

**T.C.**  
**NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BAZI PAINLEVÈ VE SALINIM DİFERANSİYEL**  
**DENKLEMLERİN MAGNUS SERİ AÇILIMI METODU**  
**İLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ**

**Tezi Hazırlayan**  
**Musa BAŞBÜK**

**Tez Danışmanı**  
**Doç. Dr. Aytekin ERYILMAZ**

**Matematik Anabilim Dalı**  
**Doktora Tezi**

**Haziran 2015**  
**NEVŞEHİR**

Doç. Dr. Aytekin ERYILMAZ danışmanlığında Musa BAŞBÜK tarafından hazırlanan “Bazı Painlevé ve Salınım Diferansiyel Denklemlerin Magnus Seri Açılımı Metodu ile Nümerik Çözümleri” başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Doktora Tezi** olarak kabul edilmiştir.

04./6./2015

### JÜRİ

Başkan : Doç. Dr. Necdet BATIR

Üye : Doç. Dr. Hüseyin TUNA

Üye : Doç. Dr. Murat ATIŞ

Üye : Doç. Dr. Aytekin ERYILMAZ

Üye : Yrd. Doç. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ

### ONAY:

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun 04.6.2015 tarih ve 2015/24-05 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

04/6/2015  
Doç. Dr. Şahlan ÖZTÜRK  
Enstitü Müdürü

## TEZ BİLDİRİM SAYFASI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada yer alan bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu ve bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.



Musa BAŞBÜK

## TEŞEKKÜR

Doktora öğrenimim ve tez çalışmam süresince tüm bilgilerini benimle paylaşmaktan kaçınmayan, her türlü konuda desteğini benden esirgemeyen ve tezimde büyük emeği olan Sayın Hocalarım Doç. Dr. Aytekin ERYILMAZ ve Yrd. Doç. Dr. M. Tarık ATAY'a,

Maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen değerli eşim Emine BAŞBÜK ve çok kıymetli kızlarım Zeynep ve Betül BAŞBÜK'e,

Desteklerinden dolayı Yrd. Doç. Dr. S. Battal Gazi KARAKOÇ'a ve Cahit KÖME ve Sure KÖME'ye,

Teknik ve idari yardımlarından dolayı Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Matematik Bölümünün değerli hocalarına teşekkür ederim.

**BAZI PAINLEVÈ VE SALINIM DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN MAGNUS  
SERİ AÇILIMI METODU İLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ**

**(Doktora Tezi)**

**Musa BAŞBÜK**

**NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**Haziran 2015**

**ÖZET**

Bu tez çalışmasında öncelikle konunun tarihsel gelişimi anlatılmıştır. Daha sonra Lie grubu, Lie cebiri ve Magnus seri açılımı ve difereansiyel geometrinin temel tanım ve teoremleri hatırlanmış ve matris üstel tasvirinin tanımı verilerek, lineer ve lineer olmayan adi diferansiyel denklemler için Magnus seri açılımı yöntemi incelenmiştir.

Literatürde Magnus seri açılımı yönteminin uygulanmadığı fiziksel uygulamalarda ve mühendislik uygulamalarında karşımıza çıkan lineer ve lineer olmayan salınım adi diferansiyel denklem ve denklem sistemleri ile 1. ve 2. Painlevè denklemleri ele alınmış ve bu denklemler Magnus seri açılımı yöntemi ile çözülmüştür. Elde edilen çözümler varsa analitik kesin çözümlerle, yoksa Runge Kutta yöntemi ile elde edilen çözümlerle karşılaştırılmıştır.

***Anahtar kelimeler: Lie grubu, Lie tipi denklem, Magnus serisi, Osilasyon, Vibrasyon, Painlevè denklemleri, Van Der Pol denklemleri.***

**Tez Danışmanları: Doç. Dr. Aytekin ERYILMAZ**

**Sayfa sayısı: 106**

**NUMERICAL SOLUTIONS OF SOME PAINLEVÈ AND  
OSCILLATORY DIFFERENTIAL EQUATIONS  
BY MEANS OF MAGNUS SERIES EXPANSION METHOD**  
(PhD Thesis)

**Musa BAŞBÜK**

**NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ UNIVERSITY  
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES**  
**June 2015**

**ABSTRACT**

In this thesis, firstly the historical progress of the subject is considered. Then some basic definitions and main theorems of Lie group, Lie algebra, Magnus series and differential geometry are recalled. In addition essential definitions and theorems of a matrix exponential mapping are given. The Magnus series expansion method for linear and nonlinear ordinary differential equations is investigated.

At the end, first & second Painlevè equations and linear & nonlinear oscillatory ODEs that occur in physical and engineering applications, in which Magnus series expansion hasn't been applied, are considered and numerical solutions for these equations are obtained by Magnus series expansion method. The results are compared with exact analytical solutions and the solutions obtained by Runge Kutta method.

***Keywords: Lie group, Lie type equation, Magnus series, Oscillation, Vibration, Painlevè equations, Van Der Pol equations.***

**Thesis Supervisors: Assoc. Prof. Dr. Aytakin ERYILMAZ**

**Pages: 106**

## İÇİNDEKİLER

TEZ KABUL ve ONAY SAYFASI .....	i
TEZ BİLDİRİM SAYFASI.....	ii
TEŞEKKÜR .....	iii
ÖZET .....	iv
ABSTRACT .....	v
İÇİNDEKİLER.....	vi
TABLolar LİSTESİ.....	viii
ŞEKİLLER LİSTESİ .....	xii
SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ .....	xiv
1. BÖLÜM	
GİRİŞ .....	1
2. BÖLÜM	
ÖN BİLGİLER .....	4
3. BÖLÜM	
MAGNUS SERİ AÇILIMI METODU .....	10
3.1. Giriş .....	10
3.2. Magnus Seri Açılımı .....	12
3.3. Picard İterasyonu .....	15
3.4. Lineer Denklemler için Magnus Seri Açılımı Metodu .....	15
3.5. Gauss Tümlevi (Gaussian Quadrature).....	21
3.5.1. Tek integraller için Gauss tümlevi .....	23
3.5.2. Katlı integraller için Gauss tümlevi (Multivariate Gaussian Quadrature).....	23
3.6. Lineer Olmayan Diferansiyel Denklemler için Magnus Seri Açılımı Metodu .....	30
3.6.1. İkinci Mertebe Lineer Olmayan Magnus Seri Açılımı Metodu NMG2.....	32
3.6.2. Üçüncü Mertebe Lineer Olmayan Magnus Seri Açılımı Metodu NMG3.....	32
3.6.3. Dördüncü Mertebe Lineer Olmayan Magnus Seri Açılımı Metodu NMG4 .....	34
3.7. Homojen Olmayan Denklemler .....	34
4. BÖLÜM	
MAGNUS SERİ AÇILIMI METODUNUN UYGULAMALARI .....	36
4.1. Yay üzerindeki bir cismin titreşimi.....	36
4.1.1. Yay üzerindeki bir cisme etki eden kuvvetler .....	36

4.1.1.1. $F_1$ Yerçekimi Kuvveti .....	36
4.1.1.2. $F_2$ Yaylı Geri Getiren Kuvvet .....	37
4.1.1.3. $F_3$ Sönüm Kuvveti .....	37
4.1.1.4. $F_4$ Harici Kuvvetler .....	37
4.1.2. Yay üzerindeki bir cismin hareketi .....	38
4.1.2.1 Serbest sönümsüz hareket .....	38
4.1.2.2. Serbest sönümlü hareket .....	39
4.1.2.3 Zorlanmış hareket .....	40
4.2. Van Der Pol Denklemleri .....	59
4.2.1. 2DOF Bağlantılı (Coupled) Van Der Pol Denklem Sistemi.....	59
4.2.2. 3DOF Bağlantılı Van Der Pol Denklem Sistemi .....	64
4.2.2.1. 3DOF Bağlantılı Van Der Pol Duffing Denklem Sistemi.....	64
4.2.2.2. 3DOF Bağlantılı Van Der Pol Denklem Sistemi .....	70
4.3. Zorlanmış (Forced) Van Der Pol Denklemi .....	75
4.3. Painlevé Denklemleri .....	78
4.3.1. $P_1$ birinci Painlevé denklemi.....	78
4.3.2. $P_2$ ikinci Painlevé denklemi.....	81
5. BÖLÜM	
SONUÇLAR VE ÖNERİLER .....	86
5.1 Sonuçlar .....	86
5.2 Öneriler.....	86
KAYNAKLAR.....	87
ÖZGEÇMİŞ.....	92



## TABLULAR LİSTESİ

Tablo 4.1. (4.30) denkleminin MG4 ile $h = \frac{1}{100}$ adım aralığı ve (0,10) zaman aralığında $x(t)$ için çözümü ile kesin analitik çözümünün karşılaştırılması .....	46
Tablo 4.2. (4.30) denkleminin RK4 ile $h = \frac{1}{100}$ adım aralığı ve (0,10) zaman aralığında $x(t)$ için çözümü ile kesin analitik çözümünün karşılaştırılması. ....	46
Tablo 4.3. (4.30) denkleminin MG4 ile $h = \frac{1}{100}$ adım aralığı ve (0,10) zaman aralığında $x'(t)$ için çözümü ile kesin analitik çözümünün karşılaştırılması .....	47
Tablo 4.4. (4.30) denkleminin RK4 ile $h = \frac{1}{100}$ adım aralığı ve (0,10) zaman aralığında $x'(t)$ için çözümü ile kesin analitik çözümünün karşılaştırılması. ....	47
Tablo 4.5. (4.30) denkleminin MG6 ile $h = \frac{1}{100}$ adım aralığı ve (0,10) zaman aralığında $x(t)$ için çözümü ile kesin analitik çözümünün karşılaştırılması .....	48
Tablo 4.6. (4.30) denkleminin RK6 ile $h = \frac{1}{100}$ adım aralığı ve (0,10) zaman aralığında $x(t)$ için çözümü ile kesin analitik çözümünün karşılaştırılması .....	48
Tablo 4.7. (4.30) denkleminin MG6 ile $h = \frac{1}{100}$ adım aralığı ve (0,10) zaman aralığında $x'(t)$ için çözümü ile kesin analitik çözümünün karşılaştırılması .....	49
Tablo 4.8. (4.30) denkleminin RK6 ile $h = \frac{1}{100}$ adım aralığı ve (0,10) zaman aralığında $x'(t)$ için çözümü ile kesin analitik çözümünün karşılaştırılması .....	49
Tablo 4.9. (4.30) denkleminin MG4, MG6, RK4 ve RK6 ile $h = \frac{1}{100}$ adım aralığı ve (0,10) zaman aralığında $x(t)$ için çözümlerinin mutlak hataları .....	50
Tablo 4.10. (4.30) denkleminin MG4, MG6, RK4 ve RK6 ile $h = \frac{1}{100}$ adım aralığı ve (0,10) zaman aralığında $x'(t)$ için çözümlerinin mutlak hataları .....	50
Tablo 4.11. (4.34) denkleminin MG4 ile $h = \frac{1}{100}$ adım aralığı ve (0,10) zaman aralığında $x(t)$ için çözümü ile kesin analitik çözümünün karşılaştırılması .....	54
Tablo 4.12. (4.34) denkleminin RK4 ile $h = \frac{1}{100}$ adım aralığı ve (0,10) zaman aralığında $x(t)$ için çözümü ile kesin analitik çözümünün karşılaştırılması .....	55
Tablo 4.13. (4.34) denkleminin MG4 ile $h = \frac{1}{100}$ adım aralığı ve (0,10) zaman aralığında $x'(t)$ için çözümü ile kesin analitik çözümünün karşılaştırılması .....	55
Tablo 4.14. (4.34) denkleminin RK4 ile $h = \frac{1}{100}$ adım aralığı ve (0,10) zaman aralığında $x'(t)$ için çözümü ile kesin analitik çözümünün karşılaştırılması .....	56

Tablo 4.15. (4.34) denkleminin MG6 ile $h = \frac{1}{100}$ adım aralığı ve (0,10) aralığında $x(t)$ için çözümü ile kesin analitik çözümünün karşılaştırılması .....	56
Tablo 4.16. (4.34) denkleminin RK6 ile $h = \frac{1}{100}$ adım aralığı ve (0,10) zaman aralığında $x(t)$ için çözümü ile kesin analitik çözümünün karşılaştırılması .....	57
Tablo 4.17. (4.34) denkleminin MG6 ile $h = \frac{1}{100}$ adım aralığı ve (0,10) aralığında $x'(t)$ için çözümü ile kesin analitik çözümünün karşılaştırılması .....	57
Tablo 4.18. (4.34) denkleminin RK6 ile $h = \frac{1}{100}$ adım aralığı ve (0,10) zaman aralığında $x'(t)$ için çözümü ile kesin analitik çözümünün karşılaştırılması .....	58
Tablo 4.19. (4.34) denkleminin MG4, MG6, RK4 ve RK6 ile $h = \frac{1}{100}$ adım aralığı ve (0,10) zaman aralığında $x(t)$ için çözümlerinin hatalarının karşılaştırılması.....	58
Tablo 4.20. (4.34) denkleminin MG4, MG6, RK4 ve RK6 ile $h = \frac{1}{100}$ adım aralığı ve (0,10) zaman aralığında $x'(t)$ için çözümlerinin hatalarının karşılaştırılması.....	59
Tablo 4.21. (4.38) denkleminin NMG4 ve RK4 ile $h = \frac{1}{100}$ , $\alpha_1 = 1$ , $\alpha_2 = 99/100$ , $\beta_1 = \beta_2 = 1$ , $\delta_1 = \delta_2 = 1$ , $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ değerleri ve (0,10) zaman aralığı için $x_1$ çözümleri.....	62
Tablo 4.22. (4.38) denkleminin NMG4 ve RK4 ile $h = \frac{1}{100}$ , $\alpha_1 = 1$ , $\alpha_2 = 99/100$ , $\beta_1 = \beta_2 = 1$ , $\delta_1 = \delta_2 = 1$ , $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ değerleri ve (0,10) zaman aralığı için $\dot{x}_1$ çözümleri.....	62
Tablo 4.23. (4.38) denkleminin NMG4 ve RK4 ile $h = \frac{1}{100}$ , $\alpha_1 = 1$ , $\alpha_2 = 99/100$ , $\beta_1 = \beta_2 = 1$ , $\delta_1 = \delta_2 = 1$ , $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ değerleri ve (0,10) zaman aralığı için $x_2$ çözümleri.....	63
Tablo 4.24. (4.38) denkleminin NMG4 ve RK4 ile $h = \frac{1}{100}$ , $\alpha_1 = 1$ , $\alpha_2 = 99/100$ , $\beta_1 = \beta_2 = 1$ , $\delta_1 = \delta_2 = 1$ , $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ değerleri ve (0,10) zaman aralığı için $\dot{x}_2$ çözümleri.....	63
Tablo 4.25. (4.41) denkleminin NMG4 ve RK4 ile $h = \frac{1}{100}$ , $\varepsilon = 1$ , $\delta = 1$ , $\mu = 2$ değerleri ve (0,10) zaman aralığı için $x_1$ çözümleri.....	67
Tablo 4.26. (4.41) denkleminin NMG4 ve RK4 ile $h = \frac{1}{100}$ , $\varepsilon = 1$ , $\delta = 1$ , $\mu = 2$ değerleri ve (0,10) zaman aralığı için $\dot{x}_1$ çözümleri.....	67

Tablo 4.27. (4.41) denkleminin NMG4 ve RK4 ile $h = \frac{1}{100}$ , $\varepsilon = 1$ , $\delta = 1$ , $\mu = 2$ değerleri ve (0,10) zaman aralığı için $x_2$ çözümleri .....	68
Tablo 4.28. (4.41) denkleminin NMG4 ve RK4 ile $h = \frac{1}{100}$ , $\varepsilon = 1$ , $\delta = 1$ , $\mu = 2$ değerleri ve (0,10) zaman aralığı için $\dot{x}_2$ çözümleri .....	68
Tablo 4.29. (4.41) denkleminin NMG4 ve RK4 ile $h = \frac{1}{100}$ , $\varepsilon = 1$ , $\delta = 1$ , $\mu = 2$ değerleri ve (0,10) zaman aralığı için $x_3$ çözümleri .....	69
Tablo 4.30. (4.41) denkleminin NMG4 ve RK4 ile $h = \frac{1}{100}$ , $\varepsilon = 1$ , $\delta = 1$ , $\mu = 2$ değerleri ve (0,10) zaman aralığı için $\dot{x}_3$ çözümleri .....	69
Tablo 4.31. (4.41) denkleminin NMG4 ve RK4 ile $h = \frac{1}{100}$ , $\varepsilon = 1$ , $\delta = 0$ , $\mu = 2$ değerleri ve (0,10) zaman aralığı için $x_1$ çözümleri.....	72
Tablo 4.32. (4.41) denkleminin NMG4 ve RK4 ile $h = \frac{1}{100}$ , $\varepsilon = 1$ , $\delta = 0$ , $\mu = 2$ değerleri ve (0,10) zaman aralığı için $\dot{x}_1$ çözümleri.....	73
Tablo 4.33. (4.41) denkleminin NMG4 ve RK4 ile $h = \frac{1}{100}$ , $\varepsilon = 1$ , $\delta = 0$ , $\mu = 2$ değerleri ve (0,10) zaman aralığı için $x_2$ çözümleri.....	73
Tablo 4.34. (4.41) denkleminin NMG4 ve RK4 ile $h = \frac{1}{100}$ , $\varepsilon = 1$ , $\delta = 0$ , $\mu = 2$ değerleri ve (0,10) zaman aralığı için $\dot{x}_2$ çözümleri.....	74
Tablo 4.35. (4.41) denkleminin NMG4 ve RK4 ile $h = \frac{1}{100}$ , $\varepsilon = 1$ , $\delta = 0$ , $\mu = 2$ değerleri ve (0,10) zaman aralığı için $x_3$ çözümleri.....	74
Tablo 4.36. (4.41) denkleminin NMG4 ve RK4 ile $h = \frac{1}{100}$ , $\varepsilon = 1$ , $\delta = 0$ , $\mu = 2$ değerleri ve (0,10) zaman aralığı için $\dot{x}_3$ çözümleri.....	75
Tablo 4.37. (4.44) denkleminin NMG4 ve RK4 ile $h = \frac{1}{100}$ , $a = 0.983139$ , $\omega = 0.45$ ve $\mu = 1$ değerleri ve (0,10) zaman aralığı için $x(t)$ çözümleri.....	77
Tablo 4.38. (4.44) denkleminin NMG4 ve RK4 ile $h = \frac{1}{100}$ , $a = 0.983139$ , $\omega = 0.45$ ve $\mu = 1$ değerleri ve (0,10) zaman aralığı için $\dot{x}(t)$ çözümleri.....	77
Tablo 4.39. (4.53) denkleminin $y(t)$ için $h = \frac{1}{1000}$ adım aralığı ve (0,1) zaman aralığında NMG4 ve RK4 çözümleri.....	79
Tablo 4.40. (4.53) denkleminin $y'(t)$ için $h = \frac{1}{1000}$ adım aralığı ve (0,1) zaman aralığında NMG4 ve RK4 çözümleri.....	80

Tablo 4.41. (4.56) denkleminin $y(t)$ için $h = \frac{1}{100}$ adım aralığı ve (0,1) zaman aralığında NMG4 çözümü ve mutlak hatası.....	82
Tablo 4.42. (4.56) denkleminin $y(t)$ için $h = \frac{1}{100}$ adım aralığı ve (0,1) zaman aralığında RK4 çözümü ve mutlak hatası.....	82
Tablo 4.43. (4.56) denkleminin $y'(t)$ için $h = \frac{1}{100}$ adım aralığı ve (0,1) zaman aralığında NMG4 çözümü ve mutlak hatası.....	83
Tablo 4.44. (4.56) denkleminin $y'(t)$ için $h = \frac{1}{100}$ adım aralığı ve (0,1) zaman aralığında RK4 çözümü ve mutlak hatası .....	83

## ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.1.	$\mathcal{M}$ manifoldu üzerindeki koordinat sistemleri arasındaki bağıntı .....	6
Şekil 4.1.	Yay üzerindeki cismin hareketi.....	38
Şekil 4.2.	(4.30) denkleminde $x(t)$ için (a) MG4, (b) RK4 hata grafikleri.....	43
Şekil 4.3.	(4.30) denkleminde $x(t)$ için (a) MG4, (b) RK4 ve analitik çözüm grafikleri.....	43
Şekil 4.4.	(4.30) denkleminde $x'(t)$ için (a) MG4, (b) RK4 hata grafikleri.....	44
Şekil 4.5.	(4.30) denkleminde $x'(t)$ için (a) MG4, (b) RK4 ve analitik çözüm grafikleri.....	44
Şekil 4.6.	(4.30) denkleminde $x(t)$ için (a) MG6, (b) RK6 hata grafikleri.....	44
Şekil 4.7.	(4.30) denkleminde $x(t)$ için (a) MG6, (b) RK6 ve analitik çözüm grafikleri.....	45
Şekil 4.8.	(4.30) denkleminde $x'(t)$ için (a) MG6, (b) RK6 hata grafikleri.....	45
Şekil 4.9.	(4.30) denkleminin $x'(t)$ için (a) MG6, (b) RK6 ve analitik çözüm grafikleri.....	45
Şekil 4.10.	(4.30) denkleminin $x(t)$ için (a) MG4, (b) RK4 hata grafikleri .....	51
Şekil 4.11.	(4.30) denkleminin $x(t)$ için (a) MG4, (b) RK4 ve analitik çözüm grafikleri.....	52
Şekil 4.12.	(4.30) denkleminin $x'(t)$ için (a) MG4, (b) RK4 hata grafikleri .....	52
Şekil 4.13.	(4.30) denkleminin $x'(t)$ için (a) MG4, (b) RK4 ve analitik çözüm grafiği.....	52
Şekil 4.14.	(4.34) denkleminin $x(t)$ için (a) MG6, (b) RK6 hata grafikleri .....	53
Şekil 4.15.	(4.34) denkleminin $x(t)$ için (a) MG6, (b) RK6 ve analitik çözüm grafikleri.....	53
Şekil 4.16.	(4.34) denkleminin $x'(t)$ için (a) MG6, (b) RK6 hata grafikleri .....	53
Şekil 4.17.	(4.34) denkleminin $x'(t)$ için (a) MG6, (b) RK6 ve analitik çözüm grafikleri.....	54
Şekil 4.18.	(4.38) denkleminin (a) $x_1(t)$ , (b) $x_2(t)$ çözümlerinin grafikleri.....	60
Şekil 4.19.	(4.38) denkleminin (a) $\dot{x}_1(t)$ , (b) $\dot{x}_2(t)$ çözümlerinin grafikleri.....	61

Şekil 4.20. (4.38) denkleminin (a) $x_1(t)$ , (b) $x_2(t)$ çözümlerinin grafikleri.....	61
Şekil 4.21. (4.38) denkleminin (a) $\dot{x}_1(t)$ , (b) $\dot{x}_2(t)$ çözümlerinin grafikleri.....	61
Şekil 4.22. (4.41) denkleminin $\varepsilon = 1$ , $\delta = 1$ , $\mu = 2$ için (a) $x_1(t)$ , (b) $\dot{x}_1(t)$ grafikleri...	65
Şekil 4.23. (4.41) denkleminin $\varepsilon = 1$ , $\delta = 1$ , $\mu = 2$ için (a) $x_2(t)$ , (b) $\dot{x}_2(t)$ grafikleri .	65
Şekil 4.24. (4.41) denkleminin $\varepsilon = 1$ , $\delta = 1$ , $\mu = 2$ için (a) $x_3(t)$ , (b) $\dot{x}_3(t)$ grafikleri ..	65
Şekil 4.25. (4.41) denkleminin $\varepsilon = 1$ , $\delta = 1$ , $\mu = 2$ için (a) $x_1(t)$ , (b) $\dot{x}_1(t)$ grafikleri...	66
Şekil 4.26. (4.41) denkleminin $\varepsilon = 1$ , $\delta = 1$ , $\mu = 2$ için (a) $x_2(t)$ , (b) $\dot{x}_2(t)$ grafikleri .	66
Şekil 4.27. (4.41) denkleminin $\varepsilon = 1$ , $\delta = 1$ , $\mu = 2$ için (a) $x_3(t)$ , (b) $\dot{x}_3(t)$ grafikleri ..	66
Şekil 4.28. (4.41) denkleminin $\varepsilon = 1$ , $\delta = 0$ , $\mu = 2$ için (a) $x_1(t)$ , (b) $\dot{x}_1(t)$ grafikleri ..	70
Şekil 4.29. (4.41) denkleminin $\varepsilon = 1$ , $\delta = 0$ , $\mu = 2$ için (a) $x_2(t)$ , (b) $\dot{x}_2(t)$ grafikleri .	70
Şekil 4.30. (4.41) denkleminin $\varepsilon = 1$ , $\delta = 0$ , $\mu = 2$ için (a) $x_3(t)$ , (b) $\dot{x}_3(t)$ grafikleri..	71
Şekil 4.31. (4.41) denkleminin $\varepsilon = 1$ , $\delta = 0$ , $\mu = 2$ için (a) $x_1(t)$ , (b) $\dot{x}_1(t)$ grafikleri ..	71
Şekil 4.32. (4.41) denkleminin $\varepsilon = 1$ , $\delta = 0$ , $\mu = 2$ için (a) $x_2(t)$ , (b) $\dot{x}_2(t)$ grafikleri .	71
Şekil 4.33. (4.41) denkleminin $\varepsilon = 1$ , $\delta = 0$ , $\mu = 2$ için (a) $x_3(t)$ , (b) $\dot{x}_3(t)$ grafikleri..	72
Şekil 4.34. (4.44) denkleminin (a) $x(t)$ , (b) $\dot{x}(t)$ grafikleri.....	76
Şekil 4.35. (4.44) denkleminin (a) $x(t)$ , (b) $\dot{x}(t)$ için NMG4 ve RK4 mutlak farkı.....	76

## SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ

$C^k$	:	$k$ . mertebeden kısmi türevleri var ve sürekli olan fonksiyonlar kümesi
$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar kümesi
$E^n$	:	$n$ -boyutlu Öklid uzayı
$\mathcal{M}$	:	Manifold
$\mathcal{G}$	:	Lie grubu
$\mathfrak{g}$	:	Lie cebiri
$Ad$	:	Adjoint gösterim
$ad$	:	Adjoint operatör
$exp$	:	Üstel tasvir
$dexp$	:	Üstel tasvirin diferansiyeli
$[.,.]$	:	Lie parantez operatörü
$B_j$	:	Bernoulli sayıları

# 1. BÖLÜM

## GİRİŞ

Mühendislikten fiziğe, istatistikten biyolojiye kadar uygulamalı bilimlerin çoğunda karşılaşılan problemlerde diferansiyel denklemler karşımıza çıkmaktadır. Her zaman bu denklemlerin analitik çözümlerini bulmak mümkün olmamaktadır. Bunun için birçok yarı analitik ve nümerik yöntem ve metotlar geliştirilmiştir. Bu yöntem ve metotlar içerisinde nümerik yöntem ve metotlar diğerlerinden daha iyi sonuçlar verdiği için daha çok tercih edilmektedir. Analitik kesin çözümlerin bulunmadığı durumlarda nümerik çözümler kesin çözümler gibi kabul edilip diğer yöntemlerle elde edilen sonuçlar da nümerik çözümlerle kıyaslanır olmuştur. Diferansiyel denklem ve denklem sistemlerinde elbette en az hatayla yaklaşık bir çözüm elde etmek önemlidir. Fakat sadece yaklaşık çözümün doğruluğu birçok fiziksel uygulamada yeterli olmamaktadır. Fiziksel problemlerdeki enerjinin korunumu, momentum, açısal momentum ve simetri gibi geometrik özelliklerin korunumu problemlerin çözümünde ve analizinde önemlidir.

Bunun için elde edilen nümerik çözümlerin aynı zamanda geometrik özellikleri başarılı bir şekilde koruması çok önem kazanmaktadır. Geometrik integrasyon, diferansiyel denklemlerin çözümlerinin nitel özelliklerini ve geometrik özelliklerini başarılı bir şekilde koruyan nümerik integrasyon yöntemidir.

Son zamanlarda sayısal çözüm yanında nitel özelliklerin ve geometrik yapının korunmasını sağlayan metotlar diğer standart metotlardan daha güvenilir, daha hızlı, daha hassas, daha ucuz olması yönüyle tercih edilir olmuştur.

Geometrik integrasyonda geometrik özellikler nümerik metot içerisinde korunmakta ve bu yüzden bu tür metotlar standart metotlara nazaran daha yüksek performans göstermektedir. Bu metotlar sıvıların yapısı, biyomoleküller, kuantum mekaniği, nano teknoloji gibi birçok alanda kullanılmaktadır. Bu yeni yaklaşımla elde edilen çözüm analitik çözümle aynı geometrik yapıda yer aldığı için analitik sonuca daha yakın sonuçlar vermektedir. Adi diferansiyel denklemlerin geometrik integrasyonunda kullanılan metotlardan başlıcaları Splitting, Composition metotları ve Lie grup



metotlarıdır. Başlıca Lie grup metotları Runge-Kutta Munthe Kaas metodları (RK-MK), Magnus seri açılımı metodu ve Fer açılımı metodudur [1].

Lie grup metotlarından biri olan Magnus seri açılımı metodu W. Magnus'un 1954 yılında yapmış olduğu “*On the exponential solution of differential equations for a linear operator*” isimli çalışmasına dayanmaktadır [2]. Bu çalışmada Magnus,  $Y' = A(t)Y$  birinci merteye lineer homojen diferansiyel denkleminin çözümünü  $Y(t) = e^{\Omega(t)}Y_0$  matris üstel fonksiyonu şeklinde ifade etmiş ve  $\Omega(t)$  için bir seri açılımı vermiştir [2]. Daha sonra bu açılım Magnus seri açılımı olarak adlandırılmıştır. Magnus açılımının ilk fiziksel uygulaması Robinson'un çalışmasıdır [3]. Bialynicki-Birula, Mielnik & Plebanski [4], Mielnik & Plebanski [5], Strichartz [6], Klarsfeld & Oteo [7] ve Fomenko & Chakon [8] gibi farklı yazarlar tarafından Magnus seri açılımındaki terimleri veren genel formüller sunulmuştur. Fakat bunlar çok karmaşık ve yüksek mertebelerde kullanımı çok da pratik olmayan formüllerdir. 1997 yılından itibaren Iserles & Nørsett bu alanda çalışmalar yapmaya başlamıştır [9]. Magnus seri açılımındaki terimleri veren pratik bir algoritma 1999 yılında Iserles & Nørsett tarafından verilmiştir [10]. Blanes ve çalışma arkadaşları [11], Casas [12], Moan & Niesen [13] Magnus serisinin yakınsaklığını incelemişlerdir. 1963 yılındaki Robinson'un çalışmasından bugüne kadar Magnus seri açılımı metodu birçok alanda başarıyla uygulanmıştır [14-29]. Magnus seri açılımı ve uygulamaları hakkında daha fazla bilgi edinmek isteyenler Blanes ve çalışma arkadaşlarının “*The Magnus expansion and some of its applications*” [30] isimli çalışmalarını inceleyebilir. Klarsfeld & Oteo Magnus operatörün analitik özelliklerini incelemişlerdir [31]. Özellikle Iserles & Nørsett'in 1997 ve 1999 yılında yaptıkları çalışmalarından [9,10] sonra birçok araştırmacı Magnus seri açılımı ile ilgili çalışmalar yapmışlardır [1,32-36]. Casas & Iserles 2006 yılında lineer olmayan diferansiyel denklemlerde Magnus seri açılımı metodu için bir algoritma sunmuşlardır [37]. Blanes & Ponsoda 2012 yılında homojen ve homejen olmayan lineer, sınır değer ve başlangıç değer problemleri için Magnus açılımı metodunu sunmuşlardır [38].

## 1.1. Amaç ve Kapsam

Bu çalışmanın temel amacı, Lie grup metotlarından biri olan Magnus seri açılımı

metodunu inceleyerek literatürde bu yöntemin uygulanmadığı, I. ve II. Painlevé denklemlerine, yay üzerindeki bir cismin hareketinde ortaya çıkan lineer homojen ve homojen olmayan adi diferansiyel denklemlere ve lineer olmayan bağlantılı Vander Pol denklem sistemi ile zorlanmış Vander Pol salınım diferansiyel denklemine bu yöntemi uygulamaktır. Ayrıca elde edilecek sonuçlar, analitik çözümlerle ve Runge Kutta metoduyla elde edilecek çözümlerle karşılaştırılacak ve sonuçlar, tablolar ve hata grafikleri ile verilecektir.

## 2. BÖLÜM ÖN BİLGİLER

Bu bölümde temel tanımlar verilecektir.

### Tanım 2.1. (Topolojik Manifold)

$\mathcal{M}$  bir topolojik uzay olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan  $\mathcal{M}$  ye  $n$ -boyutlu bir *topolojik manifold* (veya kısaca *topolojik  $n$ -manifold*) denir.

- i.  $\mathcal{M}$  bir Hausdorff uzayıdır.
- ii.  $\mathcal{M}$  nin her bir açık alt kümesi  $E^n$  ye veya  $E^n$  nin bir açık alt kümesine homeomorftur.
- iii.  $\mathcal{M}$  sayılabilir çoklukta açık kümeler ile örtülebilir [39].

### Tanım 2.2. (Diferansiyellenebilirlik)

$E^n$ ,  $n$ -boyutlu Öklid uzayında  $U$  bir açık alt küme olsun.  $f : U \rightarrow E^n$  fonksiyonu verilsin.  $f$  fonksiyonunun bütün  $k$ . mertebeden kısmi türevleri var ve sürekli ise  $f$  fonksiyonuna  $C^k$  sınıfından diferansiyellenebilir denir. Diferansiyellenebilirlikte tanım kümesi açık olmak zorundadır. Özel olarak  $f$  sadece sürekli ise  $C^0$  sınıfındandır denir.  $U$  üzerinde tanımlı  $C^1$  sınıfından fonksiyona *0-form* adı verilir.

$$C^k(U, \mathbb{R}) = \{f \mid f : U \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ } C^k \text{ sınıfından}\}, C^\infty(U, \mathbb{R}) = \{f \mid f \in C^k(U, \mathbb{R}), k \in \mathbb{N}\} \text{ dir.}$$

Eğer  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  birebir  $f$  ve  $f^{-1}$  sürekli ise  $f$  ye homeomorfizm, eğer birebir  $f$  ve  $f^{-1}$  diferansiyellenebilir ise  $f$  ye diffeomorfizm denir [39].

### Tanım 2.3. (Öklid koordinat fonksiyonları)

$U$  ve  $V$  sırasıyla  $E^m$  ve  $E^n$  de birer açık alt küme olsunlar. Bir

$$\psi : U \rightarrow V$$

$$x \rightarrow \psi(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$$

fonksiyonu için bütün  $f_i : U \rightarrow \mathbb{R}$  koordinat fonksiyonları  $C^k$  sınıfından iseler  $\psi \in C^k(U, V)$  dir denir.

$C^\infty(U, V) = \{\psi \mid \psi \in C^k(U, V), k \in \mathbb{N}\}$  dir.  $f_i$  fonksiyonlarına  $\psi$  nin Öklid koordinat fonksiyonları denir [39].

