

**T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

GRAF TEORİNİN CEBİRSEL YAPILARI

**Tezi Hazırlayan
Hüseyin Hilmi EROĞLU**

**Tez Danışmanı
Doç. Dr. Hacı AKTAŞ**

**Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi**

**Şubat 2015
NEVŞEHİR**

**T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

GRAF TEORİNİN CEBİRSEL YAPILARI

**Tezi Hazırlayan
Hüseyin Hilmi EROĞLU**

**Tez Danışmanı
Doç. Dr. Hacı AKTAŞ**

**Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi**

**Şubat 2015
NEVŞEHİR**

Doç. Dr. Hacı AKTAŞ danışmanlığında **Hüseyin Hilmi EROĞLU** tarafından hazırlanan "**Graf Teorinin Cebirsel Yapıları**" başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

05/02/2015

JÜRİ

Başkan : (Doç. Dr. Hacı AKTAŞ)

imza

Üye : (Yrd. Doç. Dr. Sezer SORGUN)

imza

Üye : (Yrd. Doç. Dr. Deniz TOKAT)

imza

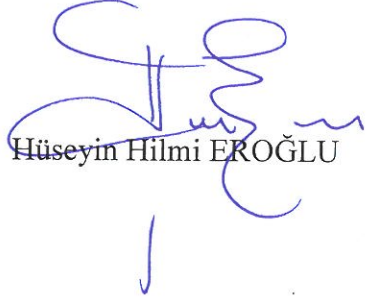
ONAY:

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun...09.02.2015...tarih ve...08.08... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

20/02/2015
Doç. Dr. Şahin ÖZTÜRK
Müdür
Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİM SAYFASI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada yer alan bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu ve bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.



Hüseyin Hilmi EROĞLU

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanıőı sırasında benden yardımlarını esirgemeyen, bilgi ve deneyimleriyle bana yol gosteren danışman hocam Doç. Dr Hacı AKTAŞ' a, yüksek lisans eğitimine baőladıėım dönemden tez çalıőmamın bitimine kadar geçen zamanda sürekli yanımda olan kıymetli abim Recep EROğLU' na, eğitim ve ėretim hayatım boyunca benden maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen sevgili aileme canı gönülden teőekkürlerimi sunarım.

GRAF TEORİNİN CEBİRSEL YAPISI

(Yüksek Lisans Tezi)

Hüseyin Hilmi EROĞLU

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Şubat 2015

ÖZET

Graf teori gündelik hayatımızda farkına varmadan da olsa birçok alanda kullandığımız bir kavramdır. Sosyal ve bilimsel yaşantımızın birçok yerinde grafa ait özelliklerle daha basit ve sistemli çalışmalar yapabilmekteyiz.

Bu tez çalışmasının birinci ve ikinci bölümlerinde graf teorisinin tarihi, grafın tanımı ve özellikleri, graf üzerinde bazı ikili işlemler hakkında literatür taraması yapılmıştır. Ayrıca grafların komşuluk matrisleri, laplasyan matrisleri ve normalize laplasyan matrisleri ile ilgili bilgiler verilmiş ve laplasyan matrislerin bazı cebirsel özelliklerinden bahsedilmiştir.

Çalışmanın üçüncü ve dördüncü bölümlerinde n noktalı bazı özel graflarda laplacian matrisi ve normalize laplacian matrisleri için genel değerler bulunmuştur. Beşinci bölümde ise graf gruplarında birim matris, sıfır matris ve Z_n de toplama ve çarpma işlemlerine göre oluşan üçgensel graflar ile ilgili çalışma yapılmıştır. Altıncı ve son bölümde bazı özel graflar için oluşturulan komşuluk matrisleri ve bu komşuluk matrislerinin \oplus_n toplama işlemine göre oluşan graf grup yapıları incelenecektir.

Anahtar Kelimeler: *Graf Teori, Komşuluk Matrisi, Laplasyan Matris, Normalize Laplasyan Matrisleri, Graf Gruplar.*

Tez Danışman: Doç. Dr. Hacı AKTAŞ

Sayfa adeti: 66

ALGEBRATIC STRUCTURE OF THE GRAPH THEORY

(M. Sc. Thesis)

Hüseyin Hilmi EROĞLU

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

February 2015

ABSTRACT

In our daily lives and in many different areas we use the concept of graph theory, even if we are not aware of it. We can work and practice with simple and systematic features of graph theory in many parts of our social and scientific life.

In this thesis, the first and second part of the history of graph theory, the definition and properties of graphs, some binary operations related literature about the graph have been studied. In addition, the adjacency matrix of the graph, information on the laplacian matrix and normalized laplacian matrix are given and mentioned some algebraic properties of the laplacian matrix.

Laplacian matrix of the graph in some special n points in the third and fourth part of the study and were generally values for normalized laplacian matrix. Identity matrix in the graph group in the fifth chapter, have been studied in relation to the zero matrix and Z_n formed by the addition and multiplication operations triangular graphs. The sixth and final section created for some special graphs and graph adjacency matrix group structures formed by the addition of the adjacency matrix \oplus_n will be examined.

Key Words: *Graph Teory, Adjacency Matrix, Laplacian Matrix, Normalize Laplacian Matrix, Graph Groups*

Thesis Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Hacı AKTAŞ

Page Number: 66

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY SAYFASI	i
TEZ BİLDİRİM SAYFASI	ii
TEŞEKKÜR	iii
ÖZET.....	vi
ABSTRACT.....	v
İÇİNDEKİLER	vi
SİMGE VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	viii
1. BÖLÜM	
GİRİŞ	1
2. BÖLÜM	
GRAF İÇİN TEMEL KAVRAMLAR.....	5
2.1. Grafın Tanımı ve Graf İçin Temel Kavramlar	5
2.2. Graf Çeşitleri	9
2.3. Graflarda İkili İşlemler.....	12
2.4. Graf Matrisler.....	13
3. BÖLÜM	
BAZI ÖZEL GRAFLAR İÇİN GENEL LAPLASYAN MATRİSLERİ	19
3.1. Sıfır Graflar İçin Laplasyan Matrisleri.....	19
3.2. Yol Graflar İçin Laplasyan Matrisleri.....	20
3.3. Çevre Graflar İçin Laplasyan Matrisleri	21
3.4. Tam Graflar İçin Laplasyan Matrisleri.....	22
3.5. Yıldız Graflar İçin Laplasyan Matrisleri.....	23
3.6. Tekerlek Graflar İçin Laplasyan Matrisleri.....	24

4. BÖLÜM

BAZI ÖZEL GRAFLAR İÇİN NORMALİZE LAPLASYAN MATRİSLERİ.....	26
4.1. Çevre Graflarda Normalize Laplasyan Matrisleri.....	26
4.2. Yol Graflarda Normalize Laplasyan Matrisleri	27
4.3. Tam Graflarda Normalize Laplasyan Matrisleri	28
4.4. Yıldız Graflarda Normalize Laplasyan Matrisleri	29
4.5. Tekerlek Graflarda Normalize Laplasyan Matrisleri	30

5. BÖLÜM

GRAF GRUPLAR	31
5.1. Z_n 'de Tanımlanan Grupların ve Halkaların Birim Graflarla Gösterimi.....	31
5.2. Yarı Grupların Graf Grup Yapıları.....	33

6. BÖLÜM

BAZI ÖZEL GRAFLAR İÇİN \oplus_n TOPLAMA İŞLEMİNE GÖRE GRAF GRUP YAPILARI.....	38
6.1. Yol Graflarda Graf Grup Yapıları.....	39
6.2. Çevre Graflarda Graf Grup Yapıları	43
6.3. Yıldız Graflarda Graf Grup Yapıları.....	47
6.4. Tam Graflarda Graf Grup Yapıları.....	51
6.5. Tekerlek Graflarda Graf Grup Yapıları.....	55
6.6. Euler Graflarda Graf Grup Yapıları	59

