

T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**$Kite_{p,q}$ GRAFININ BAZI ÖZEL MATRİSLERİNİN
SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ**

Tezi Hazırlayan
Yusuf ÜNGÜR

Tez Danışmanı
Dr. Öğr. Üyesi Hatice TOPCU

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Ağustos 2021
NEVŞEHİR

KABUL VE ONAY SAYFASI

Dr.Öğr. Üyesi Hatice TOPCU danışmanlığında **Yusuf ÜNGÜR** tarafından hazırlanan “ **$Kite_{p,q}$ ($q \leq 2$) Uçurtma Grafının Bazı Özel Matrislerinin Spektral Özellikleri**” başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

31/08/2021

JÜRİ

Başkan : Prof. Dr. Halis BİLGİL imza

Üye : Dr. Öğrt. Üyesi Hatice TOPCU imza

Üye : Dr. Öğrt. Üyesi Esmâ Demir ÇETİN imza

ONAY:

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun.....tarih ve..... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

.../.../20..

Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİM SAYFASI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada yer alan bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu ve bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Yusuf ÜNGÜR

TEŐEKKÜR

Yüksek lisans boyunca hem ders aşamasında hem de tez aşamasında her konuda destek olan Sayın Hocam Dr. Öğr. Üyesi Hatice TOPCU ya,

Maddi ve manevi olarak her zaman yanımda olan değerli AİLEME,

Yüksek lisans derslerimize giren HOCALARIMA,

Burs desteęi sağlayan GENÇLİK ve SPOR BAKANLIđINA,

Teknik ve idari yardımlarından dolayı Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Rektörlüğü'ne, Fen-Edebiyat Fakültesi Dekanlığı'na, Matematik Bölüm Başkanlığı'na teşekkürlerimi sunarım.

Yusuf ÜNGÜR

$Kite_{p,q}$ UÇURTMA GRAFININ BAZI ÖZEL MATRİSLERİNİN SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Yusuf ÜNGÜR

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ağustos 2021

ÖZET

p noktalı bir tam grafin (K_p) keyfi bir noktasına, q noktalı bir yol grafin (P_q) keyfi bir sarkıt noktasının bağlanmasıyla elde edilen özel grafa $p + q$ noktalı uçurtma graf denir ve $Kite_p^q$ ile gösterilir [16]. Uçurtma graf literatürde sıklıkla kullanılan bir graf türüdür ve spektral yarıçap gibi önemli parametrik değerlerde ekstremum sonuçlar verebilme özelliğine sahiptir [17]. Bu tez çalışmasında, özel bir graf türü olan uçurtma grafin spektral özelliklerinin derinlemesine incelenmesi amaçlanmıştır. Graf matrislerinin en bilinen ve en temel dört tipi olan komşuluk, uzaklık, Laplasyan ve işaretli Laplasyan matrislerine göre uçurtma grafin sahip olduğu spektral özelliklerini inceleyen literatürde mevcut çalışmalar araştırılmış ve bu çalışmalarda yer alan matematiksel bulguların uyumlu bir biçimde bir araya getirilmesiyle bu tez çalışması oluşturulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Uçurtma graf, Laplasyan matris, spektral karakterizasyon, uzaklık matrisi, işaretli Laplasyan matris, komşuluk matrisi.

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Hatice TOPCU

Sayfa Sayısı: 80

SPECTRAL PROPERTIES OF SOME SPECIAL MATRICES OF $Kite_{p,q}$

(MsC. Thesis)

Yusuf ÜNGÜR

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

August 2021

ABSTRACT

The graph obtained by appending an arbitrary pendant vertex of a path graph with q vertices (P_q) to an arbitrary vertex of a complete graph with p vertices (K_p) is called a kite graph with $p + q$ vertices and denoted by $Kite_p^q$ [16]. $Kite_p^q$ is a special graph that is frequently used in literature since it has the property of giving extreme results in important parameters of graphs such as spectral radius [17]. In this study, it is mainly aimed to examine the spectral properties of the kite graph in detail. According to the most known and main four types of graph matrices, adjacency, Laplacian, signless Laplacian and distance matrices, the existing works in the literature examining the properties of the kite graph have been investigated and this thesis has been compiled by bringing together the mathematical findings in these studies in a harmonious way.

Keywords: *Kite graph, Laplacian matrix, spectral characterization, distance matrix, signless Laplacian matrix, adjacency matrix.*

Thesis Supervisor: Assist. Prof. Dr. Hatice TOPCU

Page Number: 80

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY SAYFASI	2
TEZ BİLDİRİM SAYFASI	ii
ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	v
ŞEKİLLER LİSTESİ	vii
SİMGE VE KISALTMALAR	ix
1. BÖLÜM	1
GİRİŞ	1
2.BÖLÜM	4
ÖN BİLGİLER.....	4
2.1. Lineer Cebirde Bazı Temel Kavramlar	4
2.2. Determinant.....	9
2.3. Özdeğerler ve Özvektörler	13
3. BÖLÜM	19
3.1. Graf Tanımı, Özellikleri ve Graf Türleri.....	19
3.2. Graf Matrisleri.....	31
4. BÖLÜM	38
4.1. Uçurtma Grafların Komşuluk Matrisine Göre Spektral Özellikleri.....	38
4.2. Uçurtma Grafın Laplasyan Matrisine Göre Spektral Özellikleri	62
4.3. Uçurtma Grafın İşaretsiz Laplasyan Matrisine Göre Spektral Özellikleri.....	70
4.4. Uçurtma Grafın Uzaklık Matrisine göre Spektral Özellikleri.....	73
TARTIŞMA, SONUÇ ve ÖNERİLER	76
KAYNAKLAR	77
ÖZGEÇMİŞ	80

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 3. 1 G grafi.....	19
Şekil 3. 2 Basit bir graf	20
Şekil 3. 3 Yönlü ve Yönsüz graf örnekleri.....	20
Şekil 3. 4 G grafi	21
Şekil 3. 5 Yönlü bir graf.....	21
Şekil 3. 6 G grafi	22
Şekil 3. 7 G grafi	23
Şekil 3. 8 Kapalı yürüyüş içeren bir G grafi.....	23
Şekil 3. 9 Herhangi bir G grafi.....	23
Şekil 3. 10 Bağlantılı ve Bağlantısız graf örnekleri	24
Şekil 3. 11 G grafi	24
Şekil 3. 12 G grafi	25
Şekil 3. 13 G ve H grafları	25
Şekil 3. 14 G ve H grafları	26
Şekil 3. 15 Farklı gibi görünen iki izomorf graf (Petersen Grafi).....	26
Şekil 3. 16 H_1 üreteç alt graf ve H_2 indirgenmiş alt graf	26
Şekil 3. 17 Bir graf ve onun tümleyeni	27
Şekil 3. 18 İki, üç ve dört noktalı bazı ağaçlar.....	27
Şekil 3. 19 N_4 grafi.....	27
Şekil 3. 20 $n = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ için K_n tam grafları.....	28
Şekil 3. 21 4-noktalı bir yol graf ve döngü graf.....	28
Şekil 3. 22 $W_{1,4}$ ve $W_{1,5}$ grafları.....	28
Şekil 3. 23 Sekiz noktalı 3-regüler bağlantılı ve basit graflar	29
Şekil 3. 24 İki parçalı graf örneği.....	29
Şekil 3. 25 Bazı iki parçalı tam graf örnekleri	30
Şekil 3. 26 G grafi	30
Şekil 3. 27 G grafi	31
Şekil 3. 28 Kospektral en küçük iki graf çifti	34
Şekil 3. 29 Kospektral bağlantılı en küçük iki graf çifti	34
Şekil 3. 30 G grafi	34
Şekil 3. 31 Bir grafın işaretli Laplasyan matrisi	36

Şekil 3. 32 G grafi	37
Şekil 4. 1 Smith graflar	39
Şekil 4. 2 G 'nin içermeyeceği indirgenmiş alt graflar.....	45
Şekil 4. 3 Bir grafa petal eklenmesi	48
Şekil 4. 4 Çiçek Graf.....	48
Şekil 4. 5 G grafi ve bu grafin çizgi grafi.....	49
Şekil 4. 6 $T(1,1,1,1,1,1,2,4)$ yıldızsal ağacı	50
Şekil 4. 7 Sun_6 graf.....	50
Şekil 4. 8 Genelleştirilmiş bir çizgi grafin yasaklanmış alt grafları.....	57
Şekil 4. 9 $E, F_1, F_2, F_3, F_4, F_5$ ve F_6 grafları.....	58
Şekil 4. 10 $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5, \tau_6, \tau_7, \tau_8, \tau_9$ grafları	59
Şekil 4. 11 (a) ve (b) durumları.....	66
Şekil 4. 12 K_p kliği ile grafin diğer kısmı arasında sadece bir adet kenar bulunması durumu	67
Şekil 4. 13 $Kite_{p+2,p}$ için yasaklanmış alt graflar	68
Şekil 4. 14 H_1, H_2 ve H_3 grafları	71
Şekil 4. 15 Bazı grafların Laplasyan ve uzaklık spektrumları	71

SİMGE VE KISALTMALAR

$A = B$	Matris eşitliği
$tr(A)$	A matrisinin izi
I_n	Birim matris
A^T	A matrisinin transpozu
A^{-1}	A matrisinin tersi
A^H	A matrisinin eşlenik transpozu
\bar{A}	A matrisinin eşleniği
$\langle a, b \rangle$	a ile b vektörlerinin iç çarpımı
$\sigma(A)$	A matrisinin özdeğerlerinin kümesi
λ	Özdeğer
$V(G)$	Noktalar kümesi
$E(G)$	Kenarlar kümesi
$ V(G) $	Nokta sayısı
$ E(G) $	Kenar sayısı
v_i	V 'ye ait noktalar
e_i	E 'ye ait noktalar
$rad(G)$	G grafının yarıçapı
$diam(G)$	G grafının çapı
$v_1 \sim v_2$	Komşu noktalar
$deg(v)$	Nokta derecesi
$\delta(G)$	Minimum dereceli nokta
$\Delta(G)$	Maksimum dereceli nokta
$H \subseteq G$	Alt graf
\bar{G}	G grafının tümleyeni
N_n	Boş graf
C_n	Döngü graf
K_n	Tam graf
P_n	Yol graf

$W_{1,n}$	Tekerlek graf
$S_{1,n}$	Yıldız graf
$K_{m,n}$	İki parçalı tam graf
K_{m_1, \dots, m_n}	Çok parçalı tam graf
K_p^n	Ananas graf
$Kite_{n,n-p}$	Uçurtma graf
B_k	Çiçek graf
$L(G)$	Çizgi graf
Sun_p	Güneş graf
$T(l_1, l_2, \dots, l_\Delta)$	Yıldızsal ağaç
$DK(p, q)$	Çift uçurtma graf
$S(G)$	Alt bölüm graf
F_n	Yasaklanmış alt graf
$M(G)$	Graf matrisi
$specM(G)$	G 'nin $M(G)$ spektrumları kümesi
$\omega(G)$	Klik sayısı
$\alpha(G)$	Koklik sayısı
$G \cong H$	İzomorf graflar
$A(G)$	Komşuluk matrisi
$D(G)$	Derece matrisi
$L(G)$	Laplasyan matrisi
$Q(G)$	İşaretsiz Laplasyan matrisi
$\mu(G)$	En büyük Laplasyan özdeğeri
$\rho(Kite_{p,q})$	Uçurtma grafın komşuluk matrisinin spektral yarıçapı
$DI(G)$	Uzaklık matrisi

1. BÖLÜM

GİRİŞ

$V = \{v_1, \dots, v_n\}$ noktalar kümesini $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ kenarlar kümesini oluşturmak üzere bir G grafi, $G = (V, E)$ sıralı ikilisi şeklinde tanımlanır. $G = (V(G), E(G))$ nokta kümesi $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ve kenar kümesi $E(G)$ olan graf olsun. n noktaya sahip, $n - 1$ kenarlı bir yola *yol (path) graf* denir. n noktalı yol graf P_n ile gösterilir. Tüm nokta çiftleri birbirine bir kenarla bağlı olan basit graflara *tam (complete) graf* denir. Tam graf genellikle K_n ile gösterilir. n noktadan ve n kenardan oluşan döngüye *cycle (döngü) graf* denir. Döngü graf C_n ile gösterilir. G 'deki noktaların sayısına G 'nin mertebesi denir ve $|G|$ ile gösterilir. Bir v noktasının derecesi v 'ye bağlı olan kenarların sayısıdır ve $d(v)$ ile gösterilir. Bir G grafının maksimum ve minimum derecesini sırasıyla $\Delta(G)$ ve $\delta(G)$ ile gösterilir. G 'nin v noktası için v 'ye komşu olan noktaların kümesini $N(v)$ ile gösteririz. H grafının bir G grafının *alt grafi* olabilmesi için $V(H) \subseteq V(G)$ ve $E(H) \subseteq E(G)$ olmalıdır. G grafının noktalarından bazılarının ve bu noktalara bağlı tüm kenarların silinmesiyle elde edilen alt grafa G 'nin *indirgenmiş (induced subgraph) alt grafi* denir. G 'nin keyfi sarkıt bir kenar olarak adlandırılması için gerek ve yeter şart derecesi bir olan bir nokta içermesidir. G 'nin bir kliği G 'nin bir tam alt grafıdır ve kliğin mertebesi, klikteki noktaların sayısıdır. G 'deki bir klikte mümkün olan en büyük mertebeye G 'nin klik sayısı denir ve $\omega(G)$ ile gösterilir. G 'de mertebesi 3 olan bir kliğe G 'nin bir üçgeni denir. G grafının herhangi bir noktasına bir sarkıt kenar eklenmesi ve daha sonra bu sarkıt kenarın iki katlı kenara dönüştürülmesi işlemine G grafına *petal eklenmesi* denir. Eklenip iki katlı hale getirilen bu sarkıt kenara ise *petal* denir. $k \geq 0$ olmak üzere tek bir noktaya k adet petal eklenmesiyle oluşan grafa *çiçek (blossom)* denir ve B_k ile gösterilir. $k = 0$ iken B_0 aşık graf olur. $G = (V, E)$ grafının kenarlarını nokta kabul eden ve “ $G = (V, E)$ grafında $\forall e_1, e_2 \in V$ için $e_1 \cap e_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow L(G) = (E, E')$ grafında $e_1 \sim e_2$ ” şartını sağlayan $L(G) = (E, E')$ grafına G grafının *çizgi grafi* denir. G grafına ise $L(G)$ grafının *kök grafi* denir. Bir G grafının noktalarını $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ olarak etiketleyelim. $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için a_i bir doğal sayı olmak üzere G grafının v_i noktasına a_i adet petal eklenmesiyle oluşan graf $G(a_1, \dots, a_n)$ ile gösterilir

ve G 'nin B -grafı ya da *çiçeklenmiş grafi* olarak adlandırılır. $G = (V, E)$ grafının bir B -grafı $\hat{G} = G(a_1, a_2, \dots, a_n)$ olsun. Bu B -grafın çizgi grafına G 'nin *genelleştirilmiş çizgi grafı* denir ve $L(\hat{G})$ ya da $L(G; a_1, \dots, a_n)$ ile gösterilir. p noktalı tam grafın, $n - p$ noktalı bir yol grafın derecesi bir olan noktasına yeni bir kenar yardımıyla bağlanması ile elde edilen grafa *uçurtma graf* denir ve $Kite_{n,n-p}$ ile gösterilir. Eğer $n - p = 1$ ise $Kite_{n,1}$ grafına *kısa uçurtma graf* denir. $n - p > 1$ ise $Kite_{n,n-p}$ grafına *uzun uçurtma graf* denir. G grafının nokta kümesi $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ ve kenar kümesi $E(G) = \{e_1, \dots, e_m\}$ olsun. G 'nin komşuluk matrisi $A(G)$ veya A_G ile gösterilen $n \times n$ kare matristir ve şu şekilde tanımlanır iki nokta komşu ise bunların değeri 1, komşu değilse 0 alınır. $M(G)$ ya da kısaca M, G grafına ait bir graf matrisi ve I_n birim matris olmak üzere $det(xI - M(G))$ polinomuna G nin $M(G)$ karakteristik polinomu denir ve $char(M(G))(x)$ ile gösterilir. Bu polinomun köklerinden $M(G)$ matrisinin özdeğerlerinden oluşan kümeye ise G nin $M(G)$ spektrumu denir ve $spec(M(G))$ ile gösterilir. Ya da matrisin adına göre komşuluk spektrumu, Laplasyan spektrumu v.b. de denir. $L(G)$ Laplasyan matrisi göstermek üzere $D(G)$, noktaların derecelerinden oluşan köşegen matris olsun. $A(G)$, G 'nin komşuluk matrisini göstermek üzere $L(G) = D(G) - A(G)$ dir. G grafının nokta kümesi $V(G) = \{1, \dots, n\}$ olsun. G 'nin herhangi i ve j noktalarının arasındaki uzaklığı $d(i, j)$ ile gösterirsek $d(i, j)$, i den j ye en kısa yolun uzunluğudur. G 'nin uzaklık matrisi $DI(G)$ ile gösterilirse bu matris, satırları ve sütunları G 'nin noktalarıyla etiketlenmiş $n \times n$ tipinde bir matristir. $i \neq j$ için G 'nin (i, j) . elemanı d_{ij} , $d(i, j)$ 'ye eşit bir kümedir. $i = \{1, \dots, n\}$ için $d_{ii} = 0$ dır. $DI(G)$, köşegen üzerindeki elemanları 0 olan simetrik bir matristir $Q(G)$ işaretli Laplasyan matrisi göstermek üzere $Q(G) = D(G) + A(G)$ dir. Aşağıda verilen sonuç Cauchy *interlacing* olarak bilinen teoremin graf teorideki kullanımınıdır. A , $n \times n$ simetrik matris ve B matrisi A 'nın $(n - 1) \times (n - 1)$ tipinde alt matrisi olsun. $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ve μ_1, \dots, μ_{n-1} sırasıyla A ve B matrisinin özdeğerleri olsun. $\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{n-1} \geq \mu_{n-1} \geq \lambda_n$ dir. G 'nin komşuluk özdeğerlerini şu şekilde kullanırız: $\lambda_1(G) \geq \lambda_2(G) \geq \dots \geq \lambda_n(G)$. Aynı spektruma sahip iki grafa kospektral graflar denir. 4.1 de uçurtma grafın komşuluk spektrumuna göre belirlenebilir olduğuna dair bulgulara yer verilmiştir. Lolipop grafın da komşuluk spektrumuyla belirlenebilir olduğu ispat edilmiştir [21]. Yine [21] den kısa uçurtma grafın komşuluk ve Laplasyan spektrumuna göre belirlenebilir olduğu görülebilir. Das ve Liu [19] kısa uçurtma grafın $p \neq 4$ ve $p > 3$ iken işaretli

Laplasyan spektrumuna göre belirlenebilir olduğunu ve aynı zamanda $p \geq 3$ iken uzaklık spektrumuna göre belirlenebilir olduğunu kanıtlamıştır. Sorgun ve Topcu [12] de uçurtma grafin komşuluk matrisine göre karakteristik polinomu verilmiş ve izomorf olmayan iki uçurtma grafin aynı komşuluk spektrumuna sahip olduğu gösterilmiştir. Diğer taraftan aynı makalede $Kite_p^2$ nin her p için komşuluk spektrumuna göre belirlenebilir olduğu ispatlanmış ve her p ve q için $Kite_p^q$ nin komşuluk spektrumuna göre belirlenebilir olduğu öngörülmüştür ve açık problem olarak bırakılmıştır. Zhou ve Bu [22], $\Delta \geq 12$ iken maksimum derecesi Δ olan yıldızsal bir ağacın çizgi grafinin komşuluk spektrumuna göre belirlenebilir olduğunu ispatlamıştır. $p \leq 2$, $p = 3$ ve $q = 0$ için sırasıyla yol graf, lolipop graf ve tam graf elde edilir. Bu grafların komşuluk spektrumuna göre belirlenebilir olduğu hali hazırda biliniyor. Topcu ve Sorgun [16] da $p \geq 4$ ve $q \geq 3$ durumunu incelenmiştir ve daha önce açık problem olarak bırakılan kısmın tamamına dair ispat verilmiştir. 4.2 de uçurtma grafin Laplasyan spektrumuna göre belirlenebilir olduğuna dair bulgulara yer verilmiştir. Topcu ve Sorgun [15] uçurtma grafin Laplasyan matrisinin karakteristik polinomunu tam graf ve yol grafin karakteristik polinomu yardımıyla elde etmişlerdir. $Kite_p^q$ ile aynı klik sayısına sahip herhangi bağlantılı grafin bazı koşullar altında $Kite_p^q$ ya izomorf olduğu gösterilmiştir [15]. 4.3 ve 4.4 te uçurtma grafin uzaklık matrisine ve işaretli Laplasyan matrisine dair literatürde mevcut sonuçlara yer verilmiştir. $Kite_{n,n-1}$ in $n \neq 5$ ve $n \geq 4$ iken işaretli Laplasyan spektrumuna göre belirlenebilir olduğu ve bu grafin $n \geq 4$ iken uzaklık spektrumuna göre belirlenebilir olduğu gösterilmiştir[19].

2.BÖLÜM

ÖN BİLGİLER

2.1. Lineer Cebirde Bazı Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1. [1] K cismi üzerindeki bir A matrisi veya basitçe bir A matrisi genellikle aşağıdaki gibi gösterilen dikdörtgen bir skaler dizisidir. Genel olarak bir matris,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

biçimindedir.

Böyle bir A matrisinin satırları, skalerlerin m tane yatay listeleridir ve

$$(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}), \dots, (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$$

şeklinde gösterilir.

A 'nın sütunları skalerlerin n tane dikey listesidir ve

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilir.

a_{ij} , ij . eleman olarak adlandırılır. Bunun anlamı a_{ij} , i .sıra ve j .sütun elemanıdır. Bir matris m sıra ve n sütundan oluşuyorsa bu matrise $m \times n$ tipinde matris denir. Böyle bir matrisi basitçe $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ şeklinde gösteririz. m ve n sayı çiftine matrisin boyutu denir. A ve B matrislerinin boyutları ve elemanları aynı ise bu matrisler eşit matris olarak adlandırılır ve $A = B$ şeklinde gösterilir. $m \times 1$ tipindeki bir matris m mertebeli sütun vektörü; benzer şekilde $1 \times n$ tipindeki bir matris n mertebeli sıra vektörü olarak adlandırılır. $m = n$ ise matrise *kare matris* denir.

Örnek 2.1.1. $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ matrisi 2×3 boyutlu bir matristir. $[1, -4, 5]$ ve $[0, 3, -2]$ satırları; $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$ sütunlarıdır.

Örnek 2.1.2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ matrisi 3×3 tipinde kare matristir. Buna 3. mertebeden kare matris de denir.

Tanım 2.1.2. [1] $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ $m \times n$ tipinde iki matris olsun. A ve B matrislerinin toplamı $A + B$ şeklinde yazılır.

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix} \text{biçimindedir.}$$

Örnek 2.1.3. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 1 & -3 & 7 \end{bmatrix}$ olsun. $A + B = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 11 \\ 1 & 1 & 12 \end{bmatrix}$

Tanım 2.1.3. [1] A , $m \times n$ tipinde bir matris olsun. A matrisinin herhangi bir k skaleri ile çarpımı demek, matristeki her bir elemanın k ile çarpılması anlamına gelir.

$$kA = \begin{bmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix} \text{şeklinde gösterilir.}$$

Örnek 2.1.4. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ ise $2A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 0 & 8 & 10 \end{bmatrix}$

Tanım 2.1.4. [2] $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ve $B = [b_{kl}]_{p \times q}$ herhangi iki matris olsun. AB matris çarpımının tanımlı olabilmesi için A 'nın sütun sayısı ile B 'nin satır sayısının eşit olması gerekir. Yani $n = p$ olmalıdır. Yukarıda verilen A ve B matrisinde $n = p$ olduğunu varsayalım. O zaman AB matrisi $m \times q$ tipinde bir matris olur.

Örnek 2.1.5.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 9 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}_{3 \times 1} \text{ olsun.}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 \times 6 + 2 \times 7 + 0 \times 8 \\ 3 \times 6 + 4 \times 7 + 9 \times 8 \end{bmatrix}_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} 20 \\ 118 \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

Tanım 2.1.5. [1] Bir A matrisinin transpozu A^T ile gösterilir ve A matrisinin sütunları ve satırlarının yer değiştirmesiyle elde edilir.

$$\text{Örnek 2.1.6. } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \text{ ve } [1 \quad -3 \quad -5]^T = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix} \text{ tir.}$$

Teorem 2.1.1. [1] A ve B matris ve k skaler olsun. Aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

$$(i) (A + B)^T = A^T + B^T$$

$$(ii) (A^T)^T = A$$

$$(iii) (kA)^T = kA^T$$

$$(iv) (AB)^T = B^T A^T$$

Tanım 2.1.6. [1] $A = [a_{ij}]$, n . mertebeden kare matris olsun. $\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\}$ elemanlarına matrisin *köşegeni* denir.

Tanım 2.1.7. [1] $D = [d_{ij}]$ kare matrisinin köşegen haricindeki elemanları sıfır ise D matrisine *köşegen matris* denir. Böyle bir matris genellikle $D = \text{diag}(d_{11}, d_{22}, \dots, d_{nn})$ şeklinde gösterilir.

Örnek 2.1.7. $D = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ matrisi köşegen matristir. $D = \text{diag}(6, -1, 5)$ şeklinde de gösterilebilir.

Tanım 2.1.8. [1] Bir A kare matrisinin köşegeni üzerindeki elemanların toplamına *matrisin izi* denir ve $\text{iz}(A)$ şeklinde gösterilir.

$\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$ olarak ifade edilir.

Teorem 2.1.2. [1] $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ matrisleri $n \times n$ kare matris ve k skaler olsun. Aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

$$(i) \text{iz}(A + B) = \text{iz}(A) + \text{iz}(B)$$

$$(ii) \text{iz}(k.A) = k.\text{iz}(A)$$

$$(iii) \text{iz}(A^T) = \text{iz}(A)$$

$$(iv) \text{iz}(AB) = \text{iz}(BA)$$

Tanım 2.1.9. [1] Köşegen elemanları 1, diğer elemanları 0 olan n .mertebeden kare matrise *birim matris* denir ve I_n şeklinde gösterilir. Kaynaklarda basitçe I şeklinde gösterilir.

Örnek 2.1.8. $I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ olarak elde edilir.

Tanım 2.1.10. [1] A , n . mertebeden bir kare matris olsun. Eğer, $AB = I_n$ ve $BA = I_n$ olacak şekilde n . mertebeden bir B kare matrisi var ise, B matrisine A matrisinin *tersi* denir.

A kare matrisinin tersinin olabilmesi için $AB = I_n$ ve $BA = I_n$ koşullarından yalnızca birinin sağlanması yeterlidir. Ayrıca, A 'nın tersi var ise bu tektir ve ters matris A^{-1} ile gösterilir.

Örnek 2.1.9. $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ olsun. $AB = BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ olduğundan A 'nın tersi B matrisidir denir.

A ve B tersinir iki matris olsun. AB 'nin tersi $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ile bulunur.

Tanım 2.1.11. [1] A herhangi bir kare matris olsun.

