyeq z$ dir.
4. $u \preccurlyeq v$ veya $v \preccurlyeq u$ dir.

Tanım 2.5.3. E interval sayılar kümesinin tam sıralı alt kümesi E^* ile gösterilsin. $A \subset E^*$ olmak üzere A kümesi birinci, ikinci ve üçüncü şartları sağlıyorsa A ya kısmi sıralı interval sayıların kümesi, eğer ilave olarak dördüncü şart da sağlanıyorsa A ya tam sıralı interval sayıların kümesi denir.

Tanım 2.5.4. $\mathbb{R}$ kümesinde olduğu gibi $\preccurlyeq$ bağıntısına E^* üzerinde eşitsizlik bağıntısı adı verilir. Bir kümenin herhangi iki elemanı karşılaştırılabiliyorsa bu kümeye lineer sıralı küme denir. E interval sayılar kümesinin rastgele iki elemanı daima, başlangıç ve bitiş noktalarını kullanarak karşılaştırılamadığı için lineer sıralı değildir. Örneğin, $u = -1 \pm 0.7$ ve $v = 2 \pm 0.1$ interval sayılarını Tanım 2.5.2. yi kullanarak karşılaştıramayız.

2.6. İnterval Sayı Kümelerinin Cebirsel Özellikleri

Tanım 2.6.1. $+ : E \times E \to E$, $\quad +(u, v) = u + v = [u^- + v^-, u^+ + v^+]$ ile tanımlı toplama,

$\cdot : \mathbb{R} \times E \to E$, $\alpha \geq 0$ ise $\alpha u = [\alpha u^-, \alpha u^+]$ ve eğer $\alpha < 0$ ise $\alpha u = [\alpha u^+, \alpha u^-]$ ile tanımlı skalerle çarpma işlemleri göz önüne alınsın.

Yukarıdaki işlemlerin anlamı sırasıyla ; $u + v = \{x + y : x \in u, y \in v\}$ ve $\alpha u = \{\alpha x : x \in u\}$ ile tanımlı kümelerin toplamı ve skalerle çarpımından başka bir şey değildir.

Gerçekten, $x \in u$ ise $u^- \leq x \leq u^+$ ve $y \in v$ ise $v^- \leq y \leq v^+$ olduğunda açık olarak $u^- + v^- \leq x + y \leq u^+ + v^+$ yani $u + v = [u^- + v^-, u^+ + v^+]$ dir. Aynı düşünce ile $x \in u$ ise $u^- \leq x \leq u^+$ ise $\alpha \geq 0$ için $\alpha u^- \leq \alpha u \leq \alpha u^+$ ve $\alpha < 0$ ise $\alpha u^+ \leq \alpha u \leq \alpha u^-$ olacağı açıktır. Bu toplama ve skalerle çarpma işlemlerine sırasıyla E interval sayılar kümesi üzerinde standart toplama ve skalerle çarpma işlemleri denir.

Örnek 2.6.1.1. $u \in E$ olmak üzere; $u + \theta = [u^-, u^+] + [0,0] = [u^- + 0, u^+ + 0] = [u^-, u^+]$ olduğundan $\theta = [0,0]$, E interval sayılar kümesinin birim elemanıdır. İnterval sayılar kümesi üzerinde E interval sayılar kümesinin bir tek birim elemanı vardır. Gerçekten eğer θ ve θ_1 E interval sayılar kümesinin farklı iki birim elemanı ise $\theta = \theta + \theta_1 = \theta_1 + \theta = \theta$ olur.

$u = [u^-, u^+], v = [v^-, v^+]$ ve $z = [z^-, z^+]$ interval sayıları verilsin. $u + v = [u^- + v^+, u^+ + v^+]$ olup interval sayı tanımından $u^- \leq u^+$ ve $v^- \leq v^+$ ifadeleri yazılabilir. Bu iki ifade taraf tarafa toplanırsa $u^- + v^- \leq u^+ + v^+$ elde edilir. $u^- + v^-, u^+ + v^+$ birer reel sayı ve $u^- + v^- \leq u^+ + v^+$ olduğundan $[u^- + v^-, u^+ + v^+]$ nin birer interval sayı olduğu sonucuna varılır. O halde E interval sayılar kümesi toplama işlemine göre kapalıdır. u ve v interval sayıları için;

$$([u^-, u^+] + [v^-, v^+]) + [z^-, z^+] = [u^-, u^+] + ([v^-, v^+] + [z^-, z^+])$$

eşitliği (toplamanın birleşme özelliği) geçerlidir.

Ayrıca $[u^-, u^+] + [v^-, v^+] = [v^-, v^+] + [u^-, u^+]$ değişme özelliği sağlanır.

İnterval sayılar kümesi üzerinde tanımlı skaler ile çarpma işleminde $\alpha = -1$ ve iki interval sayının toplaması göz önüne alınırsa;

$u + (-1)u = [u^-, u^+] + (-1)[u^-, u^+] =$

$[u^-, u^+] + [-u^+, -u^-] = [u^- - u^+, u^+ - u^-] \neq \theta$ olduğundan interval sayının toplama işlemine göre tersi yoktur. Bu yüzden $x, u \in E$ olmak üzere $x + u = \theta$ biçimindeki interval denklemlerini çözümsüz hale getirir. Şu halde $(E, +)$ ikilisi bir grup değildir.

Fakat $(E,+)$ ile verilen cebirsel yapı, kapalılık, birleşme, değişme ve birim eleman özelliklerine sahip olduğundan Abel monoiddir.

$+: E \times E \to E$,$+(u,v) = u + v = [u^- + v^-, u^+ + v^+]$ ile tanımlı toplama,

$\cdot: \mathbb{R} \times E \to E$,eğer $\alpha \geq 0$ ise $\alpha u = [\alpha u^-, \alpha u^+]$ ve eğer $\alpha < 0$ ise

$\alpha u = [\alpha u^+, \alpha u^-]$ ile tanımlı skalerle çarpma işlemleri göz önüne alınsın.

Örnek 2.6.1.2. $u = [-5, 3]$, $v = [0, 6]$ $ve\ \alpha = 2$ olsun. Bu durumda standart toplama ve skalerle çarpmaya göre

$u + v = [u^- + v^-, u^+ + v^+]$ şeklinde toplama işlemleri yapılır verilen intervallerin birinci elemanları kendi aralarında ve ikinci elemanları kendi aralarında işaretleriyle birlikte toplanır.

$u + v = [-5, 3] + [0, 6] = [-5 + 0, 3 + 6] = [-5, 9]$ ve

$\cdot: \mathbb{R} \times E \to E$ eğer $\alpha \geq 0$ ise $\alpha u = [\alpha u^-, \alpha u^+]$.

Eğer bir skalerle bir interval arasında çarpma işlemi yapılırsa verilen skaler ile interval sayının elemanları tek tek çarpılır.

$\alpha u = 2[-5, 3] = [2.(-5), 2.(3)] = [-10, 6]$ şeklinde hesaplanmış olur.

Örnek 2.6.1.3 $u = [2, 7]$ ve $v = [-5,4]$ interval sayıları ve $\alpha = 3$ verilmiş olsun;

$u + v$ ve αv işlemlerinin sonucu kaçtır?

$u + v$ işleminin sonucunu bulabilmek için her iki elemanın birinci elemanları kendi aralarında ikinci elemanları kendi aralarında işaretleriyle birlikte ayrı ayrı toplanır.

$u + v = [2, 7] + [-5, 4] = [2 - 5, 7 + 4] = [-3, 11]$

αv işleminin sonucunu hesaplamak için verilen $\alpha = 3$ sabiti istenilen $v = [-5,4]$ intervalinin elemanlarıyla tek tek çarpılır.

$\alpha v = 3[-5, 4] = [3.(-5), 3.(4)] = [-15, 12]$ şeklinde sonuçlar bulunur.

Örnek 2.6.1.4 $u = [-11, 3]$ ve $v = [5,7]$ olsun. $u - v$ işleminin sonucu kaçtır? İnterval sayılarda çıkartma işlemini yapmak için birinci intervalin elemanları aynen bırakılır ikinci intervalin elamanları önce (-1) ile çarpılır daha sonra işaretleri değişen ikinci intervalin elamanları büyüklük küçüklük sırasına göre tekrar yazılır. Daha sonra birinci intervalle yeni elde edilen ikinci intervalin son hali toplanılarak işlem tamamlanır.

$u - v = [-11, 3] - [5, 7] = [-11,3] + (-1)[5, 7]$

$= [-11, 3] + [-7, -5] = [-11 - 7, 3 - 5\,] = [-18, -2]$ dir.

2.7. İnterval Sayıların Standart Çarpımı

Tanım 2.7.1. u ve v interval sayılarının çarpımı;

$\therefore E \times E \to E, \cdot\, (u, v) = u \cdot v = [u^-, u^+] \cdot [v^-, v^+] = [minR, maxR]$,

$R = \{u^- v^-, u^- v^+, u^+ v^-, u^+ v^+\}$ olarak tanımlanır.

Örnek 2.7.1.1. $u = [-5;\ 3]$, $v = [0;\ 6]$ olsun. $u \cdot v$ işleminin sonucunu hesaplayınız.

İşleminin sonucunu hesaplamak için $R = \{u^- v^-, u^- v^+, u^+ v^-, u^+ v^+\}$ şeklinde verilen kural kullanılır.

$R = \{-5.0, -5.6, 3.0, 3.6\}$ şeklinde yapılan çarpma sonucunda ifadeler $R = \{0, -30, 0, 18\}$ olarak bulunur. Burada minimum eleman -30 ve maksimum eleman 18 olarak elde edilmiştir. O halde $u.v = [-30; 18]$ şeklinde elde edilir.