**Tanım 2.4. (Koordinat Komşuluğu= Harita)**

$\mathcal{M}$  bir  $n$ -boyutlu topolojik manifold ve  $U$  da  $\mathcal{M}$  de bir açık alt kümesi olsun. Eğer  $U$  bir  $\psi$  homeomorfizmi ile  $E^n$  nin bir  $W$  açık alt kümesine eşlenebiliyorsa, yani  $\psi : U \subset \mathcal{M} \rightarrow W \subset E^n$  homeomorfizmi varsa  $(U, \psi)$  ikilisine  $\mathcal{M}$  de bir koordinat komşuluğu veya harita denir.

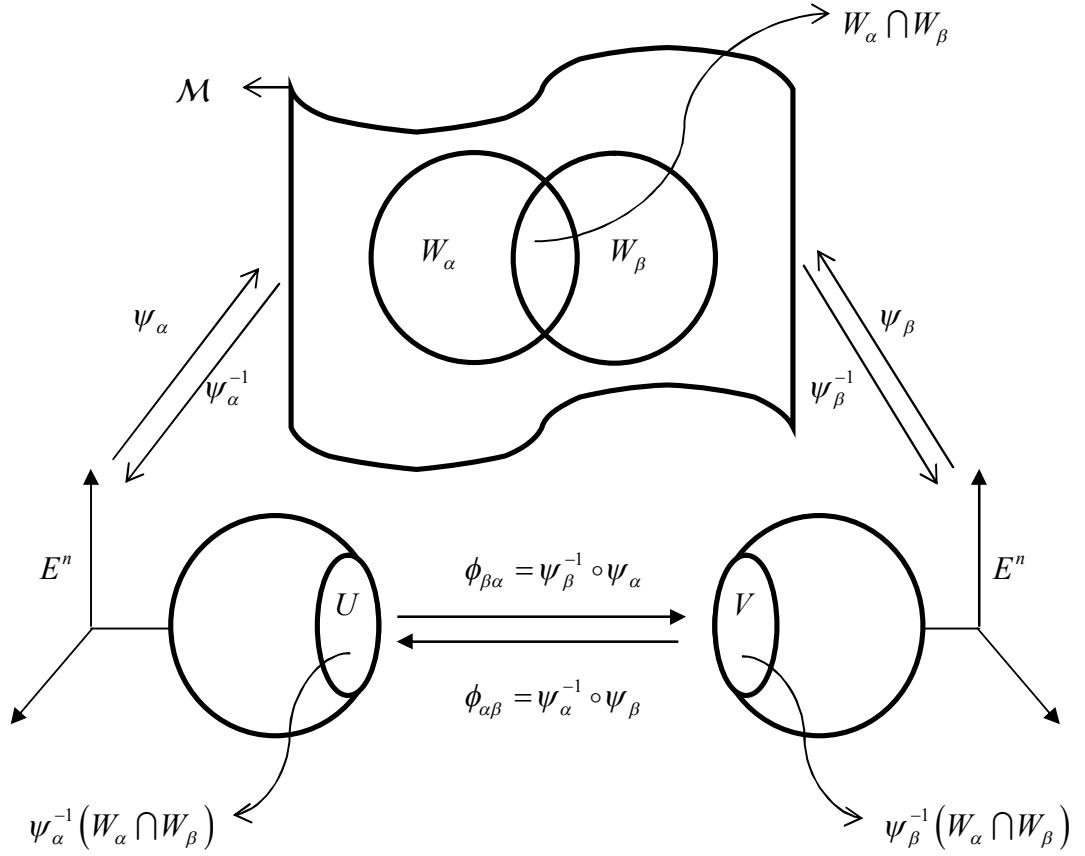
$u \in U$  için  $\psi(u) \in \mathcal{M}$  dir ve  $\psi(u) = (x_1(u), x_2(u), \dots, x_n(u))$ ,  $x_i(u) \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n$  dir. Burada  $x_i(u)$  reel sayısına  $\psi(u) \in E^n$  noktasının  $i$ -yinci koordinatı ve  $u_i : U \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonuna da  $u$ 'nun  $i$ -yinci Öklid koordinat fonksiyonu denir. [39].

**Tanım 2.5. (Koordinat Komşuluğu Sistemi = Atlas)**

$\mathcal{M}$  bir topolojik  $n$ -manifold ve  $\mathcal{M}$  nin bir açık örtüsü  $\{U_\alpha\}$  olsun.  $U_\alpha$  açık kümelerinin  $\alpha$  indislerinin kümesi  $A$  olmak üzere  $\{U_\alpha\}$  örtüsü için  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  yazalım.  $E^n$  de  $U_\alpha$  ya homeomorf olan bir açık küme  $E_\alpha$  ve  $\psi_\alpha : U_\alpha \xrightarrow{\text{homeomorfizm}} E_\alpha$  olsun. Böylece ortaya çıkan  $(\psi_\alpha, U_\alpha)$  haritalarının  $\{(\psi_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  koleksiyonuna bir *atlas* (*koordinat komşuluğu sistemi*) denir [39].

Bir topolojinin  $n$ -manifoldu  $\mathcal{M}$  ve bir  $P \in \mathcal{M}$  noktasının açık komşulukları da  $W_\alpha$  olsun.  $P$  noktasının lokal koordinatları,  $W_\alpha$  lar değiştikçe  $\psi_\alpha$  değişeceğinden  $W_\alpha$  ların sayısı kadar  $\psi_\alpha$  vardır. Her bir  $\alpha \in A$  için  $(\psi_\alpha, W_\alpha)$  üzerindeki lokal koordinat sistemini  $(x_1^\alpha, x_2^\alpha, \dots, x_n^\alpha)$  ile göstereyim.  $P$  noktasının iki açık komşuluğu  $W_\alpha$  ve  $W_\beta$  ise  $W_\alpha \cap W_\beta \neq \emptyset$  ise  $W_\alpha \cap W_\beta$  nin her bir noktasında  $(x_1^\alpha, x_2^\alpha, \dots, x_n^\alpha)$  ve  $(x_1^\beta, x_2^\beta, \dots, x_n^\beta)$  gibi iki koordinat sistemi tanımlıdır. Bu iki koordinat sistemi arasındaki bağıntı Şekil 2.1. de verilmiştir.

$\psi_\alpha^{-1}(W_\alpha \cap W_\beta) \subset U \subset E^n$  ve  $\psi_\beta^{-1}(W_\alpha \cap W_\beta) \subset V \subset E^n$  alt kümeleri, ikişer açık kümenin birer homeomorfizm altında görüntüleri olduklarından açık kümelerdir. Ayrıca  $\psi_\beta^{-1} \circ \psi_\alpha : \psi_\alpha^{-1}(W_\alpha \cap W_\beta) \rightarrow \psi_\beta^{-1}(W_\alpha \cap W_\beta)$  ve  $\psi_\alpha^{-1} \circ \psi_\beta : \psi_\beta^{-1}(W_\alpha \cap W_\beta) \rightarrow \psi_\alpha^{-1}(W_\alpha \cap W_\beta)$  fonksiyonları da ikişer homeomorfizmin bileşimi olduklarından birer homeomorfizmdirler.



Şekil 2.1.  $\mathcal{M}$  manifoldu üzerindeki koordinat sistemleri arasındaki bağıntı [39]

Kısaca yukarıdaki fonksiyonu,  $\phi_{\beta\alpha} = \psi_\beta^{-1} \circ \psi_\alpha$  ve  $\phi_{\alpha\beta} = \psi_\alpha^{-1} \circ \psi_\beta$  gösterimleri kullanılır.  $\phi_{\alpha\beta}$  nin diferansiyellenebilir olması  $(\phi_{\alpha\beta})_i$  bileşenlerinin diferansiyellenebilir olmasını gerektirir. Aynı şey  $\phi_{\beta\alpha}$  fonksiyonu içinde söylenebilir [39].

**Tanım 2.6. (Diferansiyellenebilir Yapı)**

$\mathcal{M}$ ,  $n$ -boyutlu bir topolojik manifold ve  $\mathcal{M}$  nin bir atlası  $S = \{\psi_\alpha, W_\alpha\}_{\alpha \in A}$  olsun. Eğer  $S$  atlası için  $W_\alpha \cap W_\beta \neq \emptyset$  olmak üzere  $\forall \alpha, \beta \in A$  ya karşılık  $\phi_{\alpha\beta}$  ve  $\phi_{\beta\alpha}$  fonksiyonları  $C^k$  sınıftan diferansiyellenebilir iseler  $S$  ye  $C^k$  sınıftandır denir.  $S$  atlası  $\mathcal{M}$  üzerinde  $C^k$  sınıftan olduğu zaman  $S$  ye  $\mathcal{M}$  üzerinde  $C^k$  sınıftan diferansiyellenebilir yapı denir [39].

**Tanım 2.7. (Diferansiyellenebilir Manifold)**

$\mathcal{M}$ ,  $n$ -boyutlu bir topolojik manifold olsun.  $\mathcal{M}$  üzerinde  $C^k$  sınıftan bir diferansiyellenebilir yapı tanımlanabilirse  $\mathcal{M}$  ye  $C^k$  sınıftan diferansiyellenebilir manifold denir [39].

**Tanım 2.8. (Tanjant Vektör, Tanjant Uzay, Tanjant Demet)**

$\mathcal{M}$ ,  $n$ -boyutlu bir manifold ve  $\rho(t) \in \mathcal{M}$  diferansiyellenebilir bir eğri olsun.  $\rho(0) = p$  ise  $p$  noktasındaki tanjant vektörü,  $a = \left. \frac{d\rho(t)}{dt} \right|_{t=0}$  dır.  $p$  noktasındaki tüm tanjantların kümesine  $p$  noktasındaki tanjant uzayı denir ve  $T\mathcal{M}|_p$  ile gösterilir. Ve bu tanjant uzayı  $n$ -boyutlu bir lineer uzaydır. Yani,  $a, b \in T\mathcal{M}|_p$  ise  $a + b \in T\mathcal{M}|_p$  ve herhangi bir  $\alpha$  reel sayısı için  $\alpha a \in T\mathcal{M}|_p$  dır.  $\forall p \in \mathcal{M}$  noktalarındaki tüm tanjant uzayların kümesine tanjant demeti (tangent bundle) denir [1].

**Tanım 2.9. (Lie Grubu)**

Bir  $\mathcal{G}$  cümlesi verilsin. Şayet  $\mathcal{G}$  aşağıdaki şartları sağlıyorsa, bu taktirde  $\mathcal{G}$  ye bir Lie grubu denir [40].

- 1)  $\mathcal{G}$  bir diferansiyellenebilir manifolddur.
- 2)  $(\mathcal{G}, \cdot)$  bir gruptur.
- 3)  $\mu: \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ ,  $\mu(a, b) = ab$  ve  $\iota: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ ,  $\iota(a) = a^{-1}$  diferansiyellenebilir tasvirlerdir.

Başka bir ifadeyle bir Lie grubu  $\mathfrak{G}$ , çarpma  $\mu: \mathfrak{G} \times \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}$ ,  $\mu(a, b) = ab$  ve ters  $\iota: \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}$ ,  $\iota(a) = a^{-1}$  tasvirleri  $C^\infty$  olan grup yapısına sahip, diferansiyellenebilir bir manifolddur [41].

**Tanım 2.10. (Lie parantez operatörü (komütatör))**

Bir matris Lie cebiri  $\mathfrak{g}$  de Lie parantez operatörü  $[\cdot, \cdot]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$

$$[u, v] = uv - vu, \quad \forall u, v \in \mathfrak{g}, \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlıdır.  $u, v, z \in \mathfrak{g}$  ve  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  için Lie parantez operatörü aşağıdaki aksiyomları sağlar [42].

- i.  $[\alpha u + \beta v, z] = \alpha[u, z] + \beta[v, z]$ ,
- ii.  $[u, v] = -[v, u]$ ,
- iii.  $[u, [v, z]] + [v, [z, u]] + [z, [u, v]] = 0$ . (Jacobi özdeşliği)

**Tanım 2.11. (Lie cebiri)**

Bir  $\mathfrak{G}$  Lie grubunun birim elemanı  $I$  daki tüm tanjantlarının lineer uzayına  $\mathfrak{G}$  Lie grubunun Lie cebiri denir.  $\mathfrak{g}$  Lie cebirinde Lie operatörü (*Lie parantez operatörü*),

$$[x, y] = \left. \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \rho(s) \sigma(t) \rho(-s) \right|_{s=t=0} \quad (2.2)$$

şeklinde tanımlıdır. Burada  $\rho(s)$  ve  $\sigma(t)$ ,  $\rho(0) = \sigma(0) = I$  ve  $\rho'(0) = x$ ,  $\sigma'(0) = y$  olan  $\mathfrak{G}$  Lie grubunda diferansiyellenebilir eğrilerdir [1].

Bir diğer ifadeyle üzerinde Lie parantez operatörü  $[\cdot, \cdot]: V \times V \rightarrow V$  tanımlı  $V$  lineer uzayına Lie cebiri denir [1].

**Tanım 2.12. (Reel Matris Lie Grubu)**

Matrislerde çarpma ve ters işlemlerine göre kapalı olan  $\mathbb{R}^{n \times n}$  nin diferansiyellenebilir alt kümesi  $\mathfrak{G} \subset \mathbb{R}^{n \times n}$  ye reel matris Lie grubu denir. Birim matris  $I \in \mathfrak{G}$  ile gösterilir [1].

**Tanım 2.13. (Matris Lie Cebiri)**

$\mathfrak{G}$  matris Lie grubunun Lie cebri  $\mathfrak{g} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $A = \left. \frac{d\rho(s)}{ds} \right|_{s=0}$  şeklindeki tüm  $n \times n$

matrislerden oluşan  $\mathbb{R}^{n \times n}$  nin lineer alt uzayıdır.

$$\mathfrak{g} = \left\{ A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A = \left. \frac{d\rho(s)}{ds} \right|_{s=0} \right\}, \quad (2.3)$$

burada  $\rho(s)$ ,  $\mathcal{G}$  de diferansiyellenebilir bir eğri ve  $\rho(0) = I$  dir.  $\mathfrak{g}$  uzayı matrislerde toplama, skalerle çarpma işlemlerine ve

$$[A, B] = AB - BA, \quad (2.4)$$

matris komütatörüne göre kapalıdır [1].

#### **Tanım 2.14. (Salınım diferansiyel denklem)**

Bir diferansiyel denklemin aşikar olmayan tüm çözümlerinin sonsuz sayıda sıfırı varsa bu çözümlere salınımlı çözüm, bu diferansiyel denkleme de salınım diferansiyel denklem denir [43].



### 3. BÖLÜM

#### MAGNUS SERİ AÇILIMI METODU

Bu bölümde bir Lie-grup metodu olan Magnus seri açılımı metodu, Lie grup yapısıyla Magnus serisi arasındaki ilişki ile lineer ve lineer olmayan Lie tipi diferansiyel denklemler için Magnus seri yöntemi incelenecektir.

#### 3.1. Giriş

Magnus seri açılımı metodunda amaç, adi diferansiyel denklem veya denklem sistemlerini,

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t), \quad (3.1)$$

(3.1) matris diferansiyel denklemi şekline dönüştürüp daha sonra bu denkleme Magnus serisi ile yaklaşık bir çözüm bulmaktır. (3.1) denklemi matris diferansiyel denklemi olduğundan daha önce genel Lie grubu için 2. bölümde verilen tanımlar bu defa matris Lie grubu için verilecek ve ardından [1,44] te yapılan çalışmalar incelenecektir.

#### Tanım 3.1. (Matris Lie grubunda diferansiyel denklem)

Bir matris Lie grubu üzerindeki diferansiyel denklem,

$$Y' = A(t, Y)Y, \quad t \geq 0, \quad Y(0) \in \mathfrak{G}, \quad (3.2)$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $A: \mathbb{R} \times \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{g}$  ve  $AY$  matris çarpımı,  $\mathfrak{G}$  matris Lie grubu,  $\mathfrak{G}$  matris Lie grubuna karşılık gelen Lie cebiri  $\mathfrak{g}$ ,  $A \in \mathfrak{g}$  ve  $Y \in \mathfrak{G}$  dir [1]. (3.2) denkleminde aynı zamanda Lie tipi diferansiyel denklem denir.

#### Tanım 3.2. (Üstel tasvir (exponential mapping))

$\mathfrak{G}$  bir matris Lie grubu ve  $\mathfrak{g}$  de onun Lie cebiri olsun. Üstel tasvir

$$\expm: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{G}, \quad \expm A = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!}, \quad (3.3)$$

şeklinde tanımlanır.  $\expm(O) = I$  dir.  $A$  matrisi için,  $O \in \mathfrak{G}$  nin yeteri kadar yakın bir komşuluğunda üstel tasvir  $\expm$  nin,  $\logm: \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{g}$  ile verilen diferansiyellenebilir bir tersi vardır [1].

**Tanım 3.3. (Adjoint gösterim)**

Bir matris Lie grubu  $\mathfrak{G}$  de,  $Ad$  adjoint gösterim ve onun türevi olan  $ad$  operatörü,

$$Ad_p(A) = PAP^{-1}, \quad (3.4)$$

$$ad_A(B) = AB - BA = [A, B], \quad (3.5)$$

şeklinde tanımlanır [1].

**Tanım 3.4. (Üstel tasvirin türevi)**

Üstel tasvirin türevi  $dexp: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ ,

$$\frac{d}{dt} \exp(A(t)) = dexp_{A(t)} A'(t) \exp(A(t)), \quad (3.6)$$

şeklinde tanımlıdır [1].

$dexp_A$ ,  $ad_A$  nın analitik bir fonksiyonu olduğundan,

$$dexp_A = \frac{\expm(ad_A) - I}{ad_A} \quad (3.7)$$

elde edilir. Burada  $\expm(ad_A)$ ,  $I$  ve  $ad_A$  matris olduğundan ve  $\frac{\expm(ad_A) - I}{ad_A}$  bölme

işlemi matrislerde yapılamayacağından,  $\frac{e^x - 1}{x}$  in seri açılımından yararlanarak

$\frac{\expm(ad_A) - I}{ad_A}$  kuvvet serisine açılacaktır.

$$\frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{1}{2!}x + \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{4!}x^3 + \dots + \frac{1}{(j+1)!}x^j + \dots \text{ olduğundan,}$$

$$\begin{aligned} dexp_A(C) &= \frac{\expm(ad_A C) - I}{ad_A C} \\ &= C + \frac{1}{2!}ad_A C + \frac{1}{3!}ad_A^2 C + \frac{1}{4!}ad_A^3 C + \dots + \frac{1}{(j+1)!}ad_A^j C + \dots, \\ &= C + \frac{1}{2!}[A, C] + \frac{1}{3!}[A, [A, C]] + \frac{1}{4!}[A, [A, [A, C]]] + \dots, \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j+1)!} ad_A^j C. \end{aligned} \quad (3.8)$$

$dexp_A^{-1} = \frac{ad_A}{\exp(ad_A) - I}$  i bulmak için de  $\frac{x}{e^x - 1}$  in seri açılımından yararlanılacaktır.

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{720}x^4 + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_j}{j!} x^j,$$

burada  $B_j$ , ilk terimleri  $B_0 = 1$ ,  $B_1 = -\frac{1}{2}$ ,  $B_2 = \frac{1}{6}$ ,  $B_4 = -\frac{1}{30}$ ,  $B_6 = \frac{1}{42}$  ve  $B_{2j+1} = 0$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots$  olan Bernoulli sayılarıdır [45].

$$\text{dexp}_A^{-1}(C) = C - \frac{1}{2}[A, C] + \frac{1}{12}[A, [A, C]] - \dots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_j}{j!} ad_A^j C, \quad (3.9)$$

şeklinde elde edilir [1].

### 3.2. Magnus Seri Açılımı

$$y' = a(t)y, \quad t \geq 0, \quad y(0) = y_0, \quad (3.10)$$

(3.10) lineer diferansiyel denkleminin çözümü,

$$y(t) = \exp\left(\int_0^t a(\xi) d\xi\right) y_0, \quad (3.11)$$

dır. Burada matris diferansiyel denklemini için genelleme yapılarak,

$$Y' = A(t)Y, \quad t \geq 0, \quad Y(0) = Y_0, \quad (3.12)$$

(3.12) lineer matris diferansiyel denkleminin çözümü,

$$Y(t) = \text{expm}\left(\int_0^t A(\xi) d\xi\right) Y_0, \quad (3.13)$$

dır denilebilir, fakat bu doğru değildir [43].

(3.12) lineer matris diferansiyel denkleminin bir çözümü (3.13) olsun.  $[0, t]$  kapalı

aralığı,  $[0, t_1] \cup [t_1, t]$ ,  $(0 < t_1 < t)$  şeklinde iki kapalı aralığın birleşimi olarak yazılırsa,

$$\int_0^t a(\xi) d\xi = \int_0^{t_1} a(\xi) d\xi + \int_{t_1}^t a(\xi) d\xi$$

olur. Buradan da

$$\exp\left(\int_0^t a(\xi) d\xi\right) = \exp\left(\int_0^{t_1} a(\xi) d\xi\right) \exp\left(\int_{t_1}^t a(\xi) d\xi\right) = \exp\left(\int_{t_1}^t a(\xi) d\xi\right) \exp\left(\int_0^{t_1} a(\xi) d\xi\right)$$

elde edilir.

$$\text{expm}\left(\int_0^{t_1} A(\xi) d\xi\right) = B, \quad \text{expm}\left(\int_{t_1}^t A(\xi) d\xi\right) = C, \quad (3.14)$$

olmak üzere (3.12) lineer matris diferansiyel denkleminin çözümü

$$\begin{aligned}
Y(t) &= \expm\left(\int_0^t A(\xi)d\xi\right)Y_0 \\
&= \expm\left(\int_0^{t_1} A(\xi)d\xi\right)\expm\left(\int_{t_1}^t A(\xi)d\xi\right)Y_0 = BCY_0 \\
&= \expm\left(\int_{t_1}^t A(\xi)d\xi\right)\expm\left(\int_0^{t_1} A(\xi)d\xi\right)Y_0 = CBY_0 \\
Y(t) &= \expm\left(\int_0^t A(\xi)d\xi\right)Y_0 = BCY_0 = CBY_0
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Matrislerde değişme özelliği olmadığından  $BC \neq CB$  dir. Bu durumda (3.12) lineer matris diferansiyel denklemi için (3.13) bir çözüm olamaz. (3.10) lineer diferansiyel denkleminin çözümü (3.12) lineer matris diferansiyel denklemi için genellenemez [43].

Şimdi,

$$Y'(t) = A(t)Y(t), \quad t \geq 0, \quad Y(0) = Y_0 \in \mathfrak{G}, \quad (3.15)$$

Lie tipi lineer diferansiyel denklemi incelenecektir. Burada  $\mathfrak{G}$  matris Lie grubu,  $\mathfrak{g}$  de onun Lie cebiridir.  $A: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathfrak{g}$  ve  $A(t) \in \mathfrak{g}$  dir. Hausdorff [46], (3.15) denkleminin çözümünü,

$$Y(t) = \expm(\sigma(t))Y_0, \quad (3.16)$$

matris üstel fonksiyonu şeklinde bulmuştur. Burada  $\sigma(t)$ ,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)!} ad^k(\sigma', \sigma) = a, \quad t \geq 0, \quad \sigma(0) = 0, \quad (3.17)$$

kapalı lineer olmayan (3.17) denkleminin çözümüdür ve

$$ad^k(p, q) = \begin{cases} p, & k = 0, \\ [ad^{k-1}(p, q), q], & k \geq 1, \end{cases} \quad (3.18)$$

dır [46]. Daha sonra Magnus (3.17) denkleminin,

$$\sigma' = a + \frac{1}{2} ad(a, \sigma) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} ad^{2k}(a, \sigma) \quad (3.19)$$

şekline dönüştürülebileceğini fark etti [2]. Burada  $B_{2k}$  Bernoulli sayılarıdır. Magnus  $\sigma(t)$  yi,

$$\begin{aligned} \sigma(t) = & \int_0^t A(\tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \left[ A(\tau), \int_0^\tau A(\xi) d\xi \right] d\tau + \frac{1}{4} \int_0^t \left[ A(\tau), \int_0^\tau \left[ A(\xi), \int_0^\xi A(\zeta) d\zeta \right] d\xi \right] d\tau \\ & + \frac{1}{12} \int_0^t \left[ \left[ A(\tau), \int_0^\tau A(\xi) d\xi \right], \int_0^\tau A(\zeta) d\zeta \right] d\tau + \dots \end{aligned} \quad (3.20)$$

şeklinde elde etti. Burada  $A(t) \in \mathfrak{g}$  olduğundan (3.18) denklemindeki her bir terim ve onların lineer kombinasyonları yine  $\mathfrak{g}$  dedir. Dolayısıyla  $\forall t \geq 0$  için  $\sigma(t) \in \mathfrak{g}$  dir. Bir başka değişle Magnus seri açılımındaki tüm terimler aynı Lie cebirinde yer alır bunun sonucu olarak Magnus seri açılımının herhangi bir teriminden itibaren kesilmesiyle elde edilen kesilmiş Magnus serisi de yine aynı Lie cebirinde yer alır. Dolayısıyla herhangi bir mertebeden Magnus seri açılımıyla elde edilen yaklaşık çözümler, analitik çözümün nitel özelliklerini korur. Bu Magnus seri açılımı metodunun en önemli avantajlarından [47]. Magnus  $\sigma(t)$  nin seri açılımı için ne genel bir formül vermiş ne de metodun mertebesi ve hangi mertebede Magnus seri açılımının hangi terimde kesileceği hakkında bilgi vermiştir. Magnus seri açılımı metodunun ana fikri (3.20) Magnus serisini uygun bir yerden kesip elde edilen terimleri verimli bir şekilde hesaplamaktır. 1997 yılında Iserles ve Norsett Magnus seri açılımındaki terimleri veren ve böylece onların özyinelemeli (recursive) değerlendirme ve analizine imkan tanıyan genel bir yöntem bulmuşlar ve Lie tipi lineer diferansiyel denklemler için Magnus seri açılımı metodunu sunmuşlardır [9,10].

Magnus serisi açılımı metodunda 3 ayrı hata kaynağı vardır [32]. Bunlar;

- ✓ Sonsuz Magnus serisinin kesilmesi,
- ✓ Çok değişkenli integrallerin ayrıklaştırılması (discretization),
- ✓ Matris üstel fonksiyonunun değerinin yaklaşık olarak bulunmasıdır.

Iserles, Marthinsen & Norsett ilk iki hata kaynağını incelemişlerdir [32]. Matris üstel fonksiyonunun değerinin yaklaşık olarak hesaplanmasında çok yaygın kullanılan bilgisayar yazılımları bu hesaplamayı yaparken Pade yaklaşık çözüm metodunu kullanmaktadır. Bundan dolayı Magnus seri açılımı metoduyla elde edilen yaklaşık çözümlerdeki hatanın bir kısmı da kullanılan matematik yazılımlarından kaynaklanmaktadır [47].

### 3.3. Picard İterasyonu

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = Y_0, \quad (3.21)$$

$Y(x)$ , (3.21) başlangıç değer probleminin çözümü olsun. (3.21) denkleminin her iki tarafının integrali alınırsa

$$Y(x) = Y_0 + \int_{x_0}^x f(t, Y(t)) dt \quad (3.22)$$

eşitliği elde edilir. (3.22) denklemi,

$$Y_{m+1}(x) = Y_0 + \int_{x_0}^x f(t, Y_m(t)) dt, \quad x_0 \leq x \leq b, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (3.23)$$

(3.23) iterasyonu ile çözülür [43]. (3.23) eşitliğine Picard iterasyonu denir.

### 3.4. Lineer Denklemler için Magnus Seri Açılımı Metodu

Bu bölümde Iserles ve çalışma arkadaşlarının [1] de sunduğu lineer diferansiyel denklemler için Magnus seri açılımı metodu incelenecektir.

Matris Lie grubu  $\mathfrak{G}$  de,

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t), \quad y(0) = y_0. \quad (3.24)$$

şeklinde verilen lineer matris diferansiyel denklemini ele alalım. Burada  $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{g}$  ve  $A(t) \in \mathfrak{g}$  dir. Bu durumda (3.24) denkleminin çözümü Magnus seri açılımı yöntemiyle aşağıdaki gibi bulunabilir [1,44].

$y(t)$ , matris Lie grubu  $\mathfrak{G}$  nin bir elemanı ve  $A(t)$  matrisi bu gruba karşılık gelen Lie cebiri  $\mathfrak{g}$  içerisinde yer aldığından (3.24) denklemi bir lineer Lie tipi denklemdir. Burada amaç, (3.24) denkleminin çözümü

$$y(t) = \exp(\Omega(t))y_0, \quad (3.25)$$

olacak şekilde bir  $\Omega(t)$  matris fonksiyonu bulmaktır.

(3.24) denkleminin çözümü (3.25) ise,  $\Omega(t)$

$$\dot{\Omega}(t) = \text{dexp}_{\Omega(t)}^{-1}(A(t)), \quad \Omega(0) = 0, \quad (3.26)$$

diferansiyel denklemini sağlar [44]. (3.26) denklemi,

$$\dot{\Omega}(t) = A(t) - \frac{1}{2}[\Omega(t), A(t)] + \frac{1}{12}[\Omega(t), [\Omega(t), A(t)]] + \dots, \quad (3.27)$$

(3.27) denklemini sonuç verir. Burada nokta  $t$  ye göre türevi göstermektedir. Bu durumda (3.27) denkleminde Picard iterasyonu uygulanarak  $\Omega(t)$  matris fonksiyonu için yaklaşık bir çözüm bulunabilir [44].

$\Omega(t)$  çözüm fonksiyonu için  $\Omega_0$  başlangıç yaklaşımı olsun. (3.26) denkleminde başlangıç koşulu  $\Omega(0) = 0$  olduğundan  $\Omega_0 = 0$  seçelim. (3.27) denkleminde  $\Omega_0 = 0$  yerine yazılırsa,

$$\dot{\Omega}(t) = A(t), \quad \Omega(0) = \Omega_0 = 0, \quad (3.28)$$

elde edilir. (3.28) denkleminin  $t$  değişkenine göre integrali alınır,

$$\int_0^t \dot{\Omega}(\xi) d\xi = \int_0^t A(\xi) d\xi, \quad (3.29)$$

Birinci iterasyon,

$$\Omega_1 = \int_0^t A(\xi) d\xi. \quad (3.30)$$

bulunur. (3.30) denklemi (3.27) denkleminde yerine yazılıp integrali alınınca ikinci iterasyon,

$$\Omega_2(t) = \int_0^t A(\xi) d\xi - \frac{1}{2} \int_0^t [\Omega_1(\xi), A(\xi)] d\xi + \frac{1}{12} \int_0^t [\Omega_1(\xi), [\Omega_1(\xi), A(\xi)]] d\xi + \dots \quad (3.31)$$

elde edilir. Benzer şekilde, üçüncü iterasyon,

$$\Omega_3(t) = \int_0^t A(\xi) d\xi - \frac{1}{2} \int_0^t [\Omega_2(\xi), A(\xi)] d\xi + \frac{1}{12} \int_0^t [\Omega_2(\xi), [\Omega_2(\xi), A(\xi)]] d\xi + \dots \quad (3.32)$$

olur.  $\Omega_1$ , (3.31) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \Omega_2(t) = & \int_0^t A(\xi) d\xi - \frac{1}{2} \int_0^t \left[ \int_0^\xi A(\xi_1) d\xi_1, A(\xi) \right] d\xi \\ & + \frac{1}{12} \int_0^t \left[ \int_0^\xi A(\xi_1) d\xi_1, \left[ \int_0^\xi A(\xi_2) d\xi_2, A(\xi) \right] \right] d\xi + \dots \end{aligned} \quad (3.33)$$

elde edilir.  $\Omega_1$  ve  $\Omega_2$  (3.32) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\Omega_3(t) = & \int_0^t A(\xi) d\xi - \frac{1}{2} \int_0^t \left[ \int_0^{\xi_1} A(\xi_2) d\xi_2, A(\xi_1) \right] d\xi_1 \\
& + \frac{1}{4} \int_0^t \left[ \int_0^{\xi_1} \left[ \int_0^{\xi_2} A(\xi_3) d\xi_3, A(\xi_2) \right] d\xi_2, A(\xi_1) \right] d\xi_1 \\
& + \frac{1}{12} \int_0^t \left[ \int_0^{\xi_1} A(\xi_2) d\xi_2, \left[ \int_0^{\xi_1} A(\xi_3) d\xi_3, A(\xi_1) \right] \right] d\xi_1 \\
& - \frac{1}{24} \int_0^t \left[ \int_0^{\xi_1} A(\xi_2) d\xi_2, \left[ \int_0^{\xi_1} \left[ \int_0^{\xi_2} A(\xi_3) d\xi_3, A(\xi_2) \right] d\xi_2, A(\xi_1) \right] \right] d\xi_1 \\
& - \frac{1}{24} \int_0^t \left[ \int_0^{\xi_1} \left[ \int_0^{\xi_2} A(\xi_3) d\xi_3, \left[ \int_0^{\xi_2} A(\xi_3) d\xi_3, A(\xi_2) \right] \right] d\xi_2, A(\xi_1) \right] d\xi_1 \\
& - \frac{1}{24} \int_0^t \left[ \int_0^{\xi_1} \left[ \int_0^{\xi_2} A(\xi_3) d\xi_3, A(\xi_2) \right] d\xi_2, \left[ \int_0^{\xi_1} A(\xi_2) d\xi_2, A(\xi_1) \right] \right] d\xi_1 \\
& - \frac{1}{8} \int_0^t \left[ \int_0^{\xi_1} \left[ \int_0^{\xi_2} \left[ \int_0^{\xi_3} A(\xi_4) d\xi_4, A(\xi_3) \right] d\xi_3, A(\xi_2) \right] d\xi_2, A(\xi_1) \right] d\xi_1 + \dots, \tag{3.34}
\end{aligned}$$

elde edilir.  $\Omega$  için Picard iterasyonu ile elde ettiğimiz  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \dots$  iterasyonları içerdikleri integral ve komütatör sayısına göre terimleri yeniden düzenlenip  $H_i, i = 0, 1, 2, \dots$  şeklinde adlandırılırsa  $\Omega$ , her biri integraller ve komütatörler (Lie parantezi) içeren terimlerin lineer kombinasyonu şeklinde yazılabilir.

