T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ ÜNİVERSİTESİ
BİLİMSEL ARAŞTIRMA PROJELERİ
KOORDİNASYON BİRİMİ

# İKİ PERİYOTLU FIBONACCI VE LUCAS $2^k$-İONLARININ q-ANALOGLARI

**Proje No: ABAP20F35**

A Tipi Bilimsel Araştırma Projesi (A-BAP)

**SONUÇ RAPORU**


**Proje Yürütücüsü:**
Sure KÖME
Fen Edebiyat Fakültesi/Matematik Bölümü

**Araştırmacı:**
Hafize GÜN
Fen Edebiyat Fakültesi/Matematik Bölümü


Eylül 2021

NEVŞEHİR

## SONUÇ RAPORU

Proje çalışması yapılırken ilk olarak detaylı bir kaynak taraması ve arşiv araştırması yapılmıştır. Konu ile ilgili mevcut yapılmış olan en önemli çalışmalar derlenmiş ve projenin oluşumu aşamasında kullanılacak olan çalışmalar tek tek incelenmiştir. Kaynak araştırması sonucu elde edilen ve projenin oluşmasında kullanılmış olan en önemli çalışmalar "EK-1"de verilen tez çalışması içerisinde detayları ile açıklanmıştır. Proje kapsamında yürütülen tez çalışmasının "3.BÖLÜM"ü hedeflenen projenin ana çatısını oluşturmaktadır. Tez çalışmasının diğer bölümleri ise proje konusu ile ilgili sonuçlara ulaşmak için çalışılmış ve proje kapsamında hedeflenen tez bölümüne ulaşmak için elde edilen bulgular diğer bölümlerde sunulmuştur.

BAP Koordinasyon Birimi tarafından sağlanan destekler aracılığıyla tez proje çalışması yürütülürken kaynak ve sarf malzeme eksiği yeterince giderilmiştir. Bunun yanı sıra uluslararası kongre katılım desteği sayesinde tez projesi kapsamında hedeflenen konferansa katılım sağlanmıştır.

Tez çalışmasının sunulması ve oluşturulan savunma sınav jürisi tarafından oy birliği ile başarılı bulunması neticesinde projeye başlarken koyulan hedeflerin tamamı gerçekleştirilmiştir.

Aşağıda Sure KÖME ve Hafize GÜN tarafından bu tez çalışması boyunca yapılmış olan çalışmalar listelenmektedir.

**Yayınlar & Katıldığı Sempozyumlar**

1. Köme, S., Kirik, H., "On a new generalization of Fibonacci sedenions", *BILMES,* Nevşehir, 2019.
2. Köme, S., Kirik, H., "On The Generalized Fibonacci and Lucas $2^k$ −ions", *Notes on Number Theory and Discrete Math.*, 26 (4) 173-186, 2020.
3. Köme, S., Gün, H., "Bi-periodic Fibonacci and Lucas $2^k$ −ions with $q$ −integer components", Under review (SCI expanded), 2021 (BAP kapsamında üretilmiştir).
4. Köme, S., Kirik, H., "$q$ −analogues of biperiodic Fibonacci and Lucas sedenions", *UBAK,* Ankara, 2021 (BAP kapsamında üretilmiştir.).

İlerleyen dönemlerde, henüz hakem inceleme aşamasında olan ve BAP projesi kapsamında üretilmiş olan makalenin en kısa sürede yayımlanabilmesi için çalışmalara devam edilecektir. Proje kapsamında yapılan tüm çalışmalar literatüre ve araştırmacılara önemli katkılar sağlamaktadır. Çünkü bu çalışmalar literatürde bulunan çalışmalara daha genel bir bakış açısı getirmektedir. Ayrıca bu proje çalışması literatürde daha önce herhangi bir araştırmacı tarafından çalışılmadığından orijinal bir çalışma olmuştur. Hatta bu konu pek çok farklı çalışma alanına uygulanabileceğinden, mevcut araştırmacılara yeni fikirler ve çalışma alanları oluşturacaktır. Bu sebeple literatüre oldukça önemli bir katkıda bulunması beklenmektedir.

Son olarak, Projenin yürütücüsü olan Dr. Öğr. Üyesi Sure KÖME ve yüksek lisans öğrencisi Hafize GÜN ‘e bu tez projesini tamamlarken göstermiş olduğu destekten dolayı Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimine teşekkür ederiz.

| **Proje Yürütücüsü** | **Araştırmacı** |
|---|---|
| Dr. Öğr. Üyesi Sure KÖME | Hafize GÜN |

**EK-1**

**T.C.**
**NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

# İKİ PERİYOTLU FIBONACCI VE LUCAS $2^k$ −İONLARININ GENELLEŞTİRİLMESİ

**Tezi Hazırlayan**
**Hafize GÜN**

**Tez Danışmanı**
**Dr. Öğr. Üyesi Sure KÖME**

**Matematik Anabilim Dalı**
**Yüksek Lisans Tezi**

**Ağustos 2021**
**NEVŞEHİR**

**T.C.**
**NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

# İKİ PERİYOTLU FIBONACCI VE LUCAS $2^k$ −İONLARININ GENELLEŞTİRİLMESİ

**Tezi Hazırlayan**
**Hafize GÜN**

**Tez Danışmanı**
**Dr. Öğr. Üyesi Sure KÖME**

**Matematik Anabilim Dalı**
**Yüksek Lisans Tezi**

**Ağustos 2021**
**NEVŞEHİR**

Dr. Öğr. Üyesi Sure KÖME danışmanlığında **Hafize GÜN** tarafından hazırlanan **"İki Periyotlu Fibonacci ve Lucas $2^k$ −İonlarının Genelleştirilmesi"** başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

27/08/2021

**JÜRİ**

Başkan : Doç. Dr. Nurettin IRMAK …………………………

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Sure KÖME …………………………

Üye : Doç. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ …………………………

ONAY

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun …. / …. /…… tarih ve ………… kararı ile onaylanmıştır.

…. / …. /……

Prof. Dr. Şahlan ÖZTÜRK

Enstitü Müdürü

# TEZ BİLDİRİM SAYFASI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada yer alan bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu ve bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Hafize GÜN

**TEŞEKKÜR**

Bu tezin öncesinde cesaretlendiren, hazırlanması aşamasında ilgi ve alakasını hiçbir zaman esirgemeyen sayın danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Sure KÖME ve Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Matematik Bölüm hocalarıma sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca tüm hayatım boyunca sevgilerini ve ilgilerini eksik etmeyen ve bugünlere başarılı bir şekilde gelmemde büyük emekleri olan anne, baba ve kardeşime, iyi günde ve kötü günde hep yanımda olan, moral ve motivasyonumu arttıran eşime ve tüm dostlarıma teşekkürlerimi borç bilirim.

Teknik ve idari yardımlarından dolayı Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Rektörlüğü'ne, Fen-Edebiyat Fakültesi Dekanlığı'na, Matematik Bölüm Başkanlığı'na ve Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi BAP Birimi'ne teşekkür ederim.

Bu çalışma Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimince Desteklenmiştir. Proje Numarası: ABAP20F35

Hafize GÜN

**İKİ PERİYOTLU FIBONACCI VE LUCAS $2^k$ −İONLARININ GENELLEŞTİRİLMESİ**

**(Yüksek Lisans Tezi)**

**Hafize GÜN**

**NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**Ağustos 2021**

## ÖZET

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır.

İlk bölümde, konu ile ilgili literatür taraması yapılmış olup temel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde, modifiye edilmiş genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas $2^k$ −ionlarının tanımları, Binet formülleri, üreteç fonksiyonları ve bazı önemli özdeşlikleri incelenmiştir.

Üçüncü bölümde, iki periyotlu $q$ −Fibonacci ve $q$ −Lucas $2^k$ −ionları kavramları tanımlanmıştır. Ayrıca bu bölümde, bu kavramların toplam formülleri ve Catalan, Cassini vb. özdeşlikleri elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde, tezde yapılan çalışmaların literatüre katkısı ile ilgili sonuç ve öneriler bölümü verilmiştir.

***Anahtar Kelimeler: Fibonacci dizisi, Lucas dizisi, $2^k$ −ionlar, Binet formülü, Üreteç fonksiyonu, Catalan özdeşliği, Cassini özdeşliği, d’Ocagne özdeşliği.***

**Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Sure KÖME**

**Sayfa Adedi: 50**

**GENERALIZATION OF THE BIPERIODIC FIBONACCI AND LUCAS $2^k$ –IONS**

**(M. Sc. Thesis)**

**Hafize GÜN**

**NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ UNIVERSITY**
**GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES**
**August 2021**

## ABSTRACT

This thesis consists of four chapters.

In the first chapter, the literature on the subject has been searched and basic definitions and theorems are given.

In the second chapter, the definitions of the modified generalized Fibonacci and Lucas $2^{\mathrm{k}}$ –ions, Binet formulas, Generating functions and some important identities are investigated.

In the third chapter, the bi-periodic $q$ –Fibonacci and $q$ –Lucas $2^{\mathrm{k}}$ –ions are defined. Also in this section, the binomial sums and Catalan, Cassini etc. identities are obtained.

In the fourth chapter, the conclusions and discussions section, which is regarding to the contribution of the thesis to the literature, is given.

***Keywords:* *Fibonacci sequence, Lucas sequence, $2^k$ –ions, Binet formulas, Generating functions, Catalan 's identity, Cassini 's identity, d'Ocagne 's identity*.**

**Thesis supervisor: Assist. Prof. Dr. Sure KÖME**

**Page Number: 50**

**İÇİNDEKİLER**

## TABLOLAR LİSTESİ

## SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

| | |
|---|---|
| $\mathbb{N}$ | Doğal sayılar kümesi |
| $\mathbb{N}^+$ | Sayma sayıları kümesi |
| $\mathbb{R}$ | Reel sayılar kümesi |
| $\mathbb{C}$ | Kompleks sayılar kümesi |
| $\boldsymbol{F_n}$ | Fibonacci sayı dizisi |
| $\boldsymbol{L_n}$ | Lucas sayı dizisi |
| $\boldsymbol{F_{k,n}}$ | $k -$ Fibonacci sayı dizisi |
| $\boldsymbol{L_{k,n}}$ | $k -$ Lucas sayı dizisi |
| $\boldsymbol{q_n}$ | İki periyotlu Fibonacci sayı dizisi |
| $\boldsymbol{l_n}$ | İki periyotlu Lucas sayı dizisi |
| $\boldsymbol{Q_n}$ | Modifiye edilmiş genelleştirilmiş Fibonacci sayı dizisi |
| $\boldsymbol{U_n}$ | Modifiye edilmiş genelleştirilmiş Lucas sayı dizisi |
| $\boldsymbol{d_q f(x)}$ | $f(x)$ fonksiyonunun $q -$ diferansiyeli |
| $\boldsymbol{D_q f(x)}$ | $f(x)$ fonksiyonunun $q -$ türevi |
| $\boldsymbol{\Theta_n}$ | Modifiye edilmiş genelleştirilmiş Fibonacci $2^k$ $-$ionları |
| $\boldsymbol{V_n}$ | Modifiye edilmiş genelleştirilmiş Lucas $2^k$ $-$ionları |
| $\boldsymbol{\mathcal{F}_{n,k}}$ | İki periyotlu Fibonacci $2^k$ $-$ionları |
| $\boldsymbol{\widehat{\mathcal{F}}_{n,k}(\alpha, q)}$ | İki periyotlu $q$ $-$Fibonacci $2^k$ $-$ionları |
| $\boldsymbol{\mathcal{L}_{n,k}}$ | İki periyotlu Lucas $2^k$ $-$ionları |
| $\boldsymbol{\widehat{\mathcal{L}}_{n,k}(\alpha, q)}$ | İki periyotlu $q$ $-$Lucas $2^k$ $-$ionları |

# BÖLÜM 1

## 1.1. Giriş

Geçmişten bugüne kadar yapılan çalışmalar evrendeki tüm hareketlerin bir düzene göre olduğunu göstermektedir. Bu düzenin detayları incelendikçe matematik biliminin yeri oldukça önem kazanmaktadır.

Leonardo Fibonacci, Orta Çağın en büyük matematikçilerinden biri olarak bilinmektedir. Yaptığı çalışmalar ile klasik dönem matematiğine birçok katkıda bulunmuştur. İtalyan matematikçi 1170 yılında Pisa 'da dünyaya gelmiştir. Hemen hemen bütün Akdeniz ülkelerini gezen Fibonacci birçok ünlü matematikçi ile de çalışma imkânı bulmuştur.

1202 senesinde yazdığı *"Liber Abaci"* adlı kitabında sayıların arasındaki ilişkilerden, tavşan problemine kadar o döneme ait birçok konuya değinmiştir [1]. Ayrıca günümüzde ilkokulda öğretilen dört işlem gibi aritmetik işlemlerini de uygulamalarla açıklamıştır.

Leonardo Fibonacci 'nin bu kitabında dört tarafı çevrili bir ortamda bulunan tavşan ailesinin artışını her ay gözlemlemiş ve gözlem sonuçlarını sürekli not almıştır. Her tavşan çifti erginleştikten sonra bir çift yavrulayıp onun da bir ay sonra bir çift yavrulayacağı ortamda tavşanların üremesinin zamana bağlı değişiklik gösterdiğini gözlemlemiştir ve bu tavşanların $1-1-2-3-5-8-13-21-34 \ldots$ şeklinde ürediği sonucuna ulaşmıştır. Ayrıca bu sayıların rastgele oluşmadığı, her terimin kendinden önceki iki terimin toplamı şeklinde devam ettiği kanısına varmıştır. Devamında bu sayıların birbirine bölümünün sayı büyüdükçe $1{,}618 \ldots$ sayısına yani "altın oran" a yakınsadığını keşfetmiştir. Yani, bir Fibonacci sayısının kendinden bir önceki sayıya bölümü ile elde edilmiş sonuç yaklaşık $1{,}618 \ldots$dir. Örneğin; $6765 / 4181 = 1{,}618 \ldots$ sonucunu vermektedir. Fibonacci dizisi olarak bilinen bu dizi altın oranın en önemli matematiksel gösterimlerinden biri olarak verilmektedir.

Altın oran ve Fibonacci sayıları, günümüzde bulunan insan yapımı birçok çalışmada yer almıştır. Bununla birlikte doğada var olan çoğu nesnede altın oranın var olduğu tespit edilmiştir. Bu duruma en güzel örnek insan vücudu ve bitkilerdir.

### 1.2. Amaç ve Kapsam

Bu çalışmanın temel amacı iki periyotlu Fibonacci ve Lucas $2^k$ $-$ionlarını tanımlayarak, bu dizilerin özelliklerini araştırmaktır. Ayrıca, iki periyotlu Fibonacci ve Lucas $2^k$ $-$ionlarının bir genelleştirilmesi olan iki periyotlu $q$ $-$Fibonacci ve $q$ $-$Lucas $2^k$ $-$ionları da tanımlanacaktır. Buna ek olarak tanımlanan dizilerin toplam formülleri ve çeşitli özdeşlikleri de ispatlanacaktır.

### 1.3. Kaynak Araştırması

Bu kısımda tez içerisinde kullanılan çalışmalar hakkında bilgiler verilecektir.

Fibonacci (1202), "Liber Abaci" kitabında sayılar arasındaki ilişkilerle ve tavşan problemleriyle ilgilenmiştir. Günümüzde kullanılan dört işlemi uygulamalarla açıklamıştır [1].

Horadam (1963), "Complex Fibonacci numbers and Fibonacci quaternions" isimli çalışmasında kompleks Fibonacci sayılarını elde etmiş ve Fibonacci kuaterniyonları üzerine çalışmalarını sunmuştur [8].

Iyer (1969), "A note on Fibonacci quternions" isimli çalışmasında Fibonacci kuaterniyonlarının ve genelleştirilmiş Fibonacci kuaterniyonlarının çeşitli özelliklerini tanımlamıştır [18].

Falcon ve Plaza (2007), "On the Fibonacci $k$ $-$numbers" isimli çalışmalarında $k$ $-$Fibonacci dizisini tanımlamışlardır. Ayrıca bu dizinin pek çok önemli özdeşliğini de sunmuşlardır [29].

Falcon ve Plaza (2007), “The $k$ −Fibonacci sequence and the Pascal 2-triangle” isimli çalışmalarında hem klasik Fibonacci dizisini hem de Pell dizisini genelleştirmişlerdir. Ayrıca bu sayıların pek çok özelliğini sunmuşlardır ve Pascal 2-üçgeni olarak adlandırılan üçgen ile ilişkilendirmişlerdir [4].

Edson ve Yayenie (2009), “A new generalization of Fibonacci sequence & extended Binet’s formula” isimli çalışmalarında Fibonacci dizisinin yeni bir genellemesi olan iki periyotlu Fibonacci dizilerini tanımlamışlardır. Ayrıca bu dizilere ait Binet formülü, üreteç fonksiyonu ve bazı önemli özdeşliklerini elde etmişlerdir [5].

Koshy (2011), “Fibonacci and Lucas numbers with applications” isimli çalışmasında Fibonacci ve Lucas sayılarının bazı önemli özdeşliklerini elde etmiş ve bu sayıların önemli uygulamalarını sunmuştur [2].

Yayenie (2011), “A note on generalized Fibonacci sequences” isimli çalışmasında iki periyotlu Fibonacci sayılarının özelliklerini incelemiştir. Ayrıca modifiye edilmiş genelleştirilmiş Fibonacci sayı dizisini tanımlayarak bu diziye ait Binet formülü ve üreteç fonksiyonunu da sunmuştur [6].

Halıcı (2012), “On Fibonacci quaternions” isimli çalışmasında Fibonacci ve Lucas kuaterniyonlarının bazı özelliklerini araştırmış, üreteç fonksiyonları, Binet formülleri ve bazı özdeşliklerini elde etmiştir [19].

Bilgici (2014), “Two generalizations of Lucas sequence” isimli çalışmasında modifiye edilmiş genelleştirilmiş Lucas dizisini tanımlamıştır. Bu dizinin üreteç fonksiyonu, genelleştirilmiş Binet formülü ve modifiye edilmiş genelleştirilmiş Fibonacci dizisi ile arasındaki ilişkiden bahsetmiştir [7].

Halıcı (2015), “On dual Fibonacci octonions” isimli çalışmasında dual Fibonacci oktonyonlarını tanımlamıştır. Ayrıca bazı temel cebirsel özelliklerini, Binet formüllerini ve üreteç fonksiyonlarını sunmuşlardır [10].

Keçilioğlu ve Akkuş (2015), "The Fibonacci octonions" isimli çalışmalarında Fibonacci ve Lucas oktonyonlarını elde etmişlerdir. Ayrıca Binet formülleri, üreteç fonksiyonları ve bazı önemli özdeşliklerini de bu çalışmalarında elde etmişlerdir [11].

Akkuş ve Keçilioğlu (2015), "Split Fibonacci and Lucas octonions" isimli çalışmalarında split Fibonacci ve Lucas oktonyonları ile ilgili bir çalışma sunmuşlardır. Bu çalışmada öncelikle split Fibonacci ve Lucas oktonyonları tanımlanmış olup sonrasında bazı önemli özdeşliklere yer verilmiştir [12].

Ramirez (2015), "Some combinatorial properties of the $k-$Fibonacci and the $k-$Lucas quaternions" isimli çalışmasında $k-$Fibonacci ve $k-$Lucas kuaterniyonlarını tanımlamış ve bu kavramların üreteç fonksiyonu ve Binet formüllerine de yer vermiştir. Ek olarak Catalan ve Cassini özdeşliklerini ifade etmiştir [13].

Tan ve çalışma arkadaşları (2016), "A note on bi-periodic Fibonacci and Lucas quaternions" isimli çalışmalarında iki periyotlu Fibonacci kuaterniyonları ile ilişki kurarak iki periyotlu Lucas kuaterniyonlarını tanımlamışlardır. Bu iki kavram arasındaki ilişkiden bahsetmişlerdir. Ayrıca bu kuaterniyonların üreteç fonksiyonu ve Binet formülleri ve bazı önemli özdeşliklerini hesaplamışlardır [9].

Syznal-Liana ve Wloch (2016), "The Pell quaternions and the Pell octonions" isimli çalışmalarında Pell kuaterniyonları ve Pell oktonyonlarını tanımlamışlardır [14].