7. BÖLÜM

SONUÇ VE ÖNERİLER	63
KAYNAKLAR	64
ÖZGEÇMİŞ	66

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

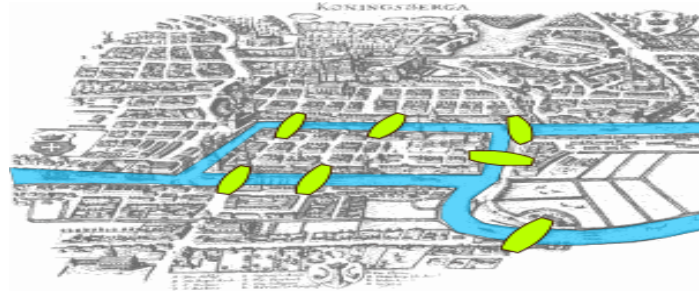
G	Graf
V	Noktalar kümesi
E	Kenarların kümesi
v_i	V 'ye ait noktalar
e_i	E 'ye ait kenarlar
d_v	Nokta derecesi
$A(G)$	Komşuluk matrisi
$L(G)$	Laplasyan matrisi
$D(G)$	Derece matrisi
$L_N(G)$	Normalize laplasyan matrisi
P_n	Yol graf
C_n	Çevre graf
K_n	Tam graf
$W_{1,n}$	Tekerlek Graf
$S_{1,n}$	Yıldız graf
\oplus_n	Toplama işlemi ($mod n$)
Ω	H tarafından üretilen grup
$v_i \sim v_j$	Komşu noktalar
$L_{G \sqcup H}$	G ve H graflarının birleşimi

BÖLÜM 1

GİRİŞ

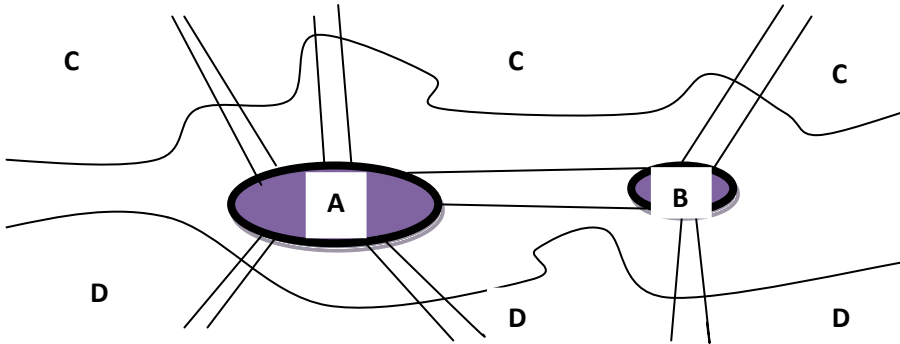
Königsberg kentinde, eski ve yeni Pregel nehirleri birleşerek Pregel (Pregolya) nehrini oluşturmaktadır. Bu nehirler şehri dört bölüme ayırmaktadır ve nehir üzerinde bu bölgeleri birleştiren yedi köprü bulunmaktadır. Merak edilen ise şudur:

"Herhangi bir düğüm noktasından harekete başlayıp, bütün kenarlardan bir ve yalnız bir kez geçerek, bütün düğümleri ziyaret ettikten sonra başlangıç düğümüne ulaşabilir miyiz? "



Şekil 1.1. Pregel Nehri ve Königsbergin Yedi Köprüsü

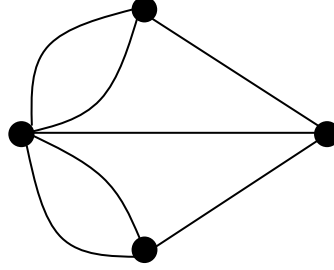
Königsberg kentinden akan Pregel ırmağındaki iki ada birbirlerine ve kıyılarına Şekil 1.1 de gösterildiği gibi yedi köprü ile bağlanmıştı. Euler (1707-1782) ünlü Königsberg Köprüsü sorununa çözüm ararken graf teorisinin temellerini atanlardan biri olmuştur. Pregel Şehri ve Königsberg Köprüsünün farklı olarak da Şekil 1.2' deki gibi ifade edebiliriz.



Şekil 1.2. Pregel Nehri ve Königsbergin yedi köprüsü

1736' da Euler' in incelemeleri böyle bir gezintinin mümkün olmadığını kanıtlamıştır. İlk olarak da problem üzerinde daha rahat hareket edebilmek için problemi bir şekilde

temsil etmiştir. Bu şekilde, şehrin dört bölümünü birer nokta ve köprüleri ise kenarlarla göstererek Şekil 1.3’ deki grafiği elde etmiştir.



Şekil 1.3. *Euler Grafi*

Euler, problemdeki dolaşmayı mümkün kılacak kenarların şu özelliklere sahip olmaları gerektiğini göstermiştir. Birleşik bir grafin bütün elemanlarını bir ve yalnız bir kez kullanarak dolaşmak için o grafin tek dereceli noktaların sayısı eğer varsa, iki olmalıdır. Geriye kalan noktalar çift dereceli olmalıdır. Tek dereceli noktalar dolaşmanın başlangıç ve bitiş noktalarıdır. Derecesi tek olan noktalar ara noktada olamaz. Çünkü bu noktadan bir daha çıkış yolu bulmayacağımızdan gezi tamamlanmamış olur. Grafta tek dereceli noktalar iki tane değilse, dolaşmaya herhangi bir noktadan başlanabilir. Örneğin, çift dereceli noktadan başlayan bir kişi, başladığı noktaya ikinci kez geldiğinde çıkış yolu bulamayacaktır. Dolayısıyla bu nokta gezintinin başlangıç ve bitiş noktası olmalıdır. Buna göre tek dereceli nokta sayısı ikiden fazlaysa da gezinti tamamlanamayacaktır. Yürüyüşün sonunda başlangıç noktasına dönülebilmesi içinse bütün noktaların çift dereceli olması gerekir. Euler grafinde görüldüğü gibi, grafa ait tüm nokta dereceleri tektir. Bundan dolayı da sorudaki gibi dolaşmayı gerçekleştirmek mümkün değildir [1].

Euler bu problemin çözümü için uğraşırken belki de matematiğin yeni bir uygulama alanını yarattığını fark etmemiştir. Sonraki yıllarda graf teori olarak bilinen bu yeni uygulama alanı birçok problemin de çözümüne katkıda bulunacaktır. Euler’ den sonra, 1847 yılında G. R. Kirchhoff’ un (1824 – 1887) Ağaç Teorisinin Elektrik Devrelerine Uygulanması ve A. Cayley (1821 – 1895) $C_n H_{2n+2}$ Doymuş Hidrokarbon İzomerlerinin sınıflaması çalışması sırasında ağaç kavramını keşfetmesi graf teorisinin farklı çalışma alanlarını ortaya çıkardı. 1852’ de Thomas Guthrie meşhur dört renk probleminin buldu. 1913’ de H. Dudeney bir puzzle probleminden bahsetmiştir. Dört renk problemi

icat edilirken bir asır sonra Kenneth Appel ve Wolfgang Haken tarafından çözüldü. Bu zaman graf teorisinin doğumu olarak göz önünde bulundurulur. Caley analitik şekilleri graf kullanarak çalıştı. Bunun teorik kimyada birçok etkisi oldu. 1941 yılında Ramsey, graf teorisinin bir başka branşı olan ekstrem graf olarak isimlendirilen renklendirmeleri çalıştı [2].

1962 yılında Çinli bir matematikçi olan Mei-Ko Kwan tarafından bir postacının postaneden aldığı mektupları mümkün olan en kısa yoldan şehirdeki tüm sokaklara uğrayarak dağıtmak istemesiyle ortaya çıkan çinli postacı problemi incelemiş ve bunun çözüm yolu için graf teorisini kullanılmıştır. 1969 yılında Heinrich tarafından bilgisayar kullanılarak dört renk problemi çözüldü [3].