$$\Omega(t) = \sum_{i=0}^{\infty} H_i \tag{3.35}$$

burada her bir  $H_i, i$  tane komütatör ve  $(i+1)$  integral içeren terimlerin lineer kombinasyonundan oluşmaktadır [1]. (3.35) Magnus serisinin ilk terimleri

$$H_0(t) = \int_0^t A(t_1) dt_1 \tag{3.36}$$

$$H_1(t) = -\frac{1}{2} \int_0^t \left[ \int_0^{t_2} A(t_1) dt_1, A(t_2) \right] dt_2 \tag{3.37}$$



$$H_2(t) = \frac{1}{12} \int_0^t \int_0^{t_3} A(t_2) dt_2, \left[ \int_0^{t_3} A(t_2) dt_2, A(t_3) \right] dt_3 + \frac{1}{4} \int_0^t \int_0^{t_3} \int_0^{t_2} A(t_1) dt_1, A(t_2) dt_2, A(t_3) dt_3 \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} H_3(t) = & -\frac{1}{24} \int_0^t \int_0^{t_4} A(t_3) dt_3, \left[ \int_0^{t_4} \int_0^{t_3} A(t_2) dt_2, A(t_3) \right] dt_3, A(t_4) dt_4 \\ & -\frac{1}{24} \int_0^t \int_0^{t_4} \int_0^{t_3} A(t_2) dt_2, A(t_3) dt_3, \left[ \int_0^{t_4} A(t_3) dt_3, A(t_4) \right] dt_4 \\ & -\frac{1}{24} \int_0^t \int_0^{t_4} \int_0^{t_3} A(t_2) dt_2, \left[ \int_0^{t_3} A(t_2) dt_2, A(t_3) \right] dt_3, A(t_4) dt_4 \\ & -\frac{1}{8} \int_0^t \int_0^{t_4} \int_0^{t_3} \int_0^{t_2} A(t_1) dt_1, A(t_2) dt_2, A(t_3) dt_3, A(t_4) dt_4 \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} H_4(t) = & -\frac{1}{720} \int_0^t \int_0^{t_5} A(t_1) dt_1, \left[ \int_0^{t_5} A(t_1) dt_1, \left[ \int_0^{t_5} A(t_1) dt_1, \left[ \int_0^{t_5} A(t_1) dt_1, A(t_5) \right] \right] \right] dt_5 \\ & +\frac{1}{144} \int_0^t \int_0^{t_5} A(t_1) dt_1, \left[ \int_0^{t_5} \int_0^{t_3} A(t_1) dt_1, \left[ \int_0^{t_3} A(t_1) dt_1, A(t_3) \right] \right] dt_3, A(t_5) dt_5 \\ & +\frac{1}{48} \int_0^t \int_0^{t_5} A(t_1) dt_1, \left[ \int_0^{t_5} \int_0^{t_3} \int_0^{t_2} A(t_1) dt_1, A(t_2) dt_2, A(t_3) dt_3, A(t_5) \right] dt_5 \\ & +\frac{1}{48} \int_0^t \int_0^{t_5} \int_0^{t_2} A(t_1) dt_1, A(t_2) dt_2, \left[ \int_0^{t_5} \int_0^{t_2} A(t_1) dt_1, A(t_2) dt_2, A(t_5) \right] dt_5 \\ & +\frac{1}{144} \int_0^t \int_0^{t_5} \int_0^{t_3} A(t_1) dt_1, \left[ \int_0^{t_3} A(t_1) dt_1, A(t_3) \right] dt_3, \left[ \int_0^{t_5} A(t_1) dt_1, A(t_5) \right] dt_5 \\ & +\frac{1}{48} \int_0^t \int_0^{t_5} \int_0^{t_3} \int_0^{t_2} A(t_1) dt_1, A(t_2) dt_2, A(t_3) dt_3, \left[ \int_0^{t_5} A(t_1) dt_1, A(t_5) \right] dt_5 \\ & +\frac{1}{48} \int_0^t \int_0^{t_5} \int_0^{t_4} A(t_1) dt_1, \left[ \int_0^{t_4} \int_0^{t_2} A(t_1) dt_1, A(t_2) dt_2, A(t_4) \right] dt_4, A(t_5) dt_5 \\ & +\frac{1}{48} \int_0^t \int_0^{t_5} \int_0^{t_4} \int_0^{t_2} A(t_1) dt_1, A(t_2) dt_2, \left[ \int_0^{t_4} A(t_1) dt_1, A(t_4) \right] dt_4, A(t_5) dt_5 \\ & +\frac{1}{24} \int_0^t \int_0^{t_5} \int_0^{t_4} \int_0^{t_3} A(t_1) dt_1, \left[ \int_0^{t_3} A(t_1) dt_1, A(t_3) \right] dt_3, A(t_4) dt_4, A(t_5) dt_5 \\ & +\frac{1}{8} \int_0^t \int_0^{t_5} \int_0^{t_4} \int_0^{t_3} \int_0^{t_2} A(t_1) dt_1, A(t_2) dt_2, A(t_3) dt_3, A(t_4) dt_4, A(t_5) dt_5 \end{aligned} \quad (3.40)$$



$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{288} \int_0^t \int_0^{t_6} \int_0^{t_5} A(t_1) dt_1, \left[ \int_0^{t_5} \int_0^{t_3} A(t_1) dt_1, \left[ \int_0^{t_3} A(t_1) dt_1, A(t_3) \right] \right] dt_3, A(t_5) \int_0^{t_6} A(t_6) dt_6 \\
& -\frac{1}{96} \int_0^t \int_0^{t_6} \int_0^{t_5} A(t_1) dt_1, \left[ \int_0^{t_5} \int_0^{t_3} \int_0^{t_2} A(t_1) dt_1, A(t_2) \right] dt_2, A(t_3) \int_0^{t_5} A(t_5) dt_5, A(t_6) \int_0^{t_6} A(t_6) dt_6 \\
& -\frac{1}{96} \int_0^t \int_0^{t_6} \int_0^{t_5} \int_0^{t_2} A(t_1) dt_1, A(t_2) \int_0^{t_5} \int_0^{t_2} A(t_1) dt_1, A(t_2) \int_0^{t_5} A(t_5) dt_5, A(t_6) \int_0^{t_6} A(t_6) dt_6 \\
& -\frac{1}{288} \int_0^t \int_0^{t_6} \int_0^{t_5} \int_0^{t_3} A(t_1) dt_1, \left[ \int_0^{t_3} A(t_1) dt_1, A(t_3) \right] dt_3, \left[ \int_0^{t_5} A(t_1) dt_1, A(t_5) \right] dt_5, A(t_6) \int_0^{t_6} A(t_6) dt_6 \\
& -\frac{1}{96} \int_0^t \int_0^{t_6} \int_0^{t_5} \int_0^{t_3} \int_0^{t_2} A(t_1) dt_1, A(t_2) \int_0^{t_3} A(t_3) dt_3, \left[ \int_0^{t_5} A(t_1) dt_1, A(t_5) \right] dt_5, A(t_6) \int_0^{t_6} A(t_6) dt_6 \\
& -\frac{1}{96} \int_0^t \int_0^{t_6} \int_0^{t_5} \int_0^{t_4} \int_0^{t_2} A(t_1) dt_1, A(t_2) \int_0^{t_4} \int_0^{t_2} A(t_1) dt_1, A(t_2) \int_0^{t_4} A(t_4) dt_4, A(t_5) \int_0^{t_5} A(t_5) dt_5, A(t_6) \int_0^{t_6} A(t_6) dt_6 \\
& -\frac{1}{96} \int_0^t \int_0^{t_6} \int_0^{t_5} \int_0^{t_4} \int_0^{t_2} A(t_1) dt_1, A(t_2) \int_0^{t_4} A(t_4) dt_4, \left[ \int_0^{t_5} A(t_1) dt_1, A(t_5) \right] dt_5, A(t_6) \int_0^{t_6} A(t_6) dt_6 \\
& -\frac{1}{96} \int_0^t \int_0^{t_6} \int_0^{t_5} \int_0^{t_4} \int_0^{t_3} A(t_1) dt_1, \left[ \int_0^{t_3} A(t_1) dt_1, A(t_3) \right] dt_3, A(t_4) \int_0^{t_4} A(t_4) dt_4, A(t_5) \int_0^{t_5} A(t_5) dt_5, A(t_6) \int_0^{t_6} A(t_6) dt_6 \\
& -\frac{1}{32} \int_0^t \int_0^{t_6} \int_0^{t_5} \int_0^{t_4} \int_0^{t_3} \int_0^{t_2} A(t_1) dt_1, A(t_2) \int_0^{t_3} A(t_3) dt_3, A(t_4) \int_0^{t_4} A(t_4) dt_4, A(t_5) \int_0^{t_5} A(t_5) dt_5, A(t_6) \int_0^{t_6} A(t_6) dt_6 \quad (3.41)
\end{aligned}$$

dir. Magnus seri açılımındaki terimler Renan Cabrera ve Herschel Rabitz'in Uluslararası Matematika Kullanıcıları Konferansında (International Mathematica Users Conference 2009) sundukları “*Symbolic Magnus Expansion with PrinLieCalc 1.0*” yazılımıyla hesaplanmıştır. (3.35) eşitliği (3.26) denkleminin yaklaşık bir çözümüdür. Fakat (3.35) denkleminde  $i$  değeri arttıkça Magnus seri açılımı daha karmaşık terimlerden oluşmakta ve bu terimlerdeki integral ve komütatör sayısı arttıkça integrallerin yaklaşık değerlerinin hesaplanması daha zor ve maliyetli olmakta ve daha çok zaman almaktadır. Bu yüzden Magnus seri açılımı belirli bir yerden kesilerek yaklaşık çözümler hesaplanır. Iserles ve çalışma arkadaşları Magnus serisinin nasıl kesileceğini Teorem 3.4.1. de ifade etmişlerdir [1].

**Teorem 3.4.1.**

$\Omega(t)$ ,  $t$ 'nin tek kuvvetlerine göre açılabilir ve  $\Omega_{2q-1}(t) = \Omega(t) + O(t^{2q+1})$ ,  $q \in \mathbb{N}$ .

Teorem 3.4.1. in sonucu olarak  $q \geq 2$  için  $(2q-1)$ 'li integrallerin lineer kombinasyonu  $O(t^{2q+1})$  de yer alır. Örneğin 4. mertebe Magnus açılımında (MG4)  $q=2$  olur ve  $2q-1=3$  olacağından Magnus seri açılımında 3'lü integraller

$\int_0^t \int_0^{t_3} A(t_2) dt_2, [\int_0^{t_3} A(t_2) dt_2, A(t_3)] dt_3$  ve  $\int_0^t \int_0^{t_3} \int_0^{t_2} A(t_1) dt_1, A(t_2) dt_2, A(t_3) dt_3$  nin lineer kombinasyonu

$$\frac{1}{12} \int_0^t \int_0^{t_3} A(t_2) dt_2, [\int_0^{t_3} A(t_2) dt_2, A(t_3)] dt_3 + \frac{1}{4} \int_0^t \int_0^{t_3} \int_0^{t_2} A(t_1) dt_1, A(t_2) dt_2, A(t_3) dt_3$$

$O(t^5)$  de olacağından 4. mertebe için sadece ilk iki terim yeterlidir.

Magnus seri açılımının mertebelere göre hangi terimde kesileceği aşağıda verilmiştir [1].

$$\begin{aligned} \Omega(t) &= \int_0^t A(t_1) dt_1 \quad \rightarrow \quad 2.mertebe \\ &- \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^{t_2} A(t_1) dt_1, A(t_2) dt_2 \quad \rightarrow \quad 4.mertebe \\ &+ \frac{1}{12} \int_0^t \int_0^{t_3} A(t_2) dt_2, [\int_0^{t_3} A(t_2) dt_2, A(t_3)] dt_3 \\ &+ \frac{1}{4} \int_0^t \int_0^{t_3} \int_0^{t_2} A(t_1) dt_1, A(t_2) dt_2, A(t_3) dt_3 \\ &- \frac{1}{24} \int_0^t \int_0^{t_4} A(t_3) dt_3, [\int_0^{t_4} A(t_2) dt_2, A(t_3)] dt_3, A(t_4) dt_4 \\ &- \frac{1}{24} \int_0^t \int_0^{t_4} \int_0^{t_3} A(t_2) dt_2, A(t_3) dt_3, [\int_0^{t_4} A(t_3) dt_3, A(t_4)] dt_4 \\ &- \frac{1}{24} \int_0^t \int_0^{t_4} \int_0^{t_3} A(t_2) dt_2, [\int_0^{t_3} A(t_2) dt_2, A(t_3)] dt_3, A(t_4) dt_4 \\ &- \frac{1}{8} \int_0^t \int_0^{t_4} \int_0^{t_3} \int_0^{t_2} A(t_1) dt_1, A(t_2) dt_2, A(t_3) dt_3, A(t_4) dt_4 \quad \rightarrow \quad 6.mertebe \end{aligned}$$

### 3.5. Gauss Tümlüvi (Gaussian Quadrature)

Bir önceki bölümde elde edilen Magnus seri açılımında ortaya çıkan katlı integralleri hesaplamak için bazı tümlüv tekniklerine ihtiyaç duyulmaktadır. Burada Gauss tümlüvi

ve Legendre polinomunun kökleri kullanılacaktır.  $n$ . dereceden Legendre polinomu  $P_n(x)$   $[-1,1]$  simetrik aralığında tanımlıdır.  $P_n(x)$  polinomu  $2x-1$  ile ötelenirse  $[0,1]$  aralığında aşağıdaki gibi tanımlanan ötelenmiş Legendre polinomu  $P_n^*(x) = P_n(2x-1)$  elde edilir [48].

$$P_0^*(x) = 1,$$

$$P_1^*(x) = 2x - 1,$$

$$P_2^*(x) = 6x^2 - 6x + 1,$$

$$P_3^*(x) = 20x^3 - 30x^2 + 12x - 1,$$

⋮

**Lemma 3.5.1.**

Aşağıdaki özellikleri sağlayan  $P_n^*(x): [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$   $n$ . dereceden ( $n=1,2,3,\dots$ )  $P_n^*(x)$  polinomları vardır [48];

$$p_1: \int_0^1 P_m^*(x)P_n^*(x)dx = 0, \quad m \neq n, \quad (3.42)$$

$$p_2: P_n^*(1) = 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.43)$$

$$p_3: P_n^*(1-x) = (-1)^n P_n^*(x), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.44)$$

$$p_4: \int_0^1 P_n^*(x)^2 dx = \frac{1}{2n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.45)$$

$$p_5: P_n^*(x) = \frac{1}{n!} \left( \frac{d}{dx} \right)^n (x^2 - x)^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.46)$$

$$p_6: nP_n^*(x) = (2x-1)(2n-1)P_{n-1}^*(x) - (n-1)P_{n-2}^*(x), \quad n = 2, 3, 4, \dots, \quad (3.47)$$

$P_n^*(x) = 0$  denkleminin  $(0,1)$  aralığında  $n$  tane farklı reel kökü vardır.

Tümlev formülüyle yapılmak istenen, tek değişkenli bir fonksiyonun integrali için yaklaşık değer bulmaktır. İntegral aralığındaki belirli noktalarda integrali alınan fonksiyonun ağırlıklı toplamı şeklinde yazılmasıyla yaklaşık değer hesaplanır. Newton-Cotes gibi yöntemlerde eşit aralıklı noktalar kullanılırken Gauss tümlevinde bu noktalar eşit aralıklı değil en az hatayı, optimum doğruluğu verecek şekilde seçilir. Bu noktalara

düğüm (node) denir. Gauss tümleminde bu düğümler  $P_n^*(x)$  Legendre polinomunun  $[0,1]$  aralığındaki kökleridir [49].

### 3.5.1. Tek integraller için Gauss tümlevi

Tek integraller için Gauss tümlevi aşağıdaki gibi tanımlanır.

#### Tanım 3.5.1.1.

$n$ . derece Legendre polinomu  $P_n^*(x)$ 'in kökleri  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  olsun,  $i = 1, 2, \dots, n$  için  $c_i$  ağırlıkları aşağıdaki gibi tanımlanır,

$$c_i = \int_0^1 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx. \quad (3.48)$$

Eğer  $\phi(x)$  derecesi  $2n$ 'den küçük herhangi bir polinom ise Gauss-Legendre tümlevi

$$\int_0^1 \phi(x) dx = \sum_{i=1}^n c_i \phi(x_i) \quad (3.49)$$

şeklinde tanımlıdır [49].

### 3.5.2. Katlı integraller için Gauss tümlevi (Multivariate Gaussian Quadrature)

Bu bölümde Magnus seri açılımında ortaya çıkan katlı integrallerinin nümerik değerlerini hesaplamak için Gauss tümlevi uygulanacaktır. Tek integrallerde olduğu gibi katlı integrallerde de Gauss tümlevi çok değişkenli fonksiyonun ağırlıklı toplamı şeklinde yazılmasıyla elde edilir. Burada  $b_i$  ağırlıkları Lagrange interpolasyon polinomlarının çarpımının katlı integralleriyle verilir. Burada Iserles ve çalışma arkadaşlarının [1] de sunduğu politoplarla katlı integral tümlevi incelenecektir.

Magnus seri açılımındaki katlı integraller

$$I(h) = \int_S L(A(\xi_1), A(\xi_2), \dots, A(\xi_s)) d\xi_s \dots d\xi_1, \quad (3.50)$$

şeklinde olsun. Burada  $L$  çok değişkenli fonksiyon,  $s$  verilen ifadedeki integral sayısı,  $h$  katlı integralin yaklaşık değerini hesaplamada kullanılan adım aralığıdır.  $S$  ise

$$S = \left\{ \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s \in \mathbb{R} : \xi_1 \in [0, h], \xi_k \in [0, \xi_{m_k}], k = 2, 3, \dots, s \right\}, \quad (3.51)$$

şeklinde tanımlanan özel bir politoptur. Burada  $m_k \in \{1, 2, \dots, s-1\}$  dir. Örneğin,

$$\int_0^t \int_0^{\xi_1} \int_0^{\xi_1} [A(\xi_2), [A(\xi_3), A(\xi_1)]] d\xi \quad \text{ve} \quad \int_0^t \int_0^{\xi_1} \int_0^{\xi_2} [[A(\xi_3), A(\xi_2)], A(\xi_1)] d\xi$$

integralleri sırasıyla

$$L(F_1, F_2, F_3) = [F_2, [F_3, F_1]], \quad m_2 = 1, \quad m_3 = 1$$

ve

$$L(F_1, F_2, F_3) = [[F_3, F_2], F_1], \quad m_2 = 1, \quad m_3 = 2$$

şeklinde ifade edilir. Burada her iki integralde de üçlü integral bulunduğundan  $s = 3$  tür.

(3.35) integralinin yaklaşık değerini hesaplamak için  $v$ . derece Legendre polinomu

$P_v^*(x)$ 'in farklı reel kökleri  $c_1, c_2, \dots, c_v \in [0, 1]$  leri tümlev noktaları olarak seçelim.

Daha sonra  $A_k = hA(c_k h)$ ,  $k = 1, 2, \dots, v$  tahminlerini hesaplayalım ve Gauss tümlevini

$$D(h) = \sum_{k \in C_s^v} b_k L(A_{k_1}, A_{k_2}, \dots, A_{k_s}) \quad (3.52)$$

şeklinde oluşturalım. Burada  $C_s^v$ ,  $\{1, 2, \dots, v\}$  kümesinden oluşturulan en az bir bileşeni diğerlerinden farklı olan tüm sıralı  $s$ 'lilerin kümesidir.

$$\tilde{S} = \left\{ \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s \in \mathbb{R} : \xi_1 \in [0, 1], \xi_k \in [0, \xi_{m_k}], k = 2, 3, \dots, s \right\}$$

ve

$$l_j(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_i}{x_i - x_j}, \quad j = 1, 2, \dots, v, \quad (3.53)$$

kardinal Lagrange interpolasyon polinomu olmak üzere  $b_k$  ağırlıkları

$$b_k = \int_{\tilde{S}} \prod_{i=1}^s l_{k_i}(\xi_i) d\xi_i, \quad (3.54)$$

şeklinindedir. (3.53) polinomunu tümlev noktalarında yerine koyarak elde edilen

$$\tilde{A}(t) = h^{-1} \sum_{k=1}^v l_k \left( \frac{t}{h} \right) A_k \quad (3.55)$$

(3.55) eşitliğini (3.50) denkleminde  $A(t)$  yerine yazarak integral alınır. Artık (3.50)

denklemindeki katlı integralin yaklaşık değeri (3.52) tümlevi ile hesaplanabilir. İlerles

ve çalışma arkadaşları bu metodun mertebesini aşağıdaki teoremde vermiştir [1].

**Teorem 3.5.2.1.**

$c(t) = \prod_{k=1}^v (t - c_k)$  şeklinde tanımlanan  $c(t)$  polinomunun aşağıdaki ortogonallik koşulunu sağladığı en büyük  $i \geq 0$  tamsayısı  $m$  olsun.

$$\int_0^1 \xi^{i-1} c(\xi) d\xi = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Ortogonalite koşulu, tüm  $S$  politopları ve tüm çok değişkenli (*multilinear*)  $L$  fonksiyonları için (3.52) tümlevinin mertebesinin  $v + m$  olmasını gerektirir. Eğer  $c_1, c_2, \dots, c_v$   $v$ . derece Legendre polinomu  $P_v^*(x)$ 'nin  $[0, 1]$  aralığındaki farklı reel kökleri (Gauss-Legendre noktaları) ise (3.52) tümlevinin mertebesi  $2v$  olur.

Şimdi 4. mertebeden kesilmiş (*truncated*) Magnus seri açılımı için bir algoritma oluşturalım. Teorem 3.5.2.1. e göre 4. Mertebe Magnus seri açılımı metodu için Gauss-Legendre tümlevinde yalnızca 2. dereceden Legendre polinomu  $P_2^*(x)$ 'nin kökleri kullanılacaktır. Bu durumda  $v = 2$  ve mertebe  $p = 4$  olur.

Önceki bölümde verdiğimiz Magnus seri açılımındaki integraller  $I_i(t)$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned} I_1(t) &= \int_0^t A(\xi_1) d\xi_1 \\ I_2(t) &= \int_0^t \int_0^{\xi_1} [A(\xi_2), A(\xi_1)] d\xi_2 d\xi_1 \\ I_3(t) &= \int_0^t \int_0^{\xi_1} \int_0^{\xi_1} [A(\xi_2), [A(\xi_3), A(\xi_1)]] d\xi_3 d\xi_2 d\xi_1 \\ I_4(t) &= \int_0^t \int_0^{\xi_1} \int_0^{\xi_2} [A(\xi_3), A(\xi_2)], A(\xi_1)] d\xi_3 d\xi_2 d\xi_1 \end{aligned}$$

şeklinde yeniden adlandırılırsa,

$$\Omega(t) = I_1 - \frac{1}{2} I_2 + \frac{1}{12} I_3 + \frac{1}{4} I_4 + \dots \quad (3.56)$$

denklemini elde edilir. (3.56) denklemindeki ilk dört integrali Gauss (Gauss-Legendre) tümlevi ile hesaplanacaktır. 2. dereceden Legendre polinomu  $P_2^*(x)$ 'nin kökleri

$c_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$ ,  $c_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$  ve  $v = 2$  dir. Lagrange interpolasyon polinomları ise



$$l_1(x) = \frac{x-c_2}{c_1-c_2} = -\sqrt{3}x + \frac{1}{2}(\sqrt{3}+1), \quad (3.57)$$

$$l_2(x) = \frac{x-c_1}{c_2-c_1} = \sqrt{3}x - \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1), \quad (3.58)$$

dir. Bu durumda

$$A_1 = hA\left(\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)h\right) \quad (3.59)$$

ve

$$A_2 = hA\left(\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)h\right) \quad (3.60)$$

dir.  $I_1(t)$  integralinin Gauss tümlevi için  $L$  fonksiyonu ve sıralı  $s$ 'lilerin kümesi sırasıyla  $L(A(\xi_1)) = A(\xi_1)$  ve  $C_s^v = \{(1), (2)\}$  şeklinde tanımlanır. Tümlevdeki  $b_k$  ağırlıkları ise (3.54) denkleminde,

$$b_{(1)} = \int_0^1 l_1(\xi_1) d\xi_1 = \frac{1}{2}, \quad b_{(2)} = \int_0^1 l_2(\xi_1) d\xi_1 = \frac{1}{2}, \quad (3.61)$$

şeklinde elde edilir.  $I_1(t)$  integrali için Gauss-Legendre noktalarını kullanarak elde edilen tümlev

$$D_1(h) = b_{(1)}L(A_1) + b_{(2)}L(A_2) = \frac{1}{2}(A_1 + A_2) \quad (3.62)$$

dir.  $I_2(t)$  integralinin Gauss tümlevi için  $L$  fonksiyonu ve sıralı  $s$ 'lilerin ( $s=2$ ) kümesi sırasıyla  $L(A(\xi_1), A(\xi_2)) = [A(\xi_2), A(\xi_1)]$  ve  $C_s^v = \{(1,2), (2,1)\}$  şeklinde tanımlanır. Dolayısıyla tümlevdeki  $b_k$  ağırlıkları,

$$b_{(1,2)} = \int_0^1 \int_0^{\xi_1} l_1(\xi_1)l_2(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = \frac{1}{8} - \frac{\sqrt{3}}{12}, \quad b_{(2,1)} = \int_0^1 \int_0^{\xi_1} l_2(\xi_1)l_1(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = \frac{1}{8} + \frac{\sqrt{3}}{12}, \quad (3.63)$$

olur. Buradan  $I_2(t)$  için Gauss-Legendre tümlevi

$$\begin{aligned} D_2(h) &= b_{(1,2)}L(A_1, A_2) + b_{(2,1)}L(A_2, A_1) = b_{(1,2)}[A_2, A_1] + b_{(2,1)}[A_1, A_2] \\ &= (b_{(1,2)} - b_{(2,1)})[A_2, A_1] = -\frac{\sqrt{3}}{6}[A_2, A_1] \end{aligned} \quad (3.64)$$

şeklinde elde edilir.

Bundan sonraki integrallerde integral sayısı  $s$  arttıkça yapılan işlemler de daha karmaşık bir hal alacaktır. Üçüncü integral için Gauss tümlevindeki  $L$  fonksiyonu ve sıralı  $s$ 'lilerin ( $s=3$ ) kümesi sırasıyla

$$L(A(\xi_1), A(\xi_2), A(\xi_3)) = [A(\xi_2), [A(\xi_3), A(\xi_1)]]$$

ve

$$C_s^v = C_3^2 = \{(1,1,2), (1,2,1), (1,2,2), (2,1,1), (2,1,2), (2,2,1)\}$$

dir.

$C_3^2$  deki her bir üçlüye karşılık gelen  $b_k$  ağırlıkları ayrı ayrı bulunmalıdır. Burada (1,1,2) üçlüsüne ait  $b_{(1,1,2)}$  ağırlığını bulmak için (3.54) integralini hesaplırsak,

$$b_{(1,1,2)} = \int_0^1 \int_0^{\xi_1} \int_0^{\xi_1} l_1(\xi_1) l_1(\xi_2) l_2(\xi_3) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 = -\frac{\sqrt{3}}{48} + \frac{7}{240} \quad (3.65)$$

olarak bulunur. Aynı şekilde diğer ağırlıklar da (3.54) integralinin hesaplanmasıyla aşağıdaki gibi

$$\begin{aligned} b_{(1,1,2)} &= -\frac{\sqrt{3}}{48} + \frac{7}{240}, & b_{(1,2,1)} &= -\frac{\sqrt{3}}{48} + \frac{7}{240}, \\ b_{(1,2,2)} &= -\frac{\sqrt{3}}{24} + \frac{1}{15}, & b_{(2,1,1)} &= \frac{\sqrt{3}}{24} + \frac{1}{15}, \\ b_{(2,1,2)} &= \frac{\sqrt{3}}{48} + \frac{7}{240}, & b_{(2,2,1)} &= \frac{\sqrt{3}}{48} + \frac{7}{240}, \end{aligned} \quad (3.66)$$

elde edilir.  $I_3(t)$  için  $L$  fonksiyonu iç içe komütatörler içerdiğinden ve komütatörlerin çarpık simetri (*skew-symmetry*) özelliğinden dolayı  $D_3(h)$  tümleminde  $L$  fonksiyonunun değerlerinden ikisi 0 olur.

$$\begin{aligned} L(A_1, A_1, A_2) &= [A_1, [A_2, A_1]] = -[[A_2, A_1], A_1], \\ L(A_1, A_2, A_1) &= [A_2, [A_1, A_1]] = 0, \\ L(A_1, A_2, A_2) &= [A_2, [A_2, A_1]] = -[[A_2, A_1], A_2], \\ L(A_2, A_1, A_1) &= [A_1, [A_1, A_2]] = [[A_2, A_1], A_1], \\ L(A_2, A_1, A_2) &= [A_1, [A_2, A_2]] = 0, \\ L(A_2, A_2, A_1) &= [A_2, [A_1, A_2]] = [[A_2, A_1], A_2]. \end{aligned} \quad (3.67)$$

(3.66) ağırlıkları ile (3.67) fonksiyon değerleri  $D_3(h)$  tümleminde

$$\begin{aligned} D_3(h) &= b_{(1,1,2)}L(A_1, A_1, A_2) + b_{(1,2,1)}L(A_1, A_2, A_1) + b_{(1,2,2)}L(A_1, A_2, A_2) \\ &\quad + b_{(2,1,1)}L(A_2, A_1, A_1) + b_{(2,1,2)}L(A_2, A_1, A_2) + b_{(2,2,1)}L(A_2, A_2, A_1) \end{aligned} \quad (3.68)$$

yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
D_3(h) &= (b_{(2,1,1)} - b_{(1,1,2)})[[A_2, A_1], A_1] + (b_{(2,2,1)} - b_{(1,2,2)})[[A_2, A_1], A_2] \\
&= \left(\frac{\sqrt{3}}{16} + \frac{3}{80}\right)[[A_2, A_1], A_1] + \left(\frac{\sqrt{3}}{16} - \frac{3}{80}\right)[[A_2, A_1], A_2]
\end{aligned} \tag{3.69}$$

elde edilir. Benzer şekilde  $I_4(t)$  integrali için  $C_s^v$  ve  $L$  fonksiyonu

$$L(A(\xi_1), A(\xi_2), A(\xi_3)) = [[A(\xi_3), A(\xi_2)], A(\xi_1)] \tag{3.70}$$

$$C_s^v = C_3^2 = \{(1,1,2), (1,2,1), (1,2,2), (2,1,1), (2,1,2), (2,2,1)\} \tag{3.71}$$

şeklinde tanımlanır.  $C_3^2$ 'deki her bir üçlüye karşılık gelen  $b_k$  ağırlıkları (3.54) integrali kullanılarak hesaplanacaktır. Burada (1,1,2) üçlüsüne ait  $b_{(1,1,2)}$  ağırlığı,

$$b_{(1,1,2)} = \int_0^1 \int_0^{\xi_1} \int_0^{\xi_2} l_1(\xi_1)l_1(\xi_2)l_2(\xi_3)d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 = -\frac{\sqrt{3}}{48} + \frac{1}{30} \tag{3.72}$$

olur. (3.54) integralinin hesaplanmasıyla  $b_k$  ağırlıkları,

$$\begin{aligned}
b_{(1,1,2)} &= -\frac{\sqrt{3}}{48} + \frac{1}{30}, & b_{(1,2,1)} &= -\frac{1}{240}, \\
b_{(1,2,2)} &= -\frac{\sqrt{3}}{48} + \frac{1}{30}, & b_{(2,1,1)} &= \frac{\sqrt{3}}{48} + \frac{1}{30}, \\
b_{(2,1,2)} &= -\frac{1}{240}, & b_{(2,2,1)} &= \frac{\sqrt{3}}{48} + \frac{1}{30},
\end{aligned} \tag{3.73}$$

elde edilir. Her bir  $b_k$  ağırlığına karşılık gelen  $L$  fonksiyon değerleri,

$$\begin{aligned}
L(A_1, A_1, A_2) &= [[A_2, A_1], A_1] = -[A_1, [A_2, A_1]], \\
L(A_1, A_2, A_1) &= [[A_1, A_2], A_1] = [A_1, [A_2, A_1]], \\
L(A_1, A_2, A_2) &= [[A_2, A_2], A_1] = 0, \\
L(A_2, A_1, A_1) &= [[A_1, A_1], A_2] = 0, \\
L(A_2, A_1, A_2) &= [[A_2, A_1], A_2] = -[A_2, [A_2, A_1]], \\
L(A_2, A_2, A_1) &= [[A_1, A_2], A_2] = [A_2, [A_2, A_1]].
\end{aligned} \tag{3.74}$$

olur.  $I_4(t)$  integrali için oluşturulan  $D_4(h)$  tümleminde

$$\begin{aligned}
D_4(h) &= b_{(1,1,2)}L(A_1, A_1, A_2) + b_{(1,2,1)}L(A_1, A_2, A_1) + b_{(1,2,2)}L(A_1, A_2, A_2) \\
&\quad + b_{(2,1,1)}L(A_2, A_1, A_1) + b_{(2,1,2)}L(A_2, A_1, A_2) + b_{(2,2,1)}L(A_2, A_2, A_1)
\end{aligned} \tag{3.75}$$

(3.73) ağırlıkları ile (3.74) fonksiyon değerleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
D_4(h) &= (b_{(1,2,1)} - b_{(1,1,2)})[A_1, [A_2, A_1]] + (b_{(2,2,1)} - b_{(2,1,2)})[A_2, [A_2, A_1]] \\
&= \left(\frac{\sqrt{3}}{48} - \frac{3}{80}\right)[A_1, [A_2, A_1]] + \left(\frac{\sqrt{3}}{48} + \frac{3}{80}\right)[A_2, [A_2, A_1]].
\end{aligned} \tag{3.76}$$

elde edilir.  $D_1(h)$ ,  $D_2(h)$ ,  $D_3(h)$ ,  $D_4(h)$  tümlevleri (3.55) denkleminde yerine yazılırsa Magnus seri açılımındaki  $\Omega(t)$  için bir tahmin elde edilir.

$$\begin{aligned}\Omega(t) &\approx D_1(h) - \frac{1}{2}D_2(h) + \frac{1}{12}D_3(h) + \frac{1}{4}D_4(h) + \dots \\ &\approx \frac{1}{2}(A_1 + A_2) + \frac{\sqrt{3}}{12}[A_2, A_1] + \frac{1}{80}[[A_2, A_1], A_1] - \frac{1}{80}[[A_2, A_1], A_2]\end{aligned}$$

Teorem 3.4.1. den  $I_3(t)$  ve  $I_4(t)$  integralleri 4. mertebe Magnus seri açılımındadır fakat bu integrallerin lineer kombinasyonları 4. mertebede Magnus metodu MG4'ün sonucunu etkilemez ve  $O(t^5)$  de bulunur. Bunun için son iki terim ihmal edilir ve 4. mertebe Magnus seri açılımı

$$\Omega(t) = \frac{1}{2}(A_1 + A_2) + \frac{\sqrt{3}}{12}[A_2, A_1] + O(t^5) \quad (3.77)$$

şeklinde elde edilir. (3.2) denklemini 4. mertebe kesilmiş Magnus seri açılımı ile çözmek için Iserles, Marthinsen & Norsett aşağıdaki algoritmayı oluşturmuşlardır [10].