Syznal-Liana ve Wloch (2016), "A note on Jacobsthal quaternions" isimli çalışmalarında Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas kuaterniyonlarına giriş yapmışlardır. Ayrıca bu çalışmada Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas kuaterniyonları arasındaki ilişkiyi incelemiş ve bu kuaterniyonların matris gösterimlerine yer vermiştir [15].

Yılmaz ve çalışma arkadaşları (2016), "The bi-periodic Fibonacci octonions" adlı çalışmaında iki periyotlu Fibonacci oktonyonlarını tanımlamış ve üreteç fonksiyonunu hesaplamışlarır. Ayrıca bazı önemli özdeşliklerini de ifade etmişlerdir [16].

Çimen ve İpek (2017), “On Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas octonions” isimli çalışmalarında Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas oktonyonlarını tanımlamışlardır. Buna ek olarak aralarındaki ilişkiden de bahsetmişlerdir [17].

Yılmaz ve çalışma arkadaşları (2017), “On the bi-periodic Lucas octonions” adlı çalışmalarında iki periyotlu Lucas oktonyonlarını tanımlamış ve üreteç fonksiyonunu hesaplamışlardır. Ayrıca bazı önemli özdeşliklerini ve toplam formüllerini de ifade etmişlerdir [24].

Bilgici ve çalışma arkadaşları (2017), “Fibonacci and Lucas sedenions” isimli çalışmalarında Fibonacci ve Lucas sedenyonlarını sunmuşlardır. Ayrıca bu sedenyonların üreteç fonksiyonları ve Binet formüllerinin yanı sıra bazı iyi bilinen özdeşliklerini de ifade ve ispat etmişlerdir [21].

Köme ve çalışma arkadaşları (2019), “Modified generalized Fibonacci and Lucas quternions” isimli çalışmalarında modifiye edilmiş genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas kuaterniyonları tanımlanmış ve üreteç fonksiyonları, Binet formülleri ve bazı önemli özdeşliklerini sunmuşlardır [20].

Köme ve Kirik (2019), “On a new generalization of Fibonacci sedenions” isimli çalışmalarında modifiye edilmiş genelleştirilmiş Fibonacci sedenyonları üzerine çalışmışlardır. Ayrıca bu sedenyonlarını üreteç fonksiyonu ve Binet formüllerini hesaplamışlardır. Ardından bazı önemli özdeşliklerini sunmuşlardır [27].

Catarino (2019), “$k-$Pell, $k-$Pell-Lucas and modified $k-$Pell sedenions” isimli çalışmasında $k-$Pell, $k-$Pell Lucas ve modifiye edilmiş $k-$Pell sedenyonlarıyla ilgili bir çalışma sunmuştur. Ayrıca bu çalışmasında bazı önemli özdeşliklere de yer vermiştir. [22].

Soykan (2019), “Tribonacci and Tribonacci-Lucas sedenions” isimli çalışmasında Tribonacci ve Tribonacci Lucas sedenyonlarını tanımlayarak sedenyon kavramına farklı bir bakış açısı kazandırmıştır. Bu sedenyonların bazı özellikleri sunularak aralarındaki ilişki üzerinde durmuştur [23].

Göcen ve Soykan (2019), "Horadam $2^k$ $-$ions" isimli çalışmalarında katerniyon, oktonyon, sedenyon vb… şeklinde devam ederek $2^k$ $-$ions kavramına ulaşmıştır ve Horadam dizileri için $2^k$ $-$ion kavramını elde etmiştir [31].

Bilgici ve Daşdemir (2020), "Some unrestricted Fibonacci and Lucas hyper-complex numbers" isimli çalışmalarında Fibonacci kuaterniyonları, oktonyonları ve sedenyonlarının yeni bir genelleştirilmesini sunmuşlardır. Bu hiper-kompleks sayıların yeni türleri için Binet formülleri, üreteç fonksiyonları ve bazı özdeşliklerini incelemişlerdir [37].

Köme ve Kirik (2020), "On The Generalized Fibonacci and Lucas $2^k$ $-$ions" isimli çalışmalarında modifiye edilmiş genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas $2^k$ $-$ionlarını tanımlamış, Binet formülünü, üreteç fonksiyonunu ve bazı önemli özdeşliklerini sunmuşlardır [25].

Kızılateş ve Kone (2021), "On higher order Fibonacci hyper complex numbers" isimli çalışmalarında yüksek mertebeli Fibonacci $2^m$ $-$iyonları ya da yüksek mertebeli Fibonacci hiper-kompleks sayıları olarak adlandırılan kuaterniyonlar, oktonyonlar veya sedenyonların yeni bir sınıfını geliştirmeyi ele almışlardır. Ayrıca Fibonacci $2^m$ $-$ionlarının Binet formülü, üstel üreteç fonksiyonu, Vajda özdeşliği, Catalan özdeşliği, Cassini özdeşliği, d'Ocagne özdeşliğini sunmuşlardır [36].

Köme ve Kirik (2021), "$q$- analogues of biperiodic Fibonacci and Lucas sedenions'' isimli çalışmalarında iki periyotlu Fibonacci ve Lucas sedenyonlarının $q$- analoglarını tanımlamış, Binet formülü ve üreteç fonksiyonunu hesaplamışlardır [28].

Köme ve Gün (2021), "Bi-periodic Fibonacci and Lucas $2^k$ $-$ions with $q$ $-$integer components" isimli çalışmalarında iki periyotlu Fibonacci ve Lucas $2^k$ $-$ionlarını bir $q$ parametresine bağlı olarak tanımlamışlardır [26].

### 1.4. Temel Kavramlar

Bu bölümde tez içerisinde kullanılacak olan temel tanımlar ve teoremler verilecektir.

Fibonacci ve Lucas dizileri, matematik, fizik, bilgisayar bilimleri ve bunlarla ilgili alanlarda önemli rol oynamaktadır. Klasik Fibonacci dizisi ve Lucas dizisi aşağıdaki şekilde tanımlanır [2].

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ \ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n\ ,\ n\ \in \mathbb{N}, \tag{1.1}$$

$$L_0 = 2,\ \ L_1 = 1,\ L_{n+2} = \ L_{n+1} + \ L_n\ ,\ n\ \in \mathbb{N}. \tag{1.2}$$

Şimdiye kadar birçok araştırmacı tarafından, Fibonacci ve Lucas dizisinin toplamları, özellikleri, başka bir matematiksel konu ile ilişkileri, uygulamaları ve genellemeleri kapsamlı bir şekilde incelenmiştir [2-7].
İlk olarak Fibonacci ve Lucas dizilerinin Binet formülleri sırasıyla,

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\ , \tag{1.3}$$

$$L_n = \alpha^n + \beta^n. \tag{1.4}$$

şeklinde elde edilmiştir. [2].

İki periyotlu Fibonacci dizisinin tanımı aşağıdaki gibidir.

**Tanım 1.4.1:** Herhangi sıfırdan farklı $a$ ve $b$ reel sayıları ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$q_0 = 0,\ q_1 = 1,\ q_{n+2} = \begin{cases} aq_{n+1} + \ q_n & ,\ n\, çift\ ise, \\ bq_{n+1} + \ q_n & ,\ n\, tek\ ise \end{cases}$$

(1.5)

olarak tanımlanan $\{q_n\}$ dizisine iki periyotlu Fibonacci dizisi denir [5]. Bu diziye ait Binet formülü $x^2 - abx - ab = 0$ karakteristik denklemini kökleri $\alpha = \frac{ab+\sqrt{a^2b^2+4ab}}{2}$

ve $\beta = \frac{ab-\sqrt{a^2b^2+4ab}}{2}$ olmak üzere $\xi(m) = m - 2\lfloor\frac{m}{2}\rfloor$ için $q_n = \left(\frac{a^{1-\xi(n)}}{ab^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}}\right)\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$ olarak elde edilmiştir. Ayrıca iki periyotlu Fibonacci sayılarının üreteç fonksiyonu

$$F(x) = \frac{x(1+ax-x^2)}{1+(ab+2)x^2+x^4} \tag{1.6}$$

şeklindedir [5].

İki periyotlu Lucas dizisinin tanımı aşağıdaki gibidir.

**Tanım 1.4.2:** Herhangi sıfırdan farklı $a$ ve $b$ reel sayıları ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$l_0 = 2,\ l_1 = a,\ l_{n+2} = \begin{cases} bl_{n+1} + l_n\ , & n\ çift\ ise, \\ al_{n+1} + l_n\ , & n\ tek\ ise \end{cases} \tag{1.7}$$

olarak tanımlanan $\{l_n\}$ dizisine iki periyotlu Lucas dizisi denir [7]. Bu diziye ait Binet formülü $x^2 - abx - ab = 0$ karakteristik denklemini kökleri $\alpha = \frac{ab+\sqrt{a^2b^2+4ab}}{2}$ ve $\beta = \frac{ab-\sqrt{a^2b^2+4ab}}{2}$ olmak üzere $\xi(m) = m - 2\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor$ için $l_n = \left(\frac{a^{\xi(n)}}{ab^{\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor}}\right)(\alpha^n + \beta^n)$ olarak elde edilmiştir. İki periyotlu Lucas dizilerinin üreteç fonksiyonu ise

$$L(x) = \frac{2+ax-(ab+2)x^2+ax^3}{1-(ab+2)x^2+x^4} \tag{1.8}$$

olarak elde edilmiştir [7].

**Tanım 1.4.3:** Modifiye edilmiş genelleştirilmiş Fibonacci dizisi

$$Q_0 = 0,\quad Q_1 = 1,\quad Q_n = \begin{cases} aQ_{n-1} + cQ_{n-2} & ,\quad n\ çift\ ise \\ bQ_{n-1} + dQ_{n-2} & ,\quad n\ tek\ ise \end{cases} \tag{1.9}$$

şeklinde tanımlanmıştır [6]. Burada $a, b, c$ ve $d$ reel sayılardır. Modifiye edilmiş genelleştirilmiş Fibonacci dizisi $Q_n$ in üreteç fonksiyonu

$$H(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n \ x^n = \frac{x(1+ax-cx^2)}{1-(ab+c+d)x^2+cdx^4} \tag{1.10}$$

şeklinde verilmiştir. Modifiye edilmiş genelleştirilmiş Fibonacci dizisi $Q_n$ 'in Binet formülü;

$$Q_n = \frac{a^{1-\xi(n)}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}}\left(\frac{\alpha^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}(\alpha+d-c)^{n-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}-\beta^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}(\beta+d-c)^{n-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}}{\alpha-\beta}\right) \tag{1.11}$$

şeklindedir [6].

**Tanım 1.4.4:** Modifiye edilmiş genelleştirilmiş Lucas dizisi

$$U_0 = \frac{d+1}{d}, \quad U_1 = a, \quad U_n = \begin{cases} bU_{n-1} + dU_{n-2} & , \ n\ çift\ ise \\ aU_{n-1} + cU_{n-2} & , \ n\ tek\ ise \end{cases} \tag{1.12}$$

şeklinde tanımlanmıştır [7]. Ayrıca üreteç fonksiyonu $a, b, c$ ve $d$ reel sayılar olmak üzere

$$U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n \ x^n = \frac{1}{d}\frac{d+1+adx-(ab+cd+c)x^2+adx^3}{1-(ab+c+d)x^2+cdx^4} \tag{1.13}$$

olarak elde edilmiştir. Binet formülü

$$U_n = \frac{a^{\xi(n)}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}}\left(\frac{(\alpha+d+1)\alpha^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}(\alpha+d-c)^{n-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}-(\beta+d+1)\beta^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}(\beta+d-c)^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}}{\alpha-\beta}\right) \tag{1.14}$$

dir. Burada $\alpha = \frac{ab+c-d+\sqrt{(ab+c-d)^2+4abd}}{2}$ ve $\beta = \frac{ab+c-d-\sqrt{(ab+c-d)^2+4abd}}{2}$ kökleri $x^2 - (ab + c - d)x - abd = 0$ polinomunun kökleridir. Ayrıca $\xi(n) = n - 2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$ fonksiyonu $n$ in tek ve çift değerleri için farklı şekilde bulunduğu bir fonksiyondur. Burada $\Delta = (ab + c - d)^2 + 4abd > 0$ olduğuna dikkat edilmelidir [7].

Kuaterniyonlar, Kuantum mekaniği, Fizik, Matematik, Bilgisayar Bilimleri ve bunlarla ilişkili pek çok alanda ortaya çıkan kompleks sayıların genişletilmiş bir sayı sistemidir. Kuaterniyonlar, ilk kez William Rowan Hamilton tarafından sunulmuştur [35]. Genel olarak bir $q$ kuaterniyonu ($4 = 2^2$ boyutlu kuaterniyon cebiri) aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3 \,.$$

Burada $i, j, k$, $\mathbb{R}^3$ uzayında standart ortonormal bazdır ve $q_0, q_1, q_2$ ve $q_3$ sayıları da reel sayılardır. Ek olarak $i, j, k$ bazları aşağıdaki kuralı sağlar:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1.$$

Kuaterniyonlar ile ilgili bilim adamları tarafından yapılmış pek çok çalışma mevcuttur. En önemlilerinden biri Horadam tarafından yapılmıştır. Horadam 1963 yılında Fibonacci ve Lucas kuaterniyonlarını $e_0 = 1$ $e_1 = i$ $e_2 = j$ $e_3 = k$ ve $\{e_1, e_2, e_3\}$, $\mathbb{R}^3$ uzayında standart ortonormal baz olmak üzere sırasıyla:

$$Q_n = e_0F_n + e_1F_{n+1} + e_2F_{n+2} + e_3F_{n+3}, \tag{1.15}$$

$$P_n = e_0L_n + e_1L_{n+1} + e_2L_{n+2} + e_3L_{n+3}. \tag{1.16}$$

şeklinde tanımlamıştır [8]. Burada $F_n$, $n$-inci mertebeden klasik Fibonacci sayısı ve $L_n$, $n$-inci mertebeden klasik Lucas sayısıdır.

**Tanım 1.4.5:** İki periyotlu Fibonacci kuaterniyonları

$$Q_n = \sum_{l=0}^{3} e_l q_{n+l} \;,\; n \geq 0 \tag{1.17}$$

şeklinde tanımlanmıştır [9]. Burada $q_n$, iki periyotlu Fibonacci dizisidir. Benzer şekilde, Tan ve çalışma arkadaşları, iki periyotlu Lucas kuaterniyonlarını,

$$P_n = \sum_{l=0}^{3} e_l l_{n+l} \ , \ n \geq 0 \tag{1.18}$$

ifadesiyle göstermiştir [9].

1843 yılında John Graves $8 = 2^3$ boyutlu birleşmeli olan ve değişmeli olmayan oktonyon cebirlerini sunmuştur. Oktonyonlar ile ilgili pek çok çalışma mevcuttur [10-12,14,16,24]. Kuaterniyonlara benzer olarak Fibonacci ve Lucas oktonyonları da aşağıdaki gibi verilmiştir.

**Tanım 1.4.6:** $n \geq 0$ için, $n$ −inci Fibonacci oktonyonları

$$Q_n = \sum_{i=0}^{7} e_i F_{n+i} \tag{1.19}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $F_n$, $n$ −inci mertebeden klasik Fibonacci sayısıdır [11].

Sedenyonlar, elektromanyetik teori ve doğrusal yer çekimi gibi bilimin birçok alanında ortaya çıkar. Genellikle $\mathbb{S}$ ile gösterilen Sedenyon cebiri, $16 = 2^4$ boyutlu bir Cayley-Dickson cebiridir. $\mathbb{S}$ nin standart baz elemanları $\{e_0, e_1, e_2, \dots, e_{15}\}$ olmak üzere bir sedenyon

$$\mathbb{S} = \sum_{i=0}^{15} e_i \, a_i \tag{1.20}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{15}$ reel sayılardır. Sedenyonlar ile ilgili pek çok çalışma mevcuttur [21-23,27]. Fibonacci ve Lucas sedenyonları aşağıdaki şekilde tanımlanır:

**Tanım 1.4.7:** $n \geq 0$ için, $n$ −inci Fibonacci ve Lucas sedenyonları sırasıyla,

$$\widehat{F}_n = \sum_{s=0}^{15} F_{n+s} e_s, \tag{1.21}$$

$$\widehat{L}_n = \sum_{s=0}^{15} L_{n+s} e_s \tag{1.22}$$

şeklinde tanımlanır [21].

Kuaterniyonlar $(4 = 2^2)$, Oktonyonlar $(8 = 2^3)$, Sedenyonlar $(16 = 2^4)$, Trigintaduonyonlar $(32 = 2^5)$, … şeklinde devam edilerek $2^k$ −ionlara ulaşılmıştır. Son yıllarda araştırmacılar Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas ve Horadam $2^k$ −ionları ile ilgili çalışmalar yapmışlardır [31, 36, 37].

Genel olarak, $2^k$ −ionlarının tanımı aşağıdaki şekilde verilebilir:

**Tanım 1.4.8:** $N = 2^k$ olmak üzere, $2^k$ −ionlar aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$S = \sum_{i=0}^{N-1} a_i e_i = a_0 + \sum_{i=1}^{N-1} a_i e_i\,. \qquad (1.23)$$

Burada, $a_0, a_1, \dots, a_{N-1}$ reel sayılardır [31, 36, 37].

$Q$ −Analiz, Matematiğin birçok alanında ortaya çıkan oldukça geniş bir konudur. $Q$ −Analiz konusu incelendiğinde bilinen analizin diferansiyel, türev, integral vb. temel konularını bir $q$ parametresine bağlı olarak yeniden incelendiği görülebilir.

**Tanım 1.4.9:**
Herhangi bir keyfi $f(x)$ fonksiyonu olmak üzere

$$d_q f(x) = f(qx) - f(x) \qquad (1.24)$$

ifadesine $q$ −diferansiyel denir [30].

**Tanım 1.4.10:**
$D_q f(x) = \frac{d_q f(x)}{d_q x} = \frac{f(qx)-f(x)}{qx-x}$ ifadesi (1.25)

$f(x)$ in $q$ −türevi olarak tanımlanmıştır [30].

**Tanım 1.4.11:**

$n \in \mathbb{Z}^{+}$ olmak üzere $[n] = \frac{q^{n}-1}{q-1}$ ifadesine $n$'nin $q$ –benzeri olarak adlandırılmıştır. Ayrıca

$$[n] = \frac{q^{n}-1}{q-1} = 1 + q + q^{2} + q^{3} + \cdots + q^{n-1}, \tag{1.26}$$

şeklinde de ifade edilmiştir [30].

**Tanım 1.4.12:**

$[n]!$ in $q$ –benzeri,

$$[n]! = \begin{cases} 1 & , \quad n = 0 \\ [n][n-1] \ldots [1] & , \quad n = 1,2,3 \ldots \end{cases} , \tag{1.27}$$

şeklinde tanımlanmıştır [30].

**Tanım 1.4.13:**

$(x-a)^{\boldsymbol{n}}$ polinomunun $q$ –benzeri,

$$(x-a)_{q}^{n} = \begin{cases} 1 & , \quad n = 0 \\ (x-a)(x-qa) \ldots (x-q^{n-1}a) & , \quad n \geq 1 \end{cases} , \tag{1.28}$$

şeklinde tanımlanmıştır [30].

**Tanım 1.4.14:**

$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}$ ifadesine $q$ –binom katsayısı denir. Ve

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[n-j]![j]!} = \frac{[n].[n-1] \ldots [n-j+1][n-j][n-j-1] \ldots [1]}{[n-j][n-j-1] \ldots [1][j]!}$$

$$= \frac{[n].[n-1] \ldots [n-j+1]}{[j]!} = \begin{bmatrix} n \\ n-j \end{bmatrix} \tag{1.29}$$

şeklinde tanımlanır.

Dikkat edilecek olursa $q \to 1$ için limit alındığında $\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}$ ifadesi bilinen binom katsayısına eşit olacaktır. Ayrıca $q \to 1$ için limit alındığında $\sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} (x-1)_q^j$ ifadesi $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (x-1)^j$ haline dönüşür. Bu da binom formülü olarak bilinir [30].

