T.C.

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MODÜLÜS FONKSİYONU YARDIMIYLA TANIMLANAN ÇİFT İNDİSLİ BULANIK DİZİ UZAYLARI

Tezi Hazırlayan

Sevda ATPINAR

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Necdet BATIR

Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

EYLÜL 2022

NEVŞEHİR

T.C.

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MODÜLÜS FONKSİYONU YARDIMIYLA TANIMLANAN ÇİFT İNDİSLİ BULANIK DİZİ UZAYLARI

Tezi Hazırlayan

Sevda ATPINAR

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Necdet BATIR

Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

EYLÜL 2022

NEVŞEHİR

Prof. Dr. Necdet BATIR danışmanlığında Sevda ATPINAR tarafından hazırlanan **" Modülüs Fonksiyonu Yardımıyla Tanımlanan Çift İndisli Bulanık Dizi Uzayları "** başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Doktora Tezi** olarak kabul edilmiştir.

/ /2022

JÜRİ

Başkan : Prof. Dr. Necdet BATIR

Üye : Prof. Dr. Kuddusi KAYADUMAN

Üye : Doç. Dr. Mehmet ŞENOL

Üye : Doç. Dr. Şenol KARTAL

Üye : Doç. Dr. Ümit ÇAKAN

ONAY:

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun………………….tarih ve…………….. sayılı kararı ile onaylanmıştır.

/ /20

Prof. Dr. Şahlan ÖZTÜRK

Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİM

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada yer alan bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu ve bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Sevda ATPINAR

TEŞEKKÜR

Doktora öğrenimim ve tez çalışmam süresince desteğini hiç esirgemeyen öncelikle aileme, danışmanım Prof. Dr. Necdet BATIR'a ve ikinci danışmanım Doç. Dr. Zarife ZARARSIZ'a ve mesai arkadaşlarıma teşekkür ederim.

MODÜLÜS FONKSİYONU YARDIMIYLA TANIMLANAN ÇİFT İNDİSLİ BULANIK DİZİ UZAYLARI

(DoktoraTezi)

Sevda ATPINAR

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Eylül 2022

ÖZET

Çalışmanın ilk bölümünde tez ile ilgili literatür bilgisine yer verilmiştir. İkinci bölümde tez boyunca kullanılacak tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde $s(f,\lambda,p)$ modülüs fonksiyonu yardımıyla tanımlanmış bulanık çift indisli dizi uzayı tanımlanarak bazı cebirsel ve topolojik özellikleri incelenmiştir. Dördüncü bölümde $s^2(X,f)$ bulanık normlu çift indisli dizi uzayı modülüs fonksiyonu yardımıyla tanımlanmıştır ve topolojik özellikleri irdelenmiştir. $s_{l_\infty}^2(f)$ uzayının seviye kümesi cinsinden bulanık normlu çift indisli dizi uzayı incelenmiştir. $s(f,\lambda,p)$ dizi uzayının Köhte Toeplitz dualleri verilmiştir. Altıncı bölümde $s_\gamma^2[f,p]$ modülüs fonksiyonu yardımıyla tanımlanmış bulanık çift indisli fark dizi uzayı tanımlanmış ve topolojik özellikleri incelenmiştir.

Anahtar kelimeler: Modülüs fonksiyonu, Bulanık dizi uzayları, Banach dizi uzayları

Tez Danışmanları: Prof. Dr. Necdet BATIR, Doç. Dr. Zarife ZARARSIZ

Sayfa Adeti: 78+viii

DOUBLE FUZZY SEQUENCE SPACES DEFINED by MODULUS FUNCTIONS
(PhD Thesis)

Sevda ATPINAR

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
September 2022

ABSTRACT

In the first part of the study, literature information about the thesis is given. In the second part, definitions and theorems that will be used throughout the thesis are given. In the third chapter, $s(f,\lambda,p)$ fuzzy double index sequence space defined with the help of modulus function is defined and some algebraic and topological properties are examined. In the fourth chapter, $s^2(X,f)$ fuzzy normed double index sequence space is defined with the help of modulus function and its topological properties are discussed. $s^2_{l_\infty}(f)$ fuzzy normed double index sequence space has been investigated in terms of the α level sets. In the fifth chapter, Köhte Toeplitz duals of the sequence space $s(f,\lambda,p)$ are given. In the sixth chapter, $s^2_\gamma[f,p]$ fuzzy double index difference sequence space defined by modulus function is defined and its topological properties are examined.

Keywords: Modulus functions, Fuzzy sequence spaces, Banach sequence spaces
Thesis Supervisors: Prof. Dr. Necdet BATIR, Assoc. Dr. Zarife ZARARSIZ
Page Number: 78+viii

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{N}$	doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	kompleks sayılar kümesi
$F(\mathbb{R})$	bulanık sayıların uzayı
$\omega(F)$	bulanık sayı dizileri uzayı
$\mathbb{R}(I)$	bulanık intervaller uzayı
Ω	kompleks ve reel değerli çifti dizilerin uzayı
$[a]$	a sayısının tam kısmı
$\bar{A}$	A nın kapanışı
$c(F)$	yakınsak bulanık sayıların dizi uzayı
$c_0(F)$	sıfıra yakınsak bulanık sayıların dizi uzayı
$\omega_2(F)$	bulanık çift indisli sayı dizilerinin kümesi
$l_\infty(F)$	bulanık sayıların sınırlı dizi uzayı
$l_p(F)$	p-toplanabilir bulanık sayıların dizi uzayı
$[u]_\alpha$	$u \in \mathbb{R}(I)$ için α *seviye* kümeleri
$supp\ u$	$\overline{\{t \in \mathbb{R}: u(t) > 0\}}$
$\bar{0}$	bulanık sıfır
$\mathbb{E}^*$	$\mathbb{E}$ nin sürekli dual uzayı

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Zadeh, klasik küme teorilerinin yetersiz kaldığı durumlarda verileri daha iyi ifade etmek için hali hazırda kullanılan olasılık uzaylarının yanı sıra bulanık uzaylar fikrini ilk olarak ortaya atmıştır [1]. Günümüzde bulanık yapılar insan etkisinin ve doğanın mekanik sitemlerle multidisipliner çalıştığı durumlarda daha fazla karşımıza çıkmaktadır. Son yıllarda yapay zekanın günlük hayatımıza girmesi ile birlikte göreceli bilginin aktarımının daha sağlıklı yapılabilmesi için bulanık sistemler sıklıkla kullanılmaktadır. 1982 yılında Wang olasılık ve bulanık kümeler uzayı ikilisini faktör uzayının temeli olarak ele almıştır. Wang'a göre faktör uzaylar yapay zekanın mekanik kısmının matematik temeli olarak görülmektedir. Öncelikli olarak bulanık sistemler, yapay zekanın alt dalı olan makine öğrenme için tutarlılığı yüksek çıktılar elde etmek ve daha hassas veriler üretmek amacı taşımaktadır. Fiziksel bir fenomenin gözlem ya da deney yoluyla elde edilen verileri, tahmin, kümeleme gibi işlemleri uygulamak için, bir reel sayı ya da bir aralık yardımıyla ölçülebilir ve sistemlere aktarılabilir. Veriler, klasik anlamda iyi tanımlı kümeler veya bulanık küme teorisindeki gibi $\alpha - seviye$ kümeleri ile kesin olmayan aralıklar yardımıyla tanımlanabilir.

Bulanık kümeler ve bulanık mantık, doğa bilimlerinin uygulamalarında ya da karar verme (desicion making) uygulamalarında kesin (crisp) verilerin kullanılması ile oluşan boşlukları doldurmak için sıkça kullanılır. Tek veya çok değişkenli analizden, diferansiyel denklemlere, cebirdeki ideallerden latis teoriye kadar birçok konu üzerinde bulanık anlamda çalışmalar yapılmıştır. Bulanık sistemlerin günlük verileri işleme şekli günlük yaşam verilerinin daha verimli bir şekilde sistemlere dâhil edilmesine yardımcı olmuştur. Bu sistemler, belirsiz ve kesinliği olmayan veri ve bilgileri tanıma, temsil etme, manipüle etme, yorumlama ve kullanma kapasitesine sahiptir. Ayrıca bulanık küme teorisinden faydalanarak ayrık (discrete) veri yerine veriyi bulanıklaştıracak daha başka küme teorileri de ortaya atılmıştır. Bu kümelerden bazıları, tip-2 (type-2), sezgisel (intuitionistic), soft, granular, bipolar, neutrosophic, bulanık kümelerdir.

Çalışmamızda kullanılan çift indisli dizilerin ilk dönem literatür taraması şu şekildedir. Bromwich reel ve kompleks uzaylarda çift indisli diziler üzerinde ilk çalışmaları yapmıştır [2]. Çift dizi uzayları için tek indisli dizilerden farklı olarak birçok yakınsaklık tanımı verilmiştir.

İlk olarak Pringsheim sınırlı olmayan çift dizi uzayları için yakınsaklık tanımını vermiştir [3]. Hardy çift indisli uzayların topolojik özelliklerini incelemiştir ve buna ek olarak sınırlı satır ve sütun elemanları için çift dizilerde yakınsaklığı tanımlamıştır [4]. Regüler çift dizi uzayları yapısından dolayı oldukça kullanışlı ve üzerinde fonksiyonel analitik metotları kullanmak için çok elverişlidir. Mori$\acute{c}$z, Pringsheim anlamında $\|\cdot\|_\infty$ normuna göre yakınsak ve sıfıra yakınsak uzayların Banach uzayı olduğunu göstermiştir [5]. Zelster'in [6] çift indisli uzaylardaki çalışmasının ardından birçok yazar bu konuda çalışmalar yapmıştır [7,8]. Hill ise çift dizi uzaylarının topolojik özellikleri üzerinde öncü çalışmalar yapmıştır [9].

Modülüs fonksiyonu fikri ilk defa Nakano tarafından ortaya atılmıştır [10]. Ruckle modülüs fonksiyonların koordinat fonksiyonlarında sınırlılığından faydalanarak FK uzayı inşa etmiştir [11]. Daha sonra Maddox [12] sınırsız matrisler yardımıyla paranormlu dizi uzaylarını tanımlamış, süreklilik ve sınırlılık ile ortaya çıkan problemleri aşmak için modülüs fonksiyonlarından yararlanmıştır [13]. Son zamanlarda birçok yazar tarafından bu uzayların topolojik özellikleri incelenmiştir [14,15,16].

Dubios ve Prade bulanık sayılar üzerinde operatör işlemlerini tanımlamıştır [17]. Bulanık dizi uzayları üzerinde ilk çalışmaları ise Nanda vermiştir [18]. Matloka ve Kaleva bulanık sayıların sınırlılık ve yakınsaklığı ile ilgili incelemelerde bulunmuştur [19,20]. Stojakovi$\acute{c}$ yaptığı çalışmalarda Zadeh'in bulanık genişleme prensibini kullanarak bulanık sayıların yakınsaklığını incelemiştir [21].

Şimdi, bulanık kümelerin toplanabilirliği üzerine son zamanlarda yapılan bazı çalışmalar sıralanacaktır. Tripathy ve Dutta çift indisli bulanık uzayların temel özellikleri ve sınırlı varyasyonları üzerine incelemeler yapmıştır [22,23]. Talo ve Başar modülüs fonksiyonu yardımıyla tanımlanmış bazı özel dizi uzaylarını incelemiş ve $\alpha - seviye$ kümelerini kullanarak $\alpha -$, $\beta -$ ve $\gamma -$ dual tanımlarını vermiştir [24]. Ayrıca Talo ve Başar klasik bulanık kümeler için bulanık matris dönüşümlerini incelemiştir [25]. Son zamanlarda Dutta ve Gogoi, Ces$\grave{a}$ro tipindeki bulanık uzayların dual ve matris dönüşümleri ile ilgili çalışmalar yapmıştır [26]. Diamond ve Kloeden bulanık sayılar uzayının Hausdorff metriği ile Lipschitz olduğunu göstermiştir. Zadeh'in bulanık sayı fikrini literatüre kazandırmasının ardından Nanda ve Tripaty farklı tipte bulanık reel değerli dizi uzayları tanımlarını vermiştir [27].

Bu çalışmada modülüs fonksiyonları yardımıyla tanımlanmış bulanık çift dizi uzayı inşa edilmiştir. Giriş bölümünde ilk olarak çalışmamız boyunca kullanılacak bulanık çift dizi uzayları kavramına temel teşkil eden reel değerli çifti diziler incelemiştir ve bu konuyla ilgili ihtiyaç duyulacak tanım ve teoremlere yer verilmiştir [18,28,29]. Buna ek olarak bahsedilen dizilerin bazı topolojik özellikleri irdelenmiştir. Çift dizi uzaylarının yakınsaklık ve sınırlılık gibi tanımları bulanık dizi uzayları kavramı göz önünde bulundurularak verilmiştir. Ayrıca bulanık Prignsheim anlamında yakınsaklık kavramı üzerinde durulmuştur. Bulanık dizi uzaylarının cebirsel özellikleri ve üzerine tanımlanan metriğin yapısı ve tamlığı ile ilgili tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Modülüs fonksiyonu yardımıyla tanımlanan çift dizilerinin FK uzaylarının topolojik yapıları ve toplanabilirliği verilmiştir [30,34].

BÖLÜM 2

TEMEL TANIM ve TEOREMLER

Lineer metrik uzaylar topolojik vektör uzaylarının özelleştirilmiş bir halidir. Koordinat bazı fonksiyonları yardımıyla tanımlanan bir uzayın Fréchet uzayı olduğunu göstermek için ya bir tam lineer metrik uzay ya da uzayın yerel konveks ve ayrılabilir (Hausdorff metriklenebilir) olduğunu göstermek gerekir. Şimdi modülüs fonksiyonu yardımıyla elde edilen bulanık çift dizi yapıları için gerekli tanımlar ve teoremlere yer verilecektir.

2.1. Metrik ve Topolojik Vektör Uzayları

Tanım 2.1.1. X evrensel bir küme olmak üzere, $d: X \times X \to \mathbb{R}$ dönüşümü aşağıda verilen özellikleri sağlıyorsa d ye metrik ve (X, d) ikilisine metrik uzay denir.

i) Her $x, y \in X$ için $d(x,y) \geq 0$;

ii) Her $x, y \in X$ için $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

iii) Her $x, y \in X$ için $d(x,y) = d(y,x)$ ise;

iv) Her $x, y, z \in X$ için $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$.

Yarı metrikte ise $d(x,y) = d(y,x)$ şartı aranmamaktadır. Örneğin $X = [0,1]$ üzerinde,

$$d(x,y) = \begin{cases} y - x, & y \geq x \\ 1, & diğer\ durumlarda \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan d metriği için $d(x,y) \neq d(y,x)$ dır.

Tanım 2.1.2. X lineer uzay ve $d: X \times X \to \mathbb{R}$ metrik olmak üzere, her $x, y, z \in X$ için $d(x+z, y+z) = d(x,y)$ *(translation invariant)* özelliğini d metriği sağlıyorsa ve toplama ve skalerle çarpma işlemleri X uzayında sürekli ise (X, d) ikilisine lineer metrik uzay denir [32]. Bir lineer metrik uzay tam ise Fréchet uzayı olarak adlandırılır. Yerel konveks ve metriklenebilir tam uzaya da Fréchet uzayı olarak anılır.

Lineer metrik uzaylar ve total paranormlu uzaylar aynı uzaylardır. Şimdi paranorm tanımını verelim.

Tanım 2.1.3. X lineer uzay ve $h: X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa;

i) $x = \theta$ ise $h(x) = 0$ $(\theta = X\ in\ sıfır\ elemanı)$;

ii) Her $x \in X$ için $h(x) \geq 0$;

iii) Her $x \in X$ için $h(x) = h(-x)$;

iv) Her $x, y \in X$ için $h(x) + h(y) \geq h(x+y)$;

v) (λ_n) skalar dizisi, $n \to \infty$ giderken $\lambda_n \to \lambda$ ve (x_n) vektörler dizisi $n \to \infty$ için $h(\lambda_n x_n - \lambda x) \to 0$ (skalar çarpmada süreklilik) ise;

(X, h) ikilisine paranormlu uzay denir. (i) özelliğinin karşıtı da mevcutsa yani $h(x) = 0$ iken $x = \theta$ ise bu paranorma totaldir denir. Her $x \in X$ için $h(x) = d(x, 0)$ ise h ve d fonksiyonları aynı özelliklere sahiptir. Her $x, y \in X$ için $h(x - y) = d(x, y)$ sağlanıyorsa ve (X, h) total paranormlu uzay ise (X, d) ye yarı lineer metrik uzay (ya da lineer metrik uzay) denir ve karşıtı da doğrudur [32].

Nakano tarafından tanımlanan modülüs fonksiyonları birçok problemin çözümünde dizi uzayları üretmek için kullanılmıştır. Şimdi modülüs fonksiyonlarının tanıma yer verelim.

Tanım 2.1.4. $f: [0, \infty) \to [0, \infty)$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa bir modülüs fonksiyonu adını alır. Her $t, z \in [0, \infty)$ için,

i) $f(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$,

ii) $f(t + z) \leq f(t) + f(z)$,

iii) f artandır,

iv) f sıfır noktasında sağdan süreklidir.

Ayrıca (ii) ve (iv) özelliklerinden dolayı f fonksiyonu $[0, \infty)$da süreklidir. Örneğin $0 < r \leq 1$ için $f(t) = t^r$ fonksiyonu bir modülüs fonksiyonudur [13].

Şimdi ilerleyen bölümlerde kullanacak olan ifade ve ispatlara yer verilecektir.

Önerme 2.1.1. f özdeşlik fonksiyonundan farklı bir modülüs fonksiyonu olmak üzere her $t \in [0, \infty)$ ve $n > 0$ tamsayısı için,

$$f\left(\frac{t}{n}\right) > \frac{1}{n}$$

dir [14].

İspat: $f\left(\frac{t}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$ eşitsizliğini kabul edelim. Buradan hareketle,

$$\begin{aligned} f(t) &= f\left(n\frac{t}{n}\right) \\ &= f\left(\frac{t}{n} + \frac{t}{n} + \cdots + \frac{t}{n}\right) \\ &\leq f\left(\frac{t}{n}\right) + f\left(\frac{t}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{t}{n}\right) \qquad (2.1) \\ &= nf\left(\frac{t}{n}\right) \\ &\Rightarrow f(t) \leq nf\left(\frac{t}{n}\right) \leq 1 \end{aligned}$$

elde edilir. (2.1) den $f(t) \leq 1$ elde edilir. $t \in [0, \infty)$ olduğundan bu çıkarım fonksiyonun sağdan sürekli ve artan olmasıyla çelişir. O halde $t \in [0, \infty)$ ve $n > 0$ tamsayısı için $f\left(\frac{t}{n}\right) > \frac{1}{n}$ sağlanır.

Önerme 2.1.2. f bir modülüs fonksiyonu olsun. Bu takdirde $t \in [0, \infty)$ ve $0 < \delta < 1$ olmak üzere $t > \delta$ için;

$$f(t) \leq \frac{2f(1)t}{\delta}$$

eşitsizliği geçerlidir [14].

İspat: $\forall t \in [0, \infty)$ ve $0 < \delta < 1$ ve $t > \delta$ için;

$$f(t) \leq f\left(1 + \left[\frac{1}{\delta}t\right]\right) \leq f(1) + f\left(\left[\frac{1}{\delta}t\right]\right) \tag{2.2}$$

dır. t tam sayı ise f modülüs fonksiyonu için $f(t) \leq tf(1)$ olduğundan [11] ve (2.2) den,

$$\leq f(1) + \left[\frac{1}{\delta}t\right]f(1) \leq f(1)\left(1 + \left[\frac{1}{\delta}t\right]\right)$$

$$\leq f(1)\left(1 + \frac{1}{\delta}t\right) \leq 2f(1)\frac{1}{\delta}t$$

dır. Burada $[x]$ ifadesi x in tam kısmını ifade etmektedir.

Tanım 2.1.5. X, K cismi üzerinde bir vektör uzayı ve $E \subseteq X$ olsun. Eğer her $t \in (0,1)$ ve $x, y \in E$ için $tx + (1-t)y \in E$ ise E ye konvekstir denir [33].

Şimdi vektör uzaylarında lokal konveksliğin tanımını verelim.

Tanım 2.1.6. Bir topolojik vektör uzayı sıfırın her komşuluğunda sıfırın konveks bir komşuluğunu bulunduruyorsa bu uzaya lokal konvekstir denir [33].

Teorem 2.1.1. (Hahn-Banach Teoremi) X reel veya kompleks normlu lineer uzay, $M \subseteq X$ X in bir alt uzayı ve $f \in M^*$ sınırlı bir lineer fonksiyonel olsun. O zaman öyle bir $F \in X^*$ lineer fonksiyoneli vardır ki F nin M üzerinde bir kısıtlaması f ve $\|F\|_{X^*} = \|f\|_{M^*}$ dır.

Tanım 2.1.7. X ve Y iki normlu lineer uzay ve $T: X \to X$ lineer operatör olsun. Eğer $\forall x \in X$ ve $x \neq 0$ için,

$$\|Tx\| \leq K\|x\|$$

olacak şekilde bir $K > 0$ varsa T lineer operatörü sınırlıdır denir. X ten Y ye bütün sınırlı lineer operatörlerin kümesi $B(X, Y)$ ile gösterilir ve bu uzayın normu,

$$\|T\| = \sup_{x \in X, \|x\|=1} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

dır. Y uzayı Banach ise $B(X, Y)$ tamdır [34].

Tanım 2.1.8. X $\mathbb{F}$ cisim üzerinde olmak üzere vektör uzayı olsun. O zaman bir $T: X \to \mathbb{F}$ lineer operatörüne lineer fonksiyonel denir [33].

Önem arz eden kısımlardan birisi de yarı normlu uzayların lokal konveks topolojik uzaylara denk olmasıdır.

Tanım 2.1.9. Yarı normlu uzaylar arasında tanımlı bir T lineer operatörü $x \neq 0$ için,

$$\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$$

eşitsizliğini sağlar [33].

Tanım 2.1.10. X bir normlu uzay olsun,

$$X^* = B(X, \mathbb{R}) = \{f | f: X \to \mathbb{R}, f \ lineer\}$$

olarak tanımlanan $L(X, \mathbb{R})$ ye X in cebirsel duali denir ve genellikle X^* ile gösterilir [35].

Tanım 2.1.11. X bir yarı normlu uzay olsun. $f \in X^*$ için,

$$\|f\| = \sup\{|f(x)|: \|x\| \leq 1, x \in X\}$$

ile tanımlanan norma göre X^* bir Banach uzayıdır [35].

Buraya kadar verilen tanımlar Hahn- Banach teoreminin doğal sonuçlarından biri olan dualleri anlamak için gerekli tanımlardır. Dualler bir uzay üzerinde korunan dönüşümleri inceler ve bu uzaylar hakkında bilgi verir. Mesela normlu bir uzayın duali ayrıksa, kendisi de ayrıktır. Hahn-Banach teoremi genel olarak bir uzayda tanımlı lineer ve sınırlı bir alt uzayın normunu koruyarak tüm uzaya genişletilebileceğini ifade eder. Dualler ile birlikte uzayın yansımalı, normal ve simetrik olma gibi kavramları da normlu uzaylar için Hahn-Banach teoreminin doğal sonuçlarındandır.

Teorem 2.1.2. X bir yarı normlu uzay ve E X in bir alt uzayı ve $f \in E^*$ olsun. Bu durumda f bir $F \in X^*$ fonksiyoneline,

$$\|f\| = \|F\|$$

şeklinde genişletilebilir [33].

Teorem 2.1.3. X bir normlu uzay ve $x_0 \in X$ sıfırdan farklı bir vektör olmak üzere,

$$\|f\| = 1, f(x_0) = \|x_0\|$$

olacak şekilde bir $f \in X^*$ vardır [36].

2.2. Bulanık Kümeler ve Bulanık Dizi Uzayları

Tanım 2.2.1. $\mathbb{R}$ nin bir bulanık alt kümesi, $\mathbb{R}$ uzayından birim aralığa bir dönüşüm olan u fonksiyonu ile tanımlanır ve $x \in \mathbb{R}$ için

$u: \mathbb{R} \to [0,1]$

temsili ile ifade edilir [1]. Üçgen üyelik fonksiyonu, yamuk üyelik fonksiyonu, parçalı üstel üyelik fonksiyonu, Gauss üyelik fonksiyonu yaygın olarak kullanılan üyelik fonksiyonlarıdır.

Tanım 2.2.2 $x \in \mathbb{R}$, $u: \mathbb{R} \to [0,1]$ ve $\alpha \in (0,1]$ için $[u]_\alpha$ ifadesi u bulanık kümesinin $\alpha - seviye$ kümelerini ifade eder ve

$[u]_\alpha = \{ x \in \mathbb{R}: u(x) \geq \alpha \}$

şeklinde gösterilir [37].

Tanım 2.2.3 $u: \mathbb{R} \to [0,1]$ olmak üzere $[u]_0$ seviye kümesine u bulanık kümesinin desteği (support) denir. Ayrıca bütün $\alpha - seviye$ kümelerinin kapanışı,

$$[u]_0 = \overline{\bigcup_{\alpha \in (0,1]} [u]_\alpha}$$

şeklinde ifade edilir [37]. Yani $[u]_0$ $\mathbb{R}$ nin sınırlı bir alt kümesidir. $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$ için

$[u]_\beta \subseteq [u]_\alpha \subseteq [u]_0$

olduğu açıktır.

$x \in \mathbb{R}$ için $u(x) = 0$ olduğunda $[u]_0 = \emptyset$ olacağından bulanık kümelerde normal tanımına ihtiyaç duyulmuştur.

Tanım 2.2.4. $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $u: \mathbb{R} \to [0,1]$ için $[u]_1 \neq \emptyset$ ise u bulanık kümesi *normaldir* [28].

Tanım 2.2.5. X bir topolojik uzay ve $f: X \to \mathbb{R}$ reel değerli bir fonksiyon olmak üzere $y \in \mathbb{R}$ için,

$\{x \in X | f(x) \geq y\}$

kümesi X üzerinde kapalı ise f ye *üst yarı süreklidir* denir [38].

Tanım 2.2.6. $\mathcal{X}$ $\mathbb{R}$ üzerinde ayrılabilir Banach uzayı olsun. $u: \mathcal{X} \to [0,1]$ bulanık kümesi için $\mathcal{X}$ üzerindeki bütün üst yarı sürekli bulanık kümeler aşağıdaki özellikleri sağlar [37]:

- **i)** $[u]_\alpha = \{ x \in \mathbb{R}: u(x) \geq \alpha \}$ boştan farklı ve $\forall \alpha \in (0,1]$ için kompakt,
- **ii)** $[u]_0 = \overline{\cup_{\alpha \in (0,1]} [u]_\alpha}$ kümesi sınırlı (dolayısıyla üst yarı süreklilikten kompakt),
- **iii)** $\forall \alpha \in (0,1]$ için $[u]_\alpha$ konveks.

Tanım 2.2.7. $u: \mathbb{R} \to [0,1]$ olmak üzere u fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa u ya bir *bulanık sayıdır* denir [39]:

i) u normaldir, $u(t_0) = 1$ olacak şekilde $t_0 \in \mathbb{R}$ vardır;

ii) u bulanık konvekstir, her $t, z \in \mathbb{R}$ ve her $\lambda \in [0,1]$ için $u[\lambda t + (1-\lambda)z] \geq min\{u(t), u(z)\}$ dir;

iii) u üst yarı süreklidir;

iv) $[u]_0 = \overline{\{t \in \mathbb{R}: u(t) > 0\}}$ olarak gösterilen $\{t \in \mathbb{R}: u(t) > 0\}$ kümesinin kapanışı kompakttır.

Tanım 2.2.8. $F(\mathbb{R})$ bulanık sayıların bir kümesi ve (u_k) dizisi $F(\mathbb{R})$ de bir dizi olsun.

$\omega(F) = \{u_k \in F(\mathbb{R}) | u_k: \mathbb{N} \to F(\mathbb{R})\}$

ye *bulanık sayı dizilerinin kümesi* denir [24].

Tanım 2.2.9. $F(\mathbb{R})$ deki bulanık sayıların bir dizisi $u = u_k$ ile gösterilirse açık olarak

$u^\alpha = (u_k^\alpha) = (u_1^\alpha, u_2^\alpha, \ldots, u_k^\alpha, \ldots)$

biçiminde verilen diziye u_k bulanık dizisinin $\alpha -$ *seviye kümesi* denir [37]. u_k dizileri aynı zamanda

$u^\alpha = (u_k^\alpha) = ([u_1^-(\alpha), u_1^+(\alpha)], [u_2^-(\alpha), u_2^+(\alpha)], \ldots, [u_k^-(\alpha), u_k^+(\alpha)], \ldots)$

şeklinde interval dizileri olarak ifade edilebilir.

u nun desteği (support) varsa ve u^α kompakt ise u^α *kapalıdır*. Dolayısıyla $\alpha \in (0,1]$ için u^α kesim kümesi de kompakt ve destek kümesine sahiptir.

Şimdi bulanık sayı dizi uzaylarındaki gerekli olan bazı tanımları verelim.

Tanım 2.2.10. $F(\mathbb{R})$ bulanık sayıların kümesi, (u_k) $F(\mathbb{R})$ de bir dizi olsun ve (u_k) dizisinin limiti u_0 fonksiyonu olsun. Buna göre u_0 a yakınsayan bütün yakınsak bulanık sayıların dizisi $c(F)$ ile gösterilir

$c(F) = \{u_k \in F(\mathbb{R}) \,\Big|\, \lim_k u_k = u_0,\ u_0 \in F(\mathbb{R})\}$

dır. Ayrıca sıfıra yakınsayan dizilerin kümesi

$c_0(F) = \{u_k \in F(\mathbb{R}) \,\Big|\, \lim_k u_k = \bar{0}\ \}$

şeklinde ifade edilir [24].

Tanım 2.2.11. $\omega(F)$ nin cebirsel yapısı,

i) Toplama;

$+: \omega(F) \times \omega(F) \to \omega(F)$

$$(u, v) \to u + v = (u_k + v_k) = (u_1, u_2, \ldots, u_k, \ldots) + (v_1, v_2, \ldots, v_k, \ldots) + \cdots$$
$$= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_k + v_k, \ldots)$$

ii) Skaler çarpma $\lambda \in \mathbb{R}$ için;

$\lambda(u_k) = (\lambda u_k) = (\lambda u_1, \lambda u_2, \ldots, \lambda u_k, \ldots)$

şeklinde verilir [28].