Adım aralığı  $h = t_{n+1} - t_n$  ve  $y(t_n) = y_n$  olmak üzere

$$A_1 = hA\left(t_n + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)h\right), \quad (3.78)$$

$$A_2 = hA\left(t_n + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)h\right), \quad (3.79)$$

$$\Omega_4 = \frac{1}{2}(A_1 + A_2) + \frac{\sqrt{3}}{12}[A_2, A_1], \quad (3.80)$$

$$y_{n+1} = \exp(\Omega_4)y_n. \quad (3.81)$$

6. Mertebe Magnus seri açılımı için ise  $\nu = 3$  ve

$$c_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{10}, \quad c_2 = \frac{1}{2}, \quad c_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{10}, \quad (3.82)$$

ve

$$l_1(x) = \frac{5 + \sqrt{15}}{6} - \frac{10 + \sqrt{15}}{3}x + \frac{10}{3}x^2, \quad (3.83)$$

$$l_2(x) = -\frac{2}{3} + \frac{20}{3}x - \frac{20}{3}x^2, \quad (3.84)$$

$$l_3(x) = \frac{5 - \sqrt{15}}{6} - \frac{10 - \sqrt{15}}{3}x + \frac{10}{3}x^2, \quad (3.85)$$

olur.

$$A_1 = hA\left(t_n + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{10}\right)h\right), \quad A_2 = hA\left(t_n + \frac{1}{2}h\right), \quad A_3 = hA\left(t_n + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{10}\right)h\right), \quad (3.86)$$

ve

$$B_1 = A_2, \quad B_2 = \frac{\sqrt{15}}{10}(A_3 - A_1), \quad B_3 = \frac{20}{3}(A_3 - 2A_2 + A_1), \quad (3.87)$$

olmak üzere 4. mertebede yapılan hesaplamalara benzer şekilde hesaplanınca 6. mertebe Magnus metodu MG6

$$\begin{aligned} \Omega = & B_1 + \frac{1}{12}B_3 - \frac{1}{12}[B_1, B_2] + \frac{1}{240}[B_2, B_3] + \frac{1}{360}[B_1, [B_1, B_3]] \\ & - \frac{1}{240}[B_2, [B_1, B_2]] + \frac{1}{720}[B_1, [B_1, [B_1, B_2]]], \end{aligned} \quad (3.88)$$

$$y_{n+1} = \exp(\Omega)y_n. \quad (3.89)$$

şeklinde elde edilir [1].

### 3.6. Lineer Olmayan Diferansiyel Denklemler için Magnus Seri Açılımı Metodu

Bu bölümde (3.2) denklemindeki  $A(t)$  matrisinin yalnızca zamana bağlı olmadığı aynı zamanda  $y$  fonksiyonuna da bağlı olduğu durum yani denklemin lineer olmayan diferansiyel denklem olması hali incelenecektir. Burada  $A = A(t, y)$  şeklindedir.

Bu durumda katlı integraller için Gauss tümlevi sadece  $t$  zaman değişkenine bağlı değil aynı zamanda bilinmeyen  $y$  fonksiyonunun tümlev noktalarındaki değerine de bağlıdır. Bu da integrasyonun her adımında lineer olmayan cebirsel işlemlere ve metodun kapalı olmasına yol açar [33].

Bu bölümde 2006 yılında Casas ve Iserles tarafından

$$y' = A(t, y)y, \quad y(0) = y_0 \in G, \quad (3.90)$$

(3.90) denklemini için geliştirilen Magnus seri açılımı metodu incelenecektir [37]. Burada  $A: \mathbb{R}_+ \times G \rightarrow \mathfrak{g}$ ,  $G$  matris Lie grubu ve  $\mathfrak{g}$  bu gruba karşılık gelen Lie cebirini belirtmektedir. Lineer durumdakine benzer şekilde Picard iterasyonu ile her bir iterasyon hesaplanarak elde edilen sonuç bir sonrakinde yerine yazılarak açık bir metot elde edilecektir. Bu şekilde tam çözüm için sürekli bir tahmin elde edilecek ve bu tahmin sadece kesikli (*discrete*) zaman adımlarında değil, tüm  $t$  zaman değerlerinde doğru ve geçerli olacaktır [33].

(3.90) denkleminin çözümü

$$y(t) = e^{\Omega(t)} y_0, \quad (3.91)$$

şeklindedir. Buradan

$$\Omega'(t) = \text{dexp}_{\Omega}^{-1} \left( A(t, e^{\Omega} y_0) \right), \quad \Omega(0) = 0, \quad (3.92)$$

diferensiyel denklemi elde edilir.

Burada  $\text{dexp}_{\Omega}^{-1}(C) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} \text{ad}_{\Omega}^n C$  ve  $B_n$  Bernoulli sayılarıdır.  $\text{ad}^n$  ise

$$\text{ad}_{\Omega}^0 A = A, \quad \text{ad}_{\Omega}^{m+1} A = [\Omega, \text{ad}_{\Omega}^m A], \quad m \geq 0,$$

ile tanımlı adjoint operatör ve  $[X, Y] \equiv XY - YX$  dir. Lineer durumdakine benzer prosedür (3.92) denkleminde uygulanırsa

$$\begin{aligned} \Omega^{[m+1]}(t) &= \int_0^t \text{dexp}_{\Omega^{[m]}(s)}^{-1} A(s, e^{\Omega^{[m]}(s)} y_0) ds \\ &= \int_0^t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} \text{ad}_{\Omega^{[m]}(s)}^k A(s, e^{\Omega^{[m]}(s)} y_0) ds, \quad m \geq 0, \end{aligned} \quad (3.93)$$

elde edilir. (3.93) açılımında  $\text{dexp}^{-1}$  operatörünün uygun biçimde kesilmesiyle Casas ve Iserles aşağıdaki sonuçları elde etmişlerdir [37].

$$\Omega^{[0]}(t) = 0, \quad (3.94)$$

olduğundan

$$\left( \Omega^{[1]} \right)' = A(t, y_0), \quad (3.95)$$

buradan

$$\Omega^{[1]}(t) = \int_0^t A(s, y_0) ds = \Omega(t) + O(t^2), \quad (3.96)$$

elde edilir.

$$A(s, e^{\Omega^{[1]}(s)} y_0) = A(0, y_0) + O(s), \quad (3.97)$$

olduğundan

$$-\frac{1}{2} \int_0^t \left[ \Omega^{[1]}(s), A(s, e^{\Omega^{[1]}(s)} y_0) \right] ds = O(t^3). \quad (3.98)$$

$\Omega^{[3]}(t)$  hesaplanırken  $\Omega^{[2]}(t)$  deki ikinci terim (3.98) de dahil edilirse,  $\Omega^{[3]}(t)$   $\Omega^{[2]}(t)$  yi  $O(t^2)$  ye kadar üretir. Bundan dolayı  $\text{dexp}^{-1}$  operatörü  $k = 0$  da kesilir ve

$$\Omega^{[2]}(t) = \int_0^t A(s, e^{\Omega^{[1]}(s)} y_0) ds \quad (3.99)$$

alınır. Genelleme yapılırsa,

$$\begin{aligned}\Omega^{[1]}(t) &= \int_0^t A(s, y_0) ds \\ \Omega^{[m]}(t) &= \sum_{k=0}^{m-2} \frac{B_k}{k!} \int_0^t ad_{\Omega^{[m-1]}(s)}^k A(s, e^{\Omega^{[m-1]}(s)} Y_0) ds, \quad m \geq 2,\end{aligned}\tag{3.100}$$

$\Omega(t)$  için bir tahmin elde edilir.

$$\Omega(t) \approx \Omega^{[m]}(t).\tag{3.101}$$

Şimdi (3.100) eşitliğinden ikinci, üçüncü ve dördüncü mertebeden nümerik metod (*algoritma*) oluşturulacaktır. Her üç durumda da tümlev kuralları  $t_{n+1} = t_n + h$  olmak üzere  $[t_n, t_{n+1}]$  aralığında eşit aralıklı noktalar için algoritmalar aşağıda verilmiştir.

### 3.6.1. İkinci Mertebe Lineer Olmayan Magnus Seri Açılımı Metodu NMG2

(3.100) eşitliğinde  $m = 2$  için

$$\Omega^{[1]}(t) = \int_0^t A(s, y_0) ds\tag{3.102}$$

$$\Omega^{[2]}(t) = \int_0^t A(s, e^{\Omega^{[1]}(s)} y_0) ds\tag{3.103}$$

elde edilir. (3.103) denkleminde yamuk kuralı uygulanırsa

$$\Omega^{[2]}(h) = \frac{h}{2} (A(0, y_0) + A(h, e^{\Omega^{[1]}(h)} y_0)) + O(h^3),\tag{3.104}$$

olur. (3.102) denkleminde Euler metodu uygulanırsa

$$\Omega^{[1]}(h) = hA(0, y_0) + O(h^2)\tag{3.105}$$

olur. Bunun sonucunda ikinci mertebe lineer olmayan Magnus seri açılımı metodu NMG2 için algoritma

$$v_1 \equiv hA(h/2, e^{h/2 A(0, y_0)} y_0) = \Omega^{[2]}(h) + O(h^3),\tag{3.106}$$

$$y_{n+1}(t) = e^{v_1} y_n.$$

olarak bulunur [37].

### 3.6.2. Üçüncü Mertebe Lineer Olmayan Magnus Seri Açılımı Metodu NMG3

$A_2(s) \equiv A(s, e^{\Omega^{[2]}(s)} y_0)$  olmak üzere

$$\Omega^{[3]}(t) = \int_0^t (A_2(s) - \frac{1}{2}[\Omega^{[2]}(s), A_2(s)]) ds,\tag{3.107}$$

(3.107) denkleminde Simpson kuralı uygulanınca

$$\begin{aligned}\Omega^{[3]}(h) &= \frac{h}{6} \left( A(0, y_0) + 4A_2\left(\frac{h}{2}\right) + A_2(h) \right) - \frac{h}{3} [\Omega^{[2]}(\frac{h}{2}), A_2(\frac{h}{2})] \\ &\quad - \frac{h}{12} [\Omega^{[2]}(h), A_2(h)] + O(h^4)\end{aligned}\quad (3.108)$$

olur.  $\Omega^{[1]}(h)$  ve  $\Omega^{[2]}(h)$  için sırasıyla Euler kuralı ve orta nokta kuralı uygulanırsa

$$\Omega^{[2]}(\frac{h}{2}) = \frac{h}{4} \left( A(0, y_0) + \frac{h}{4} A\left(\frac{h}{2}, e^{\frac{h}{2}A(0, y_0)} y_0\right) \right) + O(h^3), \quad (3.109)$$

olarak bulunur. Buradan üçüncü merteye lineer olmayan Magnus seri açılımı metodu NMG3 için algoritma

$$\begin{aligned}u_1 &= 0, \\ k_1 &= hA(0, y_0), \\ u_2 &= \frac{1}{2}k_1, \\ k_2 &= hA\left(\frac{h}{2}, e^{u_2} y_0\right), \\ u_3 &= \frac{1}{4}(k_1 + k_2), \\ k_3 &= hA\left(\frac{h}{2}, e^{u_3} y_0\right), \\ u_4 &= k_2, \\ k_4 &= hA(h, e^{u_4} y_0), \\ v_3 &= \frac{1}{6}(k_1 + 4k_3 + k_4) - \frac{1}{3}[u_3, k_3] - \frac{1}{12}[u_4, k_4],\end{aligned}\quad (3.110)$$

$$y_{n+1} = e^{v_3} y_n.$$

şeklinde elde edilir [37]. Runge-Kutta-Munthe-Kaas RKMK metodu için [49] de geliştirilen teknik burada komütatör sayısını azaltmak için uygulanırsa (3.110) algoritması yerine

$$\begin{aligned}u_1 &= 0, \\ u_2 &= \frac{1}{2}Q_1, \\ u_3 &= \frac{1}{2}Q_1 + \frac{1}{4}Q_2, \\ u_4 &= Q_1 + Q_2, \\ v_3 &= Q_1 + Q_2 + \frac{2}{3}Q_3 + \frac{1}{6}Q_4 - \frac{1}{6}[Q_1, Q_2], \\ y_1 &= e^{v_3} y_0.\end{aligned}\quad (3.111)$$

kullanılabilir. Burada

$$\begin{aligned}Q_1 &= k_1 = O(h), \\ Q_2 &= k_2 - k_1 = O(h^2), \\ Q_3 &= k_3 - k_2 = O(h^3), \\ Q_4 &= k_4 - 2k_2 + k_1 = O(h^3).\end{aligned}\quad (3.112)$$

tür.



### 3.6.3. Dördüncü Mertebe Lineer Olmayan Magnus Seri Açılımı Metodu NMG4

Benzer şekilde (3.100) eşitliğinde  $m = 4$  yazılırsa  $\Omega^{[3]}(\frac{h}{2})$  hesaplanır ve Simpson kuralı uygulanırsa dördüncü mertebe lineer olmayan Magnus metodu NMG4 için algoritma

$$\begin{aligned}
u_1 &= 0, \\
k_1 &= hA(t_n, y_n), \\
Q_1 &= k_1, \\
u_2 &= \frac{1}{2}Q_1, \\
k_2 &= hA(t_n + \frac{h}{2}, e^{u_2} y_0), \\
Q_2 &= k_2 - k_1, \\
u_3 &= \frac{1}{2}Q_1 + \frac{1}{4}Q_2, \\
k_3 &= hA(t_n + \frac{h}{2}, e^{u_3} y_0), \\
Q_3 &= k_3 - k_2, \\
u_4 &= Q_1 + Q_2, \\
k_4 &= hA(t_n + h, e^{u_4} y_0), \\
Q_4 &= k_4 - 2k_2 + k_1, \\
u_5 &= \frac{1}{2}Q_1 + \frac{1}{4}Q_2 + \frac{1}{3}Q_3 - \frac{1}{24}Q_4 - \frac{1}{48}[Q_1, Q_2], \\
k_5 &= hA(t_n + \frac{h}{2}, e^{u_5} y_0), \\
Q_5 &= k_5 - k_2, \\
u_6 &= Q_1 + Q_2 + \frac{2}{3}Q_3 + \frac{1}{6}Q_4 - \frac{1}{6}[Q_1, Q_2], \\
k_6 &= hA(t_n + h, e^{u_6} y_0), \\
Q_6 &= k_6 - 2k_2 + k_1, \\
v &= Q_1 + Q_2 + \frac{2}{3}Q_5 + \frac{1}{6}Q_6 - \frac{1}{6}[Q_1, Q_2 - Q_3 + Q_5 + \frac{1}{2}Q_6], \\
y_{n+1} &= e^v y_n.
\end{aligned} \tag{3.113}$$

şeklinde elde edilir [37].

### 3.7. Homojen Olmayan Denklemler

Homojen olmayan lineer matris diferansiyel denkleminin genel hali aşağıdaki gibidir.

$$Y'(t) = M(t)Y(t) + N(t)Y(t) + F(t), \quad t \in [t_0, T], \tag{3.114}$$

burada  $Y(t), F(t) \in \mathbb{C}^{p \times q}$ ,  $M(t) \in \mathbb{C}^{p \times p}$ ,  $N(t) \in \mathbb{C}^{q \times q}$  ve başlangıç koşulu  $Y(t_0) = Y_0$ . Bu bölümde Blanes ve Ponsoda'nın homojen olmayan denklemler için verdiği dönüşüm incelenecektir [38].

(3.114) problemi daha basit şekle indirgenerek uygun sınır veya başlangıç koşullarıyla

$$y'(t) = M(t)y(t) + h(t), \quad t_0 \leq t \leq T, \quad y(t), h(t) \in \mathbb{C}^{pq}, \quad M(t) \in \mathbb{C}^{pq \times pq}, \quad (3.115)$$

şeklinde yazılabilir. Daha sonra (3.115) denklemi

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ 1 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} M(t) & h(t) \\ 0^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (3.116)$$

şeklinde yeniden yazılabilir.

$$A(t) = \begin{bmatrix} M(t) & h(t) \\ 0^T & 0 \end{bmatrix}, \quad x(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (3.117)$$

dönüşümü ile (3.115) denklemi

$$x'(t) = A(t)x(t), \quad (3.118)$$

Lie tipi diferansiyel denkleme dönüşür. Daha sonra Magnus seri açılımı metoduyla bu denklem çözülür.

## 4. BÖLÜM

### MAGNUS SERİ AÇILIMI METODUNUN UYGULAMALARI

Bu bölümde Magnus seri açılımı metodunu, fiziksel uygulamalarda ve mühendislik uygulamalarında ortaya çıkan lineer ve lineer olmayan homojen ve homojen olmayan Lie tipi diferansiyel denklemlere uygulayacağız.

#### 4.1. Yay üzerindeki bir cismin titreşimi

Titreşim, bir mekanik sistemin tekrarlayan, periyodik veya salınımlı bir yanıtıdır [50]. Titreşim içeren problemler mekanik, elektronik, jeoloji, inşaat ve havacılık mühendisliğinin birçok alanında ortaya çıkar. Enerjiyi boşa harcamasından, ses ve gürültü yapmasından, verimliliği azaltmasından dolayı titreşim genellikle istenmeyen bir durumdur. Bu çalışmada, bir cismin yay üzerindeki titreşimi sırasında ortaya çıkan diferansiyel denklemlere Magnus seri açılımı yöntemi uygulanacaktır. Elde edilen yaklaşık çözümler [51, 52] de verilen kesin analitik çözümlerle karşılaştırılacaktır.

##### 4.1.1. Yay üzerindeki bir cisme etki eden kuvvetler

Yay üzerindeki bir cisme etkiyen çeşitli kuvvetler vardır. Cismi aşağı doğru çekmeye çalışan kuvvetler pozitif ve yukarı yönde etkiyen kuvvetler ise negatiftir. Bu kuvvetleri Ross diferansiyel denklemler adlı kitabında şu şekilde vermiştir [51].

###### 4.1.1.1. $F_1$ Yerçekimi Kuvveti

Yerçekimi ivmesi  $g$ , cismin kütlesi  $m$  olmak üzere cisme aşağı yönde etkiyen  $mg$  yerçekimi kuvvetidir. Aşağı yönlü olduğundan dolayı pozitiftir.

$$F_1 = mg. \tag{4.1}$$

#### 4.1.1.2. $F_2$ Yayı Geri Getiren Kuvvet

$x+l$  toplam uzama miktarı olduğundan Hook yasasına göre yayı geri getiren kuvvetin şiddeti,  $k(x+l)$  olur. Cisim, uzamamış yayın hizasının altında ise kuvvet yukarı doğru etkir ve bu yüzden negatiftir. Bu durumda geri getiren kuvvetin şiddeti  $-k(x+l)$  olur.

$$F_2 = -k(x+l). \quad (4.2)$$

Cisim denge konumunda durmakta iken geri getiren kuvvetin şiddeti yerçekimi kuvveti ile aynı fakat ters yönlüdür bu yüzden geri getiren kuvvet  $-mg$  olur. Bu noktada  $x=0$  olduğundan (4.2) denkleminde

$$-mg = kl, \quad (4.3)$$

elde edilir. (4.3) denkleminde  $kl$  yerine  $mg$  yazılırsa,

$$F_2 = -kx - mg, \quad (4.4)$$

şeklinde yazılabilir.

#### 4.1.1.3. $F_3$ Sönüm Kuvveti

Ortamin sönüm kuvveti denilen direnç kuvvetinin büyüklüğü tam olarak bilinmiyorsa da, küçük hızlar için yaklaşık olarak hızla orantılıdır.

$$|F_3| = a \left| \frac{dx}{dt} \right|, \quad (4.5)$$

burada  $a > 0$  katsayısına sönüm sabiti denir. Cisim aşağı doğru inerken  $F_3$  cisme ters yönde yukarı doğru etki eder. Bu yüzden  $F_3 < 0$  olur. Cisim aşağı doğru inmekte olduğundan  $x$  artandır. Bundan dolayı  $\frac{dx}{dt} > 0$  olur ve sönüm kuvveti

$$F_3 = -a \frac{dx}{dt}, \quad a > 0, \quad (4.6)$$

dır.

#### 4.1.1.4. $F_4$ Harici Kuvvetler

Cismin üzerine dışarıdan etki eden kuvvetlerdir. Herhangi bir  $t$  anında bu kuvvetlerin bileşkesi  $F(t)$  olsun bu durumda harici kuvvet

$$F_4 = F(t), \quad (4.7)$$

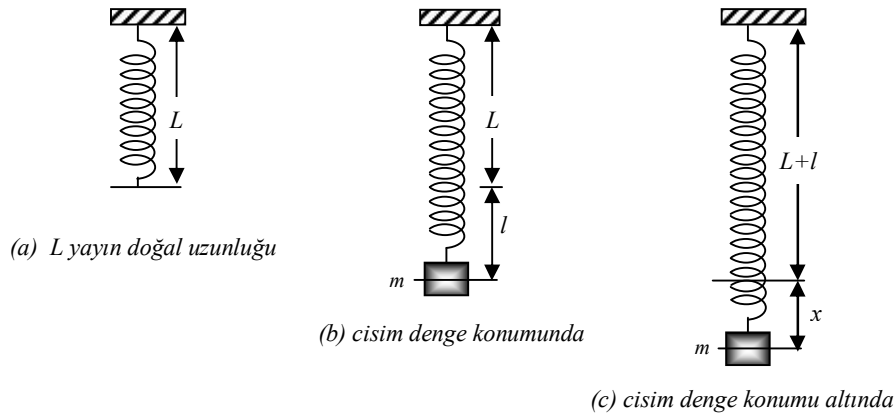
olur. Hareket denklemi Newton'un 2. yasası  $F = ma$  dan yazılırsa, cisme etkiyen kuvvetlerin bileşkesi  $F = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$  olur ve

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + a \frac{dx}{dt} + kx = F(t), \quad (4.8)$$

elde edilir. Burada  $m$  cismin kütlesi,  $a$  sönüm katsayısı,  $k$  yay sabiti ve  $F(t)$ ,  $t$  anında cisme etkiyen harici kuvvettir.

#### 4.1.2. Yay üzerindeki bir cismin hareketi

Yayın ucundaki cismin hareketini modelleyen (4.8) diferansiyel denklemdir. Bu denklemde  $a = 0$  olması halinde hareket sönümsüz, aksi halde sönümlüdür. Cisme etkiyen harici bir kuvvet yoksa yani  $\forall t > 0$  için  $F(t) = 0$  ise buna serbest hareket, aksi halde ( $F(t) \neq 0$ ) zorlanmış hareket denir. Şekil 4.1. yay üzerindeki bir cismin hareketini göstermektedir [51].



Şekil 4.1. Yay üzerindeki cismin hareketi

##### 4.1.2.1 Serbest sönümsüz hareket

Serbest sönümsüz harekette hem sönüm katsayısı  $a = 0$  hem de cisme etkiyen harici kuvvet  $F(t) = 0$  dır. Bu durumda (4.8) denklemi,

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0, \quad (4.9)$$

şeklini alır. (4.9) denklemini  $k$ 'ya bölüp  $k/m$  yerine  $\lambda^2$  yazarsak, hareket denklemi

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda^2 x = 0, \quad (4.10)$$

olarak elde edilir.

#### 4.1.2.2. Serbest sönümlü hareket

Serbest sönümlü harekette sönüm katsayısı  $a \neq 0$  ve cisme etkiyen harici kuvvet  $F(t) = 0$  dır. Bu durumda (4.8) denklemi,

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + a \frac{dx}{dt} + kx = 0, \quad (4.11)$$

şeklini alır. (4.11) denklemini  $k$ 'ya bölüp  $k/m$  yerine  $\lambda^2$  ve  $a/m$  yerine  $2b$  yazarsak, hareket denklemi

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b \frac{dx}{dt} + \lambda^2 x = 0, \quad (4.12)$$

olarak elde edilir.  $a$  ve  $m$  pozitif olduğundan  $b$  de pozitiftir. Bu durumda serbest sönümlü harekette 3 durum ortaya çıkar.

##### 1. Durum: Sönümlü titreşimli hareket

Bu durumda  $b < \lambda$  dır. (4.12) denklemi salınım (*osilasyon*) denklemi olur yani (4.12) denkleminin çözümü periyodik salınım karakterli bir fonksiyondur.

##### 2. Durum: Kritik sönümlü hareket

Bu durumda  $b = \lambda$  olur. Hareket artık salınımlı değildir. Sönüm salınımı engelleyecek kadar güçlüdür.

##### 3. Durum: Aşırı (kritik ötesi) sönümlü hareket

Bu durumda  $b > \lambda$  olur. Sönüm çok kuvvetli olduğundan salınımı engeller ve hareket artık salınımlı değildir.

### 4.1.2.3 Zorlanmış hareket

Zorlanmış harekette cisme etkiyen harici kuvvet  $F(t) \neq 0$  dır. Bu durumda (4.8) denklemi,

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + a \frac{dx}{dt} + kx = F(t), \quad (4.13)$$

şeklini alır.  $a = 0$  olması halinde sönümsüz zorlanmış hareket, aksi halde sönümlü zorlanmış hareket denir. Şimdi yay ucundaki bir cismin hareketini modellemede ortaya çıkan diferansiyel denklemler Magnus seri açılımı metodu ile çözümlenip elde edilen sonuçlar analitik çözümler ile karşılaştırılacaktır.

#### Örnek 4.1.

$x(0) = \frac{1}{4}$ ,  $x'(0) = 0$  başlangıç koşullarıyla verilen,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 64x = 0, \quad (4.14)$$

serbest sönümsüz hareket denklemini ele alalım [51].

$$x = x_1, \quad x' = x_2, \quad (4.15)$$

dönüşümü ile (4.14) denklemi,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -64 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad (4.16)$$

Lie tipi matris denklemi (4.16) şeklinde yazılabilir. Burada  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -64 & 0 \end{bmatrix}$  ve  $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

dersek (4.14) denklemi

$$X' = AX, \quad (4.17)$$

Lie tipi lineer diferansiyel denkleme dönüşür. (4.17) denkleminde  $A$  katsayılar matrisi sabit olduğundan Magnus seri açılımı metodu kesin analitik çözümü verir.

#### Örnek 4.2.

$x(0) = \frac{1}{2}$ ,  $x'(0) = 0$  başlangıç koşullarıyla verilen,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4 \frac{dx}{dt} + 16x = 0, \quad (4.18)$$

serbest sönümlü hareket denklemini ele alalım [51].

$$x = x_1, \quad x'_1 = x_2, \quad (4.19)$$

dönüşümü ile (4.18) denklemi,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -16 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad (4.20)$$

Lie tipi matris denklemi (4.20) şeklinde yazılabilir. Burada  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -16 & -4 \end{bmatrix}$  ve  $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

dersek (4.18) denklemi

$$X' = AX, \quad (4.21)$$

Lie tipi lineer diferansiyel denkleme dönüşür. (4.21) denkleminde  $A$  katsayılar matrisi sabit olduğundan Magnus seri açılımı metodu kesin analitik çözümü verir.

*Örnek 4.3.*

$x(0) = \frac{1}{2}$ ,  $x'(0) = 0$  başlangıç koşullarıyla verilen,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} + 16x = 0, \quad (4.22)$$

serbest kritik sönüm hareket denklemini ele alalım [51].

$$x = x_1, \quad x'_1 = x_2, \quad (4.23)$$

dönüşümü ile (4.22) denklemi,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -16 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad (4.24)$$

Lie tipi matris denklemi (4.24) şeklinde yazılabilir. Burada  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -16 & -8 \end{bmatrix}$  ve  $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

dersek (4.22) denklemi

$$X' = AX, \quad (4.25)$$

Lie tipi lineer diferansiyel denkleme dönüşür. (4.25) denkleminde  $A$  katsayılar matrisi sabit olduğundan Magnus seri açılımı metodu kesin analitik çözümü verir.

*Örnek 4.4.*

$x(0) = \frac{1}{2}$ ,  $x'(0) = 0$  başlangıç koşullarıyla verilen,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 10\frac{dx}{dt} + 16x = 0, \quad (4.26)$$



serbest (*kritik ötesi*) aşırı sönümlü hareket denklemini ele alalım [51].

$$x = x_1, \quad x'_1 = x_2, \quad (4.27)$$

dönüşümü ile (4.21) denklemi,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -16 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad (4.28)$$

Lie tipi matris denklemi (4.28) şeklinde yazılabilir.

Burada  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -16 & -10 \end{bmatrix}$  ve  $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$  dersek (4.26) denklemi

$$X' = AX, \quad (4.29)$$

Lie tipi lineer diferansiyel denkleme dönüşür. (4.29) denkleminde  $A$  katsayılar matrisi sabit olduğundan Magnus seri açılımı metodu kesin analitik çözümü verir.

*Örnek 4.5.*

$x(0) = 2, x'(0) = 0$  başlangıç koşullarıyla verilen,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{8} \frac{dx}{dt} + x = 3 \cos 2t, \quad (4.30)$$

sönümlü zorlanmış hareket denklemini ele alalım [52].

$$x = x_1, \quad x'_1 = x_2, \quad (4.31)$$

dönüşümü ile (4.30) denklemi

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1/8 & 3 \cos 2t \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (4.32)$$

Lie tipi matris denklemi (4.32) şeklinde yazılabilir. Burada  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1/8 & 3 \cos 2t \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

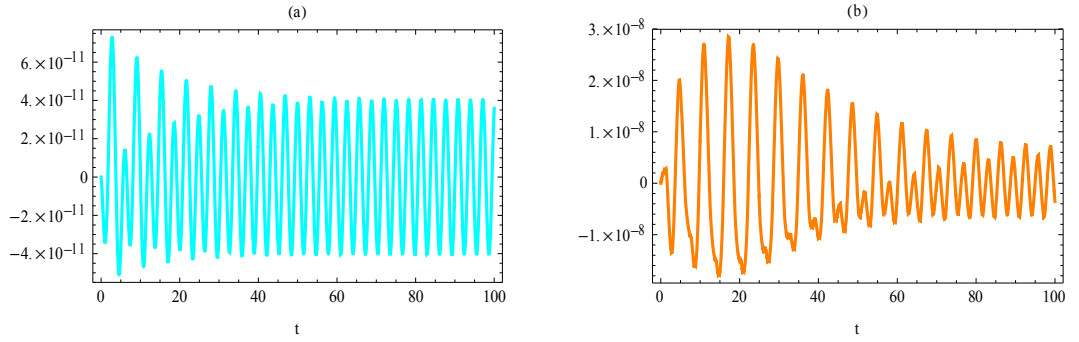
ve  $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix}$  dersek (4.30) denklemi

$$X' = AX, \quad (4.33)$$

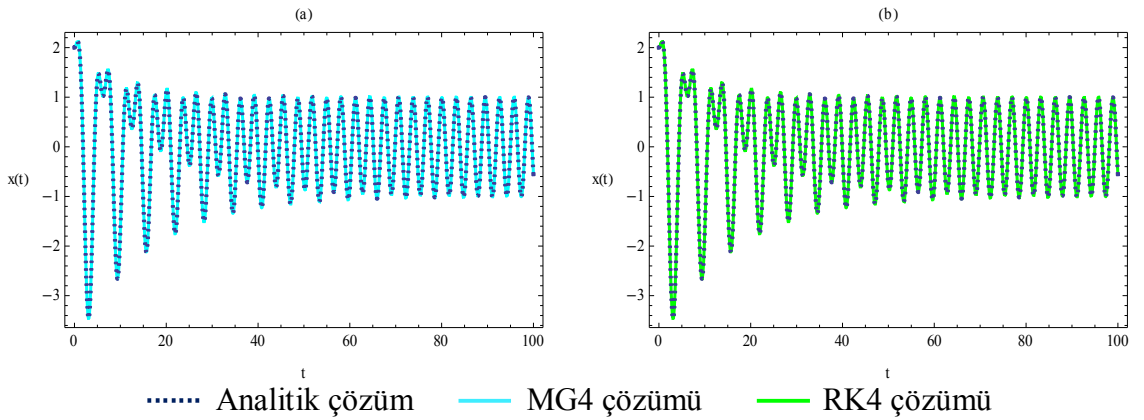
Lie tipi lineer diferansiyel denkleme dönüşür. (4.33) lineer denklemi 4. ve 6. mertebe Magnus seri açılımı metodu MG4, MG6, Runge Kutta metodu RK4 ve RK6 ile  $h = \frac{1}{100}$

adım aralığı ve (0,100) zaman aralığı için çözümler [52] de verilen kesin analitik çözüm ile karşılaştırılmıştır.

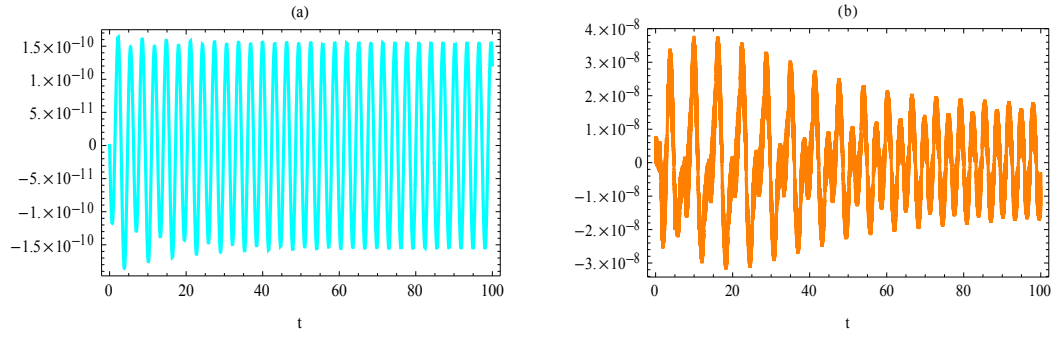
(4.30) denkleminin analitik kesin çözümü  $x(t)$ , bu çözümün zamana göre türevi  $x'(t)$  ile MG4, RK4, MG6, RK6 çözümlerinin grafikleri ve MG4, RK4, MG6, RK6 çözümleri için hata grafikleri Şekil 4.2-9. da verilmiştir.  $x(t)$  ve  $x'(t)$  için elde edilen sonuçlar ve mutlak hataları Tablo 4.1-10. da verilmiştir.



