

T.C.
NEVŞEHİR HACIBEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DÜZENLENMİŞ KORTEWEG-DE VRIES (MKdV)
DENKLEMİNİN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMLERİ
İLE SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Tezi Hazırlayan
Tuncel ACER

Tez Danışmanı
Doç. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek lisans Tezi

Şubat 2021
NEVŞEHİR

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim ve tez çalışmamda araştırmamın her aşamasında bana yol gösteren, yardımcı olan engin bilgilerini benimle paylaşan, her türlü konuda desteğini benden esirgemeyen, tezimde büyük emeği olan ve gerçek bir dost olarak kazandığım danışman hocam Sayın Doç. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ'a,

Yüksek lisans öğrenimim esnasında bilgilerinden yararlandığım matematik bölümünün değerli hocalarına,

Bu tez çalışmasına başlamama vesile olan ve hiçbir zaman emeklerini ödeyemeyeceğim, maddi ve manevi desteklerini benden esirgemeyen eşim Semra ACER'e ve kızım Nazlı ACER'e, teknik desteğinden dolayı oğlum Çağrı ACER'e, Leyla AKTEPE ve Vedat AKTEPE'ye

Teknik ve idari yardımlarından dolayı Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölüm Başkanlığı'na çok teşekkür ederim.

**DÜZENLENMİŞ KORTEWEG-DE VRIES (MKdV) DENKLEMİNİN SONLU
ELEMANLAR YÖNTEMLERİ İLE SAYISAL ÇÖZÜMLERİ**

(Yüksek Lisans Tezi)

Tuncel ACER

**NEVŞEHİR HACIBEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Şubat 2021

ÖZET

Bu tez çalışmasında, MKdV (Modifiye edilmiş Korteweg-deVries) denkleminin yaklaşık çözümleri dördüncü (kuartik) mertebeden B-spline fonksiyonlar kullanılarak Subdomain yöntemi ve beşinci (kuintik) mertebeden B-spline fonksiyonlar kullanılarak Kollokasyon yöntemi ile elde edilmiştir.

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde sonlu elemanlar yöntemi, spline fonksiyonlar, B-spline fonksiyonlar, soliton dalgalar, subdomain yöntemi, kollokasyon yöntemi, quartik ve kuintik B-spline fonksiyonlar hakkında detaylı bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde KdV denklemi tanıtılarak, denklem hakkında geniş bir literatür araştırması yapılmıştır.

Üçüncü bölümde MKdV denkleminin Kuartik B-spline Subdomain sonlu elemanlar yöntemi ile yaklaşık çözümleri elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde MKdV denkleminin Kuintik B-spline Kollokasyon sonlu elemanlar yöntemi ile yaklaşık çözümleri bulunmuştur.

Beşinci bölümde ise sayısal çözümlerle ilgili elde edilen sonuçlar ve öneriler verilmiştir.

Anahtar kelimeler; *MKdV denklemleri, Subdomain yöntemi, Kollokasyon yöntemi, Sonlu elemanlar yöntemi, Spline, , Soliton dalgaları, Kuartik B-spline fonksiyonları, Kuintik B-spline fonksiyonları.*

Tez Danışman: *Doç. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ*

Sayfa sayısı:60



**NUMERICAL SOLUTIONS OF THE MODIFIED KORTEWEG-DE VRIES
(MKdV) EQUATION USING FINITE ELEMENT METHODS**

(M. Sc. Thesis)

TUNCEL ACER

NEVŞEHİR HACIBEKTAŞ VELİ UNIVERSITY

INSTITUTE OF SCIENCE

February 2021

ABSTRACT

In this thesis, numerical solutions of the MKdV equation are obtained by fourth order (quartic) B-spline functions with subdomain method and fifth order (quintic) B-spline functions with collocation method.

This thesis study consist of five parts. In the first part ; detailed information about finite element method, spline, B-spline functions, soliton waves, subdomain method, collocation method, quartic and quintic B-spline functions has been presented.

In the second part, by introducing the KdV equation, a wide literature research on the equation has been done.

In the third part, numerical solutions of the MKdV equation with quartic B-spline subdomain finite element method were obtained.

In the fourth part, numerical solutions of the MKdV equation with quintic B-spline collocation finite element method were obtained.

In the fifth part, the obtained results and suggestions about the numerical solutions were given.

Keywords; *MKdV equation, Subdomain method, Collocation method, Finite element method, Spline, Soliton waves, Quartic B-spline functions, Quintic B-spline functions.*

Thesis Supervisor: *Doç. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ*

Number of pages:60



İÇİNDEKİLER

KABUL ONAY SAYFASI.....	i
TEZ BİLDİRİM SAYFASI	ii
ÖZET	iv
TABLolar LİSTESİ.....	x
ŞEKİLLER LİSTESİ	xi
1. BÖLÜM	1
1. TEMEL KAVRAMLAR.....	1
1.1. Sonlu Elemanlar Yöntemi	1
1.2. Spline Fonksiyonlar	2
1.3. B- Spline Fonksiyonlar	4
1.4. Soliton Dalgalar	4
1.5. Subdomain Yöntemi	6
1.6. Kollokasyon Yöntemi	6
1.7. Kuartik B-Spline Fonksiyonlar	8
1.8. Kuintik B-Spline Fonksiyonlar	9
2. BÖLÜM	10
2.1. Korteweg-de Vries (KdV) Denklemi	10
3. BÖLÜM	13
MKdV DENKLEMİNİN KUARTİK B-SPLINE SUBDOMAIN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLEÇÖZÜMÜ.....	13
3.1. Giriş.....	13
3.2. Kuartik B-spline fonksiyonlar.....	13
3.3. MKdV Denklemi için Subdomain Yöntemi	14
3.4. Kararlılık Analizi	16
3.5. Sayısal Örnekler ve Sonuçlar	18
3.5.1. Tek Soliton Dalganın Hareketi.....	18
3.5.2. İki Soliton Dalganın Etkileşimi.....	21

3.5.3. Üç Soliton Dalga Etkileşimi.....	22
4. BÖLÜM	24
MKdV DENKLEMİNİN KUİNTİK B-SPLINE KOLLOKASYON SONLU ELEMENLAR YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ	24
4.1. Kuintik B-spline Kollokasyon Yöntemi.....	24
4.2. Kararlılık Analizi	27
4.3. Sayısal Örnekler ve Sonuçlar	28
4.3.1. Tek Soliton Dalganın Hareketi.....	29
4.3.2. İki Soliton Dalganın Etkileşimi.....	32
4.3.3. Üç Tek Dalganın Etkileşimi.....	35
5. SONUÇ	39
KAYNAKÇA.....	39
ÖZGEÇMİŞ	45

TABLolar LİSTESİ

- Tablo.3.1.** $\varepsilon = 3, \mu = 1, c = 0.845, h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01, 0 \leq x \leq 80$ parametreleri için tek soliton dalganın değışmezleri ve hata normları..... 19
- Tablo.3.2.** $\varepsilon = 3, \mu = 1, c = 0.3, h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01, 0 \leq x \leq 80$ parametreleri için tek soliton dalganın değışmezleri ve hata normları..... 20
- Tablo.3.3.** $\varepsilon = 3, \mu = 1, h = 0.1, \Delta t = 0.01, c_1 = 2, c_2 = 1, x_1 = 15$ ve $x_2 = 25, 0 \leq x \leq 80$ parametreleri için iki soliton dalganın etkileşiminden elde edilen değışmezler. 21
- Tablo.3.4.** $\varepsilon = 3, \mu = 1, h = 0.1, \Delta t = 0.01, c_1 = 2, c_2 = 1, c_3 = 0.5, x_1 = 15, x_2 = 25, x_3 = 35, 0 \leq x \leq 80$ parametreleri için üç soliton dalganın etkileşiminden elde edilen değışmezler..... 23
- Tablo.4.1.** $\varepsilon = 3, \mu = 1, c = 0.845, h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01, 0 \leq x \leq 80$ parametreleri için tek soliton dalganın değışmezleri ve hata normları..... 31
- Tablo.4.2.** $\varepsilon = 3, \mu = 1, h = 0.1, \Delta t = 0.01, c_1 = 2, c_2 = 1, x_1 = 15, x_2 = 25$ ve $0 \leq x \leq 80$ parametreleri için iki soliton dalganın etkileşiminden elde edilen değışmezler. 33
- Tablo.4.3.** $\varepsilon = 3, \mu = 1, h = 0.1, \Delta t = 0.01, c_1 = 2, c_2 = 1, c_3 = 0.5, x_1 = 15, x_2 = 25, x_3 = 35$ ve $0 \leq x \leq 80$ parametreleri için üç soliton dalganın etkileşiminden elde edilen değışmezler..... 36

ŞEKİLLER LİSTESİ

- Şekil.3.1.** Tek soliton dalganın $\varepsilon = 3$, $\mu = 1$, $c = 0.845$, $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$, $0 \leq x \leq 80$ parametreleri için $t = 0, 5$ ve 10 zaman adımlarındaki hareketi.....20
- Şekil.3.2.** İki soliton dalganın $\varepsilon = 3$, $\mu = 1$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.01$, $c_1 = 2$, $c_2 = 1$, $x_1 = 15$ ve $x_2 = 25$, $0 \leq x \leq 80$ parametreleri için $t = 0, 2$ ve 5 zaman adımlarındaki hareketi.22
- Şekil.3.3.** Üç soliton dalganın $\varepsilon = 3$, $\mu = 1$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.01$, $c_1 = 2$, $c_2 = 1$, $c_3 = 0.5$, $x_1 = 15$, $x_2 = 25$, $x_3 = 35$, $0 \leq x \leq 80$ parametreleri için $t = 0, 2$ ve 5 zaman adımlarındaki hareketi.23
- Şekil.4.1.** Tek soliton dalganın $\varepsilon = 3$, $\mu = 1$, $c = 0.845$, $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$, $0 \leq x \leq 80$ parametreleri için $t = 0, 5, 10, 15$ ve 20 zaman adımlarındaki hareketi.....32
- Şekil.4.2.** İki soliton dalganın $\varepsilon = 3$, $\mu = 1$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.01$, $c_1 = 2$, $c_2 = 1$, $x_1 = 15$, $0 \leq x \leq 80$ parametreleri için $t = 0, 6, 7, 8, 16$ ve 20 zaman adımlarındaki hareketi.34
- Şekil.4.3.** Üç soliton dalganın $\mu = 1$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.01$, $c_1 = 2$, $c_2 = 1$, $c_3 = 0.5$, $x_1 = 15$, $x_2 = 25$ ve $x_3 = 35$, $0 \leq x \leq 80$ parametreleri için $t = 0, 6, 7, 8, 16$ ve 20 zaman adımlarındaki hareketi.38

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

KdV	Korteweg-de Vries
MKdV	Modifiye edilmiş Korteweg-de Vries
W_m	Ağırlık fonksiyonu
GKdV	Genelleştirilmiş Korteweg-de Vries
U_N	Yaklaşık çözüm
I_1	Kütle
I_2	Momentum
I_3	Enerji
L_2 ve L_∞	Hata normları

1. BÖLÜM

1. TEMEL KAVRAMLAR

1.1. Sonlu Elemanlar Yöntemi

Sonlu elemanlar kavramı ilk olarak 1960 yılında, Clough tarafından yayımlanan düzlem esnekliğindeki uygulamaları adlı makalesinde dile getirilmiştir [1]. Sonlu elemanlar yöntemi mühendislik ve öncelikle havacılık mühendisliği alanlarındaki değişik problemlerin çözümü için bir ihtiyaç olarak ortaya çıkmıştır. Sonlu elemanlar yöntemi karmaşık fiziksel özelliklere sahip problemleri daha basite indirgemek suretiyle, çözüm bulan bir yöntemdir. Günümüzde bilgisayarlardaki teknolojinin akıl almaz bir şekilde ilerlemesi sonlu elemanlar yönteminin çok hızlı bir şekilde gelişmesine olanak vermiştir. Uygulamalı matematikçiler, fizikçiler, mühendisler ve diğer bilim adamları bu yöntem ile ilgili çok sayıda çalışmalar yapmışlar ve yapmaya da devam etmektedirler [2].

Sonlu elemanlar yöntemlerinin; yapı mühendisliği, havacılık mühendisliği, uzay bilimleri, nükleer enerji mühendisliği, akışkanlar mekaniği, dinamik ve ısı iletim problemleri ve diğer mühendislik alanlarındaki problemlere başarılı bir şekilde uygulanabileceği görülmüştür. Sonlu elemanlar yönteminin diğer yöntemlere göre bazı avantajları aşağıda ifade edilmiştir [3];

- Düzensiz şekildeki yapıları ve diğer yöntemlerle modellenemeyen değişik karmaşık bölgeleri daha kolay bir şekilde modelleyebilmesi.
- Eleman denklemleri ayrı ayrı oluşturulduğundan değişik malzemelerden oluşan yapıları modelleyebilmesi.
- Çok değişik sınır şartlarıyla beraber kullanılabilmesi.
- Sınır koşullarının değişmesi halinde sonlu eleman modelinin değişmemesi.
- İhtiyaç duyulduğunda elemanların büyüklüklerinin değiştirilebilmesi.
- Sonlu eleman modelinin istenildiği zaman rahat bir şekilde değiştirilebilmesi.
- Bilgisayar programlama diline yatkın olması.

Sonlu elemanlar yönteminin bu avantajlarının yanında; çözüm bölgesinin alt bölgelere ayrılması işleminin belirli bir tecrübeyi gerektirmesi, süreklilik şartlarının alt bölgelere

uygulanmasında bir takım zorluklarla karşılaşılması ve bilgisayar programında veri girişi sırasında hatalar yapılması gibi dezavantajları da vardır [4].

Sonlu eleman yönteminin herhangi bir probleme uygulanmasında izlenecek temel adımlar aşağıda verilmiştir [5].