Graf Teori ve uygulamalarına olan ilgi son yirmi yılda büyük bir hızla arttı. Bu artışın sebebi günlük hayatta yaşadığımız birçok soruna graf teorisini ile çözüm bulabilmemizdir. Karşılaştığımız birçok durum, bir noktalar kümesi ve bu noktaları birleştiren doğruların oluşturduğu şemalarla tanımlanabilir. Graf teorisini fikri bilgisayar biliminin uygulamalarında yoğun bir şekilde kullanılır. Özellikle veri madenciliği, görüntü segmentasyonu, kümeleme ile görüntü yakalama gibi bilgisayar biliminin araştırma alanlarında kullanılır. Örneğin bir veri yapısı köşeleri ve kenarları ağaç şeklinde düzenlenebilir. Benzer şekilde ağ maddeleri graf kavramları kullanılarak yapılabilir. Graf teorisini bilgisayara dayanan yeni yöntemlerin gelişmesiyle elektrik mühendisliğinde çok geniş bir alanı kapsayan bir matematik kolu olmuştur.

Bununla beraber graf teorisinin farklı uygulama alanları için şunları söyleyebiliriz. Noktalar şehirleri, bu noktaları birleştiren kenarları şehirlerin birbirine olan ana karayolu bağlantıları olarak tanımlayabiliriz. Bir kimyasal molekülde ise, noktalar atomları, bu noktaları birleştiren kenarlarla da bu atomların kimyasal bağlarını ifade edebiliriz. Bir sosyolog ise, bir grup insanın birbirine karşı davranış ve etkileşimlerini bir graf yardımı ile ifade edebilir. Otoyol haritaları, kalorifer, su sistemleri, bazı elementlerin şekilleri, soy ağaçları, kan dolaşımı, elektrik devreleri, bilgisayar uygulama alanı ve modelleme, genetik, çevre bilimi, arkeoloji, sanat, müzik vb. alanlarda da karşımıza çıkabilir [4].

Graf cebirsel yapılarda graf grup ve halka graf inşasında ve çeşitli cebirsel özellikleri açıklamada da kullanılır. Bunun yanı sıra graflara ait komşuluk matrislerinin Z_n ' de toplamsal işleme göre grup yapıları, bu işlemlerde oluşan komşuluk matrisleri de graflarla gösterilebilir.

Bu çalışmanın birinci ve ikinci bölümlerinde grafın tanımı, grafın bazı özellikleri ve graf matrisler, komşuluk matrisleri, derece matrisleri laplacian matrisleri ve normalize laplacian matrisleri hakkında bilgi verilmiştir. Üçüncü bölümde n noktalı graflar için genel laplasyan matrisleri bulunmuştur. Dördüncü bölümde n noktalı graflar için genel normalize laplasyan matrisleri bulunmuştur. Beşinci bölümde cebir de önemli bir yer tutan grup yapılarının graflarla gösterilmesi ve bununda graf grup olarak adlandırılması üzerinde çalışılmıştır. Grup graf yapısı incelenirken ilerde açıklayacağımız üçgensel graf, birim graf, sıfır graf, birim-sıfır graf, sıfır tam bölen graflarla gösterilmiştir. Altıncı bölümde ise \oplus_n toplama işlemine göre oluşan komşuluk matrislerinin graf yapıları ve bu komşuluk matrislerinin graf grup yapıları incelenmiştir.

BÖLÜM 2

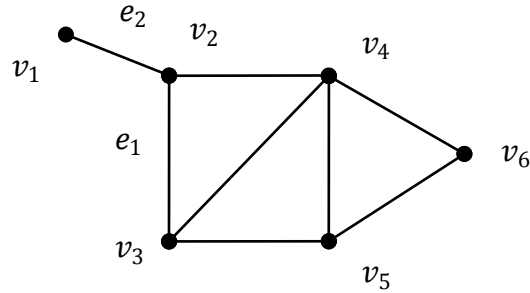
GRAF İÇİN TEMEL KAVRAMLAR

Temel bilgilerden oluşan bu bölüm dört kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda graflar için temel kavramlar verilecektir. İkinci kısımda ilerdeki konularda üzerlerinde cebirsel olarak çalışacağımız graf çeşitlerinden *sıfır graf*, *yol graf*, *yıldız graf*, *tam graf*, *çevre graf*, *tekerlek graflarla* ilgi bilgi verilecektir. Üçüncü kısımda graflar için bazı ikili işlemler ifade edilmiştir. Dördüncü kısımda ise graf matris kavramı, komşuluk matrisleri, laplasyan matrisleri, normalize laplasyan matrisleri incelenmiştir.

2.1. Grafın Tanımı

Tanım 2.1.1. Bir G grafi V ile gösterilen nokta kümeleri ile bu nokta kümelerini birbirine bağlayan ve E ile gösterilen, kenar adı verilen elemanlardan oluşan kümeye denir ve *graf* $G=(V, E)$ ile gösterilir [5].

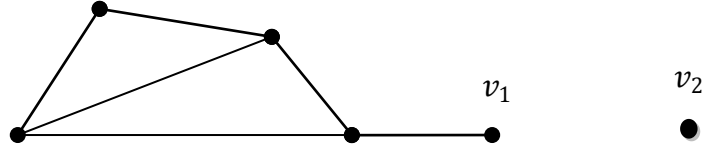
Bir grafta E kümesinin herhangi bir $e \in E$ elemanına grafın bir kenarı ve bu kenar $e = (u, v)$ ile tanımlanmışsa $u, v \in E$ olmak üzere u ve v noktalarına *komşu noktalar* denir. Eğer e_1 ve e_2 G de ortak bir noktayla bağlı kenarlar ise bu kenarlara da *bitişik kenarlar* denir.



Şekil 2.1.1. Altı noktalı graf [6].

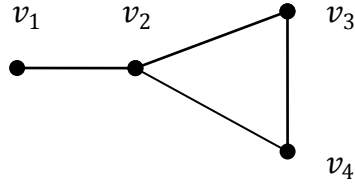
Şekil 2.1.1 ile verilen grafta $e_1 = (v_2, v_3)$ olduğundan v_2, v_3 komşu noktalar. e_1 ve e_2 kenarları ortak v_2 noktası ile bağlı olduklarından *bitişik kenarlar*dır.

Tanım 2.1.2. G grafında v noktasına bağlı kenarların sayısı v noktasının derecesi olarak isimlendirilir ve $deg(v)$ ile gösterilir. G grafında herhangi bir nokta derecesi sıfır ise bu nokta *ayrık (izole) nokta*, herhangi bir nokta derecesi 1 ise bu noktaya de *uç nokta* denir.

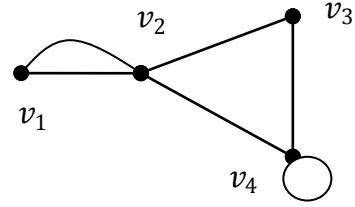


Şekil 2.2.2. v_1 uç nokta v_2 ayık (izole) nokta

Tanım 2.1.3. Bir grafta noktayı kendine bağlayan kenara ilmek, iki noktanın birbirine birden fazla kenar ile bağlanmasına ise çoklu kenar denir. Çoklu kenar ve ilmeği olmayan graf *basit graf*, çoklu kenar ve ilmek bulunan grafa ise *basit olmayan graf* denir.



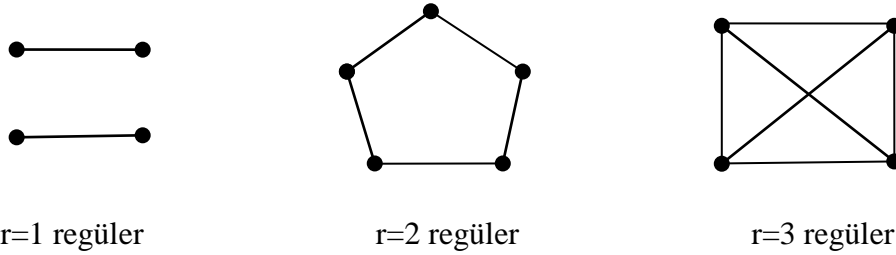
Şekil 2.1.3.