Tanım 2.2.12. $u \in \omega(F)$ olmak üzere $\alpha -$ *seviye* kümesi ile bulanık mutlaklığın tanımı aşağıdaki şekilde verilebilir [41].

$|u|^-(\alpha) = max\{0, u^-(\alpha), u^+(\alpha)\},$
$|u|^+(\alpha) = max\{|u^-(\alpha)|, |u^+(\alpha)|\}.$

Tanım 2.2.13. $u, v, z \in \omega(F)$ ve $z \geq \theta$, $t \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

i) $|u| = \begin{cases} u, & u \geq \theta, \\ -u, & u < \theta; \end{cases}$

ii) $|u + v| \leq |u| + |v|;$

iii) $|tu| = |t||u|;$

iv) $u = \bar{0}$ ise $|u| = 0;$

v) $-z \leq u \leq z$ ise $|u| \leq z.$

özellikleri sağlanır [25].

Tanım 2.2.14. $u_k \in F(\mathbb{R})$ olmak üzere, $\alpha -$ *seviye* kümesi ile skaler çarpma tanımı,

$$\lambda u_k = \lambda {u_k}^\alpha = \lambda[{u_k}^-(\alpha), {u_k}^+(\alpha)] = \begin{Bmatrix} [\lambda {u_k}^-(\alpha), \lambda {u_k}^+(\alpha)], & \lambda \geq 0 \\ [\lambda {u_k}^+(\alpha), \lambda {u_k}^-(\alpha)], & \lambda < 0 \end{Bmatrix}$$

ile verilir. Burada $u_k^\alpha = [{u_k}^-(\alpha), {u_k}^+(\alpha)]$ dir [28].

2.3. Bulanık Metrik Uzaylar

Tanım 2.3.1. $\bar{d}: F(\mathbb{R}) \times F(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ ve $\alpha \in [0,1]$ olmak üzere,

$$(u, v) \to \bar{d}(u, v) = max\{|{u_k}^-(\alpha) - {v_k}^-(\alpha)|, |{u_k}^+(\alpha) - {v_k}^+(\alpha)|\}$$

ile tanımlı $\bar{d}$ fonksiyonu metrik şartlarını sağlar ve $F(\mathbb{R}, \bar{d})$ uzayına bulanık sayıların metrik uzayı denir [28].

$F(\mathbb{R})$ bulanık sayıların kümesi ve $u_k: \mathbb{R} \to [0,1]$ olmak üzere u_k normal, üst yarı sürekli, konveks ve $\alpha = 0$ için $\overline{u_0}$ kompakt ise $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ve $k \to f(k) = (u_k) = (u_1, u_2, \dots, u_k, \dots)$ için metrik uzay tanımı aşağıdaki şekilde verilsin.

Tanım 2.3.2. $d: \mathbb{R}(I) \times \mathbb{R}(I) \to \mathbb{R}$ ve $u, v \in \mathbb{R}(I)$ olmak üzere,

$$d(u, v) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \bar{d}(u^\alpha, v^\alpha)$$

ile tanımlı d metriğine göre $(\mathbb{R}(I), d)$ metrik uzaydır. Burada $\mathbb{R}(I)$ bütün bulanık intervallerin kümesidir ve $(\mathbb{R}(I), d)$ tamdır [28].

Tanım 2.3.3. A ve B, $(\mathbb{R}(I), d)$ metrik uzayının iki alt kümesi olmak üzere iki küme arasındaki uzaklık

$$h(A,B) = max\left\{\sup_{a\in A}\left\{\inf_{b\in B} d(a-b)\right\}, \sup_{b\in B}\left\{\inf_{a\in A}(a-b)\right\}\right\}$$

şeklinde tanımlanan Hausdorff uzaklığı ile hesaplanır [37].

Uyarı 2.3.1. $(u_k) = ([u_k^-, u_k^+])$, $F(\mathbb{R})$ de kapalı ve sınırlı ailelerin bir intervaller dizisi olsun. Bu durumda $u_k < v_k$ sadece $u_k^- < v_k^-$ ve $u_k^+ < v_k^+$ olması durumunda geçerlidir [24].

Teorem 2.3.1. $u_k = [u_k^-, u_k^+], v_k = [v_k^-, v_k^+] \in F(\mathbb{R})$ olsun,

$$d(u_k, v_k) = max\{|u_k^- - v_k^-|, |u_k^+ - v_k^+|\}$$

metriğine göre $(F(\mathbb{R}), d)$ ikilisi bir metrik uzaydır. Buna ek olarak $(F(\mathbb{R}), d)$ metrik uzayı tamdır [37].

Tanım 2.3.4. (u_k) bulanık sayıların dizisi ve $\alpha \in [0,1]$ olsun. Eğer $\forall\varepsilon > 0$ için $k \geq n_0$ iken

$$d(u_k, u_0) = \bar{d}(u_k^\alpha, u_0^\alpha) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa $u_0 \in F(\mathbb{R})$ $için$ $(u_k) \to u_0$ yakınsaktır denir [28]. Burada

$$\bar{d}(u_k^\alpha, u_0^\alpha) = \max_{\alpha\in[0,1]}\{\, |u_k^-(\alpha) - u_0{}^-(\alpha)| \,,\ |u_k^+(\alpha) - u_0{}^+(\alpha)| \,\}$$

şeklindedir. $\lim_{k\to\infty} u_k = u_0$ olduğundan,

$$\begin{aligned} d(u_k, u_0) &= \sup_{\alpha\in[0,1]} \{\bar{d}(u_k^\alpha, u_0^\alpha)\} \\ &= \sup_{\alpha\in[0,1]} \{max\{|u_k^-(\alpha) - u_0{}^-(\alpha)|, |u_k^+(\alpha) - u_0{}^+(\alpha)|\}\} \end{aligned}$$

elde edilir [37].

Tanım 2.3.5. (u_k) bulanık sayıların dizisi olsun. Eğer $\forall\varepsilon > 0$ için $i, k \geq n_0$ iken $d(u_i, u_k) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa (u_k) dizisi bulanık sayıların bir Cauchy dizisidir denir [37].

Tanım 2.3.6. Bütün sınırlı bulanık sayıların dizisi $l_\infty(F)$ ile gösterilir. Buna göre

$$l_\infty(F) = \{u_k \in F(\mathbb{R}) | d(u_k, \theta_k) < \infty\}$$

dır. Burada d metriği $d(u_k, v_k) = \sup \bar{d}(u_k, v_k)$ dir [37].

2.4. Bulanık Çift Diziler

Tanım 2.4.1. X boştan farklı herhangi bir küme olmak üzere $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to X$ olsun,

$$(m, n) \to f(m, n) = x_{mn}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonuna bir çift indisli dizi denir.

Herhangi bir $x = (x_{mn})$ çift dizisinin x_{mn} elemanları,

$$\begin{bmatrix} x_{00} & x_{01} & \cdots & x_{0n} & \cdots \\ x_{10} & x_{11} & \cdots & x_{1n} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots \\ x_{m0} & x_{m1} & \cdots & x_{mn} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

şeklinde sınırsız bir matris olarak ifade edilebilir. Kompleks veya reel değerli bütün çift indisli dizilerin kümesi Ω ise;

$\Omega = \{x = (x_{mn}), \forall m, n \in \mathbb{N} | \, x_{mn} \in \mathbb{C}\}$

kümesi $\forall a \in \mathbb{C}$ ve $\forall x, y \in \Omega$ için $ax = (ax_{mn})$ ve $x + y = x_{mn} + y_{mn}$ işlemleri ile bir lineer uzaydır.

Tanım 2.4.2. Bulanık çift indisli sayı dizilerinin kümesi

$\omega_2(F) = \{(u_{kl}) | u_{kl} \in F(\mathbb{R}) \;\; k, l \in \mathbb{N}\}$

ile ifade edilir. Burada u_{kl} bulanık dizisinin elemanları $k, l \in \mathbb{N}$ için birer bulanık sayıdır [29].

Tanım 2.4.3. (u_{kl}) bir reel değerli çift indisli bulanık dizi olsun. $k, l < m, n$ için $u_{kl} \leq u_{mn}$ şartı sağlanıyorsa (u_{kl}) dizisi monoton artandır [29].

Tanım 2.4.4. (u_{kl}) bulanık sayıların bir çift indisli dizisi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $k, l \geq n_0$ iken $d(u_{kl}, u) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa (u_{kl}) dizisi $u \in F(\mathbb{R})$ ye Prignsheim anlamında yakınsaktır denir [29].

Uyarı 2.4.1. Pringsheim anlamında yakınsak diziler sınırlı olmak zorunda değildir.

Tanım 2.4.5. (u_{kl}) bir reel değerli çift indisli bulanık dizi olsun. Eğer $\forall k, l \in \mathbb{N}$ için $|u_{kl}| < \mathcal{M}$ şeklinde bir $\mathcal{M} > 0$ reel sayısı varsa (u_{kl}) dizisi sınırlıdır denir [29].

Tanım 2.4.6. (u_{kl}) bir reel değerli çift indisli bulanık dizi olsun. $\alpha \in [0,1]$ için (u_{kl}) dizisinin bir $\alpha - seviye$ kümesi $u_{kl}(\alpha)$ şeklinde ifade edilsin, eğer

$$\sup_{kl} d(u_{kl}, \bar{0}) = \sup_{k,l} \sup_{\alpha \in [0,1]} \left\{max\{ \, |u_{kl}^{-}(\alpha)| \, , \;\; |u_{kl}^{+}(\alpha)| \, \}\right\} < \infty$$

şartını sağlıyorsa $u_{kl}(\alpha)$ sınırlıdır denir [29].

Tanım 2.4.7. (u_{kl}) bir reel değerli çift indisli bulanık dizi ve $\omega_2(F)$ bu dizilerin uzayı olsun. $u_{kl} \geq \theta$ için

$d(u_{kl}, \bar{0}) = max\{ \, |u_{kl}^{-}(\bar{0})| \, , \;\; |u_{kl}^{+}(\bar{0})| \, \}$

dır. Burada $|u_{kl}|$ bulanık sayının mutlak değerini göstermektedir [29].

Uyarı 2.4.2. Çift indisli uzaylar için tanımlanan bir norm tek indisli uzaylara dizinin terimleri $k, j = 1,2, \ldots$ için $a_{jk} = a_j$ kabul edilerek aktarılabilir [5].

Teorem 2.4.1. c_2^p ve $c_{2,0}^p$ sırasıyla çift indisli Pringsheim anlamında yakınsak ve sıfıra yakınsak uzaylar sınırlı olsun. Bu durumda c_2^p ve $c_{2,0}^p$ uzayları $\| \, . \, \|_\infty$ normu ile Banach uzayıdır [42].

Tanım 2.4.8. (u_{kl}) bir reel değerli çift indisli bulanık dizi olsun. $\omega_2(F)$ reel değerli çift indisli bulanık dizi uzayı $(v_{kl}) \in \omega_2(F)$ için $k, l \in \mathbb{N}$ ve $(u_{kl}) \in \omega_2(F)$ olduğunda $(v_{kl}) \leq (u_{kl})$ oluyorsa $\omega_2(F)$ *normal (solid)* olur [29].

Tanım 2.4.9. (u_{kl}) bir reel değerli çift indisli bulanık dizi ve ω_2 reel değerli çift indisli dizi uzayı olsun.

$\mathrm{K} = \{(k_i, l_i) : i \in \mathbb{N} | k_1 < k_2 < k_3 < \cdots, l_1 < l_2 < l_3 < \cdots\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

kümesi tanımlansın. ω_2 nin $K -$ *adım uzayı*;

$\lambda_K^{\omega_2} \left\{ \left(u_{k_i l_i}\right) \in \omega_2(F) \middle| (u_{kl}) \in \omega_2 \right\}$

şeklinde tanımlanır. $(u_{kl}) \in \omega_2$ nin bir *kanonik ön görüntüsü* olan $(v_{kl}) \in \omega_2(F)$,

$$v_{kl} = \begin{cases} u_{kl}, & k, l \in K \\ \bar{0}, & diğer \end{cases}$$

dir [29]ç

Tanım 2.4.10. (u_{kl}) bir reel değerli çift indisli bulanık dizi olsun. $\omega_2(F)$ reel değerli çift indisli bulanık dizi uzayı bütün adımlardaki kanonik ön görüntüleri içeriyorsa *monotondur* [29].

Tanım 2.4.11. (u_{kl}) bir reel değerli çift indisli bulanık dizi ve $\omega_2(F)$ reel değerli çift indisli bulanık dizi uzayı olsun. π, $\mathbb{N}$ de bir permütasyon olmak üzere $(u_{kl}) \in \omega_2(F)$ için $\left(u_{\pi_k, \pi_l}\right) \in \omega_2(F)$ oluyorsa $\omega_2(F)$ *simetriktir* [29].

Tanım 2.4.12. (u_{kl}) bir reel değerli çift indisli bulanık dizi ve $\omega_2(F)$ reel değerli çift indisli bulanık dizi uzayı olsun. $(u_{kl}), (v_{kl}) \in \omega_2(F)$ için $(u_{kl} \cdot v_{kl}) \in \omega_2(F)$ oluyorsa bu dizi uzayı bir *cebirdir* [29].

Tanım 2.4.13. (u_{kl}) bir reel değerli çift indisli bulanık dizi ve $\omega_2(F)$ reel değerli çift indisli bulanık dizi uzayı olsun. $(v_{kl}) \in \omega_2(F)$ için $(u_{kl}) \in \omega_2(F)$ ve $v_{kl} = \bar{0}$ olduğunda $u_{kl} = \bar{0}$ oluyorsa *hep yakınsak değildir (convergence free)* [29].

Şimdi çift indisli bulanık normlu uzay ispatlarında kullanılacak önermeyi verelim.

Önerme 2.4.1. x_{mn} dizisi m ile monoton olarak artan bir dizi ve y_{mn} dizisi de x_{mn} terimine bağlı olarak $y_{mn} = x_{mn} - x_{(m-1)n}$ şeklinde n ile monoton olarak artıyorsa

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} x_{mn} = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} x_{mn}$$

eşitliği mevcuttur.

İspat: $y_{mn} \geq 0$ nin n ile monoton olarak arttığı kabulden açıktır. Reel analizden ölçüye göre monoton yakınsaklık teoreminden

$$\lim_{n\to\infty} \int y_{mn} = \int \lim_{n\to\infty} y_{mn}$$

elde edilir. Ölçünün sayılabilirliğinden,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{\infty} y_{mn} = \sum_{m=1}^{\infty}\lim_{n\to\infty} y_{mn}$$

yazılabilir. Serinin kısmi toplamalar dizisi üzerinden limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{L\to\infty}\sum_{m=1}^{L} y_{mn} = \lim_{L\to\infty}\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{L} y_{mn}$$

olur, $y_{mn} = x_{mn} - x_{m-1n}$ ifadesi yerine yazılırsa,

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{L\to\infty}\sum_{m=1}^{L} x_{mn} - x_{m-1n} = \lim_{L\to\infty}\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{L} x_{mn} - x_{m-1n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} x_{mn} = \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} x_{mn}$$

eşiklikleri elde edilir.

Çalışma boyunca $\sum_k^\infty \sum_l^\infty$ ifadesi yerine $\sum_{k,l}^\infty$,Prignsheim anlamında limit $P-\lim$ ifadesinin yerine de lim ve $(0,0)$ yerine sadece 0 kullanılacaktır.

Tanım 2.4.14. f bir modülüs fonksiyonu olmak üzere,

$L_u(f) = \left\{x \in \Omega \middle| \sum_{m,n} f(|x_{mn}|) < \infty\right\}$

uzayına skalar değerli çift dizi uzayı denir [43].

BÖLÜM 3

MODÜLÜS FONKSİYONU İLE OLUŞTURULAN BULANIK ÇİFT DİZİ UZAYLARI

Bu bölümde $s(f,\lambda,p)$ modülüs fonksiyonu yardımıyla tanımlanmış bulanık çift indisli dizi uzayı tanımlanarak bazı cebirsel ve topolojik özelliklerine yer verilecektir. Ayrıca $s(f,\lambda,p)$ uzayı modülüs fonksiyonu yardımıyla tanımlanmış bulanık çift indisli dizi uzaylarının genelleştirilmiş hali olan $p-$ sınırlı ve $\lambda-$ skalar parametrelerine bağlı olarak kapsama teoremlerine yer verilecektir

3.1. $s(f,\lambda,p)$ Dizi Uzayı

Tanım 3. 1. 1. (f_{kl}) çift indisli modülüs fonksiyon dizisi olsun. $k,l\in\mathbb{N}$ için $p=(p_{kl})$ pozitif ve sınırlı, $\lambda=(\lambda_{kl})$ sıfırdan farklı kompleks değerli sınırlı diziler olmak üzere;

$$s(f,\lambda,p)=\left\{u_{kl}\in\omega_2(F)\ \middle|\ \sum_{k,l=1}^{\infty}\left[|\lambda_{kl}|f_{kl}\big(d(u_{kl},\overline{0})\big)\right]^{p_{kl}}<\infty\right\} \tag{3.1}$$

kümesi modülüs fonksiyonu yardımıyla tanımlanan sınırlı bulanık çift dizilerin uzayıdır.

Tanım 3.1.2. (f_{kl}) çift indisli modülüs fonksiyon dizisi olsun. $k,l,m,n\in\mathbb{N}$ için $p=(p_{kl})$ pozitif ve sınırlı, $\lambda=(\lambda_{kl})$ sıfırdan farklı kompleks değerli sınırlı diziler olmak üzere;

$$s_0(f,\lambda,p)=\left\{u_{kl}\in\omega_2(F)\ \middle|\lim_{m,n\to\infty}\sum_{k,l=1}^{m,n}\left[|\lambda_{kl}|f_{kl}\Big(d\big(u_{kl},\overline{0}\big)\Big)\right]^{p_{kl}}=0\right\} \tag{3.2}$$

kümesi Pringsheim anlamında sıfıra yakınsak dizilerin uzayıdır.

Tanım 3.1.3. (f_{kl}) çift indisli modülüs fonksiyon dizisi olsun. $k,l,m,n\in\mathbb{N}$için $p=(p_{kl})$ pozitif ve sınırlı, $\lambda=(\lambda_{kl})$ sıfırdan farklı kompleks değerli sınırlı diziler olmak üzere;

$$s_c(f,\lambda,p)=\left\{u_{kl}\in\omega_2(F)\ \middle|\lim_{m,n\to\infty}\sum_{k,l=1}^{m,n}\left[|\lambda_{kl}|f_{kl}\big(d(u_{kl},\overline{0})-L\big)\right]^{p_{kl}}=0\right\} \tag{3.3}$$

kümesi $\lim u_{kl}=L$ olmak üzere Pringsheim anlamında yakınsak dizilerin uzayıdır.

Bir uzayın sürekli bir bazının olması için Hausdorff, ayrılabilir ve tam olmasının önem arz ettiği bilinmektedir. $s(f,\lambda,p)$ uzayı tanımlanırken bulanık anlamda Hausdorff metrik ve lokal konveks ve monoton yapıya sahip modülüs fonksiyonu kullanılmıştır.

Tanım 3.1.4. Bir lokal konveks $(X,\mathbb{R})$ çift dizi uzayında,

$z_{kl}:X\to\mathbb{R}, z=(z_{kl})\to|z_{kl}|$

olarak tanımlanan bütün yarı normlar sürekli ise $(X, \mathbb{R})$ uzayına bir DK uzayı denir [33].

Tanım 3.1.4. Fr$\acute{e}$chet topolojisi ile DK uzayına FDK uzayı denir [33].

Tanım 3.1.5. Normlu FDK uzayına BDK uzayı denir [33].

Teorem 3.1.1. $u = u_{kl}, v = v_{kl} \in s(f, \lambda, p)$ olmak üzere aşağıdaki şekilde tanımı verilen

$$\tilde{d}(u, v) = \left(\sum_{k,l=1}^{\infty} \left[|\lambda_{kl}| f_{kl}\big(d(u_{kl}, \bar{0})\big) \right]^{p_{kl}} \right)^{\frac{1}{p_{kl}}}$$

metriği ile birlikte $\big(s(f, \lambda, p), \tilde{d}\big)$ bir metrik uzaydır.

İspat:

i) $\tilde{d}(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$,

ii) $\tilde{d}(u, v) = \tilde{d}(v, u)$,

olduğu aşikardır.

iii) $u = u_{kl},\ v = v_{kl},\ z = z_{kl} \in s(f, \lambda, p)$ olduğu kabul edilsin. Şimdi $\tilde{d}(u, z) \leq \tilde{d}(u, v)+\tilde{d}(v, z)$ olduğu gösterilecektir.

$$\begin{aligned}
\tilde{d}(u, z) &\leq \left(\sum_{k,l=1}^{\infty} \left[|\lambda_{kl}| f_{kl}\big(d(u_{kl}, z_{kl})\big) \right]^{p_{kl}} \right)^{\frac{1}{p_{kl}}} \\
&\leq \left(\sum_{k,l=1}^{\infty} \left[|\lambda_{kl}| f_{kl}\big(d(u_{kl}, v_{kl}) + d(v_{kl}, z_{kl})\big) \right]^{p_{kl}} \right)^{\frac{1}{p_{kl}}} \\
&\leq \left(\sum_{k,l=1}^{\infty} \left[|\lambda_{kl}| f_{kl}\big(d(u_{kl}, v_{kl})\big) + |\lambda_{kl}| f_{kl}\big(d(v_{kl}, z_{kl})\big) \right]^{p_{kl}} \right)^{\frac{1}{p_{kl}}}
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.1) ve Minkowski eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned}
\tilde{d}(u, z) &\leq \left(\sum_{k,l=1}^{\infty} \left[|\lambda_{kl}| f_{kl}\big(d(u_{kl}, v_{kl})\big) \right]^{p_{kl}} \right)^{\frac{1}{p_{kl}}} \\
&\quad + \left(\sum_{k,l=1}^{\infty} |\lambda_{kl}| \left[f_{kl}\big(d(v_{kl}, z_{kl})\big) \right]^{p_{kl}} \right)^{\frac{1}{p_{kl}}} \\
&= \tilde{d}(u, v)+\tilde{d}(v, z)
\end{aligned} \tag{3.4}$$

olur. O halde (3.4)den $\big(s(f, \lambda, p), \tilde{d}\big)$ uzayı bir metrik uzaydır.

Şimdi $s(f,\lambda,p)$ uzayının lineerliği incelenecektir.

Teorem 3.1.2. $s(f,\lambda,p)$ dizi uzayı lineerdir.

İspat: $u_{kl}, v_{kl} \in s(f,\lambda,p)$ ve $\eta \in \mathbb{R}$ olsun. $s(f,\lambda,p)$ uzayının tanımından

$$\sum_{k,l=1}^{\infty}\left[|\lambda_{kl}|f_{kl}\big(d(u_{kl},\bar{0})\big)\right]^{p_{kl}} < \infty$$

ve

$$\sum_{k,l=1}^{\infty}\left[|\lambda_{kl}|f_{kl}\big(d(v_{kl},\bar{0})\big)\right]^{p_{kl}} < \infty \tag{3.5}$$

dir. (3.5) den $M \in \mathbb{R}$ ve $|\eta| \leq M$ için,

$$\begin{aligned}
&\sum_{k,l=1}^{\infty}\left[|\lambda_{kl}|f_{kl}\big(\eta d(u_{kl},\bar{0}) + d(v_{kl},\bar{0})\big)\right]^{p_{kl}} \\
&\leq \sum_{k,l=1}^{\infty}\left[|\lambda_{kl}|f_{kl}\big(\eta d(u_{kl},\bar{0})\big) + |\lambda_{kl}|f_{kl}\big(d(v_{kl},\bar{0})\big)\right]^{p_{kl}} \\
&\leq \sum_{k,l=1}^{\infty}\left[|\lambda_{kl}|f_{kl}\big(\eta d(u_{kl},\bar{0})\big)\right]^{p_{kl}} + \sum_{k,l=1}^{\infty}\left[|\lambda_{kl}|f_{kl}\big(d(v_{kl},\bar{0})\big)\right]^{p_{kl}} \\
&\leq M\sum_{k,l=1}^{\infty}\left[|\lambda_{kl}|f_{kl}\big(d(u_{kl},\bar{0})\big)\right]^{p_{kl}} + \sum_{k,l=1}^{\infty}\left[|\lambda_{kl}|f_{kl}\big(d(v_{kl},\bar{0})\big)\right]^{p_{kl}} \\
&< \infty
\end{aligned} \tag{3.6}$$

elde edilir. (3.6) den açıktır ki $\eta u_{kl} + v_{kl} \in s(f,\lambda,p)$. Böylece $s(f,\lambda,p)$ dizi uzayı lineerdir.

Teorem 3.1.3. $s_0(f,\lambda,p)$ ve $s_c(f,\lambda,p)$ uzayları $\mathbb{R}$ de lineerdir.

İspat: $s(f,\lambda,p)$ uzayının ispatına benzer şekildedir.

Teorem 3.1.4. $s(f,\lambda,p)$, $\tilde{d}$ metriğine göre tam metrik uzaydır.

İspat: $\{u^{(i)}\} \in s(f,\lambda,p)$ ve $i \in N$ için $\{u^{(i)}\}$ bir Cauchy dizisi olsun. $u \in (f,\lambda,p)$ için

$$\left(\sum_{k,l=1}^{\infty}\left[|\lambda_{kl}|f_{kl}\big(d(u_{kl},\bar{0})\big)\right]^{p_{kl}}\right)^{\frac{1}{p_{kl}}} < \infty$$

dir. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için $i,j \geq n_0$ iken $\tilde{d}\left(u^{(i)}, u^{(j)}\right) < \varepsilon$ sağlanacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. $\{u^{(i)}\}$ bir Cauchy dizisi olduğundan $i \to \infty$ için $u_{kl}{}^{(i)} \to u_{kl}$ yazılabilir. Bu durumda $i,j \geq n_0$ ve sabit $k,l \in \mathbb{N}$ için

$$\left(\sum_{k,l=1}^{\infty} \left[|\lambda_{kl}| f_{kl}\left(d(u_{kl}^{(i)}, u_{kl}^{(j)})\right)\right]^{p_{kl}}\right)^{\frac{1}{p_{kl}}} < \varepsilon \tag{3.7}$$

elde edilir. (3.7) den

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} \left[|\lambda_{kl}| f_{kl}\left(d(u_{kl}^{(i)}, u_{kl}^{(j)})\right)\right]^{p_{kl}} < \varepsilon^{p_{kl}}$$

bulunur. $j \to \infty$ alınırsa

$$\left(\sum_{k,l=1}^{\infty} \left[|\lambda_{kl}| f_{kl}\left(d(u_{kl}^{(i)}, u_{kl})\right)\right]^{p_{kl}}\right)^{\frac{1}{p_{kl}}} < \varepsilon \tag{3.8}$$

elde edilir. (3.8) eşitsizliği $i,j \geq n_0$ için $\tilde{d}\left(u_{kl}^{(i)}, u_{kl}\right) < \varepsilon$ olduğunu gösterir yani $\tilde{d}\left(u_{kl}^{(i)}, u_{kl}\right) \in s(f,\lambda,p)$ dır. $M > 0$ için $\tilde{d}\left(u^{(i)}, \bar{0}\right) < M$ olacak şekilde vardır dolayısıyla $s(f,\lambda,p)$ sınırlıdır. Buradan hareketle $k_0, l_0 \in \mathbb{N}$ için

$$\left(\sum_{k,l=1}^{k_0,l_0} \left[|\lambda_{kl}| f_{kl}\left(d(u_{kl}^{(i)}, u_{kl})\right)\right]^{p_{kl}}\right)^{\frac{1}{p_{kl}}} < \tilde{d}\left(u^{(i)}, \bar{0}\right) < M \tag{3.9}$$

elde edilir. (3.9) ve Minkowski eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k,l}^{k_0,l_0} \left[|\lambda_{kl}| f_{kl}\left(d(u_{kl}, \bar{0})\right)\right]^{p_{kl}}\right)^{\frac{1}{p_{kl}}} &\leq \left(\sum_{k,l}^{k_0,l_0} \left[|\lambda_{kl}| f_{kl}\left(d(u_{kl}, u_{kl}^{(i)}) + d(u_{kl}^{(i)}, \bar{0})\right)\right]^{p_{kl}}\right)^{\frac{1}{p_{kl}}} \\
&\leq \left(\sum_{k,l}^{k_0,l_0} \left[|\lambda_{kl}| f_{kl}\left(d(u_{kl}, u_{kl}^{(i)})\right)\right]^{p_{kl}}\right)^{\frac{1}{p_{kl}}} \\
&\quad + \left(\sum_{k,l}^{k_0,l_0} \left[|\lambda_{kl}| f_{kl}\left(d(u_{kl}^{(i)}, \bar{0})\right)\right]^{p_{kl}}\right)^{\frac{1}{p_{kl}}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitsizlik sınırlılık ve Cauchy şartlarını sağlandığını ifade etmektedir.

$k_0, l_0 \to \infty$ için

$$\left(\sum_{k,l=1}^{\infty} \left[|\lambda_{kl}| f_{kl}\left(d(u_{kl}, \bar{0})\right)\right]^{p_{kl}}\right)^{\frac{1}{p_{kl}}} \leq \varepsilon + M < \infty$$

olur. O halde $u = u_{kl} \in s(f,\lambda,p)$ dır. Böylece $\left(s(f,\lambda,p),\tilde{d}\right)$ tamdır ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.1.5. $s(f,\lambda,p)$ uzayı normal (solid) uzaydır.

İspat: (u_{kl}) ve (v_{kl}) reel değerli çift indisli bulanık diziler olsun. $(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ için $(v_{kl}) < (u_{kl})$ ve $(u_{kl}) \in s(f,\lambda,p)$ olsun. Buradan,

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} \left[|\lambda_{kl}| f_{kl}\left(d(v_{kl},\bar{0})\right)\right]^{p_{kl}} < \sum_{k,l=1}^{\infty} \left[|\lambda_{kl}| f_{kl}\left(d(u_{kl},\bar{0})\right)\right]^{p_{kl}} < \infty \tag{3.10}$$

elde edilir. (3.10) den $(v_{kl}) \in s(f,\lambda,p)$ elde edilir ve $s(f,\lambda,p)$ uzayı normaldir.