- Problemin çözüm bölgesinin ayrıklaştırılması (diskritizasyonu).
- Çözüm bölgesindeki tüm tipik elemanlar için eleman denklemlerinin türetilmesi.
- Verilen problemin denklemlerini elde etmek amacıyla eleman denklemlerinin birleştirilmesi.
- Problemin sınır şartlarının tatbik edilmesi.
- Birleştirilmiş denklemlerin çözümünün yapılması.
- Çözüm sonunda elde edilen sonuçların değerlendirilmesinin yapılması.

Sonlu elemanlar yönteminin integral formülasyonları genellikle varyasyonel ve ağırlıklı kalan yöntemleri olmak üzere iki farklı yoldan bulunabilir.

1.2. Spline Fonksiyonlar

Yaklaşım yöntemleri temel bilim dallarının birçok alanında ve mühendislikte olduğu gibi matematik alanında da oldukça çok kullanılmaktadır. Genelde iki tip yaklaşım problemlerinden söz edilebiliriz. Birinci tip problemlerde bu yöntemler, eldeki mevcut verileri kullanarak bilinmeyen fonksiyonları yaklaşık olarak bulmak için kullanılır. İkinci tip yaklaşım ise değişik fiziksel problemler için bir operatör denklem tarafından temsil edilen matematiksel modellemelerden oluşur. Bu tarz problemler, özdeğer ve özvektör problemleri, integro-diferansiyel denklemler, adi ve kısmi diferansiyel denklemler için sınır değer problemleri barındırmaktadır. Yukarıda belirtilen iki problem tipinde de, en iyi çözümü elde etmek için iki önemli sorunla karşılaşmak mümkündür;

- 1) Yaklaşım koşullarını yerine getirecek uygun fonksiyonların sınıfını seçmek,
- 2) Yaklaşımın etkili olması için iyi bir yöntem seçmek.

Bu yaklaşım yöntemlerinden polinom yaklaşımları önemli bir yere sahiptir. Ancak polinom yaklaşımı her zaman istenilen hassasiyette bir sonuç elde etmemize imkan vermeyebilir. Genellikle köşeleri keskin olan, yüksek mertebeden türevlerde hızlı

değişim gösteren fonksiyonlara ve bazı düzgün fonksiyonlara bile yüksek dereceden polinomlar ile arzulanan hassasiyette bir yaklaşım yapmak mümkün olmayabilir. Nokta sayısı arttıkça yaklaşımda kullanılacak olan polinomun derecesi de artacaktır. Bu durum ise yapılacak bazı hesaplamalarda hatalara sebep olacaktır. Kaldı ki istenilen fonksiyonun belirli bir aralığının değişik kademelerinde farklı özelliklere sahip olacağından fonksiyona tek bir eğri ile yaklaşmak hatalı sonuçlar verebilir. Bu nedenlerden dolayı arka arkaya gelen iki veri arasından yüksek dereceden olmayan birinci, ikinci, üçüncü veya arzulanan dereceden polinom fonksiyonlar ile yaklaşımların yapıldığı spline interpolasyon yöntemini kullanmak daha uygundur.

Yukarıdaki ifadelerden de anlaşılacağı üzere spline interpolasyon yaklaşımı gerçekte parçalanmış polinom yaklaşımıdır. Yani spline fonksiyonlar, veri aralıklarını değişik sonlu sayıda alt aralıklara bölerek, birbirini örtmeyen her bir alt aralıkta daha küçük dereceden polinomlarla yaklaşım yapma mantığına dayanmaktadır.

Spline fonksiyonlar ifadesi ilk defa Schoenberg tarafından 1946 yılında gündeme getirilmiştir [6]. 1960 11 yıllara kadar yavaş bir gelişim gösteren spline fonksiyonlara daha sonraki dönemlerde ilgi oldukça artmıştır. Bu ilginin en önemli nedeni, birçok yapısal özelliklere sahip olması, etkili yaklaşım gücü ve bilgisayarlarla yapılan hesaplamalardaki sağladığı kolaylıklardır. Depolanması, işlenmesi ve kullanılması daha kolay olan spline fonksiyonların dijital bilgisayarlardaki gelişmeler ile çok daha önemli hale geldiği görülmüştür [7]. Spline fonksiyonların hesaplamalarda sağladığı kolaylıklardan dolayı; interpolasyon, eğri uydurma, diferansiyel denklemlerin çözümünde, karmaşık geometrik nesnelerin matematiksel modellemesinde, eğri ve yüzey yaklaşımında sıkça kullanıldığı görülür.

Spline fonksiyonların sahip olduğu özellikler aşağıda verilmiştir [4].

- Spline fonksiyonlar smooth (düzgün) fonksiyonlardır,
- Spline fonksiyonların tamamı uygun tabanlara sahip sonlu boyutlu lineer uzaylardır,
- Spline fonksiyonların türevleri ve integralleri alınırsa yine spline fonksiyonlar elde edilir,
- Spline fonksiyonlar bilgisayarlarda hesaplama, işleme ve depolama açısından

elverişli fonksiyonlardır,

- Nümerik analizde ve yaklaşım teorisinde spline fonksiyonların kullanılması halinde matrisler ortaya çıkacaktır. Rumatrislerin uygun işaretleri ve determinant özellikleri açısından kolay hesaplanabilirler,
- Düşük dereceli spline fonksiyonlar oldukça esnektirler ve polinomlardaki gibi keskin salınımlar sergilemezler,
- Yaklaşım işlemi sonucunda elde edilen işaretler, katsayılar v.b. gibi yapılan polinomların yapıları ile de ilgilidir,
- Spline fonksiyonlar kullanıldığında, kararlılık ve yakınsaklığın incelenmesi daha basit olacaktır,
- Spline fonksiyonlar ve türevlerinin yaklaşık olarak aynı anda hesaplanması mümkündür.
- Yeteri kadar alt bölgelere ayrılmış, $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı olan her sürekli fonksiyon, n . dereceden spline fonksiyonu ile iyi bir biçimde temsil edilmesi mümkündür.

1.3. B- Spline Fonksiyonlar

Spline fonksiyonların hesaplanmasıyla lineer yada lineer olmayan sistemler elde edilir ki, bu sistemler arzulanan parametrelerin hesaplanmasına izin vermeyecek şekilde bazen uygun şartlı olmayabilir. Ayrıca spline yaklaşımları elde etme sürecinde sayısal kararsızlıklarla karşılaşmak mümkündür. Belirli derece ve düzgünlükteki tüm spline fonksiyonlar, aynı derece ve düzgünlükteki B-spline fonksiyonların bir lineer kombinasyonu şeklinde temsil edilebileceğinden, bu tür güçlükler “B-spline” (basis spline) olarak isimlendirilen farklı bir spline fonksiyon sınıfı ile giderilebilir [8]. Bu tür fonksiyonlara B-spline fonksiyon denmesinin sebebi, aynı dereceye sahip bütün spline fonksiyonlar kümesi için bir taban oluşturmasıdır. B-spline fonksiyonlar sayısal hesaplamalar için oldukça kullanışlıdır.

1.4. Soliton Dalgalar

Soliton kavramının kesin tanımını vermek kolay değildir, bununla birlikte lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem veya sistemlerin herhangi bir çözümüyle ilişkilendirilebilir.

KdV denklemi ve diğer benzer denklemlerin tek soliton çözümü (solitary wave) genellikle tek dalga olarak kullanılır, eğer birden fazla soliton çözümü varsa solitonlar olarak adlandırılır. Başka ifadeyle bir soliton diğer bir solitondan sonsuz olarak ayrılıyorsa bir tek dalgadır.

Soliton ve soliter dalgalar, bir veya daha çok kısmi diferensiyel denklem tarafından ifade edilen, özel koşullara sahip dinamik yapılardır [9]. İki dalganın çarpışma sonrası aynı hız ve şekilleri ile hareketlerine devam edebilmelerinden dolayı elastik dağılım özelliğine sahiptirler. Lineer olmayan hidrodinamik özellikleri ile bir soliter dalga, tutarlılığını ve dolayısıyla şeklini koruyan yerçekimi sınırlı bir dalgadır. Soliter dalgaların, genliği sınırlıdır ve sabit hız ve sabit şekil ile yayılırlar [10].

Bir soliton, diğer bir soliton ile çarpıştıktan sonra şeklini kaybetmez ve çarpışma sonrasında tekrar aynı özelliklerini koruyarak hareketine devam eder [11].

Soliton ve soliter dalgaların birçok benzerliklerine rağmen bazı farklılıkları da vardır. Soliter dalgalar, integrallenemez denklemlerin sınırlı çözümleri iken, solitonlar integrallenebilir denklemlerin kısıtlanmış sonuçlarıdır. Solitonların bir diğer ayırt edici özelliği ise diğer solitonlar ile zıt yönlü çarpışma sonrasında bile kendi şekillerini korumalarıdır. Soliter dalgalar, aynı yönlü çarpışmalarda özelliklerini korusalar da zıt yönlü çarpışmalarda farklılık gösterirler. Bu nedenle, soliter dalgaların çeşitliliği gerçek solitonların çeşitliliğinden çok daha geniştir. Tornadolar ve girdaplar gibi bazı soliter dalgaları ayırt etmek zordur. Bu nedenle, soliter dalgalar zaman zaman soliton benzeri hareketlilikler gösteren solitonumsu dalgalar olarak bilinirler [11].

KdV denkleminde soliton dalgaların çözümünün ilginç bir yönü de birbirleri içinden geçtikleri zaman herhangi bir şekil ve anlam değişikliğine uğramamalarıdır. Bugün solitonlar çoğu yerde kullanılmaktadır. Herhangi bir sinyal iletiminde, sinyalin zarara uğramadan ve yeterli büyüklükte hedefe ulaşması önemlidir. Normal sinyallerin durumları değişebilir ve genişliklerinde farklılıklar olabilir. Bu lineer dalgalar etrafa yayılabilir ve sinyalleri zayıflayabilir. Elektromanyetik dalgaları otomatik olarak yineleyen aletlere ihtiyaç kalmayacaktır. Çünkü solitonlar sıradan dalgalara göre genişliklerini değiştirmeden sabit tutabilmektedirler. Soliton dalgalar ile 10.000 km'ye kadar özellikleri değişmeden başarıyla sinyal iletilebilmektedir. Bununla birlikte çarpıştıklarında birbirlerinden etkilenmemekte ve sinyaller optik fiberler boyunca her iki

yönde iletilebilmektedir. Sinyaller, gideceği yere orijinal durumlarında ve yeterince anlaşılabilir büyüklükte ulaştırılabilir [12].

1.5. Subdomain Yöntemi

Bu yöntemde W_m ağırlık fonksiyonları

$$W_m(x) = \begin{cases} 1, & x \in [x_m, x_{m+1}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (m = 0, 1, \dots, N) \quad (1.5.1)$$

şeklinde seçilir. Alt aralıkların sayısı c_m parametrelerinin sayısına eşit olacak şekilde belirlenmelidir. W_m ağırlık fonksiyonları (1.5.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$\int_{\Omega} R(x, y, c_m) dx dy = 0 \quad (m = 0, 1, \dots, N) \quad (1.5.2)$$

bulunur. Bu denklem sisteminin çözülmesi ile c_m parametreleri elde edilir [5].

1.6. Kollokasyon Yöntemi

Bir diferansiyel denklemin tam çözümü ile yaklaşık çözümü arasındaki farkın, sıfırdan farklı bir ağırlık fonksiyonu ile çarpılıp toplamlarının en küçük yapılması işlemi ağırlıklı kalan yaklaşımı olarak adlandırılır ve bu yaklaşıma dayanan metotlara ise ağırlıklı kalan metodları denir. Her denklemin ağırlıklı integral formu oluşturulabileceğinden dolayı her denkleme tatbik edilebilir. Ağırlıklı kalan yöntemlerini ifade etmek için Ω bölgesinde

$$A(u) = f \quad (1.6.1)$$

Operatör denklemini ele alalım. Burada A lineer ya da lineer olmayan operatör ve f bağımsız değişkenin bir fonksiyonu olarak tanımlanırsa, buradaki u çözüme, bir yaklaşım olarak

$$u_N = \sum_{j=1}^N c_j \phi_j + \phi_0 \quad (1.6.2)$$

kullanılır ve (1.6.1) denkleminde (1.6.2) ile verilen u_N yaklaşık çözümü yerine yazıldığında $f_N = A(u_N)$ fonksiyonu elde edilir. Bu fonksiyon büyük olasılıkla f ye eşit değildir. $A(u_N)$ ile f fonksiyonu arasındaki farka

$$R = A(u) - f = A\left(\sum_{j=1}^N c_j \phi_j + \phi_0\right) - f \neq 0 \quad (1.6.3)$$

yaklaşımın kalanı denir. Burada R kalan fonksiyonu c_j parametrelerine bağlı olduğu kadar konuma da bağlıdır ve ağırlıklı kalan yöntemlerinde c_j parametreleri

$$\int_{\Omega} \psi_i(x, y) R(x, y, c_j) dx dy = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots, N) \quad (1.6.4)$$

ağırlıklı kalan integralindeki R kalanı sıfır olacak biçimde seçilir. Buradaki Ω iki boyutlu bir bölge ve ψ_i ler ise ağırlıklı kalan fonksiyonları olup (1.6.4) integralinin hesaplanmasıyla elde edilen denklemlerin çözülebilmesi için seçilen ψ_i ağırlıklı kalan fonksiyonlar kümesinin lineer bağımsız olması gerekir. Ağırlıklı kalanlar yönteminde ağırlık fonksiyonunun seçimine bağlı olarak yöntemler farklı isimle adlandırılır. Bu yöntemler Galerkin, Petrov-Galerkin, Kollokasyon ve Subdomain şeklinde sıralanabilir.