- (i) $A^T = A$ ise A matrisine *simetrik matris* denir. Her bir eleman için $a_{ij} = a_{ji}$ dir.
- (ii) $A^T = -A$ ise A matrisine *ters simetrik matris* denir. $a_{ij} = -a_{ji}$ olmalıdır. Ters simetrik matriste köşegen üzerindeki elemanlar 0 olmak zorundadır.

Örnek 2.1.10 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -3 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & -8 \end{bmatrix}$ matrisinin elemanları köşegene göre eşit olduğundan simetrik matristir. Yani $A^T = A$ dir.

$B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -3 & 0 & 5 \\ 4 & -5 & 0 \end{bmatrix}$ matrisinin köşegen elemanları sıfır ve köşegene göre birinin negatifine eşit olduğu için B matrisi ters simetrik matristir. Yani $B^T = -B$ dir

Tanım 2.1.12. [1] $A.A^T = A^T.A = I$ şartını sağlayan reel elemanlı A matrisine *ortogonal matris* denir. Yani $A.A^T = A^T.A = I \Leftrightarrow A^T = A^{-1}$ dir. Dolayısıyla bir matrisin ortogonal matris olabilmesi için tersinir olması gerekir.

Örnek 2.1.1

$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{8}{9} & \frac{-4}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{-4}{9} & \frac{-7}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix}$ matrisi ortogonal bir matristir. Çünkü $A^T A = I$ dir.

Tanım 2.1.13. [1] Bir A reel matrisi transpozu ile değişmeli ise A matrisine *normal matris* denir. Yani

$$AA^T = A^T A$$

dır. A matrisi simetrik, ortogonal veya ters simetrik ise A normaldir.

Örnek 2.1.12. $A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ matrisi normal bir matristir.

Tanım 2.1.14. [1] A kare matrisinin esas köşegeninin altındaki elemanları 0 ise *üst üçgen matris*, esas köşegenin üzerindeki elemanlar 0 ise *alt üçgen matris* denir.

Örnek 2.1.13. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & -1 \end{bmatrix}$ matrisi alt üçgen, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -4 & -2 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ matrisi üst

üçgen bir matristir.

Tanım 2.1.15. [1] Bir A matrisinin elemanları kompleks sayılardan oluşuyorsa bu matrise *kompleks matris* denir. $z = a + bi$ kompleks sayı ise $\bar{z} = a - bi$ onun eşleniğidir. Bir A matrisinin eşleniği \bar{A} ile gösterilir ve A matrisindeki her bir elemanın eşleniği alınarak elde edilir. Herhangi bir kompleks A matrisinin eşleniğinin transpozu özel olarak A^H notasyonu ile gösterilir.

$$A^H = (\bar{A})^T = (\overline{A^T})$$

dir. A reel matris ise $A^H = A^T$ dir.

Örnek 2.1.14. $A = \begin{bmatrix} 2 + 8i & 5 - 3i & 4 - 7i \\ 6i & 1 - 4i & 3 + 2i \end{bmatrix}$ olsun. $A^H = \begin{bmatrix} 2 - 8i & -6i \\ 5 + 3i & 1 + 4i \\ 4 + 7i & 3 - 2i \end{bmatrix}$ olarak

bulunur.

Tanım 2.1.16. [1] A kompleks bir matris olsun. $A^H = A$ ise matrise *Hermityen*, $A^H = -A$ ise *ters Hermityen* denir.

Açık olarak $A = [a_{ij}]$ matrisinin Hermityen olabilmesi için gerek ve yeter koşul simetrik elemanları eşlenik yani $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ olmalıdır. Buna ek olarak köşegen elemanları a_{ii} reel olmak zorundadır. Benzer şekilde ters Hermityen olması için köşegen elemanları $a_{ii} = 0$ olmalıdır. (Her iki tanımda da A matrisi kare matristir).

Tanım 2.1.17. [1] Kompleks A matrisi;

(i) $AA^H = A^H A = I$ eşitliğini yani $A^H = A^{-1}$ eşitliğini sağlıyorsa *üniter matristir*.

(ii) $AA^H = A^H A$ eşitliğini sağlıyorsa *normal matristir*.

Örnek 2.1.15. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 - 2i & 4 + 7i \\ 1 + 2i & -4 & -2i \\ 4 - 7i & 2i & 5 \end{bmatrix}$ A matrisinin köşegen elemanları reel ve

diğer elemanlar esas köşegene göre birbirinin eşleniği olduğu için A , Hermityen bir

matristir. $B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i & -1 + i \\ i & 1 & 1 + i \\ 1 + i & -1 + i & 0 \end{bmatrix}$ matrisi $BB^H = B^H B = I$ şartını sağladığı

için üniterdir. $C = \begin{bmatrix} 2 + 3i & 1 \\ i & 1 + 2i \end{bmatrix}$ matrisi için $C^H = \begin{bmatrix} 2 - 3i & -i \\ 1 & 1 - 2i \end{bmatrix}$ dir.

$CC^H = C^H C = \begin{bmatrix} 14 & 4 - 4i \\ 4 + 4i & 6 \end{bmatrix}$ sağlandığından C normal matristir.

2.2. Determinant

A , $n \times n$ kare matris olsun. A 'nın determinanı olarak gösterilen $\det(A)$ bir sayıdır.

Matris 2×2 ise determinantını bulmak çok kolaydır.

Tanım 2.2.1. [2] $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ olsun. A 'nın determinanı $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ şeklinde gösterilir.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

ile bulunur.

Tanım 2.2.2. [2] $A = [a_{ij}]$ yi $n \times n$ kare matris alalım. A_{ij} , A matrisinin i .nci satır ve j .nci sütunun silinmesiyle elde edilen $(n - 1) \times (n - 1)$ tipinde kare matris olsun.

Örneğin $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ ise $A_{11} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ ve $A_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ olur. A_{ij} 'nin

determinanı $\det A$ ile gösterilirse $(-1)^{i+j} \det A_{ij}$ değeri her i, j için a_{ij} 'nin *kofaktörü* olarak adlandırılır. Her $i, j = 1, 2, \dots, n$ için $A^{ij} = (-1)^{ij} \det A_{ij}$ dir.

Teorem 2.2.1. [2] $n \geq 2$ için A , $n \times n$ matris olsun.

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} A^{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ij} A^{ij}$$

Bunlardan birinci formül i . satır boyunca determinant açılımını, ikincisi ise j . sütun boyunca determinant açılımını verir.

Örnek 2.2.1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ matrisinin determinantını hesaplayalım.

Birinci satıra göre kofaktör açılımı formülünü kullanırsak $\det(A) = a_{11}(-1)^{1+1}\det(A_{11}) + a_{12}(-1)^{1+2}\det(A_{12}) + a_{13}(-1)^{1+3}\det(A_{13})$

$$\det(A) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2$$

olarak bulunur.

Teorem 2.2.2. [3] A , üçgen matris ise determinantı esas köşegen üzerindeki elemanların çarpımına eşittir. Yani $\det(A) = \prod_{i=1}^n a_{ii}$ dir.

İspat. Teoremin ispatını n üzerinde tümevarımla yapalım. $n = 1$ için teoremin doğru olduğu açıktır. Şimdi $n > 1$ durumunu alt üçgensel ya da üst üçgensel matris için inceleyelim. Tümevarım hipotezine göre M_{11}^A , A matrisinin köşegeni üzerindeki a_{11} haricindeki elemanlarının çarpımı olsun. $\det(A)$ tanımından $i > 1$ için $a_{i1}A^{i1} = 0$ olduğunu göstermek yeterli olacaktır. $i > 0$ iken A üst üçgensel matris ise $a_{i1} = 0$ dir. Diğer taraftan $i > 1$ için A alt üçgensel matris ise M_{i1}^A 'in ilk satırı tamamen sıfırdır böylece $A^{i1} = 0$ olur. Çünkü bir kare matrisin herhangi bir satırı 0 ise matrisin determinantı sıfırdır. Tümevarımla ispat tamamlanmış olur.

Örnek 2.2.2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 77 \\ 0 & 2 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ matrisi üst üçgen matristir. Yukarıdaki teoremden

determinantı köşegen üzerindeki elemanlar çarpımına eşittir. $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (-1) = -6$ dir.

Teorem 2.2.3. [3] A , kare matris olsun.

- (i) A 'nın herhangi bir satırını (sütununu) bir sayıyla çarpıp başka bir satırına(sütununa) ekleyerek elde ettiğimiz matris B olsun. $\det(A) = \det(B)$ dir.
- (ii) A 'nın herhangi iki satırını (sütununu) yer değiştirdiğimizde elde edilen matris B olsun. $\det(B) = -\det(A)$ dir.

(iii) A 'nın herhangi bir satırını (sütununu) k sayısı ile çarpınca elde edilen matris B olsun. $\det(B) = k \cdot \det(A)$ dır.

Teorem 2.2.4. [3] A ve B , $n \times n$ matris olsun. Aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

(i) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

(ii) $\det(A^T) = \det(A)$

İspat. (i) İlk olarak $\det(B) = 0$ olduğunu varsayalım. Dolayısıyla B 'nin tersi yoktur. Buradan $Bx = 0$ aşikar olmayan bir çözümdür. Bu aynı zamanda $ABx = 0$ ın da aşikar olmayan bir çözümdür böylece AB de tersinir değildir ve determinanı 0 dır. $\det(AB) = 0 = \det(A)\det(B)$ olur.

İkinci olarak $\det(A) = 0$ ve $\det(B) \neq 0$ olduğunu varsayalım. A , tersinir değildir ve $Ay = 0$ denkleminin $y \neq 0$ olacak şekilde aşikar olmayan çözümü vardır. $x = B^{-1}(y)$, $ABx = 0$ denkleminin aşikar olmayan bir çözümdür. Bundan dolayı AB tersinir değildir ve $\det(AB) = 0$ olur. Yine $\det(AB) = 0 = \det(A)\det(B)$ dir.

Şimdi $\det(A) \neq 0$ olduğunu varsayalım. A matrisinin eşelon formunu yazalım. Bu elementer E_i matrisleri olduğu anlamına gelir. $A = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1$ şeklinde yazılabilir. Buradan $\det(A) = \det(E_k)\det(E_{k-1}) \dots \det(E_2)\det(E_1)$ dir.

$\det(AB) = \det(E_k)\det(E_{k-1}) \dots \det(E_2)\det(E_1)\det(B) = \det(A)\det(B)$ elde edilir. İspat tamamlanmış olur.

İspat. (ii) A 'nın satır eşelon formu B olsun. Başka bir deyişle $A = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 B$ şeklinde yazabiliriz. (i) de verilen teoremi kullanırsak

$$\det(A) = \det(E_k)\det(E_{k-1}) \dots \det(E_2)\det(E_1)\det(B)$$

olur. B matrisi üst üçgensel matristir dolayısıyla B^T alt üçgensel matristir. Ayrıca B^T ve B nin köşegenlerindeki elemanlar eşittir bu bize determinantlarının da aynı olduğunu gösterir. Aynı zamanda $A^T = B^T E_1^T E_2^T \dots E_{k-1}^T E_k^T$ eşitliğini elde ederiz. Üstte verilen teoremi tekrar kullanırsak $\det(A^T) = \det(B^T) \det(E_1^T) \det(E_2^T) \dots \det(E_{k-1}^T) \det(E_k^T)$ buluruz.

$\det(A^T) = \det(A)$ ispatı tamamlanmış olur.

Örnek 2.2.3. $A = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ olsun. $AB = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 20 \\ 14 & 13 \end{bmatrix}$

$\det(AB) = 25.13 - 14.20 = 45$, $\det(A) = 9$ ve $\det(B) = 5$ dir.

$\det(A)\det(B) = \det(AB) = 45$ olduğundan Teorem 2.2.4 (ii) yi doğrulamış oluruz.

Teorem 2.2.5. [2] Bir A matrisinin tersinin olması için gerek ve yeter koşul $\det(A) \neq 0$ olmasıdır. $\det(A) \neq 0$ ise $A^{-1} = [a_{ij}]^{-1}$ ve $a_{ij}^{-1} = \det(A)^{-1}A^{ji}$ dir. Bu teorem bize şunu söyler: bir matrisin tersini bulmak için önce kofaktör matrisinin transpozu alınır (buna matrisin *adjointi* denir), bulunan matris determinanta bölünür. Kısaca bir matrisin tersi

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$$

formülü ile bulunur.

Örnek 2.2.4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin tersini bulalım. Öncelikle matrisin

determinantını hesaplırsak 12 buluruz. A 'nın kofaktör matrisi $\begin{bmatrix} -2 & -2 & 6 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & 8 & -6 \end{bmatrix}$ dir.

$$A^{-1} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} -2 & -2 & 6 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & 8 & -6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{-1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{-1}{6} & \frac{-1}{6} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

Teorem 2.2.6. [2] A , $n \times n$ matris olsun. aşağıdaki ifadeler denktir.

- (i) A birebirdir.
- (ii) A örtendir.
- (iii) $\det(A) \neq 0$

Tanım 2.2.3. [3] A matrisinin tersi yoksa ($\det(A) = 0$) *singüler matris*, A matrisinin tersi varsa ($\det(A) \neq 0$) *singüler olmayan matris* denir.

Teorem 2.2.7. [3] A , $n \times n$ tersinir bir matris olsun ve \mathbb{R}^n deki her bir b için $Ax = b$ denklemi $x = A^{-1}b$ şeklinde özel bir çözüme sahiptir.

Teorem 2.2.8. [3] A tersinir matris ise A^{-1} tersinirdir ve $(A^{-1})^{-1} = A$ dır.

(i) A ve B $n \times n$ terslenebilir iki matris olsun. AB 'nin tersi $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ dir.

(ii) A tersinir bir matris olsun. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ dir.

Teorem 2.2.9. Bir matrisin tersinin olabilmesi için gerek ve yeter şart $\det(A) \neq 0$ olmasıdır.

İspat. Herhangi bir kare A matrisinin determinantının sıfır olması için gerek ve yeter şart A 'nın indirgenmiş satır eşelon formu olan B matrisinin determinantının sıfır olmasıdır. Şimdi A tersinir ise B birim matristir ve determinantı 1 dir. Yani başka bir deyişle A tersinir ise determinantı sıfırdan farklıdır. Aksi takdirde B 'nin tamamı sıfır olan satırı vardır, dolayısıyla determinantı sıfırdır. Böylece A 'nın determinantı sıfırdır.

Tanım 2.2.4. [4] a ve b , \mathbb{R}^n iç çarpım uzayında iki vektör olsun. $\langle a, b \rangle = 0$ ise a ve b ortogondur. Ortogonal iki vektör aynı zamanda birbirine diktir. Sıfır vektörü her vektörle ortogondur. $a, b \in \mathbb{R}^2$ vektörlerinin ortogonal olması için gerek ve yeter şart $a = (a_1, a_2)$ ve $b = (b_1, b_2)$ için $a_1b_1 + a_2b_2 = 0$ olmasıdır. \mathbb{R}^n de $\{u_1, \dots, u_r\}$ vektör kümesinin ortogonal küme olması için kümedeki her bir ayrık vektör çiftinin ortogonal olması gerekir. Yani $i \neq j$ için $u_i u_j = 0$ dır.

2.3. Özdeğerler ve Özvektörler

A , $n \times n$ matris ve $x \in \mathbb{C}^n$ sıfırdan farklı vektör ve bazı λ skalerleri için $Ax = \lambda x$ olsun. x , A matrisinin özvektörü, λ özdeğeri olarak adlandırılır. $n \times n$ boyutundaki A matrisinin bütün özdeğerlerinin kümesi $\sigma(A)$ ile gösterilir ve A 'nın spektrumu olarak adlandırılır.

x vektörü $Ax = \lambda x$ denklemini sağlasın. Bazı $x \neq 0$ için

$$(\lambda I - A)x = 0$$

olsun. Dolayısıyla $A - \lambda I$ matrisinin tersi olamaz. Teorem 2.2.9 dan

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

dır. Başka bir deyişle λ karakteristik polinomun bir sıfırı(kökü) olmak zorundadır.

Teorem 2.3.1. [5] A , $n \times n$ tipinde kare matris olsun. λ 'nın A 'nın bir özdeğeri olması için gerek ve yeter şart $\det(\lambda I - A) = 0$ denklemini sağlamasıdır. Bu denklem A 'nın *karakteristik polinomu* olarak adlandırılır.

Örnek 2.3.1. $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$ matrisinin karakteristik polinomunu ve özdeğerlerini bulalım. $\det(\lambda I - A) = 0$ denkleminde $\begin{vmatrix} \lambda - 3 & 0 \\ -8 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0$ dir. $(\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$ elde edilir. Özdeğerler $\lambda = 3$ ve $\lambda = -1$ bulunur.

Teorem 2.3.2. [5] A , $n \times n$ tipinde üçgen matris (alt üçgen, üst üçgen ya da köşegen matris) olsun. A 'nın özdeğerleri köşegen üzerindeki elemanlardır.

Örnek 2.3.2. $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 5 & -8 & \frac{-1}{4} \end{bmatrix}$ matrisinin özdeğerleri $\lambda_1 = \frac{1}{2}, \lambda_2 = \frac{2}{3}, \lambda_3 = \frac{-1}{4}$ dir.

Örnek 2.3.3. $A = \begin{bmatrix} 5 & -10 & -5 \\ 2 & 14 & 2 \\ -4 & -8 & 6 \end{bmatrix}$ matrisinin özdeğer ve özvektörlerini bulalım.

$$\det(\lambda I - A) = \det \left(\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & -10 & -5 \\ 2 & 14 & 2 \\ -4 & -8 & 6 \end{bmatrix} \right) = 0 \text{ dir. Buradan}$$

$(\lambda - 5)(\lambda^2 - 20\lambda + 100) = 0$ bulunur. Özdeğerleri 5, 10, 10 dur. 10'u iki defa yazdık. Çünkü çift katlı köktür. $\lambda = 5$ için özvektör bulalım. $(\lambda I - A)x = 0$ kullanarak

$$\left(5 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & -10 & -5 \\ 2 & 14 & 2 \\ -4 & -8 & 6 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ yazarız.}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 10 & 5 \\ -2 & -9 & -2 \\ 4 & 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ elde edilir. Eklemeli matrisi kuralım. Satır indirgeme}$$

$$\text{işlemleri uygulayacağız. } \begin{bmatrix} 0 & 10 & 5 & 0 \\ -2 & -9 & -2 & 0 \\ 4 & 8 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-5}{4} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ en son elde edilen}$$

$$\text{matris, satır eşelon formudur. } \begin{bmatrix} \frac{-5z}{4} \\ z \\ \frac{z}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} \frac{-5}{4} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \text{ özvektör formudur. } z \in \mathbb{R} \text{ dir. Burada}$$

şuna dikkat edilmesi gerekir. $z = 0$ olamaz. Çünkü özvektör sıfıra eşit olmaz.

$\lambda = 10$ için özvektör bulalım.

$$\left(10 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & -10 & -5 \\ 2 & 14 & 2 \\ -4 & -8 & 6 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 10 & 5 \\ -2 & -4 & -2 \\ 4 & 8 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

Eklemeli matrisi kuralım.

$$\begin{bmatrix} 5 & 10 & 5 & 0 \\ -2 & -4 & -2 & 0 \\ 4 & 8 & 4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ satır indirgenmiş formdur. Özvektörler}$$

$$\begin{bmatrix} -2y - z \\ y \\ z \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

Örnek 2.3.4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ matrisinin özdeğer ve özvektörlerini bulalım.

$$\det \left(\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \right) = 0$$

denklemini çözelim. $(\lambda - 5)(\lambda^2 - 4\lambda + 5) = 0$ buluruz. Özdeğerler

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2 + i, \lambda_3 = 2 - i$$

bulunur.

$\lambda = 2 + i$ için bulalım.

$$\left((2 + i) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

denklemini çözmemiz gerekiyor. Eklemeli matrisi yazalım. $\begin{bmatrix} 1 + i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 & 0 \\ 0 & -1 & i & 0 \end{bmatrix}$ olarak

yazarız. Birinci sütunu $1 + i$ ye bölelim. İkinci satırı $-i$ ile çarpıp üçüncü satıra

ekleyelim. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi elde edilir. Özvektörler $z \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{bmatrix}$ formunda olur.

$\lambda = 2 - i$ için özvektör $z \begin{bmatrix} 0 \\ -i \\ 1 \end{bmatrix}$ formunda bulunur.

Teorem 2.3.3. [5] $A, n \times n$ tipindeki matris için aşağıdaki durumlar denktir.

- (i) λ, A 'nın bir özdeğeridir.
- (ii) $(\lambda I - A)x = 0$ denkleminin aşık olmayan çözümleri vardır.
- (iii) $Ax = \lambda x$ olacak şekilde sıfırdan farklı x vektörü vardır.
- (iv) $\lambda, \det(\lambda I - A) = 0$ karakteristik polinomunun bir köküdür.

Tanım 2.3.1. [6] Bir matrisin özdeğerleri ayık olmayabilir. Karakteristik polinomun kökü olan bir özdeğerin tekrar sayısına özdeğerin *cebirsal katlılığı* denir. Karakteristik polinomu

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \dots (\lambda_n - \lambda)$$

şeklinde çarpanlarına ayırabiliriz.

A matrisinin λ özdeğerinin *geometrik katlılığı* $A - \lambda I$ nin boyutu olarak tanımlanır. Bir özdeğerin geometrik katlılığı cebirsal katlılığından fazla değildir.

Örnek 2.3.5.

$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix}$ matrisini alalım.

$$|A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} -3 - \lambda & 1 & -1 \\ -7 & 5 - \lambda & -1 \\ -6 & 6 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = -(2 + \lambda)^2(\lambda - 4)$$

bulunur. Buradan özdeğerler $\lambda = \{-2, -2, 4\}$ tür. -2 nin cebirsal katlılığı 2 dir. 4 ün cebirsal katlılığı 1 dir. $\lambda = -2$ ye karşılık gelen özvektörü bulalım.

$$\begin{aligned} A + 2I_3 &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -7 & 7 & -1 \\ -6 & 6 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -7 & 7 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} R_3 \rightarrow \frac{1}{-6} R_3 \\ &\sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} R_2 \rightarrow R_2 + 7R_3 \end{aligned}$$

$$\sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} R_1 \rightarrow R_1 - R_2$$

$$\sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} R_3 \rightarrow R_3 + R_1$$

Açıkça görülür ki sadece bir tane bağımsız çözüm vardır ve $\lambda = -2$ nin geometrik

katlılığı 1 dir. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ özvektörü $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ile bulunur. Buradan

$x + y - z = 0$ ve $z = 0$ denklemi elde edilir. Bu iki denklem çözülürse $y = -x$ ve $z =$

0 dir. x bağımsızdır. $x = 1$ alınırsa özvektör $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ olur.

Teorem 2.3.4. [6] $m \geq n$ olmak üzere sırasıyla, $m \times n$ ve $n \times m$ tipinde A ve B matrisleri için AB ve BA matrislerinin özdeğerleri aynıdır.

Teorem 2.3.5. [6] A matrisinin özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ olsun.

$\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n$ ve $\text{iz}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$ ile bulunur.

Örnek 2.3.6.

$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ matrisinin karakteristik polinomu $\lambda^2 - 3\lambda - 10 = (\lambda - 5)(\lambda + 2) = 0$

ise özdeğerleri $\lambda_1 = 5$ ve $\lambda_2 = -2$ dir. $\text{iz}(A) = 4 - 1 = 3 = \lambda_1 + \lambda_2 = 5 - 2 = 3$

$$\det(A) = 4(-1) - 2 \cdot 3 = -10$$

$$\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 = 5(-2) = -10 \text{ dur.}$$

Teorem 2.3.6. [6] Simetrik bir matrisin özdeğerleri reeldir. A simetrik bir matris ise P

ortogonal matrisi vardır öyle ki $PAP^T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$ dir. Bu matrisin rankı sıfırdan

farklı özdeğerlerin sayısına eşittir.

Tanım 2.3.2. [6] $n \times n$ tipindeki A matrisinin *pozitif tanımlı* olması için matrisin simetrik olması ve sıfırdan farklı x vektörü için $x^T A x > 0$ eşitsizliğini sağlaması gerekir. Birim matrisin pozitif tanımlı olduğu açıktır. Köşegen elemanları pozitif olan

köşegen matriste pozitif tanımlıdır. A , $n \times n$ simetrik matris olsun. Aşağıdaki durumlar pozitif tanımlılık için denktir:

- (i) A 'nın özdeğerleri pozitiftir.
- (ii) A 'nın tüm minörleri pozitiftir.
- (iii) Köşegenleri pozitif elemanlı bazı T alt üçgen matrisler için $A = TT^T$ dir.

Tanım 2.3.3. [6] Simetrik bir A matrisinin *pozitif yarı tanımlı* olması için herhangi x için $x^T Ax \geq 0$ olmasıdır. Yukarıdaki denk durumlar pozitif yarı tanımlılık için de benzer şekilde elde edilebilir. A pozitif yarı tanımlı matris ise özel bir pozitif yarı tanımlı B matrisi vardır öyle ki $B^2 = A$ dır. B matrisi A 'nın *karekökü* olarak adlandırılır ve $A^{\frac{1}{2}}$ ile gösterilir.

Tanım 2.3.4. [6] Aşağıda verilen sonuç Cauchy *interlacing* olarak bilinen teoremin graf teorideki kullanımınıdır. A , $n \times n$ simetrik matris ve B matrisi A 'nın $(n - 1) \times (n - 1)$ tipinde alt matrisi olsun. $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ve μ_1, \dots, μ_{n-1} sırasıyla A ve B matrisinin özdeğerleri olsun. $\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{n-1} \geq \mu_{n-1} \geq \lambda_n$ dir.

3. BÖLÜM

3.1. Graf Tanımı, Özellikleri ve Graf Türleri

Bu bölümde graf teorideki temel tanımlar ile graftaki noktaların ve kenarların yardımı ile elde edilen bazı matrislerin özellikleri verilecektir.

Tanım 3.1.1. [7] $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ noktalar kümesini ve $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ kenarlar kümesini göstermek üzere bir G grafi, $G = (V, E)$ sıralı ikilisi şeklinde tanımlanır.

Burada E kümesindeki bir kenar, V kümesindeki noktaların bir sıralı ikilisidir. $|V| = n$ ve $|E| = m$ ise G ye n noktalı ve m kenarlı bir *graf* denir. Nokta sayısına kısaca G nin mertebesi de denir. Kenar sayısına da *genişlik* denir.

Tanım 3.1.2. [7] Her bir kenar iki noktayı birbirine bağlar. Bu noktalara *bitim noktaları* (*end vertices*) denir.

Tanım 3.1.3. [7] e kenarının bir bitim noktası v noktası ise v noktası e ye *bağlı* (*incident*) dir.

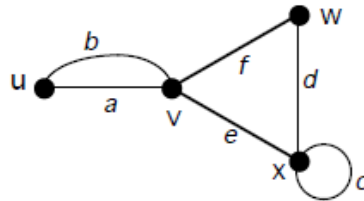
Tanım 3.1.4. [7] İki kenarın ortak bir bitim noktası varsa bu kenarlar *komşu* (*adjacent*) *kenarlardır*. Bir u noktası başka bir v noktasına bir kenar yardımıyla birbirine bağlı ise u ve v *komşudur*.

Tanım 3.1.5. [7] İki ya da daha fazla kenar aynı bitim noktalarına sahipse bu kenarlara *katlı kenar* (*multiple edge*) denir.

Tanım 3.1.6. [7] u ve v noktaları arasındaki kenar sayısına *kenar-katlılığı* (*edge-multiplicity*) denir.