# BÖLÜM 2

## MODİFİYE EDİLMİŞ GENELLEŞTİRİLMİŞ FIBONACCI VE LUCAS $2^k$-İONLARI

Bu bölümde (1.9) ve (1.12) denklemlerinden yararlanılarak modifiye edilmiş genelleştirilmiş Fibonacci $2^k$ −ion ve Lucas $2^k$ −ion kavramları tanımlanacaktır. Aynı zamanda kuvvet serilerinden faydalanarak üreteç fonksiyonları verilecektir. Modifiye edilmiş genelleştirilmiş Fibonacci $2^k$ −ionları ve Lucas $2^k$ −ionları için Binet formüllleri, Catalan ve Cassini özdeşlikleri de ifade edilecektir. Bu bölümde elde edilen tüm veriler "On The Generalized Fibonacci and Lucas $2^k$ −ions" isimli çalışmada yayınlanmıştır [25].

### 2.1. Modifiye Edilmiş Genelleştirilmiş Fibonacci $2^k$ −İonları

Bu bölümde ilk olarak modifiye edilmiş genelleştirilmiş Fibonacci $2^k$ −ion tanımı verilecektir.

**Tanım 2.1.1:**

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere modifiye edilmiş genelleştirilmiş Fibonacci $2^k$ −ionları

$$\Theta_n = \sum_{l=0}^{N-1} e_l Q_{n+l} \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlanır. Bu ifadede kullanılan $Q_n$, (1.9) denkleminde tanımlanmış olan modifiye edilmiş genelleştirilmiş Fibonacci sayılarıdır [25].

Aşağıda bulunan tabloda modifiye edilmiş genelleştirilmiş Fibonacci $2^k$ −ionlarının, $a, b, c, d, k$ nın bazı özel değerleri için var olan birçok çalışmanın genellemesi olduğu görülmektedir.

Tablo 2.1. Modifiye edilmiş genelleştirilmiş Fibonacci $2^k$ −ionlarının $a, b, c, d, k$ değerleri için özel durumları

| $\boldsymbol{a}$ | $\boldsymbol{b}$ | **c** | $\boldsymbol{d}$ | $\boldsymbol{k}$ | ***Modifiye edilmiş genelleştirilmiş Fibonacci*** $\mathbf{2^k}$***- ionları*** |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | Fibonacci Kuaterniyonları [8] |
| $a$ | $b$ | 1 | 1 | 2 | İki periyotlu Fibonacci kuaterniyonları [9] |
| $k$ | $k$ | 1 | 1 | 2 | $k$ −Fibonacci kuaterniyonları [13] |
| 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | Pell kuaterniyonları [14] |
| 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | Jacobsthal kuaterniyonları [15] |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | Fibonacci oktonyonları [11] |
| $a$ | $b$ | 1 | 1 | 3 | İki Periyotlu Fibonacci Oktonyonları [16] |
| $k$ | $k$ | 1 | 1 | 3 | $k$ −Fibonacci Oktonyonları |
| 2 | 2 | 1 | 1 | 3 | Pell Oktonyonlar [14] |
| 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | Jacobsthal oktonyonları [17] |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 4 | Fibonacci Sedenyonları [21] |
| $a$ | $b$ | 1 | 1 | 4 | İki Periyotlu Fibonacci Sedenyonları |
| $k$ | $k$ | 1 | 1 | 4 | $k$ −Fibonacci Sedenyonları |
| 2 | 2 | 1 | 1 | 4 | Pell Sedenyonları |
| 1 | 1 | 2 | 2 | 4 | Jacobsthal Sedenyonları |
| $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | 4 | Modifiye edilmiş genelleştirilmiş Fibonacci Sedenyonları [27] |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |

Aşağıdaki teorem modifiye edilmiş genelleştirilmiş Fibonacci $2^k$ −ionları için üreteç fonksiyonunu ifade ve ispat etmektedir.

**Teorem 2.1.1 (Üreteç Fonksiyonu):**

Modifiye edilmiş genelleştirilmiş Fibonacci $2^k$ −ionlarının üreteç fonksiyonu aşağıdaki şekilde gösterilir:

$$G(t) = \frac{\Theta_0 + (\Theta_1 - b\Theta_0)t + (a-b)R_1(t) + (c-d)R_2(t)}{1 - bt - dt^2}. \tag{2.2}$$

Burada

$$R_1(t) = e_0 t f(t) + \sum_{l=0}^{N-1} e_l \left( \frac{f(t) - \sum_{s-1}^{\left\lfloor \frac{l+1}{2} \right\rfloor} Q_{2s-1} t^{2s-1}}{t^{l-1}} \right),$$

$$R_2(t)=\sum_{l=0}^{2}e_l t^{2-l}h(t)+\sum_{l=3}^{N-1}e_l\left(\frac{h(t)-\sum_{s-1}^{\left\lfloor\frac{l-1}{2}\right\rfloor}Q_{2s}t^{2s}}{t^{l-2}}\right),$$

$f(t)=\frac{t-ct^3}{1-(ab+d+c)t^2+cdt^4}$ ve $h(t)=\frac{at^2}{1-(ab+d+c)t^2+cdt^4}$ dir [25].

**İspat:**

$Q_m$ in üreteç fonksiyonunu bulmak için kuvvet serileri yönteminden faydalanabiliriz.

$$G(t)=\sum_{m=0}^{\infty}\Theta_m t^m=\Theta_0+\Theta_1 t+\sum_{m=2}^{\infty}\Theta_m t^m, \tag{2.3}$$

$$btG(t)=\sum_{m=0}^{\infty}b\Theta_m t^{m+1}=\sum_{m=1}^{\infty}b\Theta_{m-1}t^m=bt\Theta_0+\sum_{m=2}^{\infty}b\Theta_{m-1}t^m, \tag{2.4}$$

$$dt^2G(t)=\sum_{m=0}^{\infty}d\Theta_m t^{m+2}=\sum_{m=2}^{\infty}d\Theta_{m-2}t^m. \tag{2.5}$$

$Q_n$ ifadesi, $Q_{2m}=aQ_{2m-1}+cQ_{2m-2}$ ve $Q_{2m+1}=bQ_{2m}+dQ_{2m-1}$ rekürans bağlantılarını sağladığı için,

$$\begin{aligned}
(1-bt-dt^2)G(t)&=\Theta_0+(\Theta_1-b\Theta_0)t+\sum_{m=2}^{\infty}(\Theta_m-b\Theta_{m-1}-d\Theta_{m-2})t^m\\
&=\Theta_0+(\Theta_1-b\Theta_0)t\\
&\quad+e_0\big((a-b)t\sum_{m=1}^{\infty}Q_{2m-1}t^{2m-1}+(c-d)t^2\sum_{m=1}^{\infty}Q_{2m-2}t^{2m-2}\big)\\
&\quad+e_1\big((a-b)\sum_{m=2}^{\infty}Q_{2m-1}t^{2m-1}+(c-d)t\sum_{m=2}^{\infty}Q_{2m-2}t^{2m-2}\big)\\
&\quad+e_2\left(\left(\frac{a-b}{t}\right)\sum_{m=2}^{\infty}Q_{2m-1}t^{2m-1}+(c-d)\sum_{m=2}^{\infty}Q_{2m-2}t^{2m-2}\right)\\
&\quad+e_3\left(\left(\frac{a-b}{t^2}\right)\sum_{m=3}^{\infty}Q_{2m-1}t^{2m-1}+\left(\frac{c-d}{t}\right)\sum_{m=3}^{\infty}Q_{2m-2}t^{2m-2}\right)\\
&\quad+\cdots+\\
&\quad+e_{N-1}\left(\left(\frac{a-b}{t^{N-2}}\right)\sum_{m=\left\lfloor\frac{N+2}{2}\right\rfloor}^{\infty}Q_{2m-1}t^{2m-1}\left(\frac{c-d}{t^{N-3}}\right)\sum_{m=\left\lfloor\frac{N+2}{2}\right\rfloor}^{\infty}Q_{2m-2}t^{2m-2}\right)\\
&=\Theta_0+(\Theta_1-b\Theta_0)t\\
&\quad+\sum_{l=0}^{N-1}e_l\left(\left(\frac{a-b}{t^{l-1}}\right)\sum_{m=\left\lfloor\frac{l+3}{2}\right\rfloor}^{\infty}Q_{2m-1}t^{2m-1}+\left(\frac{c-d}{t^{l-2}}\right)\sum_{m=\left\lfloor\frac{l+3}{2}\right\rfloor}^{\infty}Q_{2m-2}t^{2m-2}\right)
\end{aligned}$$

$$= \Theta_0 + (\Theta_1 - b\Theta_0)t + e_0((a-b)tf(t) + (c-d)t^2h(t))$$

$$+e_1((a-b)(f(t) - Q_1t) + (c-d)th(t))$$

$$+e_2\left(\left(\frac{a-b}{t}\right)(f(t) - Q_1t) + (c-d)h(t)\right)$$

$$+e_3\left(\left(\frac{a-b}{t^2}\right)(f(t) - Q_1t - Q_3t^3) + \left(\frac{c-d}{t}\right)(h(t) - Q_2t^2)\right)$$

$$+\cdots+$$

$$+e_{N-1}\left(\left(\frac{a-b}{t^{N-2}}\right)\left(f(t) - Q_1t - Q_3t^3 - Q_5t^5 - \ldots - Q_{N-1-\xi(N)}t^{N-1-\xi(N)}\right)\right)$$

$$+e_{N-1}\left(\left(\frac{c-d}{t^{N-3}}\right)\left(h(t) - Q_2t^2 - Q_4t^4 - \cdots - Q_{N-3+\xi(N-1)}t^{N-3+\xi(N-1)}\right)\right)$$

$$= \Theta_0 + (\Theta_1 - b\Theta_0)t + (a-b)R_1(t) + (c-d)R_2(t)$$

elde edilir. Burada

$$R_1(t) = e_0tf(t) + \sum_{l=0}^{N-1} e_l\left(\frac{f(t) - \sum_{s=1}^{\left\lfloor\frac{l+1}{2}\right\rfloor} Q_{2s-1}t^{2s-1}}{t^{l-1}}\right),$$

$$R_2(t) = \sum_{l=0}^{2} e_lt^{2-l}h(t) + \sum_{l=3}^{N-1} e_l\left(\frac{h(t) - \sum_{s=1}^{\left\lfloor\frac{l-1}{2}\right\rfloor} Q_{2s}t^{2s}}{t^{l-2}}\right),$$

$f(t) = \sum_{m=1}^{\infty} Q_{2m-1}t^{2m-1}$ ve $h(t) = \sum_{m=1}^{\infty} Q_{2m-2}t^{2m-2}$ dir.

Diğer yandan modifiye edilmiş genelleştirilmiş Fibonacci sayıları aşağıdaki bağıntıları sağlar.

$$\begin{aligned} Q_{2m-1} &= bQ_{2m-2} + dQ_{2m-3} \\ &= b(aQ_{2m-3} + cQ_{2m-4}) + dQ_{2m-3} \\ &= (ab+d)Q_{2m-3} + bcQ_{2m-4} \\ &= (ab+d)Q_{2m-3} + cQ_{2m-3} - cdQ_{2m-5} \\ &= (ab+d+c)Q_{2m-3} - cdQ_{2m-5} \end{aligned} \tag{2.6}$$

ve

$$
\begin{aligned}
Q_{2m-2} &= aQ_{2m-3} + cQ_{2m-4} \\
&= a(bQ_{2m-4} + dQ_{2m-5}) + cQ_{2m-4} \\
&= (ab + c)Q_{2m-4} + adQ_{2m-5} \\
&= (ab + c)Q_{2m-4} + dQ_{2m-4} - cdQ_{2m-6} \\
&= (ab + d + c)Q_{2m-4} - cdQ_{2m-6} \quad \text{dır.}
\end{aligned} \tag{2.7}
$$

(2.6) ve (2.7) eşitlikleri kullanılarak,

$$
\begin{aligned}
&(1 - (ab + d + c)t^2 + cdt^4)f(t) \\
&\qquad = t + (ab + d)t^3 - (ab + d + c)t^3 \\
&\qquad\quad + \textstyle\sum_{m=3}^{\infty}(Q_{2m-1} - (ab + d + c)Q_{2m-3} + cdQ_{2m-5})t^{2m-1}
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
&(1 - (ab + d + c)t^2 + cdt^4)h(t) \\
&\qquad = at^2 + \textstyle\sum_{m=3}^{\infty}(Q_{2m-2} - (ab + d + c)Q_{2m-4} + cdQ_{2m-6})t^{2m-2}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu durumda yukarıdaki ifadeler yeniden düzenlenirse, $f(t) = \frac{t-ct^3}{1-(ab+d+c)t^2+cdt^4}$ ve $h(t) = \frac{at^2}{1-(ab+d+c)t^2+cdt^4}$ elde edilir. Dolayısıyla $f(t), h(t), R_1(t)$ ve $R_2(t)$ ifadeleri göz önüne alınarak $\Theta_n$ in üreteç fonksiyonu

$$
G(t) = \frac{\Theta_0+(\Theta_1-b\Theta_0)t+(a-b)R_1(t)+(c-d)R_2(t)}{1-bt-dt^2}, \tag{2.8}
$$

şeklinde elde edilir. ■

Aşağıdaki teorem modifiye edilmiş genelleştirilmiş Fibonacci $2^k$ −ionları için Binet formülünü ifade ve ispat etmektedir.

**Teorem 2.1.2 (Binet Formülü):**

Her $n \in \mathbb{N}$ için, modifiye edilmiş genelleştirilmiş Fibonacci $2^k$ −ionlarının Binet formülü aşağıdaki şekilde verilir.

$$\Theta_n = \frac{1}{(ab)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}} \left( \frac{\alpha_{\xi(n)} \alpha^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} (\alpha+d-c)^{n-\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} - \beta_{\xi(n)} \beta^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} (\beta+d-c)^{n-\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}}{\alpha-\beta} \right). \tag{2.9}$$

Burada

$$\alpha_{\xi(n)} = \sum_{l=0}^{N-1} \frac{a^{\xi(l+1-\xi(n))}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{l+\xi(n)}{2} \right\rfloor}} (\alpha + d - c)^{\left\lfloor \frac{l+1-\xi(n)}{2} \right\rfloor} \alpha^{\left\lfloor \frac{l+\xi(n)}{2} \right\rfloor} e_l$$

ve

$$\beta_{\xi(n)} = \sum_{l=0}^{N-1} \frac{a^{\xi(l+1-\xi(n))}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{l+\xi(n)}{2} \right\rfloor}} (\beta + d - c)^{\left\lfloor \frac{l+1-\xi(n)}{2} \right\rfloor} \beta^{\left\lfloor \frac{l+\xi(n)}{2} \right\rfloor} e_l$$

olarak verilmektedir [25].

**İspat:** Modifiye edilmiş genelleştirilmiş Fibonacci dizilerinin Binet formülünü kullanarak aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$\begin{aligned}
\Theta_{2n} = \sum_{l=0}^{N-1} Q_{2n+l} e_l = e_0 & \frac{a}{(ab)^n} \left( \frac{\alpha^n (\alpha+d-c)^n - \beta^n (\beta+d-c)^n}{\alpha-\beta} \right) \\
& + e_1 \frac{1}{(ab)^n} \left( \frac{\alpha^n (\alpha+d-c)^{n+1} - \beta^n (\beta+d-c)^{n+1}}{\alpha-\beta} \right) \\
& + e_2 \frac{a}{(ab)^{n+1}} \left( \frac{\alpha^{n+1} (\alpha+d-c)^{n+1} - \beta^{n+1} (\beta+d-c)^{n+1}}{\alpha-\beta} \right) \\
& + e_3 \frac{1}{(ab)^{n+1}} \left( \frac{\alpha^{n+1} (\alpha+d-c)^{n+2} - \beta^{n+1} (\beta+d-c)^{n+2}}{\alpha-\beta} \right) \\
& + \cdots \\
& + e_{N-2} \frac{a}{(ab)^{n+\frac{N-2}{2}}} \left( \frac{\alpha^{n+\frac{N-2}{2}} (\alpha+d-c)^{n+\frac{N-2}{2}} - \beta^{n+\frac{N-2}{2}} (\beta+d-c)^{n+\frac{N-2}{2}}}{\alpha-\beta} \right) \\
& + e_{N-1} \frac{1}{(ab)^{n+\frac{N-2}{2}}} \left( \frac{\alpha^{n+\frac{N-2}{2}} (\alpha+d-c)^{n+\frac{N}{2}} - \beta^{n+\frac{N-2}{2}} (\beta+d-c)^{n+\frac{N}{2}}}{\alpha-\beta} \right) \\
= \frac{1}{(ab)^n} & \frac{\alpha^n (\alpha+d-c)^n}{\alpha-\beta} \left( e_0 a + e_1 (\alpha + d - c) + e_2 \left( \frac{a\alpha(\alpha+d-c)}{ab} \right) \right.
\end{aligned}$$

$$+ e_3\left(\frac{\alpha(\alpha+d-c)^2}{ab}\right) + \cdots + e_{N-2}\left(\frac{a\alpha^{\frac{N-2}{2}}(\alpha+d-c)^{\frac{N-2}{2}}}{ab^{\frac{N-2}{2}}}\right)$$

$$+e_{N-1}\left(\frac{\alpha^{\frac{N-2}{2}}(\alpha+d-c)^{\frac{N}{2}}}{ab^{\frac{N-2}{2}}}\right))$$

$$-\frac{1}{(ab)^n}\frac{\beta^n(\beta+d-c)^n}{\alpha-\beta}(e_0 a + e_1(\beta+d-c) + e_2\left(\frac{a\beta(\beta+d-c)}{ab}\right)$$

$$+e_3\left(\frac{\beta(\beta+d-c)^2}{ab}\right) + \cdots + e_{N-2}\left(\frac{a\beta^{\frac{N-2}{2}}(\beta+d-c)^{\frac{N-2}{2}}}{ab^{\frac{N-2}{2}}}\right)$$

$$+e_{N-1}\left(\frac{\beta^{\frac{N-2}{2}}(\beta+d-c)^{\frac{N}{2}}}{ab^{\frac{N-2}{2}}}\right))$$

$$=\frac{1}{(ab)^n}\frac{\alpha_0\alpha^n(\alpha+d-c)^n-\beta_0\beta^n(\beta+d-c)^n}{\alpha-\beta}. \tag{2.10}$$

Burada

$$\alpha_0 = \sum_{l=0}^{N-1}\frac{a^{\xi(l+1)}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor}}(\alpha+d-c)^{\left\lfloor\frac{l+1}{2}\right\rfloor}\alpha^{\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor}e_l$$

ve

$$\beta_0 = \sum_{l=0}^{N-1}\frac{a^{\xi(l+1)}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor}}(\beta+d-c)^{\left\lfloor\frac{l+1}{2}\right\rfloor}\beta^{\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor}e_l$$

olarak elde edilmiştir. Benzer işlemler ile aşağıdaki ifadeler de elde edilebilir.

$$\Theta_{2n+1} = \frac{1}{(ab)^n}\frac{\alpha_1\alpha^n(\alpha+d-c)^{n+1}-\beta_1\beta^n(\beta+d-c)^{n+1}}{\alpha-\beta}. \tag{2.11}$$

Burada

$$\alpha_1 = \sum_{l=0}^{N-1}\frac{a^{\xi(l)}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{l+1}{2}\right\rfloor}}(\alpha+d-c)^{\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor}\alpha^{\left\lfloor\frac{l+1}{2}\right\rfloor}e_l$$

ve

$$\beta_1 = \sum_{l=0}^{N-1}\frac{a^{\xi(l)}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{l+1}{2}\right\rfloor}}(\beta+d-c)^{\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor}\beta^{\left\lfloor\frac{l+1}{2}\right\rfloor}e_l$$

olarak bulunur. Son olarak (2.10) ve (2.11) eşitlikleri birleştirilirse

$$\Theta_n = \frac{1}{(ab)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}} \left( \frac{\alpha_{\xi(n)} \alpha^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} (\alpha+d-c)^{n-\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} - \beta_{\xi(n)} \beta^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} (\beta+d-c)^{n-\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}}{\alpha-\beta} \right).$$

elde edilir. Burada

$$\alpha_{\xi(n)} = \sum_{l=0}^{N-1} \frac{a^{\xi(l+1-\xi(n))}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{l+\xi(n)}{2} \right\rfloor}} (\alpha + d - c)^{\left\lfloor \frac{l+1-\xi(n)}{2} \right\rfloor} \alpha^{\left\lfloor \frac{l+\xi(n)}{2} \right\rfloor} e_l$$

ve

$$\beta_{\xi(n)} = \sum_{l=0}^{N-1} \frac{a^{\xi(l+1-\xi(n))}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{l+\xi(n)}{2} \right\rfloor}} (\beta + d - c)^{\left\lfloor \frac{l+1-\xi(n)}{2} \right\rfloor} \beta^{\left\lfloor \frac{l+\xi(n)}{2} \right\rfloor} e_l$$

olarak bulunur. ■

Aşağıdaki teorem modifiye edilmiş genelleştirilmiş Fibonacci $2^k$ −ionları için Catalan özdeşliğini ifade ve ispat etmektedir.

