

**T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**GALİLE UZAYINDA DEVELOPABLE YÜZEYLERİN
SİNGÜLERLİĞİ ÜZERİNE**

**Tezi Hazırlayan
Ümit GÜLÜCÜ**

**Tez Danışmanı
Dr. Öğretim Üyesi Esmâ DEMİR ÇETİN**

**Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi**

**Ağustos 2022
NEVŞEHİR**

**T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**GALİLE UZAYINDA DEVELOPABLE YÜZEYLERİN
SİNGÜLERLİĞİ ÜZERİNE**

**Tezi Hazırlayan
Ümit GÜLÜCÜ**

**Tez Danışmanı
Dr. Öğretim Üyesi Esmâ DEMİR ÇETİN**

**Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi**

**Ağustos 2022
NEVŞEHİR**

Dr. Öğretim Üyesi Esmâ DEMİR ÇETİN danışmanlığında Ümit GÜLÜCÜ tarafından hazırlanan “Galile Uzayında Developable Yüzeylerin Singülerliği Üzerine” başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

.../.../2021

JÜRİ

Başkan : Dr. Öğr. Üyesi Gülsüm YÜCA

Üye : Dr. Öğretim Üyesi Samed ÖZKAN

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Esmâ DEMİR ÇETİN

ONAY

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun tarih ve sayılı kararı ile onaylanmıştır.

... / ... / 2022

Prof. Dr. Şahlan ÖZTÜRK
Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİM SAYFASI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada yer alan bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu ve bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Ümit GÜLCÜ

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim ve tez çalışmam süresince tüm bilgilerimi benimle paylaşmaktan kaçınmayan, her türlü konuda desteğini benden esirgemeyen ve tezimde büyük emeği olan Sayın Hocam Dr. Öğretim Üyesi Esmâ DEMİR ÇETİN'e, maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen çok kıymetli aileme teşekkür ederim.



**GALİLE UZAYINDA DEVELOPABLE YÜZEYLERİN SİNGÜLERLİĞİ
ÜZERİNE
(Yüksek Lisans Tezi)**

Ümit GÜLÜCÜ

**NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Ağustos 2022

ÖZET

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde giriş kısmı bulunmaktadır. İkinci bölümde sırasıyla 3-boyutlu Öklid uzayında, 3-boyutlu Lorentz uzayında ve 3-boyutlu Galile uzayında temel tanım ve teoremler yer almaktadır. Üçüncü bölümde 3-boyutlu Öklid uzayında developable yüzeylerin singüler noktaları incelenmiş ve bulunan singüleritelerin karakterleri belirlenmiştir. Bunlar cuspidal edge, cuspidal crosscap ve swallowtail singüleriteleri olarak elde edilmiştir. Dördüncü bölümde 3-boyutlu Lorentz uzayında bazı yüzeylerin singülerite şartları araştırılıp Öklid uzayına benzer şekilde singülerite tipleri tartışılmıştır. Beşinci bölümde ise 3-boyutlu Galile uzayında üç farklı developable yüzey için singüler noktalar araştırılmış ve yine diğer uzaylara benzer şekilde, bulunan singüleritelerin karakterleri belirlenmiştir. Son olarak altıncı bölüm tartışma ve sonuçlara ayrılmıştır.

Anahtar kelimeler : *Galile uzayı, developable yüzeyler, singüler noktalar.*
Tez Danışmanları : **Dr. Öğr. Üyesi Esmâ DEMİR ÇETİN**
Sayfa Sayısı : **45**

ON SINGULARITIES OF DEVELOPABLE SURFACES IN GALILEAN SPACE

(Master Thesis)

Ümit GÜLÜCÜ

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCES

August 2022

ABSTRACT

This thesis consists of five chapters. The first chapter is devoted to the introduction. In the second chapter, 3 dimensional Euclidean space, Lorentz 3-space, Galilean 3-space and their fundamental definitions and theorems are given respectively. In the third chapter, singular points of developable surfaces are examined and the types of these singularities are given. These are cuspidal edge, cuspidal crosscap and swallowtail singularities. In the fourth chapter necessary conditions for the singularity of some surfaces are investigated and similar to the Euclidean case, singularity types are examined. In the fifth chapter, singular points of three different developable surfaces are searched and similar to the Euclidean space and Lorentz space singularity types of these points are studied. Finally the sixth chapter is on conclusion and discussion.

Keywords : *Galilean space, developable surfaces, singular points.*
Thesis Supervisor : Assist. Prof. Dr. Esma DEMİR ÇETİN
Page Number : 45

İÇİNDEKİLER

ONAY	i
TEZ BİLDİRİM SAYFASI	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
ÖZET.....	iv
ABSTRACT	v
İÇİNDEKİLER	vi
ŞEKİLLER LİSTESİ	viii
SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ.....	ix
1. BÖLÜM	
GİRİŞ	1
1.1. Amaç ve Kapsam	3
2. BÖLÜM	
TEMEL TANIMLAR	4
2.1. 3-Boyutlu Öklid Uzayında Temel Tanımlar	4
2.2. 3-Boyutlu Lorentz Uzayında Temel Tanım ve Teoremler.....	6
2.3. 3-Boyutlu Galile Uzayında Temel Tanım ve Teoremler	9
3. BÖLÜM	
3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA DEVELOPABLE YÜZEYLER VE SİNGÜLERİTELERİ.....	13
4. BÖLÜM	
LORENTZ UZAYINDA MAKSİMAL YÜZEYLER VE SİNGÜLERİTELERİ	21
5. BÖLÜM	
GALİLE UZAYINDA SİNGÜLERİTELER.....	25
5.1 Galile Geometrisinde Bazı Fonksiyonların Singüleriteleri.....	25
5.2. Galile Uzayında Helisler ve Teğet Doğrultusu	30
5.3. Galile Uzayında Bir Parametrelili Fonksiyonların Açılımı.....	31
5.4. Galile Uzayında Developable Yüzeyler ve Singüleriteler	36
6. BÖLÜM	
TARTIŞMA VE SONUÇ	43
6.1. Tartışma.....	43
6.2. Sonuç.....	43
KAYNAKLAR	44

ÖZGEÇMİŞ45



ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1.1	Cuspidal edge, Swallowtail ve Cuspidal crosscap.....	2
Şekil 3.1	$\gamma(\theta)$ eğrisi ve $\gamma(\theta)$ nın rektifiyan developable yüzeyi	20
Şekil 5.1.1	Cusp Eğrisi.....	26
Şekil 5.1.2	Cuspidal Edge	27
Şekil 5.1.3	Swallowtail	27



SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ

\mathbb{R}	:	Reel sayılar
E^3	:	3-boyutlu Öklid uzayı
E_1^3	:	3-boyutlu Lorentz uzayı
G_3	:	3-boyutlu Galile uzayı
κ	:	Eğrinin eğriliği
τ	:	Eğrinin torsiyonu
T	:	Eğrinin birim teğet vektör alanı
N	:	Eğrinin birim normal vektör alanı
B	:	Eğrinin birim binormal vektör alanı
CCR	:	Cuspidal crosscap
CP	:	Cuspidal edge
C	:	Cusp eğrisi
SW	:	Swallowtail

1. BÖLÜM

GİRİŞ

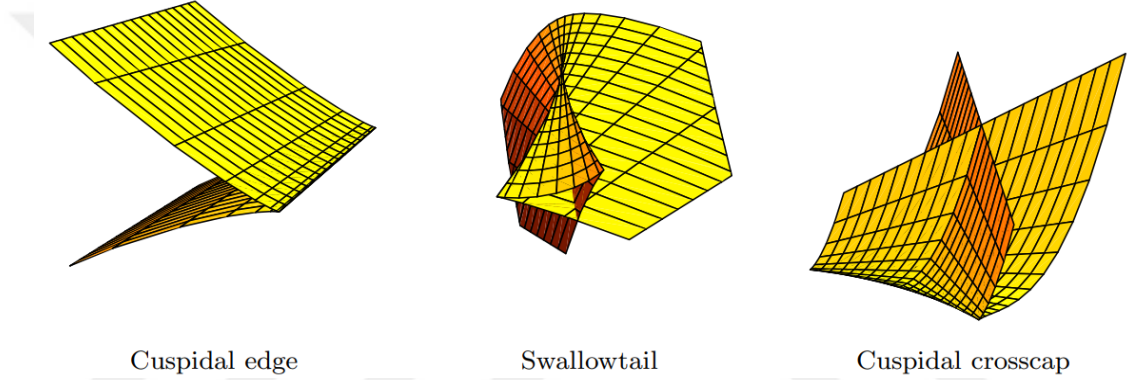
Developable yüzeyler esas olarak yüzey üzerindeki metrik değiştirilmeden düzlemsel parçalara ayrılabilen yüzeylerdir. Bununla birlikte sıkıştırma veya gerilme kaynaklı bozulmalar olmadan bir düzleme dönüştürülebilirler. Bu özellikleri sebebiyle kartografik izdüşümlerde ve düzlemsel materyallerin üretiminde uygulama alanına sahiptirler. Birçok harita projeksiyonu developable yüzeyler ile sınıflandırılır. Koni, silindir ve düzlem bu duruma örnek olarak verilebilir. Ayrıca developable yüzeyler bu örneklerle sınırlı değildir. Eliptik koni, hiperbolik silindir vb. yüzeyler de birer developable yüzeydir. Bu yüzeylerin bir diğer uygulama alanı ise mimaride kullanılan geometridir. Mimarlar developable yüzeyler ile çalışmalarındaki limitleri belirleyebilmektedirler.

Diferansiyel geometride ise developable yüzey özel bir regle yüzeydir. Öyle ki bu regle yüzey üreteç eğrisi boyunca her noktasında aynı tanjant düzleme sahiptir.

Developable yüzeyler ile ilgili birçok çalışma mevcuttur ve bunların bir kısmı da singülerite teorisi ile ilgilidir. Zhao ve arkadaşları bir parametrelili developable yüzeylerin özelliklerini incelemişlerdir. Murata ve Umehara 3-boyutlu Öklid uzayında düzlemsel yüzeylerin davranışlarını araştırmışlardır. Izumiya ve Takeuchi ise yine 3-boyutlu Öklid uzayında özel developable yüzeyler tanımlamışlardır. Bu çalışmalarında üç farklı developable yüzeyden bahsetmişlerdir. Bu yüzeyler sırasıyla bir uzay eğrisinin rektifiyan developable yüzeyi (eğri boyunca rektifiyan düzlemlerinin ailesi), eğrinin Darboux developable yüzeyi (singüler noktalar modifiye Darboux vektörlerin bitiş noktaları olarak tanımlıdır) ve son olarak eğrinin tanjant Darboux developable yüzeyi (eğrinin teğet göstergelerinin Darboux developable yüzeyi) olarak verilmiştir. Yazarlar bu developable yüzeylerin lokal olarak cuspidal edge, swallowtail veya cuspidal crosscap yüzeylerine diffeomorf olduğunu göstermişlerdir. Bununla birlikte 3-boyutlu Öklid uzayında lokal diffeomorfizmlerin sınıflandırılması probleminin çözümünü Ishikawa ve Yamashita vermiştir:

∇ 3-boyutlu bir M manifoldu üzerinde bir afin konneksiyon ve $\alpha: I \rightarrow M$, M üzerinde C^∞ tipinden bir eğri olmak üzere,

- 1) Eğer $\nabla_\alpha(s_0), \nabla_\alpha^2(s_0), \nabla_\alpha^3(s_0)$ lineer bağımsız ise ∇ –tanjant yüzey $(s_0, 0)$ noktasında lokal olarak cuspidal edge yüzeyine diffeomorftur.
- 2) Eğer $\nabla_\alpha(s_0), \nabla_\alpha^2(s_0), \nabla_\alpha^3(s_0)$ lineer bağımlı ve $\nabla_\alpha(s_0), \nabla_\alpha^2(s_0), \nabla_\alpha^4(s_0)$ lineer bağımsız ise bu durumda ∇ –tanjant yüzey $(s_0, 0)$ noktasında lokal olarak cuspidal crosscap yüzeyine diffeomorftur.
- 3) Eğer $\nabla_\alpha(s_0) = 0$ lineer bağımlı ve $\nabla_\alpha^2(s_0), \nabla_\alpha^3(s_0), \nabla_\alpha^4(s_0)$ lineer bağımsız ise bu durumda ∇ –tanjant yüzey $(s_0, 0)$ noktasında lokal olarak swallowtail yüzeyine diffeomorftur.



Şekil 1.1 Cuspidal edge, Swallowtail ve Cuspidal crosscap

Singülerite teorisi ile ilgili Öklid dışı uzaylarda başka çalışmalar da mevcuttur. Brander 3-boyutlu Lorentz uzayında sabit ortalama eğrilikli spacelike yüzeylerin singüleriteleri üzerine çalışmıştır. Fujimori ve diğerleri 3-boyutlu Lorentz uzayında spacelike maksimal yüzeylerin singüleritelerinin cuspidal edge, cuspidal crosscap ve swallowtail singüleritelerinden oluştuğunu göstermişlerdir. Kokubu ve diğerleri ise 3-boyutlu hiperbolik uzayda singüleritelerin sadece cuspidal edge ve swallowtail singüleritelerinden ibaret olduğunu bulmuşlardır.

Bu tez çalışmasında, verilen literatür ışığında 3-boyutlu Galile uzayında developable yüzeylerin genelleştirilmesi yapılarak bu yüzeylerin geometrik yapıları incelenmiştir. Ishikawa ve Yamashita tarafından verilen metod ile bu yüzeylerin singüler noktalarının karakterleri belirlenmiştir.

1.1. Amaç ve Kapsam

Bu çalışmanın temel amacı, 3-boyutlu Galile uzayında Izumiya tarafından tanımlanan üç developable yüzey (Darboux developable yüzey, tanjant Darboux developable yüzey ve rektifiyan developable yüzey) için singüler noktaları araştırmak ve bu noktaların singülerite tiplerini belirlemektir. Bununla birlikte 3-boyutlu Öklid uzayı ile 3-boyutlu Lorentz uzayında bu konuda yapılmış literatürde yer alan çalışmalar incelenerek Galile uzayı ile karşılaştırmalar yapmaktır.



2. BÖLÜM

TEMEL TANIMLAR

2.1. 3-Boyutlu Öklid Uzayında Temel Tanımlar

Tanım 2.1.1. $I \subset \mathbb{R}$ reel uzayın bir açık alt aralığı olmak üzere $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ ile verilen diferansiyellenebilir γ fonksiyonuna 3-boyutlu Öklid uzayında bir eğri denir.