Tanım 3.1.7. [7] Aynı nokta üzerinde başlayıp biten bir kenara ise *ilmek* (*loop*) denir.

Örnek 3.1.1.



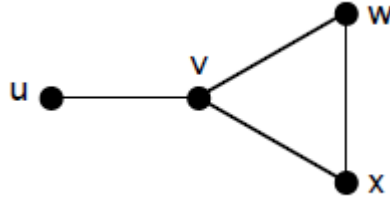
Şekil 3. 1. G grafi

Yukarıdaki şekilde $G = (V, E)$ grafi verilmiştir. $V = \{u, v, w, x\}$ nokta kümesi,

$E = \{a, b, c, d, e, f\}$ kenar kümesidir. $\{a, b\}$, bitim noktaları u ve v olan katlı kenarlar, c ise ilmektir.

Tanım 3.1.8. [7] Katlı kenar ve ilmek içermeyen bir grafa *basit (simple) graf* denir.

Örnek 3.1.2.

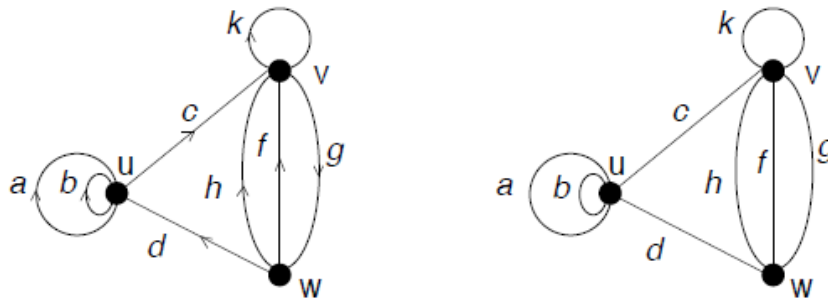


Şekil 3. 2. Basit bir graf

Şekil 3.2. de kenarlar $E = \{uv, vw, vx, wx\}$ tir.

Tanım 3.1.9. [7] $G = (V, E)$ grafının bütün kenarları yönlü ise *yönlü (directed) graf*, aksi bütün kenarlar yönsüz ise grafa *yönsüz (undirected) graf* denir. Yönlü grafa *digraf* ta denir.

Örnek 3.1.3.



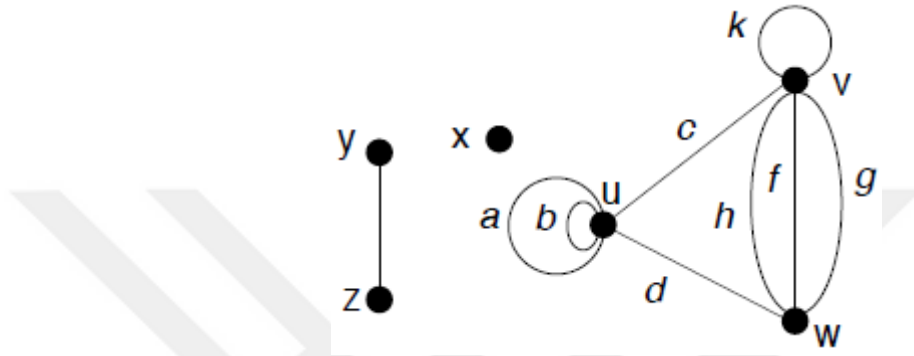
Şekil 3. 3. Yönlü ve Yönsüz graf örnekleri

Tanım 3.1.10. [7] $G = (V, E)$ bir graf ve $v \in V$ olsun. v noktasına komşu olan noktaların sayısına *derece (degree)* denir. $deg(v)$ yada $d(v)$ ile gösterilir. Bir grafın *derece dizisi* graftaki noktaların derecelerinin artmayan yada azalmayan şekilde sıralanmış halidir. Yönlü bir grafta herhangi v noktasına gelen kenar sayısına v 'nin *iç derecesi (indegree)*,

v noktasından çıkan kenar sayısına v 'nin *dış derecesi* (*outdegree*) denir. İlmeklerde bir kez iç derece, bir kez de dış derece alınır.

Tanım 3.1.11. [7] Bir noktanın derecesi sıfır ise bu noktaya *izole nokta* (*isolated vertex*) ve derecesi 1 ise bu noktaya da *sarkıt nokta* (*pendant vertex*) denir.

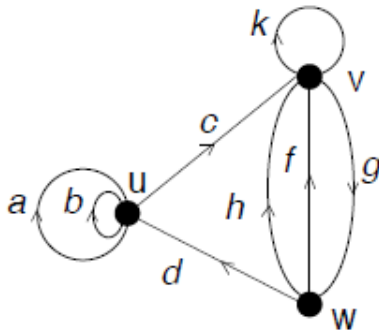
Örnek 3.1.4.



Şekil 3. 4. G grafi

u ve v noktalarının her ikisinin de derecesi 6 dır. Grafın derece dizisi $\{0, 1, 1, 4, 6, 6\}$ dır.

Örnek 3.1.5.



Noktalar	u	v	w
İç derece	3	4	1
Dış derece	3	2	3

Şekil 3. 5. Yönlü bir graf

Yönlü bir grafın iç derece ve dış derece değerleri Şekil 3.5. te verilmiştir.

Teorem 3.1.1. [8] $G = (V, E)$ yönsüz grafi verilsin ve $|E| = e$ olsun. Bu taktirde;

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2e$$

eşitliği sağlanır. Yani yönsüz bir grafta noktalarının dereceleri toplamı çifttir.

İspat: Bir noktanın derecesi o noktaya bağlı kenarların sayısıdır. Derecelerin toplamı bir noktaya bağlı kenarlar için iki kez sayılır. Bundan dolayı dereceler toplamı çifttir.

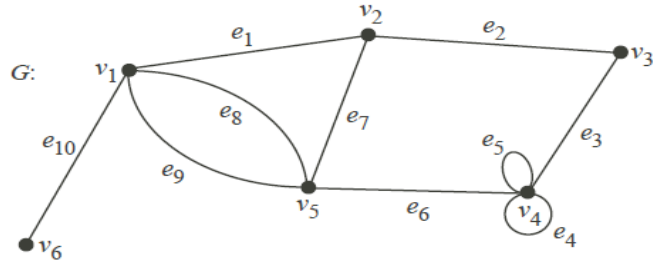
Sonuç 3.1.1. Yönsüz bir grafta tek dereceli noktaların sayısı çifttir.

Sonuç 3.1.2. Yönlü bir grafta iç derecelerin toplamı veya dış derecelerin toplamının her ikisi de grafin kenar sayısını verir.

Tanım 3.1.12. [7] Grafta bir yürüyüş (*walk*) alternatif nokta ve kenar dizisidir. Bazı

$j \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $W = \{v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_n, v_n\}$ dir. e_j kenarının bitim noktaları v_{j-1} ve v_j dir. v_0 noktasına *başlangıç noktası*, v_n noktasına *bitiş noktası* denir. Bir yürüyüşün *uzunluğu (length)* kenar sayısına eşittir. Bir yürüyüşte başlangıç ve bitiş noktası aynı ise buna *kapalı (closed walk) yürüyüş* denir. Kapalı olmayan bir yürüyüşe *açık yürüyüş (open walk)* denir.

Örnek 3.1.6.



Şekil 3. 6. G grafi

$v_2 e_7 v_5 e_8 v_1 e_8 v_5 e_6 v_4 e_5 v_4 e_5 v_4$ yürüşü açık yürüyüştür. Diğer taraftan

$v_4 e_5 v_4 e_3 v_3 e_2 v_2 e_7 v_5 e_6 v_4$ yürüyüşü kapalı bir yürüyüştür.

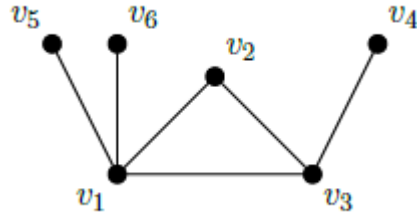
Tanım 3.1.13. [9] $G = (V, E)$ grafi verilsin. V deki noktalardan en küçük dereceye sahip noktaya grafin *minimum dereceli noktası* denir ve bu minimum derece $\delta(G)$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.14. [9] $G = (V, E)$ grafi verilsin. V deki noktalardan, en büyük dereceye sahip noktaya grafin *maksimum dereceli noktası* denir ve bu noktanın derecesi $\Delta(G)$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.15. [7] Nokta ve kenar tekrarı olmayan yürüyüşlere *yol (path)* denir.

Tanım 3.1.16. [7] En az 1 uzunluklu kapalı yola *döngü (cycle)* denir.

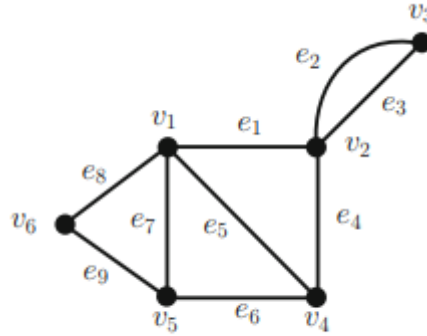
Örnek 3.1.7.



Şekil 3. 7. G grafi

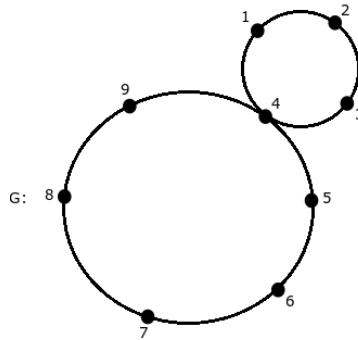
Yukarıdaki G grafında $v_5v_1v_2v_3v_1v_6$ ifadesi uzunluğu 5 olan açık bir yürüyüş belirtir.

Örnek 3.1.8.



Şekil 3. 8. Kapalı yürüyüş içeren bir G grafi

Yukarıdaki G grafında $v_1e_1v_2e_2v_3e_3v_2e_1v_1$ ifadesi kapalı bir yürüyüş belirtir.



Şekil 3. 9. Herhangi bir G grafi

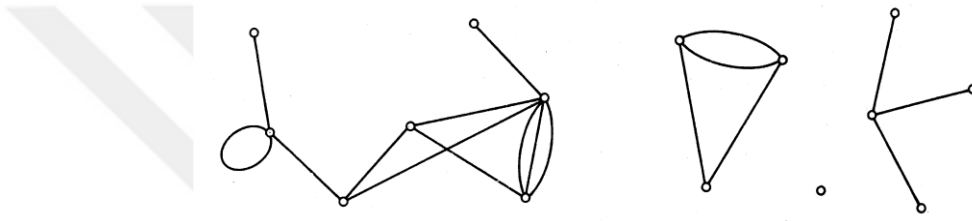
Yukarıdaki G grafında 1-2-3-4-5-6-7-8-9-4-1 ifadesi kapalı bir yürüyüştür fakat nokta tekrar ettiği için döngü belirtmez.

Tanım 3.1.17. [7] Bir grafta iki nokta arası *uzaklık (distance)* bu iki nokta arasındaki en kısa yol uzunluğudur.

Tanım 3.1.18. [7] İçerdiği her nokta çifti arasında en az bir yol bulunabilen graflara *bağlantılı (connected) graf* denir.

Tanım 3.1.19. [7] Bağlantılı olmayan graflara *bağlantısız (disconnected) graf* denir.

Örnek 3.1.9.



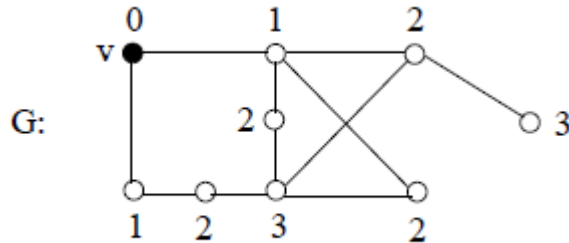
Şekil 3. 10. Bağlantılı ve Bağlantısız graf örnekleri

Tanım 3.1.20. [7] Bağlantılı bir grafta bir v noktasının *dış merkezliği (eccentricity)* v 'ye en uzaktaki noktaya uzaklığın sayısal değeridir.

Tanım 3.1.21. [7] Bağlantılı bir G grafının *yarıçapı (radius)* minimum dış merkezliğidir. $rad(G)$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.22. [7] Bağlantılı bir G grafının *çapı (diameter)* maksimum dış merkezliğidir. $diam(G)$ ile gösterilir.

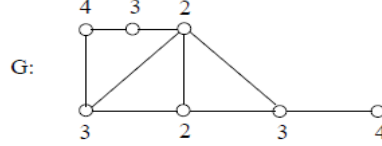
Örnek 3.1.10.



Şekil 3. 11. G grafi

Yukarıda verilen G grafında her bir noktanın v noktasına uzaklığı etiketlenmiştir. v 'den en uzaktaki noktanın v 'ye uzaklığı 3 tür.

Örnek 3.1.11.



Şekil 3.12. G grafi

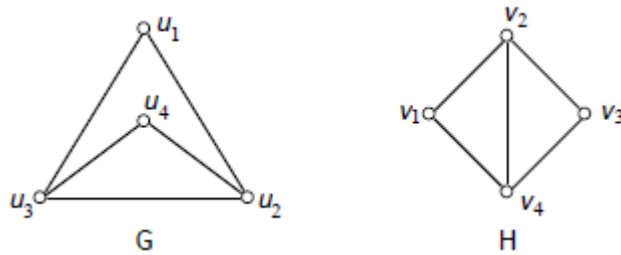
Şekil 3.13. te her bir noktanın dış merkezliği etiketlenmiştir. $rad(G) = 2$ ve $diam(G) = 4$ tür.

Tanım 3.1.23. [7] G ve H olarak alınan iki graf arasındaki *izomorfizma* şöyle tanımlanır:

G ve H grafları $\phi: V_G \rightarrow V_H$ dönüşümü altında $u, v \in V_G$ için noktasal olarak birebirdir. G 'de u noktasının v noktasına komşu olması için gerek ve yeter şart H grafında $\phi(u)$ nun $\phi(v)$ 'ye komşu olmasıdır. G ile H arasında izomorfizma varsa G ve H *izomorf* graflar olarak adlandırılır ve $G \cong H$ ile gösterilir.

İki grafın izomorf olabilmesi için bu grafların nokta sayıları, kenar sayıları ve derece dizileri aynı olmalıdır.

Örnek 3.1.12.



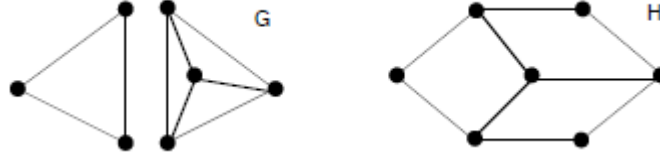
Şekil 3.13. G ve H grafları

G ve H grafları $u_1 \rightarrow v_1$ $u_2 \rightarrow v_2$ $u_3 \rightarrow v_3$ $u_4 \rightarrow v_4$ dönüşümü altında izomorftur.

$$\varphi: V(G) \rightarrow V(H)$$

$$\varphi(u_i) = v_i$$

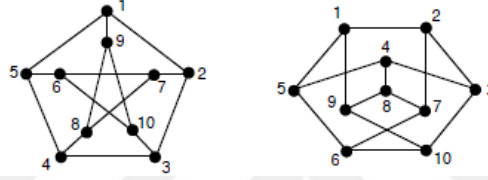
Örnek 3.1.13.



Şekil 3. 14. G ve H grafları

G ve H graflarının her ikisinin de derece dizisi $\{2, 2, 2, 3, 3, 3, 3\}$ şeklindedir. Bu bize izomorf olmayan grafların aynı derece dizilerine sahip olabileceğini gösterir.

Örnek 3.1.14.



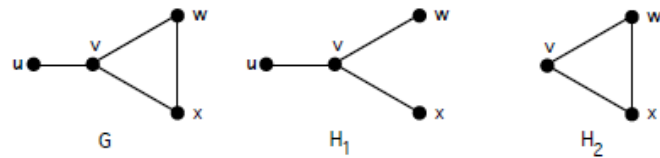
Şekil 3. 15. Farklı gibi görünen iki izomorf graf (Petersen Grafı)

Tanım 3.1.24. [7] H grafinin bir G grafinin *alt grafi* (*subgraph*) olabilmesi için $V(H) \subseteq V(G)$ ve $E(H) \subseteq E(G)$ olmalıdır.

Tanım 3.1.25. [10] G grafinin noktalarından bazılarının ve bu noktalara bağlı tüm kenarların silinmesiyle elde edilen alt grafa G 'nin *indirgenmiş* (*induced*) *alt grafi* denir.

Tanım 3.1.26. [7] G grafinin nokta sayısı aynı kalmak şartıyla sadece kenarlarından bazılarının silinmesiyle elde edilen H alt grafa G 'nin *üreteç* (*spanning*) *alt grafi* denir.

Örnek 3.1.15.

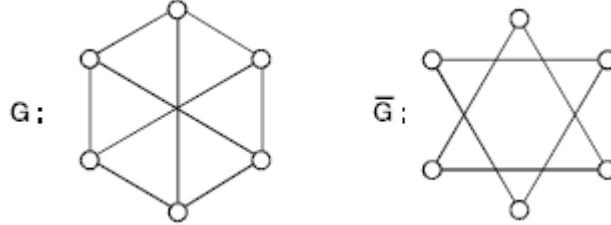


Şekil 3. 16. H_1 üreteç alt graf ve H_2 indirgenmiş alt graf

Tanım 3.1.27. [10] Bir grafin bağlantılı olan ve başka bir bağlantılı alt grafi tarafından kapsanmayan her bir alt grafa grafin bir *bileşeni* (*component*) denir.

Tanım 3.1.28. [8] Bir G grafının *tümleyeni* (*complement*) \bar{G} ile gösterilir öyle ki bu iki grafın nokta kümeleri aynıdır fakat \bar{G} 'de komşu olan noktalar G 'de komşu olmamalıdır.

Örnek 3.1.16.

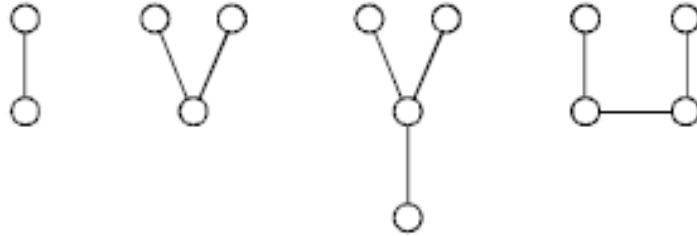


Şekil 3. 17. Bir graf ve onun tümleyeni

Tanım 3.1.29. [10] G grafının H grafını alt graf olarak içermesi mümkün değil ise H grafına G 'nin *yasaklanmış* (*forbidden*) *alt grafi* denir.

Tanım 3.1.30. [8] Döngü içermeyen bağlantılı bir grafa *ağaç* (*tree*) denir.

Örnek 3.1.17.



Şekil 3. 18 İki, üç ve dört noktalı bazı ağaçlar

Tanım 3.1.31. [8] Sadece izole noktalardan oluşan grafa *boş* (*null*) graf denir. n noktadan oluşan boş graf N_n ile gösterilir.

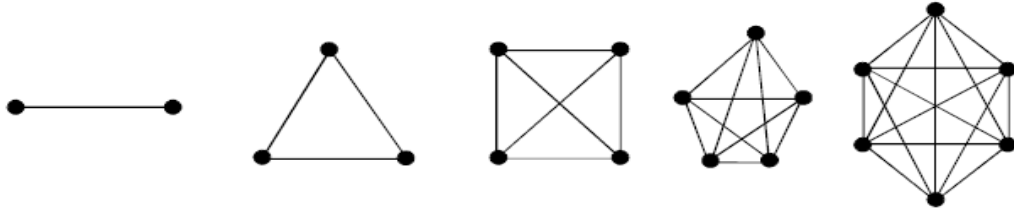
Örnek 3.1.18.



Şekil 3. 19 N_4 grafi

Tanım 3.1.32. [7] Tüm nokta çiftleri birbirine bir kenarla bağlı olan basit graflara *tam* (*complete*) *graf* denir. Tam graf genellikle K_n ile gösterilir. n noktalı tam bir graf $\frac{n(n-1)}{2}$ kenara sahiptir.

Örnek.3.1.19.



Şekil 3.20 $n = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ için K_n tam grafları

Tanım 3.1.33. [7] n noktaya sahip, $n - 1$ kenarlı bir yola *yol* (*path*) *graf* denir. n noktalı yol graf P_n ile gösterilir.

Tanım 3.1.34. [8] n noktadan ve n kenardan oluşan döngüye *cycle* (*döngü*) *graf* denir. Döngü graf C_n ile gösterilir.

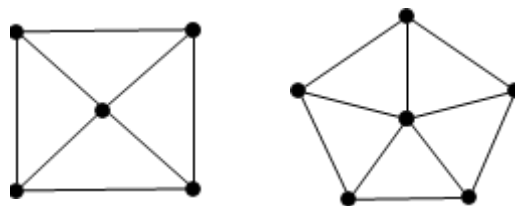
Örnek 3.1.20.



Şekil 3.21 4-noktalı bir yol graf ve döngü graf

Tanım 3.1.35. [8] $(n + 1)$ noktalı bir döngü grafın her bir noktasının, bir tek noktaya (bu nokta döngü grafa ait değildir) birer kenar ile bağlanmasıyla elde edilen grafa *tekerlek* (*wheel*) *graf* denir. $n + 1$ noktalı bir tekerlek graf $W_{1,n}$ ile gösterilir.

Örnek 3.1.21.



Şekil 3.22 $W_{1,4}$ ve $W_{1,5}$ grafları

Tanım 3.1.36. [8] Tüm noktaları eşit dereceye sahip olan graflara *düzgün (regular) graf* denir. *k-regular graf* tüm noktalarının derecesi k olan graftır.

Örnek 3.1.22.



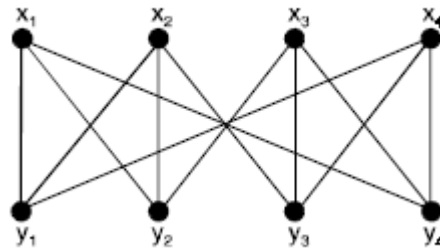
Şekil 3. 23 Sekiz noktalı 3-regüler bağlantılı ve basit graflar

Teorem 3.1.2. [7] Aşağıdaki durumlar n noktalı T grafi için denktir:

- (i) T bir ağaçtır.
- (ii) T bağlantılı ve $n - 1$ kenarlıdır.
- (iii) T 'de döngü yoktur ve $n - 1$ kenarlıdır.
- (iv) T 'nin herhangi iki noktası bir yolla birbirine bağlıdır.

Tanım 3.1.37. [8] Bir $G = (V, E)$ grafinin nokta kümesi $V = \{V_1, V_2\}$ olacak şekilde ayrık iki nokta kümesine parçalanır. Bu iki nokta kümesindeki noktaların her biri birbirine bağlanarak (aynı kümedeki noktalar birbirine bağlanmadan) elde edilen graflara *iki parçalı tam (complete bipartite) graf* denir.

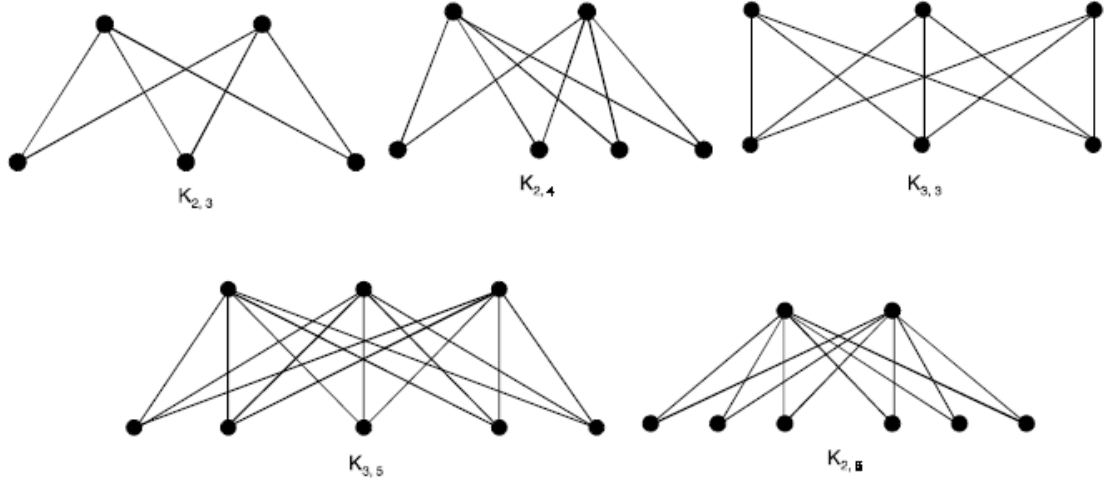
Örnek 3.1.23.



Şekil 3. 24 İki parçalı graf örneği

Tanım 3.1.38. [8] m ve n noktalı iki parçalı grafta bir nokta kümesindeki noktaların tümü diğer nokta kümesindeki noktaların hepsine komşu ise bu graflara *iki parçalı tam graf* denir. $K_{m,n}$ ile gösterilir.

Örnek 3.1.24.



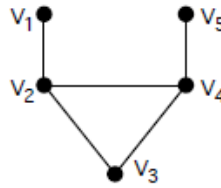
Şekil 3.25 Bazı iki parçalı tam graf örnekleri

Tanım 3.1.39. [7] Bir G grafının nokta kümesi k tane ayrık kümeye parçalanarak aynı nokta kümesi içerisindeki hariç diğer nokta çiftlerinin birbirine bağlanmasıyla oluşan grafa k -parçalı (k -partite) graf denir.

Tanım 3.1.40. [7] k parçalı bir grafa, aynı bağımsız küme içerisinde bulunmayan her nokta çifti birbirine kesinlikle komşu ise bu grafa k -parçalı tam (*complete k -partite*) graf denir. k parçalı nokta kümelerinin eleman sayısı n_1, n_2, \dots, n_k olmak üzere, k parçalı tam graf K_{n_1, n_2, \dots, n_k} ile gösterilir.

Tanım 3.1.41. [7] Bir grafın birbirine komşu olan tüm nokta çiftlerinin kümesine *klik* (*clique*) denir. Yani klik, grafın tam graf olan alt kümeleridir. Bir grafın en geniş klik kümesinin eleman sayısına grafın *klik sayısı* denir ve $\omega(G)$ ile gösterilir. Birbirine komşu olmayan nokta çiftlerinin kümesine *koklik* (*coclique*) denir. Bir grafın en geniş koklik sayısına grafın *koklik sayısı* denir ve $\alpha(G)$ ile gösterilir.

Örnek 3.1.25.



Şekil 3.26 G grafı

$\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ nokta kümesine sahip grafa $\{v_2, v_3, v_4\}$ nokta kümesi bir kliktir.

3.2. Graf Matrisleri

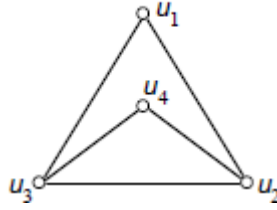
Bu bölümde graflar kullanılarak elde edilen komşuluk, derece, uzaklık, Laplasyan ve işaretli Laplasyan matrisleri ve özelliklerini inceleyeceğiz.