Bu tez çalışmasında kullanacağımız ağırlıklı kalan yöntemlerinden biri olan Kollokasyon yönteminde Ω bölgesinden seçilen N adet $X^i \equiv (x^i, y^i)$ kollokasyon noktasında kalanın sıfır olması istenir ki yani kalan

$$R(x^i, y^i, c_j) = 0, \quad (i = 0, 1, 2, \dots, N) \quad (1.6.5)$$

şeklinde olmalıdır. X^i kollokasyon noktalarının denklem sistemi iyi şartlı olacak biçimde seçilmesi çok önemlidir. Burada $\psi_i = \delta(X - X^i)$ alınır ve (1.6.4) denklemine yerine yazılacak olursa

$$\int_{\Omega} \delta(X - X^i) R(X, c_j) dx dy = 0 \quad (1.6.6)$$

veya

$$R(X^i, c_j) = 0 \quad (1.6.7)$$

elde edilir. Buradaki $\delta(x)$ Dirac delta fonksiyonu olup aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\int_{\Omega} f(x) \delta(x - \xi) dx dy = f(\xi) [4]. \quad (1.6.8)$$

B-spline fonksiyonlara dayanan kollokasyon sonlu elemanlar yöntemi, daha önceleri farklı türden doğrusal olmayan problemlerin yaklaşık çözümlerini elde etmek için kullanılmıştır. Mesela Kawahara denklemi septik B-spline kollokasyon [13], Burgers, KdV-Burgers (KdVB), kompleks modifiye edilmiş KdV (CMKdV), genelleştirilmiş doğrusal olmayan Schrödinger (GNLS) ve genelleştirilmiş Rosenau-RLW denklemleri ise kuintik B-spline kollokasyon yöntemiyle sayısal olarak çözülmüştür [14-17]. Yine Genelleştirilmiş Burgers–Fisher ve Genelleştirilmiş Burgers–Huxley denklemleri ise kübik B-spline kollokasyon algoritması yardımıyla çözülmüştür [17]. D. Irk, kübik ve kuintik B-spline kollokasyon yöntemiyle GNLS denkleminin, CMKdV denkleminin ve Boussinesq sistemi tipi (BST) denklem sisteminin çözümlerini bulmuştur [18]. Saka, Düzenli Uzun Dalga (RLW) ve Kuramoto-Sivashinsky (K-S) denklemlerinin, sayısal çözümlerini kuartik, kübik ve kuintik B-spline fonksiyonlar kullanarak kollokasyon yöntemi ile elde edilmiştir [18].

1.7. Kuartik B-Spline Fonksiyonlar

$[a, b]$ aralığının bir düzgün parçalanışı $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$ ve $h = x_{m+1} - x_m$ olmak üzere x_m düğüm noktalarında $\phi_m(x)$ kuartik B-spline fonksiyonlar $m = -2(1)N + 1$ noktaları için;

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^4} \left\{ \begin{array}{l} (x - x_{m-2})^4, \\ (x - x_{m-2})^4 - 5(x - x_{m-1})^4, \\ (x - x_{m-2})^4 - 5(x - x_{m-1})^4 + 10(x - x_m)^4, \\ (x_{m+3} - x)^4 - 5(x_{m+2} - x)^4, \\ (x_{m+3} - x)^4, \\ 0 \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ [x_{m-1}, x_m] \\ [x_m, x_{m+1}] \\ [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ \text{diğer durumlar.} \end{array} \right\} \quad (1.7)$$

şeklinde tanımlanır [19, 20]. $\{\phi_{-2}(x), \phi_{-1}(x), \dots, \phi_N(x), \phi_{N+1}(x)\}$ kümesi $a \leq x \leq b$ aralığında tanımlı olan fonksiyonlar için baz teşkil eder. Kuartik B-spline $\phi_m(x)$ fonksiyonu ve türevleri $[x_{m-2}, x_{m+3}]$ aralığı dışında sıfır olur. Her bir $\phi_m(x)$ kuartik B-spline fonksiyon $[x_{m-2}, x_{m+3}]$ aralığında peş peşe beş elemanı örter.

1.8. Kuintik B-Spline Fonksiyonlar

$[a, b]$ aralığının bir düzgün parçalanışı $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$ ve $h = x_{m+1} - x_m$ olmak üzere x_m düğüm noktalarında $\phi_m(x)$ kuintik B-spline fonksiyonlar $m = -2(1)N + 2$ noktaları için;

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^5} \begin{cases} (x - x_{m-3})^5, & [x_{m-3}, x_{m-2}] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5, & [x_{m-1}, x_m] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5 - 20(x - x_m)^5, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5 - 20(x - x_m)^5 + 15(x - x_{m+1})^5, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5 - 20(x - x_m)^5 + 15(x - x_{m+1})^5 - 6(x - x_{m+2})^5, & [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (1.8)$$

şeklinde tanımlanır. $\{\phi_{-2}(x), \phi_{-1}(x), \dots, \phi_N(x), \phi_{N+1}(x), \phi_{N+2}(x)\}$ kümesi $a \leq x \leq b$ aralığında tanımlı olan fonksiyonlar için baz teşkil eder. Kuintik B-spline $\phi_m(x)$ fonksiyonu ve türevleri $[x_{m-3}, x_{m+3}]$ aralığı dışında sıfır olur. Her bir $\phi_m(x)$ kuintik B-spline fonksiyonu $[x_{m-3}, x_{m+3}]$ aralığında peş peşe altı elemanı örter [19].

2.BÖLÜM

2.1. Korteweg-de Vries (KdV) Denklemi

Bağımsız dalgalar (solitary waves) ilk defa 1834 yılında durgun bir teknenin ön tarafından kopan yuvarlak, düzgün ve oldukça belirgin bir su kümesinin şeklinde bir değişiklik veya hızında en ufak bir azalma olmaksızın yaklaşık üç kilometrelik bir kanal boyunca ilerlediğinin Scott Russell [21] tarafından gözlemlenmesiyle kayda geçmiştir. Salınım yapan diğer dalga türlerinden farklı hareket biçimi nedeniyle yine Russell tarafından bunlara "bağımsız dalga" adı verilmiştir. 1847 yılında Stokes [22] ve 1872 yılında Boussinesq [23] gibi birçok matematikçi kısaca bu konudan bahsetmiş olsa da sığ sulardaki bağımsız dalgaların profilini gözlemleyen Scott Russell'dan sonraki ilk teorik çalışmalar 1895 yılında Korteweg - de Vries'e aittir. Korteweg - de Vries [24] sığ bir kanalda tek yönde ilerleyen dalgaların oluşumuna dair günümüzde oldukça ilgi çeken

$$U_t + \varepsilon U U_x + \mu U_{xxx} = 0. \quad (2.1.1)$$

KdV denklemini literatüre kazandırmışlardır [25].

KdV denklemi inverse-scattering yöntemiyle [26] analitik olarak çözülebilir olmasına rağmen bu yöntemin zamandan bağımsız Schrödinger denklemine bağlı olarak sadece birkaç özel potansiyel için sonuç veriyor olması sebebiyle nümerik çözümleri önemini korumaktadır. KdV denkleminin nümerik çözümlerini ilk olarak Zabusky ve Kruskal [27] sonlu farklar yöntemini kullanarak elde etmişlerdir. O çalışmada iki bağımsız dalganın etkileşiminin özellikleri ortaya konulmuştur. Zabusky ve Kruskal, ikinci bir dalgayla karşılaştığında geçiş aşaması hariç, şeklini koruyarak düzgün hızla ilerleyen dalgalar için soliton kavramını tanımlamışlardır. Sonlu elemanlar yöntemini ise ilk olarak uygulayan Wahibin [28] olmuştur.

KdV denklemi çok farklı fiziksel sistemlerde ortaya çıktığından önemli bir lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemdir. Analitik çözümleri sınırlı birkaç başlangıç değeri için bulunabildiğinden başlangıç değerinin çok çeşitli seçilebildiği nümerik çözümler gerekli olmaktadır.

Ayrıca tsunami olarak bilinen dev okyanus dalgaları ve okyanuslarda sıcaklık farkından oluşan gemilerin tahrip olmasına neden olan dev dalgalar da KdV denklemi ile modellenebilir [29].

Modifiye edilmiş Korteweg-de Vries (MKdV) denklemini incelerken Korteweg-de Vries (KdV) denklemi esas alınmıştır. (2.1.1) ile verilen denklemdeki UU_x ve U_{xxx} terimleri sırasıyla doğrusal olmayan konveksiyon ve dağılıma karşılık gelmektedir. KdV denklemi, sığ kanallardaki su dalgaları teorisini tanımlayan ana matematiksel modellerden biridir. Bazı önemli fiziksel olaylar; sığ su dalgalarında uzun dalgaların yayılması, kabarcık-sıvı karışımları, iyon akustik plazma dalgaları ve enharmonik kristallerde dalga olayları, ilk olarak Korteweg ve de Vries tarafından önerilen KdV denklemi ile açıklanabilir [30]. KdV denkleminin analitik çözümü ilk olarak Zabusky, Fornberg ve Whitham tarafından elde edilmiştir [31,32,33]. Gardner ve arkadaşları [34] KdV denkleminin çözümlerinin varlığını ve teklliğini göstermiştir. Birçok araştırmada, denklemi çözmek için sonlu farklar yöntemi [35, 36], sonlu elemanlar yöntemi [37,47], psödospektral yöntem [32] ve ısı dengesi integral yöntemi [48] gibi çeşitli sayısal yöntemler kullanılmıştır.

MKdV denklemi, p pozitif bir tamsayı olmak üzere aşağıdaki genelleştirilmiş Korteweg-de Vries (GKdV) denkleminin özel bir durumu;

$$U_t + \varepsilon(U^p)_x + \mu U_{xxx} = 0 \quad \text{dır.} \quad (2.1.2)$$

Bu tez çalışmasında $p = 2$, $\varepsilon = 3$ ve $\mu = 1$ alınarak (2.1.2) ile verilen denklemin özel bir formu olan;

$$U_t + 3U^2U_x + \mu U_{xxx} = 0, \quad (2.1.3)$$

MKdV denklemi

$$\begin{aligned} U(a,t) = 0, \quad U(b,t) = 0, \\ U_x(a,t) = 0, \quad U_x(b,t) = 0 \quad t > 0 \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

homojen sınır koşulları

ve

$$U(x,0) = f(x) \quad a \leq x \leq b \quad (2.1.5)$$

başlangıç koşulu ile birlikte ele alınmıştır. Burada t zaman, x konum koordinatı

ve $f(x)$ algılanan bir fonksiyondur.

MKdV denkleminin literatürde sayısal çalışmaları sınırlıdır. Kaya [49] yüksek dereceli MKdV denkleminin sayısal çözümlerini elde etmek için Adomian ayrıştırma yöntemini kullanmıştır. MKdV denklemini Biswas ve arkadaşları kuartik B-spline Galerkin sonlu elemanlar yöntemi kullanarak çözmüşlerdir [50]. Raslan ve Bağdady [51, 52], MKdV denkleminin sonlu fark çözümünün doğruluğunu ve kararlılığını göstermişler ve MKdV denklemini tarafından modellenen göl kıyıları ve plajlar boyunca sığ su dalgalarının dinamiklerinin sayısal özelliklerini elde etmişlerdir. Wazwaz (3 + 1) boyutlu MKdV denklemini ve çoklu soliton çözümlerini bulmuştur [53, 54]. Karakoç ve çalışma arkadaşları tarafından MKdV denklemine Lumped Petrov-Galerkin ve Galerkin yöntemleri uygulanmıştır [55, 56].

Bu çalışmada, peş peşe beş ve altı elemanı örten kuartik ve kuintik B-spline fonksiyonlar kullanılarak MKdV denklemini için Kollokasyon sonlu elemanlar metodu geliştirilmiştir. Tek soliton dalğanın hareketi, iki ve üç soliton dalğanın etkileşimi, önerilen yöntemin performansını ve verimliliğini göstermek için incelenmiştir. Von-Neumann kararlılık analizi uygulanarak önerilen yöntemin koşulsuz kararlı olduğuna ulaşılmıştır.

3. BÖLÜM

MKdV DENKLEMİNİN KUARTİK B-SPLINE SUBDOMAIN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

3.1. Giriş

Bu bölümde Seydi Battal Gazi Karakoç'un referans[57] ile verilen makalesi ayrıntılı olarak incelenmiştir. MKdV denkleminin sayısal çözümleri dördüncü mertebeden B-Spline subdomain sonlu elemanlar yöntemiyle elde edilmiştir. Önerilen sayısal algoritmanın doğruluğu, tek soliton dalga, iki ve üç soliton dalganın girişimi gibi üç test probleminin uygulanmasıyla kontrol edilmiştir. Yeni uygulanan yöntemin performansını kontrol etmek için L_2 ve L_∞ hata normları ile I_1, I_2, I_3 ve I_4 değişmezlerinin değerleri hesaplanmıştır. Algoritmanın kararlılık analizi de incelenmiştir.

3.2. Kuartik B-spline fonksiyonlar

Prenter [19], $[a, b]$ aralığındaki x_m düğüm noktalarında $\phi_m(x)$, $(m = -2, -1, \dots, N, N+1)$ kuartik B-spline fonksiyonlarını (1.7) ile verilen ifade şeklinde tanımlamıştır.