Tanım 2.1.2. $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$, 3-boyutlu Öklid uzayı E^3 te keyfi bir eğri olsun. E^3 uzayında, her $X = (x_1, x_2, x_3), Y = (y_1, y_2, y_3) \in E^3$ için

$$\langle X, Y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

ile verilen $\langle \cdot, \cdot \rangle$ standart Öklid iç çarpımı olmak üzere, $\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle = 1$ ise γ , birim hızlı eğri (veya yay parametresi ile verilmiş eğri) olarak adlandırılır.

Bir γ eğrisinin birinci, ikinci ve üçüncü türevleri kullanılarak elde edilen T, N, B vektör alanlarına sırasıyla teğet, asli normal ve binormal vektör alanları denir. Burada $\{T, N, B\}$ eğrinin her noktasında ortonormal bir çatı oluşturur. Bu çatıya γ eğrisinin Frenet çatısı denir.

$\kappa(s) = \|\gamma''(s)\|$ eğrinin eğriliği olarak isimlendirilir. $\kappa(s) \neq 0$ olmak üzere γ eğrisinin birim normal vektör alanı için $\gamma''(s) = \kappa(s)N(s)$ dir. Son olarak $T(s) = \gamma'(s)$ olmak üzere $B(s) = T(s) \times N(s)$ olarak verilir. Bu durumda Frenet formülleri ise

$$\begin{cases} T'(s) = \kappa(s)N(s) \\ N'(s) = -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s) \\ B'(s) = -\tau(s)N(s) \end{cases}$$

olarak tanımlıdır. Burada $\tau(s)$, γ eğrisinin s noktasındaki torsiyonudur (burulmasıdır).

Tanım 2.1.3. Herhangi bir $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı eğrisi için $\kappa(s) \neq 0$ koşulu altında γ bir vektör alanı $\tilde{D}(s) = \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)(s)T(s) + B(s)$ olarak tanımlanır ve buna γ nın modifiye Darboux vektör alanı denir. Birim Darboux vektör alanı ise $\bar{D}(s) = (1/\sqrt{\tau^2 + \kappa^2})(s)(\tau(s)T(s) + \kappa(s)B(s))$ ile verilir.

Tanım 2.1.4. $\kappa(s) \neq 0$ olmak üzere $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi verilsin. γ nın teğet vektörleri sabit bir doğrultu ile sabit bir açı yapıyorsa γ ya bir helis (eğilim çizgisi) denir. Bununla birlikte γ nın helis olması durumunda $(\tau/\kappa)(s) = \text{sabit}$ olduğu bilinmektedir. Özel olarak hem $\kappa(s) \neq 0$ hem de $\tau(s)$ sabit iseler bu γ ya dairesel helis denir.

Tanım 2.1.5. $\kappa(s) \neq 0$ olmak üzere $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi verilsin. γ nın birim normal vektörleri sabit bir doğrultu ile sabit bir açı yapıyorsa γ ya bir slant helis denir. Ayrıca Bununla birlikte γ bir slant helistir ancak ve ancak

$$\sigma(s) = \left(\frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{3/2}} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' \right) (s) = \text{sabit}$$

dir.

Tanım 2.1.6.. $\kappa(s) \neq 0$ olmak üzere $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi verilsin. γ eğrisinin eğriliği κ ve torsiyonu τ olmak üzere $\left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' = \text{sabit}$ ise bu eğriye konikal geodezik eğri denir.

Tanım 2.1.7. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ve $\beta: I \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar ve I bir açık olmak üzere

$$F_{(\alpha, \beta)}(t, u) = \alpha(t) + u\beta(t)$$

şeklinde tanımlı dönüşüme bir regle yüzey denir. Burada α , regle yüzeyin dayanak eğrisi ve β ise regle yüzeyin doğrultmanıdır.

Önerme 2.1.6. $\kappa(s_0) \neq 0$ ve $(\tau/\kappa)'(s_0) \neq 0$ olmak üzere bir $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ için aşağıdaki önermeler doğrudur:

a) $J \subset I$ bir açık aralık ve $s_0 \in J$ için tek bir $\delta: J \rightarrow \mathbb{R}^3$ konikal geodezik eğri vardır öyle ki $\delta(s_0) = \gamma(s_0)$ dir ve $\delta(s)$ nın eğriliği $\kappa(s)$, δ 'nın s_0 noktasındaki burulması $\tau(s_0)$ dir. Böylece $\gamma(s_0)$ ve $\delta(s_0)$ en az 5 noktada temaslıdır.

b) $J \subset I$ bir açık aralık ve $s_0 \in J$ için tek bir $\delta: J \rightarrow \mathbb{R}^3$ slant helis vardır öyle ki $\delta(s_0) = \gamma(s_0)$ dir ve $\delta(s)$ nın eğriliği $\kappa(s)$, δ 'nın s_0 noktasındaki burulması $\tau(s_0)$ dir. Böylece $\gamma(s_0)$ ve $\delta(s_0)$ en az 5 noktada temaslıdır.

İspat: **a)** $\left(\frac{\tau}{\kappa} \right) (s_0) = b$ ve $\left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' (s_0) = c$ olsun.

$$\begin{aligned} \kappa_\delta(s) &= \kappa(s) \\ \tau_\delta(s) &= \kappa(s)(cs + a) \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Burada $a = b - cs_0$ ve $\delta^{(p)}(s_0) = \gamma^{(p)}(s_0)$ dir. Bu koşullar altında $\delta(s)$ gerekli şartları sağlar.

b) $\sigma(s_0) = d$ olsun. $\delta^{(p)}(s_0) = \gamma^{(p)}(s_0)$ başlangıç koşulları altında

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa_\delta(s) = \kappa(s) \\ \left(\frac{\tau_\delta}{\kappa_\delta}\right)'(s) = d\kappa_\delta(s) \left(1 + \left(\frac{\tau_\delta}{\kappa_\delta}\right)^2(s)\right)^{3/2} \end{array} \right.$$

olarak yazılabilir. Böylece $\delta: J \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi gerekli şartları sağlar.

Önerme 2.1.6 da verilen konikal geodezik eğriye oskülatör konikal geodezik eğri, slant helise ise oskülatör slant helis adı verilir.

2.2. 3-Boyutlu Lorentz Uzayında Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 2.2.1. $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3) \in E^3$ olmak üzere $\langle \cdot, \cdot \rangle : E^3 \times E^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $(u, v) \rightarrow \langle u, v \rangle = -u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$ şeklinde tanımlanan simetrik, bilinear ve non-dejenere metrik tensöre Lorentz metriği denir [8].

Tanım 2.2.2. $\langle \cdot, \cdot \rangle$, E^3 de Lorentz metriği olsun. $\{E^3, \langle \cdot, \cdot \rangle\}$ ikilisine 3- boyutlu Lorentz uzayı denir ve E_1^3 ile gösterilir. $v = (v_1, v_2, v_3) \in E^3$ olmak üzere v 'nin normu $\|v\| = \sqrt{|\langle v, v \rangle|}$ şeklinde tanımlanır [7].

Tanım 2.2.3. $v = (v_1, v_2, v_3) \in E^3$ olmak üzere,

$\langle v, v \rangle > 0$ ise v 'ye spacelike vektör,

$\langle v, v \rangle < 0$ ise v 'ye timelike vektör,

$\langle v, v \rangle = 0$, $v \neq 0$ ise v 'ye lightlike vektör denir [7].

Tanım 2.2.4. γ , E_1^3 de bir eğri olmak üzere eğer γ' sırasıyla spacelike, timelike veya lightlike ise γ eğrisine de sırasıyla spacelike, timelike veya lightlike eğri denir [7].

Tanım 2.2.5. γ , E_1^3 de bir eğri olmak üzere eğer $\langle \gamma', \gamma' \rangle = \pm 1$ ise γ ya birim hızlı eğri denir [7].

Tanım 2.2.6. γ , E_1^3 de spacelike bir eğri olmak üzere eğer γ nın asli normal vektörü N sıfır ise bu eğriye pseudo null eğri denir [7].

Tanım 2.2.7. E_1^3 Lorentz uzayında teğet, normal ve binormal vektör alanlarının oluşturduğu cümle $\{T, N, B\}$ $\gamma(s)$ eğrisinin Frenet çatısı olsun. γ eğrisinin karakterine göre Frenet eşitlikleri aşağıdaki formları alır.

1. Durum: γ lightlike olmayan bir eğri ise Frenet formülleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_2 \kappa & 0 \\ -\varepsilon_1 \kappa & 0 & \varepsilon_3 \tau \\ 0 & -\varepsilon_2 \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Burada κ ve τ sırasıyla eğrinin eğriliği ve burulmasıdır. Ayrıca $\varepsilon_1 = \langle T, T \rangle = \pm 1$, $\varepsilon_2 = \langle N, N \rangle = \pm 1$ ve $\varepsilon_3 = \langle B, B \rangle = \pm 1$ dir.

Aynı zamanda $T \times N = \varepsilon_1 \varepsilon_2 B$, $N \times B = \varepsilon_2 \varepsilon_3 T$, $B \times T = \varepsilon_1 \varepsilon_3 B$ eşitlikleri sağlanır [7].

2. Durum: $\gamma(s)$ lightlike ise Frenet formülleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \tau & 0 & -\kappa \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Yine κ ve τ sırasıyla eğrinin eğriliği ve burulmasıdır. $\gamma(s)$ bir doğru ise $\kappa = 0$, diğer durumlarda ise $\kappa = 1$ dir.

$\langle T, T \rangle = \langle B, B \rangle = \langle T, N \rangle = \langle N, B \rangle = 0$, $\langle N, N \rangle = \langle T, B \rangle = 1$ dir ve bununla birlikte $T \times N = -T$, $N \times B = -B$, $B \times T = -N$ eşitlikleri sağlanır [7].

3. Durum: $\gamma(s)$ pseudo null bir eğri ise Frenet formülleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ 0 & \tau & 0 \\ -\kappa & 0 & -\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Burada κ ve τ sırasıyla eğrinin eğriliği ve burulmasıdır. $\gamma(s)$ eğrisi doğru ise eğrilik $\kappa = 0$, diğer durumlarda ise $\kappa = 1$ dir. Aynı zamanda,

$\langle N, N \rangle = \langle B, B \rangle = \langle T, N \rangle = \langle T, B \rangle = 0$, $\langle T, T \rangle = \langle N, B \rangle = 1$ dir ve bununla birlikte $T \times N = B$, $N \times B = T$, $B \times T = N$ eşitlikleri sağlanır [7].

Tanım 2.2.8. 3-boyutlu Lorentz uzayında birim hızlı bir $\alpha : I \rightarrow E_1^3$ eğrisi verilsin. α nın Frenet elemanları $\{T, N, B\}$ olmak üzere eğer $\langle T, v \rangle = \text{sabit}$ olacak biçimde sabit bir $v \in E_1^3$ vektörü varsa bu durumda α eğrisine bir helis denir. v vektörüne paralel her doğrultu helisin eksenidir. Öklid uzayına benzer şekilde α nın eğriliği κ ve burulması τ olmak üzere $(\tau/\kappa)(s) = \text{sabit}$ dir ancak ve ancak α bir helistir [7].

Bununla birlikte 3-boyutlu Lorentz uzayında özel olarak normal vektörü lightlike olan spacelike eğri bir helistir. Ayrıca lightlike bir eğri helistir ancak ve ancak $\tau = \text{sabit}$ dir.

Tanım 2.2.9. 3-boyutlu Lorentz uzayında birim hızlı timelike bir $\alpha : I \rightarrow E_1^3$ eğrisi verilsin. α nın Frenet elemanları $\{T, N, B, \kappa, \tau\}$ olmak üzere α bir slant helistir ancak ve ancak aşağıdaki iki fonksiyondan biri sabittir.

$$\frac{\kappa^2}{(\tau^2 - \kappa^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' \text{ veya } \frac{\kappa^2}{(\tau^2 - \kappa^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'$$

Tanım 2.2.10. 3-boyutlu Lorentz uzayında birim hızlı spacelike bir $\alpha : I \rightarrow E_1^3$ eğrisi verilsin. α nın Frenet elemanları $\{T, N, B, \kappa, \tau\}$ olsun.

a) α nın normal vektörü spacelike ise α bir slant helistir ancak ve ancak aşağıdaki iki fonksiyondan biri sabittir.

$$\frac{\kappa^2}{(\tau^2 - \kappa^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' \text{ veya } \frac{\kappa^2}{(\tau^2 - \kappa^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'$$

b) α nın normal vektörü timelike ise α bir slant helistir ancak ve ancak aşağıdaki fonksiyon sabittir.

$$\frac{\kappa^2}{(\tau^2 \mp \kappa^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'$$

2.3. 3-Boyutlu Galile Uzayında Temel Tanım ve Teoremler

Bu bölümde 3-boyutlu Galile uzayında temel kavramlar verilmiştir.

Galile uzayı, esasen izotropik koninin düzleme dönüştüğü pseudo Öklid uzayının bir özel durumudur. Fizikte önemli kullanım alanlarına sahip çarpım uzayının Klein geometrisi olarak da verilebilir. Galile geometrisinin diğer geometrilerden ayrıştığı nokta, üzerinde çalışılırken daha az zaman harcanarak ayrıntılı inceleme olanağı sunan basitliğidir.

Tanım 2.3.1. 3-boyutlu Galile uzayı G_3 'de iki vektör $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ arasındaki Galile iç çarpımı;

$$\langle u, v \rangle_{G_3} = \begin{cases} u_1 v_1, & u_1 \text{ veya } v_1 \text{ sıfırdan farklı ise} \\ u_2 v_2 + u_3 v_3, & u_1 \text{ ve } v_1 \text{ her ikisi de sıfır ise} \end{cases} \quad (2.4)$$

ve Galile vektörel çarpımı;

$$(u \times v)_{G_3} = \begin{cases} \begin{vmatrix} 0 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}, & u_1 \text{ veya } v_1 \text{ sıfırdan farklı ise} \\ \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}, & u_1 \text{ ve } v_1 \text{ her ikisi de sıfır ise} \end{cases} \quad (2.5)$$

şeklinde tanımlanır. Burada e_1, e_2 ve e_3 Öklid uzayının standart bazlarıdır [1].

Tanım 2.3.2. $\gamma: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow G_3$ 3-boyutlu Galile uzayında keyfi bir eğri olsun. Eğer $x(s)$ eğrinin yay parametresi ise bu durumda $\gamma(s) = (s, y(s), z(s))$ olarak elde edilir ve γ eğrisinin birinci eğriliği $\kappa(s)$ ve ikinci eğriliği (burulması) $\tau(s)$

$$\kappa(s) = \sqrt{((y'')^2(s) + (z'')^2(s))}$$

$$\tau(s) = \frac{\det(\gamma'(s), \gamma''(s), \gamma'''(s))}{[\kappa(s)]^2}$$

şeklinde tanımlanır [1].