Tanım 3.2.1. [6] G grafinin nokta kümesi $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ ve kenar kümesi $E(G) = \{e_1, \dots, e_m\}$ olsun. G 'nin komşuluk matrisi $A(G)$ veya A_G ile gösterilen $n \times n$ kare matristir ve şu şekilde tanımlanır:

$$A_G(i, j) = \begin{cases} 1, & v_i \text{ ve } v_j \text{ komşu iken} \\ 0, & v_i \text{ ve } v_j \text{ komşu değilken} \end{cases}$$

olur.

Örnek 3.2.1.



Şekil 3. 27 G grafi

G 'nin komşuluk matrisini yazalım.

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.2.2. [10] $M(G)$ ya da kısaca M , G grafına ait bir graf matrisi ve I_n birim matris olmak üzere $\det(xI - M(G))$ polinomuna G nin $M(G)$ karakteristik polinomu denir ve $\text{char}(M(G))(x)$ ile gösterilir. Bu polinomun köklerinden $M(G)$ matrisinin özdeğerlerinden oluşan kümeye ise G nin $M(G)$ spektrumu denir ve $\text{spec}(M(G))$ ile gösterilir. Ya da matrisin adına göre komşuluk spektrumu, Laplasyan spektrumu v.b. de denir.

Tanım 3.2.3. [7] Bir grafin karakteristik polinomu grafin komşuluk matrisi A olmak üzere $\det(\lambda I - A)$ determinantına eşittir.

Tanım 3.2.4. [7] Bir grafin M matrisine göre özdeğerleri M 'nin karakteristik polinomunun kökleridir.

Tanım 3.2.5. [7] Bir grafin M –spektrumu M matrisine göre özdeğerlerinin kümesidir. n noktalı bir grafin n tane özdeğeri vardır.

Sonuç 3.2.1. [7] Aşağıda graf özdeğerleri ile ilgili sonuçlar verilmiştir.

- (i) Bir grafin özdeğerleri reeldir. Bunun nedeni komşuluk matrisinin simetrik ve reel olmasındandır.
- (ii) Her bir özdeğerin cebirsel ve geometrik katlılığı eşittir.
- (iii) Özdeğerlere karşılık gelen özvektörler ortonormaldir.
- (iv) Bir grafin komşuluk matrisinin izi özdeğerlerinin toplamıdır ve bu da sıfıra eşittir. Komşuluk matrisinin köşegen elemanları sıfırdır.

ρ grafin en büyük özdeğeri olmak üzere graftaki herhangi bir λ özdeğeri için $|\lambda| \leq \rho$ dir.

Örnek 3.2.2. Aşağıda bazı grafların spektrumları verilmiştir ve katlılıkları üstel olarak gösterilmiştir.

- (i) K_n tam grafi için özdeğerler $\{(n-1)^1, -1^{n-1}\}$ dir.
- (ii) $K_{m,n}$ iki parçalı tam grafi için özdeğerler $\{\sqrt{mn}^1, 0^{m+n-2}, -\sqrt{mn}^1\}$ dir.
- (iii) n noktalı P_n yol grafinin özdeğerleri $\left\{2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)^1, k = 1, \dots, n\right\}$ dir.
- (iv) n noktalı C_n döngü grafinin özdeğerleri $\left\{2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)^1, k = 1, \dots, n\right\}$ dir.
- (v) $n+1$ noktalı W_n tekerlek grafinin özdeğerleri

$$\left\{2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)^1, k = 1, \dots, n-1\right\} \cup \{1 \pm \sqrt{1+n}\}$$

dir.

Sonuç 3.2.2. [7] A herhangi bir grafin komşuluk matrisi olsun.

- (i) A^k matrisinin izi graftaki k uzunluklu kapalı yürüyüşlerin sayısına eşittir.
- (ii) A^2 matrisinin izi graftaki kenar sayısının iki katıdır.
- (iii) A^3 matrisinin izi graftaki üçgen sayısının altı katıdır.

(iv) $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ herhangi bir grafın karakteristik polinomu olsun. $a_n = 1$ ve $a_{n-1} = 0$ dir. Aynı zamanda $-a_{n-2}$ kenar sayısı ve $-a_{n-3}$ graftaki üçgenlerin sayısının iki katıdır. Bu sonuç $\det(xI - A)$ ' nin açılımından gelir.

Sonuç 3.2.3. [7] $\lambda(G)$, G matrisinin en küçük özdeğeri olsun.

- (i) H grafi G 'nin indirgenmiş alt grafi olsun. $\lambda(H) \leq \lambda(G)$ dir.
- (ii) Bağlantılı bir grafın en küçük özdeğeri daima pozitif değildir. En küçük özdeğerin sıfıra eşit olması için graf K_1 tam grafi olmalıdır.
- (iii) En küçük özdeğeri 0 ve -1 arasında olan graf yoktur.
- (iv) En küçük özdeğeri -1 ve $-\sqrt{2}$ arasında olan graf yoktur.
- (v) $K_{1,2}$ en küçük özdeğeri $-\sqrt{2}$ olan tek bağlantılı graftır.

En küçük özdeğeri $-\sqrt{2}$ ve -2 arasında olan sonsuz bağlantılı graf vardır.

Lemma 3.2.1. [6] G , komşuluk matrisi A olan iki parçalı graf olsun. λ özdeğeri A 'nın k katlı özdeğeri ise $-\lambda$ da A 'nın k katlı özdeğeridir. Yani iki parçalı grafların özdeğerleri simetriktir.

Teorem 3.2.1. [6] G , n noktalı ve m kenarlı, özdeğerleri $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ olan graf olsun. $\lambda_1 \leq \left(\frac{2m(n-1)}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$ dir.

Lemma 3.2.2. [6] G , n noktalı bir graf ve H de G 'nin p noktalı indirgenmiş alt grafi olsun. $\lambda_1(G) \geq \lambda_1(H)$ ve $\lambda_n(G) \leq \lambda_p(H)$ dir.

Lemma 3.2.3. [6] $\delta(G)$, G grafının en küçük özdeğeri ve $\Delta(G)$, G grafının en büyük özdeğeri olmak üzere $\delta(G) \leq \lambda_1(G) \leq \Delta(G)$ eşitsizliği geçerlidir.

Lemma 3.2.4. [6] B ve C , $n \times n$ tipinde simetrik matris olsun.

$$\lambda_1(B + C) \leq \lambda_1(B) + \lambda_1(C)$$

dir.

Tanım 3.2.6. [10] G ve G' grafları verilsin. $\text{spec}(M(G)) = \text{spec}(M(G'))$ ise G ve G' graflarına, M matrisine göre *ko-spektral graflar* denir.

Örnek 3.2.3.

Şekil 4.2. de özdeğerleri $\{2^1, 0^3, -2^1\}$ olan aynı spektruma sahip en küçük iki graf çifti aşağıdaki şekilde verilmiştir.



Şekil 3. 28 Kosppektral en küçük iki graf çifti

Örnek 3.2.4.



Şekil 3. 29 Kosppektral bağlantılı en küçük iki graf çifti

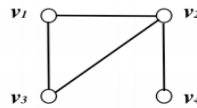
Şekil 3.29. bize aynı spektruma sahip bağlantılı en küçük graf çiftini gösteriyor. Her iki grafın da karakteristik polinomu $(x - 1)(x^3 - x^2 - 5x + 1)(x + 1)^2$ dir.

Tanım 3.2.7. [6] G , nokta kümesi $V(G) = \{1, 2, \dots, n\}$ olan ve kenar kümesi

$E(G) = \{e_1, \dots, e_m\}$ olan bir graf olsun. G 'nin Laplasyan matrisi $L(G)$ ile gösterilir ve bu $n \times n$ matris şu şekilde tanımlanır. $L(G)$ 'nin satır ve sütunları $V(G)$ tarafından etiketlenir. Eğer $i \neq j$ ise $L(G)$ 'nin (i, j) nci elemanı i ve j komşu değilse 0, i ve j komşu ise -1 dir. $L(G)$ 'nin (i, i) nci elemanı d_i dir ve bu i noktasının $i = 1, 2, \dots, n$ için derecesidir.

$D(G)$, noktaların derecelerinden oluşan köşegen matris olsun. $A(G)$, G 'nin komşuluk matrisini göstermek üzere $L(G) = D(G) - A(G)$ dir.

Örnek 3.2.5.



Şekil 3. 30 G grafi

$$G \text{ grafının Laplasyan matrisini } D(G) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L(G) = D(G) - A(G) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olacak şekilde elde ederiz.

Lemma 3.2.5. [6] G , nokta kümesi $V(G) = \{1, 2, \dots, n\}$ ve kenar kümesi $E(G) = \{e_1, \dots, e_m\}$ olan bir graf olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır.

- (i) $L(G)$ simetrik ve pozitif yarı tanımlı matristir.
- (ii) G 'nin bağlantılı bileşenlerinin sayısı k olmak üzere $L(G)$ 'nin rankı $n - k$ dır.
- (iii) $L(G)$ 'nin satır ve sütunlarının toplamı sıfırdır.
- (iv) $L(G)$ 'nin herhangi iki elemanının kofaktörü eşittir.

Lemma 3.2.6. [11] G , k -regüler bir graf olsun. $A(G)$ komşuluk matrisi $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ özdeğerlerine sahipse $L(G)$ 'nin Laplasyanın özdeğerleri $k - \lambda_1, k - \lambda_2, \dots, k - \lambda_n$ olur.

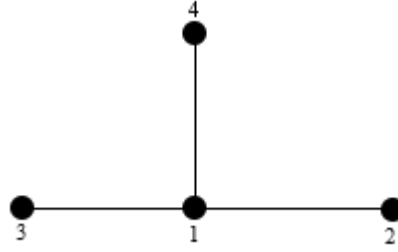
İspat. Eğer G , k -regüler ise $L(G) = D(G) - A(G) = kI - A(G)$ dır. Böylelikle A 'nın λ özdeğerli her öz vektörü $L(G)$ 'nin $k - \lambda$ özdeğerli bir özvektördür. Bu şunu gösterir: İki regüler graf ko-spektral ise bunlar aynı zamanda aynı Laplasyan spektrumuna sahip demektir.

Tanım 3.2.8. [10] n noktalı bir $G = (V, E)$ grafının *işaretsiz Laplasyan matrisi* aşağıdaki gibi tanımlanan ve $Q(G)$ ile gösterilen $n \times n$ tipindeki matristir.

$$Q(G) = [c_{ij}] \text{ öyle ki } c_{ij} = \begin{cases} d(i) & \text{eğer } i = j \text{ ise} \\ 1 & \text{eğer } i \sim j \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } i \not\sim j \text{ ise} \end{cases}$$

Buradan görüleceği üzere $Q(G) = D(G) + A(G)$ olur.

Örnek 3.2.6.



Şekil 3. 31 Bir grafın işaretli Laplasyan matrisi

Yukarıda verilen grafın işaretli Laplasyan matrisi

$$Q(G) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur.

Sonuç 3.2.4. [10] n noktalı bir G grafının Laplasyan matrisi $L(G) = [b_{ij}]$ ve işaretli Laplasyan matrisi $Q(G) = [c_{ij}]$ nin satır ve sütunları toplamı için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

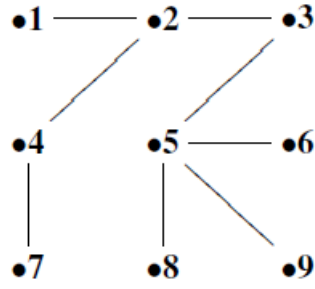
$$\sum_{j=1}^n b_{ij} = \sum_{i=1}^n b_{ij} = 0, \sum_{j=1}^n c_{ij} = 2d(i), \sum_{i=1}^n c_{ij} = 2d(j)$$

Lemma 3.2.7. [10] G , n noktalı ve m kenarlı bir graf, $L(G)$ de G 'nin çizgi grafi olsun. O zaman $L(G)$, çizgi grafının komşuluk matrisinin karakteristik polinomu ve $Q(G)$ işaretli Laplasyan matrisinin karakteristik polinomu aşağıdaki eşitliği sağlar.

$$\text{char}(A(L(G)))(x) = (x + 2)^{m-n} \text{char}(Q(G))(x + 2)$$

Tanım 3.2.9. [6] G grafının nokta kümesi $V(G) = \{1, \dots, n\}$ olsun. G 'nin herhangi i ve j noktalarının arasındaki uzaklığı $d(i, j)$ ile gösterirsek $d(i, j)$, i den j ye en kısa yolun uzunluğudur. G 'nin uzaklık matrisi $DI(G)$ ile gösterilirse bu matris, satırları ve sütunları G 'nin noktalarıyla etiketlenmiş $n \times n$ tipinde bir matristir. $i \neq j$ için G 'nin (i, j) . elemanı d_{ij} , $d(i, j)$ 'ye eşit bir kümedir. $i = \{1, \dots, n\}$ için $d_{ii} = 0$ dır. $DI(G)$, köşegen üzerindeki elemanları 0 olan simetrik bir matristir.

Örnek 3.2.7



Şekil 3. 32 G grafi

Yukarıda verilen G matrisinin uzaklık matrisi aşağıda verildiği gibidir.

$$DI(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 3 & 4 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 3 & 4 & 1 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 4 & 1 & 0 & 5 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 1 & 4 & 5 & 0 & 5 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 4 & 1 & 2 & 5 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 4 & 1 & 2 & 5 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

4. BÖLÜM

UÇURTMA GRAFIN SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde ilk olarak uçurtma grafin komşuluk matrisine dair özellikleri verilecektir. Daha sonra ise uçurtma grafin Laplasyan matrisine dair özellikleri, işaretli Laplasyan matrisine dair özellikleri ve son olarak uzaklık matrisine dair özellikleri sırasıyla verilecektir.

p noktalı tam grafin, $n - p$ noktalı bir yol grafin derecesi bir olan noktasına yeni bir kenar yardımıyla bağlanması ile elde edilen grafa *uçurtma graf* denir ve $Kite_{n,n-p}$ ile gösterilir. Eğer $n - p = 1$ ise $Kite_{n,1}$ grafına *kısa uçurtma graf* denir. $n - p > 1$ ise $Kite_{n,n-p}$ grafına *uzun uçurtma graf* denir.

4.1. Uçurtma Grafların Komşuluk Matrisine Göre Spektral Özellikleri

Lemma 4.1.1. [12] x_1 , bir G grafinin sarkıt noktası ve x_2 noktası da x_1 'e komşu olan bir nokta olsun. G_1 , G grafindan x_1 noktası silinerek elde edilen indirgenmiş bir alt graf olsun. x_1 ve x_2 noktaları silinirse G_2 indirgenmiş alt grafi elde edilir. Buradan

$$P_{A(G)}(\lambda) = \lambda P_{A(G_1)}(\lambda) - P_{A(G_2)}(\lambda)$$

olur.

Lemma 4.1.2. [12] A ve B $n \times n$ tipinde herhangi iki matris olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

- (i) A ve B kospektraldir
- (ii) A ve B aynı karakteristik polinoma sahiptir.
- (iii) $i = 1, 2, \dots, n$ için $iz(A^i) = iz(B^i)$

Lemma 4.1.3. [12] Bir G grafinin komşuluk matrisi için aşağıda verilenler komşuluk spektrumundan elde edilebilir:

- (i) Noktalarının sayısı
- (ii) Kenarlarının sayısı
- (iii) Herhangi bir sabit uzunluktaki (*fixed length*) kapalı yürüyüşlerin sayısı

Teorem 4.1.1. [18] Bağlantılı bir G grafi $Kite_{p,q}$ uçurtma grafi ile aynı mertebeye, aynı klik sayısına ve aynı spektral yarıçapa sahip ise G grafi $Kite_{p,q}$ grafına izomorftur.

Bundan sonraki kısımda K_3 tam grafına izomorf olan bir G grafının alt graflarının sayısını $\tau(G)$ ile gösteyeceğiz.

Teorem 4.1.2. [12] $p \geq 3$ ve $q \geq 1$ tam sayıları için $Kite_{p,q}$ uçurtma grafının komşuluk matrisinin spektral yarıçapını $\rho(Kite_{p,q})$ ile gösterirsek

$$p - 1 + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} < \rho(Kite_{p,q}) < p - 1 + \frac{1}{4p} + \frac{1}{p(p-2)}$$

eşitsizliği elde edilir.

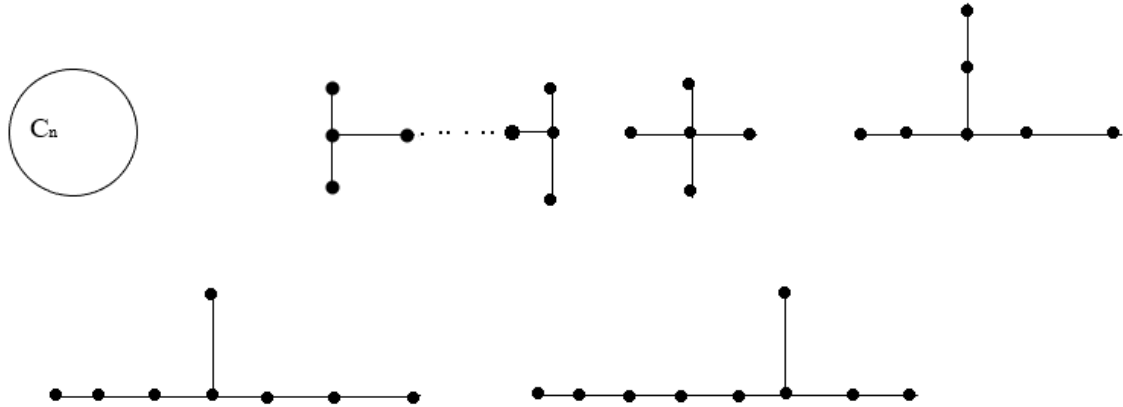
Tanım 4.1.1. [12] Bir G grafi başka bir F grafını indirgenmiş bir alt graf olarak içermiyorsa G ye F -serbest (F -free) denir.

Teorem 4.1.3. [12] Bir G grafının nokta sayısı n , kenar sayısı m ve spektral yarıçapı μ olsun. G grafi K_{r+1} - serbest ise

$$\mu \leq \sqrt{2m \left(\frac{r-1}{r} \right)}$$

dir.

Lemma 4.1.4. [11] En büyük komşuluk özdeğeri 2'den az olan bağlantılı bir graf kesin olarak Şekil 4.1 de gösterilen Smith grafların indirgenmiş alt grafidir.



Şekil 4. 1 Smith grafları

Kısa uçurtma grafitan bir dereceli noktayı silersen indirgenmiş alt graf, K_p tam grafi olacaktır. Bir dereceli noktayı ve onun komşu noktasını silersen $p - 1$ noktalı K_{p-1} tam grafini elde etmiş oluruz. Lemma 4.1.1 den

$$\begin{aligned}
P_{A(Kite_{p,1})}(\lambda) &= \lambda P_{A(K_p)}(\lambda) - P_{A(K_{p-1})}(\lambda) \\
&= \lambda(\lambda - p + 1)(\lambda + 1)^{p-1} - [(\lambda - p + 2)(\lambda + 1)^{p-2}] \\
&= (\lambda + 1)^{p-2}[(\lambda^2 - \lambda p + \lambda)(\lambda + 1) - \lambda + \lambda^2] \\
&= (\lambda + 1)^{p-2}[\lambda^3 - (p - 2)\lambda^2 - \lambda p + p - 2]
\end{aligned}$$

olur.

Benzer biçimde $Kite_{p,2}$ için indirgenmiş alt graflar sırasıyla $Kite_{p,1}$ ve $Kite_p$ dir. Lemma 4.1.1 den

$$\begin{aligned}
P_{A(Kite_{p,2})}(\lambda) &= \lambda P_{A(K_{p,1})}(\lambda) - P_{A(K_p)}(\lambda) \\
&= \lambda \left(\lambda P_{A(Kite_{p,1})}(\lambda) - P_{A(K_{p-1})}(\lambda) \right) - P_{A(K_p)}(\lambda) \\
&= (\lambda^2 - 1)P_{A(K_p)}(\lambda) - \lambda P_{A(K_{p-1})}(\lambda)
\end{aligned}$$

olur.

Bu polinomları kullanarak $Kite_{p,q}$ nun $n = p + q$ iken karakteristik polinomunu hesaplarız. Yine Lemma 4.1.1 den

$$P_{A(K_{p,1})}(\lambda) = \lambda P_{A(K_p)}(\lambda) - P_{A(K_{p-1})}(\lambda)$$

dir. Üstteki denklemin katsayıları $b_1 = -1, a_1 = \lambda$ dir. Aynı zamanda

$$P_{A(Kite_{p,2})}(\lambda) = (\lambda^2 - 1)P_{A(K_p)}(\lambda) - \lambda P_{A(K_{p-1})}(\lambda)$$

elde ederiz ve bu denklemin katsayıları $b_2 = -a_1 = -\lambda, a_2 = \lambda a_1 - 1 = \lambda^2 - 1$ dir. $Kite_{p,3}$ için

$$\begin{aligned}
P_{A(Kite_{p,3})}(\lambda) &= \lambda P_{A(Kite_{p,2})}(\lambda) - P_{A(Kite_{p,1})}(\lambda) \\
&= (\lambda(\lambda^2 - 1) - \lambda)P_{A(K_p)}(\lambda) - \left((\lambda^2 - 1)P_{A(K_{p-1})}(\lambda) \right)
\end{aligned}$$

ve bu denklemin katsayıları $b_3 = -a_2 = -(\lambda^2 - 1)$, $a_3 = \lambda a_2 - a_1 = \lambda(\lambda^2 - 1) - \lambda$ dır. Aşağıdaki adımlarda $n \geq 3$, $a_n = \lambda a_{n-1} - a_{n-2}$ dir. Bu fark denkleminde

$$a_n = \sum_{k=0}^n \left(\frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2} \right)^k \left(\frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2} \right)^{n-k}$$

eşitliğini elde ederiz. Şimdi $\lambda = 2 \cos \theta$ ve $u = e^{i\theta}$ alalım.

$$a_n = \sum_{k=0}^n u^{2k-n} = \frac{u^{-n}(1 - u^{2n+2})}{1 - u^2}$$

eşitliğini yazarız ve $n = p + q$ için herhangi $Kite_{p,q}$ uçurtma grafinin karakteristik polinomunu hesap edersek

$$\begin{aligned} P_{A(Kite_{p,q})}(u + u^{-1}) &= a_{n-p} P_{A(K_p)}(u + u^{-1}) - a_{n-p-1} P_{A(K_{p-1})}(u + u^{-1}) \\ &= \frac{u^{-n+p}(1 - u^{2n-2p+2})}{1 - u^2} [(u + u^{-1} - p + 1)(u + u^{-1} + 1)^{p-1}] \\ &\quad - \frac{u^{-n+p+1}(1 - u^{2n-2p+4})}{1 - u^2} (u + u^{-1} - p + 2)(u + u^{-1} + 1)^{p-2} \\ &= \frac{u^{-n+p}(1 + u - u^{-1})^{p-2}}{1 - u^2} [(2 - p)(1 + u^{-1} - u^{2n-2p+2} - u^{2n-2p+3}) \\ &\quad + (u^{-2} - u^{2n-2p+4})] \\ &= \frac{u^{-q}(1 + u - u^{-1})^{p-2}}{1 - u^2} [(2 - p)(1 + u^{-1} - u^{2q+2} - u^{2q+3}) + (u^{-2} - u^{2q+4})] \end{aligned}$$

denklemini elde ederiz.

Teorem 4.1.4. [12] Aynı komşuluk spektrumuna sahip izomorf olmayan uçurtma graf yoktur.

İspat. Nokta sayıları sırasıyla $p_1 + q_1$ ve $p_2 + q_2$ iki kospektral uçurtma graf olduğunu varsayalım. Bunlar kospektral ise nokta sayıları ve karakteristik polinomları aynı olmak zorundadır. Dolayısıyla $p_1 + q_1 = p_2 + q_2$ ve

$$P_{A(Kite_{p_1,q_1})}(u + u^{-1}) = P_{A(Kite_{p_2,q_2})}(u + u^{-1})$$

olur. Başka bir deyişle

$$\begin{aligned} & \frac{u^{-n+p_1}(1+u-u^{-1})^{p_1-2}}{1-u^2} [(2-p_1)(1+u^{-1}-u^{2n-2p_1+2}-u^{2n-2p_1+3}) \\ & \quad + (u^{-2}-u^{2n-2p_1+4})] \\ &= \frac{u^{-n+p_2}(1+u-u^{-1})^{p_2-2}}{1-u^2} [(2-p_2)(1+u^{-1}-u^{2n-2p_2+2}-u^{2n-2p_2+3}) \\ & \quad + (u^{-2}-u^{2n-2p_2+4})] \end{aligned}$$

Başka bir şekilde ifade edilirse

$$\begin{aligned} & u^{p_1}(1+u-u^{-1})^{p_1} [(2-p_1)(1+u^{-1}-u^{2n-2p_1+2}-u^{2n-2p_1+3}) \\ & \quad + (u^{-2}-u^{2n-2p_1+4})] \\ &= u^{p_2}(1+u-u^{-1})^{p_2} [(2-p_2)(1+u^{-1}-u^{2n-2p_2+2}-u^{2n-2p_2+3}) \\ & \quad + (u^{-2}-u^{2n-2p_2+4})] \end{aligned}$$

olur.

$p_1 > p_2$ olsun. $n - p_1 > n - p_2$ eşitsizliği doğrudur. Buradan

$$\begin{aligned} & u^{p_1-p_2}(1+u-u^{-1})^{p_1-p_2} \{ [(2-p_1)(1+u^{-1}-u^{2n-2p_1+2}-u^{2n-2p_1+3}) \\ & \quad + (u^{-2}-u^{2n-2p_1+4})] \\ & \quad - [(2-p_2)(1+u^{-1}-u^{2n-2p_2+2}-u^{2n-2p_2+3}) \\ & \quad + (u^{-2}-u^{2n-2p_2+4})] \} = 0 \end{aligned}$$

$u \neq 0$ ve $1+u-u^{-1} \neq 0$ gerçeğinden hareketle

$$\begin{aligned} f(u) &= \{ [(2-p_1)(1+u^{-1}-u^{2n-2p_1+2}-u^{2n-2p_1+3}) + (u^{-2}-u^{2n-2p_1+4})] \\ & \quad - [(2-p_2)(1+u^{-1}-u^{2n-2p_2+2}-u^{2n-2p_2+3}) \\ & \quad + (u^{-2}-u^{2n-2p_2+4})] \} = 0 \end{aligned}$$

Buradan $f(u) = 0$ dir. f in $(2n - 2p_2 + 5)$ nci türevi sıfıra eşittir. Böylece

$$\begin{aligned} & [(p_1 - 2)(2n - 2p_2 + 4)(u^{-2n+2p_2-6})] - [(p_2 - 2)(2n - 2p_2 + 4)(u^{-2n+2p_2-6})] \\ & = 0 \end{aligned}$$

Yani

$$[(p_1 - 2) - (p_2 - 2)](u^{-2n+2p_2-6}) = 0$$

Son eşitlikten $u \neq 0$ olduğu için $p_1 = p_2$ dir. Bu bizim $p_1 > p_2$ varsayımımızla çelişki oluşturur. $p_2 > p_1$ için de benzer çelişki elde ederiz. Sonuç olarak p_1, p_2 ye eşit olmak zorundadır. Dolayısıyla $q_1 = q_2$ dir ve bu graflar izomorftur.