Teorem 3.1.6. $s(f,\lambda,p)$ uzayı simetrik uzaydır.

İspat: $(u_{kl}) \in s(f,\lambda,p)$ ve $k,l \in N$ için $\varepsilon > 0$ a bağlı $i_k = i_k(\varepsilon), i_l = i_l(\varepsilon) \in N \times N$ vardır. Buradan,

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} \left[|\lambda_{kl}| f_{kl}\left(d(u_{kl},\bar{0})\right)\right]^{p_{kl}} - \sum_{k \le i_{k_0}, l \le i_{l_0}}^{\infty} \left[|\lambda_{kl}| f_{kl}\left(d(u_{kl},\bar{0})\right)\right]^{p_{kl}} < \varepsilon \tag{3.11}$$

elde edilir. (v_{kl}) çift indisli bulanık dizisi,

$$\left\{(u_{kl}): 1 < k < i_{k_0}, 1 < l < i_{l_0}\right\} \subseteq \left\{(v_{kl}): i_{k_0} < i_{k_1}, i_{l_0} < i_{l_1}\right\} \tag{3.12}$$

olsun. (3.11) ve (3.12) den

$$\begin{aligned} &\sum_{k,l=1}^{\infty} \left[|\lambda_{kl}| f_{kl}\left(d(v_{kl},\bar{0})\right)\right]^{p_{kl}} - \sum_{k \le i_{k_0}, l \le i_{l_0}}^{\infty} \left[|\lambda_{kl}| f_{kl}\left(d(v_{kl},\bar{0})\right)\right]^{p_{kl}} \\ &\le \sum_{k,l=1}^{\infty} \left[|\lambda_{kl}| f_{kl}\left(d(u_{kl},\bar{0})\right)\right]^{p_{kl}} - \sum_{k \le i_{k_0}, l \le i_{l_0}}^{\infty} \left[|\lambda_{kl}| f_{kl}\left(d(u_{kl},\bar{0})\right)\right]^{p_{kl}} < \varepsilon \end{aligned} \tag{3.13}$$

elde edilir. (3.13) den

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} \left[|\lambda_{kl}| f_{kl}\left(d(v_{kl},\bar{0})\right)\right]^{p_{kl}} < \infty$$

olur. Yani (u_{kl}) dizisinin bir permütasyonu olan $(v_{kl}) \in s(f,\lambda,p)$ dir, dolayısıyla $s(f,\lambda,p)$ simetriktir.

Teorem 3.1.7. $s(f,\lambda,p)$ uzayı hep yakınsak (convergence free) değildir.

İspat: $u = (u_{kl})$, $\lambda_{kl} = 1$, $p_{kl} = 2$ ve $f_{kl}(t) = t$ ve $k \neq l$ için $u_{kl} = 0$ olduğu kabul edilsin ve

$$u_{kk} = \begin{cases} \frac{k}{3}\left(\frac{2}{k}+n\right) & , -\frac{2}{k} \leq n \leq \frac{1}{k} \\ k\left(n-\frac{2}{k}\right) & , \frac{1}{k} \leq n \leq \frac{2}{k} \\ 0, & , diğer\ durumlarda \end{cases} \tag{3.14}$$

olsun. (3.14) bulanık sayısı için (3.1) den

$$\sum_{k,l=0}^{\infty} \left[|\lambda_{kl}| f_{kl}\left(d(u_{kl}, \bar{0})\right)\right]^{p_{kl}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{2}{k}\right|^2 < \infty$$

elde edilir. Yani (u_{kl}) dizisi yakınsaktır, ayrıca $(u_{kl}) \in s(f,\lambda,p)$ dır. Diğer taraftan $v = (v_{kl})$, $\lambda_{kl} = 1, p_{kl} = 2$ ve $f_{kl}(t) = t$ ve $k \neq l$ için $u_{kl} = 0$ ve

$$v_{kk} = \begin{cases} \frac{k}{2}(3k+n) & , -3k \leq n \leq -k \\ -\frac{k}{2}(n-k) & , -k \leq n \leq k \\ 0 & , diğer\ durumlarda \end{cases} \tag{3.15}$$

olduğu kabul edilsin. (3.15) bulanık sayısı için (3.1) den

$$\sum_{k,l=0}^{\infty} \left[|\lambda_{kl}| f_{kl}\left(d(v_{kl}, \bar{0})\right)\right]^{p_{kl}} = \sum_{k=1}^{\infty} |k|^2 = \infty$$

elde edilir. Yani (v_{kl}) dizisi yakınsak değildir ve $(v_{kl}) \notin s(f,\lambda,p)$ dır. $s(f,\lambda,p)$ uzayı hep yakınsak (convergence free) değildir.

Teorem 3.1.8. $\gamma(F,f)$ temsili olarak $s(f,\lambda,p), s_0(f,\lambda,p), ve\ s_c(f,\lambda,p)$ uzaylarından birini belirtsin. $f_{kl} = f_1$ ve $f_{mn} = f_2$ iki modülüs fonksiyonu olsun. Bu durunda,

i) $\gamma(F,f_1) \cap \gamma(F,f_2) \subseteq \gamma(F,f_1+f_2)$,

ii) $\gamma(F,f_1) \subseteq \gamma(F,f_2 \circ f_1)$,

iii) $\gamma \in \{s_c(f,\lambda,p), s_0(f,\lambda,p)\}$ olsun. $f_1(t) \leq f_2(t)$ ve $t \in [0,\infty)$ için

$\gamma(F,f_2) \subseteq \gamma(F,f_1)$,

iv) $\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t} > 0$ ise $n \in \mathbb{N}$ için $\gamma(F,f^n) = \gamma(F,f)$ dir,

özellikleri sağlanır.

İspat:

i) Teorem $s(f,\lambda,p)$ için ispat edilsin. Diğer durumlar için ispat benzer şekildedir.

$u_{kl} \in s(f,\lambda,p)$ ve $u_{kl} \in \gamma(F,f_1) \cap \gamma(F,f_2)$ olsun. Bu durumda

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} \left[|\lambda_{kl}|\left((f_1+f_2)\left(d(u_{kl},\bar{0})\right)\right)\right]^{p_{kl}} < \infty \tag{3.16}$$

olur. (3.16) ve Maddox eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned}\sum_{k,l=1}^{\infty} \left[|\lambda_{kl}|\left((f_1+f_2)\left(d(u_{kl},\bar{0})\right)\right)\right]^{p_{kl}} &\leq \sum_{k,l=1}^{\infty}\left[|\lambda_{kl}|f_1\left(d(u_{kl},\bar{0})\right)\right]^{p_{kl}} \\ &+ \sum_{k,l=1}^{\infty}\left[|\lambda_{kl}|f_2\left(d(u_{kl},\bar{0})\right)\right]^{p_{kl}} \\ &< \infty\end{aligned} \tag{3.17}$$

elde edilir. Son eşitsizlik (3.17) üzerinden $\gamma(F,f_1) \cap \gamma(F,f_2) \subseteq \gamma(F,f_1+f_2)$ olduğu açıktır.

ii) $u_{kl} \in \gamma(F,f_1)$ olsun. f_2 modülüs fonksiyonu olduğundan $\delta > 0$ ve $f_2(\delta) = \varepsilon$ olacak şekilde $\varepsilon > 0$ vardır. $u = (u_{kl}) \in \gamma(F,f_1)$ için $k_0, l_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki,

$$\sum_{k_0,l_0}^{\infty}\left[|\lambda_{kl}|f_1\left(d(u_{kl},\bar{0})\right)\right]^{p_{kl}} < \delta \tag{3.18}$$

$k,l \geq k_0,l_0$ olur. (3.18) eşitsizliğin her iki tarafının f_2 ile bileşkesi alınırsa,

$$f_2\left(\sum_{k,l=k_0,l_0}^{\infty}\left[|\lambda_{kl}|f_1\left(d(u_{kl},\bar{0})\right)\right]^{p_{kl}}\right) < f_2(\delta) = \varepsilon$$
$$\Rightarrow \sum_{k,l=k_0,l_0}^{\infty}\left[|\lambda_{kl}|\left(f_2 \circ \left(f_1\left(d(u_{kl},\bar{0})\right)\right)\right)\right]^{p_{kl}} < \varepsilon$$
$$\Rightarrow u_{kl} \in \gamma(F, f_2 \circ f_1)$$

elde edilir.

iii) $f_1(t) \leq f_2(t)$ ve $t \in [0,\infty)$ için $u_{kl} \in \gamma(F,f_1)$ ise

$$\sum_{k,l=1}^{\infty}\left[|\lambda_{kl}|f_1\left(d(u_{kl},\bar{0})\right)\right]^{p_{kl}} < \sum_{k,l=1}^{\infty}\left[|\lambda_{kl}|f_2\left(d(u_{kl},\bar{0})\right)\right]^{p_{kl}}$$

olduğundan $u_{kl} \in \gamma(F,f_2)$ olur.

iv) $\gamma(F, f_1) \subseteq \gamma(F, f_2 \circ f_1)$ için $f_1 = I$ ve $f_2 = f^n$ alınırsa $\gamma(F) \subseteq \gamma(F, f^n)$

kapsaması elde edilir. Karşıt ispat için $K = \lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t}$ olduğunu kabul edelim. [54] Önerme 1 den faydalanarak $K = inf\left\{\frac{f(t)}{t} > 0\right\}$ dır. Buradan $K > 0$ ve $t \geq 0$ için $f(t) \geq Kt$ vardır ve buradan

$$f^2(t) \geq f(t)Kt \geq K.Kt = K^2 t$$

elde edilir. Genel olarak $f^n(t) \geq K^n t$ elde edilir. $H = sup\, p_{kl}$ olmak üzere,

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} \left[|\lambda_{kl}|\left(d(u_{kl}, \bar{0})\right)\right]^{p_{kl}} < \sum_{k,l=1}^{\infty} \left[|\lambda_{kl}| K^{-n} f^n\left(d(u_{kl}, \bar{0})\right)\right]^{p_{kl}}$$

$$\leq max\{1, K^{-nH}\} \sum_{k,l=1}^{\infty} \left[|\lambda_{kl}| f^n\left(d(u_{kl}, \bar{0})\right)\right]^{p_{kl}}$$

dir. Dolayısıyla $u_{kl} \in \gamma(F, f)$ elde edilir. Bu durumda $\gamma(F, f^n) \subseteq \gamma(F, f)$.

$\gamma(F, f^n) = \gamma(F, f)$ dır.

Şimdi bazı kapsama ilişkilerini ifade ve ispat edelim.

Teorem 3.1.9. $s(f, \lambda, p) \subseteq s(p)$ dır.

İspat: $u_{kl} \in s(f, \lambda, p)$ ve $u_{kl} \notin s(p)$ kabul edilsin. Yani

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} \left[|\lambda_{kl}| f_{kl}\left(d(u_{kl}, \bar{0})\right)\right]^{p_{kl}} < \infty$$

ve

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} \left(|\lambda_{kl}| d(u_{kl}, \bar{0})\right)^{p_{kl}} = \infty$$

yazılabilir. (n_i, m_j) çift indisli dizi olsun öyle ki,

$$\sum_{k=n_i,l=m_j}^{n_{i+1},m_{j+1}} \left(|\lambda_{kl}|d(u_{kl},\bar{0})\right)^{p_{kl}} > 1 \tag{3.19}$$

olsun. (3.19) eşitsizliğin her iki tarafının f modülüs fonksiyonu altında bileşkesi alınırsa,

$$\begin{aligned} f(1) &< f\left(\sum_{k=n_i,l=m_j}^{n_{i+1},m_{j+1}} \left(|\lambda_{kl}|d(u_{kl},\bar{0})\right)^{p_{kl}}\right) \\ &< \sum_{k=n_i,l=m_j}^{n_{i+1},m_{j+1}} \left[f\left(|\lambda_{kl}|d(u_{kl},\bar{0})\right)\right]^{p_{kl}} \end{aligned} \tag{3.20}$$

elde edilir. (3.20) eşitsizliğinde $i,j \to \infty$ alınırsa

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} \left[f_{kl}\left(|\lambda_{kl}|d(u_{kl},\bar{0})\right)\right]^{p_{kl}} < \infty$$

olduğundan kalan indislerin toplamı için

$$\Rightarrow \sum_{k=n_i,l=m_j}^{n_{i+1},m_{j+1}} \left[f\left(|\lambda_{kl}|d(u_{kl},\bar{0})\right)\right]^{p_{kl}} \to 0 \tag{3.21}$$

elde edilir. Sonuç olarak (3.20) ve (3.21) den

$$f(1) < \sum_{k=n_i,l=m_j}^{n_{i+1},m_{j+1}} \left[f\left(|\lambda_{kl}|d(u_{kl},\bar{0})\right)\right]^{p_{kl}} \to 0$$

dir. Yani $f(1) = 0$ olur. Bu bir çelişki oluşturur. Çünkü, $t = 0$ için modülüs fonksiyonu $f(t) = 0$ değerini almalıdır. $u_{kl} \in s(p)$ olmalıdır ve $s(f,\lambda,p) \subset s(p)$ dır. Ayrıca $\lambda_{kl} = 1$, $f(u_{kl}) = u_{kl}$ için $s(f,\lambda,p) = s(p)$ dır. O halde $s(f,\lambda,p) \subseteq s(p)$ kapsaması vardır.

Teorem 3.1.10. $\lambda, \mu > 0$ olsun. Eğer $\limsup\left(\frac{\mu_{kl}}{\lambda_{kl}}\right) < \infty$ ise $s(f,\lambda,p) \supseteq s(f,\mu,p)$ dır.

İspat: $t_{kl} = \frac{\mu_{kl}}{\lambda_{kl}}$ olsun. Bu durumda $\sup_{k,l} t_{kl} < \infty$ eşitsizliği vardır. Buradan $k,l \in \mathbb{N}$ için

$$\mu_{kl} \le t_{kl}\lambda_{kl} \tag{3.22}$$

eşitsizliği yazılabilir. Eğer $u_{kl} \in s(f,\lambda,p)$ alınırsa (3.22) den

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} \left[|\mu_{kl}|f_{kl}\left(d(u_{kl},\bar{0})\right)\right]^{p_{kl}} < \infty \tag{3.23}$$

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} \left[|t_{kl}\lambda_{kl}| f_{kl}\left(d(u_{kl},\bar{0})\right)\right]^{p_{kl}} < \infty \tag{3.24}$$

olur. Böylece (3.23) ve (3.24) den $s(f,\lambda,p) \supseteq s(f,\mu,p)$ elde edilir. Diğer taraftan $s(f,\lambda,p) \supseteq s(f,\mu,p)$ sağlansın ve $\sup_{kl} t_{kl} = \infty$ olduğu kabul edilsin. En az biri monoton artan diğeri azalamayan (i_k) ve (i_l) dizileri vardır öyle ki $i \to \infty$ için (kl) dizisinin bir alt dizisi $(i_k i_l)$ dır. Eğer $u_{kl} \in s(f,\lambda,p)$ alınırsa,

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} \left[\left|t_{i_k i_l}\lambda_{i_k i_l}\right| f_{i_k i_l}\left(d\left(u_{k i_k i_l},\bar{0}\right)\right)\right]^{p_{i_k i_l}} = \infty \tag{3.25}$$

dir. (3.25) den

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} \left[|\mu_{kl}| f_{kl}\left(d(u_{kl},\bar{0})\right)\right]^{p_{kl}} = \infty$$

elde edilir. Fakat $(u_{kl}) \notin s(f,\lambda,p)$ olduğundan buradan bir çelişki elde edilir. Öyleyse

$$\limsup_{kl} t_{kl} = \limsup \left(\frac{\mu_{kl}}{\lambda_{kl}}\right) < \infty$$

şartı sağlanmalıdır.

Teorem 3.1.11 $\lambda, \mu > 0$ olsun. Eğer $\liminf\left(\frac{\lambda_{kl}}{\mu_{kl}}\right) > 0$ ise $s(f,\lambda,p) \subseteq s(f,\mu,p)$ dır.

İspat: $\liminf\left(\frac{\lambda_{kl}}{\mu_{kl}}\right) > 0$ olduğunu kabul edelim. $t_{kl} = \frac{\lambda_{kl}}{\mu_{kl}}$ olsun. O zaman yeteri kadar büyük $k, l \in \mathbb{N}$ değerleri ve $r > 0$ için $t_{kl} \geq r$ vardır. $u_{kl} \in s(f,\lambda,p)$ için

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} \left[|\lambda_{kl}| f_{kl}\left(d(u_{kl},\bar{0})\right)\right]^{p_{kl}} \geq r.\sum_{k,l=1}^{\infty} \left[|\mu_{kl}| f_{kl}\left(d(u_{kl},\bar{0})\right)\right]^{p_{kl}} \tag{3.26}$$

dir. (3.26) den

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} \left[|\mu_{kl}| f_{kl}\left(d(u_{kl},\bar{0})\right)\right]^{p_{kl}} < \infty$$

dir. Ayrıca $u_{kl} \in s(f,\mu,p)$ dir ve bu $u_{kl} \in s(f,\lambda,p)$ olduğu sonucunu verir. $s(f,\lambda,p) \subseteq s(f,\mu,p)$ kapsaması mevcuttur.

Diğer taraftan $s(f,\lambda,p) \subseteq s(f,\mu,p)$ ve $\liminf\left(\frac{\lambda_{kl}}{\mu_{kl}}\right) \leq 0$ olsun. $(i_k i_l)$ artan pozitif bir dizi olsun. Eğer $t_{kl} \leq 0$ ise $i\lambda_{i_k i_l} < \mu_{i_k i_l}$ olacak şekilde $i \to \infty$, $i \geq 1$ için en az biri monoton artan diğeri azalamayan (kl) dizisinin bir alt dizisi olan (i_k) ve (i_l) dizileri vardır. Bu durumda,

$$\left\{\sum_{k,l=1}^{\infty} \left|t_{i_k i_l}\right|^{p_{i_k i_l}}\right\} < \left\{\sum_{k,l=1}^{\infty} \left|\frac{1}{i}\right|^{p_{i_k i_l}}\right\}$$

eşitsizliği vardır. Şimdi u_{kl} dizisi

$$u_{kl} = \begin{cases} \left|\lambda_{i_k i_l}{}^{-1} i\right| f_{i_k i_l}{}^{-1}\left(d\left(u_{i_k i_l}, \bar{0}\right)\right) & , k = i_k, l = i_l \\ 0, & , diğer\ durumlarda \end{cases} \tag{3.27}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda (3.27) ve (3.1) den

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} |1|^{p_{i_k i_l}} = \infty$$

elde edilir. Bu durum $u_{kl} \in s(f,\lambda,p)$ olması ile çelişir. Ayrıca $i \to \infty$ ve $k,l \to \infty$ için

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} \left[\left|\mu_{i_k i_l}\right| f_{i_k i_l}\left(d\left(u_{i_k i_l}, \bar{0}\right)\right)\right]^{p_{i_k i_l}} = \infty$$

dir ve $u_{kl} \notin s(f,\mu,p)$ olur. Bu bir çelişkidir. O halde $\liminf\left(\frac{\lambda_{kl}}{\mu_{kl}}\right) \leq 0$ kabulü yanlıştır.

$$\liminf(t_{kl}) = \liminf\left(\frac{\lambda_{kl}}{\mu_{kl}}\right) > 0$$

olmalıdır.

Teorem 3.1.12. Eğer $\liminf\frac{q_{kl}}{p_{kl}} > 0$ ise $s(f,\lambda,p) \subseteq s(f,\lambda,q)$ dır.

İspat: Yeteri kadar büyük seçilmiş $k,l \in N$ için $r > 0$ olmak üzere $\frac{q_{kl}}{p_{kl}} > r$ bağıntısı mevcuttur. Eğer $u_{kl} \in s(f,\lambda,q)$ ise,

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} \left[|\lambda_{kl}| f_{kl}\left(d(u_{kl}, \bar{0})\right)\right]^{rp_{kl}} \leq \sum_{k,l=1}^{\infty} \left[|\lambda_{kl}| f_{kl}\left(d(u_{kl}, \bar{0})\right)\right]^{q_{kl}} < \infty$$

eşitsizliği $k,l \in \mathbb{N}$ için $u_{kl} \in s(f,\lambda,p)$ olduğunu gösterir. Diğer taraftan $s(f,\lambda,p) \subseteq s(f,\lambda,q)$ olduğunu kabul edelim. $\liminf\frac{q_{kl}}{p_{kl}} \leq 0$ olsun. $i \to \infty$, $i \geq 1$ için (kl) dizisinin bir alt dizisi $(i_k i_l)$ olsun. Bu durumda,

$$\frac{q_{i_k i_l}}{p_{i_k i_l}} < \frac{1}{i}$$

olacak şekilde en az biri monoton artan diğeri azalamayan (i_k) ve (i_l) dizileri vardır.

$$u_{kl} = \begin{cases} \frac{1}{i|\lambda_{kl}|} f_{kl}{}^{-1}\big(d(u_{kl},0)\big) & ,k = i_k, l = i_l \\ 0 & ,diğer\ durumlarda \end{cases}$$

ise $u_{kl} \in s(f,\lambda,p)$ dır. Fakat

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left({}^{1}/_{i}\right)^{{}^{1}/_{i}} > e^{\frac{-\log(i)}{i}}$$

olduğundan $u_{kl} \in s(f,\lambda,p)$ olmasına rağmen $u_{kl} \notin s(f,\lambda,q)$. Bu bir çelişkidir. $s(f,\lambda,p) \subseteq s(f,\lambda,q)$ kapsamasının gerçekleşmesi için liminf$\frac{q_{kl}}{p_{kl}} > 0$ kabulü gereklidir. Böylece ispat tanımlanmış olur.

Teorem 3.1.13. Eğer her $k,l \in N$ ve her $t > 0$ için $\sup_{k,l} f_{kl}(t) < \infty$ ise $l_\infty \subseteq s(f,\lambda,p)$ dır.

İspat: Kabul edelim ki $t > 0$ ve $\sup_{kl} f_{kl}(t) < \infty$ olsun. $\sup_{kl}|u_{kl}| = t$ ise bu durumda $d(u_{kl},\bar{0}) \leq d(t,\bar{0}) < \infty$ elde edilir. p_{kl} monoton artan dizisi için

$$\begin{aligned}\sum_{k,l=1}^{\infty} |\lambda_{kl}| d(u_{kl},\bar{0}) &\leq \sum_{k,l=1}^{\infty} |\lambda_{kl}| d(t,\bar{0}) \\ &\leq \sum_{k,l=1}^{\infty} \big(|\lambda_{kl}| d(t,\bar{0})\big)^{p_{kl}} \\ &\leq \sum_{k,l=1}^{\infty} \big[|\lambda_{kl}| f_{kl}\big(d(t,\bar{0})\big)\big]^{p_{kl}} \\ &< \infty\end{aligned}$$

yazılabilir. Ayrıca $\sum_{k,l=1}^{\infty}\big[|\lambda_{kl}| f_{kl}\big(d(t,0)\big)\big]^{p_{kl}}$ ifadesinde $\lambda_{kl} = 1$, $p_{kl} = 1$ ve $f_{kl}(u_{kl}) = u_{kl}$ alınırsa $l_\infty \subseteq s(f,\lambda,p)$ olduğu açıktır.

Teorem 3.1.14. (f_{kl}) çift indisli modülüs fonksiyon dizisi olmak üzere $s_0(f,\lambda,p) \subset s(f,\lambda,p)$ ve $s_c(f,\lambda,p) \subset s(f,\lambda,p)$ dır.

İspat: $u_{kl} \in s_0(f,\lambda,p)$ için

$$\lim_{k_n,l_n \to \infty} \sum_{k,l=1}^{k_n,l_n} \big[|\lambda_{kl}| f_{kl}\big(d(u_{kl},\bar{0})\big)\big]^{p_{kl}} = \theta < \infty$$

olduğundan $s_0(f,\lambda,p) \subset s(f,\lambda,p)$ açıktır.

$u_{kl} \in s_c(f,\lambda,p)$ olsun. Modülüs fonksiyonunun özelliklerinden ve Minkowski eşitsizliğinden faydalanılarak,

$$\sum_{k,l=1}^{k_n,l_n}\left[|\lambda_{kl}|f_{kl}\left(d(u_{kl},\bar{0})\right)\right]^{p_{kl}} \leq \sum_{k,l=1}^{k_n,l_n}[|\lambda_{kl}|f_{kl}(d(u_{kl},\bar{0})-L)]^{p_{kl}}+[|\lambda_{kl}|f_{kl}(L)]^{p_{kl}}$$

yazabilir. $|L| \leq K_l$ olacak şekilde bir K_l tam sayısı sayısı vardır. Buradan

$$\sum_{k,l=1}^{k_n,l_n}\left[|\lambda_{kl}|f_{kl}\left(d(u_{kl},\bar{0})\right)\right]^{p_{kl}} \leq \sum_{k,l=1}^{k_n,l_n}[|\lambda_{kl}|f_{kl}(d(u_{kl},\bar{0})-L)]^{p_{kl}}+[|\lambda_{kl}|K_l\, f_{kl}(1)]^{p_{kl}} < \infty$$

olur. (3.59) da $k_n l_n \longrightarrow \infty$ giderken limit alınırsa $u_{kl} \in s(f,\lambda,p)$ olur. O halde $s_0(f,\lambda,p) \subset s(f,\lambda,p)$ ve $s_c(f,\lambda,p) \subset s(f,\lambda,p)$ dır.

Teorem 3.1.15. (f_{kl}) çift indisli modülüs fonksiyonlarının bir dizisi olsun. Eğer

$$\sum_{k,l=1}^{\infty}\left[|\lambda_{kl}|f_{kl}\left(d(u_{kl},\bar{0})\right)\right]^{p_{kl}} < \infty$$

ise $s(\lambda,p) \subset s(f,\lambda,p)$, $s_0(\lambda,p) \subset s_0(f,\lambda,p)$ ve $s_c(\lambda,p) \subset s_c(f,\lambda,p)$ dır.

İspat: $u_{kl} \in s(\lambda,p)$ ise

$$\sum_{k,l=1}^{\infty}\left(|\lambda_{kl}|d(u_{kl},\bar{0})\right)^{p_{kl}} < \infty$$

eşitsizliği vardır. $supd(u_{kl},\bar{0}) = supmax\{\ |u_{kl}^{-}(\bar{0})|\ ,|u_{kl}^{+}(\bar{0})|\ \}$ için,
$max\{\ |u_{kl}^{-}(\bar{0})|\ ,|u_{kl}^{+}(\bar{0})|\ \} = |u_{kl}^{m}(\bar{0})|$

olsun. $\varepsilon > 0$ ve $0 < \delta < 1$ olduğunda $0 \leq t \leq \delta$ için $f(t) < \varepsilon$ alınırsa,

$$\sum_{k,l=1}^{\infty}(|\lambda_{kl}||u_{kl}^{m}(\bar{0})|)^{p_{kl}} = \sum_{\substack{k,l=1\\|u_{kl}|\leq\delta}}^{\infty}(|\lambda_{kl}||u_{kl}^{m}(\bar{0})|)^{p_{kl}} + \sum_{\substack{k,l=1\\|u_{kl}|>\delta}}^{\infty}(|\lambda_{kl}||u_{kl}^{m}(\bar{0})|)^{p_{kl}} \tag{3.28}$$

elde edilir. (3.28) den ve modülüs fonksiyonunun özelliklerinden faydalanarak

$$\sum_{\substack{k,l=1\\|u_{kl}|\leq\delta}}^{\infty}\left(|\lambda_{kl}|f_{kl}(u_{kl}^{m}(\bar{0}))\right)^{p_{kl}} \leq \varepsilon$$

elde edilir. $|u_{kl}| > \delta$ için

$$|u_{kl}| < \frac{|u_{kl}|}{\delta} < \left[1 + \frac{|u_{kl}|}{\delta}\right]$$

olsun. Burada$|u_{kl}|$, u_{kl} sayısının tam kısmını belirtmektedir. f nin özelliklerinden

$$f(|u_{kl}|) < \left(1 + \frac{|u_{kl}|}{\delta}\right) f(1) \leq 2f(1)\frac{|u_{kl}|}{\delta} \tag{3.29}$$

olur. Bu durumda (3.29) den

$$\sum_{\substack{k,l=1 \\ |u_{kl}|>\delta}}^{\infty} \left(|\lambda_{kl}| f_{kl}(u_{kl}^m(\bar{0}))\right)^{p_{kl}} \leq \frac{2f_{kl}(1)}{\delta} \sum_{k,l=1}^{\infty} (|\lambda_{kl}||u_{kl}^m(\bar{0})|)^{p_{kl}} \tag{3.30}$$

olur. (3.30) den

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} [f_{kl}(u_{kl}^m(\bar{0}))]^{p_{kl}} \leq \varepsilon + \frac{2f_{kl}(1)}{\delta} \sum_{k,l=1}^{\infty} (|\lambda_{kl}||u_{kl}^m(\bar{0})|)^{p_{kl}} < \infty$$

elde edilir. Böylece $u_{kl} \in s(f, \lambda, p)$ olur. O halde $s(\lambda, p) \subset s(f, \lambda, p)$ kapsaması doğrudur. Diğer kapsamalar benzer şekilde gösterilebilir.

Teorem 3.1.16. $s(f, \lambda, p) \subseteq s(\lambda, p)$ dır.