γ nın Frenet 3-ayaklısı;

$$T(s) = \gamma'(s) = (1, y'(s), z'(s))$$

$$N(s) = \frac{1}{\kappa(s)} \gamma''(s) = \frac{1}{\kappa(s)} (0, y''(s), z''(s))$$

$$B(s) = \frac{1}{\kappa(s)} (0, -z''(s), y''(s))$$

şeklinde verilir. T , N ve B vektörlerine sırasıyla γ eğrisinin teğet, asli normal ve binormal vektörleri denir. Bu vektörlerin türevleri için aşağıdaki Frenet formülleri geçerlidir [1].

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

Tanım 2.3.3. $\gamma: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow G_3$, 3-boyutlu Galile uzayında Frenet çatisı elemanları $\{T, N, B, \kappa \neq 0, \tau\}$ olan bir eğri olmak üzere $D(s) = \tau(s)T(s) + \kappa(s)B(s)$ vektörüne γ eğrisinin Darboux vektörü denir.

Bu durumda Darboux vektörleri kullanılarak Frenet formülleri aşağıdaki şekilde de tanımlanabilir.

$$T'(s) = D(s)x_G T(s)$$

$$N'(s) = D(s)x_G N(s)$$

$$B'(s) = D(s)x_G B(s)$$

Burada x_G Galile vektörel çarpımı olmak üzere

$$ux_G v = \begin{vmatrix} 0 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \text{ dir [6].}$$

Tanım 2.3.4. $\gamma: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow G_3$, 3-boyutlu Galile uzayında Frenet elemanları $\{T, N, B, \kappa \neq 0, \tau\}$ olan bir eğri olsun. Eğer γ boyunca $\left(\frac{\kappa}{\tau}\right) = \text{sabit}$ ise bu durumda γ ya helis denir. Burada κ ve τ sırasıyla γ eğrisinin eğriliği ve burulmasıdır [1].

Tanım 2.3.5. $\gamma: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow G_3$, 3-boyutlu Galile uzayında Frenet elemanları $\{T, N, B, \kappa \neq 0, \tau\}$ olan bir eğri olsun. Eğer κ ve τ , γ boyunca pozitif sabitler iseler bu durumda γ ya dairesel helis denir.

Teorem 2.3.6. 3-boyutlu Galile uzayında birim hızlı bir $\alpha: I \rightarrow E_1^3$ eğrisi verilsin. α nın Frenet elemanları $\{T, N, B, \kappa, \tau\}$ olmak üzere α bir slant helistir ancak ve ancak aşağıdaki iki fonksiyondan biri sabittir.

$$\frac{\kappa^2}{\tau^3} \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' \text{ veya } -\frac{\kappa^2}{\tau^3} \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'$$

İspat 2.3.1. Öncelikle 3-boyutlu Galile uzayında Frenet elemanları $\{T, N, B, \kappa = 0, \tau\}$ olan bir γ eğrisinin slant helis olduğu kabul edilsin. U ise $\langle N, U \rangle_{G_3} = a = \text{sabit}$ olacak biçimde bir vektör alanı olsun. Bu durumda

$$U = f_1(s)T(s) + a + f_3(s)B(s)$$

olacak biçimde f_1 ve f_3 fonksiyonları vardır. Eğer U sabit ise U ya karşılık verilen denklemin türevi alındığında

$$f_1' = 0$$

$$f_1 \kappa - f_3 \tau = 0$$

$$f_3' + a\tau = 0$$

bulunur. Yukarıdaki ikinci eşitlikten $f_1 = f_3 \frac{\tau}{\kappa}$ olduğu görülür. Bununla birlikte $f_1 \neq 0$ ise $\langle U, U \rangle_{G_3} = f_1^2 = \text{sabit}$ dir. Ayrıca yine yukarıdaki ikinci ve üçüncü eşitliklerden $f_3^2 \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2 = m^2$ ve böylece $f_3 = \mp \frac{m}{\tau}$ bulunur. Yukarıda verilen üçüncü eşitlikten

$$\frac{d}{ds} \left(\mp \frac{m}{\tau} \right) = -a\tau$$

elde edilir. Bu son ifade ise

$$\frac{\kappa^2}{\tau^3} \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' = \mp \frac{a}{m}$$

olarak hesaplanır. Bu da teoremin ilk kısmının ispatını tamamlar.

Tersine $\mp \frac{\kappa^2}{\tau^3} \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'$ ifadesinin sabit olduğu kabul edilsin. Bir a sabiti için

$$U = T(s) + a + B(s)$$

tanımlansın. U nun türevi alındığında Galile uzayındaki Frenet formülleri kullanılarak $\frac{dU}{ds} = 0$ bulunur. O halde U sabit bir vektördür. Diğer yandan

$$\langle N, U \rangle_{G_3} = a \frac{y''^2 + z''^2}{\kappa^2} = a$$

elde edilir ki bu da γ nın bir slant helis olduğunu gösterir.

Eğer $f_1 = 0$ ise $\langle U, U \rangle_{G_3} = a^2 + f_3^2 = \text{sabit}$ ve böylece $f_3 = 0$ ve

$$f_1' = 0$$

$$f_1 \kappa - f_3 \tau = 0$$

$$f_3' + a\tau = 0$$

eşitliklerinden $a = 0$ bulunur. Bu durumda ise $U = 0$ olur ki bu da bir çelişkidir.

Tanım 2.3.6. 3-boyutlu Galile uzayında bir $v = (x, y, z)$ vektörü için eğer $x \neq 0$ ise v ye non-izotropik vektör denir. Tüm birim non-izotropik vektörler $(1, y, z)$ formundadır. İzotropik vektörler için ise $x = 0$ dir.

3. BÖLÜM

3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA DEVELOPABLE YÜZEYLER VE SİNGÜLERİTELERİ

Bu bölümde 3-boyutlu Öklid uzayında verilen bir eğrinin üç farklı developable yüzeyi ele alınmıştır. Developable yüzeyler regle yüzeylerdir ve $F_{(\gamma,\delta)}: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dönüşümü ile belirlidirler. Burada $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ve $\delta: I \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ olmak üzere $F_{(\gamma,\delta)}(t, u) = \gamma(t) + u\delta(t)$ dir.

3-boyutlu Öklid uzayında $\kappa(s) \neq 0$ olmak üzere γ birim hızlı bir eğri olsun.

- 1) $F_{(\gamma,\tilde{D})}(s, u) = \gamma(s) + u\tilde{D}(s)$ ile tanımlanan yüzeye γ nın rektifiyan developable yüzeyi denir.
- 2) $F_{(B,T)}(s, u) = B(s) + uT(s)$ ile verilen yüzeye γ nın Darboux developable yüzeyi denir.
- 3) $F_{(\tilde{D},N)}(s, u) = \tilde{D}(s) + uN(s)$ ile tanımlı yüzeye γ nın tanjant Darboux developable yüzeyi denir.

Teorem 3.1. $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı bir eğri olsun. Bu durumda

a) γ nın rektifiyan developable yüzeyi $\gamma(s_0) + u_0\tilde{D}(s)$ noktasında lokal olarak cuspidal edge yüzeyine diffeomorftur ancak ve ancak $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'(s_0) \neq 0$, $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)''(s_0) \neq 0$ ve

$$u_0 = \frac{1}{\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'(s_0)} \text{ dir.}$$

b) γ nın rektifiyan developable yüzeyi $\gamma(s_0) + u_0\tilde{D}(s)$ noktasında lokal olarak swallowtail yüzeyine diffeomorftur ancak ve ancak $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'(s_0) \neq 0$, $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)''(s_0) = 0$, $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'''(s_0) \neq 0$ ve $u_0 = \frac{1}{\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'(s_0)}$ dir.

İspat 3.1. $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı bir eğri olsun. γ nın rektifiyan developable yüzeyi $F_{(\gamma,\tilde{D})}(s, u) = \gamma(s) + u\tilde{D}(s)$ olmak üzere bu yüzey denkleminin kısmi türevleri Frenet formüllerinin kullanılmasıyla

$F_s = \left(1 + u \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'\right)T$ ve $F_u = \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)T + B$ olarak bulunur. Buradan gerekli hesaplamalar yapıldığında singüler nokta $u_0 = \frac{1}{\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'(s_0)}$ olarak elde edilir. Bu singüler nokta için singülerite karakterlerine bakalım.

a) Daha önce bahsedildiği üzere cuspidal edge singüleriteleri $\nabla_\alpha(s_0), \nabla_\alpha^2(s_0), \nabla_\alpha^3(s_0)$ lineer bağımsız olduğunda elde edilmektedir. Burada bulunan singüler nokta ile bu şart araştırıldığında

$$\alpha'(s) = u_0' \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)T + u_0' B$$

$$\alpha''(s) = \left(u_0'' \left(\frac{\tau}{\kappa}\right) + u_0' \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'\right)T + u_0'' B$$

$$\alpha'''(s) = \left(u_0''' \left(\frac{\tau}{\kappa}\right) + 2u_0'' \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' + u_0' \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)''\right)T + \left(u_0' \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' \kappa\right)N + u_0''' B$$

olmak üzere $\det(\alpha', \alpha'', \alpha''') = u_0'^3 \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' \kappa$ olarak bulunur.

O halde bu determinantın sıfırdan farklı olması için $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' \neq 0$ ve bununla birlikte $u_0'^3 \neq 0 \Rightarrow \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'' \neq 0$ sonucuna ulaşılır.

b) Swallowtail singülerliği için $\nabla_\alpha(s_0) = 0$ lineer bağımlı ve $\nabla_\alpha^2(s_0), \nabla_\alpha^3(s_0), \nabla_\alpha^4(s_0)$ lineer bağımsız olmalıdır. O halde ilk olarak $\alpha'(s) = 0 \Rightarrow u_0' = 0 \Rightarrow \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'' = 0$ elde edilir. İkinci olarak $u_0' = 0$ iken

$$\det(\alpha'', \alpha''', \alpha^{iv}) = 3u_0''^2 \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' \left(-u_0''' \tau + u_0'' \tau + 2u_0'' \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' \kappa\right)$$

olarak hesaplanır. Lineer bağımsızlık için $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' \neq 0$ ve $u_0'' \neq 0 \Rightarrow \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)''' \neq 0$ şartları sağlanmalıdır.

c) Cuspidal crosscap singülerliği için $\nabla_\alpha(s_0), \nabla_\alpha^2(s_0), \nabla_\alpha^3(s_0)$ lineer bağımlı ve $\nabla_\alpha(s_0), \nabla_\alpha^2(s_0), \nabla_\alpha^4(s_0)$ lineer bağımsız şartları sağlanmalıdır. Bu durumda

$\det(\alpha', \alpha'', \alpha''') = u_0'^3 \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' \kappa = 0$ olmak üzere buradan $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' = 0$ ve bununla birlikte $u_0'^3 = 0 \Rightarrow \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'' = 0$ olmalıdır. Bu koşullar altında $\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')$ hesaplanırsa bu determinantın sonucu sıfır olarak bulunur ki bu da vektörlerin lineer bağımlı olduğu anlamına gelir. O halde cuspidal crosscap singülerliği bulunamaz.

Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.2. $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı bir eğri olsun. Bu durumda

a) γ nın Darboux developable yüzeyi $F_{(B,T)}(s, u) = B(s) + uT(s)$, $F_{(B,T)}(s_0, u_0)$ noktasında lokal olarak cuspidal edge yüzeyine diffeomorftur ancak ve ancak $\tau(s_0) \neq 0, (\tau/\kappa)'(s_0) \neq 0$, ve $u_0 = (\tau/\kappa)(s_0)$ dir. Burada

$$C \times \mathbb{R} = \{(x_1, x_2) | x_1^2 = x_2^3\} \times \mathbb{R} \text{ dir.}$$

b) γ nın Darboux developable yüzeyi $F_{(B,T)}(s, u) = B(s) + uT(s)$, $F_{(B,T)}(s_0, u_0)$ noktasında lokal olarak swallowtail yüzeyine diffeomorftur ancak ve ancak $\tau(s_0) \neq 0, (\tau/\kappa)'(s_0) = 0, (\tau/\kappa)''(s_0) \neq 0$ ve $u_0 = (\tau/\kappa)(s_0)$ dir. Burada

$$SW = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 = 3u^4 + u^2v, x_2 = 4u^3 + 2uv, x_3 = v\} \text{ dir.}$$

c) γ nın tanjant Darboux developable yüzeyi $F_{(B,T)}(s, u) = B(s) + uT(s)$, $F_{(B,T)}(s_0, u_0)$ noktasında lokal olarak cuspidal crosscap yüzeyine diffeomorftur ancak ve ancak $u_0 = \tau(s_0) = 0, (\tau/\kappa)'(s_0) \neq 0$ dir. Burada

$$CCR = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 = u^3, x_2 = u^3v^3, x_3 = v^2\} \text{ dir.}$$

İspat 3.2. $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı bir eğri olsun. γ nın Darboux developable yüzeyi $F_{(B,T)}(s, u) = B(s) + uT(s)$ olmak üzere bu yüzey denkleminin kısmi türevleri, Frenet formüllerinin kullanılmasıyla $F_s = (u\kappa - \tau)N$ ve $F_u = T$ olarak bulunur. Burada ise gerekli hesaplamalar yapıldığında singüler nokta $u_0 = \frac{\tau}{\kappa}(s_0)$ olarak elde edilir. Bu singüler nokta için singülerite karakterlerine bakalım.

a) Biliniyor ki cuspidal edge singüleriteleri $\nabla_\alpha(s_0), \nabla_\alpha^2(s_0), \nabla_\alpha^3(s_0)$ lineer bağımsız olduğunda elde edilmektedir. Burada $u_0 = \frac{\tau}{\kappa}(s_0)$ olarak bulunan singüler nokta ile bu şart araştırıldığında

$$\gamma'(s) = \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' T$$

$$\gamma''(s) = \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'' T + \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' \kappa N$$

$$\gamma'''(s) = \left(\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)''' - \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' \kappa^2\right) T + \left(2 \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'' \kappa + \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' \kappa'\right) N + \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' \kappa \tau B$$

olmak üzere $\det(\gamma', \gamma'', \gamma''') = \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'^3 \kappa^2 \tau$ elde edilir.