Lemma 4.1.5. [12] $G, Kite_{p,q}$ grafına kospektral bir graf olsun. $\omega(G) \geq p - 2q + 1$ eşitsizliği elde edilir.

İspat. Lemma 4.1.3 ten $G, Kite_{p,q}$ uçurtma grafi ile izomorftur. G grafi $Kite_{p,q}$ nin nokta sayısı, kenar sayısı ve spektrumu aynıdır. G, n noktalı ve m kenarlıysa $n = p + q$ ve $m = \binom{p}{2} + q = \frac{p^2 - p + 2q}{2}$ dir. Aynı zamanda $\rho(G) = \rho(Kite_{p,q})$ dur. Teorem 4.1.3 ten $\mu > \sqrt{2m \left(\frac{r-1}{r}\right)}$ ise G nin $K_{r+1} - serbest$ olmadığını söyleriz. Bu şu anlama gelir G, K_{r+1} ' i indirgenmiş bir alt graf olarak içerir. Şimdi $r < p - 2q$ için $\sqrt{2m \left(\frac{r-1}{r}\right)} < \rho(G)$ olduğunu iddia ediyoruz. Teorem 4.1.2 den $p - 1 + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} < \rho(G)$ olduğu biliniyor. Buradan $r < p - 2q$ iken $\sqrt{2m \left(\frac{r-1}{r}\right)} < p - 1 + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3}$ olduğunu göstermeliyiz. Gerçekten

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt{2m \left(\frac{r-1}{r}\right)} \right)^2 - \left(p - 1 + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} \right)^2 = (p^2 - p + 2q)(r - 1) - r \left(p - 1 + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} \right)^2 \\ & = (p^2 - p + 2q)(r - 1) - \left(\frac{r(p^2 + p^3)}{p^5} \right) \left(2(p - 1) + \frac{(p^2 + p^3)}{p^5} \right) \\ & = (pr - p^2 + p + (2q - 1)r - 2q) - \left(\frac{r(p^2 + p^3)}{p^5} \right) \left(2(p - 1) + \frac{(p^2 + p^3)}{p^5} \right) \end{aligned}$$

Matematika programı yardımıyla $r < p - 2q$ için

$$(pr - p^2 + p + (2q - 1)r - 2q) - \left(\frac{r(p^2 + p^3)}{p^5} \right) \left(2(p - 1) + \frac{(p^2 + p^3)}{p^5} \right) < 0$$

olduğunu görebiliriz. Başka bir deyişle

$$\left(\sqrt{2m \left(\frac{r-1}{r}\right)} \right)^2 - \left(p - 1 + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} \right)^2 < 0$$

Buradan

$$\left(\sqrt{2m \left(\frac{r-1}{r} \right)} \right)^2 < \left(p - 1 + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} \right)^2$$

eşitsizliğini yazarız. $\sqrt{2m \left(\frac{r-1}{r} \right)} > 0$ ve $p - 1 + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} > 0$ dan

$\sqrt{2m \left(\frac{r-1}{r} \right)} < p - 1 + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} < \rho(G)$ yi buluruz. Yani iddiamızı ispatlamış olduk, böylelikle G , K_{r+1} 'i indirgenmiş alt graf olarak içerir öyle ki $r < p - 2q$ dir. Sonuç olarak $\omega(G) \geq p - 2q + 1$ dir.

Teorem 4.1.5. [12] $Kite_{p,2}$ uçurtma grafları her p için komşuluk spektrumuyla belirlenebilirdir.

İspat. $p = 1$ veya $p = 2$ ise $Kite_{p,2}$ grafları aslında P_3 yada P_4 yol graflarıdır. Aynı zamanda $p = 3$ ise $H_{5,3}$ lolipop grafini elde ederiz. Bilindiği gibi bu graflar DAS [8] dir. Dolayısıyla ispatımıza $p \geq 4$ için devam edeceğiz. $Kite_{p,2}$ nin komşuluk karakteristik polinomu aşağıdaki gibidir,

$$P_{A(Kite_{p,2})}(\lambda) = (\lambda + 1)^{p-2} [\lambda^4 + (2 - p)\lambda^3 - (p + 1)\lambda^2 + (2p - 4)\lambda + p - 1]$$

şeklindedir. $Kite_{p,2}$ nin komşuluk özdeğerlerini hesaplırsak aşağıdaki sonuçları elde ederiz;

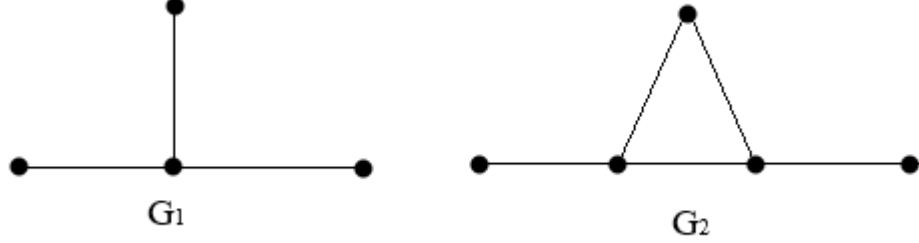
$$p - 1 < \lambda_1(A(Kite_{p,2})) < p, 0 < \lambda_2(A(Kite_{p,2})) < 2, \lambda_3(A(Kite_{p,2})) < 0, \lambda_4(A(Kite_{p,2})) = \dots = \lambda_{p+1}(A(Kite_{p,2})) = -1 \text{ ve } \lambda_{p-1}(A(Kite_{p,2})) < -1.$$

n noktalı ve m kenarlı bir G grafi için G nin $Kite_{p,2}$ ile kospektral olduğunu varsayalım. Lemma 4.1.3 ten $n = p + 2$, $m = \binom{p}{2} + 2 = \frac{p^2 - p + 4}{2}$ ve

$$\tau(G) = \tau(Kite_{p,2}) = \binom{p}{3} = \frac{p^3 - 3p^2 + 2p}{6} \text{ dir. Lemma 4.1.5 ten } \omega(G) \geq p - 2q + 1 \text{ dir.}$$

$q = 2$ iken $\omega(G) \geq p - 3 = n - 5$ olur. K_n tam grafinin DS olduğu biliniyor. Yani $\omega(G) \neq n$ dir. $\omega(G) = n - 1 = p + 1$ ise G , $p - 1$ en az bir klik içerir. Bunun anlamı şudur: G nin kenar sayısı $\binom{p+1}{2}$ den ya daha fazladır ya da eşittir. $\binom{p+1}{2} > \binom{p}{2} + 2 = m$ olduğundan bu bir çelişkidir. Böylece $\omega(G) \neq n - 1$ dir. Bu gerçeklerden hareketle

$p - 3 \leq \omega(G) \leq p$ eşitsizliğini buluruz. Interlacing lemmadan G , aşağıda verilen şekildeki gibi indirgenmiş alt graf içeremez çünkü $\lambda_3(G_1) = \lambda_3(G_2) = 0$ dır.



Şekil 4. 2 G 'nin içermeyeceği indirgenmiş alt graflar

G bağlantısız ise Lemma 4.1.4 ten G nin bileşenleri, bir tanesi hariç Smith graflarının indirgenmiş alt grafi olmak zorundadır. Bunun imkansız olduğu açıktır çünkü G_1 yasaklıdır (*forbidden*) ve herhangi yol graf G nin bir bileşeni olamaz. Dolayısıyla G bağlantılı olmak zorundadır. $\omega(G) = p$ ise Teorem 5.2.1 den $G \cong Kite_{p,2}$ dir. Biz $\omega(G) < p$ olarak devam edeceğiz. $\omega(G) \geq p - 3$ için G , en az $p - 3$ elemanlı en az bir klik içerir. Bu klik $K_{\omega(G)}$ ile gösterilsin. Burada $K_{\omega(G)}$ kliğinin dışında en fazla beş tane nokta olabilir. Bu beş noktayı sırasıyla 1, 2, 3, 4, 5 ile etiketleyelim ve bu beş noktanın oluşturduğu kümeye A diyelim. $|A| \leq 5$ yazabiliriz. Üstelik G de izole nokta yoksa ve G_1 ile G_2 , G nin indirgenmiş alt grafları değilse $\forall i, j \in A$ için $i \sim j$ alırız. $\omega(G) \geq p - 3$ için $p \geq 6$ olduğunu söyleyebiliriz.

$i \in A$ için x_i , i nin $K_{\omega(G)}$ daki komşu noktalarının sayısını gösterebiliriz. $p - 1 \geq \omega(G) \geq p - 3$ gerçeğinden her $i \in A$ için

$$x_i \leq \omega(G) - |A| + 1 \quad (1)$$

olduğunu söyleriz.

$x_{i \wedge j}$, $i, j \in A$ ve $i < j$ için i ve j nin $K_{\omega(G)}$ daki ortak olan komşu noktalarının sayısını gösterebiliriz. Benzer şekilde $i \sim j$ ise

$$x_{i \wedge j} \leq \omega(G) - |A| \quad (2)$$

dır. d , A ve $K_{\omega(G)}$ nun noktalarının arasındaki kenar sayılarını, α da A veya $K_{\omega(G)}$ tarafından kapsanmayan üç elemanlı kliklerin sayısını gösterebiliriz. O zaman

$$m = \binom{p}{2} + 2 = \binom{\omega(G)}{2} + \binom{|A|}{2} + d \quad (3)$$

dir.

Benzer şekilde

$$\tau(G) = \binom{p}{3} = \binom{\omega(G)}{3} + \binom{|A|}{3} + \alpha \quad (4)$$

yazılır. Diğer taraftan elimizde α ve d için

$$d = \sum_{i=1}^{|A|} x_i \quad (5)$$

ile

$$\alpha = \sum_{i=1}^{|A|} \binom{x_i}{2} + \sum_{i \sim j} x_{i \wedge j} \quad (6)$$

eşitlikleri vardır.

$\omega(G) = p - 3$ ise $|A| = 5$ ve $p \geq 8$ dir. Böylece

$$d = 3p - 14 \quad (7)$$

ve

$$\alpha = \binom{p}{3} - \binom{p-3}{3} - 10 = \frac{3p^2}{2} - \frac{15p}{2} \quad (8)$$

eşitliklerini buluruz. (1), (2), (5), (6), ve (7) den

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_{i=1}^5 \binom{x_i}{2} + \sum_{i \sim j} x_{i \wedge j} \leq 3 \binom{p-7}{2} + \binom{7}{2} + 2 \sum_{i=1}^5 x_i \\ &= 3 \binom{p-7}{2} + \binom{7}{2} + 6p - 28 = \frac{3p^2 - 33p}{2} + 77 \end{aligned}$$

denklemini elde ederiz. Açıktır ki $p = 8$ için bu sonuç çelişkidir. Aynı zamanda $p > 8$ için

$$\frac{3p^2 - 33p}{2} + 77 < \frac{3p^2 - 15p}{2} = \alpha$$

dır. Bu yine çelişkidir.

$\omega(G) = p - 2$ ise $|A| = 4$ ve $p \geq 7$ dir. Böylece

$$d = 2p - 7$$

ve

$$\alpha = \binom{p}{3} - \binom{p-2}{3} - 4 = p^2 - 4p$$

dir. Diğer taraftan

$$\alpha = \sum_{i=1}^4 \binom{x_i}{2} + \sum_{i \sim j} x_{i \wedge j} \leq 2 \binom{p-5}{2} + \binom{3}{2} + 2 \sum_{i=1}^4 x_i = p^2 - 7p + 19$$

dur.

$p \geq 7$ için

$$p^2 - 7p + 19 < p^2 - 4p = \alpha$$

olduğu açıktır. Bu da bir çelişkidir. Benzer biçimde

$\omega(G) = p - 1$ ise $|A| = 3$ ve $p \geq 6$ dir. Böylece

$$d = p - 2$$

bulunur ve

$$\alpha = \frac{p^2 - 3p}{2}$$

dir.

$$\alpha = \sum_{i=1}^3 \binom{x_i}{2} + \sum_{i \sim j} x_{i \wedge j} \leq \binom{p-3}{2} + p - 2 = \frac{p^2 - 5p}{2} + 4$$

dir. $p \geq 6$ için

$$\frac{p^2 - 5p}{2} + 4 < \frac{p^2 - 3p}{2} = \alpha$$

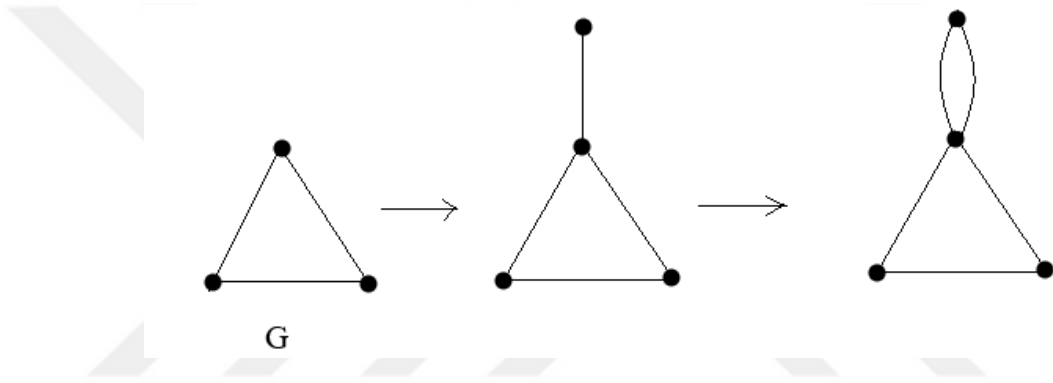
olduğu açıktır. Bu yine bir çelişkidir.

Tüm bu gerçeklerden hareketle varsayımımızın yanlış olduğu sonucuna varabiliriz yani $\omega(G) \neq p$ dir. Böylece $\omega(G) = p$ dir. Teorem 4.1.1 den $G \cong Kite_{p,2}$ dir.

Uçurtma Graf Komşuluk Spektrumuna Göre Belirlenebilir

Tanım 4.1.2. [10] G grafının herhangi bir noktasına bir sarkıt kenar kenar eklenmesi daha sonra bu sarkıt kenarın iki katlı kenara dönüştürülmesi işlemine G grafına *petal eklenmesi* denir. Eklenip iki katlı hale getirilen bu sarkıt kenara ise *petal* denir. Aşağıda bir G grafı ve petal eklenmiş hali gösterilmiştir.

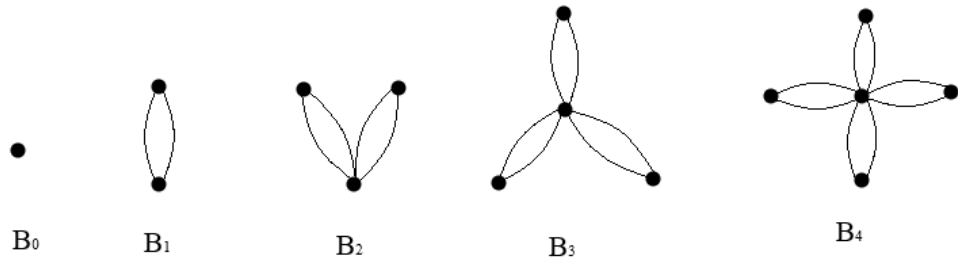
Örnek 4.1.1.



Şekil 4. 3 Bir grafa petal eklenmesi

Tanım 4.1.3. [10] $k \geq 0$ olmak üzere tek bir noktaya k adet petal eklenmesiyle oluşan grafa *çiçek (blossom)* denir ve B_k ile gösterilir. $k = 0$ iken B_0 aşık graf olur.

Örnek 4.1.2.



Şekil 4. 4 Çiçek Graf

Tanım 4.1.4. [10] Bir G grafının noktalarını $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ile etiketleyelim. $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için a_i bir doğal sayı olmak üzere G grafının v_i noktasına a_i adet petal eklenmesiyle oluşan graf $G(a_1, \dots, a_n)$ ile gösterilir ve G 'nin B -grafı ya da

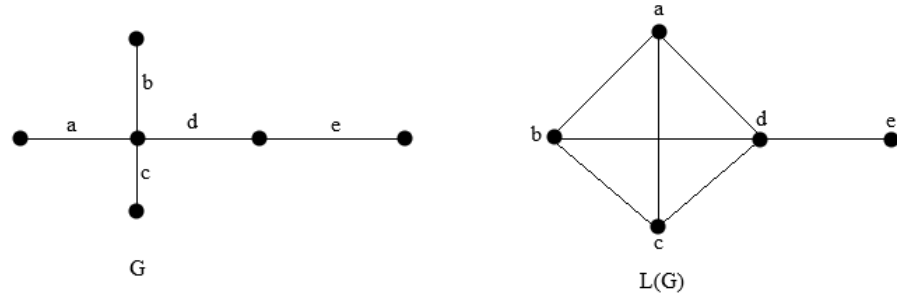
çiçeklenmiş grafi denir. Şekil 4.3 de elde edilen en son şekil G grafının çiçeklenmiş grafıdır ve $G(0,0,1)$ ile gösterilir.

Tanım 4.1.5. [10] $G = (V, E)$ grafının kenarlarını nokta kabul eden ve

“ $G = (V, E)$ grafında $\forall e_1, e_2 \in V$ için $e_1 \cap e_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow L(G) = (E, E')$ grafında $e_1 \sim e_2$ ” şartını sağlayan $L(G) = (E, E')$ grafına G grafının *çizgi grafi* denir. G grafına ise $L(G)$

grafının *kök grafi* denir. Yani bir çizgi grafın noktaları, kök grafın kenarlarını temsil etmektedir ve çizgi grafta herhangi iki noktanın birbirine komşu olması için gerek ve yeter koşul temsil ettikleri kenarların kök grafta birbirine değmesidir.

Örnek 4.1.3.

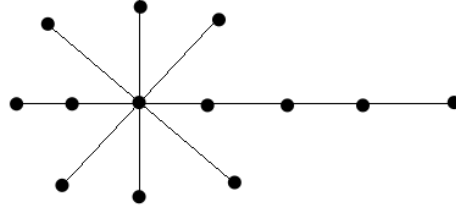


Şekil 4. 5 G grafi ve bu grafın çizgi grafi

Tanım 4.1.6. [10] $G = (V, E)$ grafının bir B –grafı $\hat{G} = G(a_1, a_2, \dots, a_n)$ olsun. Bu B –grafın çizgi grafına G 'nin *genelleştirilmiş çizgi grafi* denir ve $L(\hat{G})$ ya da $L(G; a_1, \dots, a_n)$ ile gösterilir.

Tanım 4.1.7. [10] En fazla bir noktasının derecesi 2'den büyük olan bir ağaca *yıldızsal ağaç (starlike tree)* denir. Maksimum derecesi Δ olan bir yıldızsal ağaç $T(l_1, l_2, \dots, l_\Delta)$ ile gösterilir. Öyle ki burada maksimum dereceye sahip nokta v ile gösterilirse $T(l_1, l_2, \dots, l_\Delta) - v = P_{l_1} \cup P_{l_2} \cup \dots \cup P_{l_\Delta}$ olur.

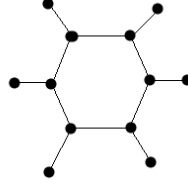
Örnek 4.1.4.



Şekil 4.6 $T(1,1,1,1,1,1,2,4)$ yıldızsal ağacı

Tanım 4.1.8. [10] C_p döngü grafının her bir noktasına birer adet sarkıt nokta eklenmesiyle elde edilen grafa *güneş graf* denir ve Sun_p ile gösterilir.

Örnek 4.1.5.



Şekil 4.7 Sun_6 graf

$l_1 = l_2 = \dots = l_{p-1} = 1$ ve $l_p = q + 1$ olmak üzere $Kite_p^q$ grafı aslında $T(l_1, l_2, \dots, l_p)$ yıldızsal ağacının çizgi grafıdır. Yıldızsal ağaçların çizgi grafları bazı çalışmalarda *güneşsel (sunlike) graf* olarak adlandırılmıştır. Dolayısıyla bir uçurtma grafı aynı zamanda bir güneşsel grafın özel bir hali olur. Bir P_q yol grafının her iki bitim noktasına birer tane $p -$ mertebeli K_p tam grafının eklenmesiyle oluşan grafa ise *çift uçurtma (double kite) graf* denir ve $DK(p, q)$ ile gösterilir.

Lemma 4.1.6. [16] n noktalı yol grafın komşuluk özdeğerleri $j = 1, \dots, n$ için $2\cos \frac{\pi j}{n+1}$ dir.

Lemma 4.1.7. [16] n noktalı ve m kenarlı G grafının çizgi grafı $L(G)$ olsun.

$$P_{A(L(G))}(x) = (x + 2)^{m-n} P_{Q(G)}(x + 2)$$

dir. Bir G grafı için G 'nin *altbölüm grafı (subdivision grafı) $S(G)$* ile gösterilir. Bu graf G grafının her bir kenarına yeni bir nokta eklenerek elde edilir.

Lemma 4.1.8. [16] n noktalı ve m kenarlı bir graf G ve bu grafın alt bölüm grafı $S(G)$ olsun. $Q(G)$, G 'nin Laplasyan matrisini göstermek üzere

$$P_{A(S(G))}(x) = (x)^{m-n} P_{Q(G)}(x^2)$$

dir.

Teorem 4.1.6. [16] Maksimum derecesi 4 olan her bir yıldızsal ağaç işaretli Laplasyan spektrumu ile belirlenebilir.

Lemma 4.1.9. [16] $\Delta \geq 5$ için yıldızsal ağaç $T(l_1, l_2, \dots, l_\Delta)$ işaretli Laplasyan spektrumu ile belirlenebilir.

Lemma 4.1.10. [16] En büyük komşuluk özdeğeri ikiden az olan bağlantılı bir graf, kesinlikle yukarıda gösterilen Smith grafların indirgenmiş düzgün alt graflarıdır.

İstisna graf (exceptional graf) genelleştirilmiş çizgi graf olmayan, en küçük komşuluk özdeğeri en az -2 olan bağlantılı bir graftır. Doob ve Cvetkovic bağlantılı grafların hepsinde en küçük komşuluk özdeğerinin -2 den büyük olduğunu karakterize etmiştir.

Lemma 4.1.11. [16] G , n noktalı bağlantılı bir graf olsun. $\lambda_n(G) > -2$ eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart aşağıdakilerden birinin sağlanmasıdır.

- (i) H , ağaç ya da tek döngülü graf (*odd unicyclic graph*) ise $G = L(H)$ dir. (Tek döngülü graf sadece bir tane döngü içeren bağlantılı graftır).
- (ii) H , ağaç ise $G = GL(H; 1, 0, \dots, 0)$ dir.
- (iii) G , 573 istisna graflardan biridir.

Tanım 4.1.9. [16] G , n noktalı bir graf olsun.

$$\prod_{i=1}^n (\lambda_i(G) + 2)$$

değerine G 'nin diskriminantı denir ve d_G ile gösterilir. G 'nin birden fazla bileşeni varsa G 'nin diskriminantı G 'nin tüm bileşenlerinin diskriminantlarının çarpımına eşittir. Komşuluk spektrumları aynı olan iki grafın diskriminantları da aynıdır.

Lemma 4.1.12. [16] G , en küçük komşuluk özdeğeri -2'den büyük olan bağlantılı bir graf olsun. Aşağıdaki durumlar sağlanır:

- (i) G , sekiz noktalı istisna graf ise $d_G = 1$ dir.
- (ii) G , yedi noktalı istisna graf ise $d_G = 2$ dir.

- (iii) G , altı noktalı istisna graf ise $d_G = 3$ tür.
- (iv) G , tek döngülü grafın çizgi grafi ise $d_G = 4$ tür.
- (v) \hat{H} 'nin bir ağaçtan tek bir petal eklenerek elde edilen B –graf olduğu yerde $d_G = 4$ tür.
- (vi) G , bir çizgi grafın ağacı ve n noktalı ise $d_G = n + 1$ dir.

Lemma 4.1.13. [16] G ve H aynı işaretli Laplasyan spektrumuna sahipse bunların çizgi grafları aynı komşuluk spektrumuna sahiptir. G ve H 'nin kenar ve nokta sayıları aynı ise tersi de doğrudur.

Teorem 4.1.7. [16] $\Delta \geq 12$ için $G = T(l_1, l_2, \dots, l_\Delta)$ olsun. $L(G)$, komşuluk spektrumu ile belirlenebilir.

Lemma 4.1.14. [16] x_1 , bir G grafının sarkıt noktası ve x_2 de x_1 'e komşu olan nokta olsun. G_1 , G grafından x_1 noktası silinerek elde edilen indirgenmiş alt graf olsun. x_1 ve x_2 silindiğinde G_2 indirgenmiş alt grafi elde edilmiş olsun.

$$P_{A(G)}(x) = xP_{A(G_1)}(x) - P_{A(G_2)}(x)$$

dir.

Lemma 4.1.15. [16] $H_{n,p}$, P_{n-p} yolunun sarkıt noktasına bir C_p döngüsü iliştilerle elde edilen graf olsun. $H_{n,p}$ grafında p tek ise komşuluk spektrumu ile belirlenebilir.

Lemma 4.1.16. [16] Bir grafın genelleştirilmiş çizgi graf olması için gerek ve yeter şart Şekil 5.11 de gösterilen G^1, G^2, \dots, G^{3^1} graflarına izomorf olan indirgenmiş alt grafi olmamasıdır.

Tanım 4.1.10. [16] Bir G grafi H grafını indirgenmiş alt graf olarak içermiyorsa H ye yasaklanmış alt graf denir.

Aşağıda verilen lemma ve sonuçlar Teorem 4.1.7 yi ispatlamak için kullanılacaktır.

Lemma 4.1.17. [16] G yıldızsal bir ağaç ve $\lambda_2(L(G))$, G 'nin çizgi grafiğinin en büyük ikinci komşuluk özdeğeri olsun. $\lambda_2(L(G)) < 2$ dir.

İspat. $G = T(l_1, l_2, \dots, l_\Delta)$ ve $m = l_1 + l_2 + \dots + l_\Delta$ olsun. Lemma 4.1.8 den $S(G)$ alt bölüm grafının komşuluk özdeğerleri $\pm\sqrt{\mu_1(G)}, \pm\sqrt{\mu_2(G)}, \dots, \pm\sqrt{\mu_m(G)}, 0$ olsun.

$S(G)$ aynı zamanda yıldızsal ağaç olduğundan $S(G)$ deki Δ dereceli nokta v ise $S(G) - v = P_{2l_1} \cup P_{2l_2} \cup \dots \cup P_{2l_\Delta}$ olur. İç içe geçme lemmasından ve Lemma 4.1.7 den $\sqrt{\mu_2(G)} < 2$ olur. Böylece $\sqrt{\mu_2(G)} < 4$ tür. Lemma 4.1.7 den $\lambda_2(L(G)) < 2$ dir.

Lemma 4.1.18. [16] $G = T(l_1, l_2, \dots, l_\Delta)$, $\Delta \neq 3$ ve H bağlantılı bir graf olsun. H grafi $L(G)$ ile aynı komşuluk spektrumuna sahipse H , $L(G)$ ' ye izomorf olmak zorundadır.