2.8. İnterval Sayılarda Bölme

Tanım 2.8.1. Bir u interval sayısının v interval sayısına bölümü $v \neq 0$ olmak üzere

$\div : E \times E \to E, \div\, (u, v) = \frac{u}{v} = u \cdot \frac{1}{v}$ şeklindedir.

Örnek 2.8.1.1. $u = [7,9];\ v = [-3,5]$ olduğunda $u \cdot v$ ve $\frac{u}{v}$ değerlerini hesaplayınız.

İnterval sayıların nasıl çarpıldığına dair açıklama Tanım 2.7.1. te verilmiştir. İnterval sayılarda bölme işlemi de aynen çarpma işlemi gibi yapılır verilen iki intervalinde tüm elemanları çarpılır fakat bu çarpma işleminden önce payda kısmında verilen interval $\frac{1}{v}$ şeklinde yazılır. Daha sonra çarpma işlemine geçilir. Buradan minimum ve maksimum değerler bulunarak bölme işleminin sonucu elde edilir.

$R = \{7 \cdot (-3), 7 \cdot 5, 9 \cdot (-3), 9 \cdot 5\} = \{-21, 35, -27, 45\}$

olduğundan çarpma işleminin sonucu $u \cdot v = [minR, maxR] = [-27,45]$ şeklinde elde edilir. Benzer şekilde

$\frac{u}{v} = u \cdot \frac{1}{v} = [7{,}9] \cdot \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{5}\right]$ için;

$$R = \left\{7 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right), 7 \cdot \left(\frac{1}{5}\right), 9 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right), 9 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)\right\} = \left\{-\frac{7}{3}, \frac{7}{5}, -\frac{9}{3}, \frac{9}{5}\right\}$$

olduğundan bölme işleminin sonucu

$\frac{u}{v} = u.v = \left[-\frac{9}{3}, \frac{9}{5}\right]$ şeklinde elde edilir.

Örnek 2.8.1.2. $u = [-5;\ 3]$, $v = [2;\ 6]$ ise $\frac{u}{v}$ değerini hesaplayınız.

Bölme işleminin nasıl hesaplandığı Tanım 2.8.1. de verilmiştir buradan

$R = \left\{-5.\left(\frac{1}{2}\right), -5.\left(\frac{1}{6}\right)\ ,3.\left(\frac{1}{2}\right)\ ,\ 3.\left(\frac{1}{6}\right)\right\}$ elde edilir. Minimum ve maksimum elemanlar belirlenir ve işleminin sonucu

$\frac{u}{v} = \left[\frac{-5}{2}, \frac{3}{2}\right]$ şeklinde bulunur.

Tanım 2.8.2. $u = [u^-, u^+]$ intervali verilsin. Eğer $u^- = u^+$ ise u interval sayısına dejenere interval sayı denir [1].

2.9. İnterval Matrisler

Tanım 2.9.1. $\mathbb{N}_n = \{0,1,2,\dots,n\}$ ve $\mathbb{N}_m = \{0,1,2,\dots,m\}$ olmak üzere

$$f{:}\, \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_m \to E, i,j \to f(i,j) = a_{ij}, (1 \le i \le n\,, 1 \le j \le m)$$

ve $a_{ij} = [a_{ij}^-, a_{ij}^+]$ elemanlarının oluşturduğu

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}_{n\times m} = \begin{bmatrix} [a_{11}^-, a_{11}^+] & \cdots & [a_{11}^-, a_{11}^+] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [a_{n1}^-, a_{n1}^+] & \cdots & [a_{nm}^-, a_{nm}^+] \end{bmatrix}_{n\times m} = \left[[a_{ij}^-, a_{ij}^+]\right]_{n\times m}$$

ile verilen tabloya intervallerin matrisi denir.

Açık olarak $1 \le i \le n$ ve $1 \le j \le m$ için $a_{ij}^- = a_{ij}^+$ alınırsa Ã interval matrisi reel sayıların $n \times m$ boyutlu matrisine indirgenir.

2.9.1. İnterval Matrislerin Çarpımı ve Toplamları

Tanım 2.9.1.1. $n \times m$ tipindeki bütün interval matrislerin kümesini $E^{n\times m}$ ile gösterilsin, $E^{n\times m} = \{\tilde{A} : \tilde{A}\ , n \times m \text{ tipinde interval matris}\}$ olsun. $\tilde{A},\ \tilde{B}, \tilde{C} \in E^{n\times m},\ \lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\lambda\tilde{A}$ skalerle çarpımı, $\tilde{A} + \tilde{B}$ toplamı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\lambda\tilde{A} = \begin{cases} \left[[\lambda a_{ij}^-, \lambda a_{ij}^+]\right]_{n\times m}, & \lambda \geq 0\ ise \\ \left[[\lambda a_{ij}^+, \lambda a_{ij}^-]\right]_{n\times m}, & \lambda < 0\ ise \end{cases}$$

$$\tilde{A} + \tilde{B} = \left[[a_{ij}^-, a_{ij}^+]\right]_{n\times m} + \left[[b_{ij}^-, b_{ij}^+]\right]_{n\times m} = \left[\left[a_{ij}^- + b_{ij}^-, a_{ij}^+ + b_{ij}^+\right]\right]_{n\times m}$$

$$= \left[[c_{ij}^-, c_{ij}^+]\right]_{n\times m}.$$

$\tilde{A}$ interval matrisi $n \times m$ ve $\tilde{B}$ interval matrisi $m \times r$ boyutlu matrisler olsunlar. $\tilde{A} \cdot \tilde{B}$ çarpımı $1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq r$ ve

$$c_{ij}^- = \sum_{k=1}^{m} min\left\{a_{ik}^- b_{kj}^-, a_{ik}^- b_{kj}^+, a_{ik}^+ b_{kj}^-, a_{ik}^+ b_{kj}^+\right\}$$

ve

$$c_{ij}^+ = \sum_{k=1}^{m} max\left\{a_{ik}^- b_{kj}^-, a_{ik}^- b_{kj}^+, a_{ik}^+ b_{kj}^-, a_{ik}^+ b_{kj}^+\right\}$$

olmak üzere

$$\tilde{A} \cdot \tilde{B} = \left[\left[a_{ij}^-, a_{ij}^+\right]\right]_{n\times m} \cdot \left[\left[b_{ij}^-, b_{ij}^+\right]\right]_{m\times r} = \left[[c_{ij}^-, c_{ij}^+]\right]_{n\times r}$$

şeklinde tanımlanır.

Şimdi interval matrislerin sağladığı bazı özellikler incelenecektir.

Teorem 2.9.1.1. $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C} \in E^{n\times m}$ olsun. $+: E^{n\times m} \times E^{n\times m} \rightarrow E^{n\times m}$ ile tanımlı $+$ işlemi

1. $\tilde{A} + \tilde{B} = \tilde{B} + \tilde{A}$
2. $\left(\tilde{A} + \tilde{B}\right) + \tilde{C} = \tilde{A} + \left(\tilde{B} + \tilde{C}\right)$
3. $\tilde{A} + \theta = \tilde{A}$

özelliklerini sağlar. Burada θ ile gösterilen interval matrisi, Ã interval matrisi ile aynı boyutlu olan her

$1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m$ için $\theta_{ij} = [0,0]$ ile verilen $E^{n\times m}$ interval matris kümesinin bir elemanıdır.

İspat: (1) in ispatı aşağıdaki gibidir:

$$\tilde{A} + \tilde{B} = \left[[a_{ij}^-, a_{ij}^+]\right]_{n\times m} + \left[[b_{ij}^-, b_{ij}^+]\right]_{n\times m} = \left[[a_{ij}^- + b_{ij}^-, a_{ij}^+ + b_{ij}^+]\right]_{n\times m}$$

$$= \left[[b_{ij}^- + a_{ij}^-, b_{ij}^+ + a_{ij}^+]\right]_{n\times m} = \left[[b_{ij}^-, b_{ij}^+]\right]_{n\times m} + \left[[a_{ij}^-, a_{ij}^+]\right]_{n\times m} = \tilde{B} + \tilde{A}$$

$\lambda \in \mathbb{R}$ verilsin. $\lambda\tilde{A}$ çarpımı

$$\lambda\tilde{A} = \lambda\left[[a_{ij}^-, a_{ij}^+]\right]_{n\times m} = \begin{cases} \left[[\lambda a_{ij}^-, \lambda a_{ij}^+]\right]_{n\times m}, \lambda \geq 0 \; ise \\ \left[[\lambda a_{ij}^+, \lambda a_{ij}^-]\right]_{n\times m}, \lambda < 0 \; ise \end{cases}$$

ile tanımlanır. E interval sayılar kümesinin bir $u = [u^-, u^+]$ intervali de bir interval skaler olarak göz önüne alınır ise bu durunda $u\tilde{A}$ çarpımı

$c_{ij}^- = min\{a_{ij}^- u^-, a_{ij}^+ u^-, a_{ij}^- u^+, a_{ij}^+ u^+\}$,

$c_{ij}^+ = max\{a_{ij}^- u^-, a_{ij}^+ u^-, a_{ij}^- u^+, a_{ij}^+ u^+\}$

ve $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$ olmak üzere her $[a_{ij}^-, a_{ij}^+] \in \tilde{A}$ için

$[u^-, u^+][a_{ij}^-, a_{ij}^+] = [c_{ij}^-, c_{ij}^+]$ olduğundan $[u^-, u^+]\left[[a_{ij}^-, a_{ij}^+]\right]_{n\times m} = \left[[c_{ij}^-, c_{ij}^+]\right]_{n\times m}$dir.