İspat: $u_{kl} \in s(f, \lambda, p)$ ve $u_{kl} \notin s(\lambda, p)$ olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} \left[f|\lambda_{kl}|_{kl}\left(d(u_{kl}, \bar{0})\right)\right]^{p_{kl}} < \infty \text{ ve } \sum_{k,l=1}^{\infty} \left(|\lambda_{kl}| d(u_{kl}, \bar{0})\right)^{p_{kl}} = \infty$$

dır. Öyle bir (m_i, n_j) dizisi vardır ki, modülüs fonksiyonlarının özelliklerinden faydalanarak

$$\begin{aligned} \sum_{k=m_i, l=n_j}^{m_{i+1}, n_{j+1}} \left(|\lambda_{kl}| d(u_{kl}, \bar{0})\right)^{p_{kl}} > 1 \quad &\Rightarrow f_{kl}(1) < f_{kl}\left(\sum_{k=m_i}^{m_{i+1}} \sum_{l=n_i}^{n_{i+1}} \left(|\lambda_{kl}| d(u_{kl}, \bar{0})\right)^{p_{kl}}\right) \\ &\Rightarrow f_{kl}(1) < \sum_{k=m_i, l=n_j}^{m_{i+1}, n_{j+1}} \left[|\lambda_{kl}| f_{kl}\left(d(u_{kl}, \bar{0})\right)\right]^{p_{kl}} \end{aligned} \tag{3.31}$$

bağıntıları elde edilebilir. $i, j \to \infty$ için (3.31) den

$$\sum_{k=m_i,l=n_j}^{m_{i+1},n_{j+1}} \left[|\lambda_{kl}| f_{kl}\left(d(u_{kl},\bar{0})\right)\right]^{p_{kl}} \to 0$$

olur ve $f_{kl}(1) = 0$ elde edilir. Bu durum modülüs fonksiyonunun özellikleri ile beraber ele alındığında çelişki oluşturur. O halde $\sum_{k,l=1}^{\infty} \left(|\lambda_{kl}| d(u_{kl},\bar{0})\right)^{p_{kl}} = \infty$ ıraksaması mevcut değildir. O halde $s(f,\lambda,p) \subseteq s(\lambda,p)$ elde edilir. Sonuç olarak $f_{kl}(u) = u$ alınırsa $s(f,\lambda,p) = s(\lambda,p)$ olur.

Teorem 3.1.17. $s(f,\lambda,p)$ uzayı $u = u_{kl}$ olmak üzere,

$$h(u) = \sum_{k,l=1}^{\infty} \left[|\lambda_{kl}| f_{kl}\left(d(u_{kl},\bar{0})\right)\right]^{p_{kl}}$$

paranormu ile $(s(f,\lambda,p), h)$ ikilisi paranormlu bir uzay belirtir.

İspat: $s(f,\lambda,p)$ nin $h(u)$ ile paranormlu olma şartını sağladığını gösterilecektir. Burada $u_{kl}, v_{kl} \in s(f,\lambda,p)$ olmak üzere,

i) $h(\bar{0}) = \sum_{k,l=1}^{\infty} \left[|\lambda_{kl}| f_{kl}\left(d(\bar{0},\bar{0})\right)\right]^{p_{kl}} = 0$

ii) $h(u) = \sum_{k,l=1}^{\infty} \left[|\lambda_{kl}| f_{kl}\left(d(u_{kl},\bar{0})\right)\right]^{p_{kl}} \geq 0$

iii) $\forall u \in \omega_2(f)$ için $h(u) = h(-u)$ olduğu açıktır,

iv)

$$\begin{aligned} h(u+v) &= \sum_{k,l=1}^{\infty} \left[|\lambda_{kl}| f_{kl}\left(d(u_{kl},\bar{0}) + d(v_{kl},\bar{0})\right)\right]^{p_{kl}} \\ &\leq \sum_{k,l=1}^{\infty} \left[|\lambda_{kl}| f_{kl}\left(d(u_{kl},\bar{0})\right) + |\lambda_{kl}| f_{kl}\left(d(v_{kl},\bar{0})\right)\right]^{p_{kl}} \\ &\leq \sum_{k,l=1}^{\infty} \left[|\lambda_{kl}| f_{kl}\left(d(u_{kl},\bar{0})\right)\right]^{p_{kl}} + \sum_{k,l=1}^{\infty} \left[f|\lambda_{kl}|_{kl}\left(d(v_{kl},\bar{0})\right)\right]^{p_{kl}} \\ &\leq h(u) + h(v) \end{aligned}$$

v) $t_n \to 0$ ve $u_{kl} \in s(f,\lambda,p)$ için $\varepsilon, n > 0$ sayıları vardır öyle ki

$$h(u) = \sum_{k,l=1}^{\infty} \left[|\lambda_{kl}| f_{kl}\left(t_n d(u_{kl},\bar{0})\right)\right]^{p_{kl}}$$

fonksiyonu 0 noktasında süreklidir . $0 < \delta < 1$ için $0 < t < \delta$ olacak şekilde t vardır ve $|h(u)| < \frac{\varepsilon}{2}$ dır. Aynı zamanda $n \geq n_0$ olduğunda $|t_n| < \delta$ olacak şekilde bir n_0 vardır. Ayrıca $u_{kl} \in s(f,\lambda,p)$ olduğu için

$$\sum_{k,l=1}^{\infty}\left[|\lambda_{kl}|f_{kl}\left(d(u_{kl},\bar{0})\right)\right]^{p_{kl}} \quad < \infty$$

dir. $n \geq n_0$ alındığında $n_0 > 0$ ve $\varepsilon > 0$ için

$$\sum_{k,l=n_{0+1}}^{\infty}\left[|\lambda_{kl}|f_{kl}\left(t_n d(u_{kl},\bar{0})\right)\right]^{p_{kl}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} h(t_n u) &= \sum_{k,l=1}^{n_0}\left[|\lambda_{kl}|f_{kl}\left(t_n d(u_{kl},\bar{0})\right)\right]^{p_{kl}} + \sum_{k,l=n_{0+1}}^{\infty}\left[|\lambda_{kl}|f_{kl}\left(t_n d(u_{kl},\bar{0})\right)\right]^{p_{kl}} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k,l=n_{0+1}}^{\infty}\left|\lambda_{kl}f_{kl}\left(t_n d(u_{kl},\bar{0})\right)\right|^{p_{kl}} \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur Ayrıca,

$$h(u) = \sum_{k,l=1}^{\infty}\left[|\lambda_{kl}|f_{kl}\left(d(u_{kl},\bar{0})\right)\right]^{p_{kl}}$$

paranormu totaldir.

Teorem 3.1.18. $s(f,p)$ uzayı $f_{kl} = f$ için bir DK-uzayıdır.

İspat: $\forall m,n \in N$ için

$$P_{mn}: s(f,p) \to C$$

$$u \to P_{mn}(u) = u_{mn}$$

olacak şekilde koordinat fonksiyonları süreklidir.

$$supd(u_{mn},\bar{0}) = supmax\{\ |u_{mn}^{-}(\bar{0})|\ , |u_{mn}^{+}(\bar{0})|\ \} \tag{3.32}$$

olduğunu hatırlanarak (3.32) den $max\{\ |u_{mn}^{-}(\bar{0})|\ , |u_{mn}^{+}(\bar{0})|\ \} = |\bar{u}_{mn}(\bar{0})|$ dır.

$\forall\varepsilon > 0$ için $\exists\delta > 0$, $h(u) < \delta$ iken $\delta = f(\varepsilon)$ ve $\lambda_{mn} = 1, f_{mn} = f$ ve $p_{mn} = 1$ olarak seçilirse,

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} |f(\overline{u}_{mn}(\overline{0}))| < f(\varepsilon) \Rightarrow |f(\overline{u}_{mn}(\overline{0})| < f(\varepsilon)$$

olup f modülüs fonksiyonu artan olduğundan $|\overline{u}_{mn}(\overline{0})| = |P_{mn}(u)| < \varepsilon$ elde edilir.

Önerme 3.1.1. $u_{kl} \in \omega_2(F), r_{kl} \in R$ ve $|u_{kl}|^{r_{kl}} = M$ eşitliği mevcut olsun.

$$|u_{kl}|^{r_{kl}} = M \quad \Rightarrow |u_{kl}| = M^{\frac{1}{r_{kl}}}$$

yazılabilir. $M^{\frac{1}{r_{kl}}} \leq max\left(1, M^{\frac{1}{r_{kl}}}\right)$ eşitsizliği de gerçeklenir. Genel olarak $0 < \inf r_{kl} < \infty$ olmak üzere $K = \sup r_{kl}$ olmak üzere $H = max(1, K)$ şeklinde ifade edilirse,

$$\left\{u = (u_{kl}) \colon \sum_{k,l=0} (|u_{kl}|)^{r_{kl}} < \infty\right\}$$

uzayına

$$\sup_{k,l} |u_{kl}|^{\frac{r_{kl}}{H}}$$

paranormu ile paranormlu uzaydır denir.

Teorem 3.1.19. $s(f,p)$ dizi uzayı $u = u_{kl}$ olmak üzere,

$$h(u) = \sum_{k,l=1}^{\infty} \left[f_{kl}\left(d(u_{kl}, \overline{0})\right)\right]^{p_{kl}}$$

paranormu ile tamdır.

İspat: (u^m), $s(f, \lambda, p)$ de bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ni m, n > n_0$ için $h(u^m - u^n) < \varepsilon$ olur.

Her i, j için $P_{ij}(u) = u_{ij}$ koordinat fonksiyonları $s(f, \lambda, p)$ üzerinde süreklidir. O halde her $i, j \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ için $\left(u_{ij}^m\right)$ dizisi $\mathbb{R}$ de bir Cauchy dizisi olsun, öyleyse $m > n_0$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır ve$\mathbb{R}$ tam olduğundan $\left(u_{ij}^m\right)$ dizisi $\mathbb{R}$ nin bir $u = (u_{ij})$ elemanına yakınsaktır. $\lambda_{ij} = 1, f_{ij} = f, p_{ij} = 1$ ve $max\{\left|u_{ij}^-(0)\right|, \left|u_{ij}^+(0)\right|\} = \left|\overline{u}_{ij}(0)\right|$ için

$$h(u^m - u^n) < \varepsilon \quad \Rightarrow \sum_{i,j=1}^{\infty} \left| f\left(u_{ij}{}^m(\bar{0}) - u_{ij}{}^n(\bar{0})\right) \right| < \varepsilon$$
$$\Rightarrow \sum_{i,j=1}^{k,l} \left| f\left(u_{ij}{}^m(\bar{0}) - u_{ij}{}^n(\bar{0})\right) \right| < \varepsilon \tag{3.33}$$

elde edilir. $n \to \infty$ için limit alınırsa (3.33) den

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{i,j=1}^{k,l} \left| f\left(u_{ij}{}^m(\bar{0}) - u_{ij}{}^n(\bar{0})\right) \right| < \varepsilon$$
$$\Rightarrow \sum_{i,j=1}^{k,l} \left| f\left(u_{ij}{}^m(\bar{0}) - u_{ij}(\bar{0})\right) \right| < \varepsilon$$

bulunur. Buradan $\forall m > n_0$ için $h(u^m - u) < \varepsilon$ olacak şekilde $\varepsilon > 0$ vardır ve böylece $u^m \to u$ yakınsaması elde edilir. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{k,l} \left| f\left(u_{ij}(\bar{0})\right) \right| &= \sum_{i,j=1}^{k,l} \left| f(u_{ij}(\bar{0}) - u_{ij}{}^m(\bar{0}) + u_{ij}{}^m(\bar{0})) \right| \\ &\leq \sum_{i,j=1}^{k,l} \left| f(u_{ij}(\bar{0}) - u_{ij}{}^m(\bar{0}) \right| \sum_{i,j=1}^{k,l} \left| f(u_{ij}{}^m(\bar{0})) \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned} \tag{3.34}$$

bulunur. O halde, (3.34) den $u \in s(f,p)$ dır. İspat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.1.1. $s(f,p)$ bir *FDK*-uzayıdır.

Teorem 3.1.20. $s_0(f,\lambda,p)$ ve $s_c(f,\lambda,p)$ uzayları $L > 0$ olmak üzere,

$$\tilde{h}(u) = \left(\sum_{k,l=1}^{\infty} \left[|\lambda_{kl}| f_{kl}\left(d(u_{kl}, \bar{0})\right) \right]^{p_{kl}} \right)^{\frac{1}{M}}$$

ile paranormlu bir uzaydır. Burada $M = max\{1, \sup p_{kl}\} \leq 1$ dır.

İspat: $u_{kl}, v_{kl} \in s_c(f,\lambda,p)$ için,

i) $\tilde{h}(\bar{0}) = \left(\sum_{k,l=1}^{\infty} [f_{kl}(|\lambda_{kl}| d(\bar{0},\bar{0}) - L)]^{p_{kl}} \right)^{\frac{1}{M}} = 0$

ii) $\tilde{h}(u) = \left(\sum_{k,l=1}^{\infty} |\lambda_{kl}| [|\lambda_{kl}| f_{kl}(d(u_{kl},\bar{0}) - L)]^{p_{kl}} \right) \geq 0$

iii) $\forall u \in \omega_2(f)$ için $\tilde{h}(u) = \tilde{h}(-u)$ olduğu açıktır,

iv) $|u_{kl} + v_{kl}|^{\frac{1}{M}} \leq |u_{kl}|^{\frac{1}{M}} + |v_{kl}|^{\frac{1}{M}}$ ve $M \leq 1$ için Maddox özdeşliğinden faydalanılarak,

$$\begin{aligned}
\tilde{h}(u+v) &= \left(\sum_{k,l=1}^{\infty} \left[|\lambda_{kl}| f_{kl}\big(d(u_{kl},\bar{0}) + d(v_{kl},\bar{0})\big) - 2L \right]^{p_{kl}} \right)^{\frac{1}{M}} \\
&\leq \left(\sum_{k,l=1}^{\infty} \left[|\lambda_{kl}| f_{kl}\big(d(u_{kl},\bar{0})\big) + |\lambda_{kl}| f_{kl}\big(d(v_{kl},\bar{0})\big) - 2L \right]^{p_{kl}} \right)^{\frac{1}{M}} \\
&\leq \left(\sum_{k,l=1}^{\infty} \left[|\lambda_{kl}| f_{kl}\big(d(u_{kl},\bar{0})\big) - L \right]^{p_{kl}} \right)^{\frac{1}{M}} \\
&+ \left(\sum_{k,l=1}^{\infty} \left[|\lambda_{kl}| f_{kl}\big(d(v_{kl},\bar{0})\big) - L \right]^{p_{kl}} \right)^{\frac{1}{M}} \\
&\leq \tilde{h}(u) + \tilde{h}(v)
\end{aligned}$$

v) $u_{kl} \in s(f,\lambda,p)$ olsun. Bu durumda

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} \left[|\lambda_{kl}| f_{kl}\big(d(u_{kl},\bar{0})\big) \right]^{p_{kl}} < \infty$$

olduğundan $\varepsilon > 0$ ve $m,n > \mathbb{N}$ için

$$\sum_{k,l=m,n}^{\infty} \left[|\lambda_{kl}| f_{kl}\big(d(u_{kl},\bar{0})\big) - L \right]^{p_{kl}} < \frac{\varepsilon}{4}$$

ve $1 \leq m,n \leq \mathbb{N}$ için

$$\sum_{k,l=1}^{k,l=m,n} \left[|\lambda_{kl}| f_{kl}\big(d(u_{kl},\bar{0})\big) - L \right]^{p_{kl}} < \infty$$

elde edilir. $m\ ve\ n$ ye bağlı olarak seçilen değer M_{mn} olarak gösterilecektir. Burada

$$M = \max_{1 \leq m,n \leq N} M_{mn}$$

dir. $t \in \mathbb{R}$ ve bütün (k,l) ikilileri için

$$\sum_{k,l=1}^{\infty}\left[t|\lambda_{kl}|f_{kl}\left(d\left(u_{kl},\overline{0}\right)\right)\right]^{p_{kl}} = \sum_{k,l=1}^{\infty}\left[|\lambda_{kl}|f_{kl}\left(\left(d\left(u_{kl},\overline{0}\right)\right)-tL+tL\right)\right]^{p_{kl}}$$
$$\leq \sum_{k,l=1}^{\infty}\left[|\lambda_{kl}|f_{kl}\left(d\left(u_{kl},\overline{0}\right)\right)-tL\right]^{p_{kl}}+\sum_{k,l=1}^{\infty}[|\lambda_{kl}|f_{kl}tL]^{p_{kl}} \tag{3.35}$$

elde edilir . Daha sonra $(k,l>M)$, $(k,l\leq M)$, $(k\geq M,l<M)$, ve $(k<M,l\geq M)$ durumları için (3.35) eşitsizliği parça parça incelendiğinde,

$$\leq \sum_{k,l>M}^{\infty}\left[|\lambda_{kl}|f_{kl}\left(d(u_{kl},\bar{0})\right)-tL\right]^{p_{kl}}+\sum_{k,l\leq M}\left[|\lambda_{kl}|f_{kl}\left(d(u_{kl},\bar{0})\right)-tL\right]^{p_{kl}}$$
$$+\sum_{k\geq M,l<M}^{\infty}\left[|\lambda_{kl}|f_{kl}\left(d(u_{kl},\bar{0})\right)-tL\right]^{p_{kl}}+\sum_{k<M,l\geq M}^{\infty}\left[|\lambda_{kl}|f_{kl}\left(d(u_{kl},\bar{0})\right)-tL\right]^{p_{kl}}$$
$$+\sum_{k,l=1}^{\infty}[|\lambda_{kl}|f_{kl}tL]^{p_{kl}}$$

bulunur. Bütün (k,l) ikilileri için f sürekli olduğundan ve $t\rightarrow 0$ için

$$\sum_{k,l\leq M}\left[|\lambda_{kl}|f_{kl}\left(d(u_{kl},\bar{0})\right)-tL\right]^{p_{kl}}+\sum_{k,l=1}^{\infty}[|\lambda_{kl}|f_{kl}tL]^{p_{kl}}\rightarrow 0$$

yakınsaması Pringsheim anlamında elde edilir. Yani

$$\sum_{k,l\leq M}\left[|\lambda_{kl}|f_{kl}\left(d(u_{kl},\bar{0})\right)-tL\right]^{p_{kl}}+\sum_{k,l=1}^{\infty}[|\lambda_{kl}|f_{kl}tL]^{p_{kl}}<\frac{\varepsilon}{4} \tag{3.36}$$

olur. Aynı şekilde diğer k ve l değerleri için ise,

$$\sum_{k,l>M}^{\infty}\left[|\lambda_{kl}|f_{kl}\left(d(u_{kl},\bar{0})\right)-tL\right]^{p_{kl}}<\frac{\varepsilon}{4}$$
$$\sum_{k\geq M,l<M}^{\infty}\left[|\lambda_{kl}|f_{kl}\left(d(u_{kl},\bar{0})\right)-tL\right]^{p_{kl}}<\frac{\varepsilon}{4} \tag{3.37}$$

$$\sum_{k<M,l\geq M}^{\infty}\left[|\lambda_{kl}|f_{kl}\big(d(u_{kl},\bar{0})\big)-tL\right]^{p_{kl}}<\frac{\varepsilon}{4}$$

eşitsilikleri elde edilir. (3.36), (3.37) den

$$\sum_{k,l=1}^{\infty}\left[t|\lambda_{kl}|f_{kl}\big(d(u_{kl},\bar{0})\big)\right]^{p_{kl}}<\varepsilon$$

olur. $t\to 0$ iken $\tilde{h}(tu)\to 0$ bulunur. Bu durumda $s_c(f,\lambda,p)$ bir paranormlu lineer topolojik uzay olur. $s_0(f,\lambda,p)$ uzayının da paranormlu uzay olduğu benzer şekilde ispatlanabilir.

Teorem 3.1.21. Birim vektörler çift dizisi $s(f,p)$ de sınırlıdır.

İspat: $k,l\in\mathbb{N}$, $t\in\mathbb{R}$, $p_{kl}=1$ ve $f_{kl}=f$ olarak seçilirse,

$$h(u)=\sum_{k,l=1}^{\infty}|f(u_{kl}^{m}(\bar{0}))|$$

dir. (e_{kl}) birim vektör çift dizisi olmak üzere,

$$h(te_{11})=\sum_{k,l=1}^{\infty}|f(te_{11})|=f(|t|) \tag{3.38}$$

dir ve te_{kl} ler $s(f,p)$ de orijine $f(|t|)$ birim kadar uzaktadır. $f(|\delta|)<\varepsilon$ olacak şekilde $\delta\in\mathbb{R}$ ve $0\leq t\leq\delta$ için

$$h(te_{11})=f(|t|)\ \leq f(|\delta|) \tag{3.39}$$

bağıntıları varsa f artandır. (3.38) ve (3.39) dan

$$h(te_{11})=f(|t|)\leq f(|\delta|)<\varepsilon\Rightarrow te_{11}\in\{X\colon h(u)<\varepsilon\}$$

olacak şekilde te_{11} nin bir sıfır merkezli $\{X\colon h(u)<\varepsilon\}$ yuvarı tarafından yutulacağını gösterir. Yani (e_{kl}) dizisi $s(f,p)$ de sınırlıdır.

BÖLÜM 4

MODÜLÜS FONKSİYONU İLE OLUŞTURULAN BULANIK NORMLU ÇİFT DİZİ UZAYLARI

Bu bölümde $s^2(X, f)$ bulanık normlu çift indisli dizi uzayı modülüs fonksiyonu yardımıyla tanımlanacak ve topolojik özelliklerine yer verilecektir. Ayrıca $s^2_{l_\infty}(f)$ uzayının seviye kümesi cinsinden bulanık normlu çift indisli dizi uzayının topolojik özellikleri tanımlanacaktır.

4.1. Bulanık Norm

Tanım 4.1.1. Bütün bulanık sayıların kümesi $F(\mathbb{R})$ ile gösterilsin.
$\omega_2(F) = \{u = u_{kl} | u: \mathbb{N} \to F(\mathbb{R})\}$
olacak şekilde bir çift indisli dizi uzayları belirtmek üzere,
$\bar{\mathcal{M}} = \{\mathcal{M}(u_{kl}) | k, l \in \mathbb{N}\}$
kümesi üzerinde bir topoloji olsun ve
$\mathcal{M}(u_{kl}) = \|u_{kl}\|$
yarı normu yardımıyla tanımlansın. Bu durumda $(\omega_2(F), \mathcal{M}(u_{kl}))$ yarı normları tarafından üretilen uzay sonsuz dizi uzayıdır. Bu topolojik uzayı lokal konvekstir aynı zamanda sayılabilir ve metriklenebilirdir. Ayrıca

$$\eta(u) = \sum_{k,l} \frac{1}{2^{k+1}} \frac{\|u_{kl}\|}{1 + \|u_{kl}\|} = \sum_{k,l} \frac{1}{2^{k+1}} \frac{\mathcal{M}(u_{kl})}{1 + \mathcal{M}(u_{kl})}$$

olacak şekilde $\eta(u)$ varsa paranorm totaldir.
$(u_{kl}) \subset \omega_2(F)$ olmak üzere $\eta(u) \to 0$ olması için $\mathcal{M}(u_{kl}) \to 0$ olması gerekir. $\omega_2(F)$ uzayı üzerinde daha geniş topolojiler tanımlanabilir fakat burada $\omega_2(F)$ üzerinde tanımlana zayıf topoloji (süreklilik) bizim için yeterli olacaktır. Paranorm yardımıyla tanımlanan uzayın total ya da tam oluşu $(\omega_2(F), \mathcal{M}(u_{kl}))$ uzayına bağlıdır. $(\omega_2(F), \eta(u))$ koordinat fonksiyonlarında sürekli olması için $(\omega_2(F), \mathcal{M}(u_{kl}))$ uzayının tam olması gerekir. Yani $(\omega_2(F), \eta(u))$ nin FK uzayı olması için $(\omega_2(F), \mathcal{M}(u_{kl}))$ uzayı Banach olmalıdır. Ruckle'ın "Koordinat fonksiyonları ile tanımlı sınırlı bir FK uzayı var mıdır?" problemi modülüs fonksiyonu yardımıyla inşa edilen dizi uzayları çözülmüştür [11]. Bu araştırmada, benzer şekilde $\omega_2(F)$ uzayının alt kümesi olan vektör değerli çift indisli dizi uzayı modülüs fonksiyonları yardımıyla tanımlanmıştır.

Tanım 4.1.2. $\preccurlyeq$ kısmı sıralama bağıntısı $F(\mathbb{R})$ üzerinde tanımlı olsun. $\alpha \in [0,1]$ için $u_\alpha^- \leq v_\alpha^-$ ve $u_\alpha^+ \leq v_\alpha^+$ ise $u \preccurlyeq v$ dır. $t \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\oplus, \ominus, \odot$ ve $\oslash$ işlemleri $F(\mathbb{R}) \times F(\mathbb{R})$ üzerinde aşağıdaki şekilde verilmiştir [45]:

$$(u \oplus v)(t) = \sup_{s\in R}\{u(s) \wedge v(t-s)\},$$

$$(u \ominus v)(t) = \sup_{s\in R}\{u(s) \wedge v(s-t)\},$$

$$(u \odot v)(t) = \sup_{s\in R, s\neq 0}\{u(s) \wedge v(t/_s)\},$$

$$(u \oslash v)(t) = \sup_{s\in R}\{u(st) \wedge v(t)\}.$$

Tanım 4.1.3. $\oplus, \ominus, \odot$ ve $\oslash$ işlemlerinin α *seviye* kümesi için denklemler aşağıdaki şekilde tanımlansın. ku ifadesi $ku(t) = u(t/_k)$ ve $0u(t) = \bar{0}$ olacak şekilde $u, v \in F(\mathbb{R})$ ve $\alpha \in [0,1]$ için $[u]^\alpha = [u_\alpha^-, u_\alpha^+]$ ve $[v]^\alpha = [v_\alpha^-, v_\alpha^+]$ olmak üzere;

$$[u \oplus v]^\alpha = [u_\alpha^- + v_\alpha^-, u_\alpha^+ + v_\alpha^+],$$

$$[u \ominus v]^\alpha = [u_\alpha^- - v_\alpha^-, u_\alpha^+ - v_\alpha^+],$$

$$[u \odot v]^\alpha = [u_\alpha^-.v_\alpha^-, u_\alpha^+.v_\alpha^+],$$

$$[\bar{1} \oslash u]^\alpha = \left[\frac{1}{u_\alpha^-}, \frac{1}{u_\alpha^+}\right], u_\alpha^- > 0,$$

$$[|u|]^\alpha = [max(0, u_\alpha^-, -u_\alpha^+), max(|u_\alpha^-|, |u_\alpha^+|)]$$

şeklindedir [45].

Tanım 4.1.4. X, $\mathbb{R}$ de bir vektör uzayı olmak üzere $\|\cdot\|: X \to F(\mathbb{R})$ normu tanımlı olsun. A ve Ü sırasıyla sol ve sağ normları belirtmek üzere; $A, \text{Ü}: [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ şeklinde tanımlansın. Bu dönüşümler simetrik, azalmayan ve aynı zamanda $A(0,0) = 0$ ve $\text{Ü}(1,1) = 1$ şartlarını sağlasın. $(X, \|\cdot\|, A, \text{Ü})$ dörtlüsüne bulanık lineer normlu uzay denir ve $\|\cdot\|$ bulanık normu aşağıdaki şartları sağlar [44].

i) $x \neq 0 \Rightarrow inf_{0<\alpha\leq 1}\|x\|_\alpha^- > 0$

ii) $\|x\| = \bar{0} \Leftrightarrow x = 0,$

iii) $\|tx\| = |t|\|x\|$,$x \in X$ ve $t \in R$

iv) $\forall x, y \in X$ için

a) $s \leq \|x\|^-$, $t \leq \|y\|^-$ ve $s + t \leq \|x + y\|^-$

$\Rightarrow \|x + y\|(s + t) \geq A(\|x\|(s), \|y\|(t))$

b) $s \geq \|x\|^-$, $t \geq \|y\|^-$ ve $s + t \geq \|x + y\|^-$

$\Rightarrow \|x + y\|(s + t) \leq \text{Ü}(\|x\|(s), \|y\|(t)).$

Burada sırasıyla $(X, \|\cdot\|^-)$ ve $(X, \|\cdot\|^+)$ alt ve üst normlu uzayları belirtmektedir.

Uyarı 4.1.1. $s,t \in [0,1]$ için $A(s,t) = min(s,t)$ ve $Ü(s,t) = max(s,t)$ ise (iv) özelliği

$\|x+y\| \preccurlyeq \|x\| \oplus \|y\|$

üçgen eşitsizliğini sağlar [45].

Bu çalışma boyunca $t \in [0,1]$ için $A(s,t) = min(s,t)$ ve $Ü(s,t) = max(s,t)$ olduğu kabul edilecektir.

Tanım 4.1.5. X $\mathbb{R}$ de lineer normlu bir uzay olmak üzere $\|\cdot\|$ bulanık normu aşağıda verilen üçgen bulanık sayı yardımıyla $0 < k < 1$ ve $1 < t < \infty$ için $\|x\|$ aşağıdaki şekildedir:

$$\|x\|(n) = \begin{cases} 0, & 0 \le n \le k\|x\| \; veya \; n \ge t\|x\| \; ise, \\ \dfrac{n}{(1-k)\|x\|} - \dfrac{k}{1-k}, & k\|x\| \le n \le \|x\| \; ise, \\ \dfrac{-n}{(t-1)\|x\|} - \dfrac{t}{t-1}, & \|x\| \le n \le t\|x\| \; ise. \end{cases}$$

Tanım 4.1.6. $(X, \|\cdot\|)$ bulanık normlu lineer uzay ve (x_n), X de bir dizi olsun. Eğer $\forall x \in X$ için,

$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_\alpha^+ = 0$

oluyorsa (x_n) yakınsaktır. Burada sırasıyla $(X, \|\cdot\|_\alpha^-)$ ve $(X, \|\cdot\|_\alpha^+)$ alt ve üst normlu uzaylarını belirtir [53].

Uyarı 4.1.2. X in S gibi bir alt vektör uzayının kompakt olması için S nin bütün dizilerinin $(X, \|\cdot\|)$ de yakınsak olması gerekir.

Tanım 4.1.7. $(X, \|\cdot\|)$ bulanık normlu lineer uzay ve (x_{kl}) de X uzayında çift indisli dizi olsun,

$\lim_{kl\to\infty} \|x_{kl} - x\|_\alpha^+ = 0$

için (x_{kl}) dizisi x e Prignsheim anlamında yakınsaktır denir.

Tanım 4.1.8. $(X, \|\cdot\|_1)$ ve $(Y, \|\cdot\|_2)$ iki bulanık normlu lineer uzay olmak üzere, $T: X \to Y$ lineer operatörü $k > 0$ için

$\|Tx\|_2 \preccurlyeq \tilde{k} \odot \|x\|$

şartını sağlıyorsa T ye kuvvetli bulanık sınırlıdır denir [45].