İspat. G , yıldızsal bir ağaç ve $\Delta > 2$ olduğunu biliyoruz. Lemma 4.1.16 dan $L(G)$ ve H 'nin nokta ve kenar sayıları aynıdır. $\Delta \geq 4$ ise $L(G)$ 'nin mertebesi 4 ten büyüktür. Lemma 4.1.13 den $d_{L(G)} = n + 1$ dir. Bu gerçeklerden hareketle $d_H = d_{L(G)} > 5$ olduğunu buluruz. Lemma 4.1.11 ve Lemma 4.1.13 den H , \tilde{T} gibi bir ağacın çizgi grafidir. Böylelikle $L(G) = L(T(l_1, l_2, \dots, l_\Delta))$ ve $H = L(\tilde{T})$ dir, buradan da G ve \tilde{T} 'nin nokta ve kenar sayılarının aynı olduğunu elde ederiz. Lemma 4.1.14 ten G ve \tilde{T} 'nin aynı işaretli Laplasyan spektrumuna sahip olduklarını ifade eder. Teorem 4.1.6 ve Lemma 4.1.10 dan H 'nin $L(G)$ 'ye izomorf olduğunu söyleyebiliriz.

Aşağıdaki sonuçlar direkt Lemma 4.1.18 in bir sonucudur.

Sonuç 4.1.1. Bağlantılı graflar içerisinde maksimum derecesi 3'ten farklı her bir yıldızsal ağacın çizgi grafi, komşuluk spektrumu ile belirlenebilir.

Sonuç 4.1.2. Bağlantılı graflar içerisinde $Kite_p^q$ uçurtma grafi, her p ve q değeri için komşuluk spektrumu ile belirlenebilir.

İspat. Bu sonuç otomatik olarak Lemma 4.1.15 ve Sonuç 4.1.1 den elde edilir.

Lemma 4.1.19. [16] Herhangi G grafi, $Kite_p^q$ ile aynı komşuluk spektrumuna sahip ise G bağlantılı olmak zorundadır.

İspat. $p \leq 2$ veya $p = 3$ ise yol graf ya da lolipop grafi elde ederiz. Buradan $p \geq 4$ ve $q \geq 3$ ile devam edelim. Aslında uçurtma graf, yıldızsal ağacın çizgi grafidir öyle ki $l_1 = \dots l_{p-1} = 1$ ve $l_p = q + 1$ iken $Kite_p^q = L(T(l_1, l_2, \dots, l_p))$ dir. Teorem 4.1.7 den $Kite_p^q$ uçurtma grafi $p \geq 12$ için komşuluk spektrumu ile belirlenebilir. Buradan $4 \leq p \leq 11$ ile devam edelim. Lemma 4.1.17 den $\lambda_2(Kite_p^q) < 2$ buluruz. Lemma 4.1.11 den $\lambda_n(Kite_p^q) > -2$ dir öyle ki $n = p + q$ dur.

G grafinin $Kite_p^q$ ile aynı komşuluk spektrumuna sahip ve G 'nin bağlantısız olduğunu varsayalım. $G = H \cup H_{r_1} \cup \dots \cup H_{r_k} (k \geq 1)$ iken $H, H_{r_i} (i = 1, \dots, k)$ 'ler G 'nin bileşenleridir ve $\lambda_1(G) = \lambda_1(H)$ dir. Buradan ve iç içe geçme lemmasından $\lambda_2(H) \leq \lambda_2(G) < 2$ ve $(i = 1, \dots, k)$ için $\lambda_1(H_{r_i}) \leq \lambda_2(G) < 2$ dir. Lemma 4.1.10 dan $H_{r_i} (i = 1, \dots, k)$, Smith grafların indirgenmiş düzgün alt graflarıdır. Bu yüzden H 'nin haricinde, G 'nin bileşenleri ağaçtır ve üçgenlerin sayısı için $t(G) = t(H)$ dir. Böylece $G, Kite_p^q$ uçurtma grafına kospektraldir.

$t(G) = t(Kite_p^q) = \binom{p}{3} = t(H)$ dir. Hesaplayarak $Kite_p^q$ nun en büyük özdeğeri için $\lambda_1(Kite_p^q) < p$ olduğunu buluruz. Kolayca görüleceği üzere H 'nin klik sayısı

$\omega(H) \leq p$, çünkü $\lambda_1(H) = \lambda_1(Kite_p^q) < p$ dir.

İddia 1: $\omega(H) < p$.

$\omega(H) = p$ alalım. H 'nin mertebesi n_H iken $n_H < n$ dir. Böylece $\binom{p}{3} = t(H)$ den dolayı H 'de p elemanlı sadece bir klik olabilir. K_p maksimum kliği gösterirse K_p 'nin dışında artık üçgen yoktur. $\lambda_2(H) < 2$ ve $\lambda_{n_H}(H) > -2$ olduğunu biliyorduk. Buradan, iç içe geçme lemmasından H , hiç çift döngü ve indirgenmiş olarak dört kollu yıldız graf içeremez. Şimdi bir G grafinde 5-uzunluklu kapalı yürüyüşleri $t_5(G)$ ile gösterilsin. Lemma 4.1.16 dan $t_5(H) = t_5(Kite_p^q) = t_5(Kite_p^1)$ olduğunu görebiliriz. Böylelikle K_p 'nin en çok bir noktası, K_p tarafından içerilmeyen içerilmeyen en fazla bir noktaya komşu olduğunu söyleriz. $t(H) = t(Kite_p^q)$ eşitliğini kullanarak, H 'yi bir ağacın sarkıt bir noktasına K_p 'yi ekleyerek elde edilen graf şeklinde elde ederiz. H 'de K_p tarafından içerilmeyen a_1 noktaları varsa, H 'de K_p tarafından içerilmeyen a_1 kenarları vardır. Dahası $i = 1, \dots, k$ için H_{r_i} bileşenin mertebesi $n_{H_{r_i}}$ ile gösterirsek, G 'nin noktalarının ve kenarlarının sayısı için aşağıdaki denklemleri elde ederiz.

$$p + a_1 + \sum_{i=1}^k n_{H_{r_i}} = p + q$$

$$\binom{p}{2} + a_1 + \sum_{i=1}^k (n_{H_{r_i}} - 1) = \binom{p}{2} + q$$

Buradan

$$a_1 + \sum_{i=1}^k n_{H_{r_i}} = q$$

$$a_1 + \sum_{i=1}^k (n_{H_{r_i}} - 1) = q$$

buluruz. Böylece $k = 0$ aldık. Bu şu anlama gelir ki $\omega(H) = p$ ise G 'nin tek bileşeni H dir. Fakat bu sonuç G 'nin bağlantısız olmasıyla çelişir. Yani $\omega(H) \neq p$ olduğunu görürüz. O zaman $3 \leq \omega(H) \leq 10$, $4 \leq p \leq 11$ ve $\omega(H) < p$ alırız. Sonuç olarak hesaplama ve karşılaştırmadan H 'nin istisna graf olamadığını söyleyebiliriz. Bu gerçekten ve Lemma 4.1.11 den H , tek bir petal eklenmiş bir ağacın ya da bir ağacın çizgi grafının genelleştirilmiş çizgi grafıdır. Bundan dolayı ispatı tamamlamak için aşağıdaki iddianın doğruluğunu göstermek yeterli olacaktır.

İddia 2: H , herhangi bir grafın genelleştirilmiş çizgi grafı olamaz.

Bu adımda ilk olarak bazı gösterimler vereceğiz.

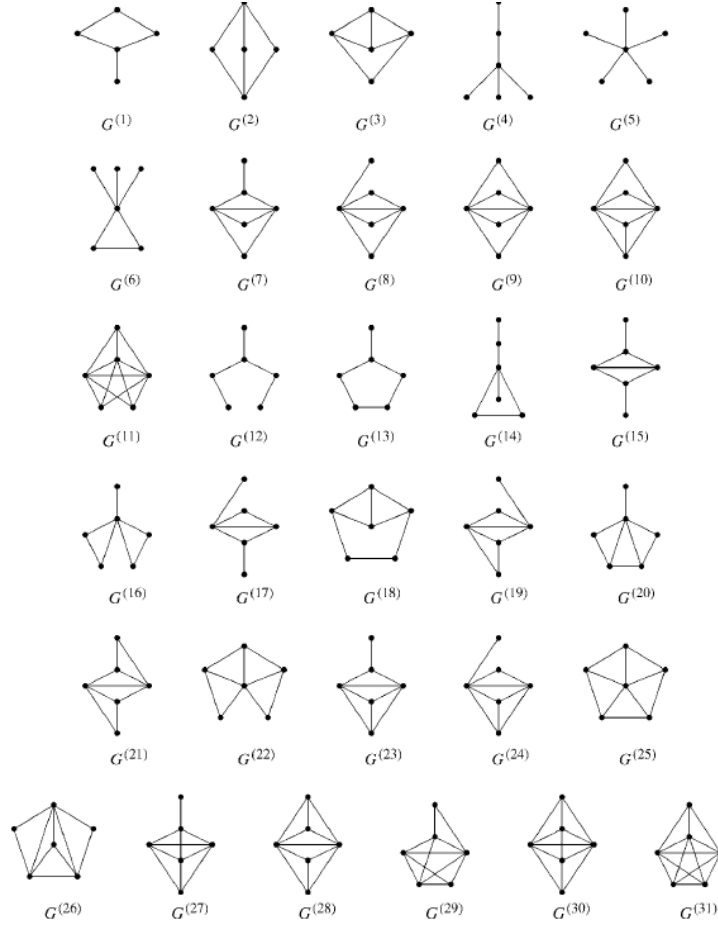
$i \in V$ ve $V \subseteq V(H)$ için T_i , i 'ye komşu olan ancak V 'de başka noktalara komşu olmayan noktaların kümesini gösterebiliriz. Buradan $x \in T_i$ ise her $y \in V - \{i\}$ için $x \sim i$ ve $x \not\sim y$ alırız. $i, j \in V$ için T_{ij} , i ve j 'nin her ikisine de komşu olan noktaların kümesini gösterebiliriz öyle ki bu kümedeki herhangi bir nokta V deki başka bir noktaya komşu olmasın. Böylece $x \in T_{ij}$ ise her $y \in V - \{i, j\}$ için $x \sim i$, $x \sim j$ ve $x \not\sim y$ alırız. Daha genel hale getirirsek her $x \in T_{i_1, \dots, i_k}$ ve $y \in V - \{i_1, \dots, i_k\}$ için $x \sim i_1, x \sim i_2, \dots, x \sim i_k$ ve $x \not\sim y$ elde ederiz öyle ki $|V| = n'$ dır. $k \in \{1, \dots, n'\}$ ve $i_k \in V$ dir.

Şekil 4.9. daki graflar H 'nin yasaklanmış alt graflarıdır. Aynı zamanda $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ için $n(F)$ ve $n(F_i)$ sırasıyla F ve F_i nin mertebelerini gösterebiliriz. H , genelleştirilmiş çizgi graf olsun. Lemma 4.1.16 den Şekil 4.8 daki graflar yasaklanmış alt graflardır. Şekil 4.10 daki graflar ispatın geri kalan kısmında kullanılmıştır. Şimdi dört durumda H 'nin genelleştirilmiş çizgi graf olma durumunu düşüneceğiz.

Durum 1: $\omega(H) = 3$ alalım. H deki bir üçgenin noktalarını $V' = \{1, 2, 3\}$ ile etiketlersek, $T_{123} = \emptyset$ olduğu açıktır. $\forall i, j \in V'$, $x, y \in T_{ij}$, $x \sim y$ ya da $x \not\sim y$ ise

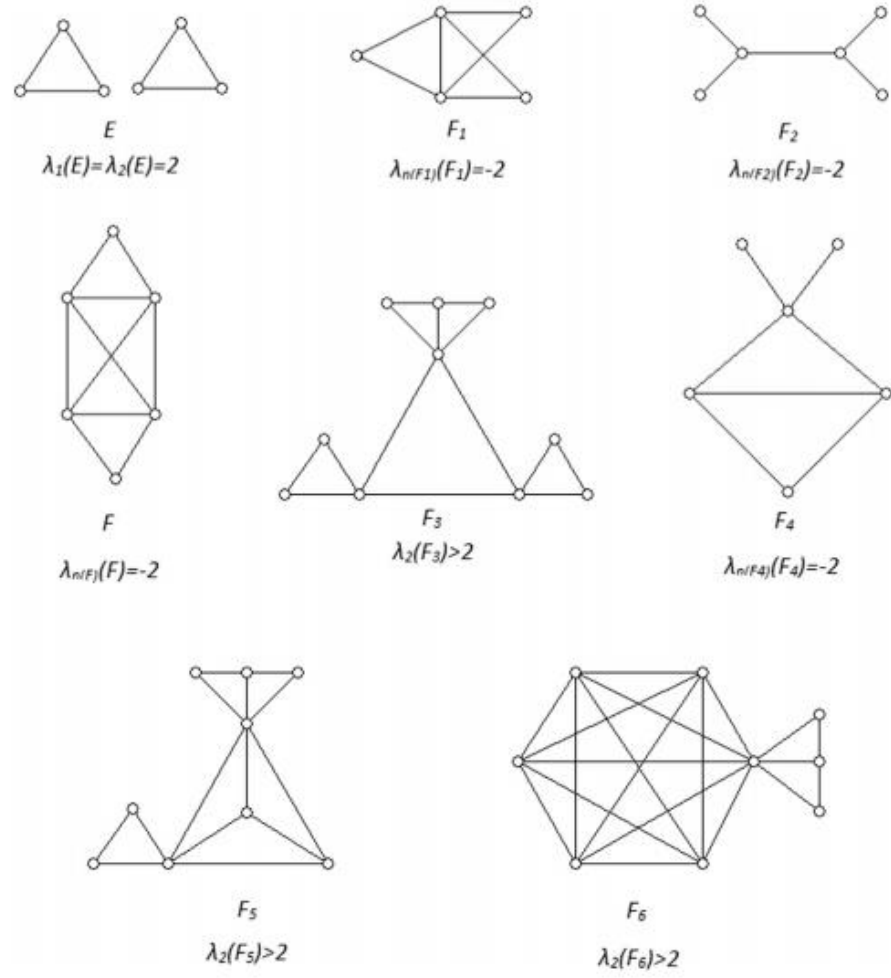
sırasıyla K_4 veya F_1 indirgenmiş alt graf olacaktır. Dolayısıyla $\forall i, j \in V'$ için $|T_{ij}| \leq 1$ alırız. Şimdi her $i \in V'$ için T_i kümelerini düşünelim. K_4 ün olmasını engellemek için T_i nin herhangi üç noktası arasında en fazla iki kenar olmalıdır. Bunun da ötesinde T_i deki herhangi üç noktanın arasındaki kenarlarının sayısı 0 ya da 1 e eşit olamadığını söyleyebiliriz, çünkü G^{16} ve S_4 ya da G_6 yasaklanmış alt graflardır. Bundan dolayı G^{20} nin yasaklanmış alt graf olduğu gerçeğini kullanarak $\forall i \in V', |T_i| \leq 3$ alırız. Benzer biçimde F_2 ve F_3 yasaklanmış alt graf olduklarından $\forall i \in V', T_i \neq \emptyset$ ise $\sum_{i \in V'} |T_i| \leq 6$ ve $\exists i \in V', T_i = \emptyset$ ise $\sum_{i \in V'} |T_i| \leq 5$ alırız. O zaman aşağıdaki alt durumlarla devam edelim.

Alt durum 1: $\forall i, j \in V'$ için T_{ij} nin en az ikisinin boş olduğunu varsayalım. Genelliği kaybetmeden $T_{12} = \{x\}$ ve $T_{13} = \{y\}$ alalım. $x \sim y$ ise C_4, H nin indirgenmiş alt grafi olacaktır. Böylece $x \not\sim y$ dir. $F_4, C_4, C_6, K_4, G^{19}, G^{20}, G^{21}, G^{22}, G^{25}$ indirgenmiş alt graflarını kullanarak $|T_x| \leq 2, |T_y| \leq 2, |T_x| + |T_y| \leq 3$ olarak sonuçlandırabiliriz. Ve T_x ve T_y arasında kenar yoktur. Aynı zamanda diğer tüm $T_1, T_2, T_3, T_{xy}, \dots, T_{xy123}$ kümeleri boştur. Çünkü E , yasaklanmış graftır, H deki herhangi bir üçgen, 123 üçgeninin ya da 123 üçgenine komşu olan üçgenin en az bir nokta ya da kenarını içermek zorundadır. Bu sebeple bu koşullar altında H nin üçgen sayısının maksimum değeri en fazla 5 olabilir. Önceden söylendiği gibi $p > 4$ için $t(Kite_p^q) \geq 10$ dur. $p = 4$ ise $t(H) = t(Kite_4^q) = 4$ tür. Böylece τ_1 ya da τ_2, H nin indirgenmiş alt grafi olacaktır. Çünkü her $q \geq 3$ için $\rho(Kite_4^q) < \rho(\tau_1)$ tür, τ_1, H 'nin indirgenmiş alt grafi olamaz. Böylece τ_2, H 'nin indirgenmiş alt grafi olmak zorundadır ve $T_{23} = \emptyset$ olur. Genelliği bozmadan $T_x = \{a, b\}$ olsun. Dolayısıyla $|T_y| \leq 1$ dir. $c \in T_y$ ise her $q \geq 3$ için $\rho(H) > \rho(Kite_4^q)$ alırız. Yani T_y boş olmak zorundadır. Benzer şekilde $T_a = T_b = T_{ab} = \emptyset$ buluruz. Sonuç olarak $H \cong \tau_2$ dir bu da $\rho(H) = \rho(Kite_4^q)$ gerçeği ile çelişir.



Şekil 4. 8 Genelleştirilmiş bir çizgi grafin yasaklanmış alt grafları

Alt durum 2: T_{ij} 'lerden sadece bir tanesinin boş olmadığını varsayalım. Genelliği bozmadan $T_{12} = \{x\}$ ve $T_{13} = T_{23} = \emptyset$ olsun. T_{x1} veya T_{x2} boştan farklı ise bu durum aslında T_{ij} 'lerden en az iki tanesinin boştan farklı olma durumuna denktir. $T_{x1} = T_{x2} = \emptyset$ olarak devam edelim. C_4 ve K_4 yasaklı alt graflarından $T_{x123} = T_{123} = T_{x23} = T_{x13} = T_{x12} = T_{x3} = \emptyset$ eşitliğini elde ederiz. Aynı zamanda $\forall i \in \{x, 1, 2, 3\}$, $|T_i| \leq 2$ tür. Çünkü S_4 ve F_4 yasaklıdır. $\forall i, j \in \{x, 1, 2, 3\}$ ve $i \neq j$ için $\exists z_1, z_2 \in V(H)$, $z \sim i$ ve $z \sim j$ ise $z_1 \not\sim z_2$ dir. Diğer taraftan G^{16} ya da C_4 , H 'nin indirgenmiş alt grafi olacaktır. G^{15} ve G^{17} yasaklı alt graf olduklarından $|T_1| + |T_2| + |T_3| + |T_x| \leq 4$ alırız. Tüm bu gerçeklerden ve E 'nin yasaklanmış alt graf olma gerçeğinden hareketle $t(H)$ 'ın maksimum değeri en fazla 4 olabilir. $t(H) = t(Kite_p^q) \geq 4$ için $t(H) = 4$ alırız. Fakat bu durumda τ_7 , H 'nin indirgenmiş alt grafi olacaktır. Bu sonuç her $q \geq 3$ için $\rho(\tau_7) > \rho(Kite_4^q)$ ile çelişir.

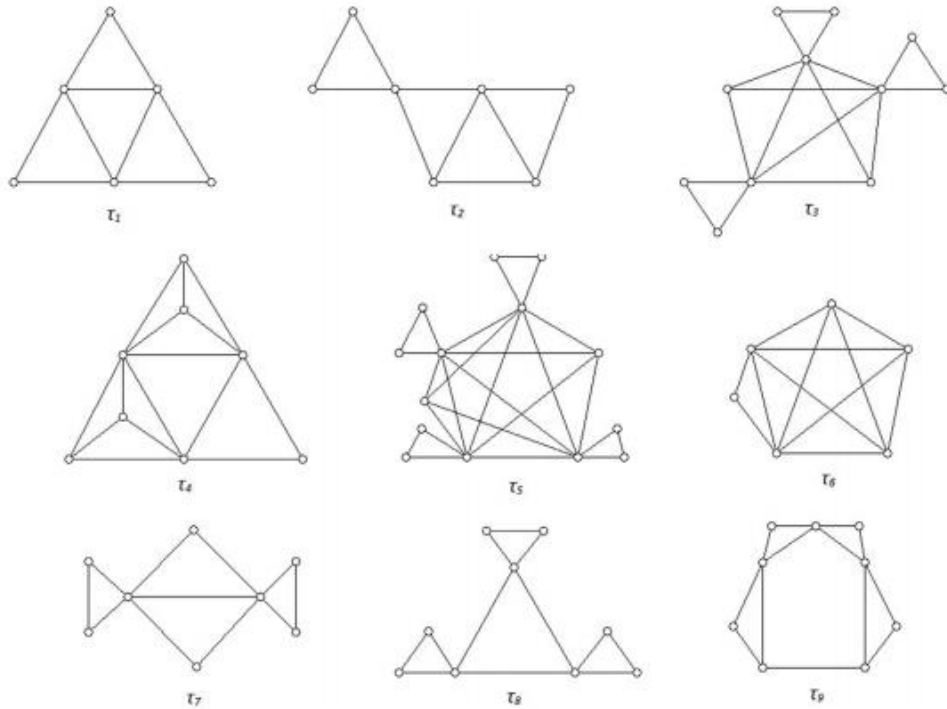


Şekil 4.9 $E, F, F_1, F_2, F_3, F_4, F_5$ ve F_6 grafları

Alt durum 3: T_{ij} lerin hepsinin boş olduğunu varsayalım. bu şu anlama gelir, H deki üçgenlerden herhangi ikisinin ortak kenarı olamaz. E ve C_4 yasaklı alt graf oldukları için H deki üçgenlerden herhangi birisi $V' = \{1, 2, 3\}$ ün sadece bir noktasına komşu olmalıdır ya da bu noktayı içermelidir. H deki herhangi iki üçgenin G^6 ve G^{16} yasaklanmış alt grafları ile ortak bir kenarı olamaz, buradan $\forall i \in V, |T_i| \leq 2$ dir. $t(H) \geq 4$ ve G^{14} yasaklanmış alt graf olduğu için T_i deki herhangi iki noktanın komşu olmak zorunda olduğunu söyleriz. Aynı zamanda H deki üçgenlerden herhangi birisi $V' = \{1, 2, 3\}$ ün sadece bir noktasına komşu olmalıdır ya da bu noktayı içermelidir gerçeğini kullanarak τ_8 ya da τ_9 , H 'nin indirgenmiş alt grafi olacaktır ve böylece $\max(t(H)) = 4$ tür. Her $p > 4$ için $t(Kite_p^q) \geq 10$ olduğundan sadece $p = 4$ durumunu düşünmeye ihtiyacımız vardır.

τ_8 'in H 'nin indirgenmiş bir alt grafi olduğunu varsayarsak $|T_1| = |T_2| = |T_3| = 2$ olur. $t(H) = 4$ ve G^{13} yasaklanmış alt grafi için H deki herhangi bir nokta $\cup_{i=1}^3 T_i$ nin ikiden fazla noktasına komşu olamaz. Hem de $\cup_{i=1}^3 T_i$ nin iki noktasına komşu olan H de en fazla bir nokta olabilir. Çünkü H , indirgenmiş alt graf olarak çift döngü içeremez. H de $\cup_{i=1}^3 T_i$ nin iki noktasına komşu olan bir nokta varsa G^{13} yasaklanmış alt graf ve $\rho(H) = \rho(Kite_4^q)$ olduğu için daha başka nokta yoktur. H de daha başka nokta yoksa her $q \geq 3$ için $\rho(H) = \rho(\tau_8) \cong 3.089 < \rho(Kite_4^q)$ alırız. Böylelikle τ_8 , H 'nin indirgenmiş alt grafi olamaz.

τ_9 'un H 'nin indirgenmiş bir alt grafi olduğunu varsayalım. $t(H) = 4$, G^{13} ve herhangi çift döngülü yasaklanmış alt grafları için H 'nin daha başka noktasının olmadığını söyleriz. Yani $H \cong \tau_9$ dur. Fakat hesaplamayla her $q \geq 3$ için $\rho(\tau_9) \cong 3.084 < \rho(Kite_4^q)$ tür. Böylece τ_9 , H 'nin indirgenmiş alt grafi olamaz. Sonuç olarak $\omega(H) \neq 3$ tür.



Şekil 4. 10 $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5, \tau_6, \tau_7, \tau_8, \tau_9$ grafları

Durum 2: $\omega(H) = 4$ olduğunu varsayalım. H deki mertebesi 4 olan bir kliğin noktalarını $V'' = \{1, 2, 3, 4\}$ ile etiketlersek, $T_{1234} = \emptyset$ alırız. Aynı zamanda G^{30} ve çift döngülü yasaklanmış alt graflar için $\sum_{i,j,k \in V''} |T_{ijk}| \leq 1$ dir.

Genelliği bozmadan $T_{124} = \{x\}$ alalım. G^{27} yasaklanmış olduğu için $T_x = \emptyset$ alırız. C_4, G^{29}, G^{30} graflarının yasaklanmış alt graf olduğu ve $\omega(H) = 4$ gerçeğini kullanarak $N(x) = \{1, 2, 4\}$ olduğunu söyleyebiliriz. Aynı zamanda $\forall i, j \in V'', T_{ij} = \emptyset$ için F ve G^{29} yasaklanmış alt graflardır. Her $i \in V''$ için T_i kümelerini düşünersek $T_3 = \emptyset$ ve $|T_1| \leq 2, |T_2| \leq 2, |T_4| \leq 2$ alırız. Çünkü G^{27}, S_4 ve E yasaklanmış alt graflardır. Böylece $t(H)$ 'nin maksimum değeri en fazla 10'a eşit olabilir öyle ki $|T_1| = |T_2| = |T_4| = 2$ tür. $\omega(H) = 4$ için $p \geq 5$ ve $t(Kite_p^q) = t(H) \geq \binom{5}{3} = 10$ alırız. $t(H) = 10$ ve τ_3, H 'nin indirgenmiş alt grafi olacaktır. Fakat bu $\rho(\tau_3) > \rho(Kite_5^q)$ ile çelişir. Yani $\forall i, j, k \in V'', T_{ijk} = \emptyset$ dir.

Genelliği bozmadan $T_{12} = \{x\}$ alalım. G^{23} ve G^{24} yasaklanmış alt grafları için $T_1 = T_2 = T_x = \emptyset$ alırız. Ayrıca E, F_1 ve F_4 yasaklanmış alt graf olduklarından $|T_3| \leq 2, |T_4| \leq 2, |T_{x1}| \leq 2, |T_{x2}| \leq 2$ eşitsizliklerini buluruz. Eşitlik durumunda iki nokta aynı kümede komşu olmak zorundadır. Aynı zamanda her $i, j \in V''$ için $T_{x3}, T_{x4}, T_{ij}, T_{xij}$ kümeleri boştur çünkü C_4, F, G^{26}, G^{28} yasaklanmış alt graflardır. $|T_3| = |T_4| = 2$ ise $|T_{1x}| + |T_{2x}| \leq 1$ dir. O zaman $t(H) = 8$ olacaktır. Fakat $\omega(H) < p$ ve $\omega(H) = 4$ için $t(H) \geq 10$ olduğunu biliyorduk. Dolayısıyla $|T_3| \leq 1$ veya $|T_4| \leq 1$ dir. Buradan $t(H)$ 'nin maksimum değeri $|T_{1x}| = |T_{2x}| = 2$ ve $|T_3| + |T_4| \leq 1$ iken en fazla 13 olabilir. Böylelikle $t(H) = 10$ ve $p = 5$ tir öyle ki $|T_{1x}| = 2, |T_{2x}| = 1$ ya da $|T_{1x}| = 1, |T_{2x}| = 2$ dir. Bu durumda $\tau_4, \rho(\tau_4) > \rho(Kite_5^q)$ ile çelişen H 'nin indirgenmiş alt grafi olmalıdır. Yani $\forall i, j \in V'', T_{ij} = \emptyset$ olduğunu söyleyebiliriz. Her $i \in V''$ için T_i 'nin en az birinin boştan farklı olduğunu varsayalım. F_5 ve E yasaklı alt graf olduklarından $\exists i \in V'', |T_i| = 3$ ise $\forall j \in V'' - \{i\}, |T_j| \leq 1$ dir. Böylece $t(H), \forall i \in V'', |T_i| = 2$ iken maksimum olacaktır. Dolayısıyla $t(H) = 8$ dir. Ancak bu $t(H) \geq 10$ ile çelişir. Yani $\omega(H) \neq 4$ tür.