**Teorem 2.1.3 (Catalan Özdeşliği):**
Her $n,\ r\ \in \mathbb{N}$ ve $r \leq n$ için, Catalan özdeşliği

$$\begin{aligned}
&\Theta_{2(n+r)+\xi(i)} \Theta_{2(n-r)+\xi(i)} - (\Theta_{2n+\xi(i)})^2 \\
&\quad = \frac{(-c)^{\xi(i)}}{(ab)^{2r}(\alpha-\beta)^2} \left( \alpha_{\xi(i)}\, \beta_{\xi(i)} \left( (ab)^{2r+\xi(i)} (cd)^n - (ab)^{2r+\xi(i)} (cd)^n \left( \frac{\alpha+d}{\beta+d} \right)^r \right) \right) \\
&\quad + \frac{(-c)^{\xi(i)}}{(ab)^{2r}(\alpha-\beta)^2} \left( \beta_{\xi(i)}\, \alpha_{\xi(i)} \left( (ab)^{2r+\xi(i)} (cd)^n - (ab)^{2r+\xi(i)} (cd)^n \left( \frac{\beta+d}{\alpha+d} \right)^r \right) \right),
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Burada $\alpha_{\xi(i)}$ ve $\beta_{\xi(i)}$, Teorem 2.1.2 de tanımlanan ifadelerdir ve $i \in \{0,1\}$ [25].

**İspat:** $i = 0$ için (2.9) denkleminde verilen modifiye edilmiş genelleştirilmiş Fibonacci $2^k$ −ionlarının Binet formülü kullanılarak aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\Theta_{2(n+r)}\Theta_{2(n-r)} - (\Theta_{2n})^2$$

$$= \left(\frac{\alpha_0\alpha^{n+r}(\alpha+d-c)^{n+r}-\beta_0\beta^{n+r}(\beta+d-c)^{n+r}}{(ab)^{n+r}(\alpha-\beta)}\right)\left(\frac{\alpha_0\alpha^{n-r}(\alpha+d-c)^{n-r}-\beta_0\beta^{n-r}(\beta+d-c)^{n-r}}{(ab)^{n-r}(\alpha-\beta)}\right)$$

$$-\left(\frac{\alpha_0\alpha^{n}(\alpha+d-c)^{n}-\beta_0\beta^{n}(\beta+d-c)^{n}}{(ab)^{n}(\alpha-\beta)}\right)^2$$

$$= \frac{1}{(ab)^{2n}(\alpha-\beta)^2}(\alpha_0\beta_0(\alpha^n\beta^n(\alpha+d-c)^n(\beta+d-c)^n$$

$$-\alpha^{n+r}\beta^{n-r}(\alpha+d-c)^{n+r}(\beta+d-c)^{n-r}$$

$$+\beta_0\alpha_0(\alpha^n\beta^n(\alpha+d-c)^n(\beta+d-c)^n$$

$$-\alpha^{n-r}\beta^{n+r}(\alpha+d-c)^{n-r}(\beta+d-c)^{n+r}))$$

$$= \frac{1}{(ab)^{2r}(\alpha-\beta)^2}(\alpha_0\beta_0\left((ab)^{2r}(cd)^n-(ab)^{2r}(cd)^n\left(\frac{\alpha+d}{\beta+d}\right)^r\right)$$

$$+\beta_0\alpha_0\left((ab)^{2r}(cd)^n-(ab)^{2r}(cd)^n\left(\frac{\beta+d}{\alpha+d}\right)^r\right)). \qquad (2.12)$$

Benzer olarak $i=1$ için ise aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\Theta_{2(n+r)+1}\Theta_{2(n-r)+1} - (\Theta_{2n+1})^2$$

$$= \frac{-c}{(ab)^{2r}(\alpha-\beta)^2}(\alpha_1\beta_1\left((ab)^{2r+1}(cd)^n-(ab)^{2r+1}(cd)^n\left(\frac{\alpha+d}{\beta+d}\right)^r\right)$$

$$+\beta_1\alpha_1\left((ab)^{2r+1}(cd)^n-(ab)^{2r+1}(cd)^n\left(\frac{\beta+d}{\alpha+d}\right)^r\right)). \qquad (2.13)$$

(2.12) ve (2.13) denklemleri tek bir denklem olarak birleştirilirse

$$\Theta_{2(n+r)+\xi(i)}\Theta_{2(n-r)+\xi(i)} - (\Theta_{2n+\xi(i)})^2$$

$$= \frac{(-c)^{\xi(i)}}{(ab)^{2r}(\alpha-\beta)^2}(\alpha_{\xi(i)}\,\beta_{\xi(i)}\left((ab)^{2r+\xi(i)}(cd)^n-(ab)^{2r+\xi(i)}(cd)^n\left(\frac{\alpha+d}{\beta+d}\right)^r\right)$$

$$+\beta_{\xi(i)}\,\alpha_{\xi(i)}\left((ab)^{2r+\xi(i)}(cd)^n-(ab)^{2r+\xi(i)}(cd)^n\left(\frac{\beta+d}{\alpha+d}\right)^r\right)).$$

elde edilir. Burada $\alpha_{\xi(i)}$ ve $\beta_{\xi(i)}$, Teorem 2.1.2 de tanımlanan ifadelerdir. ■

Catalan özdeşliğinde $r=1$ alınırsa özdeşliğin özel bir hali olan Cassini özdeşliği elde edilir. Aşağıdaki teorem modifiye edilmiş genelleştirilmiş Fibonacci $2^k-$ionları için Cassini özdeşliğini ifade ve ispat etmektedir.

**Teorem 2.1.4 (Cassini Özdeşliği):**

Her $n \in \mathbb{N}$ için, Cassini özdeşliği,

$$\Theta_{2(n+1)+\xi(i)}\Theta_{2(n-1)+\xi(i)} - (\Theta_{2n+\xi(i)})^2$$
$$= \frac{(-c)^{\xi(i)}}{(ab)^2(\alpha-\beta)^2}(\alpha_{\xi(i)}\,\beta_{\xi(i)}\left((ab)^{2+\xi(i)}(cd)^n - (ab)^{2+\xi(i)}(cd)^n\left(\frac{\alpha+d}{\beta+d}\right)\right)$$
$$+\beta_{\xi(i)}\,\alpha_{\xi(i)}\left((ab)^{2+\xi(i)}(cd)^n - (ab)^{2+\xi(i)}(cd)^n\left(\frac{\beta+d}{\alpha+d}\right)\right)),$$

şeklinde elde edilir. Burada $\alpha_{\xi(i)}$ ve $\beta_{\xi(i)}$, Teorem 2.1.2 de tanımlanan ifadelerdir [25].

**İspat:** Cassini özdeşliği, Catalan özdeşliğinin özel halidir. Teorem 2.1.3 ‘te $r = 1$ alınırsa bu teoremin ispatı tamamlanmış olur. ■

## 2.2. Modifiye Edilmiş Genelleştirilmiş Lucas $2^k$ –İonları

Bu bölümde ilk olarak modifiye edilmiş genelleştirilmiş Lucas $2^k$ –ion tanımı verilecektir.

**Tanım 2.2.1:**

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere modifiye edilmiş genelleştirilmiş Lucas $2^k$ –ionları aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$V_n = \sum_{l=0}^{N-1} e_l U_{n+l}. \tag{2.14}$$

Bu ifadede kullanılan $U_n$, (1.12) denkleminde tanımlanmış olan modifiye edilmiş genelleştirilmiş Lucas sayılarıdır [25].

Aşağıda bulunan tabloda modifiye edilmiş genelleştirilmiş Lucas $2^k$ –ionlarının $a, b, c, d, k$ gibi özel durumlar için var olan birçok çalışmanın genellemesi verilmiştir.

Tablo 2.2. Modifiye edilmiş genelleştirilmiş Lucas $2^k$ −ionlarının
$a, b, c, d, k$ değerleri için özel durumları

| $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $k$ | *Modifiye edilmiş genelleştirilmiş Lucas* $2^k -$ *ionları* |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | Lucas kuaterniyonları [8] |
| $a$ | $b$ | 1 | 1 | 2 | İki periyotlu Lucas kuaterniyonları [9] |
| $k$ | $k$ | 1 | 1 | 2 | $k -$ Lucas kuaterniyonları [13] |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | Lucas oktonyonları [11] |
| $a$ | $b$ | 1 | 1 | 3 | İki periyotlu Lucas oktonyonları [24] |
| $k$ | $k$ | 1 | 1 | 1 | $k -$ Lucas oktonyonları |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 4 | Lucas sedenyonları [21] |
| $a$ | $b$ | 1 | 1 | 4 | İki periyotlu Lucas sedenyonları |
| $k$ | $k$ | 1 | 1 | 4 | $k -$ Lucas sedenyonları |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |

Aşağıdaki teorem modifiye edilmiş genelleştirilmiş Lucas $2^k$ −ionları için üreteç fonksiyonunu ifade ve ispat etmektedir.

**Teorem 2.2.1 (Üreteç Fonksiyonu):**

Modifiye edilmiş genelleştirilmiş Lucas $2^k$ −ionları $V_n$ için üreteç fonksiyonu aşağıdaki şekildedir:

$$L(t) = \frac{V_0+(V_1-aV_0)t+(b-a)R_1(t)+(d-c)R_2(t)}{1-at-ct^2}. \tag{2.15}$$

Burada,

$$R_1(t)=e_0 t f(t) + \sum_{l=0}^{N-1} e_l \left( \frac{f(t)-\sum_{s=1}^{\left\lfloor \frac{l+1}{2} \right\rfloor} U_{2s-1} t^{2s-1}}{t^{l-1}} \right),$$

$$R_2(t) = \sum_{l=0}^{2} e_l t^{2-l} h(t) - \sum_{l=1}^{2} e_l t^{2-l} U_0 + \sum_{l=3}^{N-1} e_l \left( \frac{h(t)-\sum_{s=0}^{\left\lfloor \frac{l-1}{2} \right\rfloor} U_{2s} t^{2s}}{t^{l-2}} \right),$$

$$f(t) = \frac{at+at^3}{1-(ab+d+c)t^2+cdt^4} \quad \text{ve} \quad h(t) = \frac{\left(\frac{d+1}{d}\right)+(ab+d+1)t^2-(ab+d+c)\left(\frac{d+1}{d}\right)t^2}{1-(ab+d+c)t^2+cdt^4} \quad \text{dir [25].}$$

**İspat:** Teorem 2.1.1 in ispatına benzer şekilde yapılabilir. ■

Aşağıdaki teorem modifiye edilmiş genelleştirilmiş Lucas $2^k$ −ionları için Binet formülünü ifade ve ispat etmektedir.

**Teorem 2.2.2 (Binet Formülü):**
Her $n \in \mathbb{N}$ için, modifiye edilmiş genelleştirilmiş Lucas $2^k$ −ionlarının Binet formülü aşağıdaki şekilde verilir:

$$V_n = \frac{1}{(ab)^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor}} \left( \frac{\alpha^*{}_{\xi(n)}(\alpha+d+1)\alpha^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor}(\alpha+d-c)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} - \beta^*{}_{\xi(n)}(\beta+d+1)\beta^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor}(\beta+d-c)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}}{\alpha-\beta} \right). \qquad (2.16)$$

Burada,

$$\alpha^*{}_{\xi(n)} = \sum_{l=0}^{N-1} \frac{a^{\xi(l+\xi(n))}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{l+1-\xi(n)}{2} \right\rfloor}} (\alpha+d-c)^{\left\lfloor \frac{l+\xi(n)}{2} \right\rfloor} \alpha^{\left\lfloor \frac{l+1-\xi(n)}{2} \right\rfloor} e_l$$

ve

$$\beta^*{}_{\xi(n)} = \sum_{l=0}^{N-1} \frac{a^{\xi(l+\xi(n))}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{l+1-\xi(n)}{2} \right\rfloor}} (\beta+d-c)^{\left\lfloor \frac{l+\xi(n)}{2} \right\rfloor} \beta^{\left\lfloor \frac{l+1-\xi(n)}{2} \right\rfloor} e_l$$

olarak verilmektedir [25].

**İspat:** Teorem 2.1.2 nin ispatına benzer şekilde yapılabilir. ■

Aşağıdaki teoremde Catalan özdeşliği Binet formülü yardımıyla ifade edilecektir. Daha sonra ise, Catalan özdeşliğinde $r = 1$ için Cassini özdeşliği verilecektir.

**Teorem 2.2.3 (Catalan Özdeşliği):**

Her $n,\ r \in \mathbb{N}$ ve $r \leq n$ için, Catalan özdeşliği,

$$V_{2(n+r)+\xi(i)}V_{2(n-r)+\xi(i)} - (V_{2n+\xi(i)})^2$$
$$= \frac{(-c)^{1-\xi(i)}(\alpha+d+1)(\beta+d+1)}{(ab)^{2r}(\alpha-\beta)^2}$$
$$\left(\alpha^*{}_{\xi(i)}\,\beta^*{}_{\xi(i)}\left((ab)^{2r+1-\xi(i)}(cd)^{n-1+\xi(i)} - (ab)^{2r+1-\xi(i)}(cd)^{n-1+\xi(i)}\left(\frac{\alpha+d}{\beta+d}\right)^r\right)\right)$$
$$+\frac{(-c)^{1-\xi(i)}(\alpha+d+1)(\beta+d+1)}{(ab)^{2r}(\alpha-\beta)^2}$$
$$\left(\beta^*{}_{\xi(i)}\,\alpha^*{}_{\xi(i)}\left((ab)^{2r+1-\xi(i)}(cd)^{n-1+\xi(i)} - (ab)^{2r+1-\xi(i)}(cd)^{n-1+\xi(i)}\left(\frac{\beta+d}{\alpha+d}\right)^r\right)\right) \quad (2.17)$$

şeklinde elde edilir. Burada $\alpha^*{}_{\xi(i)}$ $ve$ $\beta^*{}_{\xi(i)}$ ifadeleri Teorem 2.2.2 de tanımlanan ifadelerdir [25].

**İspat:** Teorem 2.1.3 ün ispatına benzer şekilde yapılabilir. ■

**Teorem 2.2.4 (Cassini Özdeşliği):**

Her $n \in \mathbb{N}$ için Cassini özdeşliği,

$$V_{2(n+1)+\xi(i)}V_{2(n-1)+\xi(i)} - (V_{2n+\xi(i)})^2$$
$$= \frac{(-c)^{1-\xi(i)}(\alpha+d+1)(\beta+d+1)}{(ab)^{2}(\alpha-\beta)^2}$$
$$\left(\alpha^*{}_{\xi(i)}\,\beta^*{}_{\xi(i)}\left((ab)^{3-\xi(i)}(cd)^{n-1+\xi(i)} - (ab)^{3-\xi(i)}(cd)^{n-1+\xi(i)}\left(\frac{\alpha+d}{\beta+d}\right)\right)\right)$$
$$+\frac{(-c)^{1-\xi(i)}(\alpha+d+1)(\beta+d+1)}{(ab)^{2}(\alpha-\beta)^2}$$
$$\left(\beta^*{}_{\xi(i)}\,\alpha^*{}_{\xi(i)}\left((ab)^{3-\xi(i)}(cd)^{n-1+\xi(i)} - (ab)^{3-\xi(i)}(cd)^{n-1+\xi(i)}\left(\frac{\beta+d}{\alpha+d}\right)\right)\right). \quad (2.18)$$

şeklinde elde edilir. Burada $\alpha^*{}_{\xi(i)}$ $ve$ $\beta^*{}_{\xi(i)}$ ifadeleri Teorem 2.2.2 de tanımlanan ifadelerdir.

**İspat:** Teorem 2.1.4 ün ispatına benzer şekilde yapılabilir. ■

## BÖLÜM 3

## İKİ PERİYOTLU $q$ −FIBONACCI VE $q$ −LUCAS $2^k$ −İONLARI

Bu bölümde $q$ −Analizin bazı önemli notasyonlarından faydalanarak iki periyotlu $q$ −Fibonacci ve iki periyotlu $q$ −Lucas $2^k$ −ionları tanımlanacaktır. Ayrıca Binet formülleri, binom toplamları, üstel üreteç fonksiyonları, Catalan özdeşliği, Cassini özdeşliği, d'Ocagne özdeşliği sunulacaktır. Bu bölümde elde edilen tüm veriler "Bi-periodic Fibonacci and Lucas $2^k$ −ions with $q$ −integer components" isimli çalışmada verilmiş olup bu makale henüz hakem incelemesindedir [26].

### 3.1. İki Periyotlu $q$ −Fibonacci $2^k$ − İonları

Bu bölümde iki periyotlu $q$ −Fibonacci $2^k$ −ionlarının tanımı verilecektir. Ayrıca Binet formülleri, üstel üreteç foksiyonları ve bazı önemli özdeşlikleri incelenecektir.

**Tanım 3.1.1:**

$n \in \mathbb{N}$ için iki periyotlu Fibonacci $2^k$ −ionları,

$$\mathcal{F}_{n,k} = \sum_{l=0}^{2^k-1} q_{n+l} e_l \,, \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Burada $q_n$, $(1.5)$ denkleminde tanımlanan $n.$ dereceden iki periyotlu Fibonacci sayılarıdır [26].

**Tanım 3.1.2:**

İki periyotlu $q$ −Fibonacci $2^k$ −ionları,

$$\widehat{\mathcal{F}}_{n,k}(\alpha, q) = \sum_{l=0}^{2^k-1} \left( \frac{a^{1-\xi(n+l)}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{n+l}{2} \right\rfloor}} \right) \alpha^{n-1+l} [n+l]_q e_l. \tag{3.2}$$

şeklinde tanımlanmaktadır [26].

Aşağıdaki teorem iki periyotlu $q$ −Fibonacci $2^k$ −ionlarının Binet formülünü ifade ve ispat etmektedir.

**Teorem 3.1.1:**

İki periyotlu $q$ −Fibonacci $2^k$ − ionlarının Binet formülü aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\hat{\mathcal{F}}_{n,k}(\alpha,q) = \frac{\alpha^n \hat{\alpha}^{(k)}_{\xi(n)} - (\alpha q)^n \hat{\gamma}^{(k)}_{\xi(n)}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}\alpha(1-q)}. \tag{3.3}$$

Burada

$\hat{\alpha}^{(k)}_{\xi(n)} = \left( \sum_{l=0}^{2^k-1} \left( \frac{a^{\xi(l+\xi(n+1))}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{l+\xi(n)}{2} \right\rfloor}} \right) \alpha^l e_l \right)$ ve $\hat{\gamma}^{(k)}_{\xi(n)} = \left( \sum_{l=0}^{2^k-1} \left( \frac{a^{\xi(l+\xi(n+1))}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{l+\xi(n)}{2} \right\rfloor}} \right) (\alpha q)^l e_l \right)$ dir [26].

**İspat:**

Bu teoremin ispatı iki farklı durumda incelenecektir. İlk olarak $n = 2m$ olması durumu ele alınsın. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{F}}_{2m,k}(\alpha;q) &= \sum_{l=0}^{2^k-1} \left( \frac{a^{1-\xi(2m+l)}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{2m+l}{2} \right\rfloor}} \right) \alpha^{2m-1+l} [2m+l]_q e_l \\
&= \frac{1}{(ab)^m} \sum_{l=0}^{2^k-1} \left( \frac{a^{\xi(l+1)}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor}} \right) \alpha^{2m-1+l} [2m+l]_q e_l \\
&= \frac{\alpha^{2m}}{(ab)^m \alpha(1-q)} \left( \sum_{l=0}^{2^k-1} \left( \frac{a^{\xi(l+1)}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor}} \right) \alpha^l e_l \right) - \frac{(\alpha q)^{2m}}{(ab)^m \alpha(1-q)} \left( \sum_{l=0}^{2^k-1} \left( \frac{a^{\xi(l+1)}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor}} \right) (\alpha q)^l e_l \right) \\
&= \frac{\alpha^{2m} \hat{\alpha}_0{}^{(k)} - (\alpha q)^{2m} \hat{\gamma}_0{}^{(k)}}{(ab)^m \alpha(1-q)}.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

elde edilir. Şimdi de $n = 2m + 1$ olması durumu ele alınsın. Bu durumda aşağıdaki bağıntı elde edilir.