Her kuartik B-spline beş elemanı kapsar, bu nedenle her eleman $[x_m, x_{m+1}]$ aralığında beş B-spline fonksiyon ile örtülür. Tipik bir $[a, b]$ sonlu aralığı $h\xi = x - x_m$, $0 \leq \xi \leq 1$ dönüşümü ile $[0, 1]$ aralığına eşlenir. $[0, 1]$ kapalı aralığı üzerinde kuartik B-spline fonksiyonlar ξ cinsinden aşağıdaki gibi verilir.

$$\begin{aligned}\phi_{m-2} &= 1 - 4\xi + 6\xi^2 - 4\xi^3 + \xi^4, \\ \phi_{m-1} &= 11 - 12\xi - 6\xi^2 + 12\xi^3 - \xi^4, \\ \phi_m &= 11 + 12\xi - 6\xi^2 - 12\xi^3 + \xi^4, \\ \phi_{m+1} &= 1 + 4\xi + 6\xi^2 + 4\xi^3 - \xi^4, \\ \phi_{m+2} &= \xi^4.\end{aligned}\tag{3.2.1}$$

Denklem (1.7) ve (3.2.1) kullanılarak U_m , U'_m , U''_m ve U'''_m değerleri düğüm noktalarında δ_m parametrelerine göre,

$$\begin{aligned}
U_N(x_m, t) &= U_m = \delta_{m-2} + 11\delta_{m-1} + 11\delta_m + \delta_{m+1}, \\
U'_m &= \frac{4}{h}(-\delta_{m-2} - 3\delta_{m-1} + 3\delta_m + \delta_{m+1}), \\
U''_m &= \frac{12}{h^2}(\delta_{m-2} - \delta_{m-1} - \delta_m + \delta_{m+1}), \\
U'''_m &= \frac{24}{h^3}(-\delta_{m-2} + 2\delta_{m-1} - 2\delta_{m+1} + \delta_{m+2})
\end{aligned} \tag{3.2.2}$$

şeklinde verilir. $[x_m, x_{m+1}]$ elemanı üzerindeki U nun bir varyasyonu

$$U = \sum_{j=m-2}^{m+2} \phi_j(\xi) \delta_j(t) \tag{3.2.3}$$

biçimindedir.

3.3. MKdV Denklemi için Subdomain Yöntemi

Sayısal algoritma için, problemin çözüm alanı $a \leq x \leq b$ aralığıyla sınırlıdır. $[a, b]$

aralığının düzgün bir parçalanışı $h = \frac{b-a}{N}$ olmak üzere $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ olsun. x_m

düğüm noktalarında kuartik B-spline fonksiyonlar kümesi $\{\phi_{-2}(x), \phi_{-1}(x), \dots, \phi_N(x), \phi_{N+1}(x)\}$, çözüm bölgesi $[a, b]$ aralığı için bir baz

oluşturur. Sayısal çözüm olan $U_N(x, t)$, kuartik B-spline fonksiyonlar cinsinden

$$U_N(x, t) = \sum_{m=-2}^{N+1} \phi_m(x) \delta_m(t) \tag{3.3.1}$$

şeklinde ifade edilir.

Burada $\delta_m(t)$ zamana bağlı parametreler olup hem sınır hem de ağırlıklı kalan şartları ile elde edilecektir. (2.1.3) denklemine (1.5.1) ağırlık fonksiyonu yardımı ile sayısal çözüm uygulanırsa

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} 1.(U_t + 3U^2U_x + U_{xxx})dx = 0 \tag{3.3.2}$$

bulunur.

$h\xi = x - x_m$ dönüşümü (3.3.2) ile verilen zayıf formülasyonda kullanılır, terim terime integral alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} & \frac{h}{5} \left(\dot{\delta}_{m-2} + 26\dot{\delta}_{m-1} + 66\dot{\delta}_m + 26\dot{\delta}_{m+1} + \dot{\delta}_{m+2} \right) + Z_m \left(-\delta_{m-2} - 10\delta_{m-1} + 10\delta_{m+1} + \delta_{m+2} \right) + \\ & \mu \frac{12}{h^2} \left(-\delta_{m-2} + 2\delta_{m-1} - 2\delta_{m+1} + \delta_{m+2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

bulunur.

Burada zamana bağlı parametreler olan $\dot{\delta}_i$ ler t ye göre türevi gösterir ve

$$Z_m = U_m = 3(\delta_{m-2} + 11\delta_{m-1} + 11\delta_m + \delta_{m+1})^2 \text{ dir.} \quad (3.3.4)$$

(3.3.5) denklemindeki δ_i zaman parametreleri ve onların zamana göre türevleri olan $\dot{\delta}_i$ ifadeleri yerine sırasıyla aşağıdaki Crank-Nicolson ve sonlu fark yaklaşımı kullanılırsa;

$$\delta_i = \frac{\delta_i^{n+1} + \delta_i^n}{2}, \quad \dot{\delta}_i = \frac{\delta_i^{n+1} - \delta_i^n}{\Delta t} \quad (3.3.5)$$

($i = m-2, \dots, m+2$), $\delta_i^{n+1}, \delta_i^n$ ile ilişkili iki zaman seviyesi n ve $n+1$ arasında bir tekrarlama bağıntısını

$$\gamma_1 \delta_{m-2}^{n+1} + \gamma_2 \delta_{m-1}^{n+1} + \gamma_3 \delta_m^{n+1} + \gamma_4 \delta_{m+1}^{n+1} + \gamma_5 \delta_{m+2}^{n+1} = \gamma_5 \delta_{m-2}^n + \gamma_4 \delta_{m-1}^n + \gamma_3 \delta_m^n + \gamma_2 \delta_{m+1}^n + \gamma_1 \delta_{m+2}^n \quad (3.3.6)$$

şeklinde elde ederiz. Burada

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= [1 - EZ_m - M] \\ \gamma_2 &= [26 - 10EZ_m + 2M] \\ \gamma_3 &= [66] \\ \gamma_4 &= [26 + 10EZ_m - 2M] \\ \gamma_5 &= [1 + EZ_m + M] \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

$m = 0, 1, \dots, N-1$

$$E = \frac{5}{2h} \varepsilon \Delta t$$

$$M = \frac{30}{h^3} \mu \Delta t$$

U^2 nin yerel olarak sabit olduğu varsayılır. $\delta_m^n = \xi^n e^{i\sigma m h}$, ($i = \sqrt{-1}$) Fourier formu (3.3.5)

ile verilen denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \xi^{n+1} \left(\eta_1 e^{i(m-2)\theta} + \eta_2 e^{i(m-1)\theta} + \eta_3 e^{im\theta} + \eta_4 e^{i(m+1)\theta} + \eta_5 e^{i(m+2)\theta} \right) \\ & = \xi^n \left(\eta_5 e^{i(m-2)\theta} + \eta_4 e^{i(m-1)\theta} + \eta_3 e^{im\theta} + \eta_2 e^{i(m+1)\theta} + \eta_1 e^{i(m+2)\theta} \right) \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

bulunur.

Burada σ mod numarası, h eleman boyutu $\theta = \sigma h$ olmak üzere

$$\eta_1 = 1 - EZ_m - M$$

$$\eta_2 = 26 - 10EZ_m + 2M$$

$$\eta_3 = 66$$

$$\eta_4 = 26 + 10EZ_m - 2M$$

$$\eta_5 = 1 + EZ_m + M$$

$$m = 0, 1, \dots, N$$

$$E = \frac{5}{2h} \varepsilon \Delta t$$

$$M = \frac{30}{h^3} \mu \Delta t$$

dir. (3.4.1) ile verilen denklem sadeleştirilirse

$$\xi = \frac{A + iB}{A - iB}$$

elde edilir ki burada;

$$A = (52) \cos(\theta) + 2 \cos(2\theta) + 66$$

$$B = 20EZ_m - 4M) \sin(\theta) + (2EZ_m + 2M) \sin(2\theta) \quad (3.4.2)$$

dır.

Fourier kararlılık analizine göre, verilen şemanın kararlı olması için $|\xi| \leq 1$ olmalıdır.

$a^2 + b^2 = a^2 + (-b)^2$ olduğu için sembolik bir programlama yazılımı veya basit

hesaplamalar kullanarak $|\xi|=1$ olduğu görülür. Bu nedenle lineerleştirilmiş şema koşulsuz olarak kararlıdır.

3.5. Sayısal Örnekler ve Sonuçlar

Bu bölümde, algoritmamızın doğruluğunu gerçekleştirmek için analitik çözümü bilinen tek soliton dalganın hareketi ve etkileşim süresince analitik çözümü bilinmeyen iki ve üç soliton dalganın hareketi incelenmiştir. (2.1.4) - (2.1.5) ile verilen sınır ve başlangıç değer problemi;

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} U(x,t) dx, \\
 I_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} U^2(x,t) dx, \\
 I_3 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[U^4(x,t) - \frac{6\mu}{\varepsilon} U_x^2(x,t) \right] dx, \\
 I_4 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[U^6(x,t) - \frac{30\mu}{\varepsilon} U^2(x,t) U_x^2(x,t) + \frac{18\mu^2}{\varepsilon^2} U_{xx}^2(x,t) \right] dx
 \end{aligned} \tag{3.5.1}$$

şeklindeki değişmezlere sahiptir [58, 60]. Belirli zamanlarda analitik ve sayısal çözümler arasındaki farkı hesaplamak için

$$L_2 = \|U^{Tam} - U_N\|_2 = \sqrt{h \sum_{j=0}^N |U_j^{Tam} - (U_N)_j|^2}, \quad L_\infty = \|U^{Tam} - U_N\|_\infty = \max_j |U_j^{Tam} - (U_N)_j|$$

hata normları kullanılmıştır.

3.5.1. Tek Soliton Dalganın Hareketi

Bu problem için (2.1.3) ile verilen MKdV denklemi $U \rightarrow 0$, $x \rightarrow \pm\infty$ sınır koşulları ve

$$U(x,0) = A \operatorname{sech} [k(x-x_0)] \tag{3.5.1.1}$$

başlangıç koşulu ile ele alınmıştır. Burada $A = \sqrt{\frac{6c}{\varepsilon}}$, $k = \sqrt{\frac{c}{\mu}}$ olup A genlik, k tek soliton dalganın genişliğidir. MKdV denkleminin analitik çözümü, x_0 ve c keyfi sabitler olmak üzere

$$U(x,t) = A \operatorname{sech} \left[k(x - ct - x_0) \right] \quad (3.5.1.2)$$

şeklinindedir. Bu problem için, değişmezlerin tam değerleri ise

$$I_1 = \pi \sqrt{\frac{6\mu}{\varepsilon}}, I_2 = \frac{12\sqrt{\mu c}}{\varepsilon}, I_3 = -\frac{64c^2}{\varepsilon^2} \sqrt{\frac{\mu}{c}}, I_4 = \frac{216c^2 \mu}{5\varepsilon^3} \sqrt{\frac{c}{\mu}} \quad (3.5.1.3)$$

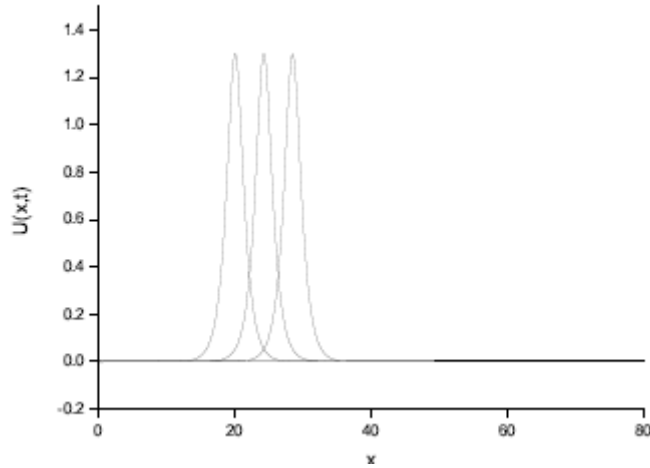
ile verilir. Bu test problemi için, $0 \leq x \leq 80$ aralığında $\varepsilon = 3$, $\mu = 1$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.01$, $c = 0.845$ ve 0.3 parametreleri alındı. Böylece soliton dalgaların genlikleri sırasıyla 1.3 ve 0.7746 olarak bulundu. Sayısal algoritmalarımız, L_2, L_∞ hata normlarını I_1, I_2, I_3 ve I_4 değişmezlerin değerlerini elde etmek için $t = 1$ zamanına kadar çalıştırılmıştır. Önerilen yöntemle elde edilen değişmezlerin değerleri ve hata normları Tablo 3.1 ve Tablo 3.2 de verilmiştir. Bu tablolardan değişmezlerin hesaplanan değerlerinin analitik değerleriyle uyumlu olduğu açıkça görülmektedir. Tek dalganın farklı zaman adımlarındaki hareketi Şekil 3.1 de gösterilmektedir. Şekilden görüldüğü gibi soliton dalga hız ve genliğini neredeyse değiştirmeden sağa doğru ilerlemektedir.

Tablo.3.1. $\varepsilon = 3$, $\mu = 1$, $c = 0.845$, $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$, $0 \leq x \leq 80$ parametreleri için tek soliton dalganın değişmezleri ve hata normları.

t	I_1	I_2	I_3	I_4	L_2	L_∞
0.1	4.442863	3.676938	2.071325	1.050110	8.589E-02	5.041E-02
0.2	4.442864	3.676939	2.071323	1.050109	1.716E-01	1.006E-01
0.3	4.442865	3.676939	2.071323	1.050108	2.569E-01	1.506E-01
0.4	4.442866	3.676938	2.071322	1.050107	3.418E-01	2.001E-01
0.5	4.442863	3.676937	2.071322	1.050107	4.259E-01	2.490E-01
0.6	4.442861	3.676937	2.071319	1.050105	5.091E-01	2.971E-01
0.7	4.442861	3.676935	2.071318	1.050104	5.913E-01	3.446E-01
0.8	4.442862	3.676934	2.071316	1.050102	6.724E-01	3.907E-01
0.9	4.442863	3.676932	2.071314	1.050101	7.521E-01	4.363E-01
1.0	4.442863	3.676933	2.071312	1.050100	8.304E-01	4.805E-01

Tablo.3.2. $\varepsilon = 3$, $\mu = 1$, $c = 0.3$, $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$, $0 \leq x \leq 80$ parametreleri için tek soliton dalganın değışmezleri ve hata normları.

t	I_1	I_2	I_3	I_4	L_2	L_∞
0.1	4.442792	2.190881	0.4381725	0.078951	1.403E-02	6.361E-03
0.2	4.442779	2.190881	0.4381727	0.078970	2.807E-02	1.272E-02
0.3	4.442776	2.190881	0.4381729	0.078994	4.210E-02	1.907E-02
0.4	4.442777	2.190880	0.4381731	0.079025	5.613E-02	2.543E-02
0.5	4.442771	2.190882	0.4381731	0.079066	7.906E-02	7.016E-02
0.6	4.442772	2.190881	0.4381735	0.079120	8.418E-02	3.814E-02
0.7	4.442766	2.190881	0.4381731	0.079190	9.819E-02	4.448E-02
0.8	4.442769	2.190880	0.4381730	0.079281	1.121E-01	5.082E-02
0.9	4.442766	2.190881	0.4381731	0.079399	1.261E-01	5.714E-02
1.0	4.442765	2.190882	0.4381731	0.079551	1.401E-01	6.345E-02



Şekil.3.1. Tek soliton dalganın $\varepsilon = 3$, $\mu = 1$, $c = 0.845$, $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$, $0 \leq x \leq 80$ parametreleri için $t = 0$, 5 ve 10 zaman adımlarındaki hareketi.