O halde bu determinantın sıfırdan farklı olabilmesi için $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'(s_0) \neq 0$ ve $\tau(s_0) \neq 0$ şartları sağlanmalıdır.

b) Swallowtail singülerliği için $\nabla_\alpha(s_0) = 0$ ve $\nabla_\alpha^2(s_0), \nabla_\alpha^3(s_0), \nabla_\alpha^4(s_0)$ lineer bağımsız olmalıdır. Bu durumda $\det(\gamma'', \gamma''', \gamma^{iv}) \neq 0$ şartı sağlanmalıdır. O halde öncelikle $\nabla_\alpha(s_0) = 0$ olabilmesi için

$$\gamma'(s) = \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' T = 0 \Rightarrow \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' = 0$$

olmalıdır. Bununla birlikte

$$\begin{aligned} \gamma^{iv}(s) = & \left(\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'''' - 3 \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'' \kappa^3 - \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' \kappa'(2 - \kappa)\right) T \\ & + \left(\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'' (2\kappa - 3\kappa') + \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' (\kappa'' - \kappa\tau^2 - \kappa^3) + \left(\frac{\tau}{\kappa}\right) \kappa\right) N \\ & + \left(3 \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'' \kappa\tau + \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' (2\kappa'\tau + \kappa\tau')\right) B \end{aligned}$$

$$\det(\gamma'', \gamma''', \gamma^{iv}) = \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'' \left(2 \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'' \kappa 3 \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'' \kappa\tau\right) = 6 \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)''^3 \kappa^2 \tau \neq 0 \text{ olur.}$$

O halde bu determinantın sıfırdan farklı olabilmesi için $\tau(s) \neq 0$ ve $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'' \neq 0$ elde edilir.

c) Cuspidal crosscap singülerliği için $\nabla_\alpha(s_0), \nabla_\alpha^2(s_0), \nabla_\alpha^3(s_0)$ lineer bağımlı ve aynı zamanda $\nabla_\alpha(s_0), \nabla_\alpha^2(s_0), \nabla_\alpha^4(s_0)$ lineer bağımsız olmalıdır. Bu durumda

$$\det(\gamma', \gamma'', \gamma''') = \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'^3 \kappa^2 \tau = 0 \text{ olmak üzere buradan } \tau = 0 \text{ ve}$$

$$\det(\gamma', \gamma'', \gamma^{iv}) = \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' \kappa \left(3 \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'' \kappa\tau + \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' (2\kappa'\tau + \kappa\tau')\right) \neq 0$$

ve buradan da $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' \neq 0$ olarak bulunur.

Teorem 3.3. $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı bir eğri olsun. Bu durumda

a) γ nın tanjant Darboux developable yüzeyi $F_{(\bar{D},N)}(s, u) = \bar{D}(s) + uN(s)$, lokal olarak $F_{(\bar{D},N)}(s_0, u_0)$ noktasında cuspidal edge yüzeyine diffeomorftur ancak ve ancak

$u_0 = \sigma(s_0) \neq 0$, $\sigma'(s_0) \neq 0$ dir.

b) γ nın tanjant Darboux developable yüzeyi $F_{(\bar{D},N)}(s, u) = \bar{D}(s) + uN(s)$, lokal olarak $F_{(\bar{D},N)}(s_0, u_0)$ noktasında swallowtail yüzeyine diffeomorftur ancak ve ancak

$u_0 = \sigma(s_0) \neq 0$, $\sigma'(s_0) = 0$ ve $\sigma''(s_0) \neq 0$ dir.

c) γ nın tanjant Darboux developable yüzeyi $F_{(\bar{D},N)}(s, u) = \bar{D}(s) + uN(s)$, lokal olarak $F_{(\bar{D},N)}(s_0, u_0)$ noktasında cuspidal crosscap yüzeyine diffeomorftur ancak ve ancak

$u_0 = \sigma(s_0) = 0$, $\sigma'(s_0) \neq 0$ dir.

İspat 3.3. $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı bir eğri olsun. γ nın tanjant Darboux developable yüzeyi $F_{(\bar{D},N)}(s, u) = \bar{D}(s) + uN(s)$ olmak üzere bu yüzey denkleminin kısmi türevleri, Frenet formüllerinin kullanılmasıyla $F_s = (u\tau + \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)')B$ ve $F_u = N$ olarak bulunur. Burada ise gerekli hesaplamalar yapıldığında singüler nokta $u_0 = \sigma(s_0)$ olarak elde edilir. Bu singüler nokta için singülerite karakterlerine bakalım.

a) Daha önce verildiği üzere cuspidal edge singüleriteleri $\nabla_\alpha(s_0), \nabla_\alpha^2(s_0), \nabla_\alpha^3(s_0)$ lineer bağımsız olduğunda elde edilmektedir.

Burada $u_0 = \sigma(s_0)$ olarak bulunan singüler nokta ile bu şart araştırıldığında

$$\gamma'(s) = \sigma'N$$

$$\gamma''(s) = -\kappa\sigma'T + \sigma''N + \tau\sigma'B$$

$$\gamma'''(s) = (-\kappa'\sigma' - 2\kappa\sigma'')T + (-\kappa^2\sigma' - \tau^2\sigma' + \sigma'')N + (\tau'\sigma' + 2\tau\sigma'')B$$

olmak üzere

$$\det(\gamma', \gamma'', \gamma''') = \sigma'^3(\kappa\tau' - \tau\kappa') = \sigma\sigma'^3(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}$$

elde edilir.

O halde bu determinantın sıfırdan farklı olabilmesi için $\sigma(s_0) \neq 0$ ve $\sigma'(s_0) \neq 0$ şartları sağlanmalıdır.

b) Swallowtail singülerliği için $\nabla_\alpha(s_0) = 0$ ve $\nabla_\alpha^2(s_0), \nabla_\alpha^3(s_0), \nabla_\alpha^4(s_0)$ lineer bağımsız olmalıdır. Bu durumda $\det(\gamma'', \gamma''', \gamma^{iv}) \neq 0$ şartı sağlanmalıdır. O halde öncelikle $\nabla_\alpha(s_0) = 0$ olabilmesi için

$$\gamma'(s) = \sigma' N = 0 \Rightarrow \sigma' = 0$$

olmalıdır. Bununla birlikte

$$\begin{aligned} \gamma^{iv}(s) = & (-\kappa''\sigma' - 3\kappa'\sigma'' - 2\kappa\sigma''' + \kappa^3\sigma' + \kappa\tau^2\sigma' - \kappa\sigma''')T \\ & + (\sigma^{iv} - 3\kappa\kappa'\sigma' - 3\tau\tau'\sigma'' - 3\kappa^2\sigma'')N \\ & + (-\kappa^2\tau\sigma' - \tau^3\sigma' + \tau\sigma''' + \tau''\sigma' + 3\tau'\sigma'' + 2\tau\sigma''')B \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\det(\gamma'', \gamma''', \gamma^{iv}) = \sigma''(-6\kappa\tau'\sigma''^2 - 4\kappa\tau\sigma''\sigma''' + 6\kappa'\tau\sigma''^2 + 4\kappa\tau\sigma''^2) \neq 0 \text{ olur.}$$

O halde bu determinantın sıfırdan farklı olabilmesi için $\sigma'' \neq 0$ olması gereklidir.

c) Cuspidal crosscap singülerliği için $\nabla_\alpha(s_0), \nabla_\alpha^2(s_0), \nabla_\alpha^3(s_0)$ lineer bağımlı ve aynı zamanda $\nabla_\alpha(s_0), \nabla_\alpha^2(s_0), \nabla_\alpha^4(s_0)$ lineer bağımsız olmalıdır. Bu durumda

$$\det(\gamma', \gamma'', \gamma''') = \sigma'^3(\kappa\tau' - \tau\kappa') = \sigma\sigma'^3(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}} = 0$$

olmak üzere buradan $\sigma = 0$ ve

$$\det(\gamma', \gamma'', \gamma^{iv}) = \sigma'^2(\sigma'(\tau\kappa'' - \kappa\tau'') + 3\sigma''(\tau\kappa' - \kappa\tau')) \neq 0$$

$$\sigma' \neq 0$$

olarak bulunur.

Bu teorem için başka bir ispat metodu da aşağıda verilmiştir.

Sırasıyla $K(s)$ ve $T(s)$, uzay eğrisi $\mathbf{T}(s)$ nin eğriliği ve torsiyonu olarak alınırsa basit bir hesaplamayla

$$K(s) = \sqrt{(\kappa^2 + \tau^2)(s)}, T(s) = \left(\frac{\kappa^2}{\tau^2 + \kappa^2} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' \right) (s) \text{ olarak bulunur.}$$

Bunun sonucunda $\sigma(s) = (T/K)(s)$ elde edilir.

Önerme 3.1. $\kappa(s) \neq 0$ olmak üzere $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı eğri olsun. Bu durumda

a) γ nın rektifiyan developable yüzeyi $F_{(\gamma, \bar{D})}: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ konikal bir yüzeydir.

b) γ bir konikal geodezik eğridir.

İspat 3.4. $F_{(\gamma, \bar{D})}$ nin singüler locusu

$$\sigma(s) = \gamma(s) - \left(\frac{1}{\left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'} \right) (s) \bar{D}(s)$$

ile belirlidir.

Frenet formülleri kullanılarak

$$\sigma'(s) = \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'' (s) \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'^{-2} (s) \bar{D}(s)$$

bulunur. Böylece $\sigma'(s) \equiv 0$ dir ancak ve ancak $(\tau/\kappa)''(s) \equiv 0$ dir. $F_{(\gamma, \bar{D})}$ nin konikal bir yüzeydir ancak ve ancak $\sigma(s) \equiv 0$ ise benzer şekilde gösterilebilir. Bu da ispatı tamamlar.

Önerme 3.2. $\kappa(s) \neq 0$ olmak üzere $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı bir eğri olsun. Bu durumda

a) γ nın tanjant Darboux developable yüzeyi $F_{(\bar{D}, n)}: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ konikal bir yüzeydir.

b) γ bir slant helistir.

İspat 3.5. γ nın tanjant Darboux developable yüzeyi $F_{(\bar{D}, n)}(s, u)$ nin singüler locusu

$\sigma(s) = \bar{D}(s) + \sigma(s)N(s)$ ile verilir. Bu nedenle $F_{(\bar{D}, n)}(s, u)$ ancak ve ancak $\sigma'(s) \equiv 0$

ise konikal bir yüzeydir. Frenet formülü ile $\bar{D}(s) = -\sigma(s)N'(s)$ olduğu görülebilir..

Dolayısıyla $\sigma'(s) \equiv 0$ ancak ve ancak $\sigma'(s) \equiv 0$ dir. Bu da σ nın sabit olduğu anlamına gelir ki bu durumda γ bir slant helis olur.

Örnek 3.1.

$$\gamma(\theta) = \left(-\frac{a^2 - b^2}{2a} \left(\frac{\cos((a+b)\theta)}{(a+b)^2} + \frac{\cos((a-b)\theta)}{(a-b)^2} \right), -\frac{a^2 - b^2}{2a} \left(\frac{\sin((a+b)\theta)}{(a+b)^2} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\sin((a-b)\theta)}{(a-b)^2} \right), \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{ab} \cos b\theta \right)$$

uzay eğrisi ele alınsın. Bu eğri için eğrilik ve torsiyon sırasıyla

$$\kappa(\theta) = \sqrt{a^2 - b^2} \cos b\theta \text{ ve } \tau(\theta) = \sqrt{a^2 - b^2} \sin b\theta$$

olarak hesaplanır. Buradan da

$$\sigma(\theta) = \frac{-b}{a^2 - b^2}$$

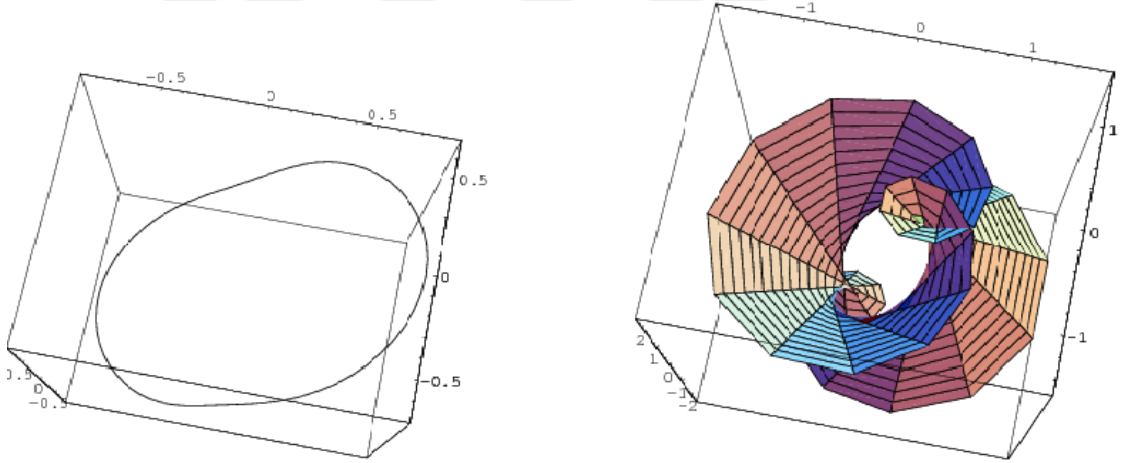
ve

$$\frac{\tau(\theta)}{\kappa(\theta)} = \tan b\theta$$

bulunur. Bununla birlikte

$$\left(\frac{\tau(\theta)}{\kappa(\theta)}\right)' = \frac{-b}{\cos^2 b\theta} \neq 0 \text{ ve } \left(\frac{\tau(\theta)}{\kappa(\theta)}\right)'' = \frac{2b^2}{\cos^2 b\theta} \neq 0$$

dir. Böylece γ nın bir slant helis olduğu ancak dairesel helis olmadığı söylenebilir. Teorem 3.5. e göre bu eğri bir dairesel helisin tanjant developable yüzeyinin geodeziğidir. Hatta bu tanjant developable yüzey $\gamma(\theta)$ nın rektifiyan developale yüzeyidir. $a = 2$ ve $b = 1$ olmak üzere bu eğri ve rektifiyan developable yüzeyi aşağıda görülebilir.



Şekil 3.1 $\gamma(\theta)$ eğrisi ve $\gamma(\theta)$ nın rektifiyan developable yüzeyi

4. BÖLÜM

LORENTZ UZAYINDA MAKSİMAL YÜZEYLER VE SİNGÜLERİTELERİ

Bu bölümde Lorentz uzayında maksimal yüzeylerin singüleriteleri araştırılmıştır. Esasen bu uzayda singüler noktası olmayan tek complete maksimal yüzey düzlemdir. Ancak bunun dışında singüler noktalara sahip birçok complete maksimal yüzey mevcuttur.