Örnek 2.9.1.1.1. Aşağıda verilen interval matrislerle

$A\ (\tilde{A} + \tilde{B})$, $\tilde{A} - \tilde{C}$, $\tilde{D}(\mathrm{u}\tilde{E})$, $\mathrm{u}(\tilde{D}\tilde{E})$ ve $\tilde{D}(\mathrm{u}\tilde{E}) \neq \mathrm{u}(\tilde{D}\tilde{E})$ işlemlerini hesaplayınız.

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} [-1,0] & [3,5] & [0,1] \\ [1,1] & [-5,2] & [1,2] \\ [-3,1] & [1,2] & [2,7] \end{bmatrix},$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} [1,3] & [1,0] & [-1,3] \\ [7,11] & [1,2] & [1,0] \\ [2,5] & [2,3] & [-2,1] \end{bmatrix},$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} [1,2] & [1,0] & [-1,1] \\ [-1,1] & [1,3] & [1,0] \\ [2,5] & [-1,3] & [-2,2] \end{bmatrix},$$

$$\tilde{D} = [[2,3] \quad [0,2]],$$

$\tilde{E} = \begin{bmatrix} [-1.0] \\ [0,1] \end{bmatrix}$ interval matrisleri,

$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ reel sayıların matrisi ve $u = [-1, 1]$ interval sayısı verilmiştir.

$A\left(\tilde{A} + \tilde{B}\right)$ işlemini hesaplamak için

$$A\left(\tilde{A} + \tilde{B}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} [-1,0] & [3,5] & [0,1] \\ [1,1] & [-5,2] & [1,2] \\ [-3,1] & [1,2] & [2,7] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [1,3] & [1,0] & [-1,3] \\ [7,11] & [1,2] & [1,0] \\ [2,5] & [2,3] & [-2,1] \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} [-1,0] + [1,3] & [3,5] + [1,0] & [0,1] + [-1,3] \\ [1,1] + [7,11] & [-5,2] + [1,2] & [1,2] + [1,0] \\ [-3,1] + [2,5] & [1,2] + [2,3] & [2,7] + [-2,1] \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} [0,3] & [4,5] & [-1,4] \\ [8,12] & [-4,4] & [2,2] \\ [-1,6] & [3,5] & [0,8] \end{bmatrix} \right)$$

$$= \left(\begin{bmatrix} [38,75] & [-10,35] & [9,30] \\ [-1,9] & [7,10] & [-1,12] \\ [-6,-15] & [10,1] & [-5,-6] \end{bmatrix} \right) = \left(A\tilde{A} + A\tilde{B}\right)$$

$\tilde{A} - \tilde{C}$ işlemini hesaplamak için önce interval matrisler;

$\tilde{A} - \tilde{C} = \begin{bmatrix} [-1,0] & [3,5] & [0,1] \\ [1,1] & [-5,2] & [1,2] \\ [-3,1] & [1,2] & [2,7] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} [1,2] & [1,0] & [-1,1] \\ [-1,1] & [1,3] & [1,0] \\ [2,5] & [-1,3] & [-2,2] \end{bmatrix}$ şeklinde yazılır.

Yapılan işlem sonucunda (-) işaretli alan interval matrisin tüm elemanları (-1) ile çarpılır, başlangıç ve bitiş noktaları yeniden büyüklük küçüklüklerine göre düzenlenerek interval matris baştan yazılır ve iki interval matris arasındaki çıkarma işlemi $(+)$ haline getirilerek toplama işlemi yapılır gibi birinci satır birinci sütun elemanları kendi aralarında toplanır. Benzer şekilde diğer satır ve sütun elemanları kendi aralarında toplanarak çözüm elde edilir.

$$\tilde{A}-\tilde{C}=\begin{bmatrix}[-1,0] & [3,5] & [0,1]\\ [1,1] & [-5,2] & [1,2]\\ [-3,1] & [1,2] & [2,7]\end{bmatrix}+(-1)\begin{bmatrix}[1,2] & [1,0] & [-1,1]\\ [-1,1] & [1,3] & [1,0]\\ [2,5] & [-1,3] & [-2,2]\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}[-1,0] & [3,5] & [0,1]\\ [1,1] & [-5,2] & [1,2]\\ [-3,1] & [1,2] & [2,7]\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}[-2,-1] & [-1,0] & [-1,1]\\ [-1,1] & [-3,-1] & [-1,0]\\ [-5,-2] & [-3,1] & [-2,2]\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}[-1,0]+[-2,-1] & [3,5]+[-1,0] & [0,1]+[-1,1]\\ [1,1]+[-1,1] & [-5,2]+[-3,-1] & [1,2]+[-1,0]\\ [-3,1]+[-5,-2] & [1,2]+[-3,1] & [2,7]+[-2,2]\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}[-3,-1] & [2,5] & [-1,2]\\ [0,2] & [-8,1] & [0,2]\\ [-8,-1] & [-2,3] & [0,9]\end{bmatrix}$$

$\widetilde{D}(\mathrm{u}\tilde{E})$ işleminin sonucunu hesaplamak için önce $\mathrm{u}\tilde{E}$ işlemi yapılır buradan bulunan ifade ile $\widetilde{D}$ interval matrisi işleme alınır.

$$\widetilde{D}(\mathrm{u}\tilde{E})=\big[[2,3]\ [0,2]\big]\left(\left[[-1,1]\begin{bmatrix}[-1,0]\\ [0,1]\end{bmatrix}\right]\right)$$

$$=\big[[2,3]\ [0,2]\big]([-1\cdot-1+1\cdot 0,-1\cdot 0+1\cdot 1])$$

$$=\big[[2,3]\ [0,2]\big]([1,1])=[2,5]$$

$\mathrm{u}(\widetilde{D}\tilde{E})$ işleminin sonucu $\widetilde{D}(\mathrm{u}\tilde{E})$ işleminin sonucunun hesaplanmasındaki işlemler yapılarak bulunabilir.

$$\mathrm{u}(\widetilde{D}\tilde{E})=[-1,1]\left(\left[[2,3]\quad [0,2]\begin{bmatrix}[-1,0]\\ [0,1]\end{bmatrix}\right]\right)$$

$=[-1,1]\ ([-2,3])=\ [-3,3]$ elde edilir.

Örnek 2.9.1.1.2. $\tilde{A}+\theta=\tilde{A}$ olduğunu verilen işlemler üzerinden gösteriniz.

$\tilde{A}=[-3,3]$ interval matrisi ve $\theta=[0,0]$ interval matrisi olsun. İnterval sayılarda toplama işlemi önceki bölümlerde verilmiştir bu bölümde de aynı interval sayılarda olduğu gibi interval matris toplaması yapılarak istenilen ifade elde edilecektir.

$\tilde{A}+\theta=[-3,3]+[0,0]=[-3+0,3+0]=[-3,3]=\tilde{A}$ olur.

2.9.2. İnterval Matrislerinin Determinantları

Tanım 2.9.2.1. $m\times n$ tipinde bir $\tilde{A}$ interval matrisi verilsin.

u_{ij}, c_{ij} nin bilinen anlamda kofaktörü olmak üzere Ã interval matrisinin determinantı

$det\tilde{A} = \sum u_{ij} c_{ij}$ dir.

$\tilde{A} = \begin{bmatrix} [u_{11}^-, u_{11}^+] & [u_{12}^-, u_{12}^+] \\ [u_{21}^-, u_{21}^+] & [u_{22}^-, u_{22}^+] \end{bmatrix}$ bir interval matrisi verilsin;

Bilinen determinant hesabına benzer olarak $\tilde{A}$ interval matrisinin determinantı standart interval aritmetiği kullanılarak,

$det\tilde{A} = [u_{11}^-, u_{11}^+][u_{22}^-, u_{22}^+] - [u_{21}^-, u_{21}^+][u_{12}^-, u_{12}^+]$

ile hesaplanabilir ve sonuç yine bir intervaldir, $det\tilde{A}$ ile gösterilir.

Örnek 2.9.2.1.1. $\tilde{A} = \begin{bmatrix} [2,0] & [1,2] \\ [2,1] & [0,-1] \end{bmatrix}$ için $det\tilde{A}$ işleminin sonucu kaçtır?

$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ şeklindeki reel değerli matrislerde olduğu gibi $detB = (a \cdot d) - (c \cdot b)$ şeklinde hesaplanır. O zaman bu formülde olduğu gibi işlemler interval matrisler içinde aynı şekilde uygulanırsa $\tilde{A}$ interval matrisinin determinantı hesaplanmış olur.

$$det\tilde{A} = [2,0][0,-1] - [2,1][1,2] =$$

$$\left[\left(2 \cdot 0, 2 \cdot (-1), 0 \cdot 0, 0 \cdot (-1)\right)\right] - [(2 \cdot 1, 2 \cdot 2, 1 \cdot 1, 1 \cdot 2)]$$

$= [-2,0] - [1,4] = [-2,0] + [-4,-1] = [-6,-1]$ şeklinde bulunur.

2.9.3. İnterval Matrislerin Normu

Tanım 2.9.3.1. $\tilde{A} = \left[[a_{ij}^-, a_{ij}^+]\right]_{n \times m}$ intervallerin matrisi ise

$$\|\tilde{A}\| = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{k} M\left([a_{ij}^-, a_{ij}^+]\right)$$

ile verilen reel sayıya $\tilde{A}$ interval matrisinin normu denir. Eğer $\tilde{A}$ interval matrisi $\infty \times \infty$ şeklinde bir interval matris ise $\tilde{A}$ interval matrisinin normu

$$\|\tilde{A}\| = \max_{i} \sum_{j} M\left([a_{ij}^-, a_{ij}^+]\right)$$

ile hesaplanır. Burada

$M\left([a_{ij}^-, a_{ij}^+]\right) = max\left\{|a_{ij}^-|, |a_{ij}^+|\right\}$ şeklindedir [26].