3.5.2. İki Soliton Dalganın Etkileşimi

İkinci problem olarak; farklı genliklere sahip olan ve aynı yönde hareket eden iki tek dalganın etkileşiminin davranışı incelendi. Farklı genliklerde iyi ayrılmış iki ayrı dalganın başlangıç durumu aşağıdaki forma sahiptir:

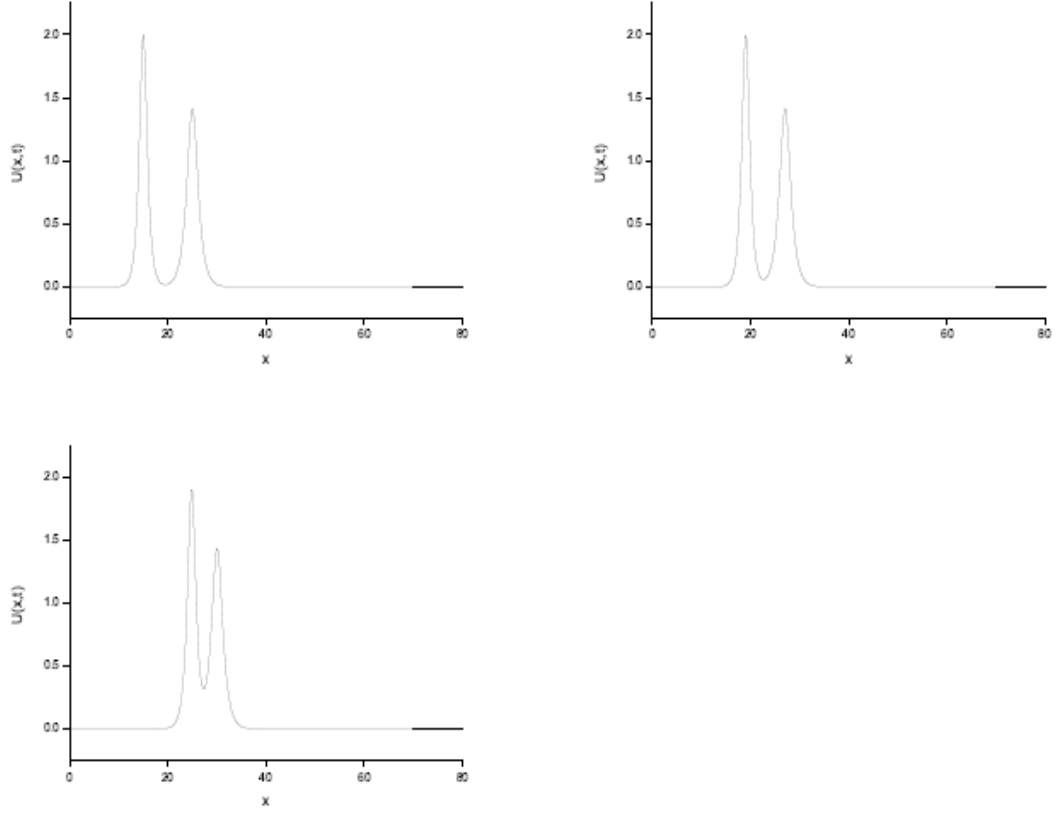
$$U(x,0) = \sum_{j=1}^2 A_j \operatorname{sech} [c_j (x - x_j)] \quad (3.5.2.1)$$

($j=1,2$) c_j ve x_j isteğe bağlı sabitlerdir. Bu problem için $0 \leq x \leq 80$ aralığında $\varepsilon = 3$, $\mu = 1$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.01$, $c_1 = 2$, $c_2 = 1$, $x_1 = 15$ ve $x_2 = 25$ parametreleri seçildi.

Değişmezlerin değerlerini elde etmek için program $t = 5$ zamanına kadar çalıştırıldı. Elde edilen sonuçlar Tablo 3.3 de verildi. Tablo 3.3 zaman ilerledikçe değişmezlerin neredeyse sabit olduğunu göstermektedir. Hesaplanan I_1, I_2, I_3 ve I_4 değişmezleri, sırasıyla 2.16×10^{-3} , 6.1×10^{-3} , 4.95×10^{-2} ve 2.49×10^{-2} den daha az değişmektedir. İki soliton dalganın etkileşimi farklı zaman adımlarında Şekil 3.2 de gösterilmiştir.

Tablo.3.3. $\varepsilon = 3$, $\mu = 1$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.01$ $c_1 = 2$, $c_2 = 1$, $x_1 = 15$ ve $x_2 = 25$, $0 \leq x \leq 80$ parametreleri için iki soliton dalganın etkileşiminden elde edilen değişmezler.

t	I_1	I_2	I_3	I_4
0	8.885730	9.659342	10.219180	10.668990
1	8.885097	9.657387	10.211370	10.653420
2	8.884507	9.655479	10.203760	10.638260
3	8.883841	9.653700	10.196620	10.624040
4	8.883119	9.652200	10.190490	10.611900
5	8.882933	9.651279	10.186450	10.603890



Şekil.3.2. İki soliton dalganın $\varepsilon = 3$, $\mu = 1$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.01$, $c_1 = 2$, $c_2 = 1$, $x_1 = 15$ ve $x_2 = 25$, $0 \leq x \leq 80$ parametreleri için $t = 0, 2$ ve 5 zaman adımlarındaki hareketi.

3.5.3. Üç Soliton Dalga Etkileşimi

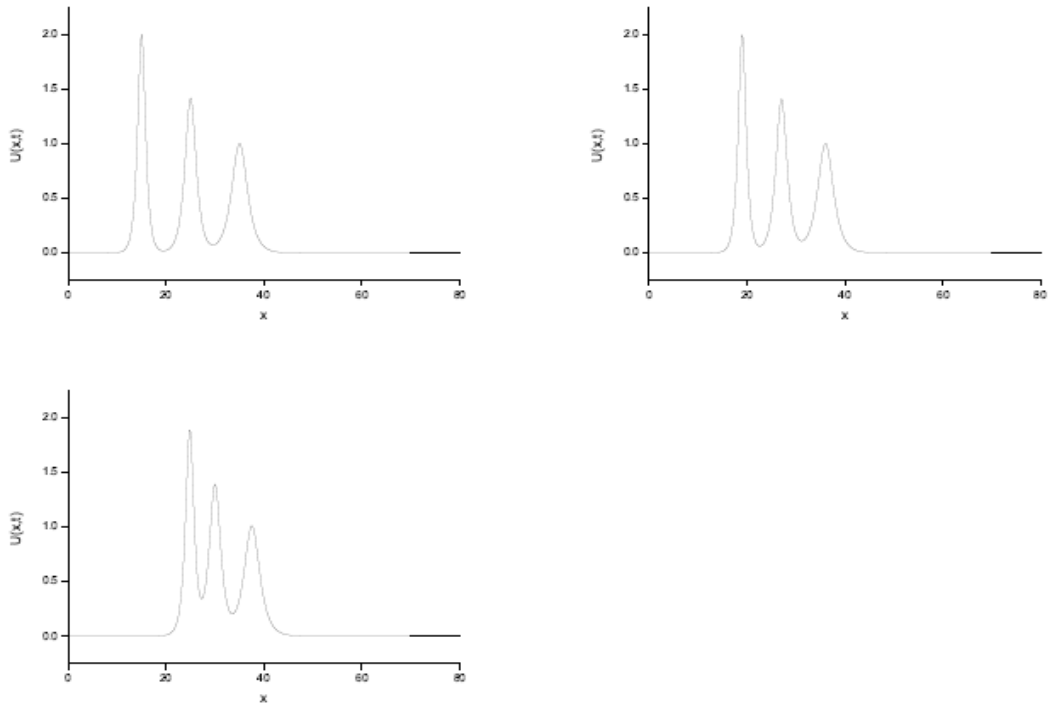
Son problem olarak; farklı genliklere sahip olan ve aynı yönde hareket eden üç tek dalganın etkileşiminin davranışı incelendi. Üç tek dalganın etkileşimi

$$U(x,0) = \sum_{j=1}^3 A_j \operatorname{sech} [c_j (x - x_j)] \quad (3.5.3.1)$$

başlangıç koşulu ve $x \rightarrow \pm\infty$ iken $U \rightarrow 0$ sınır koşulları ile ele alındı. Bu problem için $0 \leq x \leq 80$ aralığında $\varepsilon = 3$, $\mu = 1$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.01$, $c_1 = 2$, $c_2 = 1$, $c_3 = 0.5$, $x_1 = 15$, $x_2 = 25$ ve $x_3 = 35$ parametreleri göz önüne alındı. Hesaplamalar $t = 5$ zaman adımına kadar yapıldı ve elde edilen değerler Tablo 3.4 de listelendi. Tablo 3.4 e bakıldığında, zaman arttıkça değişmezlerin neredeyse sabit olduğu görülmektedir. Üç tek dalganın etkileşiminin davranışı Şekil 3.3 te farklı zamanlarda belirtilmiştir.

Tablo.3.4. $\varepsilon = 3$, $\mu = 1, h = 0.1, \Delta t = 0.01, c_1 = 2, c_2 = 1, c_3 = 0.5, x_1 = 15, x_2 = 25, x_3 = 35$, $0 \leq x \leq 80$ parametreleri için üç soliton dalganın etkileşiminden elde edilen değişmezler.

t	I_1	I_2	I_3	I_4
0	13.328670	12.519940	11.228390	11.019630
1	13.328050	12.518010	11.220640	11.004170
2	13.327570	12.516120	11.213060	10.989010
3	13.326950	12.514400	11.206050	10.975050
4	13.325990	12.513020	11.200220	10.963460
5	13.326010	12.512290	11.196690	10.956380



Şekil.3.3. Üç soliton dalganın $\varepsilon = 3$, $\mu = 1, h = 0.1, \Delta t = 0.01$, $c_1 = 2, c_2 = 1, c_3 = 0.5$, $x_1 = 15, x_2 = 25, x_3 = 35, 0 \leq x \leq 80$ parametreleri için $t = 0, 2$ ve 5 zaman adımlarındaki hareketi.

4. BÖLÜM

MKdV DENKLEMİNİN KUİNTİK B-SPLINE KOLLOKASYON SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde Seydi Battal Gazi Karakoç'un referans [61] ile verilen makalesi ayrıntılı olarak incelenmiştir. Burada (2.1.3) ile verilen modifiye edilmiş Korteweg de-Vries (MKdV) denklemi kuintik B-spline fonksiyonlar kullanılarak sırasıyla (2.1.4) ve (2.1.5) ile verilen sınır ve başlangıç şartları ile ele alınmıştır.

4.1 Kuintik B-spline Kollokasyon Yöntemi

Sayısal hesaplamalar için, problemin çözüm alanı $a \leq x \leq b$ aralığıyla sınırlandırılmıştır.

$[a, b]$ aralığının düzgün bir parçalanışı $h = \frac{b-a}{N}$ olmak üzere $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ olsun.

Kuintik B-spline fonksiyonlar (1.8) ile tanımlanmıştır [28]. Sayısal çözüm olan $U_N(x, t)$ kuintik B-spline fonksiyonlar cinsinden

$$U_N(x, t) = \sum_{m=-2}^{N+2} \phi_m(x) \delta_m(t) \quad (4.1.1)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $\delta_m(t)$ zamana bağlı parametrelerdir. Tipik bir sonlu aralık $[x_m, x_{m+1}]$, $h\xi = x - x_m$, $0 \leq \xi \leq 1$ şeklinde tanımlanan yerel bir koordinat dönüşümü ile $[0, 1]$ aralığına eşlenir. $[0, 1]$ kapalı aralığı üzerinde kuintik B-spline fonksiyonlar ξ cinsinden aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned} \phi_{m-2} &= 1 - 5\xi + 10\xi^2 - 10\xi^3 + 5\xi^4 - \xi^5, \\ \phi_{m-1} &= 26 - 50\xi + 20\xi^2 + 20\xi^3 - 204\xi^4 + 5\xi^5, \\ \phi_m &= 66 - 60\xi^2 + 30\xi^4 - 10\xi^5, \\ \phi_{m+1} &= 26 + 50\xi + 20\xi^2 - 20\xi^3 - 20\xi^4 + 5\xi^5, \\ \phi_{m+2} &= 1 + 5\xi + 10\xi^2 + 10\xi^3 + 5\xi^4 - 5\xi^5, \\ \phi_{m+3} &= \xi^5. \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