Şekil 2.1.4.

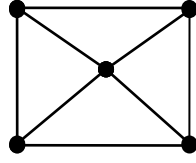
Şekil 2.1.3 Basit graf ve Şekil 2.1.4 ise basit olmayan graf örneğidir [7].

Tanım 2.1.4. Bir grafın tüm nokta dereceleri birbirine eşit ise grafa, *regüler (düzenli)* graf veya *k-regüler graf* denir [8]. (k ; noktalara ait kenar sayısı)

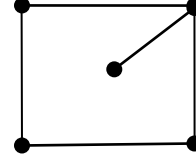


Şekil 2.1.5. $r=1, 2, 3$ regüler (düzenli) graflar

Tanım 2.1.5. H ve G birer graf olmak üzere; $V(H) \subseteq V(G)$ ve $E(H) \subseteq E(G)$ ise H grafına G ' nin bir *alt grafıdır* denir. G grafindan nokta veya kenar silinerek G ' nin bir *alt grafı* elde edilebilir.



Şekil 2.1.6. G grafi



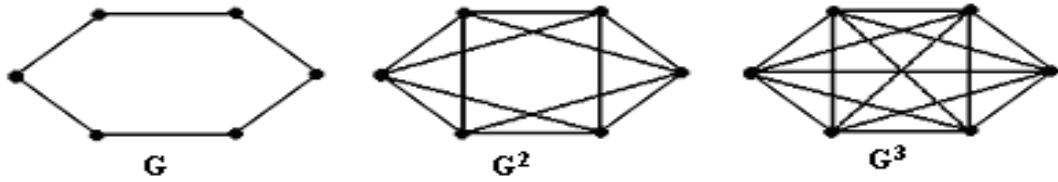
Şekil 2.1.7. H grafi

Şekil 2.1.6' daki G grafindan bazı kenarlar çıkarılarak, G ' nin Şekil 2.1.7' deki H alt grafi elde edilir [9].

Alt graf, bir grafin herhangi bir parçası şeklinde de düşünülebilir. Kümeler teorisinde kullanılan alt küme sembolü, alt grafi göstermek için de kullanılabilir ve $G_{alt} \subseteq G$ iken G_{alt} grafi G nin alt grafidir şeklinde ifade edilir. Alt graf için aşağıda verilen özellikler geçerlidir.

- 1) Her graf kendisinin alt grafidir.
- 2) G grafinin herhangi bir noktası tek başına G ' nin alt grafidir.
- 3) G ' deki tek bir kenar kendi başlangıç ve bitiş noktaları ile birlikte G ' nin alt grafidir.

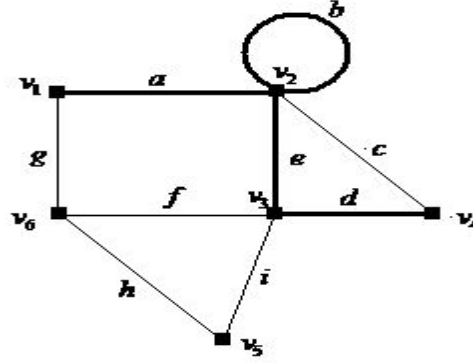
Tanım 2.1.7. G grafinin k . kuvveti alındığında oluşan graf G ile aynı nokta kümesine sahiptir. İki nokta arasındaki yol k uzunluğunda ise bu noktaların bir kenarla birleştirilmesiyle G nin kuvvetleri oluşur. Bu G^k ile gösterilir. Buna grafin kuvveti denir. Şekil 2.8' de G grafi ve kuvvetleri verilmiştir.



Şekil 2.1.8. G grafinin kuvvetleri (G grafinin gücü G^2 ve G^3)

Tanım 2.1.8. Bir nokta ile başlayıp herhangi bir nokta ile biten, noktalar arasındaki bağlantıları o noktalar ile ilişkili kenarların kurduğu hareketler zincirine *adım* denir. *Adım* içerisinde bir kenar iki kez kullanılmazken, bir nokta birden fazla kullanılabilir. Şekil 2.1.9' da $v_1 av_2 bv_2 ev_3 dv_4$ de kalın çizgi ile gösterilen adımdır. Adım aynı

zamanda *kenar dizisi* veya *zincir* olarak da adlandırılır. Bir adımı oluşturan kenar ve noktalar kümesi, açıktır ki, verilen grafın bir *alt grafıdır*.



Şekil 2.1.9.

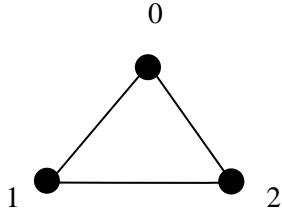
Adımın başlangıç ve bitiş noktaları *kutup noktaları* olarak adlandırılır. Şekil 2.1.9' da gösterilen adımda v_1 ve v_4 noktaları *kutup noktalarıdır*. Başlangıç ve bitiş noktaları aynı olan adım *kapalı adım*, başlangıç ve bitiş noktaları farklı olan adım ise *açık adım* olarak tanımlanır. Her noktanın bir kez kullanıldığı *açık adım*, *yol* olarak adlandırılır.

Şekil 2.1.9 da $v_1 av_2 ev_3 dv_4$ bir *yol*; ancak $v_1 av_2 bv_2 ev_3 dv_4$ bir *yol* değildir. Başka bir ifade ile *yol* kendisini kesmez. *Yol* içindeki kenarların sayısı ile *yol* uzunluğu elde edilir. *Adım* içerisinde döngü bulunabilir ancak *yol* içerisinde döngü bulunamaz.

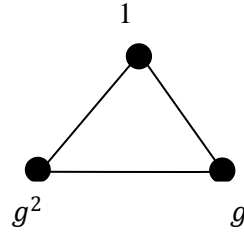
Bir yolun başlangıç ve bitiş noktaları aynı ise bu yola *kapalı yol* denir. Şekil 2.1.9 da $v_5 hv_6 fv_3 iv_5$ yolu *kapalı yoldur* [10].

Tanım 2.1.9. Z_n bir yarı grup ve $(Z_n, *)$ işlemi tanımlansın. $x, y \in Z_n$ olmak üzere $x*y=0$ ise $(Z_n, *)$ işlemi gösteren grafa *sıfır graf* denir. $x*y=1$ ise $(Z_n, *)$ işlemi ifade eden grafa ise *birim graf* denir.

Örnek olarak; $Z_3 = \{0,1,2\}$ yarı grubu toplamsal işlemde sıfır graf Şekil 2.1.10 ve $M_3 = \langle g : g^3 = 1 \rangle$ çarpımsal işlemine göre birim graf yapısı Şekil 2.1.11 ile gösterilmiştir [11].



Şekil 2.1.10. *Sıfır graf*

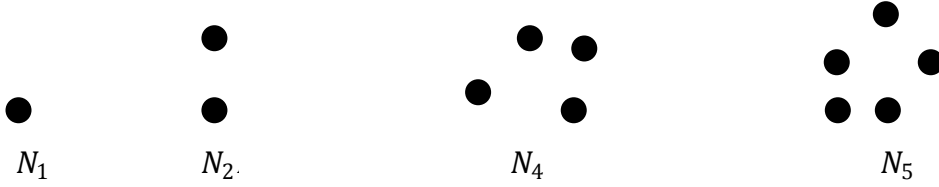


Şekil 2.1.11. *Birim graf*

2.2. Graf Çeşitleri

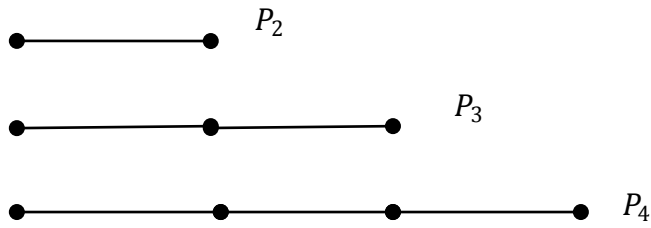
Bu kısımda bazı graf yapıları tanımlanmış ve sembolik gösterimleri verilmiştir.