Örnek 2.9.3.1.1. $\tilde{A} = \begin{bmatrix} [-1,3] & [2,5] \\ [-1,0] & [0,1] \end{bmatrix}_{2\times 2}$ interval matrisinin normunu hesaplayınız.

$\tilde{A}$ interval matrisinin normunu hesaplayabilmek için her bir satır ve sütundaki intervallerin ayrı ayrı mutlak değerce maksimum elemanları bulunur. Bu interval matrisin mutlak değerlerce maksimum elemanlarından yeni bir matris elde edilir. Daha sonra elde edilen bu mutlak değerce maksimum matrisinin her biri kendi satırındaki mutlak değerce maksimum elemanlarla toplanır. Bu toplamdan sonra yeniden maksimum eleman belirlenir ve işlemin sonucu hesaplanmış olur.

$$\|\tilde{A}\| = \begin{bmatrix} [|-1|,|3|] & [|2|,|5|] \\ [|-1|,|0|] & [|0|,|-1|] \end{bmatrix},$$

$$\|\tilde{A}\| = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$M([a_{ij}^-, a_{ij}^+]) = max\{3+5, 1+1\} = \max\{8, 2\} = 8$ olarak elde edilmiş olur.

2.9.4. İntervallerin Sonsuz Matrisleri

Tanım 2.9.4.1. X, interval sayıların boştan farklı bir kümesi olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan $d: X \times X \to E^+$ fonksiyonuna interval metrik fonksiyon, (X, d) ikilisine ise interval metrik uzay adı verilir.

Her $u, v \in X$ için,

1. $d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v,$

2. $d(u, v) = d(v, u),$

3. $d(u, z) \leq d(u, v) + d(v, z).$

Aşağıda E interval sayılar kümesinin bazı özel alt kümeleri verilmiştir [34].

$$c^i = \left\{u_k = ([u_k^-, u_k^+]) : \lim_k [u_k^-, u_k^+] = [u_0^-, u_0^+]\right\},$$

$$c_0^i = \left\{u_k = ([u_k^-, u_k^+]) : \lim_k [u_k^-, u_k^+] = [0,0]\right\},$$

$$\ell_\infty^i = \left\{u_k = ([u_k^-, u_k^+]) : \max_k M([u_k^-, u_k^+]) < \infty\right\}.$$

Yukarıda verilen interval dizi uzayları, sırasıyla, interval yakınsak, sıfıra interval yakınsak ve sınırlı interval dizi uzayları olarak adlandırılmıştır. Eğer burada her $k \in \mathbb{N}$

için $u_k^- = u_k^+$ alınır ise yukarıda belirtilen dizi uzayları, sırasıyla, reel sayıların yakınsak, sıfıra yakınsak ve sınırlı dizi uzaylarına indirgenmiş olur.

$1 \times n$ tipindeki interval matrisleri intervallerin vektörü olarak adlandırılır. Yukarıda sözü edilen $n \times m$ tipindeki interval matrisler $\infty \times \infty$ tipindeki sonsuz boyutlu intervallere genişletilebilir.

Tanım 2.9.4.2. Her $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $\tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n1} & \dots & a_{nm} & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \end{bmatrix}_{\infty\times\infty}$

$$= \begin{bmatrix} [a_{11}^-, a_{11}^+] & \cdots & [a_{1m}^-, a_{1m}^+] & \cdots \\ [a_{21}^-, a_{21}^+] & \dots & [a_{2m}^-, a_{2m}^+] & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [a_{n1}^-, a_{n1}^+] & \cdots & [a_{nm}^-, a_{nm}^+] & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}_{\infty\times\infty}$$

formundaki matrislere sonsuz boyutlu interval matrisi denir.

$$u = (u_k) = ([u_1^-, u_1^+], [u_2^-, u_2^+], \dots, [u_k^-, u_k^+], \dots)$$

bir interval sayıların dizisi (veya interval vektör) ise

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} [a_{11}^-, a_{11}^+] & \cdots & [a_{1m}^-, a_{1m}^+] & \cdots \\ [a_{21}^-, a_{21}^+] & \dots & [a_{2m}^-, a_{2m}^+] & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [a_{n1}^-, a_{n1}^+] & \cdots & [a_{nm}^-, a_{nm}^+] & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}_{\infty\times\infty} \begin{bmatrix} [u_1^-, u_1^+] \\ [u_2^-, u_2^+] \\ \vdots \\ [u_k^-, u_k^+] \\ \vdots \end{bmatrix}_{\infty\times 1}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_k [a_{1k}^-, a_{1k}^+][u_k^-, u_k^+] \\ \sum_k [a_{2k}^-, a_{2k}^+][u_k^-, u_k^+] \\ \vdots \\ \sum_k [a_{nk}^-, a_{nk}^+][u_k^-, u_k^+] \\ \vdots \end{bmatrix}_{\infty\times 1} \qquad (2.9.4.2.1)$$

olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için $\sum_k [a_{nk}^-, a_{nk}^+][u_k^-, u_k^+]$ serileri yakınsak ise $\tilde{A}u = v$ ye u interval sayı dizisinin $\tilde{A}$ dönüşümü denir. Eğer $n, k \in \mathbb{N}$ için $a_{nk}^- = a_{nk}^+$ ve $u_k^- = u_k^+$

olacak şekilde seçilirse (2.9.4.2.1) eşitliği klasik anlamda dizilerin matris dönüşümlerine indirgenir.

Skalerlerin (x_n) dizisi $n = 1,2,3, \dots$ için x ile gösterilsin. $(xy) = \sum_k x_k y_k$ ve $\tilde{A} = (a_{nk})$ bir matris olsun. $y = \tilde{A}x$ in anlamı her bir $n \in \mathbb{N}$ için

$$y_n = (\tilde{A}x)_n = \sum_k a_{nk} x_k$$

şeklinde olmasıdır. Burada $\sum_k a_{nk} x_k$ serilerinin her birinin yakınsak olduğu kabul edilmektedir. $w_{\tilde{A}} = \{x: \tilde{A}x\ mevcut\}$ kümesi $\tilde{A}$ interval matrisinin domaini olarak adlandırılır. Eğer $\tilde{A}$ interval matrisi satır sonlu ise o zaman $w_{\tilde{A}} = w$ dir.

Burada w ile bütün kompleks sayı dizilerinin ve reel sayı dizilerinin kümesi gösterilmiştir. c yakınsak dizilerin kümesi olmak üzere $c_{\tilde{A}} = \{x: Ax \in c\}$ olsun. Bu küme $\tilde{A}$ interval matrisinin yakınsaklık alanı olarak tanımlanır.

2.9.5. Matrislerin Transpozundan Yararlanılarak İnterval Matrislerin Transpozunu Bulma

Tanım 2.9.5.1. A=(A_{ij}) $m \times n$ tipinde bir matris olmak üzere A matrisinin satırlarının aynı numaralı sütunlar, sütunları da aynı numaralı satır yapıldığında elde edilen yeni matrise A matrisinin transpozu denir, A^T ile gösterilir. A matrisi $m \times n$ tipinde bir matris ise A^T da $m \times n$ tipinde bir matris olur [30]. A matrisi $m \times n$ tipinde bir kare matris olsun;

$A^T = A\ ise(a_{ij} = a_{ji})$ A matrisine simetrik matris denir;

$A^T = -A\ ise(a_{ij} = -a_{ji})$ A matrisine antisimetrik matris denir;

$A^{-1} = A^T$ ise A matrisine ortagonal matris denir [30].

Klasik anlamda bir matris ve matrisin transpozu aşağıda verilmiştir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

olmak üzere

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots & \\ a_{1n} & a_{2n} \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

şeklinde elde edilir.

Klasik matrislerde uygulanan transpoz alma işlemleri interval matrislerin transpozunu bulmak için uygulanırsa interval matrislerin aynı satırları sütun, aynı sütunlarıda satır yapılır. Böylece interval matrislerinde transpozu alınmış olur [28].

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} [u_{11}^-, u_{11}^+] & [u_{12}^-, u_{12}^+] \\ [u_{21}^-, u_{21}^+] & [u_{22}^-, u_{22}^+] \end{bmatrix}_{m \times n}$$

interval matrisi alınırsa bir interval matrisinin transpozu

$$\tilde{A}^T = \begin{bmatrix} [u_{11}^-, u_{11}^+] & [u_{12}^-, u_{12}^+] \\ [u_{21}^-, u_{21}^+] & [u_{22}^-, u_{22}^+] \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} [u_{11}^-, u_{11}^+] & [u_{21}^-, u_{21}^+] \\ [u_{12}^-, u_{12}^+] & [u_{22}^-, u_{22}^+] \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunabilir.

Örnek 2.9.5.1.1. $\tilde{A} = \begin{bmatrix} [-2,1] & [0,1] \\ [-1,0] & [2,2] \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ interval matrisinin transpozunu bulunuz.

$\tilde{A}^T = \begin{bmatrix} [-2,1] & [-1,0] \\ [0,1] & [2,2] \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ şeklinde bulunur.

Örnek 2.9.5.1.2. $\tilde{A} = \begin{bmatrix} [1,2] & [-1,0] & [1,3] \\ [2,3] & [1,4] & [-2,-1] \\ [-3,0] & [-2,1] & [0,1] \end{bmatrix}_{3 \times 3}$ ifadesinin transpozunu bulunuz.