4.2. $s^2(X,f)$ Dizi Uzayı

Tanım 4.2.1. $(X, \|\cdot\|)$ bulanık normlu lineer uzay, f modülüs fonksiyonu ve $u_{kl} \in \omega_2$ olmak üzere $k,l \in \mathbb{N}$ için

$$s^2(X,f) = \left\{ u \in \omega_2 : \sum_{k,l} f(\|u_{kl}\|) < \infty \right\}$$

uzayı tanımlansın. $s^2(X,f)$ uzayının lineer olduğu modülüs fonksiyonunun özelliklerinden aşikardır.

Uyarı 4.2.3,1. Burada $(X,\|\,.\,\|)$ bulanık normlu lineer uzayı üzerinde tanımlı olan $s^2(X,f)$ dizi uzayının elemanları $\left[\|u_{kl}\|_{s^2(X,f)}\right]_\alpha = [\|u_{kl}\|_\alpha^-, \|u_{kl}\|_\alpha^+]$ şeklinde iç içe geçmiş interval değerli bir bulanık sayı belirtir. Bölüm 4.2. deki teoremler aralığın sağ ucu $\|u_{kl}\|_\alpha^+$ ve her $\alpha \in [0,1]$ için ispat edilecektir. Aralığın sol ucu $\|u_{kl}\|_\alpha^-$ için ispatlar benzer şekildedir.

Teorem 4.2.1. $(X,\|\cdot\|)$ bulanık normlu lineer uzay olsun. $s^2(X,f)$ uzayı,

$$T(u) = \sum_{k,l} f(\|u_{kl}\|_\alpha^+)$$

şeklinde verilen paranorm ile paranormlu uzaydır.

İspat:

i) $u = \bar{0}$ ve $\forall\, k,l$ için $u_{kl} = 0$ olduğundan $T(0) = \sum_{k,l} f(\|0\|_\alpha^+) = 0$ elde edilir.

ii) $T(-u) = \sum_{k,l} f(\|-u_{kl}\|_\alpha^+) = \sum_{k,l} f(\|u_{kl}\|_\alpha^+) = T(x)$.

iii) $u, v \in s^2(X,f)$ için,

$$\begin{aligned} T(u+v) &= \sum_{k,l} f(\|u_{kl} + v_{kl}\|_\alpha^+) \\ &\le \sum_{k,l} f(\|u_{kl}\|_\alpha^+ \oplus \|v_{kl}\|_\alpha^+) \\ &\le \sum_{k,l} f(\|u_{kl}\|_\alpha^+) \oplus \sum_{k,l} f(\|v_{kl}\|_\alpha^+). \end{aligned}$$

iv) $u = u^i \in s^2(X,f)$ herhangi bir dizi ve $t = (t^i)$ de bir skaler değerli dizi olsun. Benzer şekilde $\forall i \in N$ ve $i \to \infty$ için $u^i \to u^0$ ve $T(u^i - u^0) \to \tilde{0}$ olacak şekilde $K > 0$ olduğunda $|t^i| \le K$ sayısı vardır.

$$
\begin{aligned}
T\left(t^i u^i - t^0 u^0\right) &= \sum_{k,l} f\left(\left\|t^i u_{kl}^i - t^0 u_{kl}^0\right\|_\alpha^+\right) \\
&= \sum_{k,l} f\left(\left\|t^i u_{kl}^i - t^i u_{kl}^0 + t^i u_{kl}^0 - t^0 u_{kl}^0\right\|_\alpha^+\right) \\
&\le \sum_{k,l} f\left(\left\|t^i u_{kl}^i - t^i u_{kl}^0\right\|_\alpha^+ \oplus \left\|t^0 u_{kl}^0 - t^i u_{kl}^0\right\|_\alpha^+\right) \\
&\le \sum_{k,l} f\left(\left\|t^i u_{kl}^i - t^i u_{kl}^0\right\|_\alpha^+\right) \oplus \sum_{k,l} f\left(\left\|t^0 u_{kl}^0 - t^i u_{kl}^0\right\|_\alpha^+\right) \qquad (4.1) \\
&\le \sum_{k,l} f\left(\left|t^i\right|\left\|u_{kl}^i - u_{kl}^0\right\|_\alpha^+\right) \oplus \sum_{k,l} f\left(\left|t^i - t^0\right|\left\|u_{kl}^0\right\|_\alpha^+\right) \\
&\le K.T\left(u^i - u^0\right) \oplus \sum_{k,l} f\left(\left|t^i - t^0\right|\left\|u_{kl}^0\right\|_\alpha^+\right)
\end{aligned}
$$

olur. (4.1) eşitsizliğinin ilk kısmı $i \to \infty$ iken $T\left(u^i - u^0\right) \to 0$ olduğu için sıfırlanır. Şimdi eşitsizlikteki ikinci terim incelenecektir. $\forall i \in N$ için $\left|t^i - t^0\right| \le Z$ olacak şekilde bir $Z \ge 0$ değeri mevcuttur. Bu durumda

$Zu^0 = (Zu_{kl}^0) \in s^2(X, f)$

dir. $\varepsilon > 0$ ve $\forall i \in \mathbb{N}$ için en az bir $k_0 l_0 \in \mathbb{N}$ var olsun.

$$
\begin{aligned}
\sum_{k,l} f\left(\left|t^i - t^0\right|\left\|u_{kl}^0\right\|_\alpha^+\right) \le & \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \sum_{l=l_0+1}^{\infty} f\left(\left|t^i - t^0\right|\left\|u_{kl}^0\right\|_\alpha^+\right) + \sum_{k=0}^{k_0} \sum_{l=0}^{l_0} f\left(\left|t^i - t^0\right|\left\|u_{kl}^0\right\|_\alpha^+\right) \\
& + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \sum_{l=0}^{l_0} f\left(\left|t^i - t^0\right|\left\|u_{kl}^0\right\|_\alpha^+\right) + \sum_{k=0}^{k_0} \sum_{l=l_0+1}^{\infty} f\left(\left|t^i - t^0\right|\left\|u_{kl}^0\right\|_\alpha^+\right)
\end{aligned}
$$

olur. Ayrıca

$$
\lim_{i \to 0} \sum_{k=0}^{k_0} \sum_{l=0}^{l_0} f\left(\left|t^i - t^0\right|\left\|u_{kl}^0\right\|_\alpha^+\right) = \sum_{k=0}^{k_0} \sum_{l=0}^{l_0} f\left(\lim_{i \to 0}\left|t^i - t^0\right|\left\|u_{kl}^0\right\|_\alpha^+\right)
$$

ve $\varepsilon > 0$ $\exists i_0$ ve $i > i_o$ için

$$
\sum_{k=0}^{k_0} \sum_{l=0}^{l_0} f\left(\left|t^i - t^0\right|\left\|u_{kl}^0\right\|_\alpha^+\right) \le \sum_{k=0}^{k_0} \sum_{l=0}^{l_0} f\left(Z\left\|u_{kl}^0\right\|_\alpha^+\right) < \frac{\varepsilon}{4}
$$

elde edilir. Bu durumda ve $\varepsilon > 0$ ve $i > i_o$ için benzer şekilde,

$$\begin{aligned}\sum_{k,l} f\left(\left|t^i - t^0\right|\left\|u_{kl}^0\right\|_\alpha^+\right) \quad &\leq \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \sum_{l=l_0+1}^{\infty} f\left(Z\left\|u_{kl}^0\right\|_\alpha^+\right) + \sum_{k=0}^{k_0} \sum_{l=0}^{l_0} f\left(Z\left\|u_{kl}^0\right\|_\alpha^+\right) \\ &+ \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \sum_{l=0}^{l_0} f\left(Z\left\|u_{kl}^0\right\|_\alpha^+\right) + \sum_{k=0}^{k_0} \sum_{l=l_0+1}^{\infty} f\left(Z\left\|u_{kl}^0\right\|_\alpha^+\right) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda $i \to \infty$ için

$$T\left(t^i u^i - t^0 u^0\right) \to 0$$

yakınsaması mevcuttur.

Önerme 4.2.1. Her paranormlu lineer uzay $d(x, y) = \|x - y\|$ ve $\|x\| = d(x, 0)$ normlarıyla birer metrik uzaydır. Fakat bu durumun tersi doğru değildir. $\|x\| = d(x, 0)$ özelliği bir çok norm için geçerlidir [32].

Tanım 4.2.2. $t(F) \subset \omega_2(F)$ olmak üzere $t(F)$ dizi uzayı için

$$T_{ij}: t(F) \to F$$

$$T_{ij}(u) = u_{ij}$$

ile tanımlanan T_{ij} koordinat fonksiyonları sürekli ise $t(F)$ bir FDK uzayıdır.

Teorem 4.2.2. $(X, \|\cdot\|)$ bulanık normlu lineer uzay olsun. $s^2(X, f)$,

$$T(u) = \sum_{ij} f\left(\left\|u_{ij}\right\|_\alpha^+\right)$$

paranormu ile FDK uzayıdır.

İspat: $s^2(X, f)$ uzayın T paranormu ile FDK uzayı olduğu üç adımda gösterilecektir.

- **i)** $s^2(X, f)$ uzayının lineer olduğu ve T paranormunun bu uzayda tanımlı olduğu bilinmektedir.

ii) Şimdi $T_{ij}: s^2(X,f) \to X$için $T_{ij}(u) = u_{ij}$ şeklinde verilen T_{ij} fonksiyonun sürekliliği gösterilecektir. $\varepsilon > 0$ a bağlı bir $\tilde{\delta} = f(\tilde{\varepsilon})$ için,

$$T(u) = \sum_{i,j} f\left(\|u_{ij}\|_{\alpha}^{+}\right) < \tilde{\delta} = f(\tilde{\varepsilon})$$
$$f\left(\|u_{ij}\|_{\alpha}^{+}\right) < f(\tilde{\varepsilon}) \tag{4.2}$$

olup modülüs fonksiyonu artan olduğundan (4.2) den

$$\|u_{ij}\|_{\alpha}^{+} = \|\, T_{ij}(u)\|_{\alpha}^{+}$$

eşitliği elde edilir.

iii) $s^2(X,f)$ uzayının tamlığını göstermek için $s^2(X,f)$ de (u^i) Cauchy dizisi alınsın. $\forall\varepsilon > 0$ için $\exists n_0 \in N$ ve $i,j > n_0$ için $T(u^i - u^j) < \tilde{\varepsilon}$ dır. Ayrıca $k,l \in N \times N$ için $T_{kl} = u_{kl}$ fonksiyonları sürekli olduğundan $\forall\ k,l \in N \times N$ için (u_{kl}^i) dizisi $i > n_0$ olduğundan (u_{kl}^i) dizisi Cauchy dizisidir. Bulanık sayılar uzayı tam olduğundan $u^i = u_{kl}^i \to u = u_{kl}$ şeklinde verilen bir noktaya yakınsar.

$$\begin{aligned} u^i \to u \quad &\Rightarrow T(u^i - u^j) < \tilde{\varepsilon} \\ &\Rightarrow \sum_{k,l} f\left(\|u_{kl}^i - u_{kl}^j\|_{\alpha}^{+}\right) < \tilde{\varepsilon} \\ &\Rightarrow \sum_{k,l=0}^{m,n} f\left(\|u_{kl}^i - u_{kl}^j\|_{\alpha}^{+}\right) < \tilde{\varepsilon} \end{aligned} \tag{4.3}$$

(4.3) de $j \to \infty$ için limit alınırsa,

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \lim_{j} \sum_{k,l=0}^{m,n} f\left(\|u_{kl}^i - u_{kl}^j\|_{\alpha}^{+}\right) < \tilde{\varepsilon} \\ &\Rightarrow \sum_{k,l} f\left(\|u_{kl}^i - u_{kl}\|_{\alpha}^{+}\right) < \tilde{\varepsilon} \\ &\Rightarrow T(u^i - u) < \tilde{\varepsilon}, \qquad \forall i > n_0 \\ &\Rightarrow u^i \to u \end{aligned} \tag{4.4}$$

elde edilir. Ayrıca (4.4) den

$$\begin{aligned}\sum_{k,l} f(\|u_{kl}\|) &= \sum_{k,l} f\left(\left\|u_{kl}-u_{kl}^{i}+u_{kl}^{i}\right\|_{\alpha}^{+}\right)\\ &\leq \sum_{k,l} f\left(\left\|u_{kl}-u_{kl}^{i}\right\|_{\alpha}^{+}\right) \oplus \sum_{k,l} f\left(\left\|u_{kl}^{i}\right\|_{\alpha}^{+}\right) < \tilde{\varepsilon}\end{aligned} \tag{4.5}$$

(4.5) den $\sum_{i,j} f\left(\left\|u_{kl}^{i}\right\|_{\alpha}^{+}\right) < \infty$ olduğundan $u \in s^2(X,f)$ elde edilir.

Teorem 4.2.3. Bütün modülüs fonksiyonları için $s^2(X,f) \subset s^2(f)$ dır.

İspat: Öncelikle $u \in s^2(X,f)$ fakat $u \notin s^2(f)$ olduğu kabul edesin. (i_n) ve (j_n) artan dizileri için,

$$\begin{aligned}1 \leq \sum_{k=i_n-1}^{i_n-1} \sum_{l=j_n-1}^{j_n-1} \|u_{kl}\|_{\alpha}^{+} &\Rightarrow f(1) \leq f\left(\sum_{k=i_n-1}^{i_n-1} \sum_{l=j_n-1}^{j_n-1} \|u_{kl}\|_{\alpha}^{+}\right)\\ &\Rightarrow \sum_{k=i_n-1}^{i_n-1} \sum_{l=j_n-1}^{j_n-1} f(\|u_{kl}\|_{\alpha}^{+}) < \infty\\ &\Rightarrow \lim_{n} \sum_{k=i_n-1}^{i_n-1} \sum_{l=j_n-1}^{j_n-1} f(\|u_{kl}\|_{\alpha}^{+}) = \tilde{0}\end{aligned} \tag{4.6}$$

dir. Modülüs fonksiyonun özelliklerinden $f(1) > 0$ olması gerektiğinden (4.6) bir çelişki oluşturur olur o halde $u \in s^2(f)$ dır.

Uyarı 4.2.2. Vektör değerli dizi uzayları için Schauder bazı yoktur. Bunun yerine baz yerine geçen operatörler ailesi Yılmaz tarafından tanımlanmıştır [46].

Önerme 4.2.2. Her bir $x \in s^2(X)$ için bir Hamel bazı yardımıyla

$$x = \sum_{k,l \in N \times N} I_{kl} x_{kl}$$

şeklinde bir ifade yazılabilir. Burada $I_{kl}: X \to s^2(X)$ ve $(k,l) \neq (i,j)$ için $I_{kl}(t) = y$ vardır öyle ki $y_{kl} = t, y_{ij} = 0$ dır. Ayrıca $F = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nin sonlu bir alt kümesi olmak üzere

$$x = P_F(x) = \sum_{k,l \in F} I_{kl} x_{kl}$$

dir ve $P_F(x)$ ağı $s^2(X)$ nin topolojisinde x noktasına yakınsar. Bu kısımda F kesin olarak kapsamalar ile yönlü bir ağ olarak ele alınmıştır [43].

Teorem 4.2.4. Her bir $u \in s^2(X)$ için,

$$u = \sum_{k,l \in N \times N} I_{kl} u_{kl}$$

temsili vardır ve $I_{kl}: X \to s^2(X)$, $I_{kl}(t) = v_{kl} = v$ olmak üzere

$$v_{kl} = \begin{cases} v_{ij} = 0, & (k,l) \neq (i,j) \\ v_{ij} = t, & (k,l) = (i,j) \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır.

İspat: $P_F: s^2(X) \to s^2(X)$ için $k, l \in F$ ise

$$P_F(u_{kl}) = u_{kl}$$

ve $k, l \notin F$ ise

$$P_F(u_{kl}) = 0$$

dir. Buradan hareketle

$$T(P_F(u) - u) = \sum_{k,l \in N \times N} f(\|\{P_F(u)\}_{kl} - u_{kl}\|_\alpha^+) = \sum_{k,l \in N \times N \setminus F} f(\|u_{kl}\|_\alpha^+)$$

olur ve $u \in s^2(X)$ için $\vartheta > 0$ bulanık sayı olacak şekilde

$$\sum_{k,l \in N \times N} f(\|u_{kl}\|_\alpha^+) < \vartheta \tag{4.7}$$

(4.7) bağıntısı vardır. Bu durumda $\varepsilon > 0$ için bir $F_0(\tilde{\varepsilon})$ vardır ve

$$\sum_{k,l \in N \times N \setminus F_0} f(\|u_{kl}\|_\alpha^+) < \tilde{\varepsilon}$$

olur. $F_0 \subseteq F$ şeklinde kesin olarak kapsamalı bir ağ olduğundan,

$$T(P_F(u)-u)=\sum_{k,l\in N\times N\setminus F} f(\|u_{kl}\|_\alpha^+)<\tilde{\varepsilon} \tag{4.8}$$

olur . O halde (4.8) den $P_F(u)\to u$ olduğu açıktır.

Hatırlatma 4.2.1. X bir Banach uzayı ve $(x_{kl})\in X$ ise $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ve $1\le p\le q\le\infty$ olacak şekilde bu l^p uzayı üzerinde tanımlı norm

$$\|x\|=\left\{\sum_{k,l}^{\infty}|x_{kl}|^p\right\}^{\frac{1}{p}}<\infty$$

şeklindendir. $p=\infty$ ise l^∞ normu sup normudur. $(x_{kl})\in X$ için $\sup_{k,l\ge1}|x_{kl}|<\infty$ dır. $(X,\|\cdot\|)$ bulanık normlu lineer uzay olsun, buradan yola çıkarak çift indisli $L(X)$ uzayını aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$L(X)=\left\{u=u_{kl}\in\omega_2 \,\middle|\, \sup_{k,l\in N}\|u_{kl}\|_\alpha^+<\infty\right\}.$$

Teorem 4.2.5. $(X,\|\cdot\|)$ bulanık normlu lineer uzay ve $f\in s^2(X)^*$ ve $\varphi\in L(X^*)$ olsun,

$$f(u)=\sum_{k,l}\varphi_{kl}(u_{kl})$$

ise $s^2(X)^*=L(X^*)$ dır.

İspat: $u\in s^2(X)$ olmak üzere

$$u=\sum_{k,l\in N\times N} I_{kl}u_{kl}$$

olduğu gösterilmişti. $f\in s^2(X)^*$ ise o zaman f fonksiyonu sürekli olduğundan

$$f(u)=\sum_{k,l\in N\times N}(f\circ I_{kl})(u_{kl})$$

elde edilir. φ fonksiyonu aşağıdaki belirtildiği şekilde,

$$\varphi: N\times N\to F^*,\ \varphi_{kl}=(f\circ I_{kl})$$

tanımlansın. φ için

$\|\varphi\|_\alpha^+ \leq \|f\|_\alpha^+ \odot \|I_{kl}\|_\alpha^+ \leq \|f\|_\alpha^+ < \infty$

$\|\varphi\|_\infty = sup\{\|\varphi\|_\alpha^+ : k, l \in N \times N\} \leq \|f\|_\alpha^+$

olduğu açıktır. Bu durumda $\varphi \in L(X^*)$ dır.

$$\|f(u)\|_\alpha^+ \leq \left\| \sum_{k,l \in N \times N} \varphi_{kl}(u_{kl}) \right\|_\alpha^+ \leq \sum_{k,l \in N \times N} \|\varphi_{kl}\|_\alpha^+ \odot \|u_{kl}\|_\alpha^+ \leq \|\varphi\|_\infty \odot \|u\|_\alpha^+$$

dir. Öyleyse

$\|f\|_\alpha^+ \leq \|\varphi\|_\infty \Rightarrow \|f\|_\alpha^+ \leq \|\varphi_{kl}\|_\alpha^+$

elde edilir. Bu durumda $\|\varphi\|_\infty = \|f\|_\alpha^+$ dır.

Diğer yandan $\varphi \in L(X^*)$ için $s^2(X)$ üzerinde f fonksiyonellerinin lineer kombinasyonu

$$f(u) = \sum_{k,l} \varphi_{kl}(u_{kl})$$

olarak yazılabilir ve $|f(u)| \leq \|\varphi\|_\infty \odot \|u\|_\alpha^+$ dır. $\forall\varphi \in L((F)^*)$ için, $T: s^2(X)^* \rightarrow L(X^*)$ olacak şekilde T lineer birebir fonksiyonları tanımlıdır. O halde $T_f = \varphi$ olur. $T: s^2(X)^* \rightarrow L(X^*)$ ye lineer izometridir.

Teorem 4.2.6. $s^2(X, f)^* = L(X^*)$ dır.

İspat: $s^2(X)^* = L(X^*)$ nin ispatına benzer şekilde modülüs fonksiyonunun özelliklerinden faydalanarak ispat yapılabilir.

4.3. Seviye Kümesi Cinsinden Bulanık Norm

Bu kısımda modülüs fonksiyonu yardımıyla tanımlanan Felbin tipinde çift indisli bulanık normu uzaylara yer verilecektir.

Tanım 4.3.1. $(X, \|\cdot\|)$ bulanık normlu lineer uzay ve (x_n), X de bir dizi olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $L\|x_n\| \preccurlyeq \eta$

olacak şekilde $\eta \in F(\mathbb{R})$ varsa bu diziye bulanık sınırlıdır denir [45].

Tanım 4.3.2. $(X, \|\cdot\|)$ bulanık normlu lineer uzay olsun. (x_n), X de bir dizi olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\eta \in F(R)$ için $\alpha -$ *seviye* kümesi cinsinden sınırlı uzay l_∞,

$$\left[\|x_n\|_{l\infty}\right]_\alpha = \left[\sup_n \|x_n\|_\alpha^- , \inf\{\eta_\alpha^+ : \|x_n\| \preccurlyeq \eta, \eta \in F(\mathbb{R})\}\right]$$

aralığı ile ifade edilir. $\left[\|x_n\|_{l\infty}\right]_\alpha = \left[\|x_n\|_{l_\infty}^-, \|x_n\|_{l_\infty}^+\right]$ dır. $\left[\|x_n\|_{l\infty}\right]_\alpha$ $(X, \| \, . \, \|)$ bulanık normlu lineer uzayında iç içe geçmiş interval değerli bir bulanık sayı belirtir [45].

Önerme 4.3.1. $\alpha \in [0,1]$ olmak üzere $[a_\alpha, b_\alpha]$ boştan farklı aralıklar olmak üzere, $\alpha_k \to \alpha$ $(0,1]$ aralığında artan bir dizi olsun. Aşağıdakiler sağlanırsa,

i) $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2$ için $\left[a_{\alpha_1}, b_{\alpha_1}\right] \supseteq \left[a_{\alpha_2}, b_{\alpha_2}\right]$

ii) $\left[\lim_{k\to\infty} a_{\alpha_k}, \lim_{k\to\infty} b_{\alpha_k}\right] = [a_\alpha, b_\alpha]$

$[a_\alpha, b_\alpha]$ aralığına bir bulanık sayı denir.

Tanım 4.3.3. $(X, \|\cdot\|)$ bulanık normlu lineer uzay olsun $s_{l_\infty}^2(f)$kümesi $(X, \|\cdot\|)$ modülüs fonksiyonu yardımıyla tanımlanan bütün sınırlı dizilerin uzayı olsun. $s_{l_\infty}^2(f)$ nin bileşenlerine göre toplama ve skalerle çarpma işlemelerine göre lineer olduğu açıktır. $s_{l_\infty}^2(f)$ kümesi her k, l için

$$\left[s_{l_\infty}^2(f)\right]_\alpha = \left[\left\{\sup_{k,l} f(\|u_{kl}\|_\alpha^-)\right\}, \inf\{\vartheta_\alpha^+ : f(\|u_{kl}\|) \preccurlyeq \vartheta\}\right] \tag{4.9}$$

şeklinde yazabilir. Buradan açıkça

$$\left\{s_{l_\infty}^2(f)\right\}_\alpha^- = \sup_{k,l} f(\|u_{kl}\|_\alpha^-) \tag{4.10}$$

ve

$$\left\{s_{l_\infty}^2(f)\right\}_\alpha^+ = \inf\{\vartheta_\alpha^+ : f(\|u_{kl}\|) \preccurlyeq \vartheta, \forall k, l\} \tag{4.11}$$

dır.

Teorem 4.3.1. $(X, \|\cdot\|)$ bulanık normlu lineer uzay ve (u_{kl}) Xde sınırlı bir dizi olsun. $s_{l_\infty}^2(f)$ bir bulanık sayı belirtir.

İspat: $\alpha \in (0,1]$ aralığında tanımlı olsun. $\forall k, l$ için öyle bir ϑ bulanık sayısı vardır ki $f(\|u_{kl}\|) \preccurlyeq \vartheta$ dır. Daha sonra,

$$\sup_{k,l} f(\|u_{kl}\|_\alpha^-) \leq \vartheta_\alpha^- \leq \vartheta_\alpha^+$$

yazılabilir. Burada

$$\sup_{k,l} f(\|u_{kl}\|_\alpha^-) \leq \inf\{\vartheta_\alpha^+ : f(\|u_{kl}\|) \preccurlyeq \vartheta, \forall k, l\}$$

elde edilir. Yani $\left[s_{l\infty}^2(f)\right]_\alpha = \left[\left\{s_{l\infty}^2(f)\right\}_\alpha^-, \left\{s_{l\infty}^2(f)\right\}_\alpha^+\right]$ aralığı $\alpha \in (0,1]$ için boştan farklıdır. Şimdi bu aralığın yukarıda verilen bulanık sayı şartlarını sağladığını gösterelim.

i) $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2$ için

$$\sup_{k,l} f\left(\|u_{kl}\|_{\alpha_1}^-\right) \leq \sup_{k,l} f\left(\|u_{kl}\|_{\alpha_2}^-\right)$$

dır. $\vartheta_{\alpha_2}^+ \leq \vartheta_{\alpha_1}^+$ olduğundan,

$$inf\left\{\vartheta_{\alpha_2}^+ : f(\|u_{kl}\|) \preccurlyeq \vartheta, \forall k,l\right\} \leq inf\left\{\vartheta_{\alpha_1}^+ : f(\|u_{kl}\|) \preccurlyeq \vartheta, \forall k,l\right\}$$

yazılabilir. Yani $\left[s_{l\infty}^2(f)\right]_{\alpha_2} \subseteq \left[s_{l\infty}^2(f)\right]_{\alpha_1}$ elde edilir ve ilk şart sağlanmış olur.

ii) (α_n) dizisi (0,1] aralığında artan olsun ve ayrıca α ya yakınsasın. (α_n) dizisi$\alpha_n \leq \alpha_{n+1} \leq \alpha$ şeklinde yazılabilir. Buradan,

$$\sup_n \sup_{k,l} f\left(\|u_{kl}\|_{\alpha_n}^-\right) \leq \sup_{k,l} f(\|u_{kl}\|_\alpha^-) \tag{4.12}$$

yazabiliriz. $\varepsilon > 0$ ve $k_0, l_0 \in N$ vardır öyle ki

$$\left\|u_{k_0 l_0}\right\|_{\alpha_n}^- > \sup_{k,l} \|u_{kl}\|_{\alpha_n}^- - \varepsilon \tag{4.13}$$

bulanık sayıların tanımından $\left\|u_{k_0 l_0}\right\|_{\alpha_n}^- = \lim_n \left\|u_{k_0 l_0}\right\|_\alpha^-$ olduğunu biliyoruz. Her iki tarafın f modülüs fonksiyonu ile bileşkesini alınırsa f sürekli olduğundan,

$$f\left(\left\|u_{k_0 l_0}\right\|_{\alpha_n}^-\right) = \lim_n \left(f\left\|u_{k_0 l_0}\right\|_\alpha^-\right)$$

yazabiliriz. Öyle bir n_0 sayısı vardır ki,

$$f\left(\left\|u_{k_0 l_0}\right\|_{\alpha_{n_0}}^-\right) + \varepsilon > f\left(\left\|u_{k_0 l_0}\right\|_\alpha^-\right) \tag{4.14}$$

vardır. (4.12), (4.13), (4.14) bağlantılarını göz önüne alırsak,

$$\sup_n \sup_{k,l} f\left(\|u_{kl}\|_{\alpha_n}^-\right) + 2\varepsilon \geq f\left(\left\|u_{k_0 l_0}\right\|_{\alpha_{n_0}}^-\right) + 2\varepsilon \geq \sup_{k,l} f(\|u_{kl}\|_\alpha^-) \tag{4.15}$$

elde edilir. $\varepsilon \to 0$ için (4.15) den

$$\sup_n \sup_{k,l} f\left(\|u_{kl}\|_{\alpha_n}^-\right) \geq \sup_{k,l} f(\|u_{kl}\|_\alpha^-)$$

elde edilir. Diğer taraftan [47] Teorem 5.4 ten faydalanarak

$$\lim_n inf\left\{\vartheta_{\alpha_1}^+ : f(\|u_{kl}\|) \preccurlyeq \vartheta, \forall k,l\right\} = inf\left\{\vartheta_{\alpha_1}^+ : f(\|u_{kl}\|) \preccurlyeq \vartheta, \forall k,l\right\}$$

dır. $\left[s_{l\infty}^2(f)\right]_\alpha$ bulanık sayı olma şartlarını sağlar.

Sonuç 4.3.1. $(X, \|\cdot\|)$ bulanık normlu lineer uzay olsun ve $(u_{kl}) \in \left[s_{l\infty}^2(f)\right]_\alpha$ olsun. $\vartheta \succcurlyeq 0$ ve $\vartheta \in F(R)$ olsun. Bu durumda bu küme S_ϑ ile ifade edilsin ve

$$S_\vartheta = inf\left\{\vartheta_{\alpha_1}^+ : f(\|u_{kl}\|) \preccurlyeq \vartheta, \vartheta \succcurlyeq 0, \forall k,l\right\}$$

$s^2_{l_\infty}(f)$ sayısı $f(\|u_{kl}\|) \preccurlyeq \vartheta$ için S_ϑ nin en küçük elemanıdır.