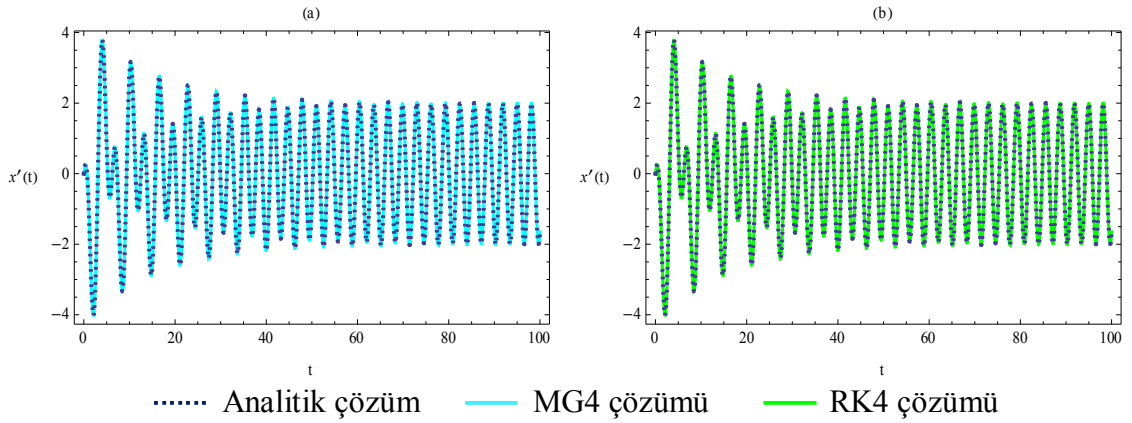
Şekil 4.2. (4.30) denkleminde  $x(t)$  için (a) MG4, (b) RK4 hata grafikleri



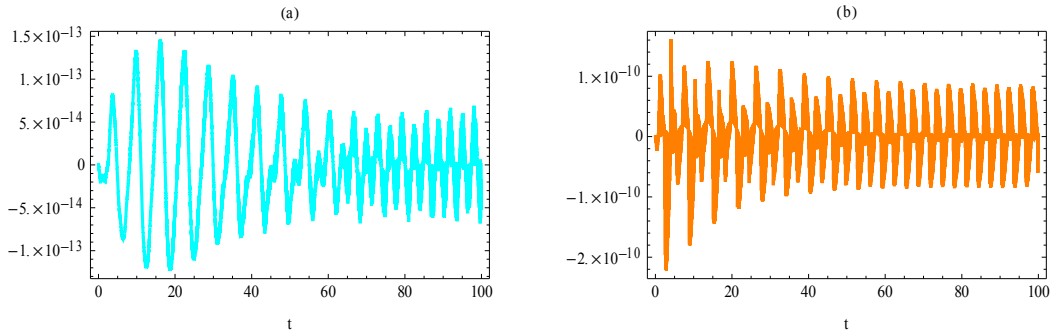
Şekil 4.3. (4.30) denkleminde  $x(t)$  için (a) MG4, (b) RK4 ve analitik çözüm grafikleri



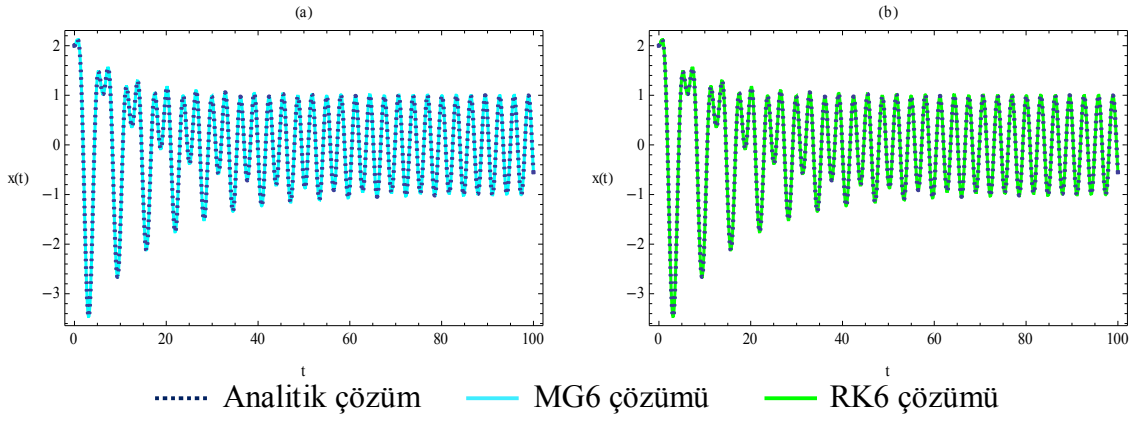
Şekil 4.4. (4.30) denkleminde  $x'(t)$  için (a) MG4, (b) RK4 hata grafikleri



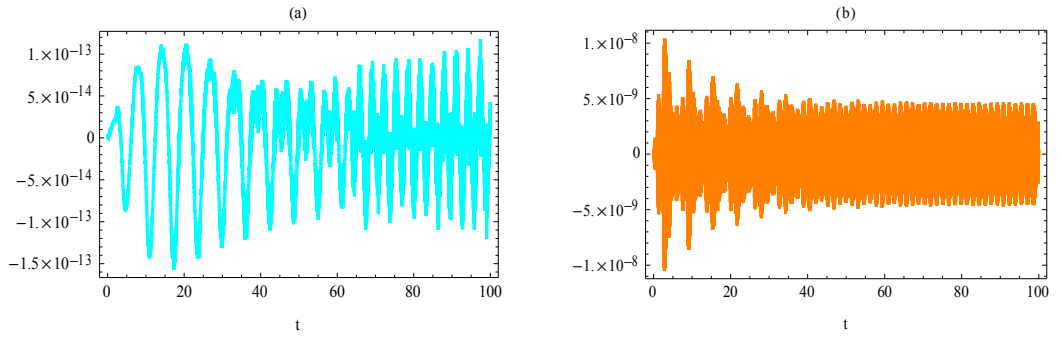
Şekil 4.5. (4.30) denkleminde  $x'(t)$  için (a) MG4, (b) RK4 ve analitik çözüm grafikleri



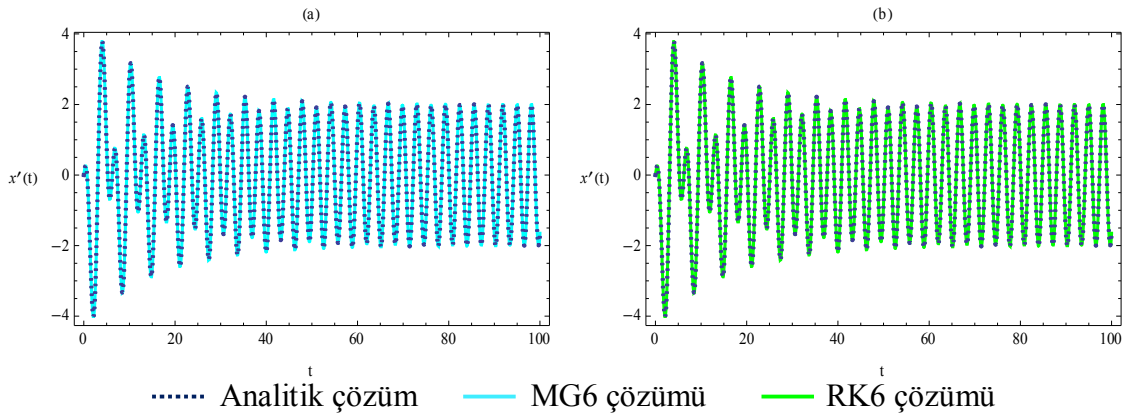
Şekil 4.6. (4.30) denkleminde  $x(t)$  için (a) MG6, (b) RK6 hata grafikleri



Şekil 4.7. (4.30) denkleminde  $x(t)$  için (a) MG6, (b) RK6 ve analitik çözüm grafikleri



Şekil 4.8. (4.30) denkleminde  $x'(t)$  için (a) MG6, (b) RK6 hata grafikleri



Şekil 4.9. (4.30) denkleminin  $x'(t)$  için (a) MG6, (b) RK6 ve analitik çözüm grafikleri

Tablo 4.1. (4.30) denkleminin MG4 ile  $h = \frac{1}{100}$  adım aralığı ve (0,10) zaman aralığında  $x(t)$  için çözümü ile kesin analitik çözümünün karşılaştırılması

t	Analitik çözüm [52]	MG4 çözümü	Mutlak hata
0	2	2	0
1	2.029400775781917	2.029400775747975	$3.39426 \times 10^{-11}$
2	-0.485949674954965	-0.485949674929983	$2.49818 \times 10^{-11}$
3	-3.428483794322376	-3.428483794253949	$6.84266 \times 10^{-11}$
4	-1.323679341941148	-1.323679341963859	$2.27105 \times 10^{-11}$
5	1.373677792211145	1.373677792173146	$3.79987 \times 10^{-11}$
6	1.081560844958590	1.081560844972373	$1.37836 \times 10^{-11}$
7	1.429350995372519	1.429350995347525	$2.49942 \times 10^{-11}$
8	0.704195131142868	0.704195131133206	$9.66283 \times 10^{-12}$
9	-2.253898675340495	-2.253898675278972	$6.15232 \times 10^{-11}$
10	-1.696862886577910	-1.696862886575667	$2.24332 \times 10^{-12}$

Tablo 4.2. (4.30) denkleminin RK4 ile  $h = \frac{1}{100}$  adım aralığı ve (0,10) zaman aralığında  $x(t)$  için çözümü ile kesin analitik çözümünün karşılaştırılması.

t	Analitik çözüm [52]	RK4 çözümü	Mutlak hata
0	2	0	0
1	2.029400775781917	2.029400773409707	$2.37221 \times 10^{-9}$
2	-0.485949674954965	-0.485949668860424	$6.09454 \times 10^{-9}$
3	-3.428483794322376	-3.428483781785366	$1.25370 \times 10^{-8}$
4	-1.323679341941148	-1.323679351276856	$9.33570 \times 10^{-9}$
5	1.373677792211145	1.373677774141127	$1.80700 \times 10^{-8}$
6	1.081560844958590	1.081560843692483	$1.26610 \times 10^{-9}$
7	1.429350995372519	1.429351003899459	$8.52693 \times 10^{-9}$
8	0.704195131142868	0.704195143765409	$1.26225 \times 10^{-8}$
9	-2.253898675340495	-2.253898660698547	$1.46419 \times 10^{-8}$
10	-1.696862886577910	-1.696862895416944	$8.83903 \times 10^{-9}$

Tablo 4.3. (4.30) denkleminin MG4 ile  $h = \frac{1}{100}$  adım aralığı ve (0,10) zaman aralığında  $x'(t)$  için çözümü ile kesin analitik çözümünün karşılaştırılması

t	Analitik çözüm [52]	MG4 çözümü	Mutlak hata
0	0	0	0
1	-0.70657932509473	-0.70657932518618	$9.14421 \times 10^{-11}$
2	-3.95357238063817	-3.95357238048988	$1.48289 \times 10^{-10}$
3	-0.62434709733751	-0.62434709733370	$3.81505 \times 10^{-12}$
4	3.77553137571673	3.77553137553797	$1.78761 \times 10^{-10}$
5	0.85002509487946	0.85002509496501	$8.55518 \times 10^{-11}$
6	-0.43789592285876	-0.43789592278766	$7.11003 \times 10^{-11}$
7	0.66097784752160	0.66097784739220	$1.29393 \times 10^{-10}$
8	-2.51458679792127	-2.51458679783686	$8.44124 \times 10^{-11}$
9	-2.02605871092331	-2.02605871082897	$9.43414 \times 10^{-11}$
10	2.79996360672381	2.79996360655452	$1.69289 \times 10^{-10}$

Tablo 4.4. (4.30) denkleminin RK4 ile  $h = \frac{1}{100}$  adım aralığı ve (0,10) zaman aralığında  $x'(t)$  için çözümü ile kesin analitik çözümünün karşılaştırılması.

t	Analitik çözüm [52]	RK4 çözümü	Mutlak hata
0	0	$-1.40607 \times 10^{-19}$	$1.40607 \times 10^{-19}$
1	-0.70657932509473	-0.70657933027619	$5.18145 \times 10^{-9}$
2	-3.95357238063817	-3.95357237069818	$9.93998 \times 10^{-9}$
3	-0.62434709733751	-0.62434710542397	$8.08645 \times 10^{-9}$
4	3.77553137571673	3.77553136162707	$1.40897 \times 10^{-8}$
5	0.85002509487946	0.85002511504699	$2.01675 \times 10^{-8}$
6	-0.43789592285876	-0.43789590592604	$1.69327 \times 10^{-8}$
7	0.66097784752160	0.66097784999469	$2.47309 \times 10^{-9}$
8	-2.51458679792127	-2.51458679695384	$9.67436 \times 10^{-10}$
9	-2.02605871092331	-2.02605872071632	$9.79301 \times 10^{-9}$
10	2.79996360672381	2.79996357327951	$3.34443 \times 10^{-8}$

Tablo 4.5. (4.30) denkleminin MG6 ile  $h = \frac{1}{100}$  adım aralığı ve (0,10) zaman aralığında  $x(t)$  için çözümü ile kesin analitik çözümünün karşılaştırılması

t	Analitik çözüm [52]	MG6 çözümü	Mutlak hata
0	2	2	0
1	2.029400775781917	2.029400775781906	$1.15463 \times 10^{-14}$
2	-0.485949674954965	-0.485949674954977	$1.18793 \times 10^{-14}$
3	-3.428483794322376	-3.428483794322334	$4.17443 \times 10^{-14}$
4	-1.323679341941148	-1.323679341941079	$6.94999 \times 10^{-14}$
5	1.373677792211145	1.373677792211128	$1.68753 \times 10^{-14}$
6	1.081560844958590	1.081560844958511	$7.88258 \times 10^{-14}$
7	1.429350995372519	1.429350995372449	$7.06101 \times 10^{-14}$
8	0.704195131142868	0.704195131142861	$7.10542 \times 10^{-14}$
9	-2.253898675340495	-2.253898675340423	$7.14983 \times 10^{-14}$
10	-1.696862886577910	-1.696862886577779	$1.30784 \times 10^{-13}$

Tablo 4.6. (4.30) denkleminin RK6 ile  $h = \frac{1}{100}$  adım aralığı ve (0,10) zaman aralığında  $x(t)$  için çözümü ile kesin analitik çözümünün karşılaştırılması

t	Analitik çözüm [52]	RK6 çözümü	Mutlak hata
0	2	2	0
1	2.029400775781917	2.029400775782261	$3.43280 \times 10^{-13}$
2	-0.485949674954965	-0.485949674963123	$8.15880 \times 10^{-12}$
3	-3.428483794322376	-3.428483794329231	$6.85496 \times 10^{-12}$
4	-1.323679341941148	-1.323679341979057	$3.79083 \times 10^{-11}$
5	1.373677792211145	1.373677792205894	$5.25091 \times 10^{-12}$
6	1.081560844958590	1.081560844955451	$3.13860 \times 10^{-12}$
7	1.429350995372519	1.429350995355398	$1.71214 \times 10^{-11}$
8	0.704195131142868	0.704195131092251	$5.06177 \times 10^{-11}$
9	-2.253898675340495	-2.253898675338253	$2.24131 \times 10^{-12}$
10	-1.696862886577910	-1.696862886501658	$7.62514 \times 10^{-11}$

Tablo 4.7. (4.30) denkleminin MG6 ile  $h = \frac{1}{100}$  adım aralığı ve (0,10) zaman aralığında  $x'(t)$  için çözümü ile kesin analitik çözümünün karşılaştırılması

t	Analitik çözüm [52]	MG6 çözümü	Mutlak hata
0	0	0	0
1	-0.70657932509473	-0.70657932509472	$1.27676 \times 10^{-14}$
2	-3.95357238063817	-3.95357238063815	$2.08722 \times 10^{-14}$
3	-0.62434709733751	-0.62434709733748	$2.59792 \times 10^{-14}$
4	3.77553137571673	3.77553137571668	$5.28466 \times 10^{-14}$
5	0.85002509487946	0.85002509487938	$8.08242 \times 10^{-14}$
6	-0.43789592285876	-0.43789592285877	$1.44884 \times 10^{-14}$
7	0.66097784752160	0.66097784752166	$6.25056 \times 10^{-14}$
8	-2.51458679792127	-2.51458679792119	$8.30447 \times 10^{-14}$
9	-2.02605871092331	-2.02605871092325	$6.61693 \times 10^{-14}$
10	2.79996360672381	2.79996360672376	$5.06262 \times 10^{-14}$

Tablo 4.8. (4.30) denkleminin RK6 ile  $h = \frac{1}{100}$  adım aralığı ve (0,10) zaman aralığında  $x'(t)$  için çözümü ile kesin analitik çözümünün karşılaştırılması

t	Analitik çözüm [52]	RK6 çözümü	Mutlak hata
0	0	$-1.04185 \times 10^{-19}$	$1.04185 \times 10^{-19}$
1	-0.70657932509473	-0.70657932469200	$4.02728 \times 10^{-10}$
2	-3.95357238063817	-3.95357237958909	$1.04908 \times 10^{-9}$
3	-0.62434709733751	-0.62434709767115	$3.33644 \times 10^{-10}$
4	3.77553137571673	3.77553137915158	$3.43485 \times 10^{-9}$
5	0.85002509487946	0.85002509838032	$3.50086 \times 10^{-9}$
6	-0.43789592285876	-0.43789592155104	$1.30772 \times 10^{-9}$
7	0.66097784752160	0.66097784760867	$8.70735 \times 10^{-11}$
8	-2.51458679792127	-2.51458679431495	$3.60633 \times 10^{-9}$
9	-2.02605871092331	-2.02605870759639	$3.32692 \times 10^{-9}$
10	2.79996360672381	2.79996360722260	$4.98793 \times 10^{-10}$



Tablo 4.9. (4.30) denkleminin MG4, MG6, RK4 ve RK6 ile  $h = \frac{1}{100}$  adım aralığı ve  $(0,10)$  zaman aralığında  $x(t)$  için çözümlerinin mutlak hataları

t	MG6	RK6	MG4	RK4
0	0	0	0	0
1	$1.15463 \times 10^{-14}$	$3.43280 \times 10^{-13}$	$3.39426 \times 10^{-11}$	$2.37221 \times 10^{-9}$
2	$1.18793 \times 10^{-14}$	$8.15880 \times 10^{-12}$	$2.49818 \times 10^{-11}$	$6.09454 \times 10^{-9}$
3	$4.17443 \times 10^{-14}$	$6.85496 \times 10^{-12}$	$6.84266 \times 10^{-11}$	$1.25370 \times 10^{-8}$
4	$6.94999 \times 10^{-14}$	$3.79083 \times 10^{-11}$	$2.27105 \times 10^{-11}$	$9.33570 \times 10^{-9}$
5	$1.68753 \times 10^{-14}$	$5.25091 \times 10^{-12}$	$3.79987 \times 10^{-11}$	$1.80700 \times 10^{-8}$
6	$7.88258 \times 10^{-14}$	$3.13860 \times 10^{-12}$	$1.37836 \times 10^{-11}$	$1.26610 \times 10^{-9}$
7	$7.06101 \times 10^{-14}$	$1.71214 \times 10^{-11}$	$2.49942 \times 10^{-11}$	$8.52693 \times 10^{-9}$
8	$7.10542 \times 10^{-14}$	$5.06177 \times 10^{-11}$	$9.66283 \times 10^{-12}$	$1.26225 \times 10^{-8}$
9	$7.14983 \times 10^{-14}$	$2.24131 \times 10^{-12}$	$6.15232 \times 10^{-11}$	$1.46419 \times 10^{-8}$
10	$1.30784 \times 10^{-13}$	$7.62514 \times 10^{-11}$	$2.24332 \times 10^{-12}$	$8.83903 \times 10^{-9}$

Tablo 4.10. (4.30) denkleminin MG4, MG6, RK4 ve RK6 ile  $h = \frac{1}{100}$  adım aralığı ve  $(0,10)$  zaman aralığında  $x'(t)$  için çözümlerinin mutlak hataları

t	MG6	RK6	MG4	RK4
0	0	$1.04185 \times 10^{-19}$	0	$1.40607 \times 10^{-19}$
1	$1.27676 \times 10^{-14}$	$4.02728 \times 10^{-10}$	$9.14421 \times 10^{-11}$	$5.18145 \times 10^{-9}$
2	$2.08722 \times 10^{-14}$	$1.04908 \times 10^{-9}$	$1.48289 \times 10^{-10}$	$9.93998 \times 10^{-9}$
3	$2.59792 \times 10^{-14}$	$3.33644 \times 10^{-10}$	$3.81505 \times 10^{-12}$	$8.08645 \times 10^{-9}$
4	$5.28466 \times 10^{-14}$	$3.43485 \times 10^{-9}$	$1.78761 \times 10^{-10}$	$1.40897 \times 10^{-8}$
5	$8.08242 \times 10^{-14}$	$3.50086 \times 10^{-9}$	$8.55518 \times 10^{-11}$	$2.01675 \times 10^{-8}$
6	$1.44884 \times 10^{-14}$	$1.30772 \times 10^{-9}$	$7.11003 \times 10^{-11}$	$1.69327 \times 10^{-8}$
7	$6.25056 \times 10^{-14}$	$8.70735 \times 10^{-11}$	$1.29393 \times 10^{-10}$	$2.47309 \times 10^{-9}$
8	$8.30447 \times 10^{-14}$	$3.60633 \times 10^{-9}$	$8.44124 \times 10^{-11}$	$9.67436 \times 10^{-10}$
9	$6.61693 \times 10^{-14}$	$3.32692 \times 10^{-9}$	$9.43414 \times 10^{-11}$	$9.79301 \times 10^{-9}$
10	$5.06262 \times 10^{-14}$	$4.98793 \times 10^{-10}$	$1.69289 \times 10^{-10}$	$3.34443 \times 10^{-8}$

Örnek 4.6.

$x(0) = 0, x'(0) = 0$  başlangıç koşullarıyla verilen,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0.5 \cos t, \quad (4.34)$$

sönümsüz zorlanmış hareket denklemini ele alalım [52].

$$x = x_1, \quad x'_1 = x_2, \quad (4.35)$$

dönüşümü ile (4.34) denklemi,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0.5 \cos t \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (4.36)$$

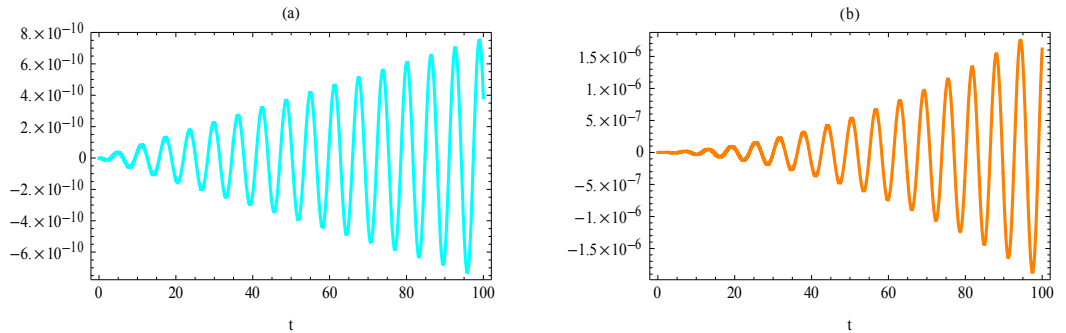
Lie tipi matris denklemi (4.36) şeklinde yazılabilir.

$$\text{Burada } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0.5 \cos t \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ dersek (4.34) denklemi}$$

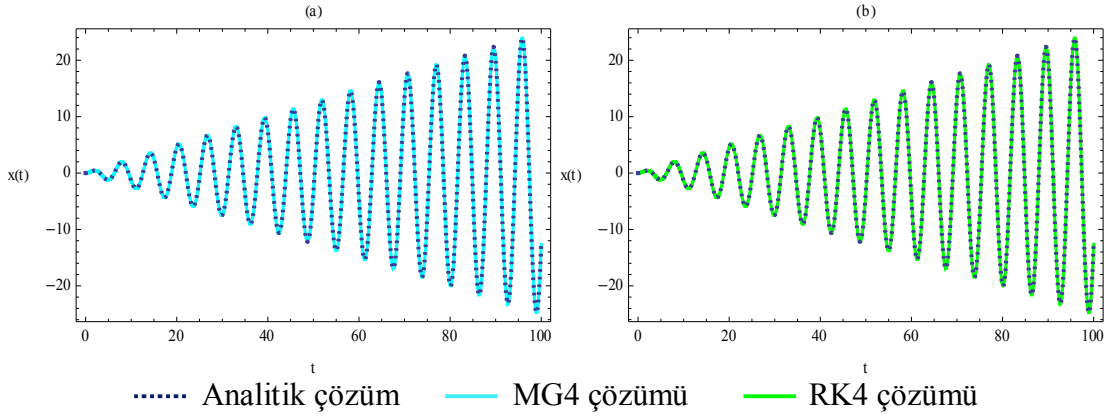
$$X' = AX, \quad (4.37)$$

Lie tipi lineer diferansiyel denkleme dönüşür. (4.37) lineer denklemi MG4, RK4, MG6, RK6 ile  $h = \frac{1}{100}$  adım aralığı ve (0,100) zaman aralığı için çözümler [52] de verilen kesin analitik çözüm ile karşılaştırılmıştır.

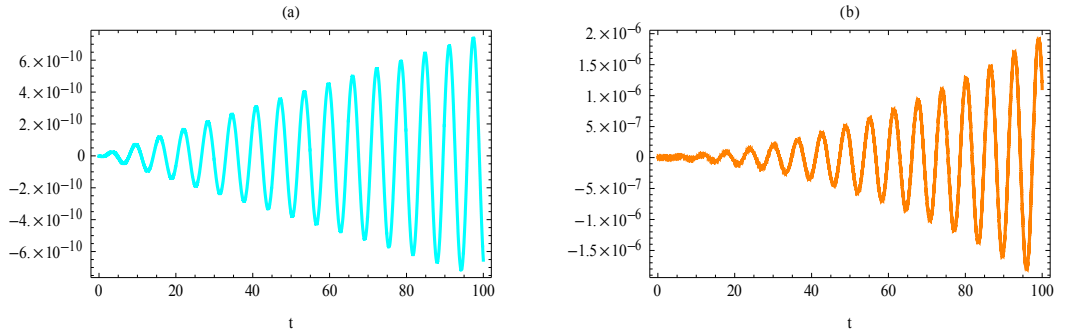
(4.34) denkleminin analitik kesin çözümü  $x(t)$ , bu çözümün zamana göre türevi  $x'(t)$  ile MG4, RK4, MG6, RK6 çözümlerinin grafikleri ve MG4, RK4, MG6, RK6 çözümleri için hata grafikleri Şekil 4.10-17. de verilmiştir.  $x(t)$  ve  $x'(t)$  için elde edilen sonuçlar ve mutlak hataları Tablo 4.11-20. de verilmiştir.



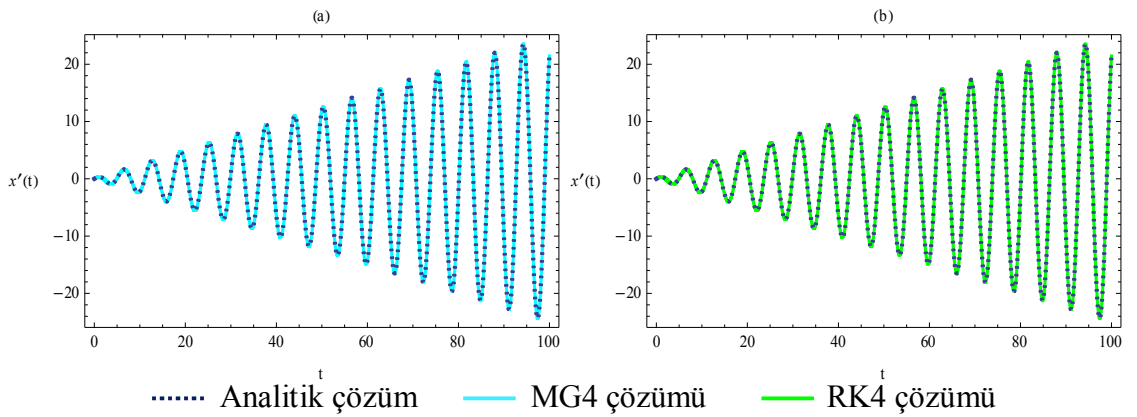
Şekil 4.10. (4.30) denkleminin  $x(t)$  için (a) MG4, (b) RK4 hata grafikleri



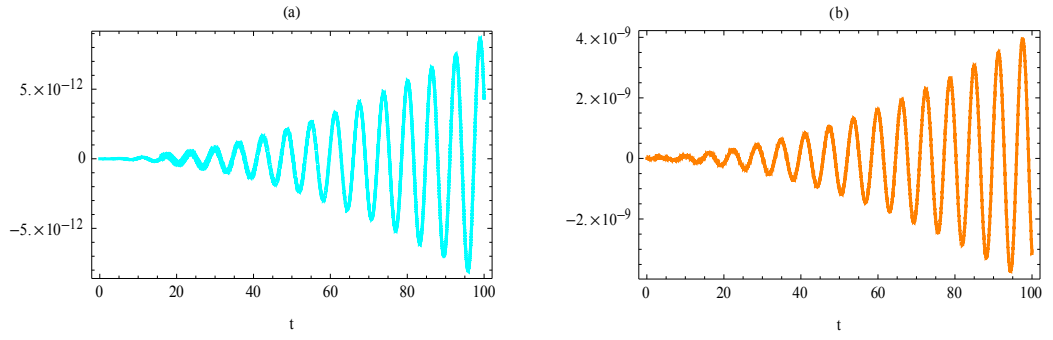
Şekil 4.11. (4.30) denkleminin  $x(t)$  için (a) MG4, (b) RK4 ve analitik çözüm grafikleri



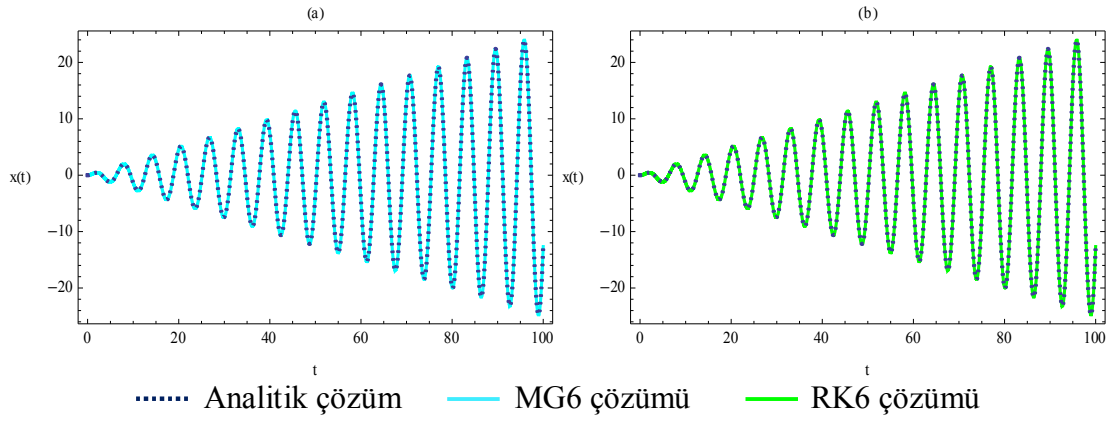
Şekil 4.12. (4.30) denkleminin  $x'(t)$  için (a) MG4, (b) RK4 hata grafikleri



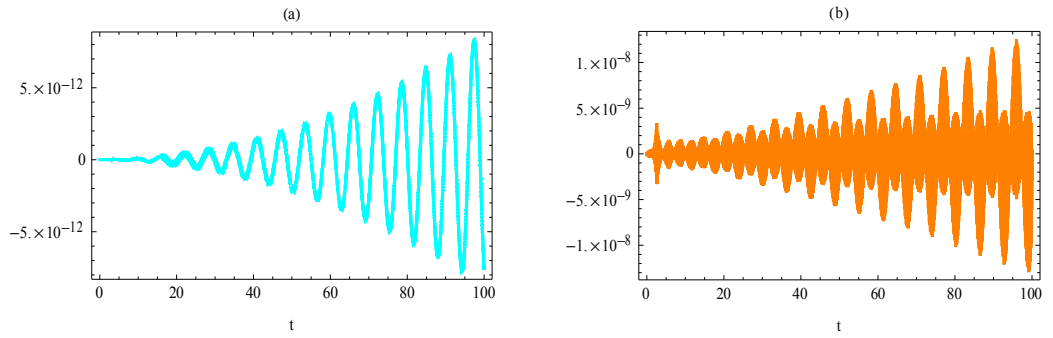
Şekil 4.13. (4.30) denkleminin  $x'(t)$  için (a) MG4, (b) RK4 ve analitik çözüm grafiği



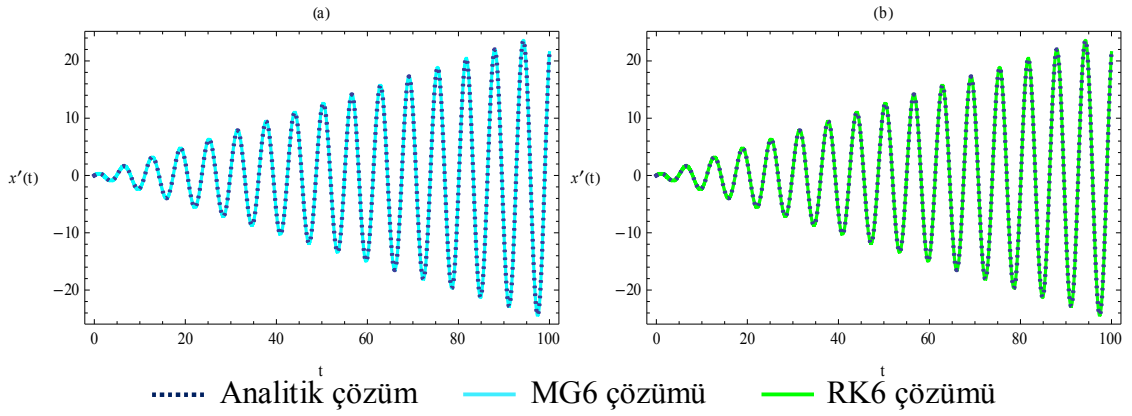
Şekil 4.14. (4.34) denkleminin  $x(t)$  için (a) MG6, (b) RK6 hata grafikleri



Şekil 4.15. (4.34) denkleminin  $x(t)$  için (a) MG6, (b) RK6 ve analitik çözüm grafikleri



Şekil 4.16. (4.34) denkleminin  $x'(t)$  için (a) MG6, (b) RK6 hata grafikleri



Şekil 4.17. (4.34) denkleminin  $x'(t)$  için (a) MG6, (b) RK6 ve analitik çözüm grafikleri

Tablo 4.11. (4.34) denkleminin MG4 ile  $h = \frac{1}{100}$  adım aralığı ve (0,10) zaman aralığında  $x(t)$  için çözümü ile kesin analitik çözümünün karşılaştırılması

t	Analitik çözüm [52]	MG4 çözümü	Mutlak hata
0	0	0	0
1	0.210367746201974	0.210367746195660	$6.31398 \times 10^{-12}$
2	0.454648713412840	0.454648713399192	$1.36483 \times 10^{-11}$
3	0.105840006044900	0.105840006041720	$3.17973 \times 10^{-12}$
4	-0.756802495307928	-0.756802495285208	$2.27196 \times 10^{-11}$
5	-1.198655343328923	-1.198655343292929	$3.59939 \times 10^{-11}$
6	-0.419123247298388	-0.419123247285797	$1.25912 \times 10^{-11}$
7	1.149726547757880	1.149726547723353	$3.45277 \times 10^{-11}$
8	1.978716493246763	1.978716493187326	$5.94373 \times 10^{-11}$
9	0.927266591793952	0.927266591766087	$2.78653 \times 10^{-11}$
10	-1.360052777223424	-1.360052777182569	$4.08553 \times 10^{-11}$

Tablo 4.12. (4.34) denkleminin RK4 ile  $h = \frac{1}{100}$  adım aralığı ve (0,10) zaman aralığında  $x(t)$  için çözümü ile kesin analitik çözümünün karşılaştırılması

t	Analitik çözüm [51]	RK4 çözümü	Mutlak hata
0	0	$1.75259 \times 10^{-23}$	$1.75259 \times 10^{-23}$
1	0.210367746201974	0.210367744329572	$1.87240 \times 10^{-9}$
2	0.454648713412840	0.454648710692657	$2.72018 \times 10^{-9}$
3	0.105840006044900	0.105840008380526	$2.33563 \times 10^{-9}$
4	-0.756802495307928	-0.756802486095031	$9.21290 \times 10^{-9}$
5	-1.198655343328923	-1.198655337051734	$6.27719 \times 10^{-9}$
6	-0.419123247298388	-0.419123255196930	$7.89854 \times 10^{-9}$
7	1.149726547757880	1.149726528525150	$1.92327 \times 10^{-8}$
8	1.978716493246763	1.978716482628974	$1.06178 \times 10^{-8}$
9	0.927266591793952	0.927266606801667	$1.50077 \times 10^{-8}$
10	-1.360052777223424	-1.360052744723619	$3.24998 \times 10^{-8}$