(4.1.1) ve (1.8) denklemleri kullanılarak, U_m, U'_m, U''_m, U'''_m ve U_m^{iv} değerleri düğüm noktalarında δ_m parametrelerine göre,

$$\begin{aligned}
U_N(x_m, t) &= U_m = \delta_{m-2} + 26\delta_{m-1} + 66\delta_m + 26\delta_{m+1} + \delta_{m+2}, \\
U'_m &= \frac{5}{h}(-\delta_{m-2} - 10\delta_{m-1} + 10\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \\
U''_m &= \frac{20}{h^2}(\delta_{m-2} + 2\delta_{m-1} - 6\delta_m + 2\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \\
U'''_m &= \frac{60}{h^3}(-\delta_{m-2} + 2\delta_{m-1} - 2\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \\
U_m^{(iv)} &= \frac{120}{h^4}(\delta_{m-2} - 4\delta_{m-1} + 6\delta_m - 4\delta_{m+1} + \delta_{m+2})
\end{aligned} \tag{4.1.3}$$

gibi yazılabilir ve $[x_m, x_{m+1}]$ elemanı için U nun bir değişimi

$$U = \sum_{m=-2}^{N+2} \phi_m \delta_m \tag{4.1.4}$$

şeklinde dir. (4.1.3) ifadeleri (2.1.3) denkleminde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&(\dot{\delta}_{m-2} + 26\dot{\delta}_{m-1} + 66\dot{\delta}_m + 26\dot{\delta}_{m+1} + \dot{\delta}_{m+2}) + \varepsilon \frac{5}{h} Z_m (-\delta_{m-2} - 10\delta_{m-1} + 10\delta_{m+1} + \delta_{m+2}) + \\
&\mu \frac{60}{h^3} (-\delta_{m-2} + 2\delta_{m-1} - 2\delta_{m+1} + \delta_{m+2}) = 0
\end{aligned} \tag{4.1.5}$$

adi diferansiyel denklem sistemi elde edilir. (4.1.5) denklem sistemindeki δ_i parametreleri ve onların zamana göre türevleri olan $\dot{\delta}_i$ ifadeleri yerine sırasıyla Crank-Nicolson

$$\delta_i = \frac{\delta_i^{n+1} + \delta_i^n}{2} \tag{4.1.6}$$

ve alışılmış ileri fark yaklaşımı,

$$\dot{\delta}_i = \frac{\delta_i^{n+1} - \delta_i^n}{\Delta t} \tag{4.1.7}$$

kullanılırsa ($i = m-2, \dots, m+2$) $\delta_i^{n+1}, \delta_i^n$ ile ilişkili iki zaman seviyesi n ve $n+1$ arasında bir tekrarlama bağıntısı

$$\gamma_1 \delta_{m-2}^{n+1} + \gamma_2 \delta_{m-1}^{n+1} + \gamma_3 \delta_m^{n+1} + \gamma_4 \delta_{m+1}^{n+1} + \gamma_5 \delta_{m+2}^{n+1} = \gamma_5 \delta_{m-2}^n + \gamma_4 \delta_{m-1}^n + \gamma_3 \delta_m^n + \gamma_2 \delta_{m+1}^n + \gamma_1 \delta_{m+2}^n \quad (4.1.8)$$

şeklinde elde edilir. Burada;

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= [1 - EZ_m - M], \\ \gamma_2 &= [26 - 10EZ_m + 2M], \\ \gamma_3 &= [66], \\ \gamma_4 &= [26 + 10EZ_m - 2M], \\ \gamma_5 &= [1 + EZ_m + M], \\ m &= 0, 1, \dots, N, \\ E &= \frac{5}{2h} \varepsilon \Delta t, \\ M &= \frac{30}{h^3} \mu \Delta t \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

dır. (4.1.8) ile verilen cebirsel denklem sisteminde $(N+1)$ tane lineer denklem ve $(\delta_{-2}, \delta_{-1}, \dots, \delta_{N+1}, \delta_{N+2})^T$ gibi $(N+5)$ tane bilinmeyen vardır. Bu cebirsel denklem sisteminin bir tek çözümünü elde etmek için denklem sayısı ile bilinmeyenlerin sayısı aynı olmalıdır. Bunun için (2.1.4) ile verilen sınır şartları kullanarak $\delta_{-2}, \delta_{-1}, \dots, \delta_{N+1}$ ve δ_{N+2} katsayıları (4.1.8) ile verilen denklem sisteminde yok edilir ve $d^n = (\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_N)^T$ olmak üzere;

$$Ad^{n+1} = Bd^n \quad (4.1.10)$$

şeklinde $N+1$ tane bilinmeyenden oluşan denklem sistemi elde edilir. A ve B matrisleri $(N+1) \times (N+1)$ penta-diyagonal matrislerdir. Bu matris denklemini penta-diagonal algoritması kullanılarak hesaplanabilir .

Bir sonraki zaman adımına geçmeden önce Z_m den kaynaklanan lineer olmama problemini çözmek için, Z_m deki yeni zaman fonksiyonları $\delta^{n*} = \delta^n + \frac{1}{2}(\delta^n - \delta^{n-1})$ ile

$$\begin{aligned}
& \xi^{n+1} \left(\eta_1 e^{i(m-2)\theta} + \eta_2 e^{i(m-1)\theta} + \eta_3 e^{im\theta} + \eta_4 e^{i(m+1)\theta} + \eta_5 e^{i(m+2)\theta} \right) \\
& = \xi^n \left(\eta_5 e^{i(m-2)\theta} + \eta_4 e^{i(m-1)\theta} + \eta_3 e^{im\theta} + \eta_2 e^{i(m+1)\theta} + \eta_1 e^{i(m+2)\theta} \right)
\end{aligned} \tag{4.2.1}$$

bulunur. Burada σ mod numarası, h eleman boyutudur, $\theta = \sigma h$ olmak üzere

$$\eta_1 = 1 - \beta_1 - \beta_2,$$

$$\eta_2 = 26 - 10\beta_1 + 2\beta_2,$$

$$\eta_3 = 66,$$

$$\eta_4 = 26 + 10\beta_1 - 2\beta_2,$$

$$\eta_5 = 1 + \beta_1 + \beta_2,$$

$$m = 0, 1, \dots, N$$

$$\beta_1 = \frac{5}{2h} \varepsilon \Delta t,$$

$$\beta_2 = \frac{30}{h^3} \mu \Delta t$$

dır. (4.2.1) ile verilen denklem sadeleştirilirse

$$\xi = \frac{A + iB}{A - iB}$$

elde edilir ki burada

$$A = (52) \cos(\theta) + 2 \cos(2\theta) + 66 \tag{4.2.2}$$

$$B = (20EZ_m - 4M) \sin(\theta) + (2EZ_m + 2M) \sin(2\theta)$$

dır. Fourier kararlılık analizine göre, verilen şemanın kararlı olması için $|\xi| \leq 1$ koşulu sağlanmalıdır. $a^2 + b^2 = a^2 + (-b)^2$ olduğu için sembolik bir programlama yazılımı veya basit hesaplamalar kullanarak $|\xi| = 1$ olduğu görülür. Bu nedenle lineerleştirilmiş şema koşulsuz olarak kararlıdır.

4.3. Sayısal Örnekler ve Sonuçlar

Bu bölümde, algoritmamızın doğruluğunu gerçekleştirmek için analitik çözümü bilinen tek soliton dalganın hareketi ve etkileşim süresince analitik çözümü bilinmeyen iki ve üç

soliton dalganın hareketi incelenmiştir. (2.1.4)-(2.1.5) ile verilen sınır ve başlangıç şartları problemi

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} U(x,t)dx, \\
 I_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} U^2(x,t)dx, \\
 I_3 &= \int_{-\infty}^{\infty} [U^4(x,t) - \frac{6\mu}{\varepsilon} U_x^2(x,t)]dx,
 \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

şeklindeki değişmezlere sahiptir [59]. Belirli zamanlarda analitik ve sayısal çözümler arasındaki farkı hesaplamak için

$$L_2 = \|U^{Tam} - U_N\|_2 \square \sqrt{h \sum_{j=0}^N |U_j^{Tam} - (U_N)_j|^2}, \quad L_\infty = \|U^{Tam} - U_N\|_\infty \square \max_j |U_j^{Tam} - (U_N)_j|$$

hata normları kullanılmıştır.

4.3.1. Tek Soliton Dalganın Hareketi

Bu problem için (2.1.3) ile verilen MKdV denklemi, $x \rightarrow \pm\infty$ iken $U \rightarrow 0$ şeklindeki sınır koşulları ve

$$U(x,0) = A \operatorname{sech}[k(x-x_0)] \tag{4.3.1.1}$$

ile belirtilen başlangıç şartı göz önüne alınarak incelenmiştir. Bu eşitlikte $A = \sqrt{\frac{6c}{\varepsilon}}$

soliton dalganın genliği ve $k = \sqrt{\frac{c}{\mu}}$ ise soliton dalganın genişliğidir. MKdV denkleminin

tam çözümü x_0 ve c keyfi sabitler olmak üzere

$$U(x,t) = A \operatorname{sech}[k(x-ct-x_0)] \tag{4.3.1.2}$$

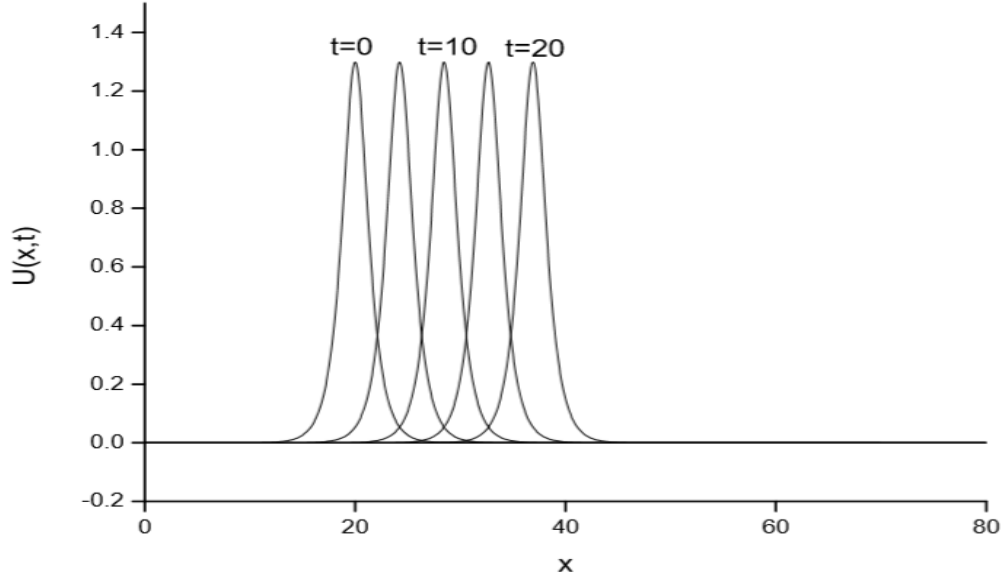
şeklinindedir. Bu problem için, değişmezlerin tam değerleri ise

$$\begin{aligned}
I_1 &= \pi \sqrt{\frac{6\mu}{\varepsilon}}, \\
I_2 &= \frac{12\sqrt{\mu c}}{\varepsilon}, \\
I_3 &= -\frac{64c^2}{\varepsilon^2} \sqrt{\frac{\mu}{c}}
\end{aligned} \tag{4.3.1.3}$$

ile verilir [18]. Bu test problemi için, $0 \leq x \leq 80$ aralığında $\varepsilon = 3$, $\mu = 1$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.01$, $c = 0.845$ parametreleri alındı. Böylece soliton dalgaların genliği $A = 1.3$ olarak bulundu. Değişmezlerin ve hata normlarının değerlerini elde etmek için sayısal algoritma $t = 20$ zamanına kadar çalıştırıldı. Farklı zamanlarda hesaplanan L_2, L_∞ hata normlarının ve I_1, I_2, I_3 değişmezlerinin değerleri Tablo 4.1 de verilmiştir. Yine Tablo 4.1 de hata normlarının ve değişmezlerin değerleri literatürde bulunan diğer yöntemlerle karşılaştırılmıştır. Soliton dalganın farklı zaman adımlarındaki hareketi Şekil 4.1 de gösterilmektedir. Şekilden görüldüğü gibi soliton dalga hız ve genliğini neredeyse değiştirmeden sağa doğru ilerlemektedir.

Tablo.4.1. $\varepsilon = 3$, $\mu = 1$, $c = 0.845$, $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$, $0 \leq x \leq 80$ parametreleri için tek soliton dalganın değışmezleri ve hata normları.

	t	1	10	20
I_1	Mevcut Yöntem	4.44286	4.44282	4.44278
	[18]	4.44300	4.44414	4.44317
	[23]	4.44286	4.44286	4.44286
	[24]	4.44286	4.44286	4.44286
I_2	Mevcut Yöntem	3.67693	3.67686	3.67678
	[18]	3.67706	3.67809	3.67919
	[23]	3.67694	3.67694	3.67694
	[24]	3.67694	3.67694	3.67694
I_3	Mevcut Yöntem	2.07131	2.07119	2.07106
	[18]	2.07357	2.07530	2.07716
	[23]	2.07279	2.07369	2.07384
	[24]	2.07279	2.07369	2.07384
L_2	Mevcut Yöntem	2.03E-04	3.24E-04	3.98E-04
	[18]	-	-	-
	[23]	6.27E-04	2.13E-03	3.65E-03
	[24]	6.28E-04	2.13E-03	3.64E-03
L_∞	Mevcut Yöntem	1.43E-05	2.00E-04	6.79E-04
	[18]	1.20E-03	5.94E-03	8.64E-03
	[23]	3.62E-04	1.40E-03	2.29E-03
	[24]	3.63E-04	1.39E-03	2.28E-03



Şekil.4.1. Tek soliton dalganın $\varepsilon = 3$, $\mu = 1$, $c = 0.845$, $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$, $0 \leq x \leq 80$ parametreleri için $t = 0, 5, 10, 15$ ve 20 zaman adımlarındaki hareketi.