İspat: $\vartheta \in S_\vartheta$ ve $\alpha \in (0,1]$ için

$$\left\{s^2_{l_\infty}(f)\right\}^+_\alpha = inf\{\vartheta^+_\alpha : f(\|u_{kl}\|) \preccurlyeq \vartheta, \vartheta \succcurlyeq 0, \forall k,l\} \leq \vartheta^+_\alpha$$

ve

$$\left\{s^2_{l_\infty}(f)\right\}^-_\alpha = \sup_{k,l} f(\|u_{kl}\|^-_\alpha) \leq \vartheta^-_\alpha$$

dır. Ayrıca $f(\|u_{kl}\|^+_\alpha) \leq \vartheta^+_\alpha$ olduğundan,

$$\left\{s^2_{l_\infty}(f)\right\}^+_\alpha = inf\{\vartheta^+_\alpha : f(\|u_{kl}\|) \preccurlyeq \vartheta, \vartheta \succcurlyeq 0, \forall k,l\}$$

ve

$$\left\{s^2_{l_\infty}(f)\right\}^-_\alpha = \sup_{k,l} f(\|u_{kl}\|^-_\alpha)$$

dır. Buradan $s^2_{l_\infty}(f) \in S_\vartheta$ ve $f\left(\|u_{kl}\|_{s^2_{l_\infty}\alpha}\right) \preccurlyeq \vartheta$ elde edilir.

Teorem 4.3.2. $s^2_{l_\infty}(f)$ uzayı bulanık normlu uzaydır.

İspat: Şimdi $s^2_{l_\infty}(f)$ uzayının tanımlanan bulanık normun dört şartını sağladığını gösterelim.

i) $(u_{kl}) \in s^2_{l_\infty}(f)$ ve $(u_{kl}) \neq 0$ olsun. $k_0, l_0 \in N$ ve $\alpha \in (0,1]$ için $u_{k_0 l_0} \neq 0$ vardır ve

$$0 < \inf_{0<\delta\leq 1} f\left(\|u_{k_0 l_0}\|^-_\delta\right) \leq f\left(\|u_{k_0 l_0}\|^-_\alpha\right) \leq \sup_{k,l} f(\|u_{kl}\|^-_\alpha)$$

dır. Buradan

$$0 < \inf_{0<\delta\leq 1} f\left(\|u_{k_0 l_0}\|^-_\delta\right) < \inf_{0<\alpha\leq 1} \sup_{k,l} f(\|u_{kl}\|^-_\alpha) = \inf_{0<\alpha\leq 1} f(\|u_{kl}\|^-_\alpha)$$

elde edilir.

ii) $(u_{kl}) \in s^2_{l_\infty}(f)$ ve $(u_{kl}) = 0$ için $s^2_{l_\infty}(f) = \bar{0}$ olur. Diğer taraftan $s^2_{l_\infty}(f) = \bar{0}$ olsun. $\alpha \in (0,1]$ için

$$\left\{s^2_{l_\infty}(f)\right\}^-_\alpha = \left\{s^2_{l_\infty}(f)\right\}^+_\alpha = 0$$

olur ve $\sup_{kl} f(\|u_{kl}\|^-_\alpha) = 0$ elde edilir. $u_{kl} = 0$ ve $\forall k,l$ için bu durum geçerlidir.

iii) $t \neq 0 \in R$ ve $(u_{kl}) \in s^2_{l_\infty}(f)$ olsun. $\alpha \in (0,1]$ için

$$\left[s^2_{l_\infty}(f)\right]_\alpha = \left[\left\{\sup_{k,l} f(\|tu_{kl}\|^-_\alpha)\right\}, inf\{\vartheta^+_\alpha : f(\|tu_{kl}\|) \preccurlyeq \vartheta, \forall k,l\}\right]$$

yazabiliriz. Modülüs fonksiyonunun özelliklerinden biliyoruz ki $[u_{kl}]$ değeri u_{kl} sayısının tam kısmını belirtmek üzere $0 < \pi < 1$ için

$$f(\|u_{kl}\|) < \left(1 + \left[\frac{\|u_{kl}\|}{\pi}\right]\right) f(1) \leq 2f(1)\frac{\|u_{kl}\|}{\pi}$$

dır. Buradan hareketle $\beta > 0$ ve $t \neq 0 \in R$ için $2f(1)\frac{t}{\pi} \leq \beta$ için

$$\left[s^2_{l_\infty}\big(f(tu_{kl})\big)\right]_\alpha = \left[\left\{\sup_{k,l} f(\|tu_{kl}\|^-_\alpha)\right\}, inf\{\vartheta^+_\alpha : f(\|tu_{kl}\|) \preccurlyeq \vartheta, \forall k,l\}\right]$$
$$= \left[\left\{|\beta|\sup_{k,l} f(\|u_{kl}\|^-_\alpha)\right\}, inf\left\{\vartheta^+_\alpha : f(\|u_{kl}\|) \preccurlyeq \frac{\vartheta}{|\beta|}, \forall k,l\right\}\right]$$

yazabilir. $\rho = \frac{\vartheta}{\beta}$ alınırsa,

$$= \left[\left\{|\beta|\sup_{k,l} f(\|u_{kl}\|^-_\alpha)\right\}, inf\{|\beta|\vartheta^+_\alpha : f(\|u_{kl}\|) \preccurlyeq \rho, \forall k,l\}\right]$$
$$= \left[|\beta|\left\{\sup_{k,l} f(\|u_{kl}\|^-_\alpha)\right\}, |\beta| inf\{\vartheta^+_\alpha : f(\|u_{kl}\|) \preccurlyeq \rho, \forall k,l\}\right]$$
$$= |\beta|\left[s^2_{l_\infty}\big(f(tu_{kl})\big)\right]_\alpha$$

olur.

iv) $\alpha \in (0,1]$ için

$$\left\{s^2_{l_\infty}\big(f(u_{kl}+v_{kl})\big)\right\}^-_\alpha = \sup_{k,l} f(\|u_{kl}+v_{kl}\|^-_\alpha)$$

şeklinde ifade edilebilir. Modülüs fonksiyonun özelliklerinden

$$\sup_{k,l} f(\|u_{kl}+v_{kl}\|^-_\alpha) \le \sup_{k,l}\big(f(\|u_{kl}\|^-_\alpha) + f(\|v_{kl}\|^-_\alpha)\big)$$
$$\le \left\{s^2_{l_\infty}\big(f(u_{kl})\big)\right\}^-_\alpha + \left\{s^2_{l_\infty}\big(f(v_{kl})\big)\right\}^-_\alpha$$

elde edilir. $\varepsilon > 0$ ve $f(\|u_{kl}\|) \preccurlyeq \vartheta$ ve $f(\|v_{kl}\|) \preccurlyeq \rho$ olcak şekilde ϑ, ρ bulanık sayıları varsa

$$\sup_{k,l} f(\|u_{kl}\|^+_\alpha) + \varepsilon > \vartheta^+_\alpha$$

ve

$$\sup_{k,l} f(\|v_{kl}\|^+_\alpha) + \varepsilon > \rho^+_\alpha$$

yazılır. $(X, \|.\|)$ bulanık normlu lineer uzayı için $\|x+y\| \preccurlyeq \|x\| \oplus \|y\|$ olduğundan

$$\sup_{k,l} f(\|u_{kl}+v_{kl}\|_\alpha) \preccurlyeq \sup_{k,l} f(\|u_{kl}\|_\alpha) \oplus \sup_{k,l} f(\|v_{kl}\|_\alpha) \preccurlyeq \vartheta \oplus \rho$$

dır. Buradan

$$\sup_{k,l} f(\|u_{kl}+v_{kl}\|^+_\alpha) \le \vartheta^+_\alpha + \rho^+_\alpha < \sup_{k,l} f(\|u_{kl}\|^+_\alpha) + \sup_{k,l} f(\|v_{kl}\|^+_\alpha) + 2\varepsilon$$

elde edilir.

$$\sup_{k,l} f(\|u_{kl}+v_{kl}\|^+_\alpha) \le \sup_{k,l} f(\|u_{kl}\|^+_\alpha) + \sup_{k,l} f(\|v_{kl}\|^+_\alpha)$$

dır. Böylece $s^2_{l_\infty}(f)$ uzayı bulanık normlu uzaydır.

Uyarı 4.3.1. Reel değerli (x_{kl}) çift indisli dizinin Pringsheim anlamında Cauchy olması için $\varepsilon > 0$ a bağlı öyle sayıları $n_0 \le k,l,m,n$ vardır ki $k_{n_0} = k_{n_0}(\varepsilon)$ ve $l_{n_0} = l_{n_0}(\varepsilon)$ olduğunda

$$\lim_{k,l,m,n\to\infty} \|x_{kl} - x_{mn}\|^+_\alpha < \varepsilon$$

dır. Burada $\alpha \in (0,1]$ ve ayrıca $(X, \|\cdot\|)$ bulanık normlu lineer uzayının tam olması için Cauchy dizilerinin yakınsak olması gerekir.

Teorem 4.3.3. $(X, \|\cdot\|)$ bulanık normlu lineer uzay ise $s_{l_\infty}^2(f)$ uzayı tamdır.

İspat: $u^i = \left(u_{kl}^{(i)}\right)$ bir Cauchy dizisi olsun. $\forall k, l$ ve $i \to \infty$ için $u_{kl}^{(i)} \to r_{kl}$ olacak şekilde r_{kl} vardır. Daha farklı şekilde ifade edersek, $\varepsilon > 0$ a bağlı öyle bir $n_0 \leq i, j$ vardır öyle ki

$$\left\| u_{kl}^{(i)} - u_{kl}^{(j)} \right\|_{l_\infty \alpha}^{+} < \varepsilon \tag{4.16}$$

dır. (4.16) dan $s_{l_\infty}^2(f)$ ve $i, j \geq n_0$ için

$$inf\left\{\vartheta_\alpha^+ : f\left(\left\| u_{kl}^{(i)} - u_{kl}^{(j)} \right\|\right) \preccurlyeq \vartheta, \forall k, l\right\} < \varepsilon \tag{4.17}$$

yazılabilir. $i, j \geq n_0$ ve ϑ_0 bulanık sayısı için (4.17) den

$$\vartheta_{0\alpha}^+ < inf\left\{\vartheta_\alpha^+ : f\left(\left\| u_{kl}^{(i)} - u_{kl}^{(j)} \right\|\right) \preccurlyeq \vartheta, \forall k, l\right\} + \varepsilon < 2\varepsilon \tag{4.18}$$

yazılabilir. (4.18) den

$$f\left(\left\| u_{kl}^{(i)} - u_{kl}^{(j)} \right\|\right) \preccurlyeq \vartheta_0, \forall k, l \tag{4.19}$$

elde edilir. (4.19) eşitsizliği üzerinden supremum alınırsa

$$\sup_{k,l} f\left(\left\| u_{kl}^{(i)} - u_{kl}^{(j)} \right\|_\alpha^+\right) < \vartheta_{0\alpha}^+ < 2\varepsilon \tag{4.20}$$

elde edilir. Ayrıca (4.20) dan $i, j \geq n_0$ için

$$\sup_{k,l} f\left(\left\| u_{kl}^{(i)} - u_{kl}^{(j)} \right\|_\alpha^+\right) < 2\varepsilon \tag{4.21}$$

olur. $k, l = 1$ olarak alınırsa (4.21) den,

$$f\left(\left\| u_{11}^{(i)} - u_{11}^{(j)} \right\|_\alpha^+\right) < 2\varepsilon$$

elde edilir. $\left(u_{11}^{(i)}\right)$ dizisi $s_{l_\infty}^2(f)$ de bir Cauchy dizisidir. $(X, \|\cdot\|)$ tam olduğundan $(r_{11}) \in X$ vardır ve $i \to \infty$ için $u_{11}^{(i)} \to r_{11}$ dır.

Şimdi $R = (r_{kl})$, $u^i = \left(u_{kl}^{(i)}\right)$ ve $i \to \infty$ için $u^i \longrightarrow_{s_{l_\infty}^2} R$ olduğunu kabul edelim. $n_0 \leq i, j$, $\alpha \in (0,1]$ olsun. $\varepsilon > 0$ a bağlı öyle bir $n_0 \leq i, j$ ve $\vartheta_0$vardır öyle ki

$$\vartheta_{0\alpha}^+ < 2\varepsilon$$

ve

$$f\left(\left\| u_{kl}^{(i)} - u_{kl}^{(j)} \right\|\right) \preccurlyeq \vartheta_0, \forall k, l \tag{4.22}$$

dır. $k, l \in N$ sabitleri için $j_0 \in N$, $j_0 \geq n_0$ ve $j \geq j_0$ olarak alınırsa (4.22) den,

$$f\left(\left\| u_{kl}^{(j)} - r_{kl}\right\|\right) < \varepsilon \tag{4.23}$$

vardır. $i \geq n_0$ için (4.23) den,

$$\begin{aligned} f\left(\left\| u_{kl}^{(i)} - r_{kl}\right\|\right) &\preccurlyeq f\left(\left\| u_{kl}^{(i)} - u_{kl}^{(j_0)}\right\|\right) \oplus f\left(\left\| u_{kl}^{(j_0)} - r_{kl}\right\|\right) \\ &\preccurlyeq \vartheta_0 \oplus \tilde{\varepsilon} \end{aligned} \tag{4.24}$$

olur. $i \geq i_0$ ve $\forall j$ için (4.24) den

$$f\left(\left\| u_{kl}^{(i)} - r_{kl}\right\|\right) \preccurlyeq \vartheta_0 \oplus \tilde{\varepsilon}$$

ve

$$\left\|u^i - R\right\|_{s_{l_\infty}^2 \alpha}^{+} = inf\left\{\vartheta_\alpha^+ : f\left(\left\| u_{kl}^{(i)} - r_{kl}\right\|\right) \preccurlyeq \vartheta, \forall k, l\right\} \leq \vartheta_{0\alpha}^+ + \varepsilon < 3\varepsilon$$

elde edilir. Yani $R \in s_{l_\infty}^2$ elde edilir. ϑ_0 bulanık sayısı ve $i \geq i_0$ ve $\forall j$ için

$$f\left(\left\| u_{kl}^{(i)} - r_{kl}\right\|\right) \preccurlyeq \vartheta_0 \oplus \tilde{\varepsilon}$$

elde edilmiş olur. $i \geq i_0$ ler sabitlenirse $u^i \in s_{l_\infty}^2$ olduğu için ϑ_1 bulanık sayısı vardır öyle ki,

$$f\left(\left\| u_{kl}^{(i)} - r_{kl}\right\|\right) \preccurlyeq \vartheta_1 \tag{4.25}$$

dır. Ayrıca bütün j ler için (4.25) den

$$f(\| r_{kl} \|) \preccurlyeq f\left(\left\| u_{kl}^{(i)} - r_{kl}\right\|\right) \oplus f\left(\left\| u_{kl}^{(i)}\right\|\right) \preccurlyeq \vartheta_0 \oplus \tilde{\varepsilon} \oplus \vartheta_1$$

yazılabilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. $u_{kl}^{(i)} \to r_{kl}$ dır.

Tanım 4.3.3. $(X, \|\cdot\|)$ bulanık normlu lineer uzay olsun. $s_{c_0}^2$, (u_{kl}) dizisi tanımlı bulanık norma göre $u_{kl} \to 0$ şeklinde sıfıra yakınsayan uzayını belirtsin ve bu uzay $s_{l_\infty}^2$ ile aynı bulanık norm ve işlemlerle tanımlı olsun. Bu durumda $\forall u_{kl} \in s_{c_0}^2$ için

$$\|u_{kl}\|_{s_{l_\infty}^2} = \|u_{kl}\|_{s_{c_0}^2}$$

dır.

Sonuç 4.3.2. $(X, \|\cdot\|)$ bulanık normlu lineer ve tam uzay olsun. O halde $s_{c_0}^2$ uzayı da tamdır.

İspat: $s_{c_0}^2$ uzayının $s_{l_\infty}^2$ nin kapalı bir alt uzayını göstermemiz yeteri olacaktır.

$u^i = \left(u_{kl}^{(i)}\right) \in s_{c_0}^2$ dizisi $R = (r_{kl})$ ye yakınsak olsun. $\alpha \in (0,1]$, $\varepsilon > 0$ ve $i \geq i_0$ için

$$\left\|u^i - R\right\|_{s_{l_\infty}^2 \alpha}^{+} = inf\left\{\vartheta_\alpha^+ : f\left(\left\| u_{kl}^{(i)} - r_{kl}\right\|\right) \preccurlyeq \vartheta, \forall k, l\right\} < \varepsilon$$

olur. Sabit $i \geq i_0$ için ϑ_0 bulanık sayısı vardır öyle ki

$$\vartheta_{0\alpha}^+ < inf\left\{\vartheta_\alpha^+ : f\left(\left\| u_{kl}^{(i)} - r_{kl}\right\|\right) \preccurlyeq \vartheta, \forall k, l\right\} + \varepsilon < 2\varepsilon$$

ve

$f\left(\left\| u_{kl}^{(i)} - r_{kl}\right\|\right) \preccurlyeq \vartheta_0 \,, \forall k,l$

dır. $u^i \in s_{c_0}^2$ için $i_0 \in N$ vardır ve $i \geq i_0$ için

$f\left(\left\|u_{kl}^{(i)}\right\|_{\alpha}^{+}\right) < \varepsilon$

olur. Eğer $i \geq i_0$ ise

$f(\|r_{kl}\|_{\alpha}^{+}) < f\left(\left\| u_{kl}^{(i)} - r_{kl}\right\|_{\alpha}^{+}\right) + f\left(\left\| u_{kl}^{(i)}\right\|_{\alpha}^{+}\right) < \vartheta_{0\alpha}^{+} + \varepsilon < 3\varepsilon$

elde edilir.

Örnek 4.3.1. $\mathbb{R}$ reel sayılar üzerinde tanımlı bulanık normlu uzayı $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ le gösterelim.

$\|u\|(t) = \begin{cases} 1, & t = |u| \\ 0, & diğer\ durumlarda \end{cases}$

ise $\alpha \in (0,1]$ için

$[\|u\|]_{\alpha} = [|u|, |u|]$

dır.

İspat: $(1,0,1,0, \dots) \in l_{\infty}(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ olsun. $\alpha \in (0,1]$ için

$\|(1,0,1,0, \dots)\|_{l_{\infty}\alpha}^{-} = \sup_{n, b_n \in \{0,1\}} \|b_n\|_{\alpha}^{-} = 1$

ve

$\|(1,0,1,0, \dots)\|_{l_{\infty}\alpha}^{+} = inf\{\vartheta_{\alpha}^{+} : \|b_n\| \preccurlyeq \vartheta, b_n \in \{0,1\}, \forall k,l\} = 1$

elde edilir ve $\|(1,0,1,0, \dots)\|_{l_{\infty}} = \tilde{1}$ dır.

$\forall u_{kl} \in s_{c_0}^2$ için $\|u_{kl}\|_{s_{l_{\infty}}^2} = \|u_{kl}\|_{s_{c_0}^2}$ olduğundan, $\left\{\frac{1}{n} : n \in N\right\} \in c_0(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ olsun. $\alpha \in (0,1]$ için

$\left\|\left(\frac{1}{n}\right)\right\|_{c_0\alpha}^{-} = \sup_{n} \left\|\frac{1}{n}\right\|_{\alpha}^{-} = 1$

ve

$\left\|\left(\frac{1}{n}\right)\right\|_{c_0\alpha}^{+} = inf\left\{\vartheta_{\alpha}^{+} : \left\|\frac{1}{n}\right\| \preccurlyeq \vartheta, \forall k,l\right\} = 1$

dir ve $\left\|\left(\frac{1}{n}\right)\right\|_{c_0} = \tilde{1}$ olur.

Tanım 4.3.4. $\mathbb{R}$ üzerinde $\|z\|^{\sim} : \mathbb{R} \to [0,1]$ de tanımlı norm,

$\|z\|^{\sim} = \begin{cases} 1, & t = |z| \\ 0, & t \neq |z| \end{cases}$

tanımlı olsun. $\|.\|^{\sim}$ normu $\mathbb{R}$ de bir bulanık normdur ve $\alpha -$ *seviye* kümesi türünden tanımı $\alpha \in (0,1]$ için

$[\|z\|^{\sim}]_{\alpha} = [|z|, |z|]$

dır.

Tanım 4.3.5. $(X, \|\cdot\|)$ bulanık normlu lineer uzay olsun. $(X, \|\cdot\|)$ dan $(\mathbb{R}, \|\cdot\|^{\sim})$ tanımlı kuvvetli bulanık sınırlı operatörlere $(X, \|\cdot\|)$ nin kuvvetli bulanık sınırlı fonksiyoneller denir ve bu fonksiyonellerin kümesi $(X, \|\cdot\|)^*$ ile gösterilir [45]. $g \in (X, \|\cdot\|)^*$ olsun. $(X, \|\cdot\|)^*$ nın elemanları

$$\left\{\left[\sup_{x\neq 0}\frac{|g(x)|}{\|x\|_\alpha^+}, \sup_{x\neq 0}\frac{|g(x)|}{\|x\|_\alpha^-}\right], \alpha \in (0,1]\right\}$$

şeklinde verilen bir aralıktır .Burada aralığın ilk terimi monoton artan ve ikinci terimi monoton azalan olup iç içe geçmiş kapalı ve sınırlı aralıklar olup $\|g\|^*$ aralık değerli bulanık sayı belirtir. Buna ek olarak $\|\cdot\|^*$ aslında $(X, \|\cdot\|)^*$ da tanımlı bulanık bir normdur. Ayrıca $(X, \|\cdot\|)^*$ uzayına $(X, \|\cdot\|)$ nin kuvvetli duali denir.

Teorem 4.3.4. $(X, \|\cdot\|)$ bulanık normlu lineer uzay olsun. Eğer $g \in \left(s_{c_0}^2\right)^*$ ise $g_{kl} \in \left(s_{c_0}^2\right)^*$ olacak şekilde sadece bir tane dizi vardır öyle ki $\alpha \in (0,1)$ ve $\forall u_{kl} \in s_{c_0}^2$ için

i) $g\big((u_{kl})\big) = \sum_{kl=1}^{\infty} g_{kl}(u_{kl})$

ii) $\sum_{kl=1}^{\infty}\|g_{kl}\|_{s_{c_0}^2\alpha}^{*+} = \|g_{kl}\|_{s_{c_0}^2\alpha}^{*+}$

iii) $\sum_{kl=1}^{\infty}\|g_{kl}\|_{s_{c_0}^2\alpha}^{*-} = \|g_{kl}\|_{s_{c_0}^2\alpha}^{*-}$

İspat:

i) $g \in \left(s_{c_0}^2\right)^*$olsun. Daha önce $u \in s^2(X)$ için

$$u = \sum_{k,l} I_{kl}u_{kl}$$

şeklinde yazılabildiği gösterilmişti. Buradan $k, l \in N$ için

$$g_{kl}(u) = g\big((0, \dots, u_{kl}, 0, \dots)\big)$$

$k, l.$ elemanı u olan g_{kl} fonksiyoneli yazılabilir. $K > 0$, $\alpha \in (0,1)$ ve $\forall u_{kl} \in s_{c_0}^2$ için,

$$\left|g\big((u_{kl})\big)\right| \leq K\|u_{kl}\|_{s_{c_0}^2\alpha}^-$$

vardır. $\alpha \in (0,1)$, ve $\forall k, l \in N$ için

$$\begin{aligned} |g_{kl}(u)| = \left|g\big((0, \dots, u_{kl}, 0, \dots)\big)\right| \quad &\leq K\|(0, \dots, u_{kl}, 0, \dots)\|_{s_{c_0}^2\alpha}^- \\ &= K \sup_{kl}\|u_{kl}\|_\alpha^- \\ &= K\|u_{kl}\|_\alpha^- \end{aligned}$$

olduğundan $g_{kl} \in \left(s_{c_0}^2\right)^*$ elde edilir. $u_{kl} \in s_{c_0}^2$ ve için $k, l, n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k,l}^{k_n,l_n} g_{kl}(u_{kl}) = g\left(\big(u_{11}, \dots, u_{k_n l_n}, 0, \dots\big)\right)$$

yazabiliriz. $k_n l_n \to \infty$ için $g\left((u_{11},\dots,u_{k_n l_n},0,\dots)\right) \to g((u_{kl}))$ olduğu açıktır. $\alpha \in (0,1)$ için

$$\begin{aligned}\left|g((u_{kl})) - g\left((u_{11},\dots,u_{k_n l_n},0,\dots)\right)\right| &= \left|g\left((0,\dots,0,u_{k_{n+1}l_{n+1}},\dots)\right)\right| \\ &\leq K \sup_{k,l<k_n,l_n} \|u_{kl}\|_\alpha^-\end{aligned}$$

dir ve $k_n l_n \to \infty$ için $\sup_{k,l<k_n,l_n} \|u_{kl}\|_\alpha^- \to 0$ dur. Yani $\alpha \in (0,1)$ ve $g \in \left(s_{c_0}^2\right)^*$ olmak üzere kabul edelim ki $g_{kl}, f_{kl} \in (X,\|.\|)^*$ ve $u_{kl} \in s_{c_0}^2$ için

$$g((u_{kl})) = \sum_{k,l=1}^{\infty} g_{kl}(u_{kl}) = \sum_{k,l=1}^{\infty} f_{kl}(u_{kl})$$

olsun. $k,l \in N$ için $g_{kl}(u) = g\left((0,\dots,u_{kl},0,\dots)\right)$ olduğundan birebir baktığımızda

$g_{kl}(u_{kl}) = f_{kl}(u_{kl})$

dır. Dolayısıyla $g((u_{kl})) = \sum_{kl=1}^{\infty} g_{kl}(u_{kl})$ gösterimi bir tanedir.

ii) $\alpha \in (0,1)$ ve $\forall u_{kl} \in s_{c_0}^2$ için,

$$\begin{aligned}\left|g((u_{kl}))\right| &= \left|\sum_{k,l=1}^{\infty} g_{kl}(u_{kl})\right| \leq \sum_{k,l=1}^{\infty} |g_{kl}(u_{kl})| \\ &\leq \sum_{k,l=1}^{\infty} \|g_{kl}\|_\alpha^{+*} \|u_{kl}\|_\alpha^- \leq \sum_{k,l=1}^{\infty} \|g_{kl}\|_\alpha^{+*} \sup_{k,l} \|u_{kl}\|_\alpha^-\end{aligned}$$

yazılabilir. $\forall u_{kl} \in s_{c_0}^2$ olduğundan

$$\left|g((u_{kl}))\right| \leq \sum_{k,l=1}^{\infty} \|g_{kl}\|_\alpha^{+*} \|u_{kl}\|_{s_{c_0}^2 \alpha}^-$$

dır. Bu $\|g\|_\alpha^{+*} \leq \sum_{kl=1}^{\infty} \|g_{kl}\|_\alpha^{+*}$ olduğunu gösterir. $\|g\|_\alpha^{+*} \geq \sum_{kl=1}^{\infty} \|g_{kl}\|_\alpha^{+*}$ olduğunu göstermek için $k,l \in \mathbb{N}$ için $B(X,\|.\|_\alpha^-)$ de $i = 1,2,\dots$ için $\left(u_{kl}^{i,\alpha}\right)$ dizisi mevcuttur. $\|\,.\,\|_\alpha^{+*}$ tanımından,

$\lim_{i\to\infty} \left|g_{kl}\left(u_{kl}^{i,\alpha}\right)\right| = \|g_{kl}\|_\alpha^{+*}$

vardır. $i \to \infty$ iken $g_{kl}\left(u_{kl}^{i,\alpha}\right)$ monoton artar. Dolayısıyla $x_{ni} = \sum_{k,l=1}^{n} g_{kl}\left(u_{kl}^{i,\alpha}\right)$ toplamı da monoton artandır. $n \to \infty$ için $y_{ni} = x_{ni} - x_{n-1,i}$ farkı da monoton artar.

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{i\to\infty} \sum_{k,l=1}^{n} g_{kl}\left(u_{kl}^{i,\alpha}\right) = \lim_{i\to\infty} \lim_{n\to\infty} \sum_{k,l=1}^{n} g_{kl}\left(u_{kl}^{i,\alpha}\right)$$

dır. Önerme 1.4.1. den faydalanarak

$$\begin{aligned}\sum_{k,l=1}^{\infty}\|g_{kl}\|_{\alpha}^{+*} &= \sum_{k,l=1}^{\infty}\lim_{i\to\infty}\left|g_{kl}\left(u_{kl}^{i,\alpha}\right)\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\lim_{i\to\infty}\sum_{k,l=1}^{n} g_{kl}\left(u_{kl}^{i,\alpha}\right) \\ &= \lim_{i\to\infty}\lim_{n\to\infty}\sum_{k,l=1}^{n} g_{kl}\left(u_{kl}^{i,\alpha}\right) \\ &= \lim_{i\to\infty}\lim_{n\to\infty} g\left(\left(u_{11}^{i,\alpha},\dots,u_{k_n l_n}^{i,\alpha},0,\dots\right)\right) \\ &\leq \|g_{kl}\|_{\alpha}^{+*}\end{aligned}$$

elde edilir. $\sum_{kl=1}^{\infty}\|g_{kl}\|_{s_{c_0}^2\alpha}^{+*} = \|g_{kl}\|_{s_{c_0}^2\alpha}^{+*}$ dır.

iii) $\alpha \in (0,1)$ ve $\forall u_{kl} \in s_{c_0}^2$ için,

$$\begin{aligned}\left|g\left((u_{kl})\right)\right| &= \left|\sum_{k,l=1}^{\infty} g_{kl}(u_{kl})\right| \leq \sum_{k,l=1}^{\infty}\left|g_{kl}(u_{kl})\right| \\ &\leq \sum_{k,l=1}^{\infty}\|g_{kl}\|_{\alpha}^{-*}\|u_{kl}\|_{\alpha}^{+} \leq \sum_{k,l=1}^{\infty}\|g_{kl}\|_{\alpha}^{-*}\sup_{k,l}\|u_{kl}\|_{\alpha}^{+}\end{aligned}$$

dır. $\sup_{kl}\|u_{kl}\|_{\alpha}^{+} \leq nf\{\vartheta_{\alpha}^{+}: \|u_{kl}\| \preccurlyeq \vartheta, \forall k,l\}$ olduğundan,

$$\left|g\left((u_{kl})\right)\right| \leq \sum_{k,l=1}^{\infty}\|g_{kl}\|_{\alpha}^{-*} inf\{\vartheta_{\alpha}^{+}: \|u_{kl}\| \preccurlyeq \vartheta, \forall k,l\}$$

olur. $(X,\|\cdot\|)^*$ uzayının $\left\{\left[\sup_{x\neq 0}\frac{|g(x)|}{\|x\|_{\alpha}^{+}}, \sup_{x\neq 0}\frac{|g(x)|}{\|x\|_{\alpha}^{-}}\right], \alpha \in (0,1]\right\}$ tanımından faydalanarak,

$$\|g_{kl}\|_{\alpha}^{-*} = \frac{|g(u_{kl})|}{\|u_{kl}\|_{s_{c_0}^2\alpha}^{+}} = \frac{|g(u_{kl})|}{inf\{\vartheta_{\alpha}^{+}: \|u_{kl}\| \preccurlyeq \vartheta, \forall k,l\}} \leq \sum_{k,l=1}^{\infty}\|g_{kl}\|_{\alpha}^{-*}$$

olur. $\|g_{kl}\|_{\alpha}^{-*} \leq \sum_{kl=1}^{\infty}\|g_{kl}\|_{\alpha}^{-*}$ dır. $\|g_{kl}\|_{\alpha}^{-*} \geq \sum_{kl=1}^{\infty}\|g_{kl}\|_{\alpha}^{-*}$ göstermek için, $l \in N$ için $B(X,\|\cdot\|_{\alpha}^{+})$ de $i = 1,2,\dots$ için $\left(u_{kl}^{i,\alpha}\right)$ dizisi mevcuttur. $\|\cdot\|_{\alpha}^{-*}$ tanımından,

$\lim_{i\to\infty}\left|g_{kl}\left(u_{kl}^{i,\alpha}\right)\right| = \|g_{kl}\|_{\alpha}^{-*}$

vardır. $i \to \infty$ iken $g_{kl}\left(u_{kl}^{i,\alpha}\right)$ monoton artar. Dolayısıyla $x_{ni} = \sum_{k,l=1}^{n} g_{kl}\left(u_{kl}^{i,\alpha}\right)$ toplamı da monoton artandır. $n \to \infty$ giderken $y_{ni} = x_{ni} - x_{n-1,i}$ farkı da monoton artar.