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{F}}_{2m+1,k}(\alpha;q) &= \sum_{l=0}^{2^k-1} \left( \frac{a^{\xi(2m+l)}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{2m+l+1}{2} \right\rfloor}} \right) \alpha^{2m+l} [2m+l+1]_q e_l \\
&= \frac{1}{(ab)^m} \sum_{l=0}^{2^k-1} \left( \frac{a^{\xi(l)}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{l+1}{2} \right\rfloor}} \right) \alpha^{2m+l} [2m+l+1]_q e_l
\end{aligned}$$

$$= \frac{\alpha^{2m+1}}{(ab)^m \alpha(1-q)} \left( \sum_{l=0}^{2^k-1} \left( \frac{a^{\xi(l)}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{l+1}{2} \right\rfloor}} \right) \alpha^l e_l \right) - \frac{(\alpha q)^{2m+1}}{(ab)^m \alpha(1-q)} \left( \sum_{l=0}^{2^k-1} \left( \frac{a^{\xi(l)}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{l+1}{2} \right\rfloor}} \right) (\alpha q)^l e_l \right)$$

$$= \frac{\alpha^{2m+1} \widehat{\alpha}_1{}^{(k)} - (\alpha q)^{2m+1} \widehat{\gamma}_1{}^{(k)}}{(ab)^m \alpha(1-q)} \tag{3.5}$$

(3.4) ve (3.5) denklemlerinden faydalanarak,

$$\widehat{\mathcal{F}}_{n,k}(\alpha; q) = \frac{\alpha^n \widehat{\alpha}_{\xi(n)}^{(k)} - (\alpha q)^n \widehat{\gamma}_{\xi(n)}^{(k)}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \alpha(1-q)},$$

yazılabilir. Burada,

$\widehat{\alpha}_{\xi(n)}^{(k)} = \left( \sum_{l=0}^{2^k-1} \left( \frac{a^{\xi(l+\xi(n+1))}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{l+\xi(n)}{2} \right\rfloor}} \right) \alpha^l e_l \right)$ ve $\widehat{\gamma}_{\xi(n)}^{(k)} = \left( \sum_{l=0}^{2^k-1} \left( \frac{a^{\xi(l+\xi(n+1))}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{l+\xi(n)}{2} \right\rfloor}} \right) (\alpha q)^l e_l \right)$ dir.

İspat bu şekilde tamamlanmıştır. ■

Aşağıdaki teorem iki periyotlu $q$ −Fibonacci $2^k$ −ionlarının üstel üreteç fonksiyonunu ifade ve ispat etmektedir

**Teorem 3.1.2:**

İki periyotlu $q$ −Fibonacci $2^k$ −ionları için üstel üreteç fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır [26]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \widehat{\mathcal{F}}_{n,k}(\alpha; q) \frac{x^n}{n!} =$$

$$\frac{e^{\frac{\alpha x}{\sqrt{ab}}}\left(\widehat{\alpha}_0{}^{(k)} + \widehat{\alpha}_1{}^{(k)}\sqrt{ab}\right) + e^{\frac{-\alpha x}{\sqrt{ab}}}\left(\widehat{\alpha}_0{}^{(k)} - \widehat{\alpha}_1{}^{(k)}\sqrt{ab}\right) - e^{\frac{\alpha q x}{\sqrt{ab}}}\left(\widehat{\gamma}_0{}^{(k)} + \widehat{\gamma}_1{}^{(k)}\sqrt{ab}\right) - e^{\frac{-\alpha q x}{\sqrt{ab}}}\left(\widehat{\gamma}_0{}^{(k)} - \widehat{\gamma}_1{}^{(k)}\sqrt{ab}\right)}{2\alpha(1-q)}. \tag{3.6}$$

**İspat:**

İki periyotlu $q$ − Fibonacci $2^k$ −ionlarının Binet formülünden yararlanarak;

$$\sum_{n=0}^{\infty} \widehat{\mathcal{F}}_{n,k}(\alpha; q) \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{\mathcal{F}}_{2n,k}(\alpha; q) \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{\mathcal{F}}_{2n+1,k}(\alpha; q) \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{\alpha^{2n}\widehat{\alpha}_0{}^{(k)}-(\alpha q)^{2n}\widehat{\gamma}_0{}^{(k)}}{(ab)^n\alpha(1-q)}\right]\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{\alpha^{2n+1}\widehat{\alpha}_1{}^{(k)}-(\alpha q)^{2n+1}\widehat{\gamma}_1{}^{(k)}}{(ab)^n\alpha(1-q)}\right]\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \frac{\widehat{\alpha}_0{}^{(k)}}{\alpha(1-q)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha x}{\sqrt{ab}}\right)^2\frac{1}{(2n)!}-\frac{\widehat{\gamma}_0{}^{(k)}}{\alpha(1-q)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha q x}{\sqrt{ab}}\right)^2\frac{1}{(2n)!}$$

$$+\frac{\widehat{\alpha}_1{}^{(k)}\sqrt{ab}}{\alpha(1-q)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha x}{\sqrt{ab}}\right)^{2n+1}\frac{1}{(2n+1)!}-\frac{\widehat{\gamma}_1{}^{(k)}\sqrt{ab}}{\alpha(1-q)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha q x}{\sqrt{ab}}\right)^{2n+1}\frac{1}{(2n+1)!}$$

$$= \frac{\widehat{\alpha}_0{}^{(k)}}{\alpha(1-q)}\left[\frac{e^{\frac{\alpha x}{\sqrt{ab}}}+e^{\frac{-\alpha x}{\sqrt{ab}}}}{2}\right]-\frac{\widehat{\gamma}_0{}^{(k)}}{\alpha(1-q)}\left[\frac{e^{\frac{\alpha q x}{\sqrt{ab}}}+e^{\frac{-\alpha q x}{\sqrt{ab}}}}{2}\right]$$

$$+\frac{\widehat{\alpha}_1{}^{(k)}\sqrt{ab}}{\alpha(1-q)}\left[\frac{e^{\frac{\alpha x}{\sqrt{ab}}}-e^{\frac{-\alpha x}{\sqrt{ab}}}}{2}\right]-\frac{\widehat{\gamma}_1{}^{(k)}\sqrt{ab}}{\alpha(1-q)}\left[\frac{e^{\frac{\alpha q x}{\sqrt{ab}}}-e^{\frac{-\alpha q x}{\sqrt{ab}}}}{2}\right]$$

$$= \frac{e^{\frac{\alpha x}{\sqrt{ab}}}\left(\widehat{\alpha}_0{}^{(k)}+\widehat{\alpha}_1{}^{(k)}\sqrt{ab}\right)+e^{\frac{-\alpha x}{\sqrt{ab}}}\left(\widehat{\alpha}_0{}^{(k)}-\widehat{\alpha}_1{}^{(k)}\sqrt{ab}\right)-e^{\frac{\alpha q x}{\sqrt{ab}}}\left(\widehat{\gamma}_0{}^{(k)}+\widehat{\gamma}_1{}^{(k)}\sqrt{ab}\right)-e^{\frac{-\alpha q x}{\sqrt{ab}}}\left(\widehat{\gamma}_0{}^{(k)}-\widehat{\gamma}_1{}^{(k)}\sqrt{ab}\right)}{2\alpha(1-q)} \quad (3.7)$$

elde edilir. ■

## 3.2. İki Periyotlu $q$-Lucas $2^k$- İonları

Bu bölümde iki periyotlu $q$ –Lucas $2^k$ –ionlarının tanımı verilecektir. Ayrıca Binet formülleri, üstel üreteç foksiyonları ve bazı önemli özdeşlikleri incelenecektir.

**Tanım 3.2.1:**

$n \in \mathbb{N}$ için iki periyotlu Lucas $2^k$ – ionları,

$$\mathcal{L}_{n,k} = \sum_{l=0}^{2^k-1} \ell_{n+l} e_l \,, \quad (3.8)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Burada $\ell_n$ , (1.7) denkleminde tanımlanan $n$**.** dereceden iki periyotlu Lucas sayılarıdır [26].

**Tanım 3.2.2:**

İki periyotlu $q$ −Lucas $2^k$ − ionları,

$$\hat{\mathcal{L}}_{n,k}(\alpha;q)=\sum_{l=0}^{2^k-1}\left(\frac{a^{\xi(n+l)}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n+l+1}{2}\right\rfloor}}\right)\alpha^{n+l}\frac{[2(n+l)]_q}{[n+l]_q}e_l\,, \tag{3.9}$$

şeklinde tanımlanmaktadır [26].

Aşağıdaki teorem iki periyotlu $q$ −Lucas $2^k$ −ionlarının Binet formülünü ifade ve ispat etmektedir.

**Teorem 3.2.1:**

İki periyotlu $q$ −Lucas $2^k$ − ionları için Binet formülü;

$$\hat{\mathcal{L}}_{n,k}(\alpha;q)=\frac{\alpha^n\hat{\alpha}^{(k)}_{\xi(n+1)}+(\alpha q)^n\hat{\gamma}^{(k)}_{\xi(n+1)}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+\xi(n)}} \tag{3.10}$$

şeklindedir. Burada

$\hat{\alpha}^{(k)}_{\xi(n)}=\left(\sum_{l=0}^{2^k-1}\left(\frac{a^{\xi(l+\xi(n+1))}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{l+\xi(n)}{2}\right\rfloor}}\right)\alpha^l e_l\right)$ ve $\hat{\gamma}^{(k)}_{\xi(n)}=\left(\sum_{l=0}^{2^k-1}\left(\frac{a^{\xi(l+\xi(n+1))}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{l+\xi(n)}{2}\right\rfloor}}\right)(\alpha q)^l e_l\right)$ dir [26].

**İspat:**

Bu teoremin ispatı iki farklı durumda incelenecektir. İlk olarak $n=2m$ olması durumu ele alınsın. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{L}}_{2m,k}(\alpha;q)&=\sum_{l=0}^{2^k-1}\left(\frac{a^{\xi(2m+l)}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{2m+l+1}{2}\right\rfloor}}\right)\alpha^{2m+l}\frac{[2(2m+l)]_q}{[2m+l]_q}e_l\\
&=\frac{1}{(ab)^m}\sum_{l=0}^{2^k-1}\left(\frac{a^{\xi(l)}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{l+1}{2}\right\rfloor}}\right)\alpha^{2m+l}\frac{[2(2m+l)]_q}{[2m+l]_q}e_l\\
&=\frac{\alpha^{2m}}{(ab)^m}\left(\sum_{l=0}^{2^k-1}\left(\frac{a^{\xi(l)}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{l+1}{2}\right\rfloor}}\right)\alpha^l e_l\right)+\frac{(\alpha q)^{2m}}{(ab)^m}\left(\sum_{l=0}^{2^k-1}\left(\frac{a^{\xi(l)}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{l+1}{2}\right\rfloor}}\right)(\alpha q)^l e_l\right)\\
&=\frac{\alpha^{2m}\hat{\alpha}_1{}^{(k)}-(\alpha q)^{2m}\hat{\gamma}_1{}^{(k)}}{(ab)^m}.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

elde edilir. Şimdi de $n = 2m + 1$ olması durumu ele alınsın. Bu durumda aşağıdaki bağıntı elde edilir.

$$\hat{\mathcal{L}}_{2m+1,k}(\alpha; q) = \sum_{l=0}^{2^k-1} \left( \frac{a^{\xi(2m+l+1)}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{2m+l+2}{2} \right\rfloor}} \right) \alpha^{2m+l+1} \frac{[2(2m+l+1)]_q}{[2m+l+1]_q} e_l$$

$$= \frac{1}{(ab)^{m+1}} \sum_{l=0}^{2^k-1} \left( \frac{a^{\xi(l+1)}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor}} \right) \alpha^{2m+l+1} \frac{[2(2m+l+1)]_q}{[2m+l+1]_q} e_l$$

$$= \frac{\alpha^{2m+1}}{(ab)^{m+1}} \left( \sum_{l=0}^{2^k-1} \left( \frac{a^{\xi(l+1)}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor}} \right) \alpha^l e_l \right) + \frac{(\alpha q)^{2m+1}}{(ab)^{m+1}} \left( \sum_{l=0}^{2^k-1} \left( \frac{a^{\xi(l+1)}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor}} \right) (\alpha q)^l e_l \right)$$

$$= \frac{\alpha^{2m+1} \hat{\alpha}_0^{(k)} + (\alpha q)^{2m+1} \hat{\gamma}_0^{(k)}}{(ab)^{m+1}}. \tag{3.12}$$

Sonuç olarak (3.11) ve (3.12) bağıntıları yardımıyla,

$$\hat{\mathcal{L}}_{n,k}(\alpha; q) = \frac{\alpha^n \hat{\alpha}_{\xi(n+1)}^{(k)} - (\alpha q)^n \hat{\gamma}_{\xi(n+1)}^{(k)}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \xi(n)}}$$

yazılabilir. ■

Aşağıdaki teorem iki periyotlu $q$ −Lucas $2^k$ −ionlarının üstel üreteç fonksiyonunu ifade ve ispat etmektedir

**Teorem 3.2.2:**

İki periyotlu $q$ −Lucas $2^k$ −ionları için üstel üreteç fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır [26].

$$\sum_{n=0}^{\infty} \hat{\mathcal{L}}_{n,k}(\alpha; q) \frac{x^n}{n!} =$$
$$\frac{e^{\frac{\propto x}{\sqrt{ab}}}\left(\hat{\alpha}_0^{(k)} + \hat{\alpha}_1^{(k)}\sqrt{ab}\right) - e^{\frac{-\propto x}{\sqrt{ab}}}\left(\hat{\alpha}_0^{(k)} - \hat{\alpha}_1^{(k)}\sqrt{ab}\right) + e^{\frac{\propto qx}{\sqrt{ab}}}\left(\hat{\gamma}_0^{(k)} + \hat{\gamma}_1^{(k)}\sqrt{ab}\right) - e^{\frac{-\propto qx}{\sqrt{ab}}}\left(\hat{\gamma}_0^{(k)} - \hat{\gamma}_1^{(k)}\sqrt{ab}\right)}{2\sqrt{ab}}. \tag{3.13}$$

**İspat:**

İki periyotlu $q$ −Lucas $2^k$ −ionlarının Binet formülünden yararlanarak;

$$\sum_{n=0}^{\infty} \hat{\mathcal{L}}_{n,k}(\alpha; q) \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\mathcal{L}}_{2n,k}(\alpha; q) \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\mathcal{L}}_{2n+1,k}(\alpha; q) \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{\alpha^{2n}\hat{\alpha}_1{}^{(k)}+(\alpha q)^{2n}\hat{\gamma}_1{}^{(k)}}{(ab)^n}\right]\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{\alpha^{2n+1}\hat{\alpha}_0{}^{(k)}+(\alpha q)^{2n+1}\hat{\gamma}_0{}^{(k)}}{(ab)^{n+1}}\right]\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \hat{\alpha}_1{}^{(k)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha x}{\sqrt{ab}}\right)^{2n}\frac{1}{(2n)!} + \hat{\gamma}_1{}^{(k)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha q x}{\sqrt{ab}}\right)^{2n}\frac{1}{(2n)!}$$

$$+\frac{\hat{\alpha}_0{}^{(k)}}{\sqrt{ab}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha x}{\sqrt{ab}}\right)^{2n+1}\frac{1}{(2n+1)!} + \frac{\hat{\gamma}_0{}^{(k)}}{\sqrt{ab}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha q x}{\sqrt{ab}}\right)^{2n+1}\frac{1}{(2n+1)!}$$

$$= \hat{\alpha}_1{}^{(k)}\left[\frac{e^{\frac{\alpha x}{\sqrt{ab}}}+e^{\frac{-\alpha x}{\sqrt{ab}}}}{2}\right] + \hat{\gamma}_1{}^{(k)}\left[\frac{e^{\frac{\alpha q x}{\sqrt{ab}}}+e^{\frac{-\alpha q x}{\sqrt{ab}}}}{2}\right]$$

$$+\frac{\hat{\alpha}_0{}^{(k)}}{\sqrt{ab}}\left[\frac{e^{\frac{\propto x}{\sqrt{ab}}}-e^{\frac{-\propto x}{\sqrt{ab}}}}{2}\right] + \frac{\hat{\gamma}_0{}^{(k)}}{\sqrt{ab}}\left[\frac{e^{\frac{\propto q x}{\sqrt{ab}}}-e^{\frac{-\propto q x}{\sqrt{ab}}}}{2}\right]$$

$$= \frac{e^{\frac{\propto x}{\sqrt{ab}}}\left(\hat{\alpha}_0{}^{(k)}+\hat{\alpha}_1{}^{(k)}\sqrt{ab}\right)-e^{\frac{-\propto x}{\sqrt{ab}}}\left(\hat{\alpha}_0{}^{(k)}-\hat{\alpha}_1{}^{(k)}\sqrt{ab}\right)+e^{\frac{\propto q x}{\sqrt{ab}}}\left(\hat{\gamma}_0{}^{(k)}+\hat{\gamma}_1{}^{(k)}\sqrt{ab}\right)-e^{\frac{-\propto q x}{\sqrt{ab}}}\left(\hat{\gamma}_0{}^{(k)}-\hat{\gamma}_1{}^{(k)}\sqrt{ab}\right)}{2\sqrt{ab}}$$

(3.14)

elde edilir. ■

### 3.3. İki Periyotlu $q$ −Fibonacci ve $q$ −Lucas $2^k$ −İonlarının Toplam Formülleri

Bu bölümde iki periyotlu $q$ −Fibonacci ve $q$ −Lucas $2^k$ −ionlarının toplam formüllerini ifade eden teoremler ispatlanacaktır.