Bu ifadenin transpozunu bulabilmek için Örnek 2.9.5.1.1. de olduğu gibi 2×2 tipindeki interval matriste uygulanan işlemler yapılır. Birinci satır birinci sütun, ikinci satır ikinci sütun ve üçüncü satır üçüncü sütun haline getirilir.

Burada $\tilde{A}$ interval matrisinin transpozu;

$$\tilde{A}^T = \begin{bmatrix} [1,2] & [2,3] & [-3,0] \\ [-1,0] & [1,4] & [-2,1] \\ [1,3] & [-2,-1] & [0,1] \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

şeklinde elde edilir.

2.9.6. Kofaktör (eş çarpan) Matrisi

Tanım 2.9.6.1. $m \times m$ tipinde bir A kare matrisinin a_{ij} elemanının minörünün $(-1)^{i+j}$ ile çarpımına a_{ij} elemanının kofaktörü (eş çarpanı) denir ve A_{ij} ile gösterilir [30].

Tanım 2.9.6.2. A karesel matris olmak üzere a_{ij} bileşeninin minörü M_{ij} ile gösterilir.

A dan i. satır ve j. sütun silindikten sonra kalan alt matrislerin determinantı olarak tanımlanır [30].

2.9.7. İnterval Matrislerde Kofaktör (eş çarpanını) Bulma

Tanım 2.9.7.1. Matrislerde kullanılan kofaktör bulma işlemi interval matrislerin kofaktörlerini hesaplamakta kullanılırsa yani i. satır ve i. sütun silinerek geri kalan ifadelerin determinantı alınırsa ve daha sonra bulunan her bir determinant $(-1)^{i+j}$ ile çarpılırsa interval matrislerin kofaktörleri bulunmuş olur [20]. Bu kofaktör matrisi çalışma boyunca $\tilde{A}_K$ ile gösterilecektir.

Örnek 2.9.7.1.1. $\tilde{A} = \begin{bmatrix} [-1,0] & [1,1] & [0,1] \\ [1,1] & [-1,2] & [1,2] \\ [-1,1] & [0,2] & [2,3] \end{bmatrix}$ interval matrisinin kofaktörünü hesaplayınız.

$M_{11},\ M_{12},\ M_{13},\ M_{21},\ M_{22},\ M_{23},\ M_{31},\ M_{32},\ M_{33}$ minörleri bulunduktan sonra $(-1)^{i+j}$ inci bileşenleri alınarak kofaktörleri hesaplanacaktır. İlk olarak $\tilde{A}$ interval matrisinin minörleri bulunacaktır. Minörler bulunduktan sonra bu minörlerin kofaktörleri tek tek hesaplanacaktır. Minörleri bulmak içinde birinci satır birinci sütun elemanları silinerek geri kalan ifadelerin determinantı hesaplanacaktır. Daha sonra bulunan determinant $(-1)^{i+j}$ ile çarpılarak ilk eleman elde edilecektir. Diğer elemanlarda aynı işlemler yapılarak bulunur. Bütün elemanlar bulunduktan sonra oluşan yeni interval matrise kofaktör interval matrisi denir.

$$M_{11} = det \begin{bmatrix} [-1,2] & [1,2] \\ [0,2] & [2,3] \end{bmatrix} = [-7,6] \ \ ; \ \tilde{A}_{11} = (-1)^{1+1}[-3,4] = [-7,6]$$

$$M_{12} = det \begin{bmatrix} [1,1] & [1,2] \\ [-1,1] & [2,3] \end{bmatrix} = [0,5] \ \ ; \ \tilde{A}_{12} = (-1)^{1+2}[0,5] = [-5,0]$$

$$M_{13} = det\begin{bmatrix} [1,1] & [-1,2] \\ [-1,1] & [0,2] \end{bmatrix} = [-2,4] \;\; ; \;\; \tilde{A}_{13}=(-1)^{1+3}[-2,4] = [-2,4]$$

$$M_{21} = \; det\begin{bmatrix} [1,1] & [0,1] \\ [0,2] & [2,3] \end{bmatrix} = [0,3] \;\; ; \;\; \tilde{A}_{21}=(-1)^{2+1}[0,3] = [-3,0]$$

$$M_{22} = \; det\begin{bmatrix} [-1,0] & [0,1] \\ [-1,1] & [2,3] \end{bmatrix} = [-4,1] \;\; ; \;\; \tilde{A}_{22}=(-1)^{2+2}[-4,1] = [-4,1]$$

$$M_{23} = \; det\begin{bmatrix} [-1,0] & [1,1] \\ [-1,1] & [0,2] \end{bmatrix} = [-3,1] \;\; ; \;\; \tilde{A}_{23}=(-1)^{2+3}[-3,1] = [-1,3]$$

$$M_{31} = \; det\begin{bmatrix} [1,1] & [0,1] \\ [-1,2] & [1,2] \end{bmatrix} = [-1,3] \;\; ; \;\; \tilde{A}_{31}=(-1)^{3+1}[-1,3] = [-1,3]$$

$$M_{32} = \; det\begin{bmatrix} [-1,0] & [0,1] \\ [1,1] & [1,2] \end{bmatrix} = [-3,0] \;\; ; \;\; \tilde{A}_{32}=(-1)^{3+2}[-3,0] = [0,3]$$

$$M_{33} = det\begin{bmatrix} [-1,0] & [1,1] \\ [1,1] & [-1,2] \end{bmatrix} = [-3,0] \;\; ; \;\; \tilde{A}_{33}=(-1)^{3+3}[-3,0] = [-3,0]$$

Buradan $\tilde{A}_K$ interval matrisi

$$\tilde{A}_K = \begin{bmatrix} [-7,6] & [-5,0] & [-2,4] \\ [-3,0] & [-4,1] & [-1,3] \\ [-1,3] & [0,3] & [-3,0] \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

2.9.8. İnterval Matrislerin Adjointini (ek matrisini) Bulma

Tanım 2.9.8.1. Matrislerin terimleri yerine kofaktör matrisinin transpozu alınarak oluşturulan matrise ek matris denir. $Ek(A)$ ile gösterilir [33]. Bu işlem interval matrislere uygulanırsa benzer şekilde interval matrislerinde adjointleri (ek matris) hesaplanmış olur [23].

$$Adjoint(Ek)\,\left[\tilde{A}\right] = Kofaktör[\tilde{A}]^T$$

şeklinde gösterilir.

$\tilde{A} = \begin{bmatrix} [u_{11}^-, u_{11}^+] & [u_{21}^-, u_{21}^+] \\ [u_{12}^-, u_{12}^+] & [u_{22}^-, u_{22}^+] \end{bmatrix}_{2\times 2}$ tipindeki interval matrisin adjoint (ek) interval matrisi aşağıdaki basamaklar izlenerek bulunabilir.

1. yol;

$Ek(\tilde{A})$ =$\begin{bmatrix} [u_{22}^-, u_{22}^+] & (-)[u_{21}^-, u_{21}^+] \\ (-)[u_{12}^-, u_{12}^+] & [u_{11}^-, u_{11}^+] \end{bmatrix}_{2\times2}$ ifadesi düzenlenirse;

$Ek(\tilde{A})$ =$\begin{bmatrix} [u_{22}^-, u_{22}^+] & [-u_{21}^-, -u_{21}^+] \\ [-u_{12}^-, -u_{12}^+] & [u_{11}^-, u_{11}^+] \end{bmatrix}_{2\times2}$ elde edilir.

2.yol;

M_{11}, M_{12}, M_{21}, M_{22} bulunur ve $(-1)^{i+j}$ ile çarpılır ise kofaktör interval matrisi elde edilir. Kofaktör interval matrisin transpozu alınarak $Ek(\tilde{A})$ hesaplanır.

Örnek 2.9.8.1.1. $\tilde{A} = \begin{bmatrix} [-2,1] & [0,1] \\ [-1,0] & [2,2] \end{bmatrix}_{2\times2}$ interval matrisinin $Ek(\tilde{A})$ matrisini hesaplayınız.

Bu interval matrisin $Ek(\tilde{A})$ interval matrisini bulmak için birinci satır birinci sütunundaki eleman ile ikinci satır ikinci sütunundaki elemanlar yer değiştirilir. Aynı zamanda birinci satır ikinci sütun ve ikinci satır birinci sütundaki elemanların işaretleri değiştirilerek $Ek(\tilde{A})$ interval matrisi aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\text{Ek}(\tilde{A}) = \begin{bmatrix} [2,2] & -[0,1] \\ -[-1,0] & [-2,1] \end{bmatrix}$$

$$\text{Ek}(\tilde{A}) = \begin{bmatrix} [2,2] & [-1,0] \\ [0,1] & [-2,1] \end{bmatrix}$$

Şimdi 3×3 tipindeki interval matrisin ek matrisi hesaplanacaktır.

Örnek 2.9.8.1.2 $\tilde{A} = \begin{bmatrix} [-1,0] & [1,1] & [0,1] \\ [1,1] & [-1,2] & [1,2] \\ [-1,1] & [0,2] & [2,3] \end{bmatrix}$ İnterval matrisinin $Ek(A)$ matrisini hesaplayınız.