4.3.2. İki Soliton Dalganın Etkileşimi

İkinci problem olarak, farklı genliklere sahip olan ve aynı yönde hareket eden iki tek dalganın etkileşiminin davranışı incelendi. Farklı genliklerde iyi ayrılmış iki ayrı dalganın başlangıç durumu aşağıdaki forma sahiptir:

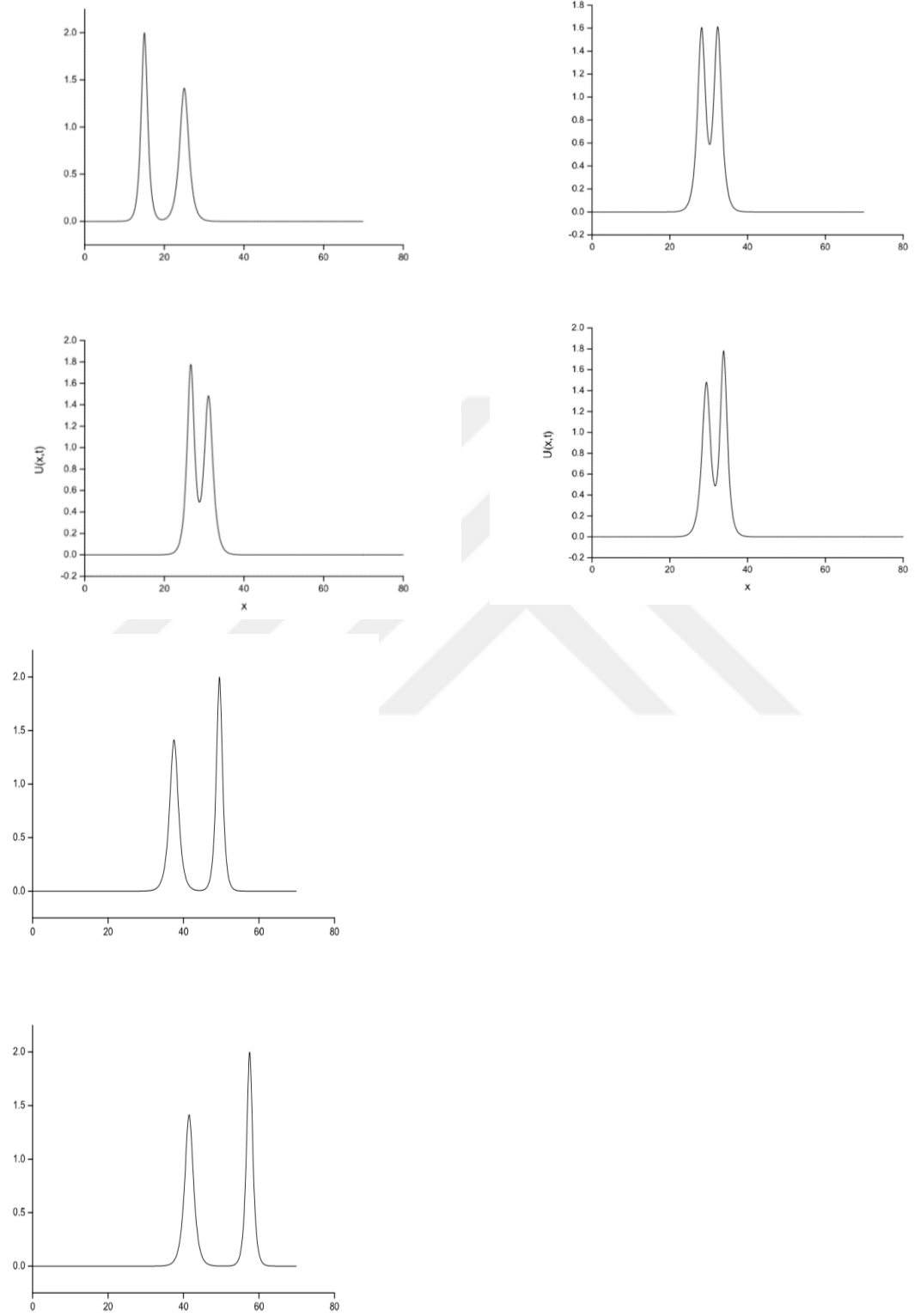
$$U(x, 0) = \sum_{j=1}^2 A_j \operatorname{sech} \left[c_j (x - x_j) \right] \quad (4.3.2.1)$$

($j=1, 2$) c_j ve x_j isteğe bağlı sabitlerdir. $0 \leq x \leq 80$ aralığında $\varepsilon = 3$, $\mu = 1$, $h = 0.1$ $\Delta t = 0.01$, $c_1 = 2$, $c_2 = 1$, $x_1 = 15$ ve $x_2 = 25$ parametreleri seçildi [18, 23, 24]. Algoritma değişmezlerin değerlerini elde etmek için $t = 20$ zamanına kadar çalıştırılmıştır. Elde edilen sonuçlar Tablo 4.2 de verilmiştir. Tablo 4.2 zaman ilerledikçe değişmezlerin neredeyse sabit olduğunu göstermektedir. Bu nedenle, yöntemimizin yeterince uygun olduğunu söyleyebiliriz. İki soliton dalganın etkileşimi hareketi Şekil 4.2 de farklı zaman seviyelerinde gösterilmiştir. Bu şekilden, $t = 0$ da 2.0 genliğinde olan daha büyük genliğe sahip dalganın başlangıçta 1.414216 genliğe sahip olan daha küçük dalganın solunda

bulunduğu anlaşılmaktadır. Uzun olan dalga kısa olan dalgaya göre daha hızlı hareket ettiğinden $t = 6$ da kısa olan dalgayı yakalar ve çarpışma gerçekleşir. Daha sonrasında ise zaman geçtikçe kısa dalgadan uzaklaşır. Etkileşim $t = 16$ zamanında sona erdiğinde, iki soliton başlangıç konumundaki gibi orijinal özelliklerini korur. $t = 20$ zaman adımı daha büyük olan dalganın genliği $x = 57.5$ noktasında 2.0 iken, küçük olan dalganın genliği $x = 41.5$ noktasında 1.413808 dir. Genliklerdeki mutlak fark, küçük dalga için 4.08×10^{-4} iken büyük olan dalga için ise 0.0 olarak bulunmuştur.

Tablo.4.2. $\varepsilon = 3, \mu = 1, h = 0.1, \Delta t = 0.01, c_1 = 2, c_2 = 1, x_1 = 15, x_2 = 25$ ve $0 \leq x \leq 80$ parametreleri için iki soliton dalganın etkileşiminden elde edilen değişmezler.

	t	1	10	20
I_1	Mevcut Yöntem	8.88575	8.88585	8.88577
	[18]	8.88601	8.88974	8.88488
	[23]	8.88573	8.88573	8.88573
	[24]	8.88573	8.88573	8.88573
I_2	Mevcut Yöntem	9.65934	9.65934	9.65934
	[18]	9.65952	9.66254	9.66122
	[23]	9.65934	9.65934	9.65934
	[24]	9.65934	9.65934	9.65934
I_3	Mevcut Yöntem	10.21921	10.21915	10.21920
	[18]	10.23987	10.24679	10.24203
	[23]	10.27082	10.95427	10.33832
	[24]	10.27090	10.95439	10.33841



Şekil.4.2. İki soliton dalganın $\varepsilon=3$, $\mu=1$, $h=0.1$, $\Delta t=0.01$ $c_1=2$, $c_2=1$, $x_1=15$, $0 \leq x \leq 80$ parametreleri için $t=0,6,7,8,16$ ve 20 zaman adımlarındaki hareketi.

4.3.3. Üç Tek Dalganın Etkileşimi

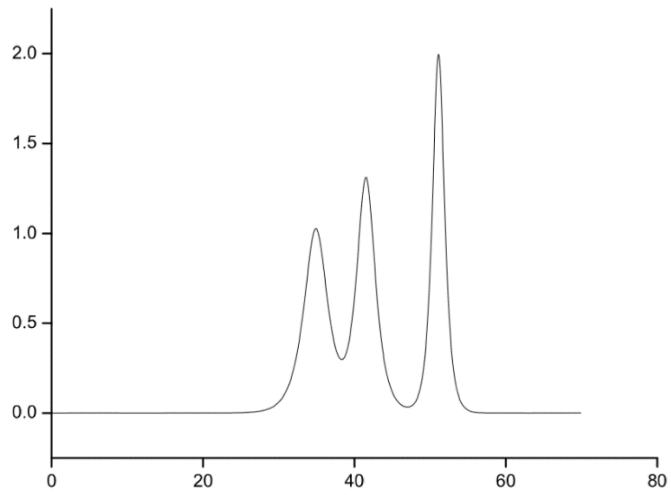
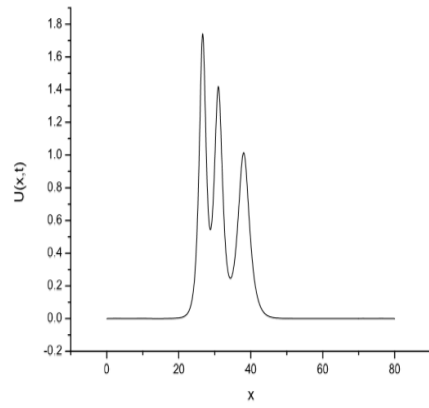
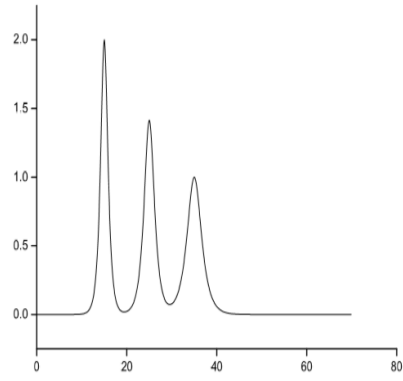
Son problem olarak, farklı genliklere sahip olan ve aynı yönde hareket eden üç tek dalganın etkileşiminin davranışı ele alındı. Üç tek dalganın etkileşimi

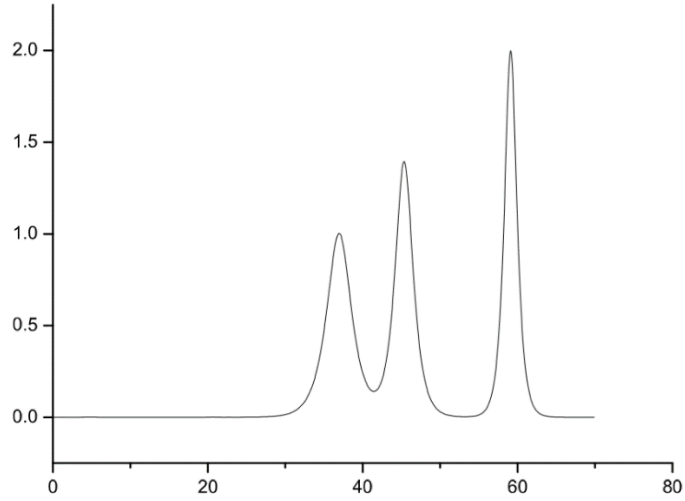
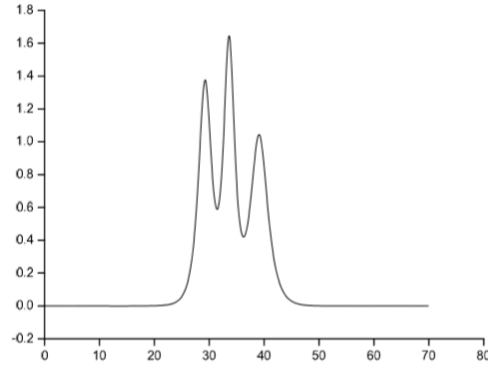
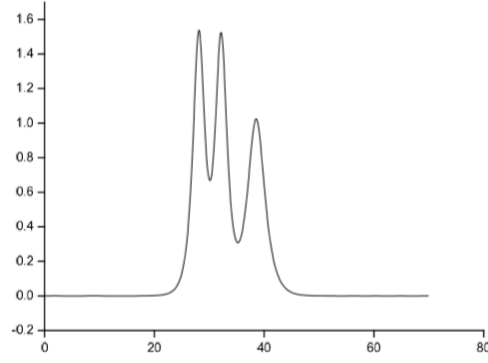
$$U(x,0) = \sum_{j=1}^3 A_j \operatorname{sech}[c_j(x-x_j)] \quad (4.3.3.1)$$

başlangıç koşulu ve $U \rightarrow 0$, $x \rightarrow \pm\infty$ sınır koşulları ile birlikte ele alınmıştır. Bu başlangıç koşulu, ilki başlangıçta $x = x_1$ konumunda olan A_1 genlikli, ikincisi başlangıçta $x = x_2$ konumunda olan A_2 genlikli dalgaları ve sonuncusu başlangıçta $x = x_3$ konumunda olan A_3 genlikli dalgayı gösterir. $0 \leq x \leq 80$ aralığında daha önceki çalışmalarla uyumlu olarak $\varepsilon = 3$, $\mu = 1$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.01$, $c_1 = 2$, $c_2 = 1$, $c_3 = 0.5$, $x_1 = 15$, $x_2 = 25$ ve $x_3 = 35$ parametreleri seçilmiştir [47, 52, 53]. Hesaplamalar $t = 0$ ile $t = 20$ zaman aralıkları arasında gerçekleştirilmiş ve değişmezlerin değerleri Tablo 4.3 de listelenmiştir. Tablo 4.3 de zaman değiştikçe değişmezlerin neredeyse sabit olduğunu görülmektedir [47, 52, 53]. Tablo 4.3 den de açıkça görülebileceği gibi, değişmezlerin değerleri referanslar ile iyi bir uyum içindedir. Üç tek dalganın etkileşiminin davranışı Şekil 4.3 te farklı zamanlarda gösterilmiştir.

Tablo.4.3. $\varepsilon = 3$ $\mu = 1$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.01$, $c_1 = 2$, $c_2 = 1$, $c_3 = 0.5$, $x_1 = 15$, $x_2 = 25$, $x_3 = 35$ ve $0 \leq x \leq 80$ parametreleri için üç soliton dalganın etkileşiminden elde edilen değişmezler

	t	1	10	20
I_1	Mevcut Yöntem	13.32868	13.32915	13.32883
	[18]	13.32906	13.33878	13.33206
	[23]	13.32867	13.32867	13.32867
	[24]	13.32867	13.32867	13.32867
I_2	Mevcut Yöntem	12.51994	12.51995	12.51993
	[18]	12.52028	12.54086	12.52490
	[23]	12.51994	12.51994	12.51994
	[24]	12.51994	12.51994	12.51994
I_3	Mevcut Yöntem	11.22843	11.22802	11.22842
	[18]	11.24979	11.28804	11.25673
	[23]	11.32117	12.41534	11.49914
	[24]	11.32126	12.47629	11.49923





Şekil.4.3. Üç soliton dalganın $\mu=1, h=0.1, \Delta t=0.01, c_1=2, c_2=1, c_3=0.5, x_1=15, x_2=25$ ve $x_3=35, 0 \leq x \leq 80$ parametreleri için $t=0,6,7,8,16$ ve 20 zaman adımlarındaki hareketi.