**Teorem 3.3.1:**

$n$ ve $j$ doğal sayılar olsun. Bu durumda aşağıdaki özdeşlikler geçerlidir [26]:

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\left(\frac{-\alpha^2 q}{ab}\right)^{n-r}\hat{\mathcal{F}}_{2r+j,k}(\alpha;q) = \begin{cases} \frac{(\alpha-\alpha q)^{n-1}}{(ab)^{n+\left\lfloor\frac{j}{2}\right\rfloor}}\left(\alpha^{n+j}\hat{\alpha}_{\xi(j)}^{(k)}-(\alpha q)^{n+j}\hat{\gamma}_{\xi(j)}^{(k)}\right), & n\ çift\ ise \\ \frac{(\alpha-\alpha q)^{n-1}}{(ab)^{n+\left\lfloor\frac{j}{2}\right\rfloor}}\left(\alpha^{n+j}\hat{\alpha}_{\xi(j)}^{(k)}+(\alpha q)^{n+j}\hat{\gamma}_{\xi(j)}^{(k)}\right), & n\ tek\ ise \end{cases}$$

(3.15)

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\left(\frac{-\alpha^2 q}{ab}\right)^{n-r}\hat{\mathcal{L}}_{2r+j,k}(\alpha;q) = \begin{cases} \frac{(\alpha-\alpha q)^{n}}{(ab)^{n+\left\lfloor\frac{j}{2}\right\rfloor+\xi(j)}}\left(\alpha^{n+j}\hat{\alpha}_{\xi(j+1)}^{(k)}+(\alpha q)^{n+j}\hat{\gamma}_{\xi(j+1)}^{(k)}\right), & n\ çift\ ise \\ \frac{(\alpha-\alpha q)^{n-1}}{(ab)^{n+\left\lfloor\frac{j}{2}\right\rfloor+\xi(j)}}\left(\alpha^{n+j}\hat{\alpha}_{\xi(j+1)}^{(k)}-(\alpha q)^{n+j}\hat{\gamma}_{\xi(j+1)}^{(k)}\right), & n\ tek\ ise \end{cases}$$

(3.16)

**İspat:** (3.15) eşitliğinin sol tarafında, (3.3) formülü yerine yazılarak;

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\left(\frac{-\alpha^2 q}{ab}\right)^{n-r}\hat{\mathcal{F}}_{2r+j,k}(\alpha;q)=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\left(\frac{-\alpha^2 q}{ab}\right)^{n-r}\left[\frac{\alpha^{2r+j}\hat{\alpha}_{\xi(j)}^{(k)}-(\alpha q)^{2r+j}\hat{\gamma}_{\xi(j)}^{(k)}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{2r+j}{2}\right\rfloor}\alpha(1-q)}\right]$$

$$=\frac{\alpha^j\hat{\alpha}_{\xi(j)}^{(k)}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{j}{2}\right\rfloor}\alpha(1-q)}\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\left(\frac{-\alpha^2 q}{ab}\right)^{n-r}\left(\frac{\alpha^2}{ab}\right)^{r}-\frac{(\alpha q)^j\hat{\gamma}_{\xi(j)}^{(k)}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{j}{2}\right\rfloor}\alpha(1-q)}\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\left(\frac{-\alpha^2 q}{ab}\right)^{n-r}\left(\frac{(\alpha q)^2}{ab}\right)^{r}$$

$$=\frac{\alpha^j\hat{\alpha}_{\xi(j)}^{(k)}\left(\frac{\alpha^2}{ab}-\frac{\alpha^2 q}{ab}\right)^n-(\alpha q)^j\hat{\gamma}_{\xi(j)}^{(k)}\left(\frac{(\alpha q)^2}{ab}-\frac{\alpha^2 q}{ab}\right)^n}{(ab)^{\left\lfloor\frac{j}{2}\right\rfloor}\alpha(1-q)}$$

$$=\frac{\left(\frac{\alpha}{ab}(\alpha-\alpha q)\right)^n\alpha^j\hat{\alpha}_{\xi(j)}^{(k)}-\left(\frac{-\alpha q}{ab}(\alpha-\alpha q)\right)^n(\alpha q)^j\hat{\gamma}_{\xi(j)}^{(k)}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{j}{2}\right\rfloor}\alpha(1-q)} \qquad (3.17)$$

elde edilir. (3.17) denkleminde $n$ çift ise;

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\left(\frac{-\alpha^2 q}{ab}\right)^{n-r}\hat{\mathcal{F}}_{2r+j,k}(\alpha;q)=\frac{\left(\frac{\alpha}{ab}(\alpha-\alpha q)\right)^n\alpha^j\hat{\alpha}_{\xi(j)}^{(k)}-\left(\frac{\alpha q}{ab}(\alpha-\alpha q)\right)^n(\alpha q)^j\hat{\gamma}_{\xi(j)}^{(k)}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{j}{2}\right\rfloor}\alpha(1-q)}$$

$$=\frac{(\alpha-\alpha q)^n}{(ab)^n}\left[\frac{\alpha^{n+j}\hat{\alpha}_{\xi(j)}^{(k)}-(\alpha q)^{n+j}\hat{\gamma}_{\xi(j)}^{(k)}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{j}{2}\right\rfloor}\alpha(1-q)}\right]$$

$$=\frac{(\alpha-\alpha q)^{n-1}}{(ab)^{n+\left\lfloor\frac{j}{2}\right\rfloor}}\left(\alpha^{n+j}\hat{\alpha}_{\xi(j)}^{(k)}-(\alpha q)^{n+j}\hat{\gamma}_{\xi(j)}^{(k)}\right)$$

elde edilir. $n$ in tek olması durumu ele alınırsa;

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\left(\frac{-\alpha^2 q}{ab}\right)^{n-r}\hat{\mathcal{F}}_{2r+j,k}(\alpha;q)=\frac{\left(\frac{\alpha}{ab}(\alpha-\alpha q)\right)^n\alpha^j\hat{\alpha}_{\xi(j)}^{(k)}+\left(\frac{\alpha q}{ab}(\alpha-\alpha q)\right)^n(\alpha q)^j\hat{\gamma}_{\xi(j)}^{(k)}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{j}{2}\right\rfloor}\alpha(1-q)}$$

$$=\frac{(\alpha-\alpha q)^n}{(ab)^n}\left[\frac{\alpha^{n+j}\hat{\alpha}_{\xi(j)}^{(k)}+(\alpha q)^{n+j}\hat{\gamma}_{\xi(j)}^{(k)}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{j}{2}\right\rfloor}\alpha(1-q)}\right]$$

$$=\frac{(\alpha-\alpha q)^{n-1}}{(ab)^{n+\left\lfloor\frac{j}{2}\right\rfloor}}\left(\alpha^{n+j}\hat{\alpha}_{\xi(j)}^{(k)}+(\alpha q)^{n+j}\hat{\gamma}_{\xi(j)}^{(k)}\right)$$

elde edilir. Benzer şekilde (3.16) eşitliğinin sol tarafında, (3.10) formülü yerine yazılarak;

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\left(\frac{-\alpha^2 q}{ab}\right)^{n-r}\hat{\mathcal{L}}_{2r+j,k}(\alpha;q)=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\left(\frac{-\alpha^2 q}{ab}\right)^{n-r}\left[\frac{\alpha^{2r+j}\hat{\alpha}_{\xi(j+1)}^{(k)}+(\alpha q)^{2r+j}\hat{\gamma}_{\xi(j+1)}^{(k)}}{(ab)^{r+\left\lfloor\frac{j}{2}\right\rfloor+\xi(j)}}\right]$$

$$=\frac{\alpha^j\hat{\alpha}_{\xi(j+1)}^{(k)}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{j}{2}\right\rfloor+\xi(j)}}\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\left(\frac{-\alpha^2 q}{ab}\right)^{n-r}\left(\frac{\alpha^2}{ab}\right)^{r}+\frac{(\alpha q)^j\hat{\gamma}_{\xi(j+1)}^{(k)}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{j}{2}\right\rfloor+\xi(j)}}\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\left(\frac{-\alpha^2 q}{ab}\right)^{n-r}\left(\frac{(\alpha q)^2}{ab}\right)^{r}$$

$$=\frac{\alpha^j\hat{\alpha}_{\xi(j+1)}^{(k)}\left(\frac{\alpha^2}{ab}-\frac{\alpha^2 q}{ab}\right)^n-(\alpha q)^j\hat{\gamma}_{\xi(j+1)}^{(k)}\left(\frac{(\alpha q)^2}{ab}-\frac{\alpha^2 q}{ab}\right)^n}{(ab)^{\left\lfloor\frac{j}{2}\right\rfloor+\xi(j)}}$$

$$=\frac{\alpha^j\hat{\alpha}_{\xi(j+1)}^{(k)}\left(\frac{\alpha}{ab}(\alpha-\alpha q)\right)^n+(\alpha q)^j\hat{\gamma}_{\xi(j+1)}^{(k)}\left(\frac{-\alpha q}{ab}(\alpha-\alpha q)\right)^n}{(ab)^{\left\lfloor\frac{j}{2}\right\rfloor+\xi(j)}} \tag{3.18}$$

elde edilir. (3.18) denkleminde $n$ çift ise;

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\left(\frac{-\alpha^2 q}{ab}\right)^{n-r}\hat{\mathcal{L}}_{2r+j,k}(\alpha;q)=\frac{\alpha^j\hat{\alpha}_{\xi(j+1)}^{(k)}\left(\frac{\alpha}{ab}(\alpha-\alpha q)\right)^n+(\alpha q)^j\hat{\gamma}_{\xi(j+1)}^{(k)}\left(\frac{\alpha q}{ab}(\alpha-\alpha q)\right)^n}{(ab)^{\left\lfloor\frac{j}{2}\right\rfloor+\xi(j)}}$$

$$=\frac{(\alpha-\alpha q)^n}{(ab)^{n+\left\lfloor\frac{j}{2}\right\rfloor+\xi(j)}}\left(\alpha^{n+j}\hat{\alpha}_{\xi(j+1)}^{(k)}+(\alpha q)^{n+j}\hat{\gamma}_{\xi(j+1)}^{(k)}\right)$$

elde edilir. Öte yandan, $n$ in tek olması durumunda;

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\left(\frac{-\alpha^2 q}{ab}\right)^{n-r}\hat{\mathcal{L}}_{2r+j,k}(\alpha;q)=\frac{\alpha^j\hat{\alpha}_{\xi(j+1)}^{(k)}\left(\frac{\alpha}{ab}(\alpha-\alpha q)\right)^n-(\alpha q)^j\hat{\gamma}_{\xi(j+1)}^{(k)}\left(\frac{\alpha q}{ab}(\alpha-\alpha q)\right)^n}{(ab)^{\left\lfloor\frac{j}{2}\right\rfloor+\xi(j)}}$$

$$=\frac{(\alpha-\alpha q)^n}{(ab)^{n+\left\lfloor\frac{j}{2}\right\rfloor+\xi(j)}}\left(\alpha^{n+j}\hat{\alpha}_{\xi(j+1)}^{(k)}-(\alpha q)^{n+j}\hat{\gamma}_{\xi(j+1)}^{(k)}\right)$$

bulunur. ■

**Teorem 3.3.2:**

$n$ ve $j$ doğal sayılar olsun. Bu durumda aşağıdaki özdeşlikler geçerlidir [26].

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}(-1)^r\left(\frac{-\alpha^2 q}{ab}\right)^{n-r}\hat{\mathcal{F}}_{2r+j,k}(\alpha;q)=(-\alpha[2]_q)^n\left[\frac{\alpha^{n+j}\hat{\alpha}_{\xi(j)}^{(k)}-(\alpha q)^{n+j}\hat{\gamma}_{\xi(j)}^{(k)}}{(ab)^{n+\left\lfloor\frac{j}{2}\right\rfloor}\alpha(1-q)}\right] \tag{3.19}$$

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}(-1)^r\left(\frac{-\alpha^2 q}{ab}\right)^{n-r}\hat{\mathcal{L}}_{2r+j,k}(\alpha;q)=(-\alpha[2]_q)^n\left[\frac{\alpha^{n+j}\hat{\alpha}_{\xi(j+1)}^{(k)}+(\alpha q)^{n+j}\hat{\gamma}_{\xi(j+1)}^{(k)}}{(ab)^{n+\left\lfloor\frac{j}{2}\right\rfloor+\xi(j)}}\right] \quad (3.20)$$

**İspat 3.3.2:**

İlk olarak (3.19) eşitliği, (3.3) denkleminden faydalanarak ispatlanacaktır.

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}(-1)^r\left(\frac{-\alpha^2 q}{ab}\right)^{n-r}\hat{\mathcal{F}}_{2r+j,k}(\alpha;q)$$

$$=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}(-1)^r\left(\frac{-\alpha^2 q}{ab}\right)^{n-r}\left[\frac{\alpha^{2r+j}\hat{\alpha}_{\xi(j)}^{(k)}-(\alpha q)^{2r+j}\hat{\gamma}_{\xi(j)}^{(k)}}{(ab)^{r+\left\lfloor\frac{j}{2}\right\rfloor}\alpha(1-q)}\right]$$

$$=\frac{\alpha^j\hat{\alpha}_{\xi(j)}^{(k)}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{j}{2}\right\rfloor}\alpha(1-q)}\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}(-1)^r\left(\frac{-\alpha^2 q}{ab}\right)^{n-r}\left(\frac{\alpha^2}{ab}\right)^r$$

$$-\frac{(\alpha q)^j\hat{\gamma}_{\xi(j)}^{(k)}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{j}{2}\right\rfloor}\alpha(1-q)}\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}(-1)^r\left(\frac{-\alpha^2 q}{ab}\right)^{n-r}\left(\frac{(\alpha q)^2}{ab}\right)^r$$

$$=\frac{\alpha^j\hat{\alpha}_{\xi(j)}^{(k)}\left(-\frac{\alpha^2}{ab}-\frac{\alpha^2 q}{ab}\right)^n-(\alpha q)^j\hat{\gamma}_{\xi(j)}^{(k)}\left(-\frac{(\alpha q)^2}{ab}-\frac{\alpha^2 q}{ab}\right)^n}{(ab)^{\left\lfloor\frac{j}{2}\right\rfloor}\alpha(1-q)}$$

$$=\frac{\alpha^j\hat{\alpha}_{\xi(j)}^{(k)}\left(\frac{\alpha}{ab}(-\alpha-\alpha q)\right)^n-(\alpha q)^j\hat{\gamma}_{\xi(j)}^{(k)}\left(\frac{\alpha q}{ab}(-\alpha-\alpha q)\right)^n}{(ab)^{\left\lfloor\frac{j}{2}\right\rfloor}\alpha(1-q)}$$

$$=(-\alpha-\alpha q)^n\left[\frac{\alpha^{n+j}\hat{\alpha}_{\xi(j)}^{(k)}-(\alpha q)^{n+j}\hat{\gamma}_{\xi(j)}^{(k)}}{(ab)^{n+\left\lfloor\frac{j}{2}\right\rfloor}\alpha(1-q)}\right]$$

$$=(-\alpha[2]_q)^n\left[\frac{\alpha^{n+j}\hat{\alpha}_{\xi(j+1)}^{(k)}-(\alpha q)^{n+j}\hat{\gamma}_{\xi(j+1)}^{(k)}}{(ab)^{n+\left\lfloor\frac{j}{2}\right\rfloor+\xi(j)}}\right] \quad (3.21)$$

bulunur. Şimdi (3.20) eşitliği, (3.10) denkleminden faydalanarak hesaplanacaktır.

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}(-1)^r\left(\frac{-\alpha^2 q}{ab}\right)^{n-r}\hat{\mathcal{L}}_{2r+j,k}(\alpha;q)$$

$$=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}(-1)^r\left(\frac{-\alpha^2 q}{ab}\right)^{n-r}\left[\frac{\alpha^{2r+j}\hat{\alpha}_{\xi(j+1)}^{(k)}+(\alpha q)^{2r+j}\hat{\gamma}_{\xi(j+1)}^{(k)}}{(ab)^{r+\left\lfloor\frac{j}{2}\right\rfloor+\xi(j)}}\right]$$

$$= \frac{\alpha^j \hat{\alpha}^{(k)}_{\xi(j+1)}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{j}{2}\right\rfloor+\xi(j)}} \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} (-1)^r \left(\frac{-\alpha^2 q}{ab}\right)^{n-r} \left(\frac{\alpha^2}{ab}\right)^r$$

$$+ \frac{(\alpha q)^j \hat{\gamma}^{(k)}_{\xi(j+1)}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{j}{2}\right\rfloor+\xi(j)}} \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} (-1)^r \left(\frac{-\alpha^2 q}{ab}\right)^{n-r} \left(\frac{(\alpha q)^2}{ab}\right)^r$$

$$= \frac{\alpha^j \hat{\alpha}^{(k)}_{\xi(j+1)} (-\frac{\alpha^2}{ab} - \frac{\alpha^2 q}{ab})^n + (\alpha q)^j \hat{\gamma}^{(k)}_{\xi(j+1)} (-\frac{(\alpha q)^2}{ab} - \frac{\alpha^2 q}{ab})^n}{(ab)^{\left\lfloor\frac{j}{2}\right\rfloor+\xi(j)}}$$

$$= \frac{\alpha^j \hat{\alpha}^{(k)}_{\xi(j+1)} (\frac{\alpha}{ab}(-\alpha - \alpha q))^n + (\alpha q)^j \hat{\gamma}^{(k)}_{\xi(j+1)} (\frac{\alpha q}{ab}(-\alpha - \alpha q))^n}{(ab)^{\left\lfloor\frac{j}{2}\right\rfloor+\xi(j)}}$$

$$= (-\alpha - \alpha q)^n \left[\frac{\alpha^{n+j} \hat{\alpha}^{(k)}_{\xi(j+1)} + (\alpha q)^{n+j} \hat{\gamma}^{(k)}_{\xi(j+1)}}{(ab)^{n+\left\lfloor\frac{j}{2}\right\rfloor+\xi(j)}}\right]$$

$$= (-\alpha[2]_q)^n \left[\frac{\alpha^{n+j} \hat{\alpha}^{(k)}_{\xi(j+1)} + (\alpha q)^{n+j} \hat{\gamma}^{(k)}_{\xi(j+1)}}{(ab)^{n+\left\lfloor\frac{j}{2}\right\rfloor+\xi(j)}}\right] \tag{3.22}$$

elde edilir. ■

**Teorem 3.3.3:**

$n$ bir doğal sayı olsun. Bu durumda aşağıdaki özdeşlikler geçerlidir [26].

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} (\alpha[2]_q)^n \left(\frac{-\alpha^2 q}{\sqrt{ab}}\right)^{n-r} \hat{\mathcal{F}}_{r,k}(\alpha; q)$$

$$= \frac{1}{2(\sqrt{ab})^n \alpha(1-q)} \left[\hat{\alpha}^{(k)}_0 \alpha^{2n} (1 - (2q+1)^n) - \hat{\gamma}^{(k)}_0 (\alpha q)^{2n} \left(1 - \left(\frac{2}{q} + 1\right)^n\right)\right]$$

$$+ \frac{1}{2(\sqrt{ab})^{n-1} \alpha(1-q)} \left[\hat{\alpha}^{(k)}_1 \alpha^{2n} (1 + (2q+1)^n) - \hat{\gamma}^{(k)}_1 (\alpha q)^{2n} \left(1 + \left(\frac{2}{q} + 1\right)^n\right)\right] \tag{3.23}$$

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} (\alpha[2]_q)^n \left(\frac{-\alpha^2 q}{\sqrt{ab}}\right)^{n-r} \hat{\mathcal{L}}_{r,k}(\alpha; q)$$

$$= \frac{1}{2(\sqrt{ab})^n \alpha(1-q)} \left[\hat{\alpha}^{(k)}_1 \alpha^{2n} (1 - (2q+1)^n) + \hat{\gamma}^{(k)}_1 (\alpha q)^{2n} \left(1 - \left(\frac{2}{q} + 1\right)^n\right)\right]$$

$$+ \frac{1}{2(\sqrt{ab})^{n+1} \alpha(1-q)} \left[\hat{\alpha}^{(k)}_0 \alpha^{2n} (1 + (2q+1)^n) + \hat{\gamma}^{(k)}_0 (\alpha q)^{2n} \left(1 + \left(\frac{2}{q} + 1\right)^n\right)\right] \tag{3.24}$$