Bilindiği üzere 3-boyutlu Lorentz uzayında complete maksimal (ortalama eğriliği sıfır olan) yüzey düzlemdir. Bununla birlikte herhangi bir maksimal yüzey lokal olarak null holomorfik immersiyona yükseltilebilir. Ancak 3-boyutlu Lorentz uzayına null holomorfik immersiyon regüler olmayabilir. Burada bu şekildeki yüzeylere maksyüzeyler denecektir. Aslında bu durum 3-boyutlu hiperbolik uzaydaki düzlemsel yüzeylere benzerdir ki bu uzayda singüler noktaya sahip olmayan complete non-singüler yüzeyler horo-küre ve hiperbolik silindirlerdir.

3-boyutlu Lorentz uzayında bir M manifoldu verilsin.

$g : M \rightarrow E_1^3$ immersiyonu için $ds^2 = \langle dg, dg \rangle$ metriği pozitif tanımlı ise g spacelike denir. Ayrıca M manifoldu yönlendirilebilir. $g : M \rightarrow E_1^3$ spacelike immersiyonunun Lorentz birim normal vektörü v teğet düzleme ortogondur ve $\langle v, v \rangle = -1$ dir. Hatta bir dönüşüm olarak

$$v : M \rightarrow H_{\mp}^2 = H_{+}^2 \cup H_{-}^2$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$H_{+}^2 = \{v = (v_1, v_2, v_3) \in E_1^3 \mid \langle v, v \rangle = -1, v_1 > 0\}$$

$$H_{-}^2 = \{v = (v_1, v_2, v_3) \in E_1^3 \mid \langle v, v \rangle = -1, v_1 < 0\}$$

dir. $v : M \rightarrow H_{\mp}^2$ dönüşümüne g fonksiyonunun Gauss dönüşümü denir. $g : M \rightarrow E_1^3$ spacelike immersiyonu maksimal olarak adlandırılır ancak ve ancak ortalama eğrilik fonksiyonu sıfırdır. $\pi : H_{\mp}^2 \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ dönüşümü için

$$h = \pi \circ v = \frac{\partial h_1}{\partial h_2 - \sqrt{-1} \partial h_3}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $h = (h_1, h_2, h_3)$ fonksiyonu maksimaldir. Ayrıca v nin görüntü kümesi H_{\mp}^2 olduğundan M üzerinde $|h| \neq 1$ dir. Maksimal yüzeyin Gauss dönüşümü

$$v = \frac{1}{1 - |h|^2} (-(1 + |h|^2), 2\text{Re}h, 2\text{Im}h)$$

şeklinde yazılabilir. M manifoldunun holomorfik dönüşümü $G = (G_1, G_2, G_3) : M \rightarrow \mathbb{C}^3$ olsun. Eğer $\langle dG, dG \rangle = -(dG_1)^2 + (dG_2)^2 + (dG_3)^2 = 0$ ise G ye Lorentz null dönüşümü denir.

$h : M \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ fonksiyonu, spacelike maksimal immersiyon g nin Gauss dönüşümü olsun. Bu durumda holomorfik dönüşüm

$$G = \frac{1}{2} \int_{z_0}^z (-2h, (1 + h^2), \sqrt{-1}(1 - h^2)) w$$

bir Lorentz null dönüşüm olur. Burada w , M üzerinde bir 1-formdur.

$$w = \partial g_2 - \sqrt{-1} \partial g_3$$

ve $ds^2 = (1 - |h|^2)^2 w \bar{w}$ dir.

Tanım 4.1. $d\sigma^2 = (1 + |h|^2)^2 |w|^2 = 2(|dG_1|^2 + |dG_2|^2 + |dG_3|^2)$ kümesi verilsin. Bu kümeye h maksyüzeyinin lift-metriği denir. Bununla birlikte (h, w) ikilisine g maksyüzeyinin Weierstrass datası denir. Ayrıca h, g nin regüler noktaları üzerindeki Gauss dönüşümüdür.

$K_{d\sigma^2}$, lift-metrik $d\sigma^2$ nin Gauss eğriliği olsun. Bu durumda

Tanım 4.2. $g : M \rightarrow E_1^3$ yönlendirilmiş 2-manifold olan M üzerinde bir fonksiyon olsun. Eğer $W \subset M$ açığı, g_W bir maksimal immersiyon olacak şekilde mevcutsa g ye maksimal dönüşüm denir. Bununla birlikte bir p noktasında ds^2 dejenere ise bu durumda p noktası g nin bir singüler noktası olur.

Tanım 4.3. $g : M \rightarrow E_1^3$, $W \subset M$ açığı üzerinde maksimal immerisyonu veren bir maksimal dönüşüm ve $p \in M \setminus W$ bir singüler noktası olsun. Bu durumda eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyor ise p admissible singüler nokta adını alır.

a) p noktasının bir U komşuluğu üzerinde $\beta : U \cap W \rightarrow R_+$ fonksiyonu C^1 sınıfından diferensiyellenebilirdir.

b) $dg(p) \neq 0$ dir.

Eğer bütün singüler noktalar admissible iseler bu durumda g ye maksyüzey denir.

Ayrıca $dg(p) \neq 0$ olması p singüler noktasında $rank(dg) = 1$ olduğu anlamına gelir.

Önerme 4.1. M bir yüzey ve $F : M \rightarrow \mathbb{C}^3$ bir Lorentz null immersiyon ve

$$-|dF_1|^2 + |dF_2|^2 + |dF_3|^2 \neq 0$$

olsun. Bu durumda $g = F + \bar{F}$ bir maksyüzeydir.

Şimdi maksyüzeylerin singülerite karakterleri ele alınacaktır.

Öklid uzayına benzer şekilde

$$CP = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 = y^3\}$$

$$SW = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 3u^4 + u^2v, y = 4u^3 + 2uv, z = v\}$$

kümeleleri sırasıyla cuspidal edge ve swallowtaildir.

Teorem 4.1. U , kompleks düzlem (\mathbb{C}, z) nin bir açığı ve $g : U \rightarrow E_1^3$, (h, w) Weierstrass data ile maksyüzey olsun. Bu durumda

a) $p \in U$ bir singüler noktadır ancak ve ancak $|h(p)| = 1$ dir.

b) g nin bir singüler p noktasının komşuluğunda görüntüsü lokal olarak cuspidal edge yüzeyine diffeomorftur ancak ve ancak

$$Re\left(\frac{h'}{h^2\hat{w}}\right) \neq 0$$

ve

$$Im\left(\frac{h'}{h^2\hat{w}}\right) \neq 0$$

dir. Burada $w(z) = \hat{w}(z)dz$ ve $' = \frac{d}{dz}$ dir.

c) g nin bir singüler p noktasının komşuluğunda görüntüsü lokal olarak swallowtail yüzeyine diffeomorftur ancak ve ancak

$$\frac{h'}{h^2\hat{w}} \in \mathbb{R}\{0\}$$

ve

$$\operatorname{Re} \left(\frac{h}{h'} \left(\frac{h'}{h^2 \widehat{w}} \right)' \right) \neq 0$$

dir.

Önerme 4.2. $p = \gamma(0)$, $g: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ fonksiyonunun bir non-dejenere singüler noktası olsun. Burada p bir singüler nokta olmak üzere $\gamma = \gamma(t): (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ eğrisine singüler eğri denir. Ayrıca $\gamma(t)$ nin teğet doğrultusu singüler doğrultu olarak tanımlıdır. Özel olarak $dg(\mu) = 0$ olacak şekildeki sıfırdan farklı μ vektörüne null doğrultu denir. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur.

a) g nin p noktasındaki görüntüsü lokal olarak cuspidal edge yüzeyine diffeomorftur ancak ve ancak $\mu(0), \dot{\gamma}(0)$ in bir katı değildir.

b) g nin p noktasındaki görüntüsü lokal olarak swallowtail yüzeyine diffeomorftur ancak ve ancak $\mu(0), \dot{\gamma}(0)$ in bir katıdır ve $\frac{d}{dt} \det(\dot{\gamma}(t), \mu(t))|_{(t=0)} \neq 0$ dir.

5. BÖLÜM

GALİLE UZAYINDA SİNGÜLERİTELER

5.1 Galile Geometrisinde Bazı Fonksiyonların Singüleriteleri

Öklid uzayına benzer şekilde, 3-boyutlu Galile uzayında $\tilde{D}(s) = (\tau/\kappa)(s)T(s) + B(s)$ bir γ eğrisinin modifiye Darboux vektörüdür. Ayrıca $d : I \rightarrow S_G^2$ küresel eğrisi

$$d(s) = \frac{D(s)}{\|D(s)\|}$$

olarak verilsin. Burada $S_G^2 = \{(x, y, z) \mid |x - x_0| = r\}$ olarak tanımlıdır.

Ayrıca

$$RG(\gamma) = T(s) + uB(s)$$

$$RD(\gamma) = \gamma(s) + u\tilde{D}(s)$$

yüzeyleri verilsin. d küresel Darboux görüntüsü, $RG(\gamma)$ rektifiyan Gauss yüzeyi ve $RD(\gamma)$ ise γ nın rektifiyan developable yüzeyidir.

Teorem 5.1.1. $\gamma : I \rightarrow G_3$ birim hızlı bir eğri olsun.

a) Galile küresel Darboux görüntüsü $d(s_0)$ noktasında lokal olarak cusp eğrisine diffeomorftur ancak ve ancak $\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'(s_0) \neq 0$ ve $\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)''(s_0) \neq 0$ dir.

b) γ eğrisinin rektifiyan Gauss yüzeyi lokal olarak cuspidal edge yüzeyine $T(s_0) + u_0B(s_0)$ noktasında diffeomorftur ancak ve ancak $u_0 = \frac{\kappa}{\tau}(s_0)$ ve $\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'(s_0) \neq 0$ dir.

c) γ eğrisinin rektifiyan Gauss yüzeyi lokal olarak swallowtail yüzeyine

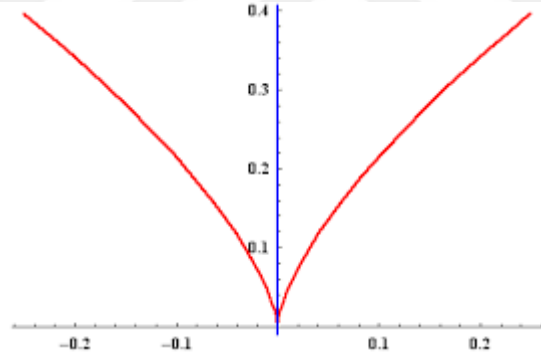
$T(s_0) + u_0B(s_0)$ noktasında diffeomorftur ancak ve ancak $u_0 = \frac{\kappa}{\tau}(s_0)$, $\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'(s_0) = 0$ ve $\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)''(s_0) \neq 0$ dir.

d) γ eğrisinin rektifiyan developable yüzeyi $\gamma(s_0) + u_0\tilde{D}(s)$ noktasında lokal olarak cuspidal edge yüzeyine diffeomorftur ancak ve ancak $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'(s_0) \neq 0$, $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)''(s_0) \neq 0$ ve

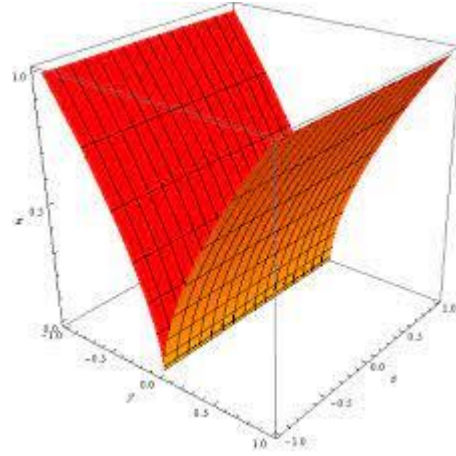
$$u_0 = \frac{1}{\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'(s_0)} \text{ dir.}$$

e) γ nın rektifiyan developable yüzeyi $\gamma(s_0) + u_0\tilde{D}(s)$ noktasında lokal olarak swallowtail yüzeyine diffeomorftur ancak ve ancak $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'(s_0) \neq 0$, $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)''(s_0) = 0$, $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'''(s_0) \neq 0$ ve $u_0 = \frac{1}{\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'(s_0)}$ dir.

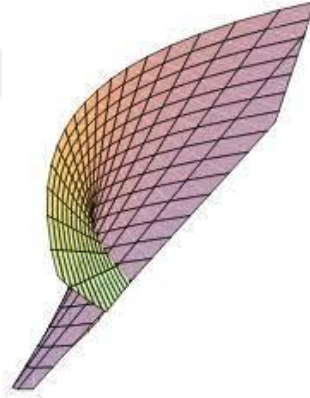
Burada cusp eğrisi $C = \{(x_1, x_2) | x_1^2 = x_2^3\}$ ve swallowtail $SW = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 = 3u^4 + u^2v, x_2 = 4u^3 + 2uv, x_3 = v\}$ dir.



Şekil 5.1.1 Cusp Eğrisi



Şekil 5.1.2 Cuspidal Edge



Şekil 5.1.3 Swallowtail

$\gamma : I \rightarrow G_3$, $\kappa \neq 0$ olan birim hızlı bir eğri olsun. Bununla birlikte $\tau \neq 0$ olduğu kabul edilsin.

$F_h : I \times S_G^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $F_h(s, v) = \det(T(s), N(s), v)$ şeklinde tanımlansın. Bu şekilde ifade edilen F_h fonksiyonuna γ eğrisi üzerinde Galile yükseklik fonksiyonu denir. O halde aşağıdaki önerme verilebilir.