Tablo 4.13. (4.34) denkleminin MG4 ile  $h = \frac{1}{100}$  adım aralığı ve (0,10) zaman aralığında  $x'(t)$  için çözümü ile kesin analitik çözümünün karşılaştırılması

t	Analitik çözüm [52]	MG4 çözümü	Mutlak hata
0	0	0	0
1	0.345443322669009	0.345443322664448	$4.56063 \times 10^{-12}$
2	0.019250938432849	0.019250938438545	$5.69621 \times 10^{-12}$
3	-0.707214370435367	-0.707214370413163	$2.22036 \times 10^{-11}$
4	-0.842844244690593	-0.842844244670509	$2.00843 \times 10^{-11}$
5	0.114846663163248	0.114846663153187	$1.00612 \times 10^{-11}$
6	1.370401555425817	1.370401555382737	$4.30804 \times 10^{-11}$
7	1.483575594780480	1.483575594740449	$4.00304 \times 10^{-11}$
8	-0.043660505961381	-0.043660505953252	$8.12926 \times 10^{-12}$
9	-1.947013467930084	-1.947013467868753	$6.13301 \times 10^{-11}$
10	-2.233684100413473	-2.233684100350112	$6.33613 \times 10^{-11}$

Tablo 4.14. (4.34) denkleminin RK4 ile  $h = \frac{1}{100}$  adım aralığı ve (0,10) zaman aralığında  $x'(t)$  için çözümü ile kesin analitik çözümünün karşılaştırılması

t	Analitik çözüm [52]	RK4 çözümü	Mutlak hata
0	0	$1.16996 \times 10^{-20}$	$1.16996 \times 10^{-20}$
1	0.345443322669009	0.345443318227632	$4.44138 \times 10^{-9}$
2	0.019250938432849	0.019250941559083	$3.12623 \times 10^{-9}$
3	-0.707214370435367	-0.707214362702374	$7.73299 \times 10^{-9}$
4	-0.842844244690593	-0.842844238931988	$5.75861 \times 10^{-9}$
5	0.114846663163248	0.114846653001235	$1.01620 \times 10^{-8}$
6	1.370401555425817	1.370401536573017	$1.88528 \times 10^{-8}$
7	1.483575594780480	1.483575593825043	$9.55437 \times 10^{-10}$
8	-0.043660505961381	-0.043660485039647	$2.09217 \times 10^{-8}$
9	-1.947013467930084	-1.947013441188060	$2.67420 \times 10^{-8}$
10	-2.233684100413473	-2.233684093035864	$7.37761 \times 10^{-9}$

Tablo 4.15. (4.34) denkleminin MG6 ile  $h = \frac{1}{100}$  adım aralığı ve (0,10) zaman aralığında  $x(t)$  için çözümü ile kesin analitik çözümünün karşılaştırılması

t	Analitik çözüm [52]	MG6 çözümü	Mutlak hata
0	0	0	0
1	0.210367746201974	0.210367746201973	$1.02696 \times 10^{-15}$
2	0.454648713412840	0.454648713412835	$4.88498 \times 10^{-15}$
3	0.105840006044900	0.105840006044896	$3.95517 \times 10^{-15}$
4	-0.756802495307928	-0.756802495307919	$9.21485 \times 10^{-15}$
5	-1.198655343328923	-1.198655343328899	$2.39808 \times 10^{-14}$
6	-0.419123247298388	-0.419123247298375	$1.31006 \times 10^{-14}$
7	1.149726547757880	1.149726547757854	$2.66454 \times 10^{-14}$
8	1.978716493246763	1.978716493246705	$5.81757 \times 10^{-14}$
9	0.927266591793952	0.927266591793916	$3.63043 \times 10^{-14}$
10	-1.360052777223424	-1.360052777223381	$4.32987 \times 10^{-14}$

Tablo 4.16. (4.34) denkleminin RK6 ile  $h = \frac{1}{100}$  adım aralığı ve (0,10) zaman aralığında  $x(t)$  için çözümü ile kesin analitik çözümünün karşılaştırılması

t	Analitik çözüm [52]	RK6 çözümü	Mutlak hata
0	0	$1.62334 \times 10^{-23}$	$1.62334 \times 10^{-23}$
1	0.210367746201974	0.210367746203788	$1.81477 \times 10^{-12}$
2	0.454648713412840	0.454648713414681	$1.84058 \times 10^{-12}$
3	0.105840006044900	0.105840006037642	$7.25758 \times 10^{-12}$
4	-0.756802495307928	-0.756802495338657	$3.07290 \times 10^{-11}$
5	-1.198655343328923	-1.198655343336124	$7.20091 \times 10^{-12}$
6	-0.419123247298388	-0.419123247245486	$5.29026 \times 10^{-11}$
7	1.149726547757880	1.149726547816170	$5.82896 \times 10^{-11}$
8	1.978716493246763	1.978716493262211	$1.54483 \times 10^{-11}$
9	0.927266591793952	0.927266591742926	$5.10261 \times 10^{-11}$
10	-1.360052777223424	-1.360052777313749	$9.03253 \times 10^{-11}$

Tablo 4.17. (4.34) denkleminin MG6 ile  $h = \frac{1}{100}$  adım aralığı ve (0,10) zaman aralığında  $x'(t)$  için çözümü ile kesin analitik çözümünün karşılaştırılması

t	Analitik çözüm [52]	MG6 çözümü	Mutlak hata
0	0	0	0
1	0.34544332266900	0.34544332266900	$2.66453 \times 10^{-15}$
2	0.01925093843284	0.01925093843284	$2.99066 \times 10^{-15}$
3	-0.70721437043536	-0.70721437043536	$7.21644 \times 10^{-15}$
4	-0.84284424469059	-0.84284424469057	$1.64313 \times 10^{-14}$
5	0.11484666316324	0.11484666316325	$3.92741 \times 10^{-15}$
6	1.37040155542581	1.37040155542579	$2.68673 \times 10^{-14}$
7	1.48357559478048	1.48357559478043	$4.30766 \times 10^{-14}$
8	-0.04366050596138	-0.04366050596138	$8.32667 \times 10^{-15}$
9	-1.94701346793008	-1.94701346793002	$5.79536 \times 10^{-14}$
10	-2.23368410041347	-2.23368410041338	$8.52651 \times 10^{-14}$



Tablo 4.18. (4.34) denkleminin RK6 ile  $h = \frac{1}{100}$  adım aralığı ve (0,10) zaman aralığında  $x'(t)$  için çözümü ile kesin analitik çözümünün karşılaştırılması

t	Analitik çözüm [52]	RK6 çözümü	Mutlak hata
0	0	$4.76456 \times 10^{-21}$	$4.76456 \times 10^{-21}$
1	0.34544332266900	0.34544332266260	$6.40809 \times 10^{-12}$
2	0.01925093843284	0.01925093781073	$6.22117 \times 10^{-10}$
3	-0.70721437043536	-0.70721437060022	$1.64857 \times 10^{-10}$
4	-0.84284424469059	-0.84284424461064	$7.99509 \times 10^{-11}$
5	0.11484666316324	0.11484666422816	$1.06491 \times 10^{-9}$
6	1.37040155542581	1.37040155635556	$9.29750 \times 10^{-10}$
7	1.48357559478048	1.48357559477285	$7.62079 \times 10^{-12}$
8	-0.04366050596138	-0.04366050503140	$9.29978 \times 10^{-10}$
9	-1.94701346793008	-1.94701346933480	$1.40471 \times 10^{-10}$
10	-2.23368410041347	-2.23368410042076	$7.29638 \times 10^{-10}$

Tablo 4.19. (4.34) denkleminin MG4, MG6, RK4 ve RK6 ile  $h = \frac{1}{100}$  adım aralığı ve (0,10) zaman aralığında  $x(t)$  için çözümlerinin hatalarının karşılaştırılması

t	MG6	RK6	MG4	RK4
0	0	$1.62334 \times 10^{-23}$	0	$1.75259 \times 10^{-23}$
1	$1.02696 \times 10^{-15}$	$1.81477 \times 10^{-12}$	$6.31398 \times 10^{-12}$	$1.87240 \times 10^{-9}$
2	$4.88498 \times 10^{-15}$	$1.84058 \times 10^{-12}$	$1.36483 \times 10^{-11}$	$2.72018 \times 10^{-9}$
3	$3.95517 \times 10^{-15}$	$7.25758 \times 10^{-12}$	$3.17973 \times 10^{-12}$	$2.33563 \times 10^{-9}$
4	$9.21485 \times 10^{-15}$	$3.07290 \times 10^{-11}$	$2.27196 \times 10^{-11}$	$9.2129 \times 10^{-9}$
5	$2.39808 \times 10^{-14}$	$7.20091 \times 10^{-12}$	$3.59939 \times 10^{-11}$	$6.27719 \times 10^{-9}$
6	$1.31006 \times 10^{-14}$	$5.29026 \times 10^{-11}$	$1.25912 \times 10^{-11}$	$7.89854 \times 10^{-9}$
7	$2.66454 \times 10^{-14}$	$5.82896 \times 10^{-11}$	$3.45277 \times 10^{-11}$	$1.92327 \times 10^{-8}$
8	$5.81757 \times 10^{-14}$	$1.54483 \times 10^{-11}$	$5.94373 \times 10^{-11}$	$1.06178 \times 10^{-8}$
9	$3.63043 \times 10^{-14}$	$5.10261 \times 10^{-11}$	$2.78653 \times 10^{-11}$	$1.50077 \times 10^{-8}$
10	$4.32987 \times 10^{-14}$	$9.03253 \times 10^{-11}$	$4.08553 \times 10^{-11}$	$3.24998 \times 10^{-8}$

Tablo 4.20. (4.34) denkleminin MG4, MG6, RK4 ve RK6 ile  $h = \frac{1}{100}$  adım aralığı ve  $(0,10)$  zaman aralığında  $x'(t)$  için çözümlerinin hatalarının karşılaştırılması

t	MG6	RK6	MG4	RK4
0	0	$4.76456 \times 10^{-21}$	0	$1.16996 \times 10^{-20}$
1	$2.66453 \times 10^{-15}$	$6.40809 \times 10^{-12}$	$4.56063 \times 10^{-12}$	$4.44138 \times 10^{-9}$
2	$2.99066 \times 10^{-15}$	$6.22117 \times 10^{-10}$	$5.69621 \times 10^{-12}$	$3.12623 \times 10^{-9}$
3	$7.21644 \times 10^{-15}$	$1.64857 \times 10^{-10}$	$2.22036 \times 10^{-11}$	$7.73299 \times 10^{-9}$
4	$1.64313 \times 10^{-14}$	$7.99509 \times 10^{-11}$	$2.00843 \times 10^{-11}$	$5.75861 \times 10^{-9}$
5	$3.92741 \times 10^{-15}$	$1.06491 \times 10^{-9}$	$1.00612 \times 10^{-11}$	$1.01620 \times 10^{-8}$
6	$2.68673 \times 10^{-14}$	$9.29750 \times 10^{-10}$	$4.30804 \times 10^{-11}$	$1.88528 \times 10^{-8}$
7	$4.30766 \times 10^{-14}$	$7.62079 \times 10^{-12}$	$4.00304 \times 10^{-11}$	$9.55437 \times 10^{-10}$
8	$8.32667 \times 10^{-15}$	$9.29978 \times 10^{-10}$	$8.12926 \times 10^{-12}$	$2.09217 \times 10^{-8}$
9	$5.79536 \times 10^{-14}$	$1.40471 \times 10^{-10}$	$6.13301 \times 10^{-11}$	$2.67420 \times 10^{-8}$
10	$8.52651 \times 10^{-14}$	$7.29638 \times 10^{-10}$	$6.33613 \times 10^{-11}$	$7.37761 \times 10^{-9}$

## 4.2. Van Der Pol Denklemleri

Fizik ve mühendislik gibi uygulamalı bilimlerin birçoğunda karşımıza lineer olmayan diferansiyel denklemler çıkmaktadır. Mühendislikte birçok karmaşık lineer olmayan problemler çoklu serbestlik dereceli (Multi Degree of Freedom MDOF) dinamik sistemlerle tanımlanabilir. Bu bölümde MDOF bağlantılı Van der Pol denklem sistemleri ile zorlanmış Van der Pol denklemi ele alınacaktır.

### 4.2.1. 2DOF Bağlantılı (*Coupled*) Van Der Pol Denklem Sistemi

Bu bölümde (4.38) denklem sistemiyle verilen 2 serbestlik dereceli (2DOF) lineer olmayan bağlantılı Van der Pol osilatörü ele alınacaktır [53].

$$\begin{aligned}
 \ddot{x}_1 + \alpha_1(x_1^2 - 1)\dot{x}_1 + \beta_1 x_1 + \delta_1 x_1^3 + \gamma_1(x_1^3 - x_2^3) &= 0, \\
 \ddot{x}_2 + \alpha_2(x_2^2 - 1)\dot{x}_2 + \beta_2 x_2 + \delta_2 x_2^3 + \gamma_2(x_2^3 - x_1^3) &= 0, \\
 x_1(0) = 2, \quad \dot{x}_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 1, \quad \dot{x}_2(0) = 0.
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

(4.38) denklem sisteminde, nokta  $t$  ye göre türevi,  $\alpha_i, \delta_i$  ve  $\gamma_i$  ( $i=1,2$ ) fiziksel parametreleri,  $x_1(t)$  ve  $x_2(t)$  de bilinmeyen fonksiyonları göstermektedir.

(4.38) denklem sistemi,

$$x_1 = p, \quad \dot{p} = p_1, \quad x_2 = q, \quad \dot{q} = q_1, \quad (4.39)$$

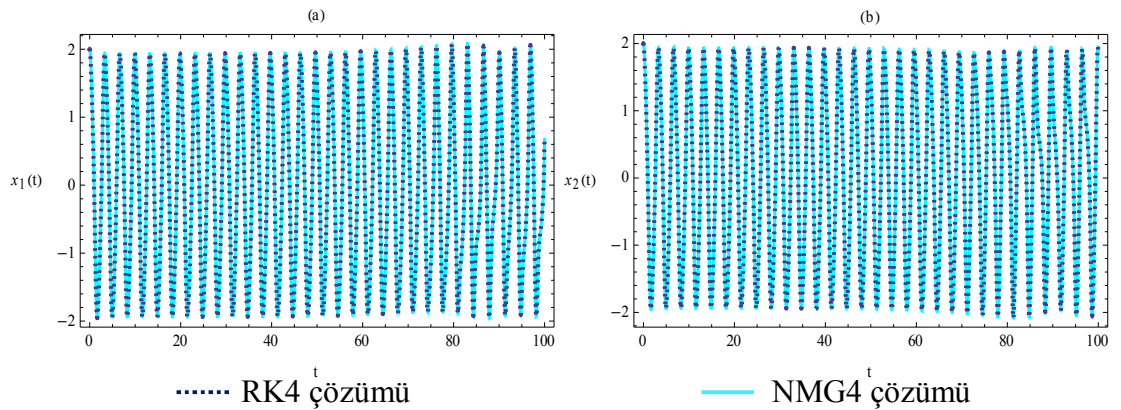
dönüşümü ile

$$X' = AX, \quad (4.40)$$

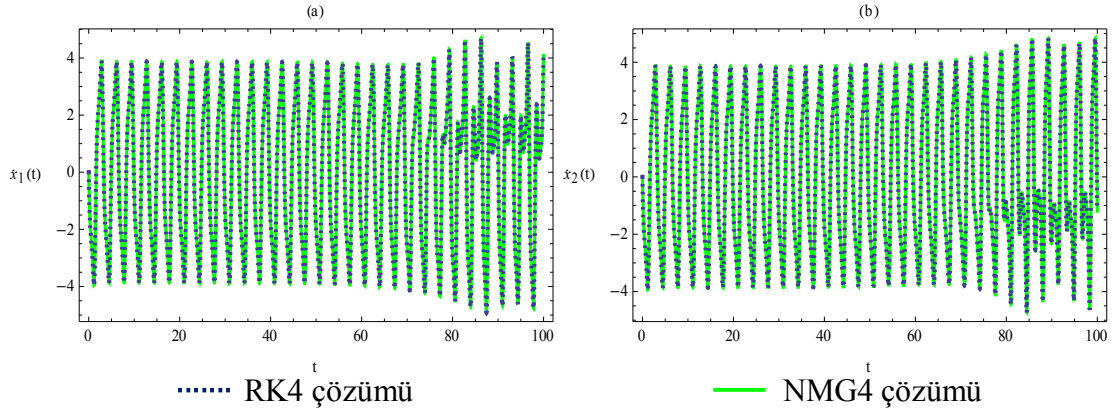
Lie tipi matris denklemi (4.40) şeklinde yazılabilir, burada

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta_1 - (\delta_1 + \gamma_1)p^2 & \alpha_1(1-p^2) & \gamma_1q^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \gamma_2p^2 & 0 & -\beta_2 - (\delta_2 + \gamma_2)q^2 & \alpha_2(1-q^2) \end{bmatrix} \text{ ve } X = \begin{bmatrix} p \\ p_1 \\ q \\ q_1 \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

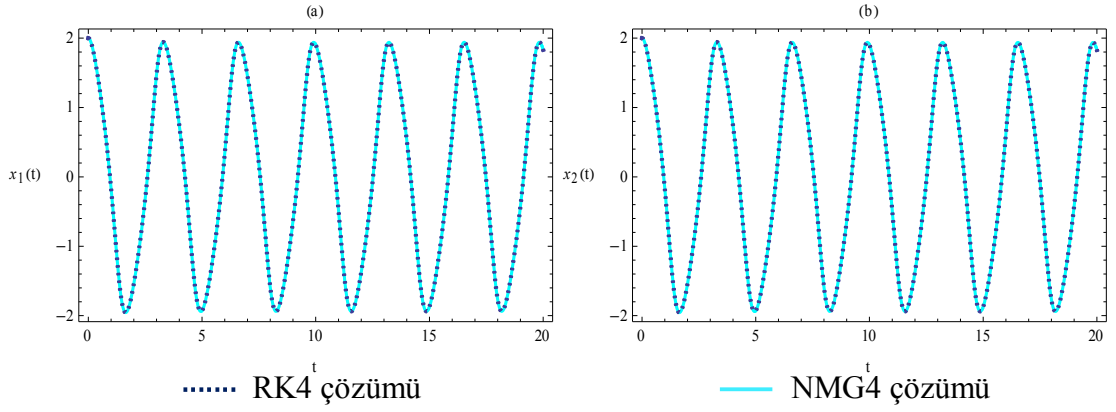
(4.40) diferansiyel denklemi 4. mertebe Magnus seri açılımı metodu NMG4 ve 4. mertebe Runge Kutta metodu RK4 ile  $h = 1/100$ ,  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 99/100$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ ,  $\delta_1 = \delta_2 = 1$ ,  $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ , değerleri [53] ve (0,100) zaman aralığı için çözümler (0,10) zaman aralığı için NMG4 ve RK4 çözümleri Tablo 4.21-24. te karşılaştırılmıştır. (4.38) denklemdeki  $x_1, x_2$  ve  $\dot{x}_1, \dot{x}_2$  fonksiyonlarının NMG4 ve RK4 ile  $h = 1/100$ ,  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 99/100$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ ,  $\delta_1 = \delta_2 = 1$ ,  $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$  değerleri için, (0,100) ve (0,20) zaman aralığı için yaklaşık çözümlerinin grafikleri Şekil 4.18-21. de verilmiştir.



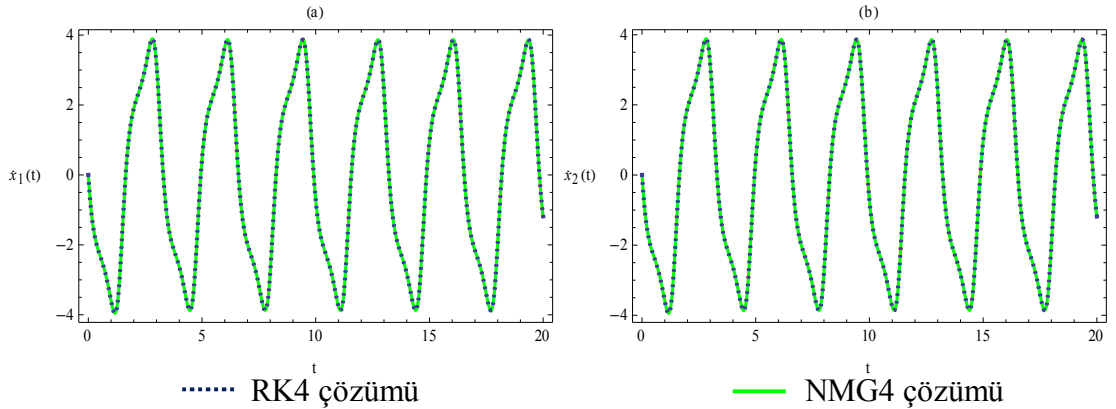
Şekil 4.18. (4.38) denkleminin (a)  $x_1(t)$ , (b)  $x_2(t)$  çözümlerinin grafikleri



Şekil 4.19. (4.38) denkleminin (a)  $x_1(t)$ , (b)  $x_2(t)$  çözümlerinin grafikleri



Şekil 4.20. (4.38) denkleminin (a)  $x_1(t)$ , (b)  $x_2(t)$  çözümlerinin grafikleri



Şekil 4.21. (4.38) denkleminin (a)  $x_1(t)$ , (b)  $x_2(t)$  çözümlerinin grafikleri

Tablo 4.21. (4.38) denkleminin NMG4 ve RK4 ile  $h = 1/100$ ,  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 99/100$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ ,  $\delta_1 = \delta_2 = 1$ ,  $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$  değerleri ve (0,10) zaman aralığı için  $x_1$  çözümleri

t	NMG4 çözümü	RK4 çözümü	Mutlak fark
0	2	2	0
1	-0.1648955010	-0.1648955130	$1.19160 \times 10^{-8}$
2	-1.5408697127	-1.5408697086	$4.10584 \times 10^{-9}$
3	1.4751189728	1.4751190062	$3.33870 \times 10^{-8}$
4	0.7430103871	0.743010357	$2.99659 \times 10^{-8}$
5	-1.9271567202	-1.9271567222	$1.99601 \times 10^{-9}$
6	0.3380038422	0.3380039180	$7.57802 \times 10^{-8}$
7	1.4497298714	1.4497298321	$3.93304 \times 10^{-8}$
8	-1.5901216686	-1.5901217510	$8.23857 \times 10^{-8}$
9	-0.6387168734	-0.6387167908	$8.25884 \times 10^{-8}$
10	1.9041020562	1.9041020404	$1.58300 \times 10^{-8}$

Tablo 4.22. (4.38) denkleminin NMG4 ve RK4 ile  $h = 1/100$ ,  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 99/100$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ ,  $\delta_1 = \delta_2 = 1$ ,  $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$  değerleri ve (0,10) zaman aralığı için  $\dot{x}_1$  çözümleri

t	NMG4 çözümü	RK4 çözümü	Mutlak fark
0	0	$5.94617 \times 10^{-19}$	$5.94617 \times 10^{-19}$
1	-3.5948521693	-3.5948521954	$2.60923 \times 10^{-8}$
2	1.9070666722	1.9070666967	$2.45341 \times 10^{-8}$
3	3.1537580336	3.1537579459	$8.77193 \times 10^{-8}$
4	-2.6289280103	-2.628928119	$1.09514 \times 10^{-7}$
5	0.4501494173	0.4501495511	$1.33799 \times 10^{-7}$
6	3.6618123027	3.6618123854	$8.27295 \times 10^{-8}$
7	-1.9884658485	-1.9884659172	$6.87112 \times 10^{-8}$
8	-2.7702301758	-2.7702299033	$2.72532 \times 10^{-7}$
9	2.7147661462	2.7147662599	$1.13725 \times 10^{-7}$
10	-0.7277608055	-0.7277610569	$2.51313 \times 10^{-7}$

Tablo 4.23. (4.38) denkleminin NMG4 ve RK4 ile  $h = 1/100$ ,  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 99/100$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ ,  $\delta_1 = \delta_2 = 1$ ,  $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$  değerleri ve (0,10) zaman aralığı için  $x_2$  çözümleri

t	NMG4 çözümü	RK4 çözümü	Mutlak fark
0	2	2	0
1	-0.1672656590	-0.1672656706	$1.16009 \times 10^{-8}$
2	-1.5412978029	-1.5412977991	$3.86115 \times 10^{-9}$
3	1.4755578147	1.4755578480	$3.33045 \times 10^{-8}$
4	0.7411871616	0.7411871318	$2.98175 \times 10^{-8}$
5	-1.9278822732	-1.9278822754	$2.24559 \times 10^{-9}$
6	0.3417555213	0.3417555971	$7.57985 \times 10^{-8}$
7	1.4491352680	1.4491352286	$3.93991 \times 10^{-8}$
8	-1.5879401837	-1.5879402656	$8.18417 \times 10^{-8}$
9	-0.6357810249	-0.6357809421	$8.28019 \times 10^{-8}$
10	1.9034232222	1.9034232062	$1.60113 \times 10^{-8}$

Tablo 4.24. (4.38) denkleminin NMG4 ve RK4 ile  $h = 1/100$ ,  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 99/100$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ ,  $\delta_1 = \delta_2 = 1$ ,  $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$  değerleri ve (0,10) zaman aralığı için  $\dot{x}_2$  çözümleri

t	NMG4 çözümü	RK4 çözümü	Mutlak fark
0	0	$9.92723 \times 10^{-19}$	$9.92723 \times 10^{-19}$
1	-3.5891585690	-3.5891585942	$2.51210 \times 10^{-8}$
2	1.9139307563	1.9139307811	$2.47788 \times 10^{-8}$
3	3.1416710327	3.1416709466	$8.60941 \times 10^{-8}$
4	-2.6320148147	-2.6320149236	$1.08885 \times 10^{-7}$
5	0.4419568728	0.4419570060	$1.33278 \times 10^{-7}$
6	3.6594863919	3.6594864738	$8.19438 \times 10^{-8}$
7	-1.9918293639	-1.9918294322	$6.83014 \times 10^{-8}$
8	-2.7706178877	-2.7706176207	$2.66933 \times 10^{-7}$
9	2.7223934307	2.7223935452	$1.14515 \times 10^{-7}$
10	-0.7257530997	-0.7257533518	$2.52055 \times 10^{-7}$

## 4.2.2. 3DOF Bağlantılı Van Der Pol Denklem Sistemi

Bu bölümde (4.41) denklem sistemiyle verilen 3 serbestlik dereceli (3DOF) lineer olmayan bağlantılı Van der Pol Duffing osilatörü ele alınacaktır [54].

$$\begin{aligned}
 \ddot{x}_1 + \varepsilon(x_1^2 - 1)\dot{x}_1 + x_1 + \delta x_1^3 &= \varepsilon\mu(x_3 - x_1), \\
 \ddot{x}_2 + \varepsilon(x_2^2 - 1)\dot{x}_2 + x_2 + \delta x_2^3 &= \varepsilon\mu(x_3 - x_2), \\
 \ddot{x}_3 + \varepsilon(x_3^2 - 1)\dot{x}_3 + x_3 + \delta x_3^3 &= \varepsilon\mu(x_1 - x_3) + \varepsilon\mu(x_2 - x_3), \\
 x_1(0) = 2, \quad \dot{x}_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 1, \\
 \dot{x}_2(0) = 0, \quad x_3(0) = 3, \quad \dot{x}_3(0) = 0,
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

(4.41) denklem sisteminde, nokta  $t$  ye göre türevi,  $\varepsilon$ ,  $\delta$  ve  $\mu$  fiziksel parametreleri,  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  ve  $x_3(t)$  de bilinmeyen fonksiyonları göstermektedir.  $x_1(t)$  ve  $x_2(t)$  birbiri ile bağlantılı değil fakat  $x_1(t)$  ve  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$  ile bağlantılıdır.  $\delta = 0$  olması halinde (4.41) denklemi lineer olmayan bağlantılı Van der Pol osilatöre dönüşür.

$$x_1 = p, \quad \dot{p} = p_1, \quad x_2 = q, \quad \dot{q} = q_1, \quad x_3 = r, \quad \dot{r} = r_1, \tag{4.42}$$

dönüşümü ile (4.41) denklemi,

$$X' = AX, \tag{4.43}$$

Lie tipi matris denklemi (4.43) şeklinde yazılabilir, burada

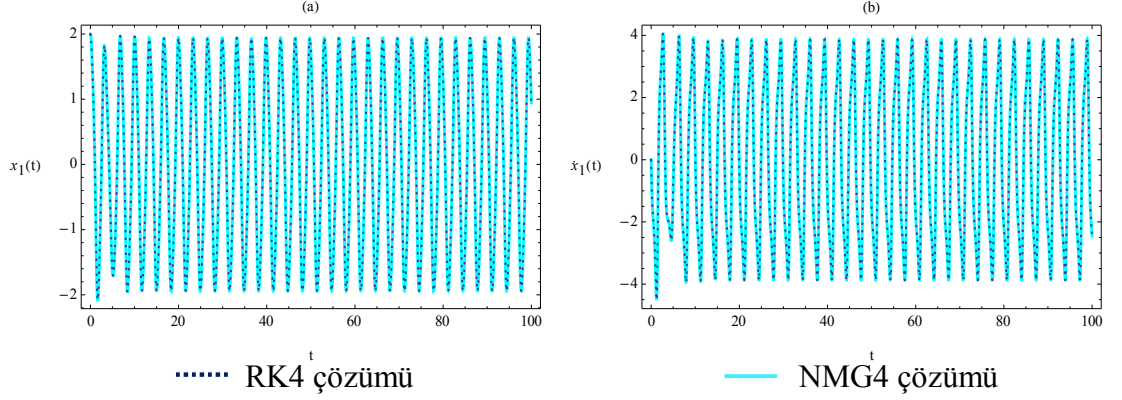
$$A = \begin{bmatrix}
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -1 - \varepsilon\mu - \delta p^2 & \varepsilon(1 - p^2) & 0 & 0 & \varepsilon\mu & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -1 - \varepsilon\mu - \delta q^2 & \varepsilon(1 - q^2) & \varepsilon\mu & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 \varepsilon\mu & 0 & \varepsilon\mu & 0 & -1 - 2\varepsilon\mu - \delta r^2 & \varepsilon(1 - r^2) & 0
 \end{bmatrix}$$

ve  $X = [p \ p_1 \ q \ q_1 \ r \ r_1]^T$  ve noktalar da  $t$  ye göre türevi göstermektedir.

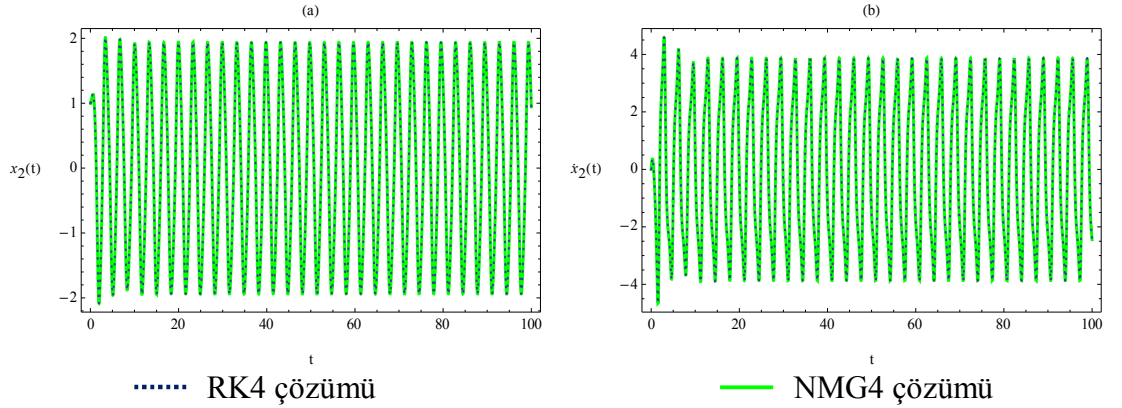
### 4.2.2.1. 3DOF Bağlantılı Van Der Pol Duffing Denklem Sistemi

$\delta \neq 0$  olması halinde (4.41) denklemi lineer olmayan bağlantılı Van der Pol Duffing osilatörüdür. (4.41) denkleminin matris gösterimi (4.43) lineer olmayan diferansiyel denklemi NMG4 ve RK4 ile  $h = \frac{1}{100}$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $\delta = 1$ ,  $\mu = 2$  değerleri [54] ve (0,100)

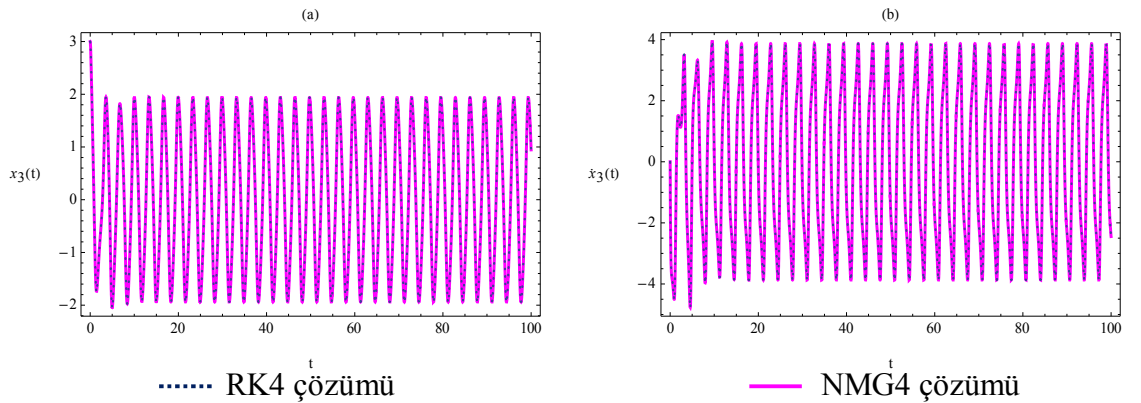
zaman aralığı için çözümler (0,10) zaman aralığı için NMG4 ve RK4 çözümleri Tablo 4.25-30. da karşılaştırılmış ve (0,100) ve (0,20) zaman aralıkları için yaklaşık çözümlerinin grafikleri Şekil 4.22-27. de verilmiştir.