İlk olarak $\tilde{A}$ interval matrisinin kofaktörü bulunur. Daha sonra bu interval matrisin transpozu alınır. $\tilde{A}$ interval matrisinin kofaktörü Örnek 2.9.7.1.1 de aşağıdaki gibi hesaplanmıştı. Bu yeni bulunan interval matrisin transpozu alınarak $Ek(A)$ hesaplanmış olur.

$$\tilde{A}_K = \begin{bmatrix} [-7,6] & [-5,0] & [-2,4] \\ [-3,0] & [-4,1] & [-1,3] \\ [-1,3] & [0,3] & [-3,0] \end{bmatrix}$$

Kofaktör olarak bulunmuştu şimdi bu kofaktör interval matrisinin transpozu alınırsa;

$$\tilde{A}_K = \begin{bmatrix} [-7,6] & [-5,0] & [-2,4] \\ [-3,0] & [-4,1] & [-1,3] \\ [-1,3] & [0,3] & [-3,0] \end{bmatrix}^T$$

$$\tilde{A}_K^T = \begin{bmatrix} [-7,6] & [-3,0] & [-1,3] \\ [-5,0] & [-4,1] & [0,3] \\ [-2,4] & [-1,3] & [-3,0] \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir.

2.2.9. 2×2 Tipindeki Matrislerin Çarpmaya Göre Tersini Bulma İşlemlerini Kullanarak İnterval Matrislerin Terslerini Bulma

Tanım 2.9.9.1. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2\times 2}$ matrisi için $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ dır.

Aynı şekilde bu işlemler interval matrislere uygulanırsa interval matrislerinde tersleri bulunmuş olur [28].

Tanım 2.9.9.2. $\tilde{A} = \begin{bmatrix} [u_{11}^-, u_{11}^+] & [u_{12}^-, u_{12}^+] \\ [u_{21}^-, u_{21}^+] & [u_{22}^-, u_{22}^+] \end{bmatrix}_{2\times 2}$ interval matrisinin tersi

$$\tilde{A}^{-1} = \frac{1}{[u_{11}^-, u_{11}^+][u_{22}^-, u_{22}^+] - [u_{12}^-, u_{12}^+][u_{21}^-, u_{21}^+]}\begin{bmatrix} [u_{22}^-, u_{22}^+] & -[u_{12}^-, u_{12}^+] \\ -[u_{21}^-, u_{21}^+] & [u_{11}^-, u_{11}^+] \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{[u_{11}^- u_{11}^+][u_{22}^- u_{22}^+] - [u_{12}^- u_{12}^+][u_{21}^- u_{21}^+]}\begin{bmatrix} [u_{22}^-, u_{22}^+] & [-u_{12}^+, -u_{12}^-] \\ [-u_{21}^+, -u_{21}^-] & [u_{11}^-, u_{11}^+] \end{bmatrix}$$ şeklinde bulunur.

Örnek 2.9.9.2.1. $\tilde{A} = \begin{bmatrix} [1,2] & [0,1] \\ [2,3] & [-1,1] \end{bmatrix}$ interval matrisinin tersini bulunuz.

Önce bu interval matrisin determinantına bakılır. Eğer $det\tilde{A} = 0$ ise işlem yapılmaz tersi yoktur. Eğer $det\tilde{A} \neq 0$ ise tersi vardır. O halde tersini alma işlemleri sırasıyla yapılır.

$$det\tilde{A} = \big[[1,2][-1,1] - [0,1][2,3]\big] = \big[[-2,2] - [0,3]\big] = [-2,-1]$$

$[-2,-1] \neq [0,0]$ olduğundan, yani determinant sıfırdan farklı olduğu için tersi vardır. Tersini hesaplamak için

$$\tilde{A}^{-1} = \frac{1}{[u_{11}^-, u_{11}^+][u_{22}^-, u_{22}^+] - [u_{12}^-, u_{12}^+][u_{21}^-, u_{21}^+]}\begin{bmatrix} [u_{22}^-, u_{22}^+] & -[u_{12}^-, u_{12}^+] \\ -[u_{21}^-, u_{21}^+] & [u_{11}^-, u_{11}^+] \end{bmatrix}$$

formülü kullanılarak yerlerine yazılır.

$$\tilde{A}^{-1} = \frac{1}{[1,2][-1,1] - [0,1][2,3]} \begin{bmatrix} [-1,1] & -[0,1] \\ -[2,3] & [1,2] \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}^{-1} = \frac{1}{[1,2][-1,1] - [0,1][2,3]} \begin{bmatrix} [-1,1] & [-1,0] \\ [-3,-2] & [1,2] \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}^{-1} = \frac{1}{[-2,2] - [0,3]} \begin{bmatrix} [-1,1] & [-1,0] \\ [-3,-2] & [1,2] \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}^{-1} = \frac{1}{[-2,-1]} \begin{bmatrix} [-1,1] & [-1,0] \\ [-3,-2] & [1,2] \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}^{-1} = \begin{bmatrix} [-1,1] & [0,1] \\ [1,3] & [-2,\frac{-1}{2}] \end{bmatrix}$$

2.9.10. Matrislerin Tersini İnterval Matrislerin Tersine Uyarlama

Tanım 2.9.10.1. Bir $A \in K_n^n$ matrisi için $A \cdot B = I_n = B \cdot A$ olacak şekilde bir $B \in K_n^n$ matrisi varsa B' ye A matrisinin tersi (inversi) denir ve $B = \mathrm{A}^{-1}$ şeklinde gösterilir. Buna ek olarak $A^{-1} = \frac{ekA}{detA}$ şeklinde de gösterilebilir [30].

Bu matrislerin tersini bulma işlemleri interval matrislere uygulanırsa interval matrislerin tersleri de hesaplanmış olur. Ve $\tilde{A}^{-1} = \frac{ek\tilde{A}}{det\tilde{A}}$ şeklinde gösterilebilir [28].

Örnek 2.9.10.1.1. $\tilde{A} = \begin{bmatrix} [-2,1] & [0,1] \\ [-1,0] & [2,2] \end{bmatrix}_{2\times 2}$ interval matrisinin tersini matrislerin tersini bulma yöntemiyle hesaplayınız.

Önce $\tilde{A}$ interval matrisinin determinantı ve $Ek(\tilde{A})$ interval matrisi hesaplanır. Daha sonra bulunan matrisler $\tilde{A}^{-1} = \frac{ek\tilde{A}}{det\tilde{A}}$ şeklinde yazılarak interval matrisin tersi bulunmuş olur.

$$Ek\tilde{A} = \begin{bmatrix} [2,2] & [-1,0] \\ [0,1] & [-2,1] \end{bmatrix}$$

$$det\tilde{A} = \begin{bmatrix} [-2,1] & [0,1] \\ [-1,0] & [2,2] \end{bmatrix} = [-2,1][2,2] - [-1,0][2,2] = [-4,2] - [-2,0]$$

$$= [-4,2] + [0,2] = [-4,4]$$

$$\tilde{A}^{-1} = \frac{ek\tilde{A}}{det\tilde{A}} = \frac{\begin{bmatrix} [2,2] & [-1,0] \\ [0,1] & [-2,1] \end{bmatrix}}{[-4,4]} = \begin{bmatrix} \frac{[2,2]}{[-4,4]} & \frac{[-1,0]}{[-4,4]} \\ \frac{[0,1]}{[-4,4]} & \frac{[-1,0]}{[-4,4]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\frac{-1}{2},\frac{1}{2}] & [\frac{1}{-4},\frac{1}{4}] \\ [\frac{1}{-4},\frac{1}{4}] & [\frac{-1}{4},\frac{1}{4}] \end{bmatrix}$$

BÖLÜM 3

Bu bölümde önemli görülen bazı özel matrislerin interval matris formları tanımlanmış ve bu matrislerin bazı özellikleri incelenmiştir.

Tanım 3.1. (Cesàro Matrisi). Cesàro matrisi aşağıdaki şekilde tanımlanır ve $n, k \in \mathbb{N}$ için $C = (C_{nk})$ ile gösterilir [9].

$$C_{nk} = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1}, & k \leq n \\ 0, & k > n \text{ ise} \end{cases}$$

Bu kısımda; yukarıda verilen Cesàro matris tanımları yardımıyla Cesàro interval matris tanımları yapılacaktır.

3.1. Cesàro İnterval Matris ve Genelleştirilmiş Fark İnterval Matrisi

Tanım 3.1.1. $n, k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $C^+ = (C^+_{nk})$ ve $C^- = (C^-_{nk})$ matrisleri sırasıyla, aşağıdaki şekilde tanımlanacaktır [38]:

$$C^+ = (C^+_{nk}) = \begin{cases} \left[0, \dfrac{1}{n+1}\right], & k \leq n \text{ ise} \\ [0,0], & \text{diğer durumlarda,} \end{cases}$$

$$C^- = (C^-_{nk}) = \begin{cases} \left[\dfrac{-1}{n+1}, 0\right], & k \leq n \text{ ise} \\ [0,0], & \text{diğer durumlarda,} \end{cases}$$

Burada, C^+ ya sağ Cesàro interval matris, C^- ye sol Cesàro interval matris denir.

$$C = (C_{nk}) = \begin{cases} \left[\dfrac{-1}{n+1}, \dfrac{1}{n+1}\right], & k \leq n \text{ ise} \\ [0,0], & \text{diğer durumlarda,} \end{cases}$$

matrisine ise Cesàro interval matris adı verilir.