5. SONUÇ

Bu tezde, MKdV denkleminde kuartik B-spline fonksiyonlar kullanılarak Subdomain ve kuintik B-spline fonksiyonlar kullanılarak Kollokasyon sonlu eleman yöntemleri başarıyla uygulanmıştır. Yöntemin kararlılık analizi incelenmiş ve yöntemin koşulsuz kararlı olduğu gösterilmiştir. Sayısal yöntemimiz, farklı başlangıç ve sınır şartlarının seçimi ile elde edilen tek soliton dalga hareketi, iki ve üç soliton dalga hareketi gibi üç farklı problem için incelenmiştir. İncelenen bu üç problemde elde edilen sonuçların doğruluğunu ve etkinliğini göstermek için L_2, L_∞ hata norm değerleri ile kuartik B-spline fonksiyonlar için I_1, I_2, I_3, I_4 ve kuintik B-spline fonksiyonlar için ise I_1, I_2, I_3 değişmezlerinin değerleri hesaplanmıştır. Elde edilen değerler, grafikler ve tablolar halinde gösterilmiştir. Tablolardan edilen sonuçlar doğrultusunda elde edilen hata norm değerlerinin oldukça küçük ve değişmezlerin değerlerinin ise korunduğu kolaylıkla görülebilir [50, 55, 56]. Dolayısıyla yöntemimizin MKdV gibi fiziksel olarak uygulama alanı oldukça fazla olan denklemler için de uygun bir yöntem olduğu söyleyebiliriz.

KAYNAKÇA

1. Clough, R.W., "The finite element in plane stress analysis", *Proc.2nd A.S.C.E.Conf.on Elektronik Computation*, Pittsburg, Pa., 345-378, 1960.
2. Davies, A.J., "The Finite Element Method: A First Approach", *Oxford University Press*, Oxford, 1986.
3. Logan, D.L., "A First Course in the Finite Element Method (Fourth Edition)", Thomson, 2007.
4. Karakoç, S.B.G., "Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Modifiye edilmiş Eşit Genişlikli Dalga Denkleminin Sayısal Çözümleri", *İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Doktora Tezi, s. 11-29 , Malatya, 2011.
5. Reddy, J.N., "An introduction to nonlinear Finite Element Analysis", *Oxford University Press Inc.*, New York, 2004.
6. Walkley, M.A., "Genişletilmiş Boussinesq sığ su dalgası denklemleri için sayısal bir yöntem" *Leeds Üniversitesi*, Doktora tezi, 1999.
7. Geyikli, T., "Finite element studies of the modified KdV equation", *University of Wales, Bangor*, Doktora tezi, Gwynedd (UK), 1994.
8. Keskin, P., "RLW Denkleminin Trigonometrik B-Spline Çözümleri", *Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Doktora Tezi, s. 11, Eskişehir, 2016.
9. Benci, V. ve Fortunato, D., "Variational methods in nonlinear field equations". *Springer Monographs in Mathematics*, Springer, 2(3), 2014.
10. Hereman, W., "Shallow water waves and solitary waves". *arXiv preprint arXiv:1308.5383*. 2013.
11. Yousefi, Y. ve Muminov, K.K., "A Simple Classification of Solitons". *arXiv preprint arXiv:1206.1294*. 2012.
12. Vvedenskii, D., "Partial Differential Equations With Mathematica". Wokingham (England) Etc., Addison-Wesley, 1992.
13. Karakoc, S.B.G., Zeybek, H. ve Ak, T., "Numerical solutions of the Kawahara

- equation by the septik B-spline collocation method”, *Statistics Optimization and Information Computing*, 2 (3), 211-221, 2014.
14. Zaki, S.I., “A kuintik B-spline finite elements scheme for the KdVB equation”, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 188 (1), 121-134, 2000.
 15. Ismail, M.S., “Numerical solution of complex modified Korteweg-de Vries equation by collocation method”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 14, 749-759, 2009.
 16. Irk, D., Dağ, İ., “Kuintik B-spline collocation method for the generalized nonlinear Schrödinger equation”, *Journal of the Franklin Institute*, 348, 378-392, 2011.
 17. Mittal, R. C., Jain, R. K., “Numerical solution of General Rosenau-RLW Equation using Kuintik B-splines Collocation Method”, *Communications in Numerical Analysis*, 2012,1-16, 2012.
 18. Irk, D., “Bazı kısmi türevli diferensiyel denklem sistemlerinin B-spline sonlu elemanlar çözümleri”, *Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi*, s.1-148, Eskişehir, 2007.
 19. Prenter, P.M., “Splines and Variational Methods,” *John Wiley & Sons*, New York, NY.USA, 1975.
 20. Özlük, M., “Korteweg-De Vries (Kdv) Denkleminin Spline Baz Fonksiyonları Yardımıyla Nümerik Çözümleri” *İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi* 2005.
 21. Russell, J.S., “Report on Waves, Rep. 14th Meeting of the British Assoc. for the Advancement of Science”, *John Murray*, Londra, s.311-390+11 levha, 1844.
 22. Stokes, G.G., “On the Theory of Oscillatory Waves”, *Camb. Trans.*8, 441-473, (1847).
 23. Boussinesq, J., “Theorie des Ondes it des Remous Quise Propagent le longd’un Canal Rectangulaire Horizontal, en Communiquant au Liquide Continu Dans ce Canal des Vitesses Sensiblement Parlilles de la Surface au fond”, *J.Math.Pures. Appl.* , Ser 2, 17, 55-108, 1872.
 24. Korteweg, D.J. ve de Vries, G., “On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal, and on a new type of Long Stationary Waves”, *Philos. Mag.*,

- 39, 422-443, 1895.
25. Ali, A.H.A., "Finite Element Studies of Korteweg de Vries Equation", Ph. D. Thesis, *University College of North Wales, Bangor, UK*, 1-2, 1989.
 26. Gardner, C.S., Greene, J.M., Kruskal, M.D. ve Miura, R.M., "Method for solving the Korteweg de Vries Equation", *Phys. Rev. Lett.* 19, 1095-1097, 60 1967.
 27. Zabusky, N.J. ve Kruskal, M.D., "Interaction of Solitons in a Collisionless Plasma and the Recurrence of Initial States", *Phys. Rev. Lett.*, 15, 240-243, 1965.
 28. Wahibin, L.B., "A Dissipative Galerkin Method for the Numerical Solution of First Order Hyperbolic Equation. In Mathematical Aspects of Finite Elements in Partial Differential Equations" C.de Boor, (Ed.) New York, *Academic Press*, 147-169, 1974.
 29. Rathish Kumar, B.V. ve Mehra, M., "Time accurate solutions of Korteweg– de Vries equation using wavelet Galerkin method". *Department of Mathematics and Scientific Computing, Indian Institute of Technology*. 2005.
 30. Korteweg, D.J. ve de Vries, G., "On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and a new type of long stationary wave", *Philosophical Magazine*, vol. 39, pp. 422-443, 1895.
 31. Zabusky, N.J., "A synergetic approach to problem of nonlinear dispersive wave propagation and interaction," in: W. Ames (Ed.), *Proc. Symp. Nonlinear Partial Diff. Equations*, *Academic Press*, pp. 223–258, 1967.
 32. Fornberg, B. ve Whitham, G.B., "A numerical and theoretical study of certain nonlinear wavephenomena", *Philos. Trans. Roy. Soc.* vol. 289, pp. 373–404, 1978.
 33. Zabusky, N.J. ve Kruskal, M.D., "Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 5, no. 6, pp. 240–243, 1965.
 34. Gardner, C.S., Green, J.M., Kruskal, M.D. ve Miura, R.M., "Method for solving Korteweg- de Vries equation", *Phys. Rev.*, vol. 19, pp. 1095-1100, 1967.
 35. Goda, K., "On in stability of some finite difference schemes for Korteweg–de Vriesequation", *J. Phys. Soc. Japan*, vol. 39, pp. 229–236, 1975.
 36. Vliengenthart, A.C., "On finite difference methods for the Korteweg–de Vries equation", *J. Eng. Math.*, vol. 5, pp. 137–155, 1971.

37. Soliman, A., "A. Collocation solution of the Korteweg-De Vries equation using septic splines", *Int. J. Comput. Math.* vol. 81, pp. 325-331, 2004.
38. Irk, D., Dağ, İ. ve Saka, B., "A small time solutions for the Korteweg–de Vries equation using spline approximation," *Appl.Math.Comput.*, vol. 173, no. 2, pp. 834-846, 2006.
39. Canıvar, A., Sarı, M. ve Dağ, I., "A Taylor-Galerkin finite element method for the KdV equation using cubic B-splines", *PhysicaB*, vol. 405, pp. 3376-3383, 2010.
40. Korkmaz, A., "Numerical algorithms for solutions of Korteweg-de Vries Equation, Numerical Methods for Partial Differential Equations", vol. 26, no. 6, pp. 1504–1521, 2010.
41. Ersoy, Ö ve Dağ, I., "CubicB-Spline Algorithm for Korteweg-de Vries Equation, Advancesin Numerical Analysis", vol. 2015,pp.1-8, 2015.
42. Aksan, E.N. ve Özdeş, A., "Numerical solution of Korteweg–de Vries equation by Galerkin B-spline finite element method," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 175, pp. 1256–1265, 2006.
43. Irk, D., "Quintic B-spline Galerkin method for the KdV equation, Anadolu University Journal of Science and Technology" *B- Theoretical Sciences*, vol. 5, no. 2, pp. 111-119, 2017.
44. Saka, B., "Cosine expansion-based differential quadrature method for numerical solution of the KdV equation," *Chaos Soliton Fract.* vol. 40, pp. 2181-2190, 2009.
45. Karakoç, S.B.G. ve Zeybek, H., "A cubic B-spline Galerkin approach for the numerical simulation of the GEW equation," *Stat., Optim. Inf. Comput.*, Vol. 4, pp 30–41, 2016.
46. Karakoç, B.G., Zeybek, H. ve Ak, T., "Numerical solutions of the Kawahara equation by theseptic B-spline collocation method" *Stat., Optim. Inf. Comput.*, Vol. 2, pp 211–221, 2014.
47. Heris, J.M. ve Zamanpour, I., "Exact travelling wave solutions of the symmetric regularized long wave (SRLW) using analytical methods", *Stat., Optim. Inf. Comput.*, Vol. 2, March, pp 47–55, 2014.
48. Kutluay, S., Bahadır, A.R. ve Özdeş, A., "A small time solutions for the Korteweg–

- de Vries equation”, *Appl. Math. Comput.* vol.107, pp. 203–210, 2000.
49. Kaya, D., “An application for the higher order modified KdV equation by decomposition method”, *Commun. In Nonlinear Science and Num. Simul.*, vol. 10, pp. 693-702, 2005.
 50. Biswas, A., ve Raslan, K.R., “Numerical simulation of the modified Korteweg-de Vries Equation”, *Physics of Wave Phenomena*, vol. 19, no. 2, pp. 142-147, 2011.
 51. Raslan, K.R. ve Baghdady H.A., “A finite difference scheme for the modified Korteweg-de Vries equation”, *General Mathematics Notes*, vol. 27, no. 1, pp. 101-113, 2015.
 52. Raslan, K.R. ve Baghdady, H.A., “New algorithm for solving the modified Korteweg-de Vries (mKdV) equation”, *International Journal of Research and Reviews in Applied Sciences*, vol. 18, no. 1, pp. 59-64, 2014.
 53. Wazwaz, A.M., “A variety of (3+1)-dimensional mKdV equations derived by using the mKdV recursion operator”, *Computers and Fluids*, vol. 93, no. 10, pp. 41-45, 2014.
 54. Wazwaz, A.M., “New (3+1)-dimensional nonlinear evolution equations with mKdV equation constituting its main part: multiple soliton solutions”, *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 76, pp. 93-97, 2015.
 55. Ak, T., Karakoç, S.B.G. ve Biswas, A., “A New Approach for Numerical Solution of Modified Korteweg-de Vries Equation,” *Iran J. Sci. Technol. Trans. Sci.*, vol. 41, pp. 1109–1121, 2017.
 56. Ak, T., Karakoc S.B.G., ve Biswas A., “Application of Petrov-Galerkin finite element method to shallow water waves model: Modified Korteweg-de Vries equation”, *Scientia Iranica B.*, vol. 24, no. 3, pp. 1148-1159, 2017.
 57. Karakoc, S.B.G., “A Quartic Subdomain Finite Element Method for the Modified KdV Equation.” *Statistics, Optimization & Information Computing*, 6(4), 609-618, 2018.
 58. Miura, R.M., Gardner C.S. ve Kruskal M.D., “Korteweg-de Vries equation and generalizations. II. Existence of conservation laws and constants of motion”, *Journal of Mathematical Physics*, vol. 9, no. 8, 1204, 1968.

59. Miura, R.M., “The Korteweg-de Vries equation: a survey of results”, *SIAM Rev.*, vol.18, no.3, pp. 412–459, 1976.
60. Karakoc, S.B.G., “A Detailed Numerical Study On Generalized Rosenau-KdV Equation With Finite Element Method”, Year 18, No. 4(45), pp. 837-852, 2018.
61. Karakoc, S.B.G., “Numerical solutions of the modified KdV Equation with collocation method.” *Malaya Journal of Matematik*, 6, 835-842, 2018.