Şekil 4.22. (4.41) denkleminin  $\varepsilon = 1, \delta = 1, \mu = 2$  için (a)  $x_1(t)$ , (b)  $\dot{x}_1(t)$  grafikleri

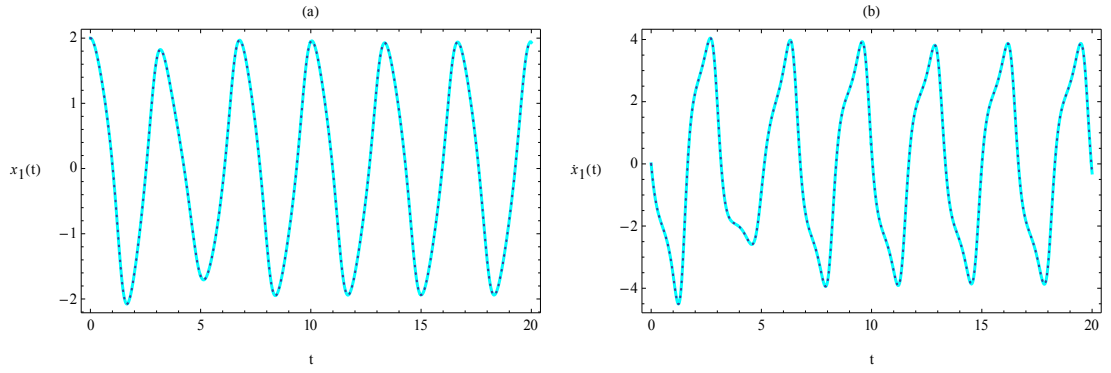


Şekil 4.23. (4.41) denkleminin  $\varepsilon = 1, \delta = 1, \mu = 2$  için (a)  $x_2(t)$ , (b)  $\dot{x}_2(t)$  grafikleri



Şekil 4.24. (4.41) denkleminin  $\varepsilon = 1, \delta = 1, \mu = 2$  için (a)  $x_3(t)$ , (b)  $\dot{x}_3(t)$  grafikleri

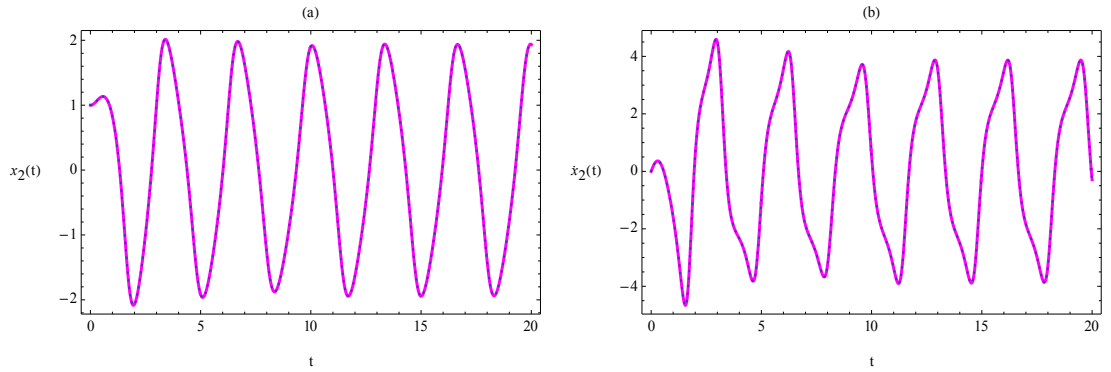




..... RK4 çözümü

— NMG4 çözümü

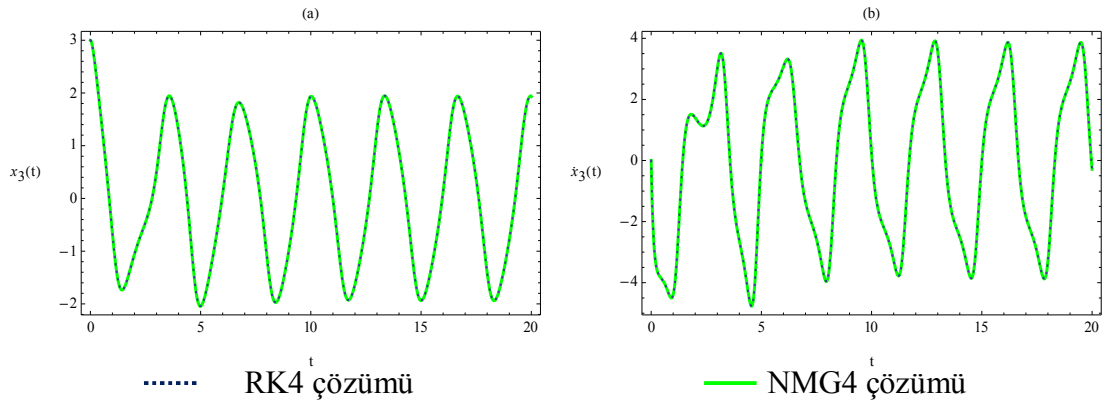
Şekil 4.25. (4.41) denkleminin  $\varepsilon = 1$ ,  $\delta = 1$ ,  $\mu = 2$  için (a)  $x_1(t)$ , (b)  $\dot{x}_1(t)$  grafikleri



..... RK4 çözümü

— NMG4 çözümü

Şekil 4.26. (4.41) denkleminin  $\varepsilon = 1$ ,  $\delta = 1$ ,  $\mu = 2$  için (a)  $x_2(t)$ , (b)  $\dot{x}_2(t)$  grafikleri



..... RK4 çözümü

— NMG4 çözümü

Şekil 4.27. (4.41) denkleminin  $\varepsilon = 1$ ,  $\delta = 1$ ,  $\mu = 2$  için (a)  $x_3(t)$ , (b)  $\dot{x}_3(t)$  grafikleri

Tablo 4.25. (4.41) denkleminin NMG4 ve RK4 ile  $h = \frac{1}{100}$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $\delta = 1$ ,  $\mu = 2$  değerleri ve (0,10) zaman aralığı için  $x_1$  çözümleri

t	NMG4 çözümlü	RK4 çözümlü	Mutlak fark
0	2	2	0
1	0.0540970981	0.0540970883	$9.73532 \times 10^{-9}$
2	-1.5936578518	-1.5936578417	$1.01054 \times 10^{-8}$
3	1.6632678618	1.6632767903	$4.18821 \times 10^{-8}$
4	0.5410547351	0.5410546931	$4.19912 \times 10^{-8}$
5	-1.6467699316	-1.6467699506	$1.90316 \times 10^{-8}$
6	-0.2487524984	-0.2487524330	$6.54276 \times 10^{-8}$
7	1.7563008491	1.7563008171	$3.19594 \times 10^{-8}$
8	-1.1358218429	-1.1358219601	$1.17219 \times 10^{-7}$
9	-0.9961845105	-0.9961844356	$7.48552 \times 10^{-8}$
10	1.9471366761	1.9471367013	$2.52437 \times 10^{-8}$

Tablo 4.26. (4.41) denkleminin NMG4 ve RK4 ile  $h = \frac{1}{100}$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $\delta = 1$ ,  $\mu = 2$  değerleri ve (0,10) zaman aralığı için  $\dot{x}_1$  çözümleri

t	NMG4 çözümlü	RK4 çözümlü	Mutlak fark
0	0	$-2.00747 \times 10^{-19}$	$2.00747 \times 10^{-19}$
1	-3.5927230493	-3.5927230902	$4.08326 \times 10^{-8}$
2	2.2977102868	2.2977103431	$5.62667 \times 10^{-8}$
3	1.9433621794	1.9433620223	$1.57062 \times 10^{-7}$
4	-2.0235742197	-2.0235742563	$3.65871 \times 10^{-8}$
5	-0.8997331153	-0.8997329585	$1.56789 \times 10^{-7}$
6	3.0172931031	3.0172931978	$9.47405 \times 10^{-8}$
7	-1.5814694292	-1.5814695519	$1.22689 \times 10^{-7}$
8	-3.7844688758	-3.7844687588	$1.17051 \times 10^{-7}$
9	2.4087072916	2.4087073729	$8.12572 \times 10^{-8}$
10	0.4386562714	0.4386558941	$3.77262 \times 10^{-7}$

Tablo 4.27. (4.41) denkleminin NMG4 ve RK4 ile  $h = \frac{1}{100}$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $\delta = 1$ ,  $\mu = 2$  değerleri ve (0,10) zaman aralığı için  $x_2$  çözümleri

t	NMG4 çözümü	RK4 çözümü	Mutlak fark
0	1	1	0
1	0.8245484292	0.8245484245	$4.64248 \times 10^{-9}$
2	-2.0692656478	-2.0692656534	$5.61035 \times 10^{-9}$
3	1.0074269746	1.0074270412	$6.65645 \times 10^{-8}$
4	1.0493055711	1.0493055315	$3.95182 \times 10^{-8}$
5	-1.9172560965	-1.9172561210	$2.44914 \times 10^{-8}$
6	-0.0580591933	-0.0580591129	$8.03997 \times 10^{-8}$
7	1.6221678149	1.6221677727	$4.21551 \times 10^{-8}$
8	-1.2717317856	-1.2717318950	$1.09442 \times 10^{-7}$
9	-0.9172783853	-0.9172783091	$7.61126 \times 10^{-8}$
10	1.9038695755	1.9038696011	$2.55723 \times 10^{-8}$

Tablo 4.28. (4.41) denkleminin NMG4 ve RK4 ile  $h = \frac{1}{100}$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $\delta = 1$ ,  $\mu = 2$  değerleri ve (0,10) zaman aralığı için  $\dot{x}_2$  çözümleri

t	NMG4 çözümü	RK4 çözümü	Mutlak fark
0	0	$2.41404 \times 10^{-20}$	$2.41404 \times 10^{-20}$
1	-1.5998589596	0.5796521629	$2.67877 \times 10^{-8}$
2	0.5796520538	4.5083702580	$1.09085 \times 10^{-7}$
3	4.5083702970	-2.3432339068	$3.90180 \times 10^{-8}$
4	-2.3432338625	-0.9888431643	$4.42709 \times 10^{-8}$
5	-0.9888433881	3.5508887018	$2.23843 \times 10^{-7}$
6	3.5508885856	-1.8706193243	$1.16169 \times 10^{-7}$
7	-1.8706192210	-3.2669462173	$1.03301 \times 10^{-7}$
8	-3.2669464083	2.2995840778	$1.91070 \times 10^{-7}$
9	2.2995840042	0.5319489454	$7.35382 \times 10^{-8}$
10	0.5319493041	0.5796521629	$3.58738 \times 10^{-7}$

Tablo 4.29. (4.41) denkleminin NMG4 ve RK4 ile  $h = \frac{1}{100}$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $\delta = 1$ ,  $\mu = 2$  değerleri ve (0,10) zaman aralığı için  $x_3$  çözümleri

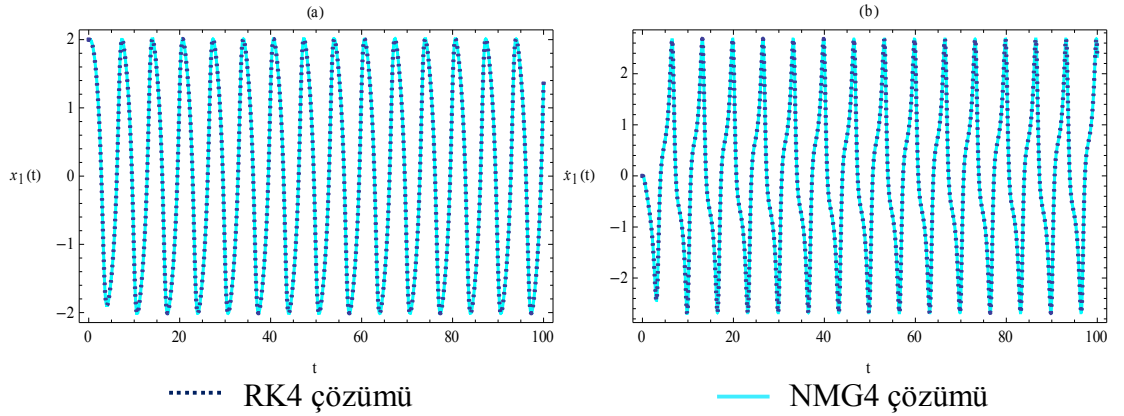
t	NMG4 çözümü	RK4 çözümü	Mutlak fark
0	3	3	0
1	-0.6668238758	-0.6668239170	$4.11916 \times 10^{-8}$
2	-1.0572682557	-1.0572682350	$2.06967 \times 10^{-8}$
3	0.5050405524	0.5050405826	$3.01300 \times 10^{-8}$
4	1.2826325531	1.2826325232	$2.98738 \times 10^{-8}$
5	-2.0412485027	-2.0412485172	$1.44451 \times 10^{-8}$
6	0.0868876737	0.0868877591	$8.53967 \times 10^{-8}$
7	1.6153089776	1.6153089406	$3.69700 \times 10^{-8}$
8	-1.0772731878	-1.0772732984	$1.10520 \times 10^{-7}$
9	-0.9897427238	-0.9897426475	$7.62730 \times 10^{-8}$
10	1.9310480252	1.9310480432	$1.79559 \times 10^{-8}$

Tablo 4.30. (4.41) denkleminin NMG4 ve RK4 ile  $h = \frac{1}{100}$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $\delta = 1$ ,  $\mu = 2$  değerleri ve (0,10) zaman aralığı için  $\dot{x}_3$  çözümleri

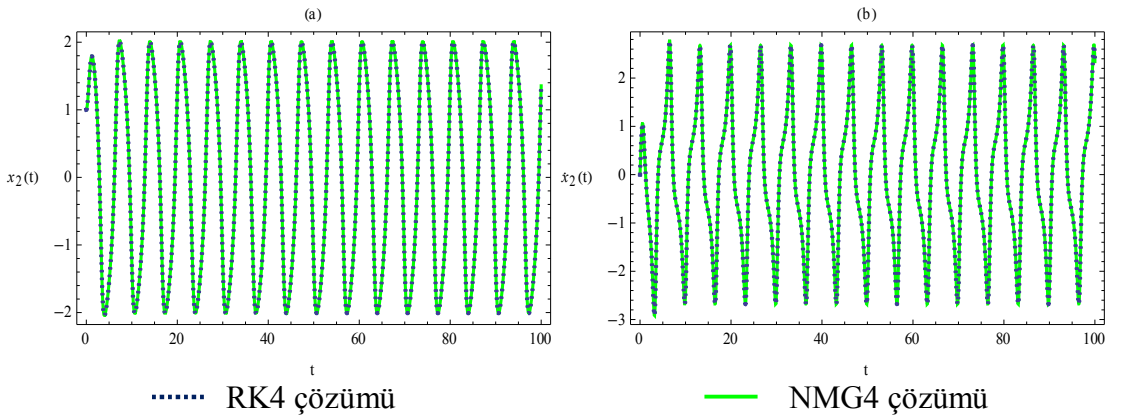
t	NMG4 çözümü	RK4 çözümü	Mutlak fark
0	0	$1.95834 \times 10^{-18}$	$1.95834 \times 10^{-18}$
1	-4.3911434275	-4.3911434394	$1.19155 \times 10^{-8}$
2	1.3971097282	1.3971097361	$7.86684 \times 10^{-9}$
3	3.0001063263	3.0001063735	$4.71988 \times 10^{-8}$
4	-2.6201149467	-2.6201150244	$7.76749 \times 10^{-8}$
5	0.1213843760	0.1213846313	$2.5533 \times 10^{-7}$
6	3.0733071435	3.0733072149	$7.13361 \times 10^{-8}$
7	-1.3624738433	-1.3624739286	$8.52223 \times 10^{-8}$
8	-3.9012700998	-3.9012700330	$6.67289 \times 10^{-8}$
9	2.5430094984	2.5430095991	$1.00714 \times 10^{-7}$
10	0.2073792359	0.2073788634	$3.72457 \times 10^{-7}$

#### 4.2.2.2. 3DOF Bağlantılı Van Der Pol Denklem Sistemi

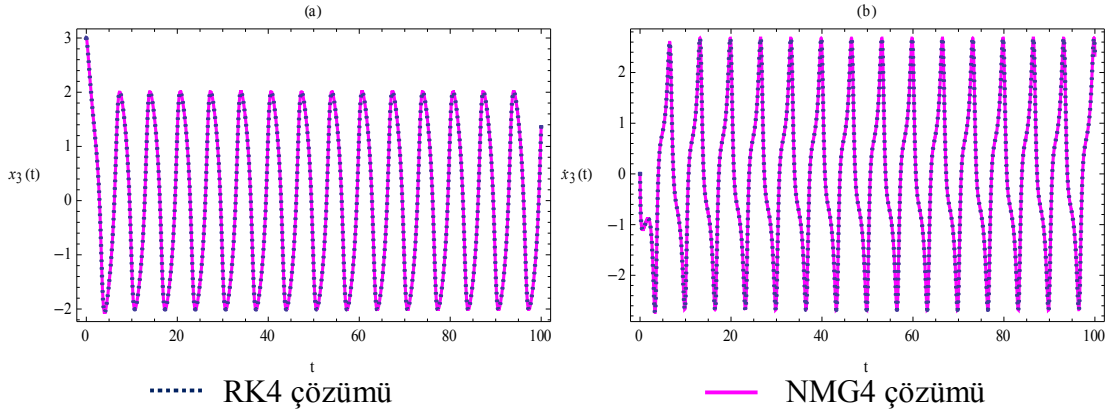
$\delta = 0$  olması halinde (4.41) denklemi lineer olmayan bağlantılı Van der Pol osilatöre dönüşür. (4.41) denkleminin matris gösterimi (4.43) lineer olmayan diferansiyel denklemi NMG4 ve RK4 ile  $h = \frac{1}{100}$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $\delta = 0$ ,  $\mu = 2$  değerleri ve (0,100) zaman aralığı için çözümler NMG4 ve RK4 çözümleri karşılaştırılmıştır. 3 serbestlik dereceli (3DOF) lineer olmayan bağlantılı Van der Pol denklemiindeki  $x_1$ ,  $\dot{x}_1$ ,  $x_2$ ,  $\dot{x}_2$ ,  $x_3$  ve  $\dot{x}_3$  fonksiyonlarının NMG4 ve RK4 ile  $h = \frac{1}{100}$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $\delta = 0$ ,  $\mu = 2$  değerleri ve (0,10) zaman aralığı için yaklaşık çözümleri ve mutlak farkları Tablo 4.31-36. da karşılaştırılmış ve (0,100) ve (0,20) zaman aralıkları için yaklaşık çözümlerinin grafikleri Şekil 4.28-33. de verilmiştir.



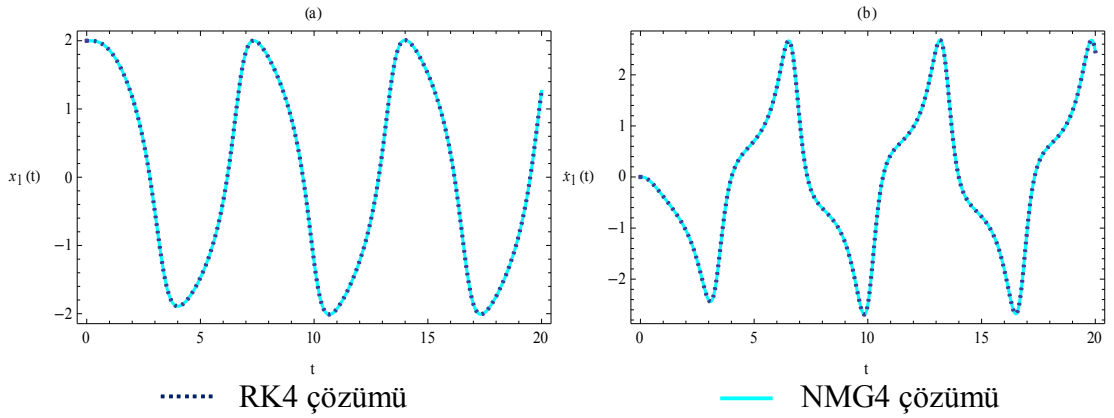
Şekil 4.28. (4.41) denkleminin  $\varepsilon = 1$ ,  $\delta = 0$ ,  $\mu = 2$  için (a)  $x_1(t)$ , (b)  $\dot{x}_1(t)$  grafikleri



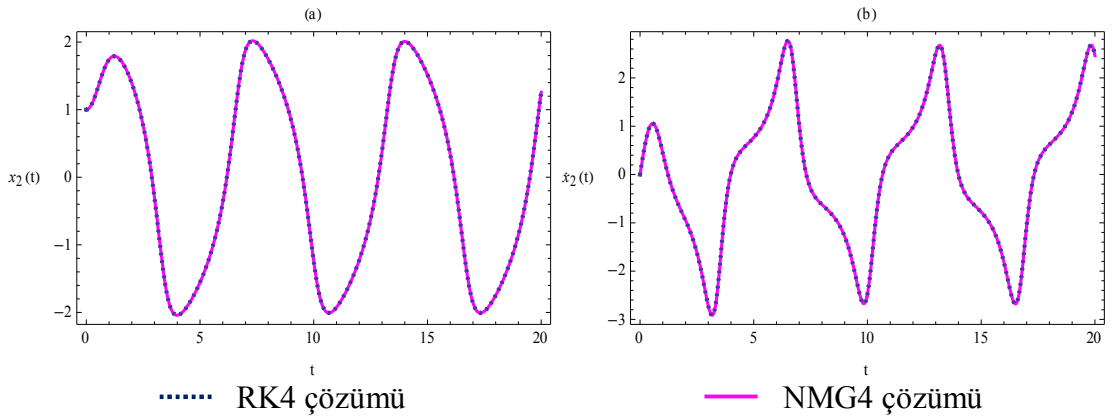
Şekil 4.29. (4.41) denkleminin  $\varepsilon = 1$ ,  $\delta = 0$ ,  $\mu = 2$  için (a)  $x_2(t)$ , (b)  $\dot{x}_2(t)$  grafikleri



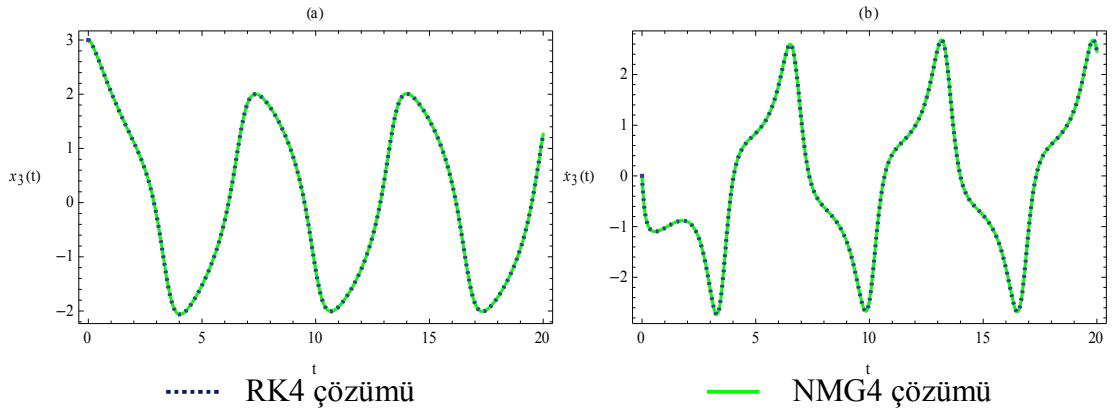
Şekil 4.30. (4.41) denkleminin  $\varepsilon = 1, \delta = 0, \mu = 2$  için (a)  $x_3(t)$ , (b)  $\dot{x}_3(t)$  grafikleri



Şekil 4.31. (4.41) denkleminin  $\varepsilon = 1, \delta = 0, \mu = 2$  için (a)  $x_1(t)$ , (b)  $\dot{x}_1(t)$  grafikleri



Şekil 4.32. (4.41) denkleminin  $\varepsilon = 1, \delta = 0, \mu = 2$  için (a)  $x_2(t)$ , (b)  $\dot{x}_2(t)$  grafikleri



Şekil 4.33. (4.41) denkleminin  $\varepsilon = 1$ ,  $\delta = 0$ ,  $\mu = 2$  için (a)  $x_3(t)$ , (b)  $\dot{x}_3(t)$  grafikleri

Tablo 4.31. (4.41) denkleminin NMG4 ve RK4 ile  $h = \frac{1}{100}$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $\delta = 0$ ,  $\mu = 2$  değerleri ve (0,10) zaman aralığı için  $x_1$  çözümleri

t	NMG4 çözümü	RK4 çözümü	Mutlak fark
0	2	2	0
1	1.8606910492	1.8606910495	$3.11199 \times 10^{-10}$
2	1.1745662281	1.1745662271	$9.37173 \times 10^{-10}$
3	-0.5110615541	-0.5110615573	$3.10953 \times 10^{-9}$
4	-1.8912407361	-1.8912407379	$1.84047 \times 10^{-9}$
5	-1.4715758033	-1.4715758035	$2.64298 \times 10^{-10}$
6	-0.3526912476	-0.3526912504	$2.75965 \times 10^{-9}$
7	1.8387529572	1.8387529622	$4.95159 \times 10^{-9}$
8	1.7496783652	1.7496783675	$2.35087 \times 10^{-9}$
9	0.8598025138	0.8598025189	$5.09824 \times 10^{-9}$
10	-1.2440820014	-1.2440819966	$4.86667 \times 10^{-9}$

Tablo 4.32. (4.41) denkleminin NMG4 ve RK4 ile  $h = \frac{1}{100}$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $\delta = 0$ ,  $\mu = 2$  değerleri ve (0,10) zaman aralığı için  $x_1$  çözümleri

t	NMG4 çözümlü	RK4 çözümlü	Mutlak fark
0	0	$3.19402 \times 10^{-24}$	$3.19402 \times 10^{-24}$
1	-0.3794863129	-0.3794863132	$3.26747 \times 10^{-10}$
2	-1.0441955238	-1.0441955247	$9.79054 \times 10^{-10}$
3	-2.4108361089	-2.4108361108	$1.91936 \times 10^{-9}$
4	-0.0088837021	-0.0088836959	$6.20884 \times 10^{-9}$
5	0.7053589578	0.7053589552	$2.65802 \times 10^{-9}$
6	1.7673030384	1.7673030409	$2.46431 \times 10^{-9}$
7	1.1104516444	1.1104516442	$2.15101 \times 10^{-10}$
8	-0.6127955867	-0.6127955864	$2.78555 \times 10^{-10}$
9	-1.2853287192	-1.2853287152	$3.99566 \times 10^{-9}$
10	-2.4930985223	-2.4930985388	$1.64069 \times 10^{-8}$

Tablo 4.33. (4.41) denkleminin NMG4 ve RK4 ile  $h = \frac{1}{100}$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $\delta = 0$ ,  $\mu = 2$  değerleri ve (0,10) zaman aralığı için  $x_2$  çözümleri

t	NMG4 çözümlü	RK4 çözümlü	Mutlak fark
0	1	1	0
1	1.7419246289	1.7419246297	$8.22740 \times 10^{-10}$
2	1.3904771695	1.3904771698	$3.26851 \times 10^{-10}$
3	-0.3092790999	-0.3092791036	$3.72231 \times 10^{-9}$
4	-2.0419239197	-2.0419239229	$3.20975 \times 10^{-9}$
5	-1.5553562671	-1.5553562680	$9.28192 \times 10^{-10}$
6	-0.3682084860	-0.3682084889	$2.86988 \times 10^{-9}$
7	1.8802221749	1.8802221809	$5.95440 \times 10^{-9}$
8	1.7456913065	1.7456913093	$2.79762 \times 10^{-9}$
9	0.8514529052	0.8514529106	$5.37787 \times 10^{-9}$
10	-1.2440197852	-1.2440197805	$4.69390 \times 10^{-9}$



Tablo 4.34. (4.41) denkleminin NMG4 ve RK4 ile  $h = \frac{1}{100}$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $\delta = 0$ ,  $\mu = 2$  değerleri ve (0,10) zaman aralığı için  $x_2$  çözümleri

t	NMG4 çözümlü	RK4 çözümlü	Mutlak fark
0	0	$7.24213 \times 10^{-20}$	$7.24213 \times 10^{-20}$
1	0.4427699177	0.4427699189	$1.22783 \times 10^{-9}$
2	-0.9493796039	-0.9493796040	$8.16547 \times 10^{-11}$
3	-2.7175450597	-2.7175450676	$7.91311 \times 10^{-9}$
4	0.0235639284	0.0235639370	$8.65416 \times 10^{-9}$
5	0.7662918553	0.7662918520	$3.32082 \times 10^{-9}$
6	1.8636156924	1.8636156963	$3.84768 \times 10^{-9}$
7	1.0226805664	1.0226805651	$1.29895 \times 10^{-9}$
8	-0.6238176581	-0.6238176580	$1.00196 \times 10^{-10}$
9	-1.2859419625	-1.2859419586	$3.84832 \times 10^{-9}$
10	-2.4728994113	-2.4728994282	$1.68583 \times 10^{-8}$

Tablo 4.35. (4.41) denkleminin NMG4 ve RK4 ile  $h = \frac{1}{100}$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $\delta = 0$ ,  $\mu = 2$  değerleri ve (0,10) zaman aralığı için  $x_3$  çözümleri

t	NMG4 çözümlü	RK4 çözümlü	Mutlak fark
0	3	3	0
1	2.0409967836	2.0409967811	$2.5755 \times 10^{-9}$
2	1.1127257754	1.1127257721	$3.3026 \times 10^{-9}$
3	-0.2358239118	-0.2358239161	$4.32532 \times 10^{-9}$
4	-2.0622952740	-2.0622952754	$1.37842 \times 10^{-9}$
5	-1.5250152621	-1.5250152628	$6.6977 \times 10^{-10}$
6	-0.3265142670	-0.3265142634	$3.65245 \times 10^{-9}$
7	1.8291555776	1.8291555769	$7.14985 \times 10^{-10}$
8	1.7554041370	1.7554041401	$3.08483 \times 10^{-9}$
9	0.8542983268	0.8542983331	$6.2212 \times 10^{-9}$
10	-1.2458386461	-1.2458386435	$2.64867 \times 10^{-9}$

Tablo 4.36. (4.41) denkleminin NMG4 ve RK4 ile  $h = \frac{1}{100}$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $\delta = 0$ ,  $\mu = 2$  değerleri ve (0,10) zaman aralığı için  $\dot{x}_3$  çözümleri

t	NMG4 çözümü	RK4 çözümü	Mutlak fark
0	0	$6.81014 \times 10^{-19}$	$6.81014 \times 10^{-19}$
1	-1.0280297315	-1.0280297330	$1.45962 \times 10^{-9}$
2	-0.9048595016	-0.9048595020	$4.41618 \times 10^{-10}$
3	-2.2396249835	-2.2396249839	$3.82587 \times 10^{-10}$
4	-0.0761950428	-0.0761950434	$5.38561 \times 10^{-10}$
5	0.8408249482	0.8408249510	$2.84038 \times 10^{-9}$
6	1.7778815091	1.7778815124	$3.31622 \times 10^{-9}$
7	1.1256555333	1.1256555334	$1.08618 \times 10^{-10}$
8	-0.6164381236	-0.6164381205	$3.13273 \times 10^{-9}$
9	-1.2988354611	-1.2988354603	$8.09506 \times 10^{-10}$
10	-2.4611992854	-2.4611992977	$1.22350 \times 10^{-8}$

### 4.3. Zorlanmış (*Forced*) Van Der Pol Denklemi

Bu bölümde,

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x &= a \sin(\omega t), \\ x(0) &= 0.2108, \\ \dot{x}(0) &= 0.0187, \end{aligned} \quad (4.44)$$

(4.44) zorlanmış Van der Pol osilatörü ele alınacaktır [55]. Burada nokta  $t$  ye göre türevi,  $x(t)$  bilinmeyen ekonomik fonksiyonu,  $\mu$  sönüm (*damping*) parametresini,  $a$  zorlama (*forcing*) genliğini ve  $\omega$  da zorlama frekansını göstermektedir.

$$x_1 = p, \quad \dot{p} = p_1, \quad (4.45)$$

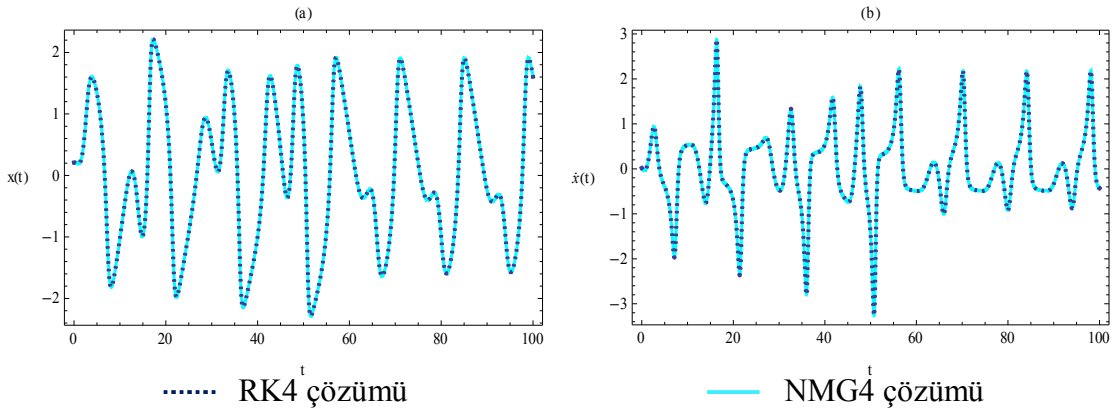
dönüşümü ile (4.44) denklemi,

$$X' = AX, \quad (4.46)$$

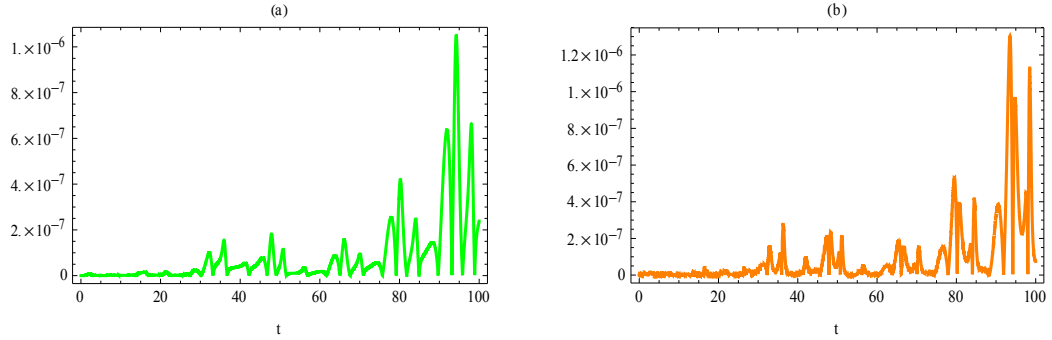
Lie tipi matris denklemi (4.46) şeklinde yazılabilir, burada

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & \mu(1-p^2) & a \sin(\omega t) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } X = \begin{bmatrix} p \\ p_1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ göstermektedir.}$$

(4.46) lineer olmayan diferansiyel denklemi NMG4 ve RK4 ile  $h = \frac{1}{100}$ ,  $a = 0.983139$ ,  $\omega = 0.45$  ve  $\mu = 1$  değerleri [55] ve  $(0,100)$  zaman aralığı için çözümlenmiş NMG4 ve RK4 çözümleri karşılaştırılmıştır. Şekil 4.34. ve Şekil 4.35. de (4.44) denklemindeki  $x(t)$  ve  $\dot{x}(t)$  fonksiyonlarının NMG4 ve RK4 yaklaşık çözümlerini ve mutlak farklarını karşılaştırmaktadır.



Şekil 4.34. (4.44) denkleminin (a)  $x(t)$ , (b)  $\dot{x}(t)$  grafikleri



Şekil 4.35. (4.44) denkleminin (a)  $x(t)$ , (b)  $\dot{x}(t)$  için NMG4 ve RK4 mutlak farkı

Elde edilen  $x(t)$ ,  $\dot{x}(t)$  sonuçları ve mutlak farkları Tablo 4.37. ve Tablo 4.38. de verilmiştir.