Reel sayıların $r_k = (-1)^k$ şeklinde verilen dizisinin Cesàro limiti 0 dır. Aynı dizinin C^+ ve C^- Cesàro limitleri;

$$\lim_n (C^+ r)_n = \lim_n \begin{cases} \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], & n \text{ çift ise} \\ \left[-\frac{(n-1)}{2n}, \frac{(n+1)}{2n}\right], & n \text{ tek ise} \end{cases} = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

ve

$$\lim_n (C^- r)_n = \lim_n \begin{cases} \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], & n\, çift\ ise \\ \left[-\frac{(n+1)}{2n}, \frac{(n-1)}{2n}\right], & n\ tek\ ise \end{cases} = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

şeklinde çakışık olarak bulunur. Eğer $r_k = (-1)^k$ dizisinin C limiti hesaplanırsa $\lim_n (Cr)_n = [-1,1]$ bulunur. Bu $((-1)^k)$ dizisinin Cesàro interval limiti olan 0 sayısını içeren üç farklı aralık olmasına rağmen $[-0.5, 0.5]$ aralığı limiti içeren $[-1, 1]$ den daha dar bir intervaldir. Bu örneğe dikkat edildiğinde $r_k = (-1)^k$ dizisinin sağ ve sol Cesàro interval limitlerinin $[-0.5, 0.5]$ olması, $r_k = (-1)^k$ nin Cesàro limitinin $[-1, 1]$ olması ile beraber düşünüldüğünde akla şu soru gelebilir:

Bir (r_k) dizisi için $\lim_n (C^- r)_n = [L_1^-, L_1^+]$ ve $\lim_n (C^+ r)_n = [L_2^-, L_2^+]$ ise $\lim_n (C^- r)_n + \lim_n (C^+ r)_n = \lim_n (Cr)_n = [L_1^- + L_2^-, L_1^+ + L_2^+]$ mı dır? Bu soruya aşağıdaki teorem cevap verecektir [38].

Teorem 3.1.1. Bir (r_k) dizisinin $\lim_n (C^- r)_n = [L_1^-, L_1^+]$ ve $\lim_n (C^+ r)_n = [L_2^-, L_2^+]$ interval limitleri mevcut ise $\lim_n (C^- r)_n + \lim_n (C^+ r)_n = \lim_n (Cr)_n = [L_1^- + L_2^-, L_1^+ + L_2^+]$ dir [38].

Şimdi Cesàro interval matrisi yerine genelleştirilmiş fark interval matrisi alınarak bu yeni matrisin sağ ve sol genelleştirilmiş fark interval matrisleri elde edilecektir. Önemli görülen özellikleri incelenecektir. İlk olarak genelleştirilmiş fark matrisi tanımı verilecektir.

Tanım 3.1.2. r ve s sıfırdan farklı reel sayılar ve $n, k \in \mathbb{N}$ için genelleştirilmiş fark matrisi aşağıdaki gibi tanımlanır [7]:

$$\mathbb{GD} = \begin{cases} r, & k = n, \\ s, & k = n-1, \\ 0, & 0 \leq k < n-1, k > n. \end{cases}$$

Tanım 3.1.3. r ve s sıfırdan farklı reel sayılar ve her bir $n, k \in \mathbb{N}$ için genelleştirilmiş fark interval matrisi tanımı aşağıdaki şekilde verilmiştir:

$$\mathcal{GD} = (\mathcal{GD}_{nk}) \begin{cases} [-r, r]\,, & k = n, \\ [-s, s], & k = n-1, \\ [0,0], & diğer\ durumlarda. \end{cases}$$

Şimdi genelleştirilmiş fark matrisi kendi içinde sağ $(\mathcal{GD}^{+})$ genelleştirilmiş fark interval matrisi ve sol $(\mathcal{GD}^{-})$ genelleştirilmiş fark interval matrisi olarak ikiye ayrılacaktır. Genelleştirilmiş fark interval matrisleri sırasıyla;

$$\mathcal{GD}^{+} = (\mathcal{GD}^{+}_{\mathrm{nk}}) = \begin{cases} [0, r], & k = n, \\ [0, s], & k = n-1, \\ [0,0], & diğer\ durumlarda \end{cases}$$

$$\mathcal{GD}^{-} = (\mathcal{GD}^{-}_{\mathrm{nk}}) = \begin{cases} [-r, 0], & k = n, \\ [-s, 0], & k = n-1, \\ [0,0], & diğer\ durumlarda \end{cases}$$

şeklinde elde edilmiştir.

Tanım 3.1.4. Reel sayıların bir dizisi $r = (r_k)$ olsun. $r = (r_k)$ dizisinin $\tilde{A}$ interval limiti $[L^{-}, L^{+}]$ interval sayısıdır ancak ve ancak $\left(\tilde{A}r\right)_n = \sum_k [a^{-}_{nk}, a^{+}_{nk}] r_k$ dizisi $[L^{-}, L^{+}]$ intervaline yakınsaktır.

Reel terimli sınırlı fakat yakınsak olmayan bir dizinin limitinin tespit edilmesinin zor olduğu durumlarda interval matrisler kullanılarak limitin bulunduğu aralık belirlenebilir.

Bu durum göz önünde bulundurularak reel değerli ancak yakınsak olmayan $(-1)^k$ dizisinin genelleştirilmiş fark limiti

$$[-(s+r), s+r]$$

dir.

$\mathcal{GD}^{-}$ ve $\mathcal{GD}^{+}$ genelleştirilmiş fark dizilerinin limitleri aşağıdaki gibi verilmiştir.

$(-1)^k$ dizisinin $\mathcal{GD}$ limiti kolayca görülebileceği gibi $\lim_n (\ell r)_n = [-(s+r), s+r]$ ifadesine eşittir.

Bu örnek göz önünde bulundurularak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.1.2. r_k dizisinin sol ve sağ genelleştirilmiş fark limitleri mevcutsa, yani $\lim_n (\mathcal{GD}^{-}r)_n = [L^{-}_1, L^{+}_1]$ ve $\lim_n (\mathcal{GD}^{+}r)_n = [L^{-}_2, L^{+}_2]$ ise o zaman $\lim_n (\mathcal{GD}^{-}r)_n + \lim_n (\mathcal{GD}^{+}r)_n = \lim_n (\mathcal{GD}r)_n = [L^{-}_1 + L^{-}_2, L^{+}_1 + L^{+}_2]$

eşitlikleri mevcuttur.

3.2. Genelleştirilmiş fark interval dizi uzayları $\mathbb{E}_0^{\mathcal{GD}}$, $\mathbb{E}_c^{\mathcal{GD}}$ ve $\mathbb{E}_b^{\mathcal{GD}}$

Bu bölümde interval sayıların sıfıra yakınsak genelleştirilmiş fark interval, yakınsak genelleştirilmiş fark interval ve sınırlı genelleştirilmiş fark interval dizi uzayları tanıtılmıştır. Bu dizi uzayları sırasıyla $\mathbb{E}_0^{\mathcal{GD}}, \mathbb{E}_c^{\mathcal{GD}}$ ve $\mathbb{E}_b^{\mathcal{GD}}$ şeklinde gösterilecektir. $\mathbb{E}_0^{\mathcal{GD}}, \mathbb{E}_c^{\mathcal{GD}}$ ve $\mathbb{E}_b^{\mathcal{GD}}$ dizi uzaylarının her bir elemanının $\mathcal{GD}$ dönüşümleri sırasıyla c_0^i , c^i ve ℓ_∞^i uzaylarında yer almaktadır. Yani, bu dizi uzayları;

$$\mathbb{E}_0^{\mathcal{GD}} = \{u^k = ([u_k^-, u_k^+]) \in w(\mathbb{E}): \mathcal{GD}u^k \in c_0^i\},$$

$$\mathbb{E}_c^{\mathcal{GD}} = \{u^k = ([u_k^-, u_k^+]) \in w(\mathbb{E}): \mathcal{GD}u^k \in c^i\},$$

$$\mathbb{E}_b^{\mathcal{GD}} = \{u^k = ([u_k^-, u_k^+]) \in w(\mathbb{E}): \mathcal{GD}u^k \in \ell_\infty^i\}$$

şeklinde gösterilir.

Açıkça görülür ki genelleştirilmiş fark interval matrisi $\infty \times \infty$ tipinde alt üçgen matristir. Şimdi interval sayıların $v^k = ([v_k^-, v_k^+])$ dizisini tanımlayalım. Burada v^k , u^k interval sayı dizisinin $\mathcal{GD}$ dönüşümüdür. Burada her $n, k \in \mathbb{N}$ için v^k , u^k interval sayı dizisinin $\mathcal{GD}$ dönüşümü olarak ele alınacaktır. Yani

$$[v_k^-, v_k^+] = [-s, s]u_{k-1} + [-r, r]u_k. \tag{1}$$

Teorem 3.2.1. $\mathbb{E}_0^{\mathcal{GD}}, \mathbb{E}_c^{\mathcal{GD}}$ ve $\mathbb{E}_b^{\mathcal{GD}}$ dizi uzayları sırasıyla c_0^i, c^i ve ℓ_∞^i uzaylarına lineer izomorftur. $\mathbb{E}_0^{\mathcal{GD}} \cong c_0^i$, $\mathbb{E}_c^{\mathcal{GD}} \cong c^i$ ve $\mathbb{E}_b^{\mathcal{GD}} \cong \ell_\infty^i$ şeklinde gösterilirler.

İspat: Burada yalnızca $\mathbb{E}_b^{\mathcal{GD}} \cong \ell_\infty^i$ dikkate alınacaktır. Diğer durumlar için ispat benzer şekilde yapılabilir. İlk olarak $\mathbb{E}_b^{\mathcal{GD}}$ ve ℓ_∞^i uzayları arasındaki lineer dönüşümün varlığı gösterilecektir.