Önerme 5.1.1. $\gamma: I \rightarrow G_3$, $\kappa \neq 0$ ve $\tau \neq 0$ olan birim hızlı bir eğri olsun.

a) $F'_{hv}(s) = 0$ dir ancak ve ancak $v = \lambda T(s) + \mu B(s)$, $|\lambda| = \pm 1$ olacak şekilde λ ve μ sabitleri vardır.

b) $F''_{hv}(s) = F'_{hv}(s) = 0$ dir ancak ve ancak $v = \pm(T(s) + \frac{\kappa}{\tau}(s)B(s))$ dir.

c) $F'''_{hv}(s) = F''_{hv}(s) = F'_{hv}(s) = 0$ dir ancak ve ancak

$$v = \pm\left(T(s) + \frac{\kappa}{\tau}(s)B(s)\right), \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'(s) = 0 \text{ dir.}$$

d) $F^{lv}_{hv}(s) = F'''_{hv}(s) = F''_{hv}(s) = F'_{hv}(s) = 0$ dir ancak ve ancak

$$v = \pm\left(T(s) + \frac{\kappa}{\tau}(s)B(s)\right), \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'(s) = \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)''(s) = 0 \text{ dir.}$$

e) $F^v_{hv}(s) = F^{lv}_{hv}(s) = F'''_{hv}(s) = F''_{hv}(s) = F'_{hv}(s) = 0$ dir ancak ve ancak

$$v = \pm\left(T(s) + \frac{\kappa}{\tau}(s)B(s)\right), \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'(s) = \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)''(s) = \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'''(s) = 0 \text{ dir.}$$

İspat 5.1.1. Frenet formülleri kullanılarak gerekli hesaplamalar yapıldığında aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

i) $F'_{hv}(s) = \tau(s)\det(T(s), B(s), v)$

ii) $F''_{hv}(s) = \tau' \det(T, B, v) + \kappa\tau \det(N, B, v) - \tau^2 \det(T, N, v)$

iii) $F'''_{hv}(s) = (\tau'' - \tau^3) \det(T, B, v) + (2\kappa\tau' + \kappa'\tau) \det(N, B, v) - (3\tau\tau') \det(T, N, v)$

iv) $F^{lv}_{hv}(s) = (\tau'' - 6\tau^2\tau') \det(T, B, v) + (3\kappa\tau''\kappa\tau^3 + 3\kappa'\tau' + \kappa''\tau) \det(N, B, v) + (\tau^4 - 4\tau\tau' - 3\tau'^2) \det(T, N, v)$

v) $F^v_{hv}(s) = (\tau^4 - 15\tau\tau'^2 - 10\tau^2\tau'' + \tau^5) \det(T, B, v) + (6\kappa'\tau'' + 4\kappa\tau'''' + 4\kappa''\tau' - 9\kappa\tau^2\tau' + \kappa'''\tau - \kappa'\tau^3) \det(N, B, v) + (10\tau^3\tau' - 10\tau'\tau'' - 5\tau\tau''') \det(T, N, v)$

(a) (a) şıkkı (i) numaralı sonuç sebebiyle aşikardır. $v \in S_G^2$ olarak kabul edildiğinde

$$v = \pm T(s) + \mu B(s) \text{ olarak bulunur.}$$

(b) (a) şıkkındaki sonuç (ii) numaralı denklemden kullanıldığında $\mu = \pm \frac{\kappa}{\tau}$ olarak

hesaplanır ve bu sonuçla $v = \pm\left(T(s) + \frac{\kappa}{\tau}(s)B(s)\right)$ elde edilir.

(c) (b) şikkı (iii) numaralı eşitlikte kullanılırsa $\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)' = 0$ elde edilir. Böylece (c) şikkına ulaşılmış olur.

(d) (c) şikkı (iv) numaralı denklemde yerine yazılıp $\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)' = 0$ eşitliğinin kullanılmasıyla $\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'' = 0$ bulunur.

(e) Bu şikkın ispatı için de benzer yöntemler kullanılır.

Şimdi Galile uzayında uzaklık fonksiyonunu tanımlayalım.

$F_d : I \times G^3 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $F_d(s, u) = \det(T, N, \gamma - u)$ şeklinde verilsin. Bu fonksiyona γ üzerinde uzaklık fonksiyonu denir. Bu durumda aşağıdaki önerme verilebilir.

Önerme 5.1.2. $\gamma : I \rightarrow G_3$, $\kappa \neq 0$ ve $\tau \neq 0$ olan birim hızlı bir eğri olsun.

a) $F'_{du}(s) = 0$ dir ancak ve ancak $\gamma - u = \lambda T(s) + \mu B(s)$ olacak şekilde λ ve μ sabitleri vardır.

b) $F''_{du}(s) = F'_{du}(s) = 0$ dir ancak ve ancak $\gamma - u = \mu \left(\frac{\tau}{\kappa} T + B\right)$ dir.

c) $F'''_{du}(s) = F''_{du}(s) = F'_{du}(s) = 0$ dir ancak ve ancak

$$\gamma - u = \frac{1}{\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'} \left(\frac{\tau}{\kappa} T + B\right), \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'(s) \neq 0 \text{ dir.}$$

d) $F^{lv}_{du}(s) = F'''_{du}(s) = F''_{du}(s) = F'_{du}(s) = 0$ dir ancak ve ancak

$$\gamma - u = \frac{1}{\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'} \left(\frac{\tau}{\kappa} T + B\right), \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'(s) \neq 0 \text{ ve } \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)''(s) \neq 0 \text{ dir.}$$

e) $F^v_{du}(s) = F^{lv}_{du}(s) = F'''_{du}(s) = F''_{du}(s) = F'_{du}(s) = 0$ dir ancak ve ancak

$$\gamma - u = \frac{1}{\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'} \left(\frac{\tau}{\kappa} T + B\right), \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'(s) \neq 0, \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)''(s) = \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'''(s) = 0 \text{ dir.}$$

İspat 5.1.2. Frenet formülleri kullanılarak gerekli hesaplamalar yapıldığında aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

i) $F'_{du}(s) = \tau(s) \det(T(s), B(s), \gamma(s) - u)$

ii) $F''_{du}(s) = \tau'(s) \det(T, B, \gamma - u) + \kappa \tau \det(N, B, \gamma - u) - \tau^2 \det(T, N, \gamma - u)$

$$\text{iii) } F_{du}'''(s) = (\tau'' - \tau^3) \det(T, B, \gamma - u) + (2\kappa\tau' + \kappa\tau) \det(N, B, \gamma - u) - (3\tau\tau') \det(T, N, \gamma - u) + \kappa\tau$$

$$\text{iv) } F_{du}^{lv}(s) = (\tau''' - 6\tau^2\tau') \det(T, B, \gamma - u) + (3\kappa\tau'' - \kappa\tau^3 + 3\kappa'\tau' + \kappa''\tau) \det(N, B, \gamma - u) + (\tau^4 - 4\tau\tau' - 3\tau'^2) \det(T, N, \gamma - u) + 2\kappa'\tau + 3\kappa\tau'$$

$$\text{v) } F_{du}^v(s) = (\tau^4 - 15\tau\tau'^2 - 10\tau^2\tau'' + \tau^5) \det(T, B, \gamma - u) + (6\kappa'\tau'' + 4\kappa\tau''' + 4\kappa''\tau' - 9\kappa\tau^2\tau' + \kappa'''\tau - \kappa'\tau^3) \det(N, B, \gamma - u) + (10\tau^3\tau' - 10\tau'\tau'' - 5\tau\tau''') \det(T, N, \gamma - u) + 6\kappa\tau'' + 8\kappa'\tau' + 3\kappa''\tau - \kappa\tau^3$$

(a) (i) numaralı sonuç sebebiyle aşıkardır. Böylece

$\gamma - u = \lambda T(s) + \mu B(s)$ olarak bulunur.

(b) (a) şıkkındaki sonuç (ii) numaralı denklemde kullanıldığında $\lambda = \frac{\tau}{\kappa} \mu$ olarak hesaplanır ve bu sonuçla $\gamma - u = \mu \left(\frac{\tau}{\kappa} T + B \right)$ elde edilir.

(c) (b) şıkkı (iii) numaralı eşitlikte kullanılırsa $\mu = \frac{1}{\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'}$ ve $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' \neq 0$ elde edilir.

(d) (c) şıkkı (iv) numaralı denklemde yerine yazılırsa $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'' = 0$ bulunur.

(e) Bu şıkkın ispatı için de benzer yöntemler kullanılır.

5.2. Galile Uzayında Helisler ve Teğet Doğrultusu

Bu bölümde Galile uzayında bir uzay eğrisinin rektifiyan developable yüzeyi, Galile küresel Darboux görüntüsü ve rektifiyan Gauss yüzeyinin geometrik özellikleri incelenecektir. Bir önceki bölümde verilen önermeler doğrultusunda $\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'$ ve modifiye Darboux vektörü $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right) T + B$ nin önem teşkil ettiği anlaşılabilir. Eğer $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right) = \text{sabit}$ ise bu durumda γ eğrisi Galile uzayında bir helis olacaktır. Galile çemberi ise düzlem üzerinde eğriliği sıfırdan farklı bir sabit olan tek eğridir. Herhangi birim hızlı γ eğrisi için teğet eğri olan $\beta: I \rightarrow S_G^2$, $\beta(s) = T(s)$, γ eğrisinin Galile küresel teğet görüntüsüdür.

Önerme 5.2.1. $\gamma: I \rightarrow G_3$ birim hızlı bir eğri olsun. Bu durumda γ bir helistir ancak ve ancak modifiye darboux vektörü \tilde{D} sabit bir vektördür. Bu durumda aşağıdaki durumlar verilebilir.

a) $\beta : I \rightarrow S_G^2$, $\beta(s) = T(s)$, γ eğrisinin Galile küresel teğet görüntüsü, Galile birim küresi S_G^2 üzerinde bir çemberdir.

b) γ eğrisinin rektifiyan developable yüzeyi $\gamma + u\tilde{D}$ biçimindedir.

İspat 5.2.1. Frenet formülleri kullanılarak modifiye Darboux vektörünün türevi hesaplanırsa $\tilde{D}' = \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' T$ olarak bulunur. Bu durumda açıkça görülebilir ki γ bir helistir ancak ve ancak $\tilde{D}' = 0$ dir. Bu önerme ise modifiye Darboux vektörünün sabit bir vektör olması anlamına gelir. Bu durumda

$$\beta(s) = T(s), \beta'(s) = \kappa(s)N(s), \beta''(s) = \kappa'(s)N(s) + \kappa(s)\tau(s)B(s) \text{ olur.}$$

β eğrisinin eğriliği $\kappa_\beta(s) = \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'(s) = \text{sabit}$ olur. Bu ise Galile küresel teğet görüntüsü β nın Galile birim küresi üzerinde bir çember olması demektir.

5.3. Galile Uzayında Bir Parametrelili Fonksiyonların Açılımı

Bu kısımda Galile uzayında fonksiyonlar için singülerite teorisi ile ilgili bazı sonuçlar verilecektir.

$H : (I \times \mathbb{R}^r, (s_0, w_0)) \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. H fonksiyonuna $f(s) = H_{w_0}(s, w_0)$ fonksiyonunun r -parametrelili unfoldingi denir. Eğer her $1 \leq q \leq k$ için $f^{(q)}(s_0) = 0$ ve $f^{(k+1)}(s_0) \neq 0$ ise f fonksiyonu s_0 noktasında A_k singüleritesine sahiptir denir. Bununla birlikte eğer her $1 \leq q \leq k$ için $f^{(q)}(s_0) = 0$ ise f fonksiyonu s_0 noktasında $A_{\geq k}$ singüleritesine sahiptir denir. Şimdi H bir f fonksiyonunun unfoldingi ve $f(s)$ fonksiyonu da $k \geq 1$ olmak üzere s_0 noktasında A_k singüleritesine sahip olsun. H fonksiyonunun s_0 noktasındaki kısmi türevi $\frac{dH}{dw_1}$

$$J^{k-1} \left(\frac{dH}{dw_1}(s, w_0) \right) (s_0) = \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_{ij} x^j$$

şeklinde gösterilsin. Bu durumda eğer katsayılar matrisi (α_{ij}) nin rankı $k - 1$, $k - 1 \leq r$ ise H fonksiyonuna p yönlü unfolding denir.

Şimdi de H fonksiyonun çatallanma kümesi B_H kümesini tanımlayalım.

$$B_H = \left\{ \vartheta \in \mathbb{R}^r \mid (s, \vartheta) \text{ noktasında } \frac{\partial H}{\partial \vartheta} = \frac{\partial^2 H}{\partial \vartheta^2} = 0 \right\}$$

H fonksiyonun diskriminant kümesi ise

$$D_H = \left\{ \vartheta \in \mathbb{R}^r \mid (s, \vartheta) \text{ noktasında } \frac{\partial H}{\partial \vartheta} = 0 \right\}$$

olarak tanımlıdır.

Bu tanımlarla birlikte aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 5.3.1. $H : (I \times \mathbb{R}^r, (s_0, w_0)) \rightarrow \mathbb{R}$, s_0 noktasında A_k singüleritesine sahip bir $f(s)$ fonksiyonunun r -parametrelili unfoldingi olsun.

1) H , p yönlü bir unfolding olsun.

- a) Eğer $k = 2$ ise B_H , lokal olarak $\{0\} \times \mathbb{R}^{r-1}$ e diffeomorftur.
- b) Eğer $k = 3$ ise B_H , lokal olarak $C \times \mathbb{R}^r$ e diffeomorftur.
- c) Eğer $k = 4$ ise B_H , lokal olarak $SW \times \mathbb{R}^{r-3}$ e diffeomorftur.

2) H , yönlü bir unfolding olsun.

- a) Eğer $k = 2$ ise D_H , lokal olarak $\{0\} \times \mathbb{R}^{r-1}$ e diffeomorftur.
- b) Eğer $k = 3$ ise D_H , lokal olarak $C \times \mathbb{R}^r$ e diffeomorftur.
- c) Eğer $k = 4$ ise D_H , lokal olarak $SW \times \mathbb{R}^{r-3}$ e diffeomorftur.

Burada cusp eğrisi $C = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 = x_2^3\}$ ve swallowtail $SW = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = 3u^4 + u^2v, x_2 = 4u^3 + 2uv, x_3 = v\}$ dir.

Önerme 5.3.1. $F_h : I \times S_G^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu birim hızlı γ eğrisi üzerinde yükseklik fonksiyonu olsun. Eğer F_{hv_0} , s_0 noktasında A_k singüleritesine sahip ise ($k = 2, 3$) bu durumda F_h fonksiyonu F_{hv_0} nin p yönlü bir unfoldingidir.

İspat 5.3.1. $\gamma(s) = (s, y(s), z(s))$ ve $v = (1, v_2, v_3)$ olsun. Yükseklik fonksiyonunun tanımından $F_H = \det(T, N, v)$ dir. Böylece

$$F_H = \frac{1}{\kappa} (y''v_3 - z''v_2 + y'z'' - y''z')$$

olur. Daha önce tanımlanan

$$J^{k-1} \left(\frac{dF_H}{dv_i}(s, v_0) \right) (s_0)$$
 ifadesinden

$$J^3 \left(\frac{dF_H}{dv_i}(s, v_0) \right) (s_0) = b'_i(s_0)s + \frac{1}{2}b''_i(s_0)s^2 + \frac{1}{6}b'''_i(s_0)s^3, i = 2,3$$

bulunur. Burada $B(s) = (0, b_2, b_3)(s) = \frac{1}{\kappa}(0, -z'', y'')$ dir.

Şimdi iki durum ele alınacaktır.