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{i\to\infty}\sum_{k,l=1}^{n} g_{kl}\left(u_{kl}^{i,\alpha}\right) = \lim_{i\to\infty}\lim_{n\to\infty}\sum_{k,l=1}^{n} g_{kl}\left(u_{kl}^{i,\alpha}\right)$$

dır. Yani,

$$
\begin{aligned}
\sum_{k,l=1}^{\infty}\|g_{kl}\|_{\alpha}^{-*} &= \sum_{k,l=1}^{\infty}\lim_{i\to\infty}\left|g_{kl}\left(u_{kl}^{i,\alpha}\right)\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\lim_{i\to\infty}\sum_{k,l=1}^{n} g_{kl}\left(u_{kl}^{i,\alpha}\right) \\
&= \lim_{i\to\infty}\lim_{n\to\infty}\sum_{k,l=1}^{n} g_{kl}\left(u_{kl}^{i,\alpha}\right) \\
&= \lim_{i\to\infty}\lim_{n\to\infty} g\left(\left(u_{11}^{i,\alpha},\dots,u_{k_n l_n,}^{i,\alpha},0,\dots\right)\right) \\
&\leq \|g_{kl}\|_{\alpha}^{-*}
\end{aligned}
$$

olur. $\sum_{kl=1}^{\infty}\|g_{kl}\|_{s_{c_0}^2\alpha}^{-*} = \|g_{kl}\|_{s_{c_0}^2\alpha}^{-*}$ dır.

BÖLÜM 5

DUALLER VE MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ

Bu bölümde $s(f, \lambda, p)$ dizi uzayının Köhte Toeplitz dualleri incelenecektir.

5.1. $s(f, \lambda, p)$ Dizi Uzayının Köhte Toeplitz Dualleri

Tanım 5.1.1. $(A, \|\cdot\|)$ bir reel Banach uzayı olsun. $l_1(a)$ mutlak toplanabilir dizlerin kümesi $\{a\}_{i\in N}$ için

$$l_1(a) = \left\{\{a_i\}_{i\in N}: a_i \in X, i = 1,2, \dots \ \sum_{i=1}^{\infty}\|a_i\| < \infty\right\}$$

dır. Burada $(l_1(x), \|\cdot\|)$ Banach uzayı ve $\|\cdot\|_1$ normu $\|\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty}\|a_i\|$ şeklindedir. Maddox E kompleks sayılarda bir küme olmak üzere g paranormu ile paranormlu (E, g) uzayın sürekli duallerinin varlığını olduğunu göstermiştir [51]. Bu uzayının genelleştirilmiş Köhte- Toeplitz duali $E^{\dagger}$ ile gösterilirse,

$$E^{\dagger} = \left\{a: \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \,, \qquad her\ x \in E\ için\ yakınsaktır\right\}$$

dir [50]. Ayrıca $1 < inf p_{kl} < p_{kl} < sup p_{kl} < \infty$ ve $\frac{1}{p_{kl}} + \frac{1}{q_{kl}} = 1$ için l_p uzayı

$$l_p(x) = \left\{\{x_i\}_{i\in N}: x_i \in X, i = 1,2, \dots \ \sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^{p_{kl}} < \infty\right\}$$

dır. Maddox $M = sup\, p_{kl}$ olmak üzere $g(x) = \left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^{p_{kl}}\right)^{1/M}$ paranormu ile $l_p{}^{*}(x)$ dualinin elemanlarının

$$\sum_{i=1} a_i x_i \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^{q_{kl}} N^{\frac{-q_{kl}}{p_{kl}}} + N\right) g(x)$$

formunda olduğunu göstermiştir. Burada N tam sayısı $sup p_{kl}$ e bağlı olmak üzere $g(x) \leq 1$ dir [50].

Tanım 5.1.2. $u_{kl} \in \omega_2(F)$ ve $x \in \mathbb{R}(I)$ olmak üzere bulanık fonksiyonlar serisi

$$\sum_{k,l=1,1}^{\infty} u_{kl}(x)$$

olsun. Eğer $\varepsilon > 0$ a bağlı öyle bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$, $m_0 = m_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır ki $n_1 > n > n_0$ ve $m_1 > m > m_0$ için

$$d\left(\sum_{k=n+1,l=m+1}^{n_1,m_1} u_{kl}(x),\theta\right) < \varepsilon$$

varsa $\mathbb{R}(I)$ üzerinde düzgün yakınsaktır denir.

Tanım 5.1.3. $\mu_1(f),\mu_1(f) \subset \omega_2(F)$ ve $A = (a_{mnkl})$ sınırsız bir matris ve $m,n,k,l \in N$ olmak üzere $A: \mu_1(f) \to \mu_1(f)$ ye bir dönüşüm olsun. Her $u_{kl} \in \mu_1(f)$ için $Au = \{(Au)_{mn}\}$ ve $Au \in \mu_2(f)$ vardır öyle ki,

$$(Au)_{mn} = \sum_{k,l}^{\infty} a_{mnkl}u_{kl}$$

dır.

$(s(f,\lambda,p),h)$ uzayının $h(u)$ paranormu ile paranormlu uzay olduğunu daha önce göstermiştik. Şimdi genelleştirilmiş Köhte- Toeplitz duallerinden ilki olan α dualini gösterelim.

Teorem 5.1.1. $s(f,\lambda,p)$ uzayının α duali $u_{kl} \in s(f,\lambda,p),\ L > 1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ için,

$$\big(s(f,\lambda,p)\big)^{\alpha} = \left\{u_{kl} \in \omega_2(F)\ \left|\sum_{k,l=1}^{\infty} \left[\left|\frac{1}{\lambda_{kl}}\right| f_{kl}\big(d(u_{kl},\bar{0})\big)\right]^{q_{kl}} L^{-q_{kl}} < \infty\right.\right\}$$

dır.

İspat: $l_1 f$ mutlak toplanabilir uzayları tanımlayarak başlayalım,

$$l_1 f = \left\{u_{kl} \in \omega_2(F)\ \left|\sum_{k,l=1}^{\infty} d(u_{kl}v_{kl},\bar{0}) < \infty\right.\right\}.$$

Buradan sonra gösterimde kolaylık için $p_{kl} = p$ ve $q_{kl} = q$ olarak yazılacaktır. $u,v \in s(f,\lambda,p),\ L > 1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ için Maddox eşitsizliğinden faydalanarak

$d(uv,\bar{0}) \le d(u,\bar{0})d(v,\bar{0}) \le L(d(u,\bar{0})^q L^{-q} + d(v,\bar{0})^p)$

elde edilir [40]. $u = u_{kl} \in s(f,\lambda,p)$ kabul edilsin. Bir bulanık sayının mutlak değeri

$max\{|u^-|,|u^+|\} \le d(u,\bar{0})$

dır. Şimdi daha sonra kullanmak üzere $Y_p^2(f)$ uzayı

$$Y_p^2(f) = \left\{u_{kl} \in \omega_2(F)\ \left|\sum_{k,l=1}^{\infty} \left[\left|\frac{1}{\lambda_{kl}}\right| f_{kl}\big(d(u_{kl},\bar{0})\big)\right]^{q_{kl}} L^{-q_{kl}} < \infty, L > 1\right.\right\}$$

şeklinde tanımlansın. $Y_p^2(f)$ uzayının $s(f,\lambda,p)$ uzayının α duali olduğunu gösterelim.

$u_{kl} \in s(f,\lambda,p)$ ve $v_{kl} \in Y_p^2(f)$ için,

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} d(uv,\bar{0}) = \sum_{k,l=1}^{\infty} d(u_{kl}v_{kl},\bar{0})$$
$$\leq \sum_{k,l=1}^{\infty} d(u_{kl},\bar{0})d(v_{kl},\bar{0})$$

dır. Son eşitsizlikte f modülüs fonksiyonu ile bileşke alınırsa,

$$\leq \sum_{k,l=1}^{\infty} f_{kl}\big(d(u_{kl},\bar{0})d(v_{kl},\bar{0})\big)$$
$$\leq \sum_{k,l=1}^{\infty} f_{kl}\big(d(u_{kl},\bar{0})\big)f_{kl}\big(d(v_{kl},\bar{0})\big)$$
$$\leq \sum_{k,l=1}^{\infty} f_{kl}\big(d(u_{kl},\bar{0})\big)\sum_{k,l=1}^{\infty} f_{kl}\big(d(v_{kl},\bar{0})\big)$$

edilir. Buradan

$$\leq \sum_{k,l=1}^{\infty} \left|\tfrac{1}{\lambda_{kl}}\right| f_{kl}\big(d(u_{kl},\bar{0})\big)\sum_{k,l=1}^{\infty} |\lambda_{kl}| f_{kl}\big(d(v_{kl},\bar{0})\big)$$

yazılabilir. Maddox eşitsizliğinden,

$$\leq L\left(\left[\sum_{k,l=1}^{\infty} \left|\tfrac{1}{\lambda_{kl}}\right| f_{kl}\big(d(u_{kl},\bar{0})\big)\right]^{q} L^{-q} + \left[\sum_{k,l=1}^{\infty} |\lambda_{kl}| f_{kl}\big(d(v_{kl},\bar{0})\big)\right]^{p}\right) \leq \infty$$

elde edilir. $u_{kl} \in \big(s(f,\lambda,p)\big)^{\alpha}$ ve $Y_p^2(f) \subseteq \big(s(f,\lambda,p)\big)^{\alpha}$ dır.

Diğer taraftan $Y_p^2(f) \supseteq \big(s(f,\lambda,p)\big)^{\alpha}$ olduğunu göstermek için $v_{kl} \in s(f,\lambda,p)$ ve $u_{kl} \notin Y_p^2(f)$ olsun. $L > 1$ için

$$\left[\sum_{k,l=1}^{\infty} \left|\tfrac{1}{\lambda_{kl}}\right| f_{kl}\big(d(u_{kl},\bar{0})\big)\right]^{q} L^{-q} = \infty$$

olur. $\gamma = 0,1,2,...$için $\{0 < n(0) < \cdots < n(\gamma) < \cdots\}$ ve $\{0 < m(0) < \cdots < m(\gamma) < \cdots\}$ dizileri pozitif artan diziler için [52],

$$Y_{\gamma} = \left[\sum_{k=n(\gamma),l=m(\gamma)}^{n(\gamma+1)-1,m(\gamma+1)-1} \left|\tfrac{1}{\lambda_{kl}}\right| f_{kl}\big(d(u_{kl},\bar{0})\big)\right]^{q} (\gamma+2)^{-\frac{q}{p}} > 1$$

dizisini yazalım. Benzer şekilde (v_{kl}) dizisinin bir alt dizisi olan $\big(v_{k_t l_t}\big)$ yi $n(\gamma) < k_t < n(\gamma+1)$ ve $m(\gamma) < l_t < m(\gamma+1)$ ve $k_{t,}l_t \neq k,l$ olduğunda $v_{kl} = 0$ olacak şekilde tanılayalım,

$$\big(v_{k_t l_t}\big) = \left|\frac{1}{\lambda_{k_t l_t}}\right|^{q} \big(\beta_{k_t l_t}\big)^{q} \frac{1}{f_{kl}\big(d(u_{kl},\bar{0})\big)} (\gamma+2)^{-q} Y_{\gamma}^{-1}.$$

Burada bazı $M > 0$ ler ve $\beta_{k_t l_t} = f_{kl}\left(d(v_{kl}, \bar{0})\right)$ için

$$\frac{\beta_{k_t l_t}}{f_{kl}\left(d(u_{kl}, \bar{0})\right)} < M$$

yazılabilir. Tanımlanan diziler göz önüne alındığında,

$$\sum_{k=n(\gamma),l=m(\gamma)}^{n(\gamma+1)-1,m(\gamma+1)-1} \left(d(u_{kl}v_{kl}, \bar{0})\right) \leq \sum_{k=n(\gamma),l=m(\gamma)}^{n(\gamma+1)-1,m(\gamma+1)-1} \left|\frac{1}{\lambda_{kl}}\right|^q \left(\beta_{k_t l_t}\right)^q (\gamma+2)^{-q} Y_\gamma^{\ -1}$$

$$\leq \sum_{k=n(\gamma),l=m(\gamma)}^{n(\gamma+1)-1,m(\gamma+1)-1} (\gamma+2)^{-1}$$

elde edilir ve son eşitsizlikteki seri ıraksak olur. Şimdi $v_{kl} \in s(f, \lambda, p)$ için son eşitsizliği tekrardan yazarsak,

$$\sum_{k=n(\gamma),l=m(\gamma)}^{n(\gamma+1)-1,m(\gamma+1)-1} \left|\lambda_{kl} f_{kl}\left(d(v_{kl}, \bar{0})\right)\right|^p$$

$$\leq \sum_{k=n(\gamma),l=m(\gamma)}^{n(\gamma+1)-1,m(\gamma+1)-1} \left(M \left|\frac{1}{\lambda_{kl}}\right|^{q-1} \left(\left|f_{kl}\left(d(u_{kl}, \bar{0})\right)\right|\right)^{q-1} (\gamma+2)^{-q} Y_\gamma^{\ -1}\right)^p$$

eşitsizliği elde edilir. Eşitsizliğin sağ tarafından

$$\leq M^p \sum_{k=n(\gamma),l=m(\gamma)}^{n(\gamma+1)-1,m(\gamma+1)-1} \left|\frac{1}{\lambda_{kl}}\right|^{(q-1)p} \left(\left|f_{kl}\left(d(u_{kl}, \bar{0})\right)\right|\right)^{(q-1)p} (\gamma+2)^{-qp} Y_\gamma^{\ -p}$$

$$\leq (\gamma+2)^{-2} Y_\gamma^{\ -1} M^p \sum_{k=n(\gamma),l=m(\gamma)}^{n(\gamma+1)-1,m(\gamma+1)-1} \left(\left|\frac{1}{\lambda_{kl}}\right| f_{kl}\left(d(u_{kl}, \bar{0})\right)\right)^q (\gamma+2)^{\frac{-q}{p}} Y_\gamma^{\ (1-p)} (\gamma+2)^{(1-p)}$$

$$\leq M^p \sum_{k=n(\gamma),l=m(\gamma)}^{n(\gamma+1)-1,m(\gamma+1)-1} (\gamma+2)^{-2} Y_\gamma^{\ -1} Y_\gamma (\gamma+2)^{\frac{-q}{p}} Y_\gamma^{\ (1-p)} (\gamma+2)^{(1-p)}$$

elde edilir. Buradan,

$$\leq M^p \sum_{k=n(\gamma),l=m(\gamma)}^{n(\gamma+1)-1,m(\gamma+1)-1} \frac{(\gamma+2)^{-2}}{(\gamma+2)^{\frac{p}{q}} Y_\gamma^{\ \frac{p}{q}}} \leq M^p \sum_{k=n(\gamma),l=m(\gamma)}^{n(\gamma+1)-1,m(\gamma+1)-1} (\gamma+2)^{-2} \leq \infty$$

elde edilir. Yani

$$\sum_{k,l}^{\infty} \left[|\lambda_{kl}| f_{kl}\left(d(v_{kl}, \bar{0})\right)\right]^p \leq M^p \sum_{k,l}^{\infty} (\gamma+2)^{-2} < \infty$$

ve $v_{kl} \in s(f,\lambda,p)$ olduğu anlamına gelir. $u_{kl} \notin Y_p^2(f)$ kabulü çelişki oluşturur. $\sum_{k,l=1}^{\infty} d(uv,\bar{0})$ ifadesinin yakınsak olması için $u_{kl} \in Y_p^2(f)$ olmalıdır. Yani $u_{kl} \in \left(s(f,\lambda,p)\right)^{\alpha}$ dır. Dolayısıyla $\left(s(f,\lambda,p)\right)^{\alpha} \subseteq Y_p^2(f)$ elde edilir. $\left(s(f,\lambda,p)\right)^{\alpha} = Y_p^2(f)$ dır.

Teorem 5.1.2. $s(f,\lambda,p)$ uzayının β duali $u_{kl} \in s(f,\lambda,p)$, $L > 1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ için,

$$l_q f = \left\{ u_{kl} \in \omega_2(F) \;\middle|\; \sum_{k,l=1}^{\infty} \left|\frac{1}{\lambda_{kl}}\right| f_{kl}\left(d(u_{kl},\bar{0})\right)^{q} L^{-q} < \infty \right\}$$

dır.

İspat: $u_{kl} \in s(f,\lambda,p)$ ve $v_{kl} \in l_q f$ olsun. $\left(d(u_{kl},\bar{0})\right)^p$ yakınsak olduğu için $d(u_{kl},\bar{0}) \in s(f,\lambda,p)$ dır. Benzer şekilde $v_{kl} \in l_q f$ için $d(v_{kl},\bar{0}) \in l_q f$ yakınsaktır.

$d(u_{kl}v_{kl},\bar{0}) \leq d(u_{kl},\bar{0})d(v_{kl},\bar{0})$

olduğundan,

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} d(u_{kl}v_{kl},\bar{0}) \leq \sum_{k,l=1}^{\infty} \left[|\lambda_{kl}| f_{kl}\left(d(u_{kl},\bar{0})\right)\right]^p \sum_{k,l=1}^{\infty} \left[\left|\frac{1}{\lambda_{kl}}\right| f_{kl}\left(d(v_{kl},\bar{0})\right)\right]^q L^{-q} < \infty$$

ifadesi de yakınsaktır. Bu ise $l_q f \subseteq \left(s(f,\lambda,p)\right)^{\beta}$ olduğunu gösterir.

Diğer taraftan $v_{kl} \in \left(s(f,\lambda,p)\right)^{\beta}$ olsun ve $\left(u_{kl}^i\right) \in s(f,\lambda,p)$ dizisi,

$$u_{kl}^i = \begin{cases} \left[|\lambda_{i_k i_l}| f_{i_k i_l}\left(d\left(v_{i_k i_l},\bar{0}\right)\right)\right]^{q-1}, & i_k, i_l = k,l \\ 0, & diğer\ durumlarda \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Buradan gerekli işlemler yapıldığında,

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} d\left(u_{kl}^i v_{kl},\bar{0}\right) \leq \sum_{k,l=1}^{\infty} \left[|\lambda_{i_k i_l}| f_{i_k i_l}\left(d\left(v_{i_k i_l},\bar{0}\right)\right)\right]^{q-1} \sum_{k,l=1}^{\infty} \left[|\lambda_{kl}| f_{kl}\left(d(v_{kl},\bar{0})\right)\right] < \sum_{k,l=1}^{\infty} \left[|\lambda_{kl}| f_{kl}\left(d(v_{kl},\bar{0})\right)\right]^q$$

elde edilir. $v_{kl} \in l_q f$ olduğu açıktır ve $\left(s(f,\lambda,p)\right)^{\beta} \subseteq l_q f$ dır. Burdan $\left(s(f,\lambda,p)\right)^{\beta} = l_q f$ olur.

Teorem 5.1.3. $s(f,\lambda,p)$ uzayının γ duali $\left(s(f,\lambda,p)\right)^{\alpha}$ dır.

İspat: Daha önceden $s(f,\lambda,p)$ uzayının solid olduğunu ispatlanmıştı. Bir dizi uzayı eğer solid ise α ve γ dualleri aynı olacağından $s(f,\lambda,p)$ uzayının γ duali $\left(s(f,\lambda,p)\right)^{\alpha}$ dır.

Teorem 5.1.4. $A = (a_{mnkl})$ sınırsız bulanık sayıların bir matrisi olmak üzere $m,n,k,l \in N$, $L > 1$ ve $1 < p < \infty, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ için

$$\sum_{k,l=1}^{\infty}\left[\left|\frac{1}{\lambda_{kl}}\right|f_{kl}\left(d((Au)_{mn},\bar{0})\right)\right]^{-q}L^{-q}<\infty$$

şartı sağlanıyorsa $A\in(s(f,\lambda,p):l_{\infty})$ dır.

İspat: $u_{kl}\in s(f,\lambda,p)$ olsun. Gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
d((Au)_{mn},\bar{0}) &= d\left(\sum_{k,l=1}^{\infty}a_{mnkl}u_{kl},\bar{0}\right)\\
&\leq \sum_{k,l=1}^{\infty}d(a_{mnkl}u_{kl},\bar{0})\\
&\leq \sum_{k,l=1}^{\infty}f_{kl}\left(d(a_{mnkl}u_{kl},\bar{0})\right)\\
&\leq \sum_{k,l=1}^{\infty}\left|\lambda_{kl}\frac{1}{\lambda_{kl}}\right|f_{kl}\left(d(a_{mnkl}u_{kl},\bar{0})\right)\\
&\leq \sum_{k,l=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\lambda_{kl}}\right|f_{kl}\left(d(a_{mnkl},\bar{0})\right)|\lambda_{kl}|f_{kl}\left(d(u_{kl},\bar{0})\right)\\
&\leq \sum_{k,l=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\lambda_{kl}}\right|f_{kl}\left(d(a_{mnkl},\bar{0})\right)\sum_{k,l=1}^{\infty}|\lambda_{kl}|f_{kl}\left(d(u_{kl},\bar{0})\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Maddox eşitsizliğinden faydalanarak $L>1$ için

$$L\left[\left(\sum_{k,l=1}^{\infty}\left[\left|\frac{1}{\lambda_{kl}}\right|f_{kl}\left(d(a_{mnkl},\bar{0})\right)\right]\right)^{q}L^{-q}+\left(\sum_{k,l=1}^{\infty}\left[|\lambda_{kl}|f_{kl}\left(d(u_{kl},\bar{0})\right)\right]\right)^{p}\right]<\infty$$

olur ve bu $A\in(s(f,\lambda,p):l_{\infty})$ olduğu anlamına gelir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

BÖLÜM 6

MODÜLÜS FONKSİYONU İLE OLUŞTURULAN BULANIK ÇİFT İNDİSLİ FARK DİZİ UZAYLARI

Bu bölümde $s_{\gamma}^{2}[f,p]$ modülüs fonksiyonu yardımıyla tanımlanmış bulanık çift indisli fark dizi uzayı tanımlanmış ve topolojik özelliklerine yer verilecektir.

Tanım 6.1.1. $Q = c_0, c, l_\infty$ olmak üzere reel değerli bulanık çifti indisli fark dizi uzayı $k,l \in N$ için,

$$Q(\Delta) = \{(x_{kl}) | (\Delta x_{kl} = x_{kl} - x_{k+1,l} - x_{k,l+1} + x_{k+1,l+1}) \in Q\}$$

dir [48,49].

Tanım 6.1.2. (x_{kl}) nin çift indisli reel değerli dizilerde,

i) (k,l) nin varyasyonları için k veya l sabit olduğunda (x_{kl}) nin sınırlı,

ii) $\sum\sum|\Delta x_{kl}|$ serisi yakınsak ise,

$\sum\sum|\Delta x_{kl}|$ ye (x_{kl}) nin bir sınırlı varyasyondur denir [23].

Tanım 6.1.3. $x = (x_{kl})$,$y = (y_{kl})$, $\in \omega_2(F)$ sınırlı ve pozitif sayıların bir dizisi ve $p \in \mathbb{R}$ olsun. Modülüs fonksiyonun kullanarak yeni bir bulanık çift indisli dizi tanımlansın. Sırasıyla p-toplanabilir s_{γ}^{2}, $s_{c_0}^{2}, s_{c}^{2}$, $s_{l_\infty}^{2}$ sınırlı varyasyon uzayları aşağıdaki şekildedir.

$$s_{\gamma}^{2}[f,p] = \left\{ x = (x_{kl}) \in \omega_2(F) \middle| \sum_{k,l=1}^{\infty} [f|d(\Delta x_{kl}, \bar{0})|]^{p} \in s_{\gamma}^{2} \right\},$$

$$s_{c_0}^{2}[f,p] = \left\{ x = (x_{kl}) \in \omega_2(F) \middle| \lim_{k_n,l_n \to \infty} \sum_{k,l=1}^{k_n,l_n} [f|d(\Delta x_{kl}, \bar{0})|]^{p} = 0 \right\},$$

$$s_{c}^{2}[f,p] = \left\{ x = (x_{kl}) \in \omega_2(F) \middle| \lim_{k_n,l_n \to \infty} \sum_{k,l=1}^{k_n,l_n} [f|d(\Delta x_{kl}, \bar{0}) - L|]^{p} \to 0, L > 0 \right\},$$

$$s_{c}^{2}[f,p] = \left\{ x = (x_{kl}) \in \omega_2(F) \middle| \sup_{k_n,l_n} \sum_{k,l=1}^{k_n,l_n} [f|d(\Delta x_{kl}, \bar{0})|]^{p} < \infty \right\}.$$

Teorem 6.1.1. $s_\gamma^2[f,p]$ dizi uzayı $\gamma = l_p (0 < p < \infty), c, c_0$ için yarı linerdir.

İspat: $s_\gamma^2[f,p] \subset \omega(F)$ olduğu için toplama ve skaler çarpma altında kapalı olduğu için modülüs fonksiyonu ve tanımlanan d metriğinin özelliğinden açıktır.

Teorem 6.1.2. $s_\gamma^2[f,p]$ uzayı $M = max\{1, \sup p\}$ olduğunda, $\gamma = l_\infty$ $(0 < p < \infty)$ olmak üzere $x, y \in s_\gamma^2[f,p]$ için,

$$\bar{D}(x,y) = \left\{\sup(f[d(x_{k1}, y_{k1})]^p) + \sup(f[d(x_{1l}, y_{1l})]^p) + \left[\sum_{k,l=1}^{\infty} f[d(\Delta x_{kl}, \bar{0})]\right]^p\right\}^{1/M}$$

metriği ile $\left(\bar{D}, s_\gamma^2[f,p]\right)$ ikilisi tam metrik uzay belirtir.

İspat: $\gamma = l_\infty$ için ispatlayalım. $\bar{D}$ nin $s_{l_\infty}^2[f,r]$ üzerinde bir metrik oluşturduğu açıktır bu durumda tamlığını göstermemiz yeterli olacaktır. $\left(x_{ij}^m\right) = (x^m) \in s_{l_\infty}^2$ bir Cauchy dizisi olsun. $m, n \longrightarrow \infty$ ve $\forall k, l, m, n \in N$ için

$$\begin{aligned}\bar{D}(x^m, x^n) &= (\sup(f[d({x_{k1}}^m, {x_{k1}}^n)]))^{p/M} + (\sup(f[d({x_{1l}}^m, {x_{1l}}^n)]))^{p/M} \\ &\quad + \left(\left(\sum_{k,l=1}^{\infty} f[d(\Delta {x_{kl}}^m, \Delta {x_{kl}}^n)]\right)\right)^{p/M} \to 0 \\ &\Rightarrow \left(\sum_{k,l=1}^{\infty} f[d(\Delta {x_{kl}}^m, \Delta {x_{kl}}^n)]\right) \to 0\end{aligned}$$

$p = (p_{kl}) \in R$ sınırlı ve reel sayıların pozitif bir dizisi olduğu ve f modülüs fonksiyonu olduğundan, $\forall k, l \in N$ ve $x = (x_{kl}) \in \omega_2(f)$ için $(\sup(f[d({x_{k1}}^m, {x_{k1}}^n)]))^{p/M} \to 0$ ve $(\sup(f[d({x_{1l}}^m, {x_{1l}}^n)]))^{p/M} \to 0$ dır. Buradan $d({x_{k1}}^m, {x_{k1}}^n) \to 0$ ve $d({x_{1l}}^m, {x_{1l}}^n) \to 0$ olduğu görülür. $m, n \geq n_0$ için öyle bir $\varepsilon > 0$ vardır ki, $d({x_{k1}}^m, {x_{k1}}^n) < \varepsilon$ ve $d({x_{1l}}^m, {x_{1l}}^n) < \varepsilon$ olur. $({x_{k1}}^m)$ dizisi $R(I)$ da bir Cauchy dizisidir. $({x_{k1}}^m)$ bir Cauchy dizisi olduğu için d metriği ile yakınsaktır. Benzer şekilde $({x_{1l}}^m)$ de bir Cauchy dizisidir ve d metriği ile yakınsaktır. Ayrıca $\forall k, l \in N$ için $\lim_{m\to\infty} {x_{k1}}^m = x_{k1}$ ve $\lim_{m\to\infty} {x_{1l}}^m = x_{1l}$ dır. Diğer taraftan metriğin ikinci kısmından

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} f[d(\Delta x_{kl}{}^{m}, \Delta x_{kl}{}^{n})] \to 0$$

dır. Dolayısıyla $m, n \to \infty$ için, $d(\Delta x_{kl}{}^{m}, \Delta x_{kl}{}^{n}) \to 0$ dır. Buradan $(\Delta x_{kl}{}^{m})$ Cauchy dizisi olur ve $\forall k, l \in \mathbb{N}$ için yakınsar.