**İspat:** İlk olarak (3.3) denkleminden yararlanarak (3.23) özdeşliği ispatlanacaktır.

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} (\alpha[2]_q)^n \left(\frac{-\alpha^2 q}{\sqrt{ab}}\right)^{n-r} \hat{\mathcal{F}}_{r,k}(\alpha; q)$$

$$= \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} (\alpha(1+q))^r \left(\frac{-\alpha^2 q}{\sqrt{ab}}\right)^{n-r} \left[\frac{\alpha^r \hat{\alpha}_{\xi(r)}^{(k)} - (\alpha q)^r \hat{\gamma}_{\xi(r)}^{(k)}}{(ab)^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} \alpha(1-q)}\right]$$

$$= \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{2r} (\alpha(1+q))^r \left(\frac{-\alpha^2 q}{\sqrt{ab}}\right)^{n-2r} \left[\frac{\alpha^{2r} \hat{\alpha}_0^{(k)} - (\alpha q)^{2r} \hat{\gamma}_0^{(k)}}{(ab)^r \alpha(1-q)}\right]$$

$$+ \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{2r+1} (\alpha(1+q))^{2r+1} \left(\frac{-\alpha^2 q}{\sqrt{ab}}\right)^{n-(2r+1)} \left[\frac{\alpha^{2r+1} \hat{\alpha}_1^{(k)} - (\alpha q)^{2r+1} \hat{\gamma}_1^{(k)}}{(ab)^r \alpha(1-q)}\right]$$

$$= \frac{\hat{\alpha}_0^{(k)}}{\alpha(1-q)} \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{2r} \left(\frac{\alpha^2(1+q)}{\sqrt{ab}}\right)^{2r} \left(\frac{-\alpha^2 q}{\sqrt{ab}}\right)^{n-2r}$$

$$- \frac{\hat{\gamma}_0^{(k)}}{\alpha(1-q)} \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{2r} \left(\frac{\alpha^2 q(1+q)}{\sqrt{ab}}\right)^{2r} \left(\frac{-\alpha^2 q}{\sqrt{ab}}\right)^{n-2r}$$

$$+ \frac{\hat{\alpha}_1^{(k)} \sqrt{ab}}{\alpha(1-q)} \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{2r+1} \left(\frac{\alpha^2(1+q)}{\sqrt{ab}}\right)^{2r+1} \left(\frac{-\alpha^2 q}{\sqrt{ab}}\right)^{n-(2r+1)}$$

$$- \frac{\hat{\gamma}_1^{(k)} \sqrt{ab}}{\alpha(1-q)} \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{2r+1} \left(\frac{\alpha^2 q(1+q)}{\sqrt{ab}}\right)^{2r+1} \left(\frac{-\alpha^2 q}{\sqrt{ab}}\right)^{n-(2r+1)}$$

$$= \frac{\hat{\alpha}_0^{(k)}}{2\alpha(1-q)} \left[\left(\frac{-\alpha^2 q}{\sqrt{ab}} + \frac{\alpha^2(1+q)}{\sqrt{ab}}\right)^n + \left(\frac{-\alpha^2 q}{\sqrt{ab}} - \frac{\alpha^2(1+q)}{\sqrt{ab}}\right)^n\right]$$

$$- \frac{\hat{\gamma}_0^{(k)}}{2\alpha(1-q)} \left[\left(\frac{-\alpha^2 q}{\sqrt{ab}} + \frac{\alpha^2 q(1+q)}{\sqrt{ab}}\right)^n + \left(\frac{-\alpha^2 q}{\sqrt{ab}} - \frac{\alpha^2 q(1+q)}{\sqrt{ab}}\right)^n\right]$$

$$+ \frac{\hat{\alpha}_1^{(k)} \sqrt{ab}}{2\alpha(1-q)} \left[\left(\frac{-\alpha^2 q}{\sqrt{ab}} + \frac{\alpha^2(1+q)}{\sqrt{ab}}\right)^n - \left(\frac{-\alpha^2 q}{\sqrt{ab}} - \frac{\alpha^2(1+q)}{\sqrt{ab}}\right)^n\right]$$

$$- \frac{\hat{\gamma}_1^{(k)} \sqrt{ab}}{2\alpha(1-q)} \left[\left(\frac{-\alpha^2 q}{\sqrt{ab}} + \frac{\alpha^2 q(1+q)}{\sqrt{ab}}\right)^n - \left(\frac{-\alpha^2 q}{\sqrt{ab}} - \frac{\alpha^2 q(1+q)}{\sqrt{ab}}\right)^n\right]$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} (\alpha[2]_q)^n \left(\frac{-\alpha^2 q}{\sqrt{ab}}\right)^{n-r} \hat{\mathcal{F}}_{r,k}(\alpha; q)$$

$$= \frac{1}{2(\sqrt{ab})^n \alpha(1-q)} \left[\hat{\alpha}_0^{(k)} \alpha^{2n} (1 - (2q+1)^n) - \hat{\gamma}_0^{(k)} (\alpha q)^{2n} \left(1 - \left(\frac{2}{q} + 1\right)^n\right)\right]$$

$$+\frac{1}{2\left(\sqrt{ab}\right)^{n-1}\alpha(1-q)}\left[\hat{\alpha}_1^{(k)}\alpha^{2n}(1+(2q+1)^n)-\hat{\gamma}_1^{(k)}(\alpha q)^{2n}\left(1+\left(\frac{2}{q}+1\right)^n\right)\right]$$

yazılabilir. Benzer şekilde (3.24) özdeşliğide ispatlanabilir. ■

### 3.4 İki Periyotlu $q$ −Fibonacci ve $q$ −Lucas $2^k$ −İonlarının Bazı Özdeşlikleri

Bu bölümde iki periyotlu $q-$ Fibonacci ve $q-$ Lucas $2^k$ −ionlarının sağladığı önemli özdeşliklerden olan Catalan, Cassini ve d'Ocagne özdeşlikleri ifade ve ispat edilecektir.

Aşağıdaki teorem iki periyotlu $q$ −Fibonacci $2^k$ −ionları ve iki periyotlu $q$ −Lucas $2^k$ −ionları arasındaki bağıntıyı ifade ve ispat etmektedir.

**Teorem 3.4.1:**

$n, r, s$ herhangi tam sayılar olmak üzere aşağıdaki özdeşlik sağlanır [26]:

$$\hat{\mathcal{L}}_{n+r,k}(\alpha;q)\hat{\mathcal{F}}_{n+s,k}(\alpha;q)-\hat{\mathcal{L}}_{n+s,k}(\alpha;q)\,\hat{\mathcal{F}}_{n+r,k}(\alpha;q)$$

$$=\frac{\alpha^{2n+r+s-1}q^n}{1-q}\left[\frac{\hat{\alpha}_{\xi(n+r+1)}^{(k)}\hat{\alpha}_{\xi(n+s)}^{(k)}}{q^n(ab)^{\left\lfloor\frac{n+r}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n+s}{2}\right\rfloor+\xi(n+r)}}-\frac{\hat{\alpha}_{\xi(n+s+1)}^{(k)}\hat{\alpha}_{\xi(n+r)}^{(k)}}{q^n(ab)^{\left\lfloor\frac{n+r}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n+s}{2}\right\rfloor+\xi(n+s)}}\right]$$

$$-\frac{\alpha^{2n+r+s-1}q^{n+s}}{1-q}\left[\frac{\hat{\alpha}_{\xi(n+r+1)}^{(k)}\hat{\gamma}_{\xi(n+s)}^{(k)}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n+r}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n+s}{2}\right\rfloor+\xi(n+r)}}+\frac{\hat{\gamma}_{\xi(n+s+1)}^{(k)}\hat{\alpha}_{\xi(n+r)}^{(k)}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n+r}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n+s}{2}\right\rfloor+\xi(n+s)}}\right]$$

$$+\frac{\alpha^{2n+r+s-1}q^{n+r}}{1-q}\left[\frac{\hat{\gamma}_{\xi(n+r+1)}^{(k)}\hat{\alpha}_{\xi(n+s)}^{(k)}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n+r}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n+s}{2}\right\rfloor+\xi(n+r)}}+\frac{\hat{\alpha}_{\xi(n+s+1)}^{(k)}\hat{\gamma}_{\xi(n+r)}^{(k)}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n+r}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n+s}{2}\right\rfloor+\xi(n+s)}}\right]$$

$$-\frac{\alpha^{2n+r+s-1}q^{2n+r+s}}{1-q}\left[\frac{\hat{\gamma}_{\xi(n+r+1)}^{(k)}\hat{\gamma}_{\xi(n+s)}^{(k)}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n+r}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n+s}{2}\right\rfloor+\xi(n+r)}}-\frac{\hat{\gamma}_{\xi(n+s+1)}^{(k)}\hat{\gamma}_{\xi(n+r)}^{(k)}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n+r}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n+s}{2}\right\rfloor+\xi(n+s)}}\right]. \tag{3.25}$$

**İspat:**

(3.3) ve (3.10) bağıntıları yerlerine yazılırsa,

$$\hat{\mathcal{L}}_{n+r,k}(\alpha;q)\hat{\mathcal{F}}_{n+s,k}(\alpha;q)-\hat{\mathcal{L}}_{n+s,k}(\alpha;q)\,\hat{\mathcal{F}}_{n+r,k}(\alpha;q)$$

$$= \left( \frac{\alpha^{n+r} \widehat{\alpha}^{(k)}_{\xi(n+r+1)} + (\alpha q)^{n+r} \widehat{\gamma}^{(k)}_{\xi(n+r+1)}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{n+r}{2} \right\rfloor + \xi(n+r)}} \right) \cdot \left( \frac{\alpha^{n+s} \widehat{\alpha}^{(k)}_{\xi(n+s)} - (\alpha q)^{n+s} \widehat{\gamma}^{(k)}_{\xi(n+s)}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{n+s}{2} \right\rfloor} \alpha(1-q)} \right)$$

$$- \left( \frac{\alpha^{n+s} \widehat{\alpha}^{(k)}_{\xi(n+s+1)} + (\alpha q)^{n+s} \widehat{\gamma}^{(k)}_{\xi(n+s+1)}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{n+r}{2} \right\rfloor + \xi(n+s)}} \right) \cdot \left( \frac{\alpha^{n+r} \widehat{\alpha}^{(k)}_{\xi(n+r)} - (\alpha q)^{n+r} \widehat{\gamma}^{(k)}_{\xi(n+r)}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{n+r}{2} \right\rfloor} \alpha(1-q)} \right)$$

elde edilir. Burada gerekli dağılma işlemleri yapıldığında ve elde edilen sonuçlar düzenlendiğinde,

$$\widehat{\mathcal{L}}_{n+r,k}(\alpha;q)\widehat{\mathcal{F}}_{n+s,k}(\alpha;q) - \widehat{\mathcal{L}}_{n+s,k}(\alpha;q)\,\widehat{\mathcal{F}}_{n+r,k}(\alpha;q)$$

$$= \frac{\alpha^{2n+r+s-1} q^n}{1-q} \left[ \frac{\widehat{\alpha}^{(k)}_{\xi(n+r+1)} \widehat{\alpha}^{(k)}_{\xi(n+s)}}{q^n (ab)^{\left\lfloor \frac{n+r}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+s}{2} \right\rfloor + \xi(n+r)}} - \frac{\widehat{\alpha}^{(k)}_{\xi(n+s+1)} \widehat{\alpha}^{(k)}_{\xi(n+r)}}{q^n (ab)^{\left\lfloor \frac{n+r}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+s}{2} \right\rfloor + \xi(n+s)}} \right]$$

$$- \frac{\alpha^{2n+r+s-1} q^{n+s}}{1-q} \left[ \frac{\widehat{\alpha}^{(k)}_{\xi(n+r+1)} \widehat{\gamma}^{(k)}_{\xi(n+s)}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{n+r}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+s}{2} \right\rfloor + \xi(n+r)}} + \frac{\widehat{\gamma}^{(k)}_{\xi(n+s+1)} \widehat{\alpha}^{(k)}_{\xi(n+r)}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{n+r}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+s}{2} \right\rfloor + \xi(n+s)}} \right]$$

$$+ \frac{\alpha^{2n+r+s-1} q^{n+r}}{1-q} \left[ \frac{\widehat{\gamma}^{(k)}_{\xi(n+r+1)} \widehat{\alpha}^{(k)}_{\xi(n+s)}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{n+r}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+s}{2} \right\rfloor + \xi(n+r)}} + \frac{\widehat{\alpha}^{(k)}_{\xi(n+s+1)} \widehat{\gamma}^{(k)}_{\xi(n+r)}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{n+r}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+s}{2} \right\rfloor + \xi(n+s)}} \right]$$

$$- \frac{\alpha^{2n+r+s-1} q^{2n+r+s}}{1-q} \left[ \frac{\widehat{\gamma}^{(k)}_{\xi(n+r+1)} \widehat{\gamma}^{(k)}_{\xi(n+s)}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{n+r}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+s}{2} \right\rfloor + \xi(n+r)}} - \frac{\widehat{\gamma}^{(k)}_{\xi(n+s+1)} \widehat{\gamma}^{(k)}_{\xi(n+r)}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{n+r}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+s}{2} \right\rfloor + \xi(n+s)}} \right]$$

sonucu bulunur. ■

Aşağıdaki teorem iki periyotlu $q$ −Fibonacci $2^k$ −ionlarının ve iki periyotlu $q$ −Lucas $2^k$ −ionlarının Catalan özdeşliklerini ifade ve ispat etmektedir

**Teorem 3.4.2: (Catalan özdeşliği)**

$n$ ve $r$ pozitif tamsayılar olmak üzere $n \geq r$ için Catalan özdeşlikleri sırasıyla,

$$\widehat{\mathcal{F}}_{n+r,k}(\alpha;q)\widehat{\mathcal{F}}_{n-r,k}(\alpha;q) - (\widehat{\mathcal{F}}_{n,k}(\alpha;q))^2$$

$$= \frac{\alpha^{2n-2} q^{n-r}}{(1-q)^2} \left[ \left( \frac{\widehat{\alpha}^{(k)}_{\xi(n+r)} \widehat{\alpha}^{(k)}_{\xi(n-r)} + q^{2r} \widehat{\gamma}^{(k)}_{\xi(n+r)} \widehat{\gamma}^{(k)}_{\xi(n-r)}}{q^{n-r} (ab)^{\left\lfloor \frac{n+r}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-r}{2} \right\rfloor}} \right) - \left( \frac{(\widehat{\alpha}^{(k)}_{\xi(n)})^2 + q^{2n} (\widehat{\gamma}^{(k)}_{\xi(n)})^2}{q^{n-r} (ab)^{2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}} \right) \right]$$

$$- \frac{\alpha^{2n-2} q^{n-r}}{(1-q)^2} \left[ \frac{\widehat{\alpha}^{(k)}_{\xi(n+r)} \widehat{\gamma}^{(k)}_{\xi(n-r)} + q^{2r} \widehat{\gamma}^{(k)}_{\xi(n+r)} \widehat{\alpha}^{(k)}_{\xi(n-r)}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{n+r}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-r}{2} \right\rfloor}} \right] + \frac{\alpha^{2n-2} q^n}{(1-q)^2} \left[ \frac{\widehat{\alpha}^{(k)}_{\xi(n)} \widehat{\gamma}^{(k)}_{\xi(n)} + \widehat{\gamma}^{(k)}_{\xi(n)} \widehat{\alpha}^{(k)}_{\xi(n)}}{(ab)^{2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}} \right], \quad (3.26)$$

$\hat{\mathcal{L}}_{n+r,k}(\alpha;q)\hat{\mathcal{L}}_{n-r,k}(\alpha;q)-(\hat{\mathcal{L}}_{n,k}(\alpha;q))^2$

$$= \alpha^{2n-2}q^{n-r}\left[\left(\frac{\hat{\alpha}^{(k)}_{\xi(n+r+1)}\hat{\alpha}^{(k)}_{\xi(n-r+1)}}{q^{n-r}(ab)^{\lfloor\frac{n+r}{2}\rfloor+\lfloor\frac{n-r}{2}\rfloor+\xi(n+r)+\xi(n-r)}}\right)-\left(\frac{(\hat{\alpha}^{(k)}_{\xi(n+1)})^2}{q^{n-r}(ab)^{n+\xi(n)}}\right)\right]$$

$$+\alpha^{2n}q^{n-r}\left[\frac{\hat{\alpha}^{(k)}_{\xi(n+r+1)}\hat{\gamma}^{(k)}_{\xi(n-r+1)}+q^{2r}\hat{\gamma}^{(k)}_{\xi(n+r+1)}\hat{\alpha}^{(k)}_{\xi(n-r+1)}+q^{n+r}\hat{\gamma}^{(k)}_{\xi(n+r+1)}\hat{\gamma}^{(k)}_{\xi(n-r+1)}}{(ab)^{\lfloor\frac{n+r}{2}\rfloor+\lfloor\frac{n-r}{2}\rfloor+\xi(n+r)+\xi(n-r)}}\right]$$

$$-\alpha^{2n}q^{n}\left[\frac{\hat{\alpha}^{(k)}_{\xi(n+1)}\hat{\gamma}^{(k)}_{\xi(n+1)}+\hat{\gamma}^{(k)}_{\xi(n+1)}\hat{\alpha}^{(k)}_{\xi(n+1)}+q^{n}\left(\hat{\gamma}^{(k)}_{\xi(n+1)}\right)^2}{(ab)^{n+\xi(n)}}\right], \tag{3.27}$$

şeklinde elde edilir [26].

**İspat:** İlk olarak (3.26) özdeşliği ispatlanacaktır. Bunun için (3.3) bağıntısı kullanılarak;

$\hat{\mathcal{F}}_{n+r,k}(\alpha;q)\hat{\mathcal{F}}_{n-r,k}(\alpha;q)-(\hat{\mathcal{F}}_{n,k}(\alpha;q))^2$

$$=\left(\frac{\alpha^{n+r}\hat{\alpha}^{(k)}_{\xi(n+r)}-(\alpha q)^{n+r}\hat{\gamma}^{(k)}_{\xi(n+r)}}{(ab)^{\lfloor\frac{n+r}{2}\rfloor}\alpha(1-q)}\right)\left(\frac{\alpha^{n-r}\hat{\alpha}^{(k)}_{\xi(n-r)}-(\alpha q)^{n-r}\hat{\gamma}^{(k)}_{\xi(n-r)}}{(ab)^{\lfloor\frac{n-r}{2}\rfloor}\alpha(1-q)}\right)-\left(\frac{\alpha^{n}\hat{\alpha}^{(k)}_{\xi(n)}-(\alpha q)^{n}\hat{\gamma}^{(k)}_{\xi(n)}}{(ab)^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\alpha(1-q)}\right)^2$$

elde edilir. Sonuç olarak gerekli dağılma işlemleri yapıldığında ve elde edilen sonuçlar düzenlendiğinde,

$\hat{\mathcal{F}}_{n+r,k}(\alpha;q)\hat{\mathcal{F}}_{n-r,k}(\alpha;q)-\hat{\mathcal{F}}_{n,k}{}^2(\alpha;q)$

$$=\frac{\alpha^{2n-2}q^{n-r}}{(1-q)^2}\left[\left(\frac{\hat{\alpha}^{(k)}_{\xi(n+r)}\hat{\alpha}^{(k)}_{\xi(n-r)}+q^{2r}\hat{\gamma}^{(k)}_{\xi(n+r)}\hat{\gamma}^{(k)}_{\xi(n-r)}}{q^{n-r}(ab)^{\lfloor\frac{n+r}{2}\rfloor+\lfloor\frac{n-r}{2}\rfloor}}\right)-\left(\frac{(\hat{\alpha}^{(k)}_{\xi(n)})^2+q^{2n}(\hat{\gamma}^{(k)}_{\xi(n)})^2}{q^{n-r}(ab)^{2\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}}\right)\right]$$

$$-\frac{\alpha^{2n-2}q^{n-r}}{(1-q)^2}\left[\frac{\hat{\alpha}^{(k)}_{\xi(n+r)}\hat{\gamma}^{(k)}_{\xi(n-r)}+q^{2r}\hat{\gamma}^{(k)}_{\xi(n+r)}\hat{\alpha}^{(k)}_{\xi(n-r)}}{(ab)^{\lfloor\frac{n+r}{2}\rfloor+\lfloor\frac{n-r}{2}\rfloor}}\right]+\frac{\alpha^{2n-2}q^{n}}{(1-q)^2}\left[\frac{\hat{\alpha}^{(k)}_{\xi(n)}\hat{\gamma}^{(k)}_{\xi(n)}+\hat{\gamma}^{(k)}_{\xi(n)}\hat{\alpha}^{(k)}_{\xi(n)}}{(ab)^{2\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}}\right]$$

elde edilir. Benzer şekilde (3.27) özdeşliği de (3.10) bağıntısı yardımıyla hesaplanabilir. ■

Aşağıdaki teorem iki periyotlu $q-$Fibonacci $2^k-$ionlarının ve iki periyotlu $q-$Lucas $2^k-$ionlarının Cassini özdeşliklerini ifade ve ispat etmektedir.