Tanım 2.2.1. Nokta dereceleri sıfır olan graflara *sıfır (null) graflar* denir. Null graflar N_n ile gösterilir [12].



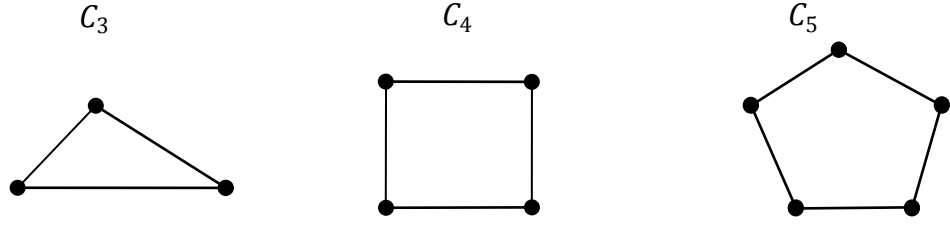
Şekil 2.2.1. 1, 2, 4, 5 noktalı *sıfır graflar*

Tanım 2.2.2. Noktalarından iki tanesinin derecesi 1, diğer tüm noktalarının dereceleri 2 olan grafa *yol graf* denir. n noktalı bir *yol graf* P_n ile gösterilir. n noktalı bir yol grafın kenar sayısı ise $(n-1)$ ' dir [23] .



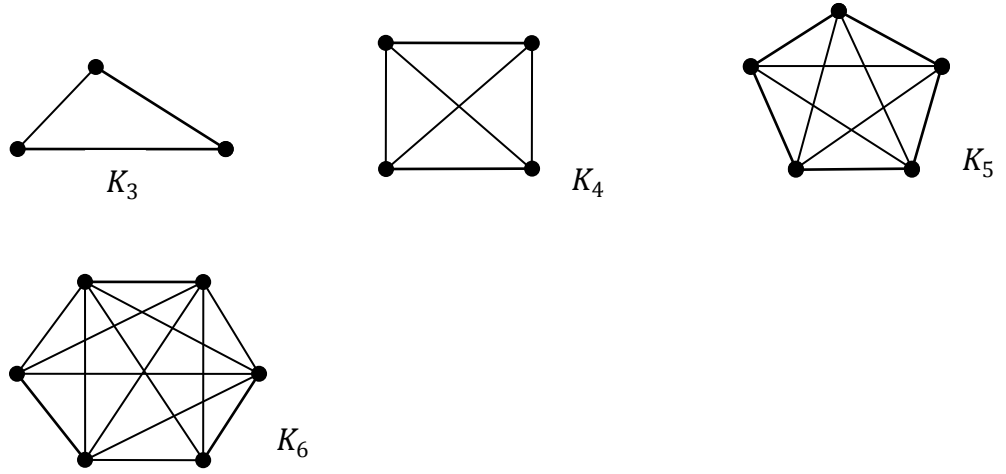
Şekil 2.2.2. 2, 3, 4 *yol graflar*

Tanım 2.2.3. Her noktanın derecesi 2 olan grafa *çevre graf* denir. n noktalı bir *çevre graf* C_n ile gösterilir. n noktalı bir çevre grafın kenar sayısı n tanedir [24] .



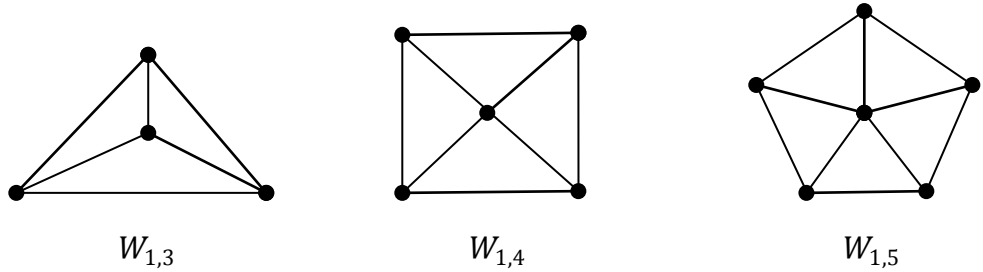
Şekil 2.2.3. 3, 4 ve 5 noktalı çevre graflar

Tanım 2.2.4. Bir G grafında, herhangi iki nokta arasında mutlaka bir kenar var ise bu grafa tam graf denir. n noktalı bir tam graf K_n ile gösterilir. Tam grafta her bir noktanın derecesi ise $(n - 1)$ dir.



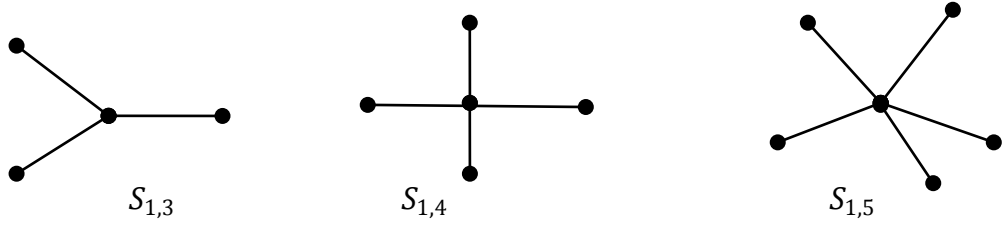
Şekil 2.2.4. 3, 4, 5 ve 6 noktalı tam graflar

Tanım 2.2.5. $(n + 1)$ noktalı bir çevre grafın her bir noktası, bir tek noktayla (bu nokta çevre grafa ait değildir) birer kenar eklenmesiyle elde edilen grafa tekerlek graf denir. n noktalı bir tekerlek graf $W_{1,n}$ ile gösterilir.



Şekil 2.2.5. 4, 5, 6 noktalı tekerlek graflar

Tanım 2.2.6. $(n + 1)$ noktalı bir G grafında bir noktanın derecesi n , diğer noktaların derecesi 1 ise, bu grafa yıldız graf denir. Yıldız graflar $S_{1,n}$ ile gösterilir [13].



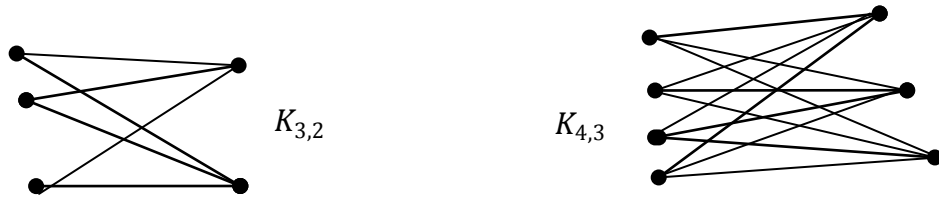
Şekil 2.2.6. 4, 5, 6 noktalı yıldız graflar

Tanım 2.2.7. Bir G grafinin noktalar kümesi A ve B gibi iki kümeye ayrılıyor ve A kümesine ait noktalar birbiriyle bir kenar ile bağlanmıyorsa ve aynı şekilde B' ye ait noktalar da bir kenar ile birbirine bağlı değilse bu grafa *iki parçalı graflar* denir. A' ya ait noktaların sayısı m ve B' ye ait noktaların sayısı n ise; *iki parçalı tam graf*, $G_{m,n}$ ile gösterilir.



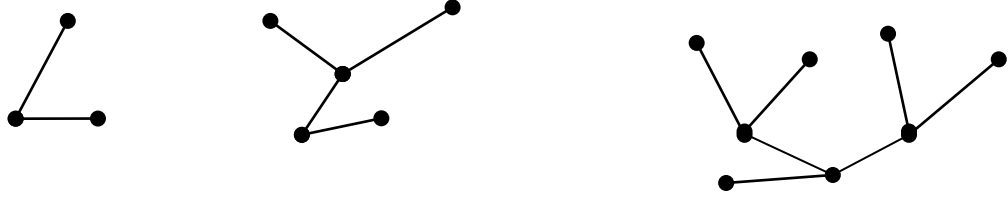
Şekil 2.2.7. 5 ve 8 noktalı iki kümeli graflar

Tanım 2.2.8. Bir iki parçalı grafta A kümesinin her bir noktası, B kümesinin her bir noktası ile bitişikse böyle graflara *iki parçalı tam graflar* denir. A' ya ait noktaların sayısı m ve B ye ait noktaların sayısı n ise; *iki parçalı tam grafi* $K_{m,n}$ ile gösterilir.