Durum 3: $\omega(H) = 5$ olduğunu varsayalım. H de 5 mertebeli bir kliğin noktalarını $V''' = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ile etiketleyelim. Açıktır ki $T_{12345} = \emptyset$ dir. $G^{26}, G^{29}, G^{30}, G^{31}$ ve F yasaklanmış alt graflardır. Her $i, j, k, l \in V'''$ için aşağıdaki sonuçları yazarız. $\sum_{i, j \in V'''} |T_{ij}| \leq 1, T_{ijk} = \emptyset, \sum_{i, j, k, l \in V'''} |T_{ijkl}| \leq 1, \sum_{i, j, k, l \in V'''} |T_{ijkl}| + |T_{ij}| \leq 1$ ve $|T_i| \leq 3$ tür. Ayrıca $\exists i \in V''', |T_i| = 3$ ise aynı T_i kümesinde iki kenar arasında üç kenar olmalıdır. Çünkü S_4, G^{16} ve E yasaklanmış alt graflardır. Genelliği kaybetmeden

$T_{1234} = \{x\}$ olsun. Her $i, j, k \in V'''$ için $T_{ijk} = T_{ij} = \emptyset$ dir. G^{27} yasaklanmış olduğu için $T_5 = T_x = \emptyset$ ve H, x ve V''' nün her ikisine de komşu olan nokta içermez. Aynı zamanda $\forall i \in V''', T_{ix} = \emptyset$ tur. Çünkü G^{29} ve C_4 yasaklanmış alt graflardır. Dahası her $i, j, k, l \in V'''$ için $T_{xij} = T_{xijk} = T_{xijkl} = \emptyset$ tur. Sebebi G^{31} ve C_4 yasaklanmış alt graflar ve $\omega(H) = 5$ olmasıdır. Aynı zamanda $\forall i \in \{1, 2, 3, 4\}, |T_i| \leq 2$ alırsak ve eşitlik sağlanırsa aynı T_i kümesindeki iki nokta komşu olmak zorundadır. $\omega(H) = 5$ ve $\omega(H) < p$ için $t(Kite_p^q) = t(H) \geq \binom{6}{3} = 20$ dir. Bu gerçekler ışığında $t(H)$ 'nin maksimum değeri 20 ye eşit olabilir ve $p = 6$ dir. Fakat bu durumda τ_5, H 'nin indirgenmiş alt grafi olacaktır bu da $\rho(\tau_5) > \rho(Kite_6^q)$ gerçeği ile çelişir. O zaman Dahası her $i, j, k, l \in V'''$ için $T_{ijkl} = \emptyset$ tur. Genelliği bozmadan $T_{23} = \{x\}$ olsun. $G^{23}, G^{24}, G^{28}, G^{31}, F_4, C_4$ yasaklanmış alt graflardır ve $\omega(H) = 5$ tir. Şu sonuçları buluruz. Her $i, j, k, l \in V'''$ için $T_2 = T_3 = T_x = \emptyset, T_{x1} = T_{x4} = T_{x5} = \emptyset, T_{xij} = T_{xijk} = T_{xijkl} = \emptyset, T_{x12345} = \emptyset$ tur. $|T_{x2}| \leq 1, |T_{x3}| \leq 1, |T_1| \leq 2, |T_4| \leq 2, |T_5| \leq 2$ dir. T_1, T_4, T_5 kümeleri için eşitlik sağlanırsa aynı kümedeki iki nokta komşu olmak zorundadır. Buna ek olarak E , yasaklanmış alt graftır. Yani $t(H)$ 'nin maksimum değeri 13 olabilir. Bu şu anlama gelir τ_6, H 'nin indirgenmiş bir alt grafidir. Fakat bu $t(H) \geq 20$ gerçeği ile çelişir. O zaman $\forall i, j \in V''', T_{ij} = \emptyset$ dir. $\forall i \in V''', T_i$ kümelerini düşünelim. $\exists i \in V''', |T_i| = 3$ ise $\forall j \in V''' - \{i\}, |T_j| \leq 1$ dir. Çünkü F_5 ve E yasaklanmış alt graflardır. Böylece $t(H)$ 'nin maksimum değeri her $i \in V'''$ için $|T_i| = 2$ olduğunda elde edilebilir ve bu değer $\binom{5}{3} + 5 = 15$ dir. Ancak biz $t(H) \geq 20$ olduğunu biliyoruz. Bu bir çelişkidir. Yani $\omega(H) \neq 5$ tir.

Durum 4: $\omega(H) \geq 6$ olduğunu varsayalım. K_ω, H 'nin maksimum mertebeli bir kliğini ve W , bu kliğin noktalarının kümesini gösterebiliriz. K_ω 'nin dört noktasını $V'' = \{1, 2, 3, 4\} \subset W$ ile etiketleyelim. G^{31} yasaklı olduğu için $T_{1234} \subset K_\omega$ alırız ve $T_{ijk} = \emptyset$ tur. Her $i, j \in W$ için T_{ij} kümelerinden sadece bir tanesi boştan farklı olabilir. Çünkü G^{26} yasaklanmış alt graftır. Üstelik $|T_{ij}| \leq 1$ dir. Çünkü F ve E yasaklanmış alt graftır. Aynı zamanda $\forall i \in W, |T_i| \leq 2$ için F_6, E, G^{16}, S_4 yasaklanmış alt graflardır. Genelliği kaybetmeden $T_{12} = \{x\}$ alalım. $\forall i, j, k \in V''$ için G^{23}, E, C_4, G^{24} yasaklanmış alt graf olduklarından dolayı aşağıdaki sonuçları elde ederiz:

$T_x = T_1 = T_2 = T_{xij} = T_{xijk} = T_{x3} = T_{x4} = \emptyset, |T_{x1}| \leq 1$ ve $|T_{x2}| \leq 1$ dir. Böylece $t(H)$ 'in maksimum değeri $\binom{\omega(H)}{3} + \omega(H)$ toplamına eşit olabilir. $\omega(H) < p$ ve $\omega(H) \geq 6$ iken $[\binom{\omega(H)}{3} + \omega(H)] < \binom{p}{3}$ yazarız. Yani $\forall i, j \in V''$ için $T_{ij} = \emptyset$ tur. T_i ler boştan farklı olmasına rağmen $t(H)$ 'in maksimum değeri en fazla $\binom{\omega(H)}{3} + \omega(H)$ olabilir. Bu değer tekrardan $\binom{p}{3}$ den azdır. Dolayısıyla bu bir çelişkidir.

Böylece ikinci iddiamızdan H 'nin herhangi bir grafın genelleştirilmiş çizgi grafi olmadığı gerçeğini elde ederiz. Bizim varsayımımız şu anlama gelir ki G 'nin aslında bağlantısız graf olduğu yanlıştır. Yani G bağlantılı olmak zorundadır.

Şimdi esas sonucu aşağıdaki teoremde verelim.

Teorem 4.1.8. [16] $Kite_p^q$ her p ve q için komşuluk spektrumu ile belirlenebilir.

İspat. Bu sonuç direkt olarak Lemma 4.1.19 ve Sonuç 4.1.2'den elde edilebilir.

4.2. Uçurtma Grafın Laplasyan Matrisine Göre Spektral Özellikleri

Lemma 4.2.2. [12] Bir G grafi için aşağıdaki verilenler Laplasyan spektrumu yardımıyla elde edilebilir.

- (i) Nokta sayısı
- (ii) Kenar sayısı
- (iii) Bileşen sayısı
- (iv) Üreteç ağaç sayısı
- (v) Noktaların derecelerinin kareleri toplamı

Herhangi bir $v \in V(G)$ için v noktasının temsil ettiği satır ve sütunun $L(G)$ matrisinden silinmesiyle elde edilen alt matrisi $L_v(G)$ ile gösterelim. $\phi(G)(x) = \det(xI - L(G))$ Laplasyan matrisinin karakteristik polinomunun göstermek üzere $V(G) = \{v\}$ ise $\phi(L_v(G)) = 1$ olduğunu kabul edelim. Buna göre aşağıdaki lemma elde edilir.

Lemma 4.2.3. [13] G_1 grafının bir u noktası ile G_2 grafının bir v noktasının bir kenar yardımıyla bağlanması sonucunda elde edilen graf $G = G_1u:G_2v$ olsun. Buna göre G grafının Laplasyan karakteristik polinomu için aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\phi(G) = \phi(G_1)\phi(G_2) - \phi(G_1)\phi(L_v(G_2)) - \phi(G_2)\phi(L_u(G_1))$$

Lemma 4.2.4.[13] K_p tam grafi P_q yol grafinin Laplasyan karakteristik polinomları aşağıdaki gibidir.

$$\phi(K_p) = x(x - p)^{p-1}$$

$$\phi(P_q) = \prod_{i=1}^q \left(x - 4\sin^2 \frac{\pi(i-1)}{2q} \right)$$

Lemma 4.2.5. [13] n noktalı bir G grafinin noktalarının dereceleri toplamı Laplasyan özdeğerlerinin toplamına eşittir. $\mu_i(G)$, G grafinin Laplasyan özdeğerlerini göstermek üzere

$$\sum_{i=1}^n \mu_i(G) = \sum_{i=1}^n d_i$$

eşitliği yazılır.

Lemma 4.2.6. [13] n noktalı ve en az bir kenar içeren bağlantılı bir G grafinin maksimum derecesi $\Delta(G)$ ve en büyük Laplasyan özdeğeri $\mu(G)$ olsun. Buna göre

$$\mu(G) \geq \Delta(G) + 1$$

olur ve eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul $\Delta(G) = n - 1$ olmasıdır.

Lemma 4.2.7. [14] n noktalı bağlantılı bir grafin ağaç olması için gerek ve yeter şart kenar sayısının $n - 1$ e eşit olmasıdır.

Lemma 4.2.8. [15] K_p tam grafi ve P_q yol grafi için aşağıdaki eşitlikler sağlanır. Burada u , K_p tam grafinin keyfi bir noktası ve v , P_{q+1} yol grafinin bir bitim noktasıdır.

$$\phi(L_u(K_p))(x) = (x - 1)(x - p)^{p-2}$$

$$\phi(L_v(P_q))(x) = \frac{x-1}{x} \phi(P_q)(x) - \frac{1}{x} \phi(P_{q+1})(x)$$

İspat. $(p - 1) \times (p - 1)$ tipindeki birim matris I ve bütün bileşenleri 1 e eşit olan matris J olmak üzere $L_u(K_p) = pI - J$ olur. Böylece

$$\phi(L_u(K_p))(x) = (x - 1)(x - p)^{p-2}$$

olur. Lemma 4.2.3. yardımıyla

$$\phi(P_{q+1}) = \phi(P_1)\phi(P_q) - \phi(P_1)\phi(L_v(P_q)) - \phi(P_q)\phi(L_v(P_1))$$

elde edilir öyle ki burada v , P_{q+1} yol grafinin bir bitim noktasıdır. Buradan Lemma 4.2.4 yardımıyla

$$\phi(L_v(P_q))(x) = \frac{x-1}{x}\phi(P_q)(x) - \frac{1}{x}\phi(P_{q+1})(x)$$

olduğu görülür.

Lemma 4.2.9. [15] $Kite_{n,n-p}$ grafinin Laplasyan karakteristik polinomu aşağıdaki gibidir.

$$\phi(Kite_{n,n-p})(x) = (x-p)^{p-2} \left[(x-p) \prod_{i=1}^{n-p+1} \left(x - 4\sin^2 \frac{\pi(i-1)}{2n-2p+2} \right) + (1-p) \prod_{i=1}^{n-p} \left(x - 4\sin^2 \frac{\pi(i-1)}{2n-2p} \right) \right]$$

İspat. Lemma 4.2.3 ten

$$\phi(Kite_{n,n-p}) = \phi(K_p) \left[\phi(P_{n-p}) - \phi(L_v(P_{n-p})) \right] - \phi(L_u(K_p)) \phi(P_{n-p})$$

elde ederiz öyle ki burada u , K_p tam grafinin keyfi bir noktası ve v , P_{n-p} yol grafinin bir bitim noktasıdır. Lemma 4.2.4 ve Lemma 4.2.8 den

$$\begin{aligned} \phi(Kite_{n,n-p})(x) &= x(x-p)^{p-1} \left[\phi(P_{n-p})(x) - \frac{x-1}{x}\phi(P_{n-p})(x) + \frac{1}{x}\phi(P_{n-p+1})(x) \right] - \\ & (x-1)(x-p)^{p-2}\phi(P_{n-p})(x) \\ &= (x-p)^{p-1} \left[\phi(P_{n-p+1})(x) + \phi(P_{n-p})(x) \right] - (x-1)(x-p)^{p-2}\phi(P_{n-p})(x) \\ &= (x-p)^{p-2} \left[(x-p)\phi(P_{n-p+1})(x) + (1-p)\phi(P_{n-p})(x) \right] \\ &= \left[(x-p) \prod_{i=1}^{n-p+1} \left(x - 4\sin^2 \frac{\pi(i-1)}{2n-2p+2} \right) + (1-p) \prod_{i=1}^{n-p} \left(x - 4\sin^2 \frac{\pi(i-1)}{2n-2p} \right) \right] \end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 4.2.1. Kısa uçurtma grafin Laplasyan karakteristik polinomu Lemma 4.2.9 yardımıyla kısaca aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\phi(Kite_{n,1}) = x(x-1)(x-n)(x-(n-1))^{n-3}$$

Lemma 4.2.10. [15] $Kite_{n,n-p}$ grafın Laplasyan özdeğerlerini $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_{n-1} \geq \mu_n = 0$ ile gösterirsek

$$p+1 \leq \mu_1 < p+2$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $n \geq p-1$ ve (Ü ayrık birleşim işlemi) $G = K_p \dot{\cup} P_{n-p}$ olmak üzere G nin özdeğerlerini $\mu'_1 \geq \mu'_2 \geq \dots \geq \mu'_{n-1} \geq \mu'_n = 0$ ile gösterelim. Buna göre Lemma 4.2.5 ten

$$\sum_{i=1}^{n-1} \mu_i - \sum_{i=1}^{n-1} \mu'_i = \sum_{i=1}^{n-1} (\mu_i - \mu'_i) = 2$$

eşitliği elde edilir. Bu da

$$\sum_{i=1}^{n-1} \Delta\mu_i$$

demektir öyle ki burada $i = 1, \dots, n-1$ için $\Delta\mu_i = \mu_i - \mu'_i$ dir. G bağlantısız bir graf ve $Kite_{n,n-p}$ bağlantılı bir graf olduğundan açık bir şekilde $\mu'_{n-1} = 0$ ve $\mu_{n-1} > 0$ olduğunu söyleyebiliriz. Böylece $\Delta\mu_{n-1} > 0$ olur. Bu da

$$\sum_{i=1}^{n-1} \Delta\mu_i < 2$$

olduğu anlamına gelir. $\Delta\mu_1 < 2$ olur. $G = K_p \dot{\cup} P_{n-p}$ olduğundan $\mu'_1 = p$ dir. Bütün bunların yardımıyla,

$$\mu_1 = \mu'_1 + \Delta\mu_1 = p + \Delta\mu_1 < p + 2$$

elde ederiz. Diğer taraftan $n > p-1$ iken $Kite_{n,n-p}$ grafı, $Kite_{n,1}$ grafını indirgenmiş bir alt graf olarak içerir. Böylece Lemma 4.2.1 ve Sonuç 4.2.1 den

$$\mu_1 \geq p+1$$

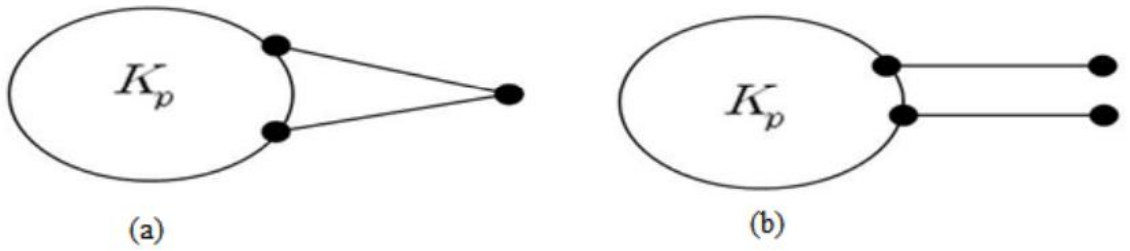
elde edilir ve ispat tamam olur.

Teorem 4.2.1. [15] G , n noktalı, m kenarlı ve derecesi 1 olan en az bir nokta içeren bir graf ve $\omega(G) = p$ olsun. G , grafının Laplasyan özdeğerlerini $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_{n-1} \geq \mu_n = 0$ ile gösterelim. Eğer G , $Kite_{n,n-p}$ grafına Laplasyan matrisine göre ko-spektral bir graf ise ve

- (i) $m = \frac{p(p-1)}{2} + (n - p)$
- (ii) $p + 1 \leq \mu_1(G) < p + 2$
- (iii) $\mu_2(G) = p$

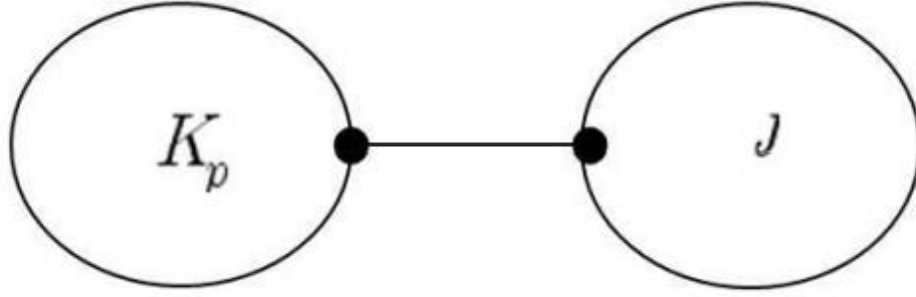
koşullarını sağlıyorsa $G \cong Kite_{n,n-p}$ olur.

İspat. G , teoremden verilen koşulları sağlayan bir graf olsun. Lemma 4.2.6 dan $p + 2 > \mu_1(G) \geq \Delta(G) + 1$ yani $p + 1 > \Delta(G)$ olur. Böylece K_p kliğindeki herhangi bir noktanın klik dışında kalan en fazla bir noktaya komşu olabileceğini söyleriz. G nin Şekil 4.12 deki graflardan herhangi birini indirgenmiş bir alt graf olarak içerdiğini varsayalım. Hesaplama yardımıyla Şekil 4.12 deki ilk grafın Laplasyan spektrumunun $p + 1, p + 2, \dots, p, 2, 0$ ve ikinci grafın Laplasyan spektrumunun $\frac{p+2+\sqrt{p^2+4}}{2}, \frac{p+2+\sqrt{p^2-4}}{2}, p, \dots, \frac{p+2-\sqrt{p^2-4}}{2}, \frac{p+2-\sqrt{p^2+4}}{2}, 0$ olduğu görülür. Böylece Şekil 4.12 deki her iki durum için de $\mu_2(G) \geq p + 1 > p$ elde ederiz. Bu da Lemma 4.2.1 den dolayı bir çelişki oluşturur ve G nin Şekil 4.12 deki graflardan herhangi birinin indirgenmiş bir alt graf olarak içermeyeceğini söyleriz.



Şekil 4. 11 (a) ve (b) durumları

Şekil 4.12 de (a) klik içerisindeki herhangi iki noktanın klik dışında aynı noktaya komşu olmasını, (b) ise klik içerisindeki herhangi iki noktanın klik dışında farklı iki noktaya komşu olma durumunu gösteriyor.



Şekil 4. 12 K_p kliği ile grafın diğer kısmı arasında sadece bir adet kenar bulunması durumu

Buna göre G grafı Şekil 4.13 te gösterilen biçimde bir graf olmak zorundadır. G nin kenar sayısını bildiğimiz için

$$\frac{p(p-1) + 2(n-p)}{2} = \frac{p(p-1)}{2} + k + 1$$

elde ederiz öyle ki burada k , J nin kenar sayısıdır. Yani $k = n - p - 1$ olur. Bu yüzden J , $n - p$ adet noktaya ve $n - p - 1$ adet kenara sahip bağlantılı bir graf olur. Lemma 4.2.7'den J nin bir ağaç olduğunu söyleriz. Dolayısıyla $G \cong Kite_{n,n-p}$ olur.

$Kite_{p+2,p}$ Laplasyan Spektrumu ile Belirlenebilir

Teorem 4.2.5. [17] Q , $n \times m$ gerçekte matris olsun öyle ki $Q^T Q = I$ ve A , $n \times n$ gerçekte simetrik bir matris olsun. A 'nin özdeğerlerini $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ şeklinde alalım. $Q^T A Q$ ' nun özdeğerleri $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_m$ ise $\lambda_{n-m+i} \leq \mu_i \leq \lambda_i$ ($i = 1, \dots, m$) dir.

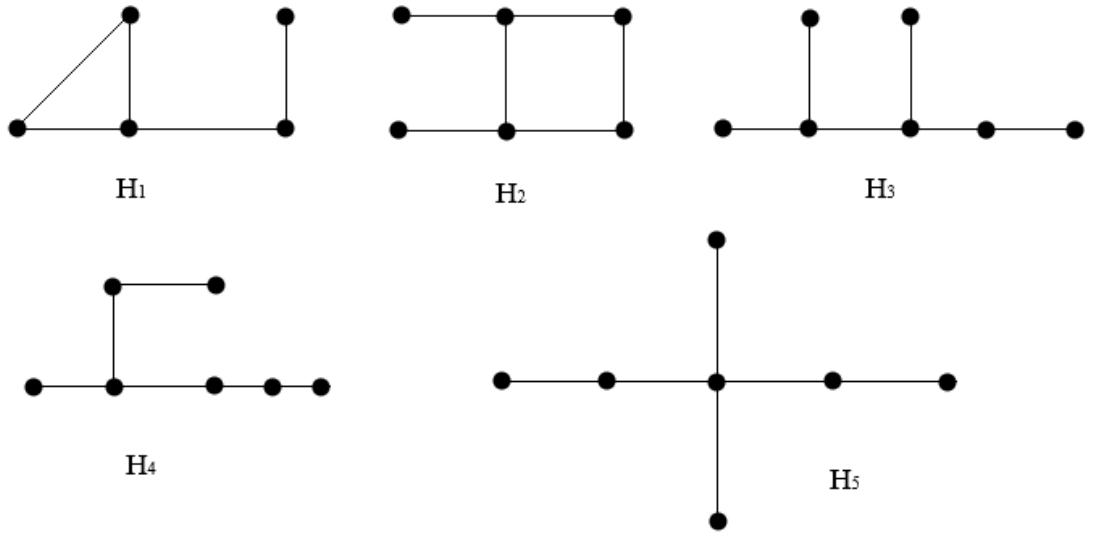
Sonuç 4.2.2. [17] G , n noktalı ve özdeğerleri $\lambda_1(G) \geq \dots \geq \lambda_n(G)$ olan bir graf olsun. H , G 'nin m noktalı indirgenmiş alt grafı olsun. H 'nin özdeğerleri $\lambda_1(H) \geq \dots \geq \lambda_m(H)$ ise $\lambda_{n-m+i}(G) \leq \lambda_i(H) \leq \lambda_i(G)$ ($i = 1 \dots m$) dir.

G' grafının verilen bir G grafının indirgenmiş alt grafı olup olmadığını söylemek için Lemma 4.2.1'den sonuç komşuluk matrisi için çok kullanışlıdır. Bununla birlikte $L(G')$, genel olarak $L(G)$ 'nin esas alt matrisi değildir. Fakat $L(G') + D'$ bazı negatif olmayan D' köşegen matrisi için $L(G)$ 'nin bir esas alt matrisidir. Aslında D' eklemek $L(G')$ 'nün özdeğerlerini azaltmaz. Böylece yukarıdaki sonuçta sağ taraftaki eşitsizlik $L(G')$ için sağlanır.

Teorem 4.2.6. [17] $L(G)$ 'nin bir özdeğeri olarak 0'ın katlılığı, G deki bileşenlerinin sayısına eşittir.

Teorem 4.2.7. [17] e , bir G grafının kenarı ve $G_1 = G - e$ ise Laplasyan özdeğerleri $0 = \mu_n(G_1) = \mu_n(G) \leq \mu_{n-1}(G_1) \leq \dots \leq \mu_2(G) \leq \mu_1(G_1) \leq \mu_1(G)$ dir.

Önerme 4.2.1. [17] Laplasyan özdeğerleri için $i = 1, 2, \dots, n - 1$ iken $\mu_n(G) = \mu_n(\bar{G}) = 0$ ve $\mu_i(\bar{G}) = n - (\mu_{n-i}(G))$ dir.



Şekil 4.13 $\overline{Kite_{p+2,p}}$ için yasaklanmış alt graflar

Teorem 4.2.8. [17] $\overline{Kite_{p+2,p}}$ Laplasyan spektrumu ile belirlenebilirdir.

İspat. Lemma 4.2.9'dan $n = p + 2$ koyarsak, $Kite_{p+2,p}$ nin karakteristik polinomunu aşağıdaki gibi yazarız:

$$\text{char} \left(L(Kite_{p+2,p}) \right) (x) = x(x - p)^{p-2} (x^3 - (p + 4)x^2 + (3p + 4)x - p - 2)$$

$(Kite_{p+2,p})$ nin özdeğerlerini $\mu'_1 \geq \mu'_2 \geq \dots \geq \mu'_{n-1} \geq \mu'_n = 0$ olarak gösterelim. Daha sonra $p + 1 < \mu'_1 < p + 2$, $\mu'_2 = \dots = \mu'_{n-3} = p$, $2 < \mu'_{n-2} < 3$, $0 < \mu'_{n-1} < 1$ alırız. $L(\overline{Kite_{p+2,p}})$ 'nin özdeğerlerini $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_{n-1} \geq \mu_n = 0$ ile gösterirsek Önerme 4.2.1 ile $p + 1 < \mu_1 < p + 2$, $p - 1 < \mu_2 < p$, $\mu_3 = \dots = \mu_{n-2} = 2$ ve $0 < \mu_{n-1} < 1$ eşitsizliklerini elde ederiz.