**Teorem 3.4.3: (Cassini özdeşliği)**

$n \geq 1$ olmak üzere Cassini özdeşlikleri sırasıyla,

$$\hat{\mathcal{F}}_{n+1,k}(\alpha;q)\hat{\mathcal{F}}_{n-1,k}(\alpha;q)-(\hat{\mathcal{F}}_{n,k}(\alpha;q))^2$$

$$=\frac{\alpha^{2n-2}q^{n-1}}{(1-q)^2}\left[\left(\frac{\hat{\alpha}^{(k)}_{\xi(n+1)}\hat{\alpha}^{(k)}_{\xi(n-1)}+q^2\hat{\gamma}^{(k)}_{\xi(n+1)}\hat{\gamma}^{(k)}_{\xi(n-1)}}{q^{n-1}(ab)^{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor+\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}}\right)-\left(\frac{(\hat{\alpha}^{(k)}_{\xi(n)})^2+q^{2n}(\hat{\gamma}^{(k)}_{\xi(n)})^2}{q^{n-1}(ab)^{2\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}}\right)\right]$$

$$-\frac{\alpha^{2n-2}q^{n-1}}{(1-q)^2}\left[\frac{\hat{\alpha}^{(k)}_{\xi(n+1)}\hat{\gamma}^{(k)}_{\xi(n-1)}+q^2\hat{\gamma}^{(k)}_{\xi(n+1)}\hat{\alpha}^{(k)}_{\xi(n-1)}}{(ab)^{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor+\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}}\right]+\frac{\alpha^{2n-2}q^{n}}{(1-q)^2}\left[\frac{\hat{\alpha}^{(k)}_{\xi(n)}\hat{\gamma}^{(k)}_{\xi(n)}+\hat{\gamma}^{(k)}_{\xi(n)}\hat{\alpha}^{(k)}_{\xi(n)}}{(ab)^{2\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}}\right], \tag{3.28}$$

$$\hat{\mathcal{L}}_{n+1,k}(\alpha;q)\hat{\mathcal{L}}_{n-1,k}(\alpha;q)-(\hat{\mathcal{L}}_{n,k}(\alpha;q))^2$$

$$=\alpha^{2n}q^{n-1}\left[\left(\frac{(\hat{\alpha}^{(k)}_{\xi(n)})^2}{q^{n-1}(ab)^{n-\xi(n-1)}}\right)-\left(\frac{(\hat{\alpha}^{(k)}_{\xi(n+1)})^2}{q^{n-1}(ab)^{n+\xi(n)}}\right)\right]$$

$$+\alpha^{2n}q^{n-1}\left[\frac{\hat{\alpha}^{(k)}_{\xi(n)}\hat{\gamma}^{(k)}_{\xi(n)}+q^2\hat{\gamma}^{(k)}_{\xi(n)}\hat{\alpha}^{(k)}_{\xi(n)}+q^{n+1}(\hat{\gamma}^{(k)}_{\xi(n)})^2}{(ab)^{n-\xi(n-1)}}\right]$$

$$-\alpha^{2n}q^{n}\left[\frac{\hat{\alpha}^{(k)}_{\xi(n+1)}\hat{\gamma}^{(k)}_{\xi(n+1)}+\hat{\gamma}^{(k)}_{\xi(n+1)}\hat{\alpha}^{(k)}_{\xi(n+1)}+q^{n}(\hat{\gamma}^{(k)}_{\xi(n+1)})^2}{(ab)^{n+\xi(n)}}\right], \tag{3.29}$$

şeklinde elde edilir [26].

**İspat:** Cassini özdeşliği, Catalan özdeşliğinin özel halidir. Teorem 3.4.2 de $r=1$ alınırsa bu teoremin ispatı tamamlanmış olur. ■

Aşağıdaki teorem iki periyotlu $q$ −Fibonacci $2^k$ −ionlarının ve iki periyotlu $q$ −Lucas $2^k$ −ionlarının d'Ocagne özdeşliklerini ifade ve ispat etmektedir

**Teorem 3.4.4 (d'Ocagne özdeşliği)**

$n$ ve $m$ doğal sayı olsun. Eğer $m>n+1$ ise aşağıdaki özdeşlikler sağlanır [26].

$$\hat{\mathcal{F}}_{m,k}(\alpha;q)\hat{\mathcal{F}}_{n+1,k}(\alpha;q)-\hat{\mathcal{F}}_{n,k}(\alpha;q)\hat{\mathcal{F}}_{m+1,k}(\alpha;q)$$

$$=\frac{\alpha^{m+n-1}}{(ab)^{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor+\lfloor\frac{m+1}{2}\rfloor}(1-q)^2}\left[(ab)^{\xi(m)}\hat{\alpha}_{\xi(m)}\hat{\alpha}_{\xi(n+1)}-(ab)^{\xi(n)}\hat{\alpha}_{\xi(n)}\hat{\alpha}_{\xi(m+1)}\right]$$

$$+\frac{\alpha^{m+n-1}q^{m+n+1}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{m+1}{2}\right\rfloor}(1-q)^2}\left[(ab)^{\xi(m)}\hat{\gamma}_{\xi(m)}\hat{\gamma}_{\xi(n+1)}-(ab)^{\xi(n)}\hat{\gamma}_{\xi(m)}\hat{\gamma}_{\xi(m+1)}\right]$$

$$+\frac{\alpha^{m+n-1}q^{m}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{m+1}{2}\right\rfloor}(1-q)^2}\left[(ab)^{\xi(n)}q\hat{\alpha}_{\xi(m)}\hat{\gamma}_{\xi(m+1)}-(ab)^{\xi(m)}\hat{\gamma}_{\xi(m)}\hat{\alpha}_{\xi(n+1)}\right]$$

$$+\frac{\alpha^{m+n-1}q^{n}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{m+1}{2}\right\rfloor}(1-q)^2}\left[(ab)^{\xi(n)}\hat{\gamma}_{\xi(n)}\hat{\alpha}_{\xi(m+1)}-(ab)^{\xi(m)}q\hat{\alpha}_{\xi(m)}\hat{\gamma}_{\xi(n+1)}\right] \quad (3.30)$$

$$\hat{\mathcal{L}}_{m,k}(\alpha;q)\hat{\mathcal{L}}_{n+1,k}(\alpha;q)-\hat{\mathcal{L}}_{n,k}(\alpha;q)\hat{\mathcal{L}}_{m+1,k}(\alpha;q)$$

$$=\alpha^{m+n+1}\left[\frac{\hat{\alpha}_{\xi(m+1)}\hat{\alpha}_{\xi(n)}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{m+1}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n+2}{2}\right\rfloor}}-\frac{\hat{\alpha}_{\xi(n+1)}\hat{\alpha}_{\xi(m)}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{m+2}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor}}\right]$$

$$+\alpha^{m+n+1}q^{m+n+1}\left[\frac{\hat{\gamma}_{\xi(m+1)}\hat{\alpha}_{\xi(n)}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{m+1}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n+2}{2}\right\rfloor}}-\frac{\hat{\gamma}_{\xi(n+1)}\hat{\gamma}_{\xi(m)}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{m+2}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor}}\right]$$

$$+\alpha^{m+n+1}q^{m}\left[\frac{\hat{\gamma}_{\xi(m+1)}\hat{\alpha}_{\xi(n)}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{m+1}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n+2}{2}\right\rfloor}}-\frac{q\hat{\alpha}_{\xi(n+1)}\hat{\gamma}_{\xi(m)}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{m+2}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor}}\right]$$

$$+\alpha^{m+n+1}q^{n}\left[\frac{q\hat{\alpha}_{\xi(m+1)}\hat{\gamma}_{\xi(n)}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{m+1}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n+2}{2}\right\rfloor}}-\frac{\hat{\gamma}_{\xi(n+1)}\hat{\alpha}_{\xi(m)}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{m+2}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor}}\right]. \quad (3.31)$$

**İspat:** İlk olarak (3.30) özdeşliği ispatlanacaktır. Bunun için (3.3) bağıntısı kullanılarak;

$$\hat{\mathcal{F}}_{m,k}(\alpha;q)\hat{\mathcal{F}}_{n+1,k}(\alpha;q)-\hat{\mathcal{F}}_{n,k}(\alpha;q)\hat{\mathcal{F}}_{m+1,k}$$

$$=\left(\frac{\alpha^{m}\hat{\alpha}_{\xi(m)}-(\alpha q)^{m}\hat{\gamma}_{\xi(m)}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor}\alpha(1-q)}\right)\cdot\left(\frac{\alpha^{n+1}\hat{\alpha}_{\xi(n+1)}-(\alpha q)^{n+1}\hat{\gamma}_{\xi(n+1)}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor}\alpha(1-q)}\right)$$

$$-\left(\frac{\alpha^{n}\hat{\alpha}_{\xi(n)}-(\alpha q)^{n}\hat{\gamma}_{\xi(n)}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\alpha(1-q)}\right)\cdot\left(\frac{\alpha^{m+1}\hat{\alpha}_{\xi(m+1)}-(\alpha q)^{m+1}\hat{\gamma}_{\xi(m+1)}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{m+1}{2}\right\rfloor}\alpha(1-q)}\right)$$

elde edilir. Sonuç olarak gerekli dağılma işlemleri yapıldığında ve elde edilen sonuçlar düzenlendiğinde,

$$\hat{\mathcal{F}}_{m,k}(\alpha;q)\hat{\mathcal{F}}_{n+1,k}(\alpha;q)-\hat{\mathcal{F}}_{n,k}(\alpha;q)\hat{\mathcal{F}}_{m+1,k}(\alpha;q)$$

$$=\frac{\alpha^{m+n-1}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{m+1}{2}\right\rfloor}(1-q)^2}\left[(ab)^{\xi(m)}\hat{\alpha}_{\xi(m)}\hat{\alpha}_{\xi(n+1)}-(ab)^{\xi(n)}\hat{\alpha}_{\xi(n)}\hat{\alpha}_{\xi(m+1)}\right]$$

$$+\frac{\alpha^{m+n-1}q^{m+n+1}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{m+1}{2}\right\rfloor}(1-q)^2}\left[(ab)^{\xi(m)}\hat{\gamma}_{\xi(m)}\hat{\gamma}_{\xi(n+1)}-(ab)^{\xi(n)}\hat{\gamma}_{\xi(m)}\hat{\gamma}_{\xi(m+1)}\right]$$

$$+\frac{\alpha^{m+n-1}q^{m}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{m+1}{2}\right\rfloor}(1-q)^2}\left[(ab)^{\xi(n)}q\hat{\alpha}_{\xi(m)}\hat{\gamma}_{\xi(m+1)}-(ab)^{\xi(m)}\hat{\gamma}_{\xi(m)}\hat{\alpha}_{\xi(n+1)}\right]$$

$$+\frac{\alpha^{m+n-1}q^{n}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{m+1}{2}\right\rfloor}(1-q)^2}\left[(ab)^{\xi(n)}\hat{\gamma}_{\xi(n)}\hat{\alpha}_{\xi(m+1)}-(ab)^{\xi(m)}q\hat{\alpha}_{\xi(m)}\hat{\gamma}_{\xi(n+1)}\right]$$

elde edilir. Benzer şekilde (3.31) özdeşliği de (3.10) bağıntısı yardımıyla hesaplanabilir. ■

# BÖLÜM 4

## SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışma 4 bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde Fibonacci dizisinin tarihsel gelişimi anlatılmıştır. Tezin ilerleyen kısımlarında kullanılacak olan temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. İkinci bölümde Modifiye edilmiş genelleştirilmiş Fibonacci $2^k$ $-$ionları ve modifiye edilmiş genelleştirilmiş Lucas $2^k$ $-$ionları tanımlanmış, kuvvet serilerinden yararlanılarak üreteç fonksiyonu hesaplanmıştır. Ayrıca Binet formülü, Catalan ve Cassini özdeşlikleri de sunulmuştur. Üçüncü bölümde iki periyotlu $q$ $-$Fibonacci $2^k$ $-$ion ve iki periyotlu $q$ $-$Lucas $2^k$ $-$ion tanımları verilmiştir. Bu kavramların Binet formülleri, toplam formülleri, üstel üreteç fonksiyonları, Catalan, Cassini ve d'Ocagne özdeşliklerine yer verilmiştir. Son bölümde ise tezin literatüre olan katkısından bahsedilmiştir.

Sonuç olarak elde edilen sonuçlar literatürdeki çalışmaların bir genellemesi olduğundan önem taşımaktadır.

[32, 33, 34] numaralı kaynaklarda $k$ $-$periyodik Fibonacci ve $k$ $-$periyodik Lucas dizileri hakkında bilgi verilmiştir. Bu tez çalışmasında elde edilen sonuçlardan yola çıkarak $k$ $-$periyodik Fibonacci ve $k$ $-$periyodik Lucas dizileri için de benzer bir çalışma yapılabilir.

## KAYNAKÇA


1. Fibonacci, L., 'Liber Abaci', 1202.
2. Koshy, T., "Fibonacci and Lucas numbers with applications", *John Wiley and Sons,* 2011.
3. Bilgici, G., "New generalizations of Fibonacci and Lucas sequences", *Applied Mathematical Sciences*, 8(29), 1429-1437, 2014.
4. Falcon, S., Plaza, A., "The $k$ −Fibonacci sequence and the Pascal 2 −triangle", *Chaos, Solitons ve Fractals,* 33 (1), 38-49, 2007.
5. Edson, M., Yayenie, O., "A new generalization of Fibonacci sequence & extended Binet's formula", *Integers,* 9 (6), 639-654, 2009.
6. Yayenie, O., "A note on generalized Fibonacci sequences", *Applied Mathematics and Computation*, 217 (12), 5603-5611, 2011.
7. Bilgici, G., "Two generalizations of Lucas sequence", *Applied Mathematics and Computation*, 245, 526-538, 2014.
8. Horadam, A. F., "Complex Fibonacci numbers and Fibonacci quaternions", *The American Matematical Monthly*, 70 (3), 289-291, 1963.
9. Tan, E., Yılmaz, S., Şahin, M., "A note on bi-periodic Fibonacci and Lucas quaternions", *Chaos, Solitons & Fractals*, 85, 138-142, 2016.
10. Halıcı, S., "On dual Fibonacci octonions", *Advances in Applied Clifford Algebras*, 25 (4) 905-914, 2015.
11. Keçilioğlu, O., Akkuş, İ., "The Fibonacci octonions", *Advances in Applied Clifford Algebras*, 25 (1), 151-158, 2015.
12. Akkuş, İ., Keçilioğlu, O., "Split Fibonacci and Lucas octonions", *Advances in Applied Clifford Algebras,* 25 (3), 517-525, 2015.
13. Ramirez, J.L., "Some combinatorial properties of the $k$ −Fibonacci and the $k$ −Lucas quaternions", *Ananele Unıversitatii ''Ovidius'' Constanta-Seria Matematica,* 2 (2), 201-212, 2015.
14. Syznal-Liana, A., Wloch, I., "The Pell quaternions and the Pell octonions" *Advances in Applied Clifford Algebras*, 26 (1), 435-440, 2016.
15. Syznal-Liana, A., Wloch, I., "A note on Jacobsthal quaternions", *Advances in Applied Clifford Algebras*, 26 (1), 441-447, 2016.

**16.** Yılmaz, N., Yazlık, Y., Taşkara N., "The bi-periodic Fibonacci octonions" (arXiv:1603.00681), 2016.

**17.** Çimen, C. B., İpek, A., "On Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas octonions", *Mediterranean Journal of Mathematics*, 14 (2), 37, 2017.

**18.** Iyer, M. I., "A note on Fibonacci quaternions", *Fibonacci Quart.*, 7, 225-229, 1969.

**19.** Halıcı, S., "On Fibonacci quaternions", *Advances in applied Clifford algebras*, 22 (2), 321-327, 2012.

**20.** Köme, S., Köme, C., Yazlık, Y., "Modified generalized Fibonacci and Lucas quternions", *Journal of Science and Arts*, 19 (1), 49-60, 2019.

**21.** Bilgici, G., Tokeser, Ü., Ünal, Z., "Fibonacci and Lucas sedenions", *Journal of Integer Sequences*, 20 (2), 3, 2017.

**22.** Catarino, P., "$k-$Pell, $k-$Pell-Lucas and modified $k-$Pell sedenions", *Asian-European Journal of Mathematics*, 12 (02), 1950018, 2019.

**23.** Soykan, Y., "Tribonacci and Tribonacci-Lucas sedenions", *Mathematics*, 7 (1), 74, 2019.

**24.** Yılmaz, N., Yazlık, Y., Taşkara, N., "On the bi-periodic Lucas octonions", *Advances in Applied Clifford Algebras*, 27 (2), 1927-1937, 2017.

**25.** Köme, S., Kirik, H., "On The Generalized Fibonacci and Lucas $2^k-$ions", *Notes on Number Theory and Discrete Math.*, 26 (4) 173-186, 2020.

**26.** Köme, S., Gün, H., "Bi-periodic Fibonacci and Lucas $2^k-$ions with $q-$integer components", Under review, 2021.

**27.** Köme, S., Kirik, H., "On a new generalization of Fibonacci sedenions", *BILMES,* Nevşehir, 2019.

**28.** Köme, S., Kirik, H., "$q-$analogues of biperiodic Fibonacci and Lucas sedenions", *UBAK,* Ankara, 2021.

**29.** Falcon, S., Plaza, A., "On the Fibonacci $k-$numbers", *Chaos, Solutions and Fractals,* 32 (5), 1615-1624, 2007.

**30.** Kac, V. G., Cheung, P., "Quantum calculus", *Springer,* 113, New York, 2002.

**31.** Göcen, M., Soykan, Y., "Horadam $2^k-$ions", *Konuralp Journal of Mathematics (KJM)*, 7 (2), 492-501, 2019.

**32.** Irmak, N., Szalay, L., "On the $k-$periodic binary recurrences", In *Annales Mathematicae et Informaticae* 40, 25-35, 2012.

**33.** Cooper, C., "An identity for period $k$ second order linear recurrence systems", *Congr. Numer*, 200, 95-106, 2010.

**34.** Edson, M., Lewis, S., Yayenie, O., "The $k-$periodic Fibonacci sequence and an extended Binet's formula", *Integers*, 11, Paper #A32, 2011.

**35.** Hamilton, W. R., "Ii. on quaternions; or on a new system of imaginaries in algebra", *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 25(163), 10-13, 1844.

**36.** Kızılateş, C., Kone, T., "On higher order Fibonacci hyper complex numbers". *Chaos, Solitons & Fractals*, 148, 111044, 2021.

**37.** Bilgici, G., Daşdemir, A., "Some unrestricted Fibonacci and Lucas hyper-complex numbers", *Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica*, 24(1), 37-48, 2020.

## ÖZGEÇMİŞ

Hafize Gün, 1996 yılında Tarsus'ta doğdu. İlköğretimini ve orta öğretimini Mersin Dr. Kamil Tarhan İlköğretim okulunda tamamladı. 2014 yılında Nevşehir Hacı Bektaş Veli üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandı. Ardından 2018 yılında Matematik bölümünü derece ile tamamladı. Aynı yıl içerisinde Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisansa başladı. 2018 yılında Nevşehir Altınyıldız Kolejinde Matematik öğretmeni olarak göreve başladı.

Aşağıda Sure KÖME ve Hafize GÜN tarafından bu tez çalışması boyunca yapılmış olan çalışmalar listelenmektedir.

**Yayınlar & Katıldığı Sempozyumlar**

1. Köme, S., Kirik, H., "On a new generalization of Fibonacci sedenions", *BILMES,* Nevşehir, 2019.
2. Köme, S., Kirik, H., "On The Generalized Fibonacci and Lucas $2^k$ −ions", *Notes on Number Theory and Discrete Math.*, 26 (4) 173-186, 2020.
3. Köme, S., Gün, H., "Bi-periodic Fibonacci and Lucas $2^k$ −ions with $q$ −integer components", Under review, 2021 (BAP kapsamında üretilmiştir).
4. Köme, S., Kirik, H., "$q$ −analogues of biperiodic Fibonacci and Lucas sedenions", *UBAK,* Ankara, 2021 (BAP kapsamında üretilmiştir.).

Adres: 15 Temmuz mahallesi Zübeyde Hanım Caddesi 160/6

Nevşehir/Merkez

e-posta: hhafize4@gmail.com

**EK-2**

## Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi BAP Koordinatörlüğü Bilimsel Yayın Bilgilendirme Formu

| Proje Yürütücüsü | BAP Projesi | BAP Projesi ile İlgili SCI veya SCI-Expanded Kapsamındaki Yayınları | BAP Projesi ile İlgili Diğer Yayınlar |
|---|---|---|---|
| Dr. Öğr. Üyesi Sure KÖME | ABAP20F35 | Sure KÖME ve Hafize GÜN, "Bi-periodic Fibonacci and Lucas $2^k$ −ions with $q$ −integer components", Under review, 2021.<br>(Yukarıda yazılı olan makale BAP projesi kapsamında hazırlanmış olup SCI expanded indeksli bir dergide hala hakem incelemesi altındadır.) | Sure KÖME ve Hafize KİRİK GÜN, "$q$ −analogues of biperiodic Fibonacci and Lucas sedenions", *UBAK,* Ankara, 2021.<br>(Yukarıda yazılı olan bildiri BAP projesi kapsamında hazırlanmış olup uluslararası bir konferans olan UBAK 'ta sunulmuştur. Ayrıca bildirinin özeti yayımlanmıştır.) |

| | |
|---|---|
| Var | **1 adet →** Uluslararası konferansta sunulan özeti yayımlanmış bildiri |
| Hazırlık Aşamasında | |
| Değerlendiriliyor | **1 adet →** SCI expanded indeksli bir dergide hakem değerlendirme aşamasında olan makale |
| Yok | |

***Not:*** *Lütfen, formun ilgili alanlarını doldurduktan sonra Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi e-posta adresine gönderiniz. Form, proje yürütücülerinin BAP projelerinin değerlendirilmesinde önemli bir belge olarak göz önünde bulundurulacaktır.*