Şekil 2.2.8. 5 ve 7 noktalı iki kümeli tam graflar

Tanım 2.2.9. Çevre içermeyen graflara *ağaç graf* denir. Ağaçlar, en basit, en yalın, en sade graflardır. Örneğin, her yol graf, yıldız graf ve iki parçalı graf birer ağaç graftır.



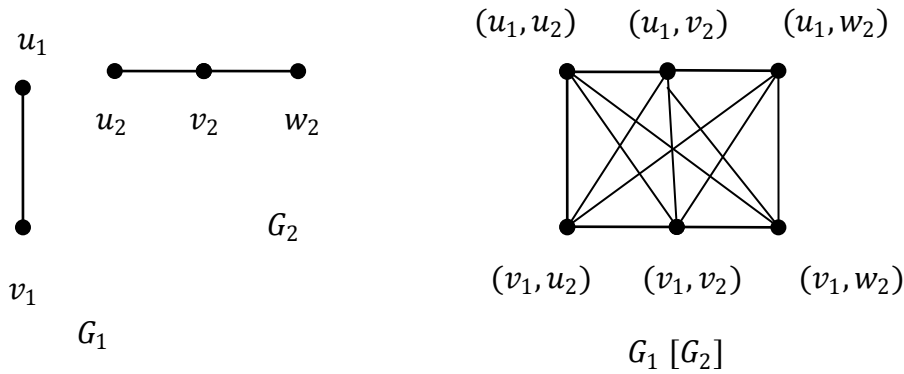
Şekil 2.2.9. 3, 5, 8 noktalı ağaç graflar

2.3. Graflarda İkili İşlemler

Birden fazla grafin ortak kullanılması gereken durumlarda ikili işlemlere başvurulur. Bu kısımda bileşke işlemi, toplama işlemi, kartezyen çarpım işlemi hakkında bilgi verilmiştir.

2.3.1. Graflarda bileşke işlemi: G_1 ve G_2 graflarından bileşke işlemi ile elde edilen graf $G_1 [G_2]$ ile gösterilir. G_1 ' in noktalar kümesi V_1 , G_2 ' nin noktalar kümesi V_2 ise $G_1 [G_2]$ ' nin noktalar kümesi V_1 ve V_2 ' nin kartezyen çarpımı olur. Bu işlemde kenarlar şu şekilde belirlenir. $G_1 [G_2]$ ' nin herhangi iki noktası $u = (u_1, u_2)$ ve $v = (v_1, v_2)$ olsun. Eğer u_1 , ve v_1 komşu ise veya $u_1 = v_1$ ve u_2, v_2 ile komşu ise u ve v noktaları bir kenarla bitişirilir. G_1 grafinin nokta sayısı m , G_2 grafinin nokta sayısı n ise $G_1 [G_2]$ grafinin nokta sayısı $m \times n$ dir.

Örnek 2.3.1. Aşağıdan iki noktalı G_1 grafi ve üç noktalı G_2 graflarına ait $G_1 [G_2]$ bileşke işlemi gösterilmiştir.

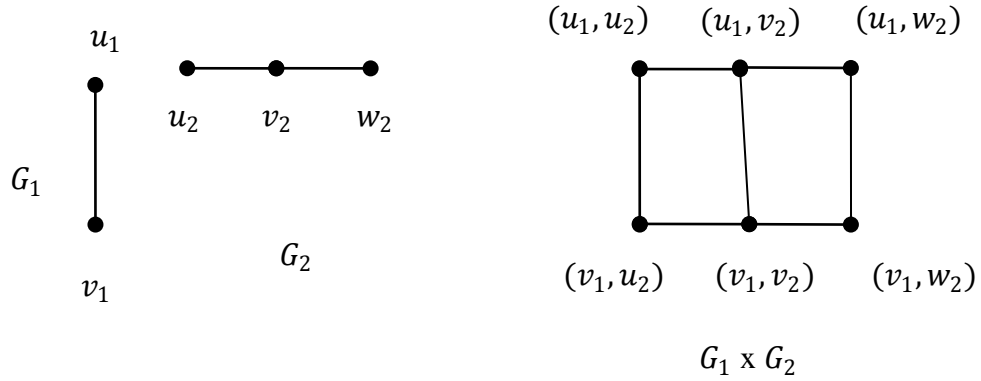


Şekil 2.3.1. G_1, G_2 grafları için $G_1 [G_2]$ bileşke işlemi

2.3.2. Graflarda kartezyen çarpım: G_1 ve G_2 gibi iki grafin kartezyen çarpımı $G_1 \times G_2$ ile gösterilir. G_1 ' in noktalar kümesi V_1 , G_2 ' nin noktalar kümesi V_2 olmak üzere $G_1 \times G_2$ 'nin noktalar kümesi bu kümelerin kartezyen çarpımıdır. Bu işlemde kenarlar şu

şekilde belirlenir. G_1 ve G_2 'nin herhangi iki noktası $u = (u_1, u_2)$ ve $v = (v_1, v_2)$ olsun. $G_1 \times G_2$ 'nin noktaları belirlendikten sonra $u_1 = v_1$ ve u_2, v_2 ile komşu ise ya da $u_2 = v_2$ ve u_1, v_1 ile komşu ise bu iki nokta bir kenarla birleştirilir.

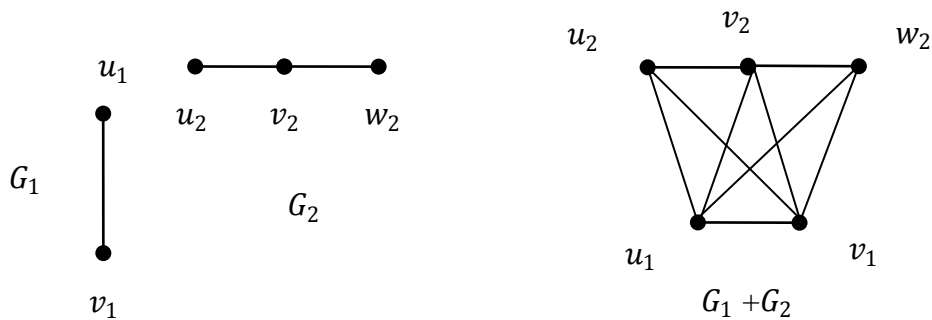
Örnek 2.3.2. Aşağıdan iki noktalı G_1 grafi ve üç noktalı G_2 graflarına ait $G_1 \times G_2$ ikili işlemi gösterilmiştir.



Şekil 2.3.2. G_1, G_2 ve $G_1 \times G_2$ ye ait graf

2.3.3. Graflarda toplama işlemi: G_1 ve G_2 , m ve n noktalı iki graf olsun. G_1 'in her bir noktası G_2 'nin her bir noktası bir kenar ile birleştirilmesiyle elde edilen grafa G_1 ve G_2 graflarının toplamı denir. $G_1 + G_2$ ile gösterilir. Elde edilen graf $m + n$ noktalıdır.

Örnek 2.3.3. Aşağıdan iki noktalı G_1 grafi ve üç noktalı G_2 graflarına ait $G_1 + G_2$ ikili işlemi gösterilmiştir.