Tablo 4.37. (4.44) denkleminin NMG4 ve RK4 ile  $h = \frac{1}{100}$ ,  $a = 0.983139$ ,  $\omega = 0.45$  ve  $\mu = 1$  değerleri ve  $(0,10)$  zaman aralığı için  $x(t)$  çözümleri

t	NMG4 çözümü	RK4 çözümü	Mutlak fark
0	0.2108	0.2108	0
1	0.1905102538	0.1905102550	$1.23301 \times 10^{-9}$
2	0.4391025590	0.4391025667	$7.62108 \times 10^{-9}$
3	1.2749607423	1.2749607416	$6.39091 \times 10^{-10}$
4	1.5942111276	1.5942111267	$9.10411 \times 10^{-10}$
5	1.3367551823	1.3367551816	$7.36810 \times 10^{-10}$
6	0.7708678516	0.7708678520	$3.78051 \times 10^{-10}$
7	-0.5385816604	-0.5385816639	$3.49528 \times 10^{-9}$
8	-1.8093498153	-1.8093498183	$3.05857 \times 10^{-9}$
9	-1.52927813702	-1.5292781389	$1.94235 \times 10^{-9}$
10	-1.02551536134	-1.0255153623	$9.63035 \times 10^{-10}$

Tablo 4.38. (4.44) denkleminin NMG4 ve RK4 ile  $h = \frac{1}{100}$ ,  $a = 0.983139$ ,  $\omega = 0.45$  ve  $\mu = 1$  değerleri ve  $(0,10)$  zaman aralığı için  $\dot{x}(t)$  çözümleri

t	NMG4 çözümü	RK4 çözümü	Mutlak fark
0	0.0187	0.0187	0
1	0.0152287148	0.0152287175	$2.72862 \times 10^{-9}$
2	0.5799364715	0.5799364729	$1.39658 \times 10^{-9}$
3	0.7982797559	0.7982797451	$1.07541 \times 10^{-8}$
4	-0.0784664208	-0.0784664206	$1.50802 \times 10^{-10}$
5	-0.3963715514	-0.3963715481	$3.26151 \times 10^{-9}$
6	-0.8026081119	-0.8026081128	$9.26153 \times 10^{-10}$
7	-1.9113574783	-1.9113574754	$2.89314 \times 10^{-9}$
8	-0.1352633157	-0.1352633132	$2.44781 \times 10^{-9}$
9	0.4607604046	0.4607604038	$7.84977 \times 10^{-10}$
10	0.5318351815	0.5318351810	$4.54214 \times 10^{-10}$

### 4.3. Painlevé Denklemleri

Yaklaşık bir asır önce Painlevé, Gambier ve çalışma arkadaşlarının ikinci mertebeden lineer olmayan adi diferansiyel denklemler üzerinde yaptıkları çalışmalar esnasında keşfettikleri altı diferansiyel denkleme Painlevé denklemleri ( $P_1 - P_6$ ) denmektedir ve birçok fiziksel uygulamada bu denklemler ortaya çıkmaktadır [56]. Painlevé denklemleri

$$P_1 : \quad u_{xx} = 6u^2 + x \quad (4.47)$$

$$P_2 : \quad u_{xx} = 2u^3 + xu + \alpha \quad (4.48)$$

$$P_3 : \quad u_{xx} = \frac{1}{u}u_x^2 - \frac{1}{x}u_x + \frac{\alpha u^2 + \beta}{x} + \gamma u^3 + \frac{\delta}{u} \quad (4.49)$$

$$P_4 : \quad u_{xx} = \frac{1}{2u}u_x^2 + \frac{3}{2}u^3 + 4xu^2 + 2(x^2 - \alpha)u + \frac{\beta}{u} \quad (4.50)$$

$$P_5 : \quad u_{xx} = \left( \frac{1}{2u} + \frac{1}{u-1} \right) u_x^2 - \frac{1}{x}u_x + \frac{(u-1)^2}{x^2} \left( \alpha u + \frac{\beta}{u} \right) + \frac{\gamma u}{x} + \frac{\delta u(u+1)}{u-1} \quad (4.51)$$

$$P_6 : \quad u_{xx} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{u} + \frac{1}{u-1} + \frac{1}{u-x} \right) u_x^2 - \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{u-x} \right) u_x \\ + \frac{u(u-1)(u-x)}{x^2(x-1)^2} \left( \alpha + \frac{\beta x}{u^2} + \frac{\gamma(x-1)}{(u-1)^2} + \frac{\delta x(x-1)}{(u-x)^2} \right) \quad (4.52)$$

dir. Burada  $u_{xx} = \frac{d^2u}{dx^2}$ ,  $u_x = \frac{du}{dx}$ ,  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  keyfi sabitlerdir [56]. Painlevé denklemlerinin genel çözümleri daha önceden bilinen klasik özel fonksiyonlar veya eliptik fonksiyonlar cinsinden yazılamamaktadır [58].

Bu bölümde 1. ve 2. Painlevé denklemlerinin nümerik çözümleri incelenecektir.

#### 4.3.1. $P_1$ birinci Painlevé denklemi

$y(0) = 0$  ve  $y'(0) = 1$  başlangıç koşuluyla verilen

$$y''(t) = 6y(t)^2 + t, \quad t \in (0,1), \quad (4.53)$$

$P_1$  birinci Painlevé denklemini ele alalım [57].

(4.53) denklemi

$$y = x_1, \quad x_1' = x_2, \quad (4.54)$$

dönüşümü ile

$$X' = AX, \quad (4.55)$$

Lie tipi matris denklemi (4.55) şeklinde yazılabilir, burada

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 6x_1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

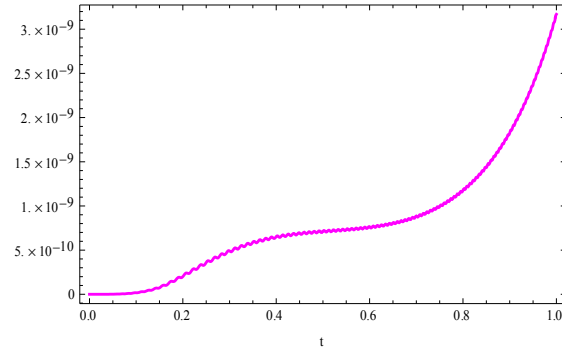
(4.55) diferansiyel denklemi NMG4 ve RK4 ile  $h = \frac{1}{1000}$  adım aralığı ve (0,1) zaman aralığı için çözümler elde edilen sonuçlar Tablo 4.39. ve Tablo 4.40. da karşılaştırılmıştır. (4.53) denkleminin  $y(t)$  ve  $y'(t)$  için  $h = \frac{1}{1000}$  adım aralığıyla NMG4 ve RK4 çözümleri ve bu çözümlerin fark grafikleri Şekil 4.36-38. de verilmiştir.

Tablo 4.39. (4.53) denkleminin  $y(t)$  için  $h = \frac{1}{1000}$  adım aralığı ve (0,1) zaman aralığında NMG4 ve RK4 çözümleri

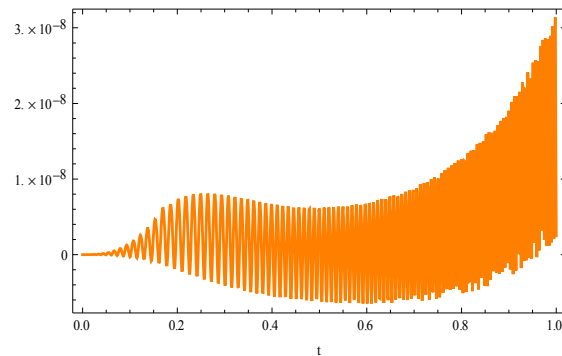
t	NMG4 çözümü	RK4 çözümü	Mutlak fark
0	0	6.24686×10-20	6.24686×10-20
0.1	0.100216747677	0.100216747659	1.77974×10-11
0.2	0.202139452716	0.202139452516	2.00312×10-10
0.3	0.308630749167	0.308630748676	4.90824×10-10
0.4	0.423986289489	0.423986288835	6.53418×10-10
0.5	0.554340118998	0.554340118285	7.12976×10-10
0.6	0.708462088047	0.708462087282	7.64284×10-10
0.7	0.899249938002	0.899249937116	8.85539×10-10
0.8	1.146531726413	1.146531725234	1.17827×10-9
0.9	1.482524430492	1.482524428667	1.82425×10-9
1	1.963128223720	1.963128220551	3.16870×10-9

Tablo 4.40. (4.53) denkleminin  $y'(t)$  için  $h = 1/1000$  adım aralığı ve (0,1) zaman aralığında NMG4 ve RK4 çözümleri

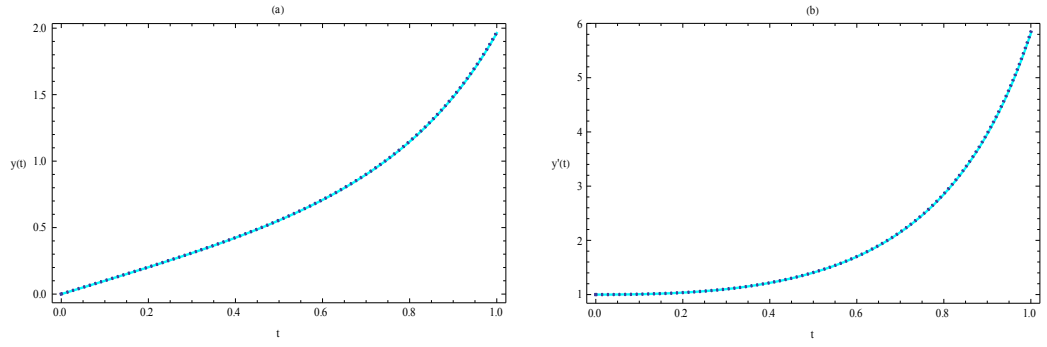
$t$	NMG4 çözümü	RK4 çözümü	Mutlak fark
0	1	1	0
0.1	1.007005004990	1.007005005293	$3.02804 \times 10^{-10}$
0.2	1.036193067639	1.036193061445	$6.19421 \times 10^{-9}$
0.3	1.100728318093	1.100728321637	$3.54341 \times 10^{-9}$
0.4	1.216479600564	1.216479594645	$5.91924 \times 10^{-9}$
0.5	1.404977978298	1.404977972188	$6.10968 \times 10^{-9}$
0.6	1.698519012330	1.698519016613	$4.28250 \times 10^{-9}$
0.7	2.149440540754	2.149440541061	$3.06549 \times 10^{-10}$
0.8	2.848172456063	2.848172443471	$1.25916 \times 10^{-8}$
0.9	3.961077034203	3.961077015168	$1.90358 \times 10^{-8}$
1	5.816811901917	5.816811899416	$2.50136 \times 10^{-9}$



Şekil 4.36. (4.53) denkleminin  $y(t)$  için NMG4 ve RK4 çözümlerinin farkı



Şekil 4.37. (4.53) denkleminin  $y'(t)$  için NMG4 ve RK4 çözümlerinin farkı



..... RK4 çözümü

— NMG4 çözümü

Şekil 4.38. (4.53) denkleminin (a)  $y(t)$ , (b)  $y'(t)$  için NMG4 ve RK4 çözümleri

### 4.3.2. $P_2$ ikinci Painlevé denklemini

$y(0) = 0$  ve  $y'(0) = 0$  başlangıç koşuluyla verilen

$$y''(t) = 2y(t)^3 + ty(t) + \alpha \quad (4.56)$$

$P_2$  ikinci Painlevé denklemini ele alalım [56].

(4.53) denklemini

$$y = x_1, \quad x_1' = x_2, \quad (4.57)$$

dönüşümü ile

$$X' = AX, \quad (4.58)$$

Lie tipi matris denklemini (4.55) şeklinde yazılabilir, burada

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2x_1^2 + t & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ dır.}$$

(4.58) diferansiyel denklemini NMG4 ve RK4 ile  $h = \frac{1}{100}$  adım aralığı,  $\alpha = 0.5$  ve  $(0,1)$  zaman aralığı için çözümler elde edilen sonuçlar Tablo 4.41-44. de karşılaştırılmıştır. (4.56) denkleminin  $y(t)$  ve  $y'(t)$  için  $h = \frac{1}{100}$  adım aralığıyla NMG4 ve RK4 çözümleri ve hata grafikleri Şekil 4.39-44. te verilmiştir.



Tablo 4.41. (4.56) denkleminin  $y(t)$  için  $h = \frac{1}{100}$  adım aralığı,  $\alpha = 0.5$  ve  $(0,1)$  zaman aralığında NMG4 çözümü ve mutlak hatası

$t$	Analitik çözüm [56]	NMG4 çözümü	Mutlak hata
0	0	0	0
0.1	0.00250012500781	0.00250012500572	$2.08332 \times 10^{-12}$
0.2	0.01000400200101	0.01000400199685	$4.16678 \times 10^{-12}$
0.3	0.02253042634603	0.02253042633978	$6.25053 \times 10^{-12}$
0.4	0.04012851409378	0.04012851408544	$8.33562 \times 10^{-12}$
0.5	0.06289370122823	0.06289370121781	$1.04231 \times 10^{-11}$
0.6	0.09098530488722	0.09098530487471	$1.25165 \times 10^{-11}$
0.7	0.12464691753897	0.12464691752435	$1.46219 \times 10^{-11}$
0.8	0.16423148671956	0.16423148670280	$1.67510 \times 10^{-11}$
0.9	0.21023378960978	0.21023378959086	$1.89235 \times 10^{-11}$
1	0.26333435261930	0.26333435259813	$2.11755 \times 10^{-11}$

Tablo 4.42. (4.56) denkleminin  $y(t)$  için  $h = \frac{1}{100}$  adım aralığı,  $\alpha = 0.5$  ve  $(0,1)$  zaman aralığında RK4 çözümü ve mutlak hatası

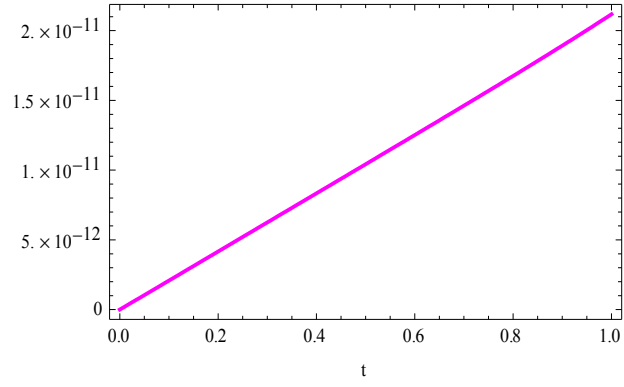
$t$	Analitik çözüm [56]	RK4 çözümü	Mutlak hata
0	0	$-6.07460 \times 10^{-24}$	$6.07460 \times 10^{-24}$
0.1	0.00250012500781	0.00250012500779	$1.86669 \times 10^{-14}$
0.2	0.01000400200101	0.01000400200031	$7.08166 \times 10^{-13}$
0.3	0.02253042634603	0.02253042634057	$5.46391 \times 10^{-12}$
0.4	0.04012851409378	0.04012851406940	$2.43824 \times 10^{-11}$
0.5	0.06289370122823	0.06289370116538	$6.28472 \times 10^{-11}$
0.6	0.09098530488722	0.09098530472666	$1.60565 \times 10^{-10}$
0.7	0.12464691753897	0.12464691722459	$3.14383 \times 10^{-10}$
0.8	0.16423148671956	0.16423148614227	$5.77280 \times 10^{-10}$
0.9	0.21023378960978	0.21023378871518	$8.94605 \times 10^{-10}$
1	0.26333435261930	0.26333435127899	$1.34030 \times 10^{-9}$

Tablo 4.43. (4.56) denkleminin  $y'(t)$  için  $h = \frac{1}{100}$  adım aralığı,  $\alpha = 0.5$  ve  $(0,1)$  zaman aralığında NMG4 çözümü ve mutlak hatası

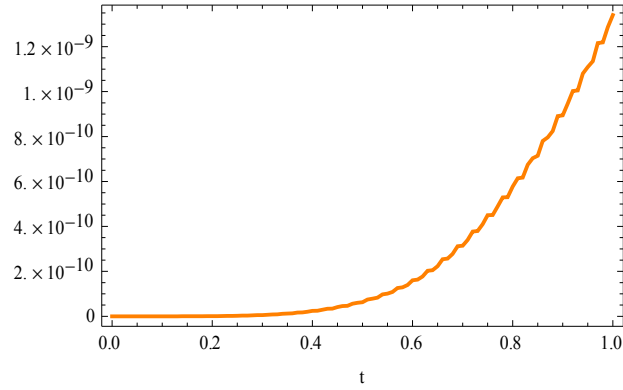
$t$	Analitik çözüm [56]	NMG4 çözümü	Mutlak hata
0	0	0	0
0.1	0.05000625062505	0.05000625062506	$1.35585 \times 10^{-14}$
0.2	0.10010008005603	0.10010008005614	$1.09259 \times 10^{-13}$
0.3	0.15050762011133	0.15050762011170	$3.72979 \times 10^{-13}$
0.4	0.20161029764337	0.20161029764427	$9.04110 \times 10^{-13}$
0.5	0.25395561765418	0.25395561765601	$1.83197 \times 10^{-12}$
0.6	0.30827832570542	0.30827832570876	$3.34499 \times 10^{-12}$
0.7	0.36553685405196	0.36553685405770	$5.73951 \times 10^{-12}$
0.8	0.42697198123011	0.42697198123962	$9.50622 \times 10^{-12}$
0.9	0.49419824629369	0.49419824630918	$1.54912 \times 10^{-11}$
1	0.56934498126942	0.56934498129463	$2.52030 \times 10^{-11}$

Tablo 4.44. (4.56) denkleminin  $y'(t)$  için  $h = \frac{1}{100}$  adım aralığı,  $\alpha = 0.5$  ve  $(0,1)$  zaman aralığında RK4 çözümü ve mutlak hatası

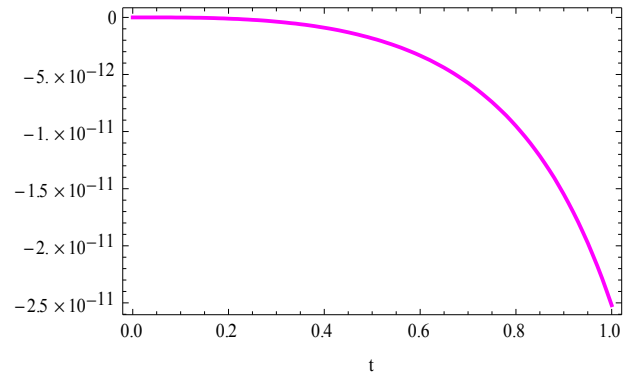
$t$	Analitik çözüm [56]	RK4 çözümü	Mutlak hata
0	0	$-1.73377 \times 10^{-20}$	$1.73377 \times 10^{-20}$
0.1	0.05000625062505	0.05000625062496	$9.13852 \times 10^{-14}$
0.2	0.10010008005603	0.10010008002406	$3.19702 \times 10^{-11}$
0.3	0.15050762011133	0.15050762005446	$5.68651 \times 10^{-11}$
0.4	0.20161029764337	0.20161029745572	$1.87647 \times 10^{-10}$
0.5	0.25395561765418	0.25395561674794	$9.06238 \times 10^{-10}$
0.6	0.30827832570542	0.30827832434864	$1.35677 \times 10^{-9}$
0.7	0.36553685405196	0.36553685385579	$1.96168 \times 10^{-10}$
0.8	0.42697198123011	0.42697197513437	$6.09574 \times 10^{-9}$
0.9	0.49419824629369	0.49419824578954	$5.04143 \times 10^{-10}$
1	0.56934498126942	0.56934498189027	$6.20848 \times 10^{-10}$



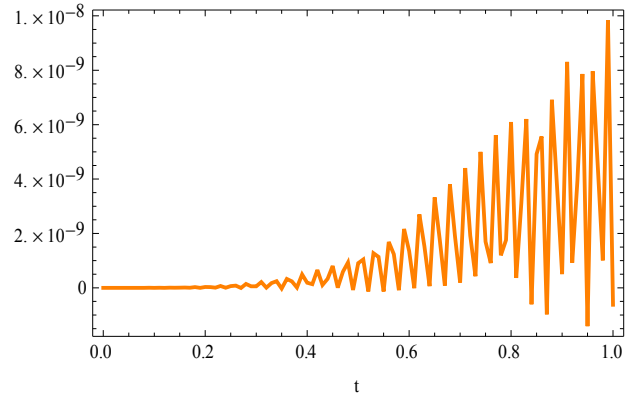
Şekil 4.39. (4.56) denkleminin  $y(t)$  için NMG4 hata grafiği



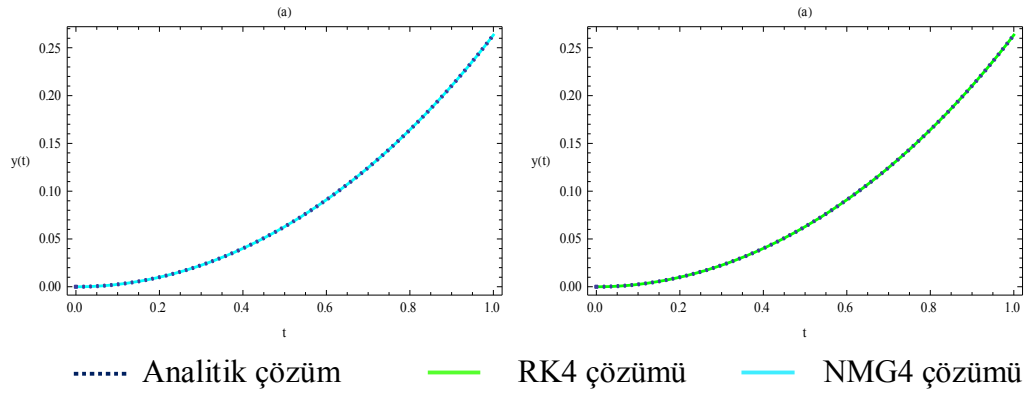
Şekil 4.40. (4.56) denkleminin  $y(t)$  için RK4 hata grafiği



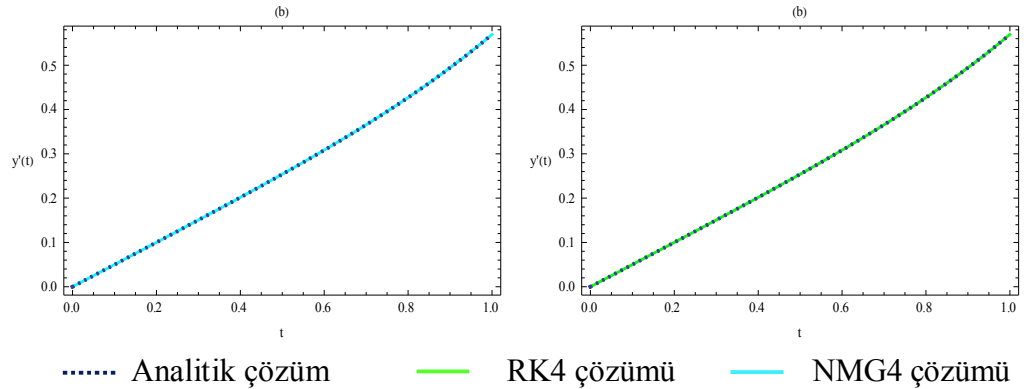
Şekil 4.41. (4.56) denkleminin  $y'(t)$  için NMG4 hata grafiği



Şekil 4.42. (4.56) denkleminin  $y'(t)$  için RK4 hata grafiği



Şekil 4.43. (4.56) denkleminin  $y(t)$  için (a) NMG4, (b) RK4 çözümleri



Şekil 4.44. (4.56) denkleminin  $y'(t)$  için (a) NMG4, (b) RK4 çözümleri

## 5. BÖLÜM

### SONUÇLAR VE ÖNERİLER

#### 5.1 Sonuçlar

Bu çalışmada, ilk olarak Magnus Seri Açılımı Metodunu incelenerek literatürde bu yöntemin uygulanmadığı, yay üzerindeki bir cismin hareketinde ortaya çıkan lineer homojen ve homojen olmayan salınım adi diferansiyel denklemlere ve lineer olmayan bağlantılı Vander Pol denklem sistemi, zorlanmış Vander Pol adi diferansiyel denklemi ve 1. ve 2. Painleve denklemlerine uygulanmıştır. Elde edilen sonuçlar, analitik çözümlerle ve Runge Kutta metoduyla elde edilen çözümlerle karşılaştırılmış ve sonuçlar tablolar ve grafiklerle verilmiştir. Elde edilen sonuçlar salınım diferansiyel denklemlerde, birinci ve ikinci Painlevé denklemlerinde Magnus açılımı metodunun klasik Runge Kutta metoduna göre daha iyi neticeler verdiğini, lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerini bulmak için Magnus seri açılımı metodunun etkili ve kullanışlı bir metod olduğunu göstermiştir.

#### 5.2 Öneriler

Magnus seri açılımı metodunun kısmi diferansiyel denklemlere uygulanması incelenebilir.

## KAYNAKLAR

1. Iserles, A. ve çalışma arkadaşları, “Lie-group Methods”, *Acta Numerica* 9, 215-365, 2000.
2. Magnus, W., “On the exponential solution of differential equations for a linear operator”, *Comm. Pure and Appl. Math.*, 7, 639-673, 1954.
3. Robinson, D.W. “Multiple Coulomb excitations of deformed nuclei”, *Helv. Phys. Acta*, 36, 140-54, 1963.
4. Bialynicki-Birula, I., Mielnik, B., Plebanski, J., “Explicit solution of the continuous Baker-Campbell-Hausdorff problem and a new expression for the phase operator”, *Ann. Phys.*, 51, 187-200, 1969.
5. Mielnik, B., Plebanski, J., “Combinatorial approach to Baker-Campbell-Hausdorff exponents”, *Ann. Inst. Henri Poincaré A* 12, 215-254, 1970.
6. Strichartz, R.S., “The Campbell-Baker-Hausdorff-Dynkin formula and solutions of differential equations”, *J. Func. Anal.* 72, 320-345, 1987.
7. Klarsfeld, S., Oteo, J.A., “Recursive generation of higher-order terms in the Magnus expansion”, *Phys. Rev. A* 39, 3270-3273, 1989.
8. Fomenko, A.T., Chakon, R.V. “Recurrence formulas for homogeneous terms of a convergent series that represents a logarithm of a multiplicative integral on Lie groups”, *Funct. Anal. Appl.* 1, 41-49, 1990.
9. Iserles, A., Nørsett, S.P., “Linear ODEs in Lie groups”, *DAMTP tech report 1997/NA9*, University of Cambridge, s. 1-7, 1997.
10. Iserles, A., Nørsett, S.P., “On the solution of linear differential equations in Lie groups”, *Philosophical Transactions: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 357, 983-1020, 1999.
11. Blanes, S. ve çalışma arkadaşları, “Magnus and Fer expansions for matrix differential equations: the convergence problem”, *J. Phys. A* 31, 259-268, 1998.
12. Casas, F., “Sufficient conditions for the convergence of the Magnus Expansion”, *J. Phys. A* 40, 15001-15017, 2007.
13. Moan, P.C., Niesen, J., “Convergence of the Magnus series”, *Found. Comput. Maths* 8, 291-301, 2008.
14. Pechukas, P., Light, J.C., “On the exponential form of time-displacement operators in quantum mechanics”, *J. Chem. Phys.* 44, 3897-912, 1966.

15. Evans, W.A.B., "On some application of Magnus expansion in nuclear magnetic resonance", *Ann. Phys.* 48, 72-93, 1968.
16. Baye, D., Heenen, P.H., "A theoretical study of fast proton-atomic hydrogen scattering", *J. Phys B: At Mol. Phys.* 6, 105-13, 1973.
17. Cady, W.A., "Rotational spectral line broadening of OCS by noble gases", *J. Chem. Phys.* 60, 3318-23, 1974.
18. Eichler, J., "Magnus approximation for K-shell ionization by heavy-ion impact", *Phys. Rev. A* 15, 1856-1862, 1977.
19. Schek, I., Jortner, J., Sage, M.L., "Application of the Magnus expansion for high-order multiphoton excitation", *Chem. Phys.* 59, 11-27, 1981.
20. Wille, U., "Magnus expansion for rotationally induced inner-shell excitation", *Phys. Lett. A* 82, 389-392, 1981.
21. Dahmen, H.D., Scholz, B., Steiner, F., "Infrared dynamics of QED and the asymptotic behavior of the electron form factor", *Nucl. Phys. B* 202, 365-81, 1982.
22. Milfeld, K.F., Wyatt, R.E., "Study extension and application of Floquet theory for quantum molecular systems in an oscillating field", *Phys. Rev. A* 27, 72-94, 1983.
23. Hyman, H.A., "Dipole Magnus approximation for electron-atom collisions: Excitation of the resonance transitions of Li, Na and K", *Phys. Rev. A* 31, 2142-2148, 1985.
24. D'Olivo, J.C., Oteo, J.A., "Magnus expansion and the two-neutrino oscillations in matter", *Phys. Rev. D* 42, 256-259, 1990.
25. Oteo, J.A., Ros, J., "The Magnus expansion for classical Hamiltonian systems", *J. Phys. A: Math. Gen.* 24, 5751-5762, 1991.
26. Lu, Y.Y., "A fourth-order Magnus scheme for Helmholtz equation", *J. Comput. Appl. Math.* 173, 247-258, 2005.
27. Chuluunbaatar, O. ve çalışma arkadaşları, "Explicit Magnus Expansions for solving the time-dependent Schrödinger equation", *Phys. Math. Theor.* 41, 1-25, 2008.
28. Orel, B., "Accumulation of Global Error in Lie Group Methods For Linear Ordinary Differential Equations", *Electronic Transactions on Numerical Analysis* 37, 252-262, 2010.

29. Atay, M.T., ve çalışma arkadaşları, “Comparative numerical solutions of stiff ordinary differential equations using Magnus series expansion method” *New Trends in Mathematical Sciences NTMSCI* 3 (1), 35-45, 2015.
30. Blanes, S., ve çalışma arkadaşları, “The Magnus expansion and some of its applications”, *Physics Reports* 470, 151-238, 2009.
31. Klarsfeld, S., Oteo, J.A., “Analytic properties for the Magnus operator for two solvable hamiltonians”, *Phys. Lett. A* 142, 393-397, 1989.
32. Iserles, A., Marthinsen, A., Nørsett, S.P., “On the implementation of the method of Magnus series for linear differential equations”, *BIT Numerical Mathematics* 39, 281-304, 1999.
33. Zanna, A., “Collocation and Relaxed Collocation for the Fer and the Magnus Expansions”, *SIAM Journal on Numerical Analysis* 36 (4), 1145-1182, 1999.
34. Blanes, S., Casas, F., Ros, J., “Improved High Order Integrators Based on the Magnus Expansion”, *BIT Numerical Mathematics* 40 (3), 434-450, 2000.
35. Iserles, A., Nørsett, S.P., Rasmussen, A.F., “Time-symmetry and high-order Magnus methods”, *Applied Numerical Mathematics* 39, 379-401, 2001.
36. Sánchez, S., Casas, F., Fernández, A., “New analytic approximations based on the Magnus expansion”, *J. Math. Chem.* 49, 1741-1758, 2011.
37. Casas, F., Iserles, A., “Explicit Magnus expansions for nonlinear equations”, *J. Phys. A: Math. Gen.* 39, 5445-5461, 2006.
38. Blanes, S., Ponsoda, E., “Time-averaging and exponential integrators for non-homogeneous linear IVPs and BVPs”, *Applied Numerical Mathematics* 62, 875-94, 2012.
39. Hacısalihoğlu, H.H., “Diferansiyel Geometri 4. Basım”, *Hacısalihoğlu Yayınları*, 2004.
40. Kutsal, B., “İstisnai Lie Gruplarının Self Homotopi Gruplarının Demeti”, *Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi*, s. 44-50, ANKARA, 2005.
41. Tu, L.W., “An Introduction to Manifolds”, *Springer Science & Business Media, LLC*, s. 164, New York, 2011.
42. Olver, P.J., “Applications of Lie Groups to Differential Equations second edition”, *Graduate Texts in Mathematics 107 Springer-Verlag*, s. 43, New York, 1993.



43. Kanat, B., “Numerical solution of highly Oscillatory differential equations by Magnus series method”, *Izmir Institute of Technology, Yüksek Lisans Tezi*, s. 4-27, İzmir, 2006.
44. Hairer, E., Lubich, C., Wanner, G., “Geometric numerical integration, structure - preserving algorithms for ordinary differential equations”, *Springer Series in Computational Mathematics 31 Springer-Verlag*, s. 118-121, Berlin, 2002.
45. Abramowitz, M., Stegun, I. A., “Handbook of Mathematical Functions”, *Dover*, New York, s. 810, 1970.
46. Hausdorff, F. “Die symbolische Exponential formel in der Gruppentheorie”, *Berichte der Sächsischen Akademie der Wissenschaften (Math. Phys. Klasse)* 58, 19-48, 1906.
47. Castellano, A. ve çalışma arkadaşları, “ Geometric numerical integrators based on the Magnus expansion in bifurcation problems for non-linear elastic solids”, *Frattura ed Integrità Strutturale* 29, 128-138, 2014.
48. Butcher, J.C., “Numerical methods for ordinary differential equations second edition”, *John Wiley & Sons*, s. 215, West Sussex, 2008.
49. Burden, R.L., Faires, J.D., “Numerical Analysis ninth edition”, *Brooks/Cole Cengage Learning*, s. 230-249, Boston, 2010.
50. De Silva Clarence, W., “Vibration: Fundamentals and Practice”, *CRC Press*, s. 25, Boca Raton, 2000.
51. Ross, S.L., “Differential Equations”, Mehmet Can, *John Wiley & Sons Inc*, Singapore, s. 253-286, 2004.
52. Boyce, W.E., DiPrima, R.C., “Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems”, *John Wiley & Sons Inc*, Singapore, s. 200-205, 2001.
53. Qian, Y.H., Liu, W.K., Chen, S.M., “Construction of Approximate Analytical Solutions to Strongly Nonlinear Coupled van der Pol Oscillators”, *Advances in Mechanical Engineering*, Volume 2014, 1-14, 2014.
54. Qian Y., Chen S., “Accurate approximate analytical solutions for multi degree of freedom coupled van der Pol-Duffing oscillators by homotopy analysis method”, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 15, 3113-3130, 2010.
55. Chian, A.C.L., Rempel, E.L., Rogers, C., “Complex economic dynamics: Chaotic saddle, crisis and intermittency”, *Chaos, Solitons and Fractals* 29, 1194-1218, 2006.

56. Clarkson, P. A., "Painlevè equations-nonlinear special functions", *Journal of Computational and Applied Mathematics* 153, 127-140, 2003.
57. Raja, M.A.Z. ve çalışma arkadaşları, "A New Stochastic Technique for Painlevè Equation-I Using Neural Network Optimized with Swarm Intelligence", *Computational Intelligence and Neuroscience*, 1-10, 2012.
58. Saadatmandi, A., "Numerical Study of Second Painlevè Equation", *Communications in Numerical Analysis*, 1-16, 2012.

## ÖZGEÇMİŞ

Musa BAŞBÜK 1976 yılında Nevşehir’de doğdu. İlk ve orta öğrenimini Nevşehir’de tamamladı. 1995’te kazandığı Orta Doğu Teknik Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümünden 1999 yılında mezun oldu. Aynı yıl Milli Eğitim Bakanlığında öğretmen olarak göreve başladı.

Nevşehir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalında 2010 yılında yüksek lisansını tamamlayıp 2011 yılında Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde doktora yapmaya hak kazandı. Evli ve iki çocuk babası olup halen Nevşehir 2000 Evler Anadolu Lisesinde matematik öğretmeni olarak görevine devam etmektedir.

Adres: Nevşehir 2000 Evler Anadolu Lisesi  
Nevşehir  
Telefon: 0 384 215 11 44  
Belgegeçer: 0 384 215 11 45  
e-posta : mbasbuk@gmail.com