$\overline{Kite_{p+2,p}}$ ile Laplasyan kospektral G grafi verilsin. Açık ki G , $p + 2$ noktaya ve $2p - 1$ kenara sahiptir. $\mu_{n-1} > \mu_n = 0$ olduğundan G 'nin bağlantılı olduğunu söyleriz. Ayrıca K_4 , $K_3 \cup K_3$ ve Şekil 6.2 de verilen graflar Sonuç 4.2.2 den G için yasaklanmış alt graflardır. Bu şu anlama gelir ki G 'nin klik sayısı için $\omega(G) \leq 3$ tür.

İlk olarak $\omega(G) = 2$ olduğunu göstereceğiz. Böylece diğer taraftan $\omega(G) = 3$ olduğunu varsayalım. Bu durumda G en az bir üçgen içermelidir. Bu üçgenin noktalarını $u, v, w \in V(G)$ ile G 'nin sadece u 'ya komşu olan ancak v ve w 'ya komşu olmayan tüm noktalarının kümesini T_u ile gösterelim. Benzer şekilde $T_v, T_w, T_{uv}, T_{uw}, T_{vw}, T_{uvw}$ elimizde vardır. Şimdi tüm bu noktaların kümesini inceleyelim. Açık ki $T_{uvw} = \emptyset$ dir. $a \in T_v$ olduğunu varsayalım. $T_w = T_{uw} = T_{vw} = \emptyset$ olur. $N(a) = \{u, v\}$ ise H_1 yasaklanmış alt graftır. Aynı zamanda herhangi $u_1 \in T_u$ ve $v_1 \in T_v$ için $N(u_1) = \{u\}$ ve $N(v_1) = \{v\}$ alırız. Buradan $V(G) = \{u, v, w\} \cup T_u \cup T_v$ buluruz ve T_u, T_v sadece sarkıt noktalar içerir. G , $2p - 1$ kenar içermeliyse $|T_{uv}| = p - 3$ ve $|T_u| + |T_v| = 2$ eşitliklerini söyleriz. Fakat bu formdaki herhangi bir graf için bu form noktaların derecelerinin karelerinin toplamı $\overline{Kite_{p+2,p}}$ ile aynı olamaz. O zaman T_{uv} boş olmak zorundadır ve $V(G) = \{u, v, w\} \cup T_u \cup T_v \cup T_w$ dir. H_1 yasaklanmış olduğundan T_u, T_v ve T_w sadece sarkıt noktalar içerebilir. Böylece $p = 3$ alırız. Bu tekrar çelişki verir. Yani $\omega(G) \neq 3$ tir. Bu bize $\omega(G) = 2$ ve $t(G) = 0$ olduğunu gösterir.

Şimdi nokta kümesi $\{x, y, z\}$, öyle ki $x \sim y$ ve $x \sim z$ olan G 'nin indirgenmiş bir P_3 alt grafi için $T_x, T_y, T_z, T_{xy}, T_{xz}, T_{yz}, T_{xyz}$ kümelerini düşünerek devam edelim. Açık ki $T_{xy} = T_{xz} = T_{xyz} = \emptyset$ dir. $T_{yz} = \emptyset$ alalım. H_3, H_4, H_5 yasaklanmış iken T_x, T_y ve T_z ise en az iki nokta içeriyorsa bu noktalar sarkıt olmalıdır. Bu durumda G 'nin kenar sayısı $2p - 1$ ' e ulaşamaz. Böylece $T_{yz} \neq \emptyset$ olduğunu söyleriz. $u' \in T_{yz}$ olduğunu varsayalım. $a' \in T_y$ alırsak $T_{u'} = T_x = \emptyset$ ve $a' \not\sim u'$ dir. Çünkü H_1 ve H_2 yasaklanmıştır. $|T_y| \geq 2$ ise her $b \in T_y$ için $N(b) = \{y\}$ alırız çünkü H_4 yasaklanmıştır. Benzer biçimde $|T_z| \geq 2$ ise her $c \in T_z$ için $N(c) = \{z\}$ olduğunu söyleriz. Aynı zamanda $K_{m,n}$ iki parçalı tam grafi G 'nin indirgenmiş alt grafi ise $\min\{m, n\} \leq 2$ tir. Çünkü H_2 yasaklanmıştır. $|T_x \cup T_y \cup T_z| = p - 1$ ve G , $2p - 1$ kenar içerirse $G \cong \overline{Kite_{p+2,p}}$ ile sonucuna ulaşırız.

Önerme 4.2.1 ve Teorem 4.2.10 kullanarak aşağıdaki sonucu kolayca elde edebiliriz.

Sonuç 4.2.3. [17] $Kite_{p+2,p}$ Laplasyan spektrumu ile belirlenebilir.

4.3. Uçurtma Grafın İşaretsiz Laplasyan Matrisine Göre Spektral Özellikleri

Bundan sonraki kısımda v_i noktasının derecesini d_i ile göstereceğiz. n noktalı ve m kenarlı G grafi için $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$ olarak alacağız. $Q(G)$ işaretsiz Laplasyan matrisinin özdeğerlerini $q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_n$ olacak şekilde kullanabiliriz. $DI(G)$ uzaklık matrisinin tüm özdeğerleri reeldir. Bundan sonra G 'nin uzaklık matrisinin özdeğerlerini $\rho_1 \geq \rho_2 \geq \dots \geq \rho_n$ eşitsizliğini sağlayacak şekilde kullanacağız. $S_A(G), S_Q(G)$ ve $S_D(G)$ sırasıyla G 'nin komşuluk spektrumu, işaretsiz Laplasyan spektrumu ve uzaklık spektrumunu gösterebilir. G ve H grafları aynı işaretsiz Laplasyan spektrumuna sahipse (başka bir deyişle işaretsiz Laplasyan karakteristik polinomları eşitse) bunlara kospektral denir. G ve H grafları izomorf ise kospektral olması gerekir. G ile aynı işaretsiz Laplasyan spektrumuna sahip, izomorf olmayan başka graf yoksa G grafi işaretsiz Laplasyan spektrumuna göre belirlenebilir denir. Yani herhangi H grafi için $S_Q(H) = S_Q(G)$ ise $H \cong G$ olduğu ifade edilir. Benzer şekilde uzaklık, komşuluk ve Laplasyan matrisine göre belirlenebilirlik tanımı da yapılabilir. Bu kısımda öncelikle $n \neq 5$ ve $n \geq 4$ iken $Kite_{n,n-1}$ uçurtma grafının işaretsiz Laplasyan spektrumu ile belirlenebilir olduğu, ayrıca $n \geq 4$ için $Kite_{n,n-1}$ 'in uzaklık spektrumuna göre belirlenebilir olduğu sonucuna yer verilmiştir.

Öncelikle ilerleyen bölümlerde kullanacağımız bazı sonuçları verelim. Reel, simetrik ve mertebesi n olan bir M matrisinin özdeğerleri $\theta_1(M) \geq \theta_2(M) \geq \dots \geq \theta_n(M)$ şeklinde sıralansın.

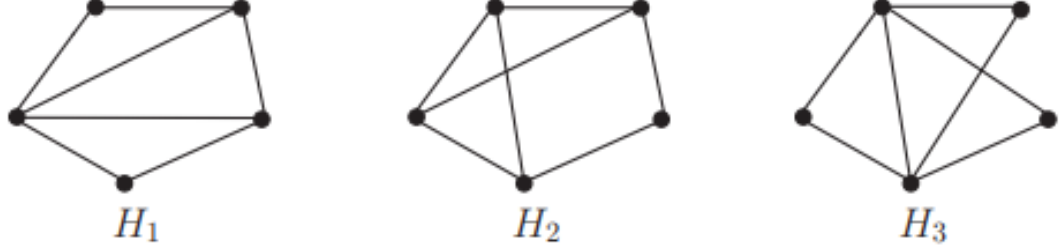
Lemma 4.3.1. [19] Mertebesi n olan herhangi G grafi için $q_3 \geq d_3 - \sqrt{2}$ dir.

Lemma 4.3.2. [19] n mertebeli herhangi G grafi için $d_{n-1} \geq q_{n-1} - 1$ dir. Dahası eşitlik sağlanırsa $d_{n-1} = d_n$ ve minimum dereceli v_n noktası ve ikinci en küçük minimum dereceli v_{n-1} noktası komşudur.

$Kite_{n,n-1}$ Uçurtma Grafi Laplasyan ve Uzaklık Spektrumuna Göre Belirlenebilir

K_n^p sembolü K_{n-p} kliğinin sadece bir noktasına p tane sarkit kenar eklenerek elde edilen grafi gösterebilir. Özellikle $K_n^1 \cong Kite_{n,n-1}$ dir. K_n^p ve $\overline{K_n^p}$ graflarının Laplasyan ve komşuluk spektrumlarına göre belirlenebilir olduğu kanıtlanmış [18]. Aşağıda Şekil

4.17 de H_1 , H_2 ve H_3 grafları gösterilmiştir. Matlab kullanılarak Tablo 4.1 elde edilebilir.



Şekil 4. 14 H_1 , H_2 ve H_3 grafları

G	İşaretsiz Laplasyan Spektrumu	Uzaklık Spektrumu
$Kite_{5,4}$	$(\frac{7+\sqrt{33}}{2}, 3, 2, 2, \frac{7-\sqrt{33}}{2})$	$(5.3441, -0.7105, -1, -1, -2.6336)$
$Kite_{4,3}$	$(\frac{5+\sqrt{17}}{2}, 2, 1, \frac{5-\sqrt{17}}{2})$	$(4.0996, -0.7165, -1, -2.3832)$
C_4	$(4, 2, 2, 0)$	$(4, 0, -2, -2)$
H_1	$(6.1249, 3, 2.6367, 2, 1.2384, 1)$	$(5.2926, -0.3820, -0.7217, -1.5709, -2.6180)$
H_2	$(5.7785, 3, 2.7108, 2, 0.5107)$	$(5.2239, 0.1606, -1, -2, -2.3844)$
H_3	$(\frac{7+\sqrt{33}}{2}, 3, 2, 2, \frac{7-\sqrt{33}}{2})$	$(5.3723, -0.3723, -1, -2, -2)$

Şekil 4. 15 Bazı grafların Laplasyan ve uzaklık spektrumları

Teorem 4.3.1. [19] $n \geq 4$ ve $n \neq 5$ ise $Kite_{n,n-1}$ grafi $Q - DS$ (işaretsiz Laplasyan spektrumuna göre belirlenebilir) dir. Bunun da ötesinde $S_Q(G) = S_Q(Kite_{n,n-1})$ ise $G \cong H_3$ ya da $G \cong Kite_{5,4}$ tür.

İspat. $S_Q(G) = S_Q(Kite_{n,n-1})$ olduğunu varsayalım. G 'nin işaretsiz Laplasyan spektrumu

$$\left(\frac{2n-3+\sqrt{4n^2-20n+33}}{2}, n-2, \underbrace{n-3, \dots, n-3}_{n-3}, \frac{2n-3-\sqrt{4n^2-20n+33}}{2} \right) \quad (4.1)$$

(4.1) den $q_1 > 2(n-2)$ ve $q_1 \leq 2d_1$ eşitsizliğinden G bağlantılı graf olmak zorundadır. (3.1) den

$$2m = \sum_{i=1}^n d_i = \sum_{i=1}^n q_i = n^2 - 3n + 4, \sum_{i=1}^n d_i (d_i + 1) = \sum_{i=1}^n q_i^2 = n^3 - 4n^2 + 7n - 2 \quad (4.2)$$

eşitliklerini buluruz.

(3.2) den $n = 4$ ise $m = 4$ tür. G bağlantılı graf olduğu için $G \cong C_4$ veya $G \cong Kite_{4,3}$ tür. Tablo 4.1. den $S_Q(Kite_{4,3}) \neq S_Q(C_4)$ olduğunu kontrol edebiliriz. Böylelikle $G \cong Kite_{4,3}$ tür.

(3.2) den $n = 5$ ise $m = 7$ dir. Böylece $G \in \{H_1, H_2, H_3, Kite_{5,4}\}$ tür. Tablo 4.1 den $G \in \{H_3, Kite_{5,4}\}$ olduğunu kolayca görebiliriz.

Sonuç olarak sadece $n \geq 6$ durumunu göstermeye ihtiyaç vardır. v_n ve v_{n-1} sırasıyla G nin minimum dereceli noktasını ve ikinci en küçük minimum dereceyi gösterebilir. Lemma 4.3.3 ve (3.1) den $d_{n-1} \geq n - 4$ olduğunu buluruz. $d_{n-1} = d_n$ eşitliği sağlanırsa v_n ile v_{n-1} komşudur.

$i = 1, 2, \dots, n - 1$ iken $V(G) \setminus \{v_n\}$ kümesinin içindeki i dereeli noktaların sayısı n_i olsun. şimdi (3.1) ve Lemma 4.3.2 den $d_n \leq d_3 \leq n - 2$ eşitsizliği bulunur. Yani $n_{n-1} \leq 2$ dir. (3.1) ve (3.2) den

$$n_{n-4} + n_{n-3} + n_{n-2} + n_{n-1} = n - 1 \quad (4.3)$$

$$(n - 4)n_{n-4} + (n - 3)n_{n-3} + (n - 2)n_{n-2} + (n - 1)n_{n-1} = n^2 - 3n + 4 - d_n \quad (4.4)$$

$$(n - 4)^2 n_{n-4} + (n - 3)^2 n_{n-3} + (n - 2)^2 n_{n-2} + (n - 1)^2 n_{n-1} = n^3 - 5n^2 + 10n - 6 - d_n^2 \quad (4.5)$$

denklemleri elde edilir.

$d_{n-1} = n - 4$ olduğunu varsayalım. O zaman $d_{n-1} = d_n = n - 4$ tür. (4.3) ve (4.4) ten

$$n_{n-3} + 2n_{n-2} + 3n_{n-1} = n + 4 \quad (4.6)$$

denklemini buluruz.

(4.4) ve (4.5) ten

$$(n - 3)n_{n-3} + 2(n - 2)n_{n-2} + 3(n - 1)n_{n-1} = 2n^2 - 6n + 10 \quad (4.7)$$

bulunur.

(3.6) ve (3.7) $n_{n-2} = \frac{1}{2}(n^2 - 7n + 22) - 3n_{n-1}$ olduğunu söyler ve böylece (3.6) dan

$$n_{n-3} = -n^2 + 8n - 18 + 3n_{n-1} \quad (4.8)$$

dir.

$n \geq 6$, $n_{n-1} \leq 2$ ve (3.8) den $n_{n-3} = 0, n_{n-1} = 2, n_{n-2} = \frac{1}{2}(n-2)(n-5)$ ve $n = 6$ dır. Sonuç olarak (3.3) yardımıyla $n_5 = 2, n_4 = 2, n_2 = 1$ ile $n = 6$ alabiliriz. Fakat $n_5 = 2, n_4 = 2, n_2 = 1$ ve $d_6 = 2$ olan 6 mertebeli bağlantılı graf yoktur, bu bir çelişkidir.

Yani $d_{n-1} \geq n-3$ ve $n_{n-4} = 0$ eşitliği (4.3)-(4.5) denklemlerini sağlar. (4.3) ve (4.4) ten n_{n-3} silinerek

$$2n_{n-1} + n_{n-2} = n + 1 - d_n \quad (4.9)$$

buluruz.

(4.3) ve (4.5) ten n_{n-3} silinerek

$$4(n-2)n_{n-1} + (2n-5)n_{n-2} = 2n^2 - 5n + 3 - d_n^2 \quad (4.10)$$

elde edilir.

(4.9) ve (4.10) denklemlerini çözersek $n_{n-1} = (d_n - 1) + 4 - \frac{5}{2}d_n - \frac{1}{2}d_n^2$ denklemini buluruz.

$d_n \geq 2$ ise (4.2) denklemi $2m \geq n(n-2) > n^2 - 3n + 4 = 2m$ olduğunu ifade eder. Ancak bu $n \geq 6$ ile çelişki oluşturur. Böylece $d_n \leq n-3$ tür. Şimdi aşağıdaki fonksiyonu düşünelim.

$$\psi(x) = n(x-1) + 4 - \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}x^2, \quad 1 \leq x \leq n-3.$$
 Türevini alırsak

$\psi'(x) = n - \frac{5}{2}x - x > 0, \quad 1 \leq x \leq n-3$ olur. Yani $\psi(x)$ fonksiyonu $1 \leq x \leq n-3$ için artan fonksiyondur. $d_n \geq 2$ ise $n \geq 6$ ile çelişen $\psi(2) = n-3 \leq n_{n-1} \leq 2$ eşitsizliğini buluruz. O zaman $d_n = 1$ için sonucuna ulaşılır. $m = \frac{1}{2}(n-2)(n-1) + 1$ için (4.2) den $G \setminus \{v_n\} \cong K_{n-1}$ elde ederiz. Yani $Kite_{n,n-1} \cong G$ dir.

4.4. Uçurtma Grafın Uzaklık Matrisine göre Spektral Özellikleri

$f(x) = x^3 - (n-3)x^2 - (5n-9)x - (3n-5)$ ve $f(x) = 0$ 'ın kökleri a, b, c iken $Kite_{n,n-1}$ 'in uzaklık spektrumu;

$$\left(a, b, \underbrace{-1, -1, \dots, -1}_{n-3}, c \right) \quad (4.11)$$

dir.

Lemma 4.4.1. [19] $n \geq 4$ ise $-0.72 < \rho_2(Kite_{n,n-1}) < -0.69$ dir.

İspat. $n \geq 4$ için $f(n) = -2n^2 + 6n + 5 < 0$, $f(n+2) = 16n + 43 > 0$. Buradan $f(-0.69) < -0.026n - 0.11 < 0$, $f(-0.72) > 0.08n - 0.3 > 0$,

$f(-2.3) = 3.21n - 11.977 > 0$, $f(-4.4) = -0.36n - 61.704 < 0$ olur. Yukarıdaki eşitsizliklerden istenen sonucu buluruz. Aşağıdaki sonucu kolayca elde edebiliriz.

Lemma 4.4.2. [19] K_n den e kenarı silinerek elde edilen mertebesi $n(\geq 4)$ olan graf $K_n \setminus \{e\}$ olsun.

$$S_D(K_n \setminus \{e\}) = \left(\frac{n-1 + \sqrt{(n-1)^2 + 8}}{2}, \frac{n-1 - \sqrt{(n-1)^2 + 8}}{2}, \underbrace{-1, -1, \dots, -1}_{n-3}, -2 \right)$$

dir.

Teorem 4.4.1. [19] G ve $Kite_{n,n-1}$ graflarının uzaklık spektrumuna göre kospektral olduğunu varsayalım. (4.11) den

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc) = n^2 + 4n - 9, \text{ buradan}$$

$$\sum_{i=1}^n (\rho_i)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + n - 3 = n^2 + 5n - 12 \quad (4.12)$$

$$\sum_{i=1}^n (\rho_i)^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n d_{ij}^2 \geq \sum_{i=1}^n (d_i + 4(n-1-d_i)) = 4n(n-1) - 6m \quad (4.13)$$

(4.12) ve (4.13) ten $6m \geq 3n^2 - 9n + 12$ iki tarafı 3'e bölersek

$$2m \geq n^2 - 3n + 4 \quad (4.14)$$

tür. Şimdi aşağıdaki iddiayı ispatlayalım.

İddia 1. G , ne $K_s \setminus \{e\}$, ($s \geq 4$) grafını ne de C_4 grafını indirgenmiş alt grafı olarak içeremez.

İspat. Tam tersine $K_s \setminus \{e\}$ ($s \geq 4$) yada C_4 grafını indirgenmiş alt graf olarak içerdiğini varsayalım. $K_s \setminus \{e\}$ ($s \geq 4$), G grafının indirgenmiş alt grafı ise Lemma 4.3.1, 4.4.1 ve 4.4.2 den

$\frac{s-1-\sqrt{(s-1)^2+8}}{2} = \rho_2(K_s \setminus \{e\}) \leq \rho_2(G) < -0.65$ bu, $s \leq 3$ olduğu anlamına gelir, bu da bir çelişkidir.

C_4 grafi G nin indirgenmiş alt grafi ise Tablo 4.1, Lemma 4.4.1 ve 4.4.2 den

$$0 = \rho_2(C_4) \leq \rho_2(g) < -0.65$$

olur, bu bir çelişkidir. İddia 1 in ispatı tamamlanır.

$2m \geq (n-1)(n-2) + 2$ için (4.14) ten G nin bağlantılı graf olduğu kolayca görülebilir. G nin uzaklık spektrumundan $G \not\cong K_n$ dir. Böylelikle $d_n \leq n-2$ olur.

$n = 4$ ise (4.14) ten $m \geq 4$ tür. $G \notin \{K_4 \setminus \{e\}, C_4\}$ için İddia 1 ve $G \not\cong K_4$ önceki görüşten $G \cong Kite_{4,3}$ buluruz. Böylece bundan sonra daima $n \geq 5$ olduğunu varsayabiliriz.

v_i öyle bir nokta olsun ki $v_i v_n \notin E(G)$ ve $N_G(v_n) \cap N_G(v_i) \neq \emptyset$ şartlarını sağlasın. $|U| \geq 3$ iken $U = V(G) \setminus \{v_i, v_n\}$ alalım. $|N_G(v_n) \cap N_G(v_i)| = p$ olsun. $d_n \leq n-2$ için $p \leq n-2$ dir. G nin $N_G(v_n) \cap N_G(v_i)$ noktalarındaki indirgenmiş alt grafi H olsun.

$2 \leq p \leq n-2$ olduğunu varsayalım. $v_i v_n \notin E(G)$ ve iddia 1 den G nin C_4 grafini indirgenmiş alt graf olarak içermeyeceğinden hareketle $H \cong K_p$ dir. Bu durumda iddia 1 deki çelişkidenden $G, K_s \setminus \{e\}$ ($s \geq 4$) grafini indirgenmiş alt graf olarak içerecektir.

Böylece $p = 1$ ve $N_G(v_n) \cap N_G(v_i) = \{v_k\}$ eşitliğini varsayabiliriz.

$m \geq \frac{1}{2}(n-2)(n-1) + 1$ ve $p = 1$ için $U \setminus \{v_k\}$ nin her noktası $\{v_n, v_i\}$ nin sadece bir noktası ile komşudur ve U nun nokta kümesi G de indirgenmiş bir K_{n-2} kliklidir. $d_n \geq 2$ ise G nin yapısından Şekil 4.17 deki H_1 'i $|U| \geq 3$ için G nin indirgenmiş bir alt grafi olarak sonuçlandırabiliriz. Bu durumda Tablo 4.1, Lemma 4.4.1 ve (4.11) den

$-1 = \rho_{n-1}(G) \leq \rho_4(H_1) < -1.5$ çelişkisini elde ederiz. Aksi takdirde $d_n = 1$ ve sonuç olarak $G \cong Kite_{n,n-1}$ dir.

5. BÖLÜM

TARTIŞMA, SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında uçurtma grafların bazı matrislere göre spektral özellikleri incelenmiştir. Tezimizi oluşturmamızdaki temel amaç, uçurtma grafin bazı özel matrislere göre spektral özellikleri ile ilgili yapılan çalışmaları bir araya toplamaktır. Burada kullanılan matrisler; komşuluk, uzaklık, Laplasyan ve işaretli Laplasyan matrisleridir. Yapılan literatür taramasında uçurtma grafların komşuluk spektrumuna göre belirlenebilir olduğu, uçurtma grafa Laplasyan kospektral olan bir grafin, belirli şartlar altında uçurtma grafa izomorf olduğunu gösteren çalışmalar tespit edilmiştir [16]. Bunların dışında yakın zamanda yapılan bir çalışmada $Kite_{p+2,p}$ grafinin Laplasyan spektrumuna belirlenebilir olduğu ispat edilmiştir [17]. Yine uçurtma grafin uzaklık ve işaretli Laplasyan spektrumuna göre belirlenebilir olduğunu gösteren çalışmalar literatürde mevcuttur [19].

Bu taramalar bize şunu gösteriyor ki $Kite_{n,p}$ uçurtma grafinin $p \geq 4$ ve n nin tüm değerleri için Laplasyan spektrumuna göre belirlenebilir olduğu, n ve p nin hangi değerleri için $Kite_{n,p}$ nin işaretli Laplasyan ve uzaklık spektrumuna göre belirlenebilir olduğu açık bir problem teşkil etmektedir. Yukarıda verilen bilgiler de bu açık problemlerin çözümünde kaynaklık vazifesi görecektir.

Sonuç olarak bu tez çalışmasında derlenen bilgiler, uçurtma grafin spektral özellikleri üzerine çalışma yapacak araştırmacılara katkı sunacaktır.

KAYNAKLAR

1. Lipschutz S., Lipson M. L. "Linear Algebra 4th ed.", *McGrawhill Publishers*, USA, 2009.
2. Kuttler K., "Linear Algebra, Theory And Applications", *Saylor Foundation*, 2012.
3. Lay D.C., Lay S.R., McDonald J.J., "Linear Algebra and Its Applications 5th ed.", *Pearson*, USA, 2016.
4. Carrell J.B., "Fundamentals of Linear Algebra", 2005.
5. Anton H., Rorres C., "Elementary Linear Algebra (Applications Version) 10th ed.", *John-Wiley and Sons*, USA, 2010.
6. Bapat R.B., "Graphs and Matrices", *Springer, Hindustan Book Agency*, 2010.
7. Gross J.L., Yellen J., Zhang P., "Handbook of Graph Theory 2nd ed." *Chapmand and Hall/CRC*, 2014.
8. Vasudev C., "Graph Theory with Applications", *New Age International Publishers*, New Delhi, 2006.
9. Ruohonen K., "Graph Theory", Çeviri Editörü/Editörleri, *Janne Tamminen, Kung-Chung Lee, Robert Piche*, 2013.
10. Topcu H., "Graf İzomorfizmi ve Kospektral Graflar", *Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi*, Nevşehir, 2016.
11. Cvetkovic D., Rowlinson P., Simic S., "An Introduction to the Theory of Graph Spectra", *Cambridge University Press*, New York, 2010.

12. Sorgun S., Topcu H., “On the spectral characterization of kite graphs”, *Journal of Algebra Combinatorics Discrete Structures and Applications*, 3(2), 81-90, 2016.
13. Guo J.M., “On the second largest Laplacian eigenvalue of trees”, *Linear Algebra and its Applications*, 404, 251-261, 2005.
14. Godsil C., Royle G., “Algebraic Graph Theory”, *Springer-Verlag*, New York, 2001.
15. Topcu H., Sorgun S., “Uçurtma Grafin Laplasyan Özdeğerleri üzerine”, *Anadolu Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi B-Teorik Bilimler*, 6(1), 1-7, 2017.
16. Topcu H., Sorgun S., “The Kite graph is determined by its adjacency spectrum”, *Applied Mathematics and Computation*, 330(2018), 134-142, 2018.
17. Topcu H., “ $Kite_{p+2,p}$ is determined by its Laplacian Spectrum”, *Transactions on Combinatorics*, 10(3), 165-170, 2021.
18. Zhang X., Zhang H., “Some graphs determined by their spectra”, *Linear Algebra Applications*, 431, 1443-1454, 2009.
19. Das K.C., Liu M., “Kite graphs determined by their spectra”, *Applied Mathematics and Computation*, 297, 74-78, 2017.
20. Stanic Z., “Graphs with small spectral gap”, *J. Linear Algebra*, 417-432, 2013.
21. Boulet R., Jove B., “The lollipop graph is determined by its spectrum”, *J. Combinatorics*, 1-43, 2008.

22. Zhou J., Bu C., “Spectral characterization of line graphs of starlike trees”,
Linear Algebra, 1040-1050, 2013.