Şekil 2.3.3. G_1, G_2 ve $G_1 + G_2$ ye ait graf

2.4. Graf Matrisler

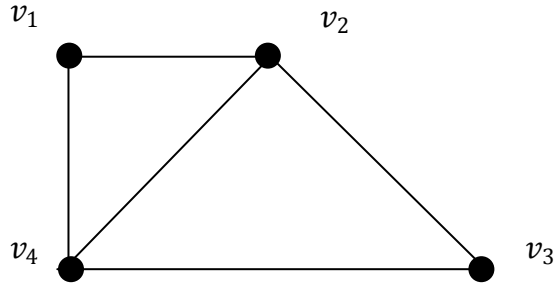
2.4.1. Komşuluk Matrisi

G grafının noktalarının kümesi $V_G = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ olan n noktalı bir graf olsun. G komşuluk matrisi $n \times n$ tipinde simetrik bir matristir. $A(G)$ komşuluk matrisi olmak üzere;

$$A(G) = (a_{ij}) = \begin{cases} 1; & v_i \sim v_j \quad \text{eğer } v_i \text{ ve } v_j \text{ bir kenarla bağlı} \\ 0; & v_i \text{ ve } v_j \text{ bir kenarla bitişik değilse.} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır [14].

Örnek 2.4.1. Aşağıda Şekil 2.4.1 ile gösterilen G grafının komşuluk matrisini bulalım.



Şekil 2.4.1. Dört noktalı G grafi

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Şekil 2.4.1 grafına ait komşuluk matrisidir.

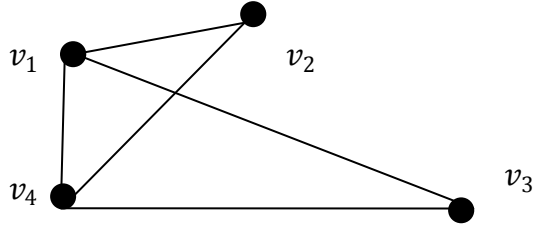
2.4.2. Derece Matrisi

Bir G grafında $d_i, v_i \in V_G$ noktasının derecesi olmak üzere, G 'nin nokta derecelerinin köşegen matrisi

$$D(G) = \text{köş } (d_1, d_2, \dots, d_n) = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & d_n \end{bmatrix}$$

şeklinde köşegen bir matristir.

Örnek 2.4.2. Aşağıda Şekil 2.4.2 ile gösterilen G grafının derece matrisini bulalım.



Şekil 2.4.2. Dört noktalı G grafi

$$D(G) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

G grafının derece matrisidir.

2.4.3. Laplasyan Matrisler

Bir G grafının Laplasyan matrisi, $L(G)$ $n \times n$ simetrik bir matris olup,

$$L(G) = (L_{ij}) = \begin{cases} d_i; & i=j \text{ ise} \\ -1; & v_i \sim v_j \\ 0; & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

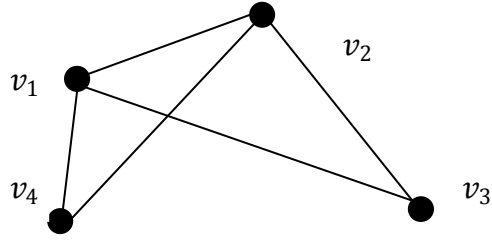
şeklinde tanımlanır.

Bir G grafının laplasyan matrisinin; komşuluk matrisi ve derece matrisi türünden,

$$L(G) = D(G) - A(G) \tag{2.1}$$

şeklinde ifade edilir [15].

Örnek 2.4.3. Aşağıda Şekil 2.4.3 ile gösterilen G grafının komşuluk matrisini bulalım.



Şekil 2.4.3. Dört noktalı G grafi

$$D(G) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$L(G) = D(G) - A(G)$ olduğundan;

$$L(G) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

2.4.4. Normalize Laplasyan Matrisler

G grafinin normalize laplasyan matrisi simetrik matris olup;

$$L_N(G) = (L_{ij}) = \begin{cases} 1; & i=j \text{ ise} \\ -\frac{1}{\sqrt{d_i \cdot d_j}}; & v_i \sim v_j \\ 0; & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

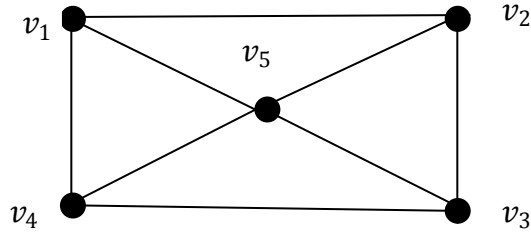
şeklinde tanımlanır.

Bu tanımdan izole noktası olmayan bir G grafinin normalize laplasyan matrisinin

$$L_N(G) = D(G)^{-1/2} L(G) D(G)^{-1/2} \quad (2.2)$$

Şeklinde de ifade edilir [16].

Örnek 2.4.4. Aşağıda Şekil 2.4.4 ile gösterilen G tekerlek grafinin komşuluk matrisini bulalım.



Şekil 2.4.4. $W_{1,4}$ G tekerlek grafi

$$D(G) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

G grafinin nokta dereceleri

$$d_1=d_2=d_3=d_4=3 \text{ ve } d_5=4$$

elde edilen matrislere göre Şekil 2.4' e ait laplasyan matrisi,

$$L(G) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Normalize laplasyan matrisi ise;

$$L_N(G) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{3} & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{3} & 1 & \frac{-1}{3} & 0 & \frac{-1}{2\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-1}{3} & 1 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{3} & 0 & \frac{-1}{3} & 1 & \frac{-1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{2\sqrt{3}} & \frac{-1}{2\sqrt{3}} & \frac{-1}{2\sqrt{3}} & \frac{-1}{2\sqrt{3}} & 1 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

2.5. Laplasyan Martrisin Bazı Cebirsel Özellikleri

Lemma 2.5.1. (*Kenar Birleşimi*) : G ve H noktalar kümesi ve kenarlarının kümesi ayrık iki graf olsun.

$$L_{G \sqcup H} = L_G + L_H \quad (\text{Toplamsal}) \quad (2.3)$$

Lemma 2.5.2. (*İzole nokta*) : $i \in G$ noktası izole nokta ise, laplasyan matrisin tüm satır ve sütunları sıfırdır. Her j için,

$$[L_G]_{i,j} = [L_G]_{j,i} = 0 \quad (2.4)$$

şeklindedir.

Lemma 2.5.3. (*Ayrık Birleşim*) : G ve H graflarının birleşimi, L_G ve L_H laplasyan matrislerinin direk toplamı olarak ifade edilir ve,

$$L_{G \sqcup H} = L_G \oplus L_H = \begin{bmatrix} L_G & 0 \\ 0 & L_H \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

eşitliği ile verilir.

İspat: $G \sqcup v(H) = (V_G \cup V_H, E_G)$ grafını ele alalım. Bunun anlamı G ile H grafına ait noktaların birleşiminden oluşur. Benzer şekilde $v(G) \sqcup H$ da tanımlanır.

Lemma 2.5.2 den,

$$L_{G \sqcup v(H)} = \begin{bmatrix} L_G & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } L_{v(G) \sqcup H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & L_H \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

elde edilir.

Buradan yola çıkarak,

$$G \sqcup H = (G \cup v(H)) \cup (v(G) \sqcup H)$$

Lemma 2.5.1 den dolayı,

$$L_{G \sqcup H} = L_G \oplus L_H = \begin{bmatrix} L_G & 0 \\ 0 & L_H \end{bmatrix} \text{ olur.} \quad (2.7)$$

Buradan laplasyan matrisler, bağlı bileşenlerin laplasyanlarının direk toplamına eşittir [17].

BÖLÜM 3

BAZI ÖZEL GRAF İÇİN GENEL LAPLASYAN MATRİSLERİ

Bu bölüm de, bazı özel graflar (*sıfır graflar, yol graflar, çevre graflar, tam graflar, tekerlek graflar*) için laplacian matrisleri incelenecek ve n noktalı graflar için genel laplacian matrisleri gösterilecektir.