Durum 1: F_{hv_0} , s_0 noktasında A_2 singüleritesine sahiptir. Bu durumda aşağıdaki matris yazılabilir:

$$P = \begin{bmatrix} -\left(\frac{z''(s_0)}{\kappa(s_0)}\right)' & \left(\frac{y''(s_0)}{\kappa(s_0)}\right)' \end{bmatrix}$$

Durum 2: F_{hv_0} , s_0 noktasında A_3 singüleritesine sahiptir. Bu durumda aşağıdaki matris yazılabilir:

$$Q = \begin{bmatrix} -\left(\frac{z''(s_0)}{\kappa(s_0)}\right)' & \left(\frac{y''(s_0)}{\kappa(s_0)}\right)' \\ -\left(\frac{z''(s_0)}{\kappa(s_0)}\right)'' & \left(\frac{y''(s_0)}{\kappa(s_0)}\right)'' \end{bmatrix}$$

Böylece Frenet formüllerinden $\det Q = \det(T, B', B'')$ olarak bulunur. Bununla birlikte Frenet türevleri ile birlikte $\det Q = \tau^3(s_0)$ sonucuna ulaşılır.

$\tilde{F}_h: I \times S_G^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\tilde{F}_h(s, v, w) = F(s, v) - w$ olarak tanımlansın.

Önerme 5.3.2. Eğer s_0 noktasında $\tilde{F}_h(s, v, w)$, $A_k, k = 1,2,3$ singüleritesine sahipse bu durumda F_h fonksiyonu \tilde{F}_h nin yönlü unfoldingi olur.

İspat 5.3.2. Önerme 5.3.1 deki yaklaşım kullanılarak

$$\tilde{F}_h(s, v, v_1) = \frac{1}{\kappa}(y''v_3 - z''v_2 + y'z'' - y''z') - v_1$$

bulunur. Bununla birlikte $i = 2,3$ ve $J^{k-1} \left(\frac{d\tilde{F}_h}{dv_i}(s, v_0) \right) (s_0)$ için

$$\frac{\partial \tilde{F}_h}{\partial v_1}(s_0, v_0) + J^2 \left(\frac{\partial \tilde{F}_h}{\partial v_1}(s_0, v_0) \right) (s_0) = -1 + 0s + 0\frac{1}{2}s^2$$

$$\frac{\partial \tilde{F}_h}{\partial v_i}(s_0, v_0) + J^2 \left(\frac{\partial \tilde{F}_h}{\partial v_i}(s_0, v_0) \right) (s_0) = b_i(s_0) + b'_i(s_0)s + b''_i(s_0)\frac{s^2}{2}$$

dir.

Şimdi üç durum ele alınacaktır.

Durum 1: \tilde{F}_h, s_0 noktasında A_1 singüleritesine sahiptir. Bu durumda aşağıdaki matris yazılabilir

$$R = \begin{bmatrix} -\left(\frac{z''(s_0)}{\kappa(s_0)}\right) & \left(\frac{y''(s_0)}{\kappa(s_0)}\right) \end{bmatrix}$$

Durum 2: \tilde{F}_h, s_0 noktasında A_2 singüleritesine sahiptir. Bu durumda aşağıdaki matris yazılabilir:

$$S = \begin{bmatrix} -1 & -\left(\frac{z''(s_0)}{\kappa(s_0)}\right) & \left(\frac{y''(s_0)}{\kappa(s_0)}\right) \\ 0 & -\left(\frac{z''(s_0)}{\kappa(s_0)}\right)' & \left(\frac{y''(s_0)}{\kappa(s_0)}\right)' \end{bmatrix}$$

Durum 3: \tilde{F}_h, s_0 noktasında A_3 singüleritesine sahiptir. Bu durumda aşağıdaki matris yazılabilir:

$$U = \begin{bmatrix} -1 & -\left(\frac{z''(s_0)}{\kappa(s_0)}\right) & \left(\frac{y''(s_0)}{\kappa(s_0)}\right) \\ 0 & -\left(\frac{z''(s_0)}{\kappa(s_0)}\right)' & \left(\frac{y''(s_0)}{\kappa(s_0)}\right)' \\ 0 & -\left(\frac{z''(s_0)}{\kappa(s_0)}\right)'' & \left(\frac{y''(s_0)}{\kappa(s_0)}\right)'' \end{bmatrix}$$

Galile uzaklık fonksiyonundan sıradadaki önermeyi verebiliriz.

Önerme 5.3.3. Birim hızlı γ eğrisi üzerinde $F_d: I \times G^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uzaklık fonksiyonu $F_d(s, u) = \det(T, N, \gamma - u)$ verilsin. Eğer F_{du_0}, s_0 noktasında $A_k, (k = 2, 3, 4)$ singüleritesine sahip ise bu durumda F_d fonksiyonu F_{du_0} in p-yönlü bir unfoldingi olur.

İspat 5.3.3. $\gamma(s) = (s, y(s), z(s))$ ve $(u = u_1, u_2, u_3)$ olsun. Uzaklık fonksiyonunun tanımından

$$\begin{aligned} F_d(s, u) &= \det(T, N, \gamma - u) \\ &= (s - u_1) \left(y' \frac{z''}{\kappa} - z' \frac{y''}{\kappa} \right) - (y - u_2) \frac{z''}{\kappa} + (z - u_3) \end{aligned}$$

bununla birlikte $J^{k-1} \left(\frac{\partial F_d}{\partial u_i}(s, u_0) \right) (s_0)$ ve $p(s) = -y' \frac{z''}{\kappa} + z' \frac{y''}{\kappa}$ için

$$J^3 \left(\frac{\partial F_d}{\partial u_i}(s, u_0) \right) (s_0) = p'(s_0)s + \frac{1}{2}p''(s_0)s^2 + \frac{1}{6}p'''(s_0)s^3$$

$$J^3 \left(\frac{\partial F_d}{\partial u_i}(s, u_0) \right) (s_0) = -b'_i(s_0)s - \frac{1}{2}b''_i(s_0)s^2 - \frac{1}{6}b'''_i(s_0)s^3$$

olur. Burada $B(s) = (0, b_2, b_3) = \frac{1}{\kappa}(0, -z'', y'')$ dir. Şimdi üç farklı durum ele alınacaktır.

Durum 1: s_0 noktasında F_{du_0} fonksiyonu A_2 singüleritesine sahiptir. Bu durumda aşağıdaki G matrisi tanımlanabilir.

$$G = [p'(s_0) \quad -b'_2(s_0) \quad -b'_3(s_0)]$$

$$G = \left[\left(y' \frac{z''}{\kappa} - z' \frac{y''}{\kappa} \right)' \quad \left(\frac{z''}{\kappa} \right)' \quad \left(-\frac{y''}{\kappa} \right)' \right]$$

Ayrıca Frenet formüllerinden $B'(s) = -\tau N \neq 0$ dir. Böylece G matrisinin rankı 1 dir.

Durum 2: s_0 noktasında F_{du_0} fonksiyonu A_3 singüleritesine sahiptir. Bu durumda aşağıdaki H matrisi tanımlanabilir.

$$H = \begin{bmatrix} p'(s_0) & -b'_2(s_0) & -b'_3(s_0) \\ p''(s_0) & -b''_2(s_0) & -b''_3(s_0) \end{bmatrix}$$

Burada H matrisinin rankı 2 dir.

Durum 3: s_0 noktasında F_{du_0} fonksiyonu A_4 singüleritesine sahiptir. Bu durumda aşağıdaki K matrisi singüler olmayarak biçimde tanımlanabilir.

$$K = \begin{bmatrix} p'(s_0) & -b'_2(s_0) & -b'_3(s_0) \\ p''(s_0) & -b''_2(s_0) & -b''_3(s_0) \\ p'''(s_0) & -b'''_2(s_0) & -b'''_3(s_0) \end{bmatrix}$$

Bunun için $\det K \neq 0$ olduğunu belirtmek yeterlidir. $E = (1,0,0)$ için $p(s) = \det(T, E, N)$ olmak üzere

$$p'(s) = \tau \det(T, E, B)$$

$$p''(s) = \tau' \det(T, E, B) - \tau^2 \det(T, E, N) - \kappa \tau$$

$$p'''(s) = (\tau'' - \tau^3) \det(T, E, B) - 3\tau\tau' \det(T, E, N) - \kappa'\tau - 2\kappa\tau'$$

dir. Bu hesaplamalar K matrisinin ilk sütununa göre yapılmıştır. Böylece

$$\det K = p' \det(E, N'', N''') - p'' \det(E, N', N''') + p''' \det(E, N', N'')$$

olmak üzere Frenet formüllerinden gerekli türevler yerlerine yazıldığında

$$\det K = \kappa^2 \tau^3 \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'$$

elde edilir. Burada $\kappa \neq 0, \tau \neq 0$ ve s_0 noktasında F_{du_0} fonksiyonu A_4 singüleritesine sahiptir. Böylece $\left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' \neq 0$ ve $\det K \neq 0$ dir.

5.4. Galile Uzayında Developable Yüzeyler ve Singüleriteler

Bu bölümde 3-boyutlu Galile uzayında verilen bir eğrinin üç farklı developable yüzeyi ele alınmıştır. Developable yüzeyler Galile uzayında da regle yüzeylerdir ve $F_{(\gamma, \delta)} : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dönüşümü ile belirlidirler. Burada $\gamma : I \rightarrow G_3$ ve $\delta : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ olmak üzere $F_{(\gamma, \delta)}(t, u) = \gamma(t) + u\delta(t)$ dir.

3-boyutlu Galile uzayında $\kappa(s) \neq 0$ olmak üzere γ birim hızlı bir eğri olsun.

1) $F_{(\gamma, \bar{D})}(s, u) = \gamma(s) + u\bar{D}(s)$ ile tanımlanan yüzeye γ nın rektifiyan developable yüzeyi denir.

2) $F_{(B, T)}(s, u) = B(s) + uT(s)$ ile verilen yüzeye γ nın Darboux developable yüzeyi denir.

3) $F_{(\bar{D}, N)}(s, u) = \bar{D}(s) + uN(s)$ ile tanımlı yüzeye γ nın tanjant Darboux developable yüzeyi denir.

Burada $\bar{D}(s) = \left(\frac{\tau}{\kappa} \right) T + B$, γ eğrisinin modifiye Darboux vektörü ve $\bar{D}(s)$, γ eğrisinin birim Darboux vektörüdür. $\gamma = (s, y(s), z(s))$ birim hızlı eğrisi için Frenet elemanları $\{T, N, B, \kappa, \tau\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} D &= \tau T + \kappa B = \tau(1, y', z') + \kappa \frac{1}{\kappa} (0, -z'', y'') \\ &= (\tau, \tau y', -z''\tau z' + y'') \end{aligned}$$

$$\langle D, D \rangle = \tau^2 \Rightarrow \|D\| = \sqrt{\langle D, D \rangle} = \tau \Rightarrow \bar{D}(s) = T + \frac{\kappa}{\tau} B$$

olarak hesaplanır.

Teorem 5.4.1. $\gamma: I \rightarrow G_3$ birim hızlı bir eğri olsun. Bu durumda

a) γ nın rektifiyan developable yüzeyi $\gamma(s_0) + u_0\tilde{D}(s)$ noktasında lokal olarak cuspidal edge yüzeyine diffeomorftur ancak ve ancak $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' \neq 0, \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'' \neq 0$ ve $u_0 = -\frac{1}{\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'(s_0)}$ dir.

b) γ nın rektifiyan developable yüzeyi $\gamma(s_0) + u_0\tilde{D}(s)$ noktasında lokal olarak swallowtail yüzeyine diffeomorftur ancak ve ancak $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' \neq 0, \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'' = 0, \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)''' \neq 0$ ve $u_0 = -\frac{1}{\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'(s_0)}$ dir.

İspat 5.4.1. $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı bir eğri olsun. γ nın rektifiyan developable yüzeyi $F_{(\gamma, \tilde{D})}(s, u) = \gamma(s) + u\tilde{D}(s)$ olmak üzere bu yüzey denkleminin kısmi türevleri Frenet formüllerinin kullanılmasıyla

$$F_s = \gamma' + u \left(\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' T + \frac{\tau}{\kappa} T' + B' \right)$$

$$F_s = \gamma' + u \left(\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' T + \frac{\tau}{\kappa} \kappa N - \tau N \right)$$

$$F_s = T + u \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' T = \left(1 + u \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'\right) T$$

ve

$$F_u = \tilde{D} = \left(\frac{\tau}{\kappa}\right) T + B$$

olarak bulunur.

$$F_s \times F_u = \begin{vmatrix} 0 & e_1 & e_2 \\ 1 + u \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' & 0 & 0 \\ \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' & 0 & 1 \end{vmatrix} = \left(0, -\left(1 + u \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'\right), 0\right)$$

olduğundan bu yüzey için singüler nokta $u_0 = -\frac{1}{\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'}$ olduğu görülür.

Bu singüler nokta için singülerite tiplerine bakalım.

a) Daha önce bahsedildiği üzere cuspidal edge singüleritleri $\nabla_\alpha(s_0), \nabla_\alpha^2(s_0), \nabla_\alpha^3(s_0)$ lineer bağımsız olduğunda elde edilmektedir. Burada bulunan singüler nokta ile bu şart araştırıldığında $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' \neq 0, \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'' \neq 0, u_0 = -\frac{1}{\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'}$ şartlarına ulaşılır.

b) Swallowtail singülerliği için $\nabla_\alpha(s_0) = 0$ ve $\nabla_\alpha^2(s_0), \nabla_\alpha^3(s_0), \nabla_\alpha^4(s_0)$ lineer bağımsız olmalıdır. Gerekli hesaplamalar yapıldığında

$$\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' \neq 0, \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'' = 0, \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)''' \neq 0, u_0 = -\frac{1}{\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'}$$

elde edilir.

c) Cuspidal crosscap singülerliği için $\nabla_\alpha(s_0), \nabla_\alpha^2(s_0), \nabla_\alpha^3(s_0)$ lineer bağımlı ve $\nabla_\alpha(s_0), \nabla_\alpha^2(s_0), \nabla_\alpha^4(s_0)$ lineer bağımsız şartları sağlanmalıdır. Bu durumda $\det(\alpha', \alpha'', \alpha''') = u_0'^3 \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' \kappa = 0$ olmak üzere buradan $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' = 0$ ve bununla birlikte $u_0'^3 = 0 \Rightarrow \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'' = 0$ olmalıdır. Bu koşullar altında $\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')$ hesaplanırsa bu determinantın sonucu sıfır olarak bulunur ki bu da vektörlerin lineer bağımlı olduğu anlamına gelir.

O halde cuspidal crosscap singülerliği bulunamaz.

Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 5.4.2. $\gamma : I \rightarrow G_3$ birim hızlı bir eğri olsun. Bu durumda

a) γ nın Darboux developable yüzeyi $F_{(B,T)}(s, u) = B(s) + uT(s)$, $F_{(B,T)}(s_0, u_0)$ noktasında lokal olarak cuspidal edge yüzeyine diffeomorftur ancak ve ancak

$$\tau(s_0) \neq 0, (\tau/\kappa)'(s_0) \neq 0 \text{ ve } u_0 = \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)(s_0) \text{ dir.}$$

Burada $C \times \mathbb{R} = \{(x_1, x_2) | x_1^2 = x_2^3\} \times \mathbb{R}$ dir.

b) γ nın Darboux developable yüzeyi $F_{(B,T)}(s, u) = B(s) + uT(s)$, $F_{(B,T)}(s_0, u_0)$ noktasında lokal olarak swallowtail yüzeyine diffeomorftur ancak ve ancak

$$\tau(s_0) \neq 0, (\tau/\kappa)'(s_0) = 0, (\tau/\kappa)''(s_0) \neq 0 \text{ ve } u_0 = (\tau/\kappa)(s_0) \text{ dir. Burada}$$

$SW = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 = 3u^4 + u^2v, x_2 = 4u^3 + 2uv, x_3 = v\}$ dir.

c) γ nın Darboux developable yüzeyi $F_{(B,T)}(s, u) = B(s) + uT(s)$, $F_{(B,T)}(s_0, u_0)$ noktasında lokal olarak cuspidal crosscap yüzeyine diffeomorftur ancak ve ancak $\tau(s_0) = 0 \Rightarrow u_0 = \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)(s_0) = 0$, $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'(s_0) = 0$ ve $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)''(s_0) \neq 0$ dir. Burada

$CCR = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 = u^3, x_2 = u^2v^3, x_3 = v^2\}$ dir.

İspat 5.4.2. $\gamma : I \rightarrow G_3$ birim hızlı bir eğri olsun. γ nın Darboux developable yüzeyi $F_{(B,T)}(s, u) = B(s) + uT(s)$ olmak üzere bu yüzey denkleminin kısmi türevleri, Frenet formüllerinin kullanılmasıyla $F_s = (u\kappa - \tau)N$ ve $F_u = T$ olarak bulunur. Burada ise gerekli hesaplamalar yapıldığında singüler nokta $u_0 = \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)(s_0)$ olarak elde edilir. Bu singüler nokta için singülerite karakterlerine bakalım.

a) Biliniyor ki cuspidal edge singüleriteleri $\nabla_\alpha(s_0), \nabla_\alpha^2(s_0), \nabla_\alpha^3(s_0)$ lineer bağımsız olduğunda elde edilmektedir.

Burada $u_0 = \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)(s_0)$ olarak bulunan singüler nokta ile bu şart araştırıldığında

$\gamma = B + \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)T$ olmak üzere

$$\gamma'(s) = \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' T$$

$$\gamma''(s) = \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'' T + \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' \kappa N$$

$$\gamma'''(s) = \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)''' T + \left(2\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'' \kappa + \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' \kappa'\right) N + \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' \kappa \tau B$$

türevleri için $\det(\gamma', \gamma'', \gamma''') = \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'^3 \kappa^2 \tau$ elde edilir.

O halde bu determinantın sıfırdan farklı olabilmesi için $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'(s_0) \neq 0$ ve $\tau(s_0) \neq 0$ şartları sağlanmalıdır.

b) Swallowtail singülerliği için $\nabla_\alpha(s_0) = 0$ ve $\nabla_\alpha^2(s_0), \nabla_\alpha^3(s_0), \nabla_\alpha^4(s_0)$ lineer bağımsız olmalıdır. Bu durumda $\det(\gamma'', \gamma''', \gamma^{iv}) \neq 0$ şartı sağlanmalıdır.

$$\nabla_\alpha(s_0) = 0 \Rightarrow \gamma'(s) = 0 \Rightarrow \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'(s) = 0$$

elde edilir. Bununla birlikte

$$\begin{aligned}\gamma^{lv}(s) &= \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^{lv} T + \left(3 \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)''' \kappa + 3 \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'' \kappa' + \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' \kappa'' - \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' \kappa \tau^2\right) N \\ &\quad + \left(3 \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'' \kappa \tau + 2 \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' \kappa' \tau + \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' \kappa \tau'\right) B\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\det(\gamma'', \gamma''', \gamma^{lv}) = 6 \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'''^3 \kappa^2 \tau \neq 0 \text{ olur.}$$

O halde bu determinantın sıfırdan farklı olabilmesi için $\kappa(s) \neq 0$ ve $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'' \neq 0$ olması gereklidir.

c) Cuspidal crosscap singülerliği için $\nabla_\alpha(s_0), \nabla_\alpha^2(s_0), \nabla_\alpha^3(s_0)$ lineer bağımlı ve aynı zamanda $\nabla_\alpha(s_0), \nabla_\alpha^2(s_0), \nabla_\alpha^4(s_0)$ lineer bağımsız olmalıdır. Bu durumda

$$\det(\gamma', \gamma'', \gamma''') = \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'{}^3 \kappa^2 \tau = 0 \text{ olmak üzere buradan } \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' = 0 \text{ ve}$$

$$\det(\gamma', \gamma'', \gamma^{lv}) = \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'' \kappa \left(3 \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'' \kappa \tau + 2 \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' \kappa' \tau + \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' \kappa \tau'\right) \neq 0 \text{ iken}$$

$$\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'' \neq 0 \text{ olarak bulunur.}$$

Terorem 5.4.3. $\gamma: I \rightarrow G_3$ birim hızlı bir eğri olsun. Bu durumda

a) γ nın tanjant Darboux developable yüzeyi $F_{(\bar{D}, N)}(s, u) = \bar{D}(s) + uN(s)$ için cuspidal edge singüleritesine sahip değildir.

b) γ nın tanjant Darboux developable yüzeyi $F_{(\bar{D}, N)}(s, u) = \bar{D}(s) + uN(s)$ için swallowtail singüleritesi yoktur.

c) γ nın tanjant Darboux developable yüzeyi $F_{(\bar{D}, N)}(s, u) = \bar{D}(s) + uN(s)$ için cuspidal crosscap singüleritesi mevcut değildir.

İspat 5.4.3 $\gamma: I \rightarrow G_3$ birim hızlı bir eğri olsun. γ nın tanjant Darboux developable yüzeyi $F_{(\bar{D}, N)}(s, u) = \bar{D}(s) + uN(s)$ olmak üzere bu yüzey denkleminin kısmi türevleri, Frenet formüllerinin kullanılmasıyla

$$F_s = \bar{D}' + uN'$$

$$F_s = T' \left(\frac{\kappa}{\tau} \right)' B + \left(\frac{\kappa}{\tau} \right) B' + u\tau B$$

$$F_s = \kappa N + \left(\frac{\kappa}{\tau} \right)' B + \left(\frac{\kappa}{\tau} \right) (-\tau N) + u\tau B = \left(u\tau + \left(\frac{\kappa}{\tau} \right)' \right) B$$

$$F_s = \left(u\tau + \left(\frac{\kappa}{\tau} \right)' \right) B$$

ve $F_u = N$ olarak bulunur.

Galile vektörel çarpımının kullanılmasıyla

$$F_s \times F_u = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 0 & u\tau + \left(\frac{\kappa}{\tau} \right)' \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \left(u\tau + \left(\frac{\kappa}{\tau} \right)', 0, 0 \right)$$

elde edilir. O halde bu yüzey için singüler nokta

$$u_0 = -\frac{\left(\frac{\kappa}{\tau} \right)'}{\tau} \Rightarrow u_0 = \frac{\kappa\tau' - \kappa'\tau}{\tau^3} = \sigma(s_0)$$

olur. $\gamma(s_0) = \bar{D}(s_0) + \sigma(s_0)N(s_0)$ olmak üzere

$$\gamma' = \left(\frac{\kappa}{\tau} \right)' B + \sigma' N + \sigma\tau B = \sigma' N + \left(\left(\frac{\kappa}{\tau} \right)' + \sigma\tau \right) B$$

$$\gamma'' = \left(\sigma'' - \left(\frac{\kappa}{\tau} \right)' \tau - \sigma\tau^2 \right) N + \left(2\sigma'\tau + \sigma\tau' + \left(\frac{\kappa}{\tau} \right)'' \right) B$$

$$\gamma''' = \left(\sigma''' - 2 \left(\frac{\kappa}{\tau} \right)'' \tau - \left(\frac{\kappa}{\tau} \right)' \tau' - 3\sigma'\tau^2 - 3\sigma\tau\tau' \right)$$

$$+ \left(3\sigma''\tau + 3\sigma'\tau' + \sigma\tau'' - \sigma\tau^3 - \left(\frac{\kappa}{\tau} \right)' \tau^2 + \left(\frac{\kappa}{\tau} \right)''' \right) B$$

olarak hesaplanır. Şimdi singülerite karakterlerine bakalım.

a) Daha önce verildiği üzere cuspidal edge singüleriteleri $\nabla_\alpha(s_0), \nabla_\alpha^2(s_0), \nabla_\alpha^3(s_0)$ lineer bağımsız olduğunda elde edilmektedir.

Burada $u_0 = \sigma(s_0)$ olarak bulunan singüler nokta ile bu şart araştırıldığında $\det(\gamma', \gamma'', \gamma''') = 0$ bulunur.

O halde bu determinantın sıfırdan farklı olabilmesi mümkün değildir. Sonuç olarak cuspidal edge singülerliği mevcut değildir.

b) Swallowtail singülerliği için $\nabla_\alpha^2(s_0), \nabla_\alpha^3(s_0), \nabla_\alpha^4(s_0)$ lineer bağımsız olmalı ve $\nabla_\alpha(s_0) = 0$ olmalıdır. O halde $\gamma'(s_0) = 0$ ve $\det(\gamma'', \gamma''', \gamma^{iv}) \neq 0$ şartı sağlanmalıdır. Ancak $\det(\gamma'', \gamma''', \gamma^{iv}) = 0$ olarak hesaplanır.

O halde bu determinantın sıfırdan farklı olabilmesi mümkün değildir. Swallowtail singüleritesi yoktur.

c) Cuspidal crosscap singülerliği için $\nabla_\alpha(s_0), \nabla_\alpha^2(s_0), \nabla_\alpha^3(s_0)$ lineer bağımlı ve aynı zamanda $\nabla_\alpha(s_0), \nabla_\alpha^2(s_0), \nabla_\alpha^4(s_0)$ lineer bağımsız olmalıdır. Bu durumda parametreden bağımsız olarak $\det(\gamma', \gamma'', \gamma''') = 0$ bulunur. Bununla birlikte $\det(\gamma', \gamma'', \gamma^{iv}) = 0$

elde edilir ki lineer bağımsızlık için bu determinantın sıfırdan farklı olması gereklidir.

O halde cuspidal crosscap singüleritesi bulunamaz.

6. BÖLÜM

TARTIŞMA VE SONUÇ

6.1. Tartışma

Bu çalışmada, öncelikle 3-boyutlu Öklid uzayında üç farklı developable yüzey için (bir eğrinin tanjant Darboux developable yüzeyi, Darboux developable yüzeyi ve rektifiyan developable yüzeyi) için singüler noktalar araştırılıp bu noktaların singülerite karakterleri (cuspidal crosscap, cuspidal edge, swallowtail) bulunmuştur. Daha sonra 3-boyutlu Lorentz uzayında maksimal spacelike yüzeyler için singüler noktalar araştırılıp yine singülerite tipleri belirlenmiştir. Son olarak ise 3-boyutlu Galile uzayında, Öklid uzayında yapılan çalışmaya paralel olarak üç farklı developable yüzey için (bir uzay eğrisinin tanjant Darboux developable yüzeyi, Darboux developable yüzeyi ve rektifiyan developable yüzeyi) için singüler noktalar bulunup bu noktaların singülerite tipleri (cuspidal crosscap, cuspidal edge, swallowtail) elde edilmiştir. 3-boyutlu Galile uzayında elde edilen sonuçların diğer uzaylarda elde edilen sonuçlardan daha sınırlı olduğu görülmüştür.

6.2. Sonuç

Yapılan çalışmada elde edilen sonuçlar aşağıdaki şekilde özetlenebilir:

3-boyutlu Öklid uzayında Izumiya'nın ele aldığı developable yüzeyler için üç farklı singülerite karakteri bulunmuştur. Bunlar cuspidal edge, cuspidal crosscap ve swallowtail singüleriteleri olarak elde edilmiştir. 3-boyutlu Lorentz uzayında ise Öklid maksimal spacelike yüzeyler için Öklid uzayından farklı olarak iki çeşit singülerite tipi karşımıza çıkmıştır. 3-boyutlu Galile uzayında ele alınan bir uzay eğrisinin rektifiyan developable yüzeyi, Darboux developable yüzeyi ve tanjant Darboux developable yüzeyi için ise singülerite araştırmaları rektifiyan developable yüzey ve Darboux developable yüzey için Öklid uzayına benzer şekilde üç farklı singülerite karakterinin bulunmasıyla sonuçlanmıştır. Ancak Öklid uzayından farklı olarak tanjant Darboux developable yüzey için singüler nokta bulunmasına rağmen özel singülerite karakterleri bulunamamıştır.

KAYNAKLAR

1. Ali, A.T., Position vectors of curves in the Galilean space G^3 , *Matematicki Vesnik*, 64(3), 200-210, 2012
2. Brander, D., Singularities of spacelike constant mean curvature surfaces in Lorentz-Minkowski space, Cambridge Philosophical Society Mathematical Proceedings, 150, 527-556, 2011
3. Fujimori, S., Saji, K., Umehara, S., Yamada, K., Singularities of maximal surfaces, *Math. Z.*, 259, 827-848, 2008
4. Ishikawa, G., Yamashita, T., Singularities of tangent surfaces to directed curves *Topology and its Applications*, 234, 198-208, 2018
5. Izumiya, S., Takeuchi, N., New special curves and developable surfaces, *Turk J. Math.* 28, 153-163, 2004
6. Kokubu, M., Rossman, W., Saji, K., Umehara, M., Yamada, K., Singularities of flat fronts in hyperbolic space, *Pacific J. Math.* 221, 303-35, 2005
7. Lopez, R., Differential geometry of curves and surfaces in Lorentz- Minkowski space, *International Electronic Journal of geometry*, Vol 7, No 1, 44-107, 2014
8. Murata, S., Umehara, S., Flat surfaces with singularities in Euclidean space, *J. Differential Geometry*, 82, 279-316, 2009
9. Şahin T., Yılmaz, M., The rectifying developable and the tangent indicatrix of a curve in Galilean 3-space, *Acta Math. Hungar*, 132 (1-2), 154-167, 2011
10. Zhao, Q., Pei, D., Wang, Y., Singularities for one parameter developable surfaces, *Symmetry*, 11, 2019