Şimdi $k = l = 1$ için $(\Delta x_{11}{}^{m})$ fark dizisini ele alalım. $\lim_{m\to\infty} x_{22}{}^{m} = x_{22}$ olsun. Burada $(x_{11}{}^{m}), (x_{21}{}^{m}), ve\ (x_{12}{}^{m})$ yakınsak olduğundan$(x_{22}{}^{m})$ yakınsaktır. $(\Delta x_{12}{}^{m})$ dizisinde $(x_{12}{}^{m}), (x_{22}{}^{m}), ve\ (x_{13}{}^{m})$ yakınsak olduğundan$(x_{23}{}^{m})$ yakınsaktır. Yani $\forall k, l \in \mathbb{N}$ için $(x_{kl}{}^{m})$ yakınsaktır ve $\lim_{m\to\infty} x_{kl}{}^{m} = x_{kl}$ dır. Buradan hareketle $x_{kl}{}^{m} \to x_{kl}$ $\forall k, l \in \mathbb{N}\ ve\ m \to \infty$ olsun, yani $x_{kl}{}^{m} \to x_{kl} = x_{kl}$ olsun,

$$\begin{aligned}
\sum_{k,l=1}^{\infty} d(\Delta x_{kl}, \bar{0}) &\le \sum_{k,l=1}^{\infty} d(\Delta x_{kl}, \Delta x_{kl}{}^{m}) + \sum_{k,l=1}^{\infty} d(\Delta x_{kl}{}^{m}, \bar{0}) \\
f\left(\sum_{k,l=1}^{\infty} d(\Delta x_{kl}, \bar{0})\right) &\le f\left(\sum_{k,l=1}^{\infty} d(\Delta x_{kl}, \Delta x_{kl}{}^{m})\right) + f\left(\sum_{k,l=1}^{\infty} d(\Delta x_{kl}{}^{m}, \bar{0})\right) \\
\left[f\left(\sum_{k,l=1}^{\infty} d(\Delta x_{kl}, \bar{0})\right)\right]^{p} &\le \left[f\left(\sum_{k,l=1}^{\infty} d(\Delta x_{kl}, \Delta x_{kl}{}^{m})\right)\right]^{p} + \left[f\left(\sum_{k,l=1}^{\infty} d(\Delta x_{kl}{}^{m}, \bar{0})\right)\right]^{p} \\
&\le L(\varepsilon + K) \\
&< \infty
\end{aligned}$$

için $L = max(1, 2^{\sup p - 1})$ gibi sabit bir sayıdır. $x_{kl}^{m} \to x_{kl}$ dizisi $\bar{D}$ metriğine göre yakınsak ve $x_{ij}^{m} \in s_{l_\infty}^{2}$ olduğundan $s_\gamma^2[f, p]$ uzayı tam metrik uzaydır.

Teorem 6.1.3. $s_\gamma^2[f, r]$ dizi uzayı $\gamma = l_\infty, c, c_0$ için bir DK uzayıdır.

İspat: $P_{kl}: s_\gamma^2[f, p] \to \omega_2(F)$ ve $P_{kl}(x) = x_{kl},\ x \in s_\gamma^2[f, p]$ koordinat fonksiyonu $k, l \in N$ için süreklidir. $x_{kl}^{m} \in s_{l_\infty}^{2}$ bir dizi olmak üzere $x_{kl}^{m} \to \bar{0}$ dır. Bu durumda $\omega_2(F)$ uzayında da $x_{kl}^{m} \to \bar{0}$ dır. $x_{kl}^{m} \to \bar{0} \in s_\gamma^2[f, p]$ olsun. Öyleyse

$$(\sup(f[d(x_{k1}{}^{m}, x_{k1}{}^{n})]))^{p/M} + (\sup(f[d(x_{1l}{}^{m}, x_{1l}{}^{n})]))^{p/M} + \left(\left(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} f[d(\Delta x_{kl}{}^{m}, \Delta x_{kl}{}^{n})]\right)\right)^{p/M} \to 0$$

dır. $m \to \infty$ için,

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} d(\Delta x_{kl}{}^{m}, \bar{0}) \to 0$$

olur. Dolayısıyla $m \to \infty$ için, $d(\Delta x_{kl}{}^{m}, \bar{0}) \to 0$ elde edilir. $x_{kl}^{m} \to \bar{0} \in s_{\gamma}^{2}$ dir ve $s_{\gamma}^{2}[f,p]$ dizi uzayı bir DK uzayıdır.

Teorem: **6.1.4.** $s_{l_\infty}^{2}\,[f,p]$ uzayı hep zaman yakınsak değildir.

İspat: $x_{kl} \in s_{l_\infty}^{2}\,[f,p]$ için $f(x) = x$ ve $p_{kl} = 1$ olmak üzere $k \geq 2$ olduğunda ,

$x_{k1} = -\bar{1}$ ve $x_{1l} = \bar{1}$, $k \neq l$ için $x_{kl} = \bar{0}$ olacak şekilde

$$x_{kk}(t) = \begin{cases} kt+1, & -\dfrac{1}{k} \leq t \leq 0 \\ 1-kt, & 0 \leq t \leq \dfrac{1}{k} \\ \bar{0}, & diğer \end{cases}$$

bir (x_{kl}) dizisi tanımlansın. Buradan

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} \left[f[d(\Delta x_{kl}, \bar{0})]\right]^{p} = 2\sum_{k,l=1}^{\infty} \left[f\left[d\left(\frac{1}{k}, \bar{0}\right)\right]\right]^{p} + \sum_{k,l=1}^{\infty} \left[f\left[d\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}, \bar{0}\right)\right]\right]^{p} = \infty$$

olur ve $x_{kl} \in s_{l_\infty}^{2}\,[f,p]$ dizi ıraksaktır. $s_{l_\infty}^{2}\,[f,p]$ hep yakınsak değildir.

Teorem 6.1.5. $s_{l_\infty}^{2}\,[f,p]$ uzayı simetrik değildir.

İspat: (x_{kl}) çift indisli bulanık dizisi

$$x_{kk}(t) = \begin{cases} k^2 t+1, & -\dfrac{1}{k^2} \leq t \leq 0 \\ 1-k^2 t, & 0 \leq t \leq \dfrac{1}{k^2} \\ \bar{0}\,, & k\ çift\ ise \end{cases}$$

ve $l \geq 2$ olduğunda, $x_{1l} = \bar{1}$, $k \neq l$ için $x_{kl} = \bar{0}$ olsun. $f(x) = x$ ve $p_{kl} = 1$ olmak üzere;

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} < \infty$$

$x_{kl} \in s^2_{l_\infty}[f,p]$ dır. (y_{kl}) çift indisli bulanık dizisi $y_{kk} = x_{kk}$, $k \neq l$ için k çift ise $y_{kl} = \bar{0}$

k tek ise

$$y_{kl} = \begin{cases} \bar{1}, & l \text{ tek} \\ \bar{0}, & diğer \end{cases}$$

olacak şekilde (y_{kl}) dizisi (x_{kl}) in bir permütasyonu olsun. $f(x) = x$ ve $p_{kl} = 1$ olmak üzere;

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} \left[f[d(\Delta x_{kl}, \bar{0})]\right]^p = \infty$$

olduğundan $y_{kl} \notin s^2_\gamma[f,p]$ olduğundan simetrik değildir.

Teorem 6.1.6. $s^2_{l_\infty}[f,p]$ uzayı solid değildir.

İspat: $x_{kl} \in s^2_\gamma[f,p]$ ve $d(y_{kl}, \bar{0}) \leq d(x_{kl}, \bar{0})$ olsun. $y_{kl} \in s^2_\gamma[f,p]$ ise

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} \left[f[d(\Delta y_{kl}, \bar{0})]\right]^p < \infty$$

olmalıdır.(x_{kl}) çift indisli bulanık dizisi $k,l \geq 2$ olduğunda $x_{1l} = \bar{1}$, $x_{k1} = -\bar{1}$, $k \neq l \geq 2$ $x_{kl} = \bar{0}$ ve

$$x_{kk}(t) = \begin{cases} (1 + k^3 t), & -\dfrac{1}{k^3} \leq t \leq 0 \\ (1 - k^3 t), & 0 \leq t \leq \dfrac{1}{k^3} \\ 0, & diğer\ durumlarda \end{cases}$$

olsun. Buradan $f(x) = x$ ve $p_{kl} = 1$ için,

$$\begin{aligned} \sum_{k,l=1}^{\infty} \left[f[d(\Delta x_{kl}, \bar{0})]\right]^p &= 2 \sum_{k,l=1}^{\infty} d(x_{kk}, \bar{0}) + \left[\left(\sum_{k,l=1}^{\infty} d\left(x_{kk} + x_{k+1,l+1}, \bar{0}\right)\right)\right] \\ &= 2\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}\right) + 2\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} + \frac{1}{(k+1)^3}\right) < \infty \end{aligned}$$

olduğundan $x_{kl} \in s^2_\gamma[f,p]$ doğrudur. $d(y_{kl}, \bar{0}) \leq d(x_{kl}, \bar{0})$ için y_{kl} bulanık çift indisli dizisi,

$$y_{kl} = \begin{cases} y_{1l} = \bar{1}, & l\ \text{çift ise} \\ y_{k1} = -\bar{1}, & k\ \text{tek ise} \\ y_{kl} = \bar{0}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde seçilsin.

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} \left[f[d(\Delta y_{kl}, \bar{0})] \right]^p = \infty$$

olduğundan $y_{kl} \notin s_\gamma^2[f,p]$ dır. $s_\gamma^2[f,p]$ dizi uzayı solid değildir.

Teorem 6.1.7. s_γ^2 uzayı , f_1 ve f_2 modülüs fonksiyonları için aşağıdaki kapsamalar mevcuttur.

i) $s_\gamma^2(f_1) \cap s_\gamma^2(f_2) \subseteq s_\gamma^2(f_1 + f_2)$

ii) $s_\gamma^2(f_1) \subseteq s_\gamma^2(f_2 \circ f_1)$

iii) $f_1(t) \leq f_2(t)$, $t \in [0, \infty)$ için $s_\gamma^2(f_2) \subseteq s_\gamma^2(f_1)$

dır.

İspat:

i) $x = (x_{kl}), y = (y_{kl}) \in s_\gamma^2(f_1) \cap s_\gamma^2(f_2)$ olsun. $x_{k1}, y_{k1} \in s_\gamma^2(f_1) \cap s_\gamma^2(f_2)$ için
$(f_1 + f_2)\left(d(x_{k1}, y_{k1})\right)^p \leq f_1\left(d(x_{k1}, y_{k1})\right)^p + f_2\left(d(x_{k1}, y_{k1})\right)^p$
ve $x_{1l}, y_{1l} \in s_\gamma^2(f_1) \cap s_\gamma^2(f_2)$ için
$(f_1 + f_2)\left(d(x_{1l}, y_{1l})\right)^p \leq f_1\left(d(x_{1l}, y_{1l})\right)^p + f_2\left(d(x_{k1}, y_{k1})\right)^p$
dır. Benzer şekilde,

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} \left[(f_1 + f_2)[d(\Delta x_{kl}, \bar{0})] \right]^p \leq \sum_{k,l=1}^{\infty} \left[f_1[d(\Delta x_{kl}, \bar{0})] \right]^p + \sum_{k,l=1}^{\infty} \left[f_2[d(\Delta x_{kl}, \bar{0})] \right]^p$$

dır. Dolayısıyla $k, l \in N$olmak üzere $k, l \to \infty$ için $x = (x_{kl}) \in s_\gamma^2(f_1 + f_2)$ elde edilir.

ii) $x = (x_{kl}) \in s_\gamma^2(f_1)$ olsun. f_2 modülüs fonksiyonu sürekli olduğundan $\varepsilon > 0$ olacak şeklinde bir $f_2(\delta) = \varepsilon$ mevcuttur. Ayrıca $k_0, l_0 \in \mathbb{N}$ ve $k_0 > k$, $l_0 > l$ olacak şekilde,

$$f_1\big(d(x_{k1},y_{k1})\big)^p + f_1\big(d(x_{1l},y_{1l})\big)^p + \sum_{k,l=1}^{\infty}\big[f_1[d(\Delta x_{kl},\bar{0})]\big]^p < \delta$$

vardır. f_2 ile bileşkesini alırsak,

$$f_2 \circ \left(f_1\big(d(x_{k1},y_{k1})\big)^p + f_1\big(d(x_{1l},y_{1l})\big)^p + \sum_{k,l=1}^{\infty}\big[f_1[d(\Delta x_{kl},\bar{0})]\big]^p \right)$$
$$< f_2(\delta)$$

olur yani $x = (x_{kl}) \in s_\gamma^2(f_2 \circ f_1)$ elde edilir.

iii) $t \in [0,\infty)$ için $f_1(t) \leq f_2(t)$ olduğundan ,

$$f_1\big(d(x_{k1},y_{k1})\big)^p \leq f_2\big(d(x_{k1},y_{k1})\big)^p,$$
$$f_1(|d(x_{1l},y_{1l})|)^p \leq f_2(|d(x_{1l},y_{1l})|)^p$$
$$\sum_{k,l=1}^{\infty}\big[f_1[d(\Delta x_{kl},\bar{0})]\big]^p \leq \sum_{k,l=1}^{\infty}\big[f_2[d(\Delta x_{kl},\bar{0})]\big]^p$$

ifadeleri modülüs fonksiyonun özelliklerinden yazılır. Buradan $x = (x_{kl}) \in s_\gamma^2(f_2)$ ve $s_\gamma^2(f_2) \subseteq s_\gamma^2(f_1)$ elde edilir.

Teorem 6.1.8. $s_\gamma^2[f] \subseteq s_\gamma^2$ dır.

İspat: $x_{kl} \in s_\gamma^2[f]$ fakat $x_{kl} \notin s_\gamma^2$ olsun. Bu durumda $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\big[f[d(\Delta x_{kl},\bar{0})]\big]^p < \infty$ ve $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}[d(\Delta x_{kl},\bar{0})]^p = 0$ olur. (s_i,t_j) doğal sayılarda çift dizi olsun.

$$1 < \left|\sum_{i=s_i}^{s_i+1}\sum_{j=t_j}^{t_j+1} d\big(\Delta x_{ij},\bar{0}\big)\right| \Rightarrow f(1) < f\left|\sum_{i=s_i}^{s_i+1}\sum_{j=t_j}^{t_j+1} d\big(\Delta x_{ij},\bar{0}\big)\right|$$
$$= f(1) < \sum_{i=s_i}^{s_i+1}\sum_{j=t_j}^{t_j+1}\big[f\big|d\big(\Delta x_{ij},\bar{0}\big)\big|\big]$$

bu durumda

$$\sum_{k,l=1}^{\infty}\big[f[d(\Delta x_{kl},\bar{0})]\big]^p < \infty \Rightarrow i,j \to \infty \; için \sum_{i=s_i}^{s_i+1}\sum_{j=t_j}^{t_j+1} f\big[d\big(\Delta x_{ij},\bar{0}\big)\big] \to 0$$

elde edilir. Dolayısıyla $f(1)=0$ elde edilir. Bu bir çelişkidir. $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}[d(\Delta x_{kl},\bar{0})]^p=0$ olamaz. O halde $x_{kl}\notin s_\gamma^2$ kabulü yanlıştır. $s_\gamma^2[f]\subseteq s_\gamma^2$ kapsaması mevcuttur. Ayrıca $f(x)=x$ alınırsa $s_\gamma^2[f]=s_\gamma^2$ elde edilir.

Teorem 6.1.9. $s_\gamma^2[x,y,f,p]$ uzayının $\gamma=l_\infty,c,c_0$ için $\alpha-duali$ l_1^F uzayıdır.

İspat: İlk olarak l_1^F aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$l_1^F=\left\{(x_{kl})\ \in\omega_2(F):\sum_{k,l}D(x_{kl}y_{kl},\bar{0})<\infty\right\}$$

Bu durumda

$$\left(s_\gamma^2\right)^\alpha=\left\{(x_{kl})\ \in\omega_2(F):|x_{kl}y_{kl}|\in l_1^F,y\in s_\gamma^2\right\}$$

eşitliği elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}\sum_{k,l}D(x_{kl}y_{kl},\bar{0})\quad&=\sum_{k,l}D\Big(\sup f\big(d(x_{k1},y_{k1})\big)^p+\sup f\big(d(x_{1l},y_{1l})\big)^p\\&\quad+\left[\sum_{k,l=1}^{\infty}f[d(\Delta x_{kl}\Delta x_{kl},\bar{0})]\right]^p,\bar{0}\Big)\\&\le\sum_{k,l}D\Big(\sup f\big(d(x_{k1},y_{k1})\big)^p,\bar{0}\Big)+\sum_{k,l}D\Big(\sup f\big(d(x_{1l},y_{1l})\big)^p,\bar{0}\Big)\\&\quad+\sum_{k,l}D\left(\left[\sum_{k,l=1}^{\infty}f[d(\Delta x_{kl}\Delta x_{kl},\bar{0})]\right]^p,\bar{0}\right)\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi

$f(|d(x_{k1},y_{k1})|)^p<M_0$ ve $f(|d(x_{1l},y_{1l})|)^p<N_0$

olacak şekilde $M_0,N_0>0$ mevcut olsun ve

$$\sum_{k,l}D\Big(\sup f\big(d(x_{k1},y_{k1})\big)^p,\bar{0}\Big)<M$$

$$\sum_{k,l}D\Big(\sup f\big(d(x_{1l},y_{1l})\big)^p,\bar{0}\Big)<N$$

var olsun. Minkowski eşitsizliğinden ve modülüs fonksiyonun özelliklerinden

$$\begin{aligned}\sum_{k,l}D\left(\left[\sum_{k,l=1}^{\infty}[fd(\Delta x_{kl}\Delta y_{kl},\bar{0})]\right]^p,\bar{0}\right)\quad&\le\sum_{k,l}D\left(\left[\sum_{k,l=1}^{\infty}[fd(\Delta x_{kl},\bar{0})]\right]^p,\bar{0}\right)\\&\quad+\sum_{k,l}D\left(\left[\sum_{k,l=1}^{\infty}[fd(\Delta y_{kl},\bar{0})]\right]^p,\bar{0}\right)\end{aligned}$$

eşitsizlikleri yazılabilir. $d(\Delta x_{kl},\bar{0})<K_1$ ve $d(\Delta y_{kl},\bar{0})<L_1$ olacak şekilde $K_1,L_1>0$ var olsun. $K,L>0$ için,

$D(d(\Delta x_{kl},\bar{0}),\bar{0})\leq D(K_1,\bar{0})\leq K$

$D(d(\Delta y_{kl},\bar{0}),\bar{0})\leq D(L_1,\bar{0})\leq L$

dır. Ayrıca

$$\sum_{k,l}D\left(\left[\sum_{k,l=1}^{\infty}[fd(\Delta x_{kl},\bar{0})]\right]^{p},\bar{0}\right)\leq\left[\sum_{k,l=1}^{\infty}[fd(\Delta x_{kl},\bar{0})]\right]^{p}$$

ve

$$\sum_{k,l}D\left(\left[\sum_{k,l=1}^{\infty}[fd(\Delta y_{kl},\bar{0})]\right]^{p},\bar{0}\right)\leq\left[\sum_{k,l=1}^{\infty}[fd(\Delta y_{kl},\bar{0})]\right]^{p}$$

eşitsizlikleri mevcuttur. $H=max(1,2^{\sup p-1})$ olarak seçilirse

$$\sum_{k,l}D(x_{kl}y_{kl},\bar{0})\leq H(M+N+K+L)<\infty$$

elde edilir. $l_1^F\subseteq\left(s_\gamma^2\right)^{\alpha}$ olur.

Diğer taraftan $x_{kl}=\bar{1}$ kabul edilsin ve $y_{kl}\in\left(s_\gamma^2\right)^{\alpha}$ olsun.

$$\sum_{k,l}D(x_{kl}y_{kl},\bar{0})=\sum_{k,l}D(y_{kl},\bar{0})$$

elde edilir ve $y_{kl}\in l_1^F$ olur. $\left(s_\gamma^2\right)^{\alpha}\subseteq l_1^F$ elde edilir. $\left(s_\gamma^2\right)^{\alpha}=l_1^F$ dır.

SONUÇ

Bu tezde bulanık anlamada Hausdorff metriğinden faydalanarak $s(f,\lambda,p)$ çifti indisli bulanık dizi uzayları ve bulanık norm tanımından faydalanarak $s^2(X,f)$ çift indisli bulanık normlu dizi uzayları verilmiştir. Ayrıca $s(f,\lambda,p)$ dizi uzayının sürekli duali ve Köhte Toeplitz dualleri incelenmiştir. Buna ek olarak $s_\gamma^2[f,p]$ çift indisli fark dizi uzayı tanımlanmıştır. Bu çalışmanın ışığında $p-toplanabilir$ $s(f,\lambda,p)$ uzayının matris dönüşümleri kapsamlı bir şekilde incelenebilir ve çekirdeği üzerinde çalışmalar yapılabilir. Tezden çıkarılması planlanan yayınlar aşağıdaki şekildedir.

- p-Bounded Variation of Modulus Type Fuzzy Double Sequence Spaces,
- Fuzzy Normed Double Sequence Spaces by Modulus,
- Felbin Type Fuzzy Normed Double Sequence Spaces by Modulus,
- Fuzzy Difference Sequence Spaces by Modulus.

KAYNAKLAR

1. L. A. Zadeh, “Fuzzy Sets”, *Information and Control*, 8 (1965), 338–353.
2. T. J. I’A. Bromwich, “An Introduction to the Theory of Infinite Series”, *Macmillan & Co.*, New York, (1965).
3. A. Pringsheim, “Zur Theorie der zweifach unendlichen Zahlenfolgen”, *Mathematische Annalen*, 53 (1900): 289-321
4. G. H. Hardy, “On the convergence of certain multiple series”, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 19 (1917,) 86–95.
5. F. Moricz, “Extension of spaces c and c_0 from single to double sequences”, *Acta Math. Hungar.*, 57 (1–2) (1991), 129–136.
6. M. Zeltser, “Investigation of Double Sequence Spaces By Soft and Hard Analitical Methods”, *Dissertationes, Mathematicae Universtaties Tartuensis* , *Tartu University Press,* (2001).
7. A. Gökhan, R. Çolak, “The double sequence spaces $c_2^B(p)$ and $c_2^{BP}(p)$”, *Appl.Math. Comput.,* 157(2),(2004), 491–501.
8. B. Altay, F. Basar, “Some new spaces of double sequences”, *J. Math. Anal. Appl.,* 309,(2005),70–90.
9. J. D. Hill, “On perfect summability of double sequences”, *Bull. Amer. Math. Soc.,* 46 (1940) ; 327-331
10. H. Nakano, “Concave Modulars”. *J. Math. Soc.,* Japan 5, no. 1, (1953), 29-49
11. W. H. Ruckle, “FK Spaces in Which the Sequence of Coordinate Vectors Is Bounded”, *Canadian Journal of Mathematics,* 25.5 (1973), 973-78.
12. I. J. Maddox, “Paranormed Sequence Spaces Generated by Infinite Matrices”, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society,* 64.2 (1968), 335-40.
13. I. J. Maddox, “Sequence Spaces Defined by a Modulus”, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society,* 100.1 (1986), 161-66.
14. S. Pehlivan, B. Fisher, “On some sequence spaces*, Indian J. Pure Appl. Math.,* 25(10), (1994), 106-107.
15. E. Kolk, “Inclusion theorems for some sequence spaces defined by a sequence of modulli”*, Acta Comment. Univ. Tartu,* 970, (1994), 65-72.

16. T. Bilgin, “The sequence space $l(p, f, q, t)$ on seminormed spaces”, *Bull. Calcutta Math. Soc.,* 86(4), (1994), 295-304.
17. D. Dubois, H. Prade, “Operations on fuzzy numbers,” *International Journal of Systems Science,* vol. 9, no. 6, (1978) pp. 613–626.
18. S. Nanda, “On sequences of fuzzy numbers”, *Fuzzy Sets and Systems,* 33 (1989) 123–126.
19. H. Matloka, “Sequences of fuzzy numbers”*, Busefal,* vol. 28, (1986) pp. 28–37.
20. O. Kaleva, “On the convergence of fuzzy sets”*, Fuzzy Sets and Systems,* vol. 17, no. 1, (1985), pp. 53–65.
21. M. Stojaković, Z. Stojaković, “Addition and series of fuzzy sets”*, Fuzzy Sets and Systems,* 83 (1996), 341-346.
22. B. C. Tripathy, A. J. Dutta, “On fuzzy real-valued double sequence space lFp2”*, Mathematical and Computer Modelling,* Volume 46, Issues 9–10, (2007), Pages 1294-1299.
23. B. C. Tripathy, A. J. Dutta, “Bounded variation double sequence space of fuzzy real numbers”*, Computers & Mathematics with Applications,* Volume 59, Issue 2, (2010),Pages 1031-1037.
24. Ö. Talo, F. Başar, “Certain Spaces of Sequences of Fuzzy Numbers Defined by a Modulus Function”*, Demonstratio Mathematica,* (2010), Vol. 43 (Issue 1), pp. 139-150.
25. Ö. Talo, F. Başar, “Determination of the duals of classical sets of sequences of fuzzy numbers and related matrix transformations”, *Computers & Mathematics with Applications*, (2009), Volume 58, Issue 4, 717-733.
26. H. Dutta, J. Gogoi, “Duals and matrix classes involving Cesáro type classes of sequences of fuzzy numbers”*, Adv. Fuzzy Syst*, (2018).
27. B. K. Tripathy, S. Nanda, “Absolute value of fuzzy real numbers and fuzzy sequence spaces”, *J. Fuzzy Math.,* 8 (4) (2000), 883-892.
28. E. Savas, “A note on double sequence of fuzzy numbers”, *Turk J. Math.,* 20(1996), 175-178.
29. B. C. Tripaty, A. J. Dutta, “On fuzzy real-valued double sequence spaces”, *Soochow J. Math.,* 32(2006), 509-520.
30. E. Savaş, R. F. Patterson, “Double sequence spaces defined by a modulus”, *Mathematics Slovaca,* vol. 61, no. 2, pp. 245–256, 2011.

31. A. Wilansky, “Summability Through Functional Analysis”(1984), *North Holland*, p317.
32. M. Mursaleen, F. Başar, “Sequence Spaces, Topics in Modern Summability Theory”, *Crc Press,* Boca Raton, 2020.
33. A. Wilansky, “Modern Methods in Topological Vector Spaces”*, McGraw Hill Inc.,* New York, 1978.
34. M. Bayraktar, “Fonksiyonel Analiz”, *Gazi Kitabevi,* 2006.
35. H. Kızmaz, “Fonksiyonel Analize Giriş”, *Karadeniz Teknik Üniversitesi Basımevi,* Trabzon, 1993.
36. I. J. Maddox, “Elements of Functional Analysis (Second Edition)”, *Cambridge University Press,* , Cambridge, 1988.
37. P. Dimaond, P. Kloeden, “Metric Spaces of Fuzzy Sets: Theory and Applications”, *World Scientific*, (1994), 37-50.
38. K. R. Stromberg, “An Introduction to Classical Real Analysis”, *AMS Chelsea Publishing,* 2015, 132.
39. J. Goetschel, W. Voxman, “Elementary fuzzy calculus”, *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 18, no. 1, (1986) pp. 31–43.
40. Ö. Talo, F. Başar, “On the space $bv_p(F)$ of sequences of p-bounded variation of fuzzy numbers”*, Acta Math. Sin. Eng. Ser.,* 24 (7) 2008, 1205-1212.
41. U. Kadak, F. Başar, “Power series of fuzzy numbers”, *AIP Conference Proceedings*, 2010, 538-550.
42. B. Altay, “Bazı Yeni Çift Dizi Uzayları”, *Doktora tezi, İnönü Üniv.,* Malatya,2002.
43. G. Kilinc, “Some double sequence spaces defined by a Modulus function”, *PhD Thesis, Inonu University,* 2006.
44. M. Saheli, “A comparative study of fuzzy norms of linear operators on a fuzzy normed linear space”. *J. Math. Model.,* 2015, 2, 217–234.
45. C. Felbin, “Finite dimensional fuzzy normed linear spaces”, *Fuzzy Sets and Systems*, 1992, 48, 239–248.
46. Y. Yılmaz, “Modülüs Fonksiyonu Yardımıyla Tanımlanmış Bazı Yeni Dizi Uzayları”, *Doktora tezi, İnönü Üniversitesi,* Malatya, 2003.
47. A. Hasankhani, A. Nazari, M. Saheli, “Some properties of fuzzy Hilbert spaces and norm of operators”, *Iran. J. Fuzzy System,* 2010,7, 129–157.

48. K. Raj, S. K. Sharma, A.Gupta, and A. Kumar, “A sequence space defined by a sequence of modulus functions”*, International Journal of Mathematical Analysis*, vol. 5, no. 29-32, (2011), 1569–1574.
49. B. C. Tripathy and B. Sarma, “Statistically convergent difference double sequence spaces”, *Acta Math. Sin.,*2008, 24(5), 737–742.
50. I. J. Maddox, “Continuous and Köthe-Toeplitz dual of certain sequence spaces”, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society,* vol. 65, (1965), pp. 431–435.
51. I. J. Maddox, “Paranormed sequence spaces generated by infinite matrices”, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 65, (1968), pp. 335-340.
52. F. M. Khan, M. F. Rahman, “Infinite matrices and Ces`aro sequence spaces”, *Analysis Mathematica,* vol. 23, (1997), pp. 3–11.
53. T. Bag, S. K. Samanta, “A comparative study of fuzzy norms on a linear space”, *Fuzzy Sets and Systems,* 2008, 159, 670–684.
54. I. J. Maddox, “Inclusions between FK spaces and Kuttner's theorem”, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society,* (1987), 101(3), 523-527.