(1) eşitliği yardımıyla T dönüşümü $T: \mathbb{E}_b^{\mathcal{GD}} \to \ell_\infty^i$, $u^k \to v^k = Tu^k = [-s, s]u_{k-1} + [-r, r]u_k$ şeklinde alınacaktır. T dönüşümü için $u^k, v^k \in \mathbb{E}_b^{\mathcal{GD}}$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

1. $T\,(u^k + v^k) = Tu^k + Tv^k$

2. $T(\alpha u^k) =$

$$\begin{cases} [-\alpha s, \alpha s]u_{k-1} + [-\alpha r, \alpha r]u_k = \alpha[-s, s]u_{k-1} + \alpha[-r, r]u_k = \alpha Tu^k, & \alpha \geq 0 \\ [-\alpha s, \alpha s]u_{k-1} + [-\alpha r, \alpha r]u_k = \alpha[-s, s]u_{k-1} + \alpha[-r, r]u_k = \alpha Tu^k, & \alpha \leq 0 \end{cases}$$

Böylece T dönüşümünün lineer olduğu elde edilir.

Kabul edelim ki $v^k \in \ell_\infty^i$ ve $u^k = ([u_k^-, u_k^+])$ dizisi

$$[u_k^-, u_k^+] = \{\mathcal{GD}^{-1}(r,s)v\}^k = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{[-r,r]}\left(\frac{-[-s,s]}{[-r,r]}\right)^j v^{k-j}, \quad (k \in \mathbb{N}).$$

şeklinde verilsin. Buradan

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} d(\mathcal{GD}u^k, \theta) = \sup_n d([-s,s]u_{k-1} + [-r,r]u_k, \theta)$$

$$= \sup_n d\left(\frac{[-s,s]}{[-r,r]}\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{[-s,s]}{[-r,r]}\right)^j v_{k-1-j} + \sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{[-s,s]}{[-r,r]}\right)^j v_{k-j}, \theta\right)$$

$$= \sup_n d([v_n^-, v_n^+], \theta) < \infty$$

elde edilir. O halde $u^k \in \mathbb{E}_b^{\mathcal{GD}}$ dir. Ayrıca,

$$\|u^k\|_{\mathbb{E}_b^{\mathcal{GD}}} = \sup_n d\left(\frac{[-s,s]}{[-r,r]}\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{[-s,s]}{[-r,r]}\right)^j v_{k-1-j} + \sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{[-s,s]}{[-r,r]}\right)^j v_{k-j}, \theta\right)$$

$$= \sup_n d([v_n^-, v_n^+], \theta)$$

$$= \|v^k\|_{\ell_\infty^i} < \infty.$$

Yani, T dönüşümü normu korur. Sonuç olarak $\mathbb{E}_b^{\mathcal{GD}}$ ve ℓ_∞^i uzayları lineer olarak izomorfiktir. Böylece ispat tamamlanır.

BÖLÜM 4

4.1. Sonuç ve Öneriler

Bu tez çalışmasında, genelleştirilmiş fark matrisini, genelleştirilmiş fark interval matrislerine genişletilerek, genişletilen fark interval matrisin sağ genelleştirilmiş fark interval matris ve sol genelleştirilmiş fark interval matris durumları elde edilmiştir.

Ayrıca elde edilen sağ genelleştirilmiş fark interval matrisi ve sol genelleştirilmiş fark interval matrisi ile ilgili teorem ve ispatlar verilmiştir. Genelleştirilmiş fark interval dizi uzayları tanıtılmıştır. Ayrıca $\mathbb{E}_0^{\mathcal{GD}}$, $\mathbb{E}_c^{\mathcal{GD}}$ ve $\mathbb{E}_b^{\mathcal{GD}}$ dizi uzaylarının sırasıyla c_0^i, c^i ve ℓ_∞^i uzaylarına lineer izomorf oldukları gösterilmiştir.

Buradan yola çıkarak diğer matris denklemlerinin de interval matris durumları incelenebilir.

KAYNAKLAR

1. Aydın, C., Başar, F., “On the new sequence spaces which include the spaces c_0 and c”, *Hokkaido Mathematical J*ournal, 33(2), 383–398, (2004).

2. Altay, B., Başar, F., “Some euler sequence spaces of non-absolute type”, *Ukrainian Mathematical Journal,* 57 (1):1-17, (2005).

3. Altay, B., Başar, F., “Some paranormed sequence spaces of non-absolute type derived by weighted mean’’, *Journal of Mathematical Analsis and Applications* 319(2):494-508, (2006).

4. Aydın, C., Başar, F., ‘‘Some new sequence spaces which include the spaces $\ell(p)$ and ℓ_∞”, *Demonstratio Mathematica*, 38,641-656, (2005).

5. Aydın, C., Başar, F., “Some new paranormed sequence spaces”, *Information Sciences*, volume 160, (2004).

6. Başarır, M., “On some new sequence spaces and related matrix transformations”, *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics,* 26(10): 1003-1010, (1995).

7. Başar, F.,Kirişçi, M.,“Almost convergence and generalize difference matrix” *Computer and Mathematics with Applications*, 61,602-611, (2011).

8. Altay,B., Başar, F., ‘‘Generalization of the sequence space $\ell(p)$ derived by weighted mean’’, *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 330(1),174–185, (2007).

9. Boss, J., Cass, P., “Classical and modern methods in summability”, *Oxsford University Press,* New York, (2000).

10. Costa, M., Cholco-Cano, Y., Lodwick, W.A., Silva, G.N., “Generalized interval vector spaces and interval optimization”, *Information Sciences*, (2015).

11. Dawood, H., “Theories of interval arithmetic: mathematical foundations and applications”, *LAP Lambert Academic Publishing*, Saarbrücken, Germany, (2011).

12. Duracz, J., Farjudian, A., Konecny, M., Taha, W., “Function interval arithmetic”, *Lecture Notes in Computer Science,* Vol 8592 Springer, Berlin, (2014).

13. Dwyer, P.S., Linear Computations, *New York*, Wiley, (1951).

14. Esi, A., “A new class of interval numbers”, *Journal of Qafqaz University, Mathematics and Computer Science*, 98-102, (2012).

15. Esi, A., “Statistical and lacunary statistical convergence of interval numbers in topological groups”, *Acta Scientarium Technology*, 36(3), 491-495, (2014).

16. Esi, A., “$\lambda-$Sequence spaces of interval numbers”, *Applied Mathematics Information Sciences* 8(3), 1099-1102, (2014).

17. Esi, A., Esi, A., “Asymptotically lacunary statistically equivalent sequences of interval numbers”, *International Journal of Mathematics and Its Applications*, 1(1), 43-48, (2013).

18. Esi, A., Bipan, H., “On ınterval valued generalized difference classes defined by orlizc function”, *Turkish Journal of Analysis and Number Theory 1.1*, 48-53, (2013).

19. Esi, A., Braha, N., “On asymptotically λ-statistical equivalent sequences of interval numbers”, *Acta Scientarium Technology*, 35(3), 515-520, (2013).

20. Esi, A., Hazarika, B., “Some ideal convergence of double Λ-interval numbers sequences defined by Orlicz function”, *Global Journal of Mathematical Analysis*, 1(3), 110-116, (2013).

21. Gölbol, S.Y., Esi, A., Değer, U., “On some double sequence spaces of interval number”, *Proyecciones (Antofagasta, On Line)*, *37*(3), 535-546, (2018).

22. Hayes, B., “A Lucid interval”, *American scientist*, 91(6), 484-488, (2003).

23. Jaulin, L., Kieffer, M., Didrit, O., Walter, E. “Applied interval analysis”, *Springer-Verlag, London*, ISBN: 978-1-4471-1067-5, (2001).

24. Kuo-Ping Chiao, “Fundamental properties of interval vector max-norm”, *Tamsui Oxford Journal of Mathematics*, 18(2), 219-233, (2002).

25. Malkowsky, E., Savaş, E., “Matrix transformation between sequence spaces of generalized weighted means”, *Applied Mathematics and Computation*, 147, 333-345, (2004).

26. Moore, R.E., Kearfott, R.B., Cloud, M.J., “Introduction to interval analysis”, *Society for Industrial and Applied Mathematics* SIAM, Philadelphia, PA 1914, (2009).

27. Moore, R.E., Yang, C.T.,“Interval analysis I”, LMSD-285875, *Lockheed Missiles and Spaces Company*, (1962).

28. Nirmala, T., Datta D., Kushwaha H.S., and Ganesan K., “Applied mathematical sciences” Vol. 5, no. 13, 607-624, (2011).

29. Nuray, F., Ulusu, U., Dündar, E., “Same properties of two dimensional interval numbers”, *Mathematical sciences and applications*, 10 (2) 93-101, (2022).

30. Sabuncuoglu A., Lineer Cebir,3. Baskı, Nobel Yayınları, *Ankara*, (2008).

31. Snyder, J.M., “Interval Analysis for computer graphics”, *Computer Graphics* 26(2):121-130, (1992).

32. Soykan, Y., Metrik Uzaylar ve Topolojisi, *Nobel Akademik Yayıncılık*, (2012).

33. Şengönül, M., and Eryılmaz, A., “On the sequence spaces of interval numbers”, *Thai Journal of Mathematics*, 8(3), 503-510, (2010).

34. “Or, A., Savaşkan, G.S., “A new game value approach for infinite interval matrix games”, *Sakarya University Journal of Science* , 25 (6) , 1343-1351, (2021). .

35. Tripathy, B. C., Debnath, S., Saha, S. “On some difference sequence spaces of interval numbers”, *Proyecciones (Antofagasta, On Line), 37*(4), 603-612, (2018).

36. Warmus, M., “Calculus of approximations”, *Bulletin de I’Academia polonaise de sciences*, 4(5), 253-257, (1956).

37. Zararsız, Z., Şengönül, M., “Some contributions to modals analysis ” *Thai Journal of Mathematics* , Volume 12, Number 1:185-194, (2014).

38. Zararsız, Z., “A new approach to infinite matrices of interval numbers”, *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*, ISSN 0973-1768 Volume 14, Number 3 (2018).