3.1. Sıfır (Null) Graflar İçin Laplasyan Matrisleri

Sıfır graflarda noktalar bir kenarla birleşmediğinden matrisin bütün kenar bağlantıları 0 olacaktır. Aşağıda N_2, N_3 noktalı null grafların laplasyan matrislerinden sonra N_n genel grafi için laplasyan matrisi verilmiştir [18].

$$D(G) - A(G) = L(G)$$
$$N_2 \quad \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Şekil 3.1.

$$N_3 \quad \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \end{array} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Şekil 3.2.

$$N_n \quad \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \end{array} \quad \begin{bmatrix} 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix}$$

Şekil 3.3.

Sonuç olarak, n noktalı null graflar için laplasyan matrisin tüm değerleri sıfırdır.

3.2. Yol Graflar İçin Laplasyan Matrisleri

Bir P_n yol grafinda her bir nokta, komşu olduğu noktalarla tek bir yol oluşturacak şekilde birleşir. Dolayısıyla komşuluk matrisinin ilk ve son satırlarında birer tane, diğer satırlarda ikişer tane 1 olup, diğer tüm veriler 0 olacaktır. Aşağıda P_4 ve P_6 yol graflarına karşılık gelen derece matrisleri, komşuluk matrisleri ve buradan yola çıkılarak bulunan laplasyan matrisleri verilerek; P_n yol grafi için genel laplasyan matrisi gösterilmiştir [25].

$$D(G) \quad - \quad A(G) \quad = \quad L(G)$$



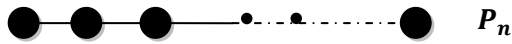
Şekil 3.4.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$



Şekil 3.5.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$



Şekil 3.6.

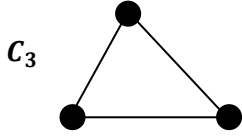
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Sonuç olarak, n noktalı *yol graf* için genel laplasyan matrisi elde edilmiştir.

3.3. Çevre Graflar İçin Laplasyan Matrisleri

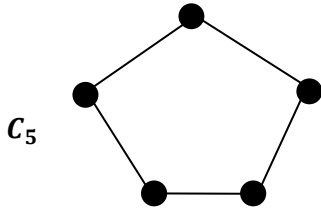
Bir C_n çevre grafında, noktalar kendisine komşu olan iki nokta ile kenarlarla bağlanır. Dolayısıyla $n \geq 3$ için C_n çevre grafında her bir noktaya karşılık gelen satırda iki tane 1 olup diğer tüm girdiler 0 olacaktır. Aşağıda $n = 3$ ve $n = 5$ için laplasyan matrisleri gösterilmiş. Buradan yola çıkılarak C_n çevre grafı ve bunlara karşılık gelen laplasyan matrisi verilmiştir.

$$D(G) - A(G) = L(G)$$



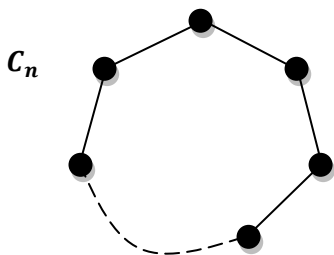
Şekil 3.7.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$



Şekil 3.8.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$



Şekil 3.9.

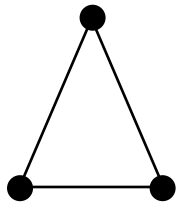
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \vdots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ -1 & 2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 2 \end{bmatrix}$$

Sonuç olarak, n noktalı çevre graflar için genel laplacian matrisi elde edilir.

3.4. Tam Graflar İçin Laplasyan Matrisleri

Bir K_n tam grafinde her nokta kendisi hariç diğer bütün noktalarla bir kenar ile birleşir. Dolayısıyla komşuluk matrisin köşegeni üzerindeki tüm girdiler 0, diğerleri ise 1 olacaktır. Aşağıda K_3 ve K_4 tam graflarına ait laplasyan matrisleri gösterilerek, K_n tam grafinin karşılık gelen laplasyan matrisi gösterilmiştir.

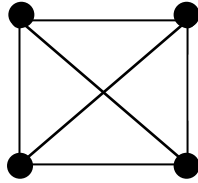
$$D(G) - A(G) = L(G)$$



K_3

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

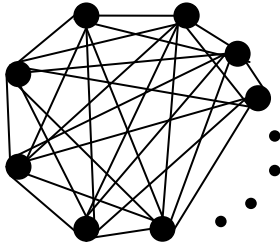
Şekil 3.10.



K_4

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Şekil 3.11.



K_n

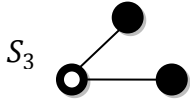
Şekil 3.12.

$$\begin{bmatrix} n-1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & n-1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & n-1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & \dots & \dots & \dots & n-1 \end{bmatrix}$$

3.5. Yıldız Graflar İçin Laplasyan Matrisleri

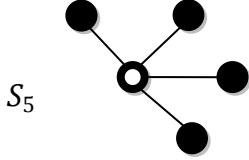
Bir S_n yıldız grafında, içi dolgunsuz olan nokta diğer siyah noktalar ile birer komşuluk oluşturmaktadır. Aşağıda S_3 ve S_5 yıldız graflarına karşılık gelen laplasyan matrisleri verilmiş ve buradan yola çıkılarak S_n yıldız grafi için genel laplasyan matrisi gösterilmiştir.

$$D(G) - A(G) = L(G)$$



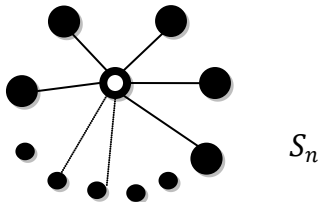
Şekil 3.13.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Şekil 3.14.

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Şekil 3.15.

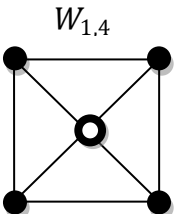
$$\begin{bmatrix} n-1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 & -1 & -1 & \dots & \dots & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & & & \vdots & \cdot \\ \cdot & & & \ddots & & \vdots & \cdot \\ \cdot & & & & \ddots & \vdots & \cdot \\ -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sonuç olarak, n noktalı yıldız graflar için genel laplasyan matrisi elde edilir.

3.6. Tekerlek Graflar İçin Laplasyan Matrisleri

Aşağıda $W_{1,4}$, $W_{1,5}$ tekerlek graflarına ait laplasyan matrisleri verilerek $W_{1,n}$ şeklindeki *tekerlek grafi* için genel bir laplasyan matrisi gösterilmiştir.

$$D(G) - A(G) = L(G)$$



$W_{1,4}$

$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

$-$

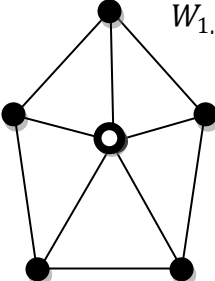
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$=$

$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

Şekil 3.16.

$$D(G) - A(G) = L(G)$$



$W_{1,5}$

$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

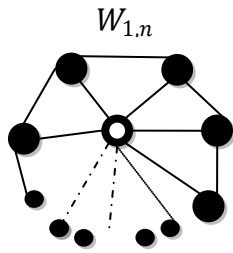
$-$

$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$=$

$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

Şekil 3.17.



Şekil 3.18.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 1 & & & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & \dots & \dots & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & -1 & \ddots & & & \vdots & -1 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & \dots & -1 & n \end{bmatrix}$$

Sonuç olarak n noktalı tekerlek graflar için genel laplasyan matrisi elde edilir.

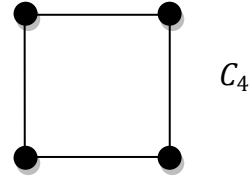
BÖLÜM 4

BAZI ÖZEL GRAFLAR İÇİN NORMALİZE LAPLASYAN MATRİSLERİ

Bu bölüm de bazı özel graflara ait normalize laplasyan matrisleri incelenecek ve n noktalı özel graflar için genel normalize laplasyan matrisleri gösterilecektir.

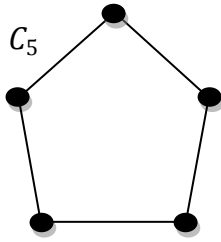
4.1. Çevre Graflarda Normalize Laplasyan Matrisleri

Aşağıda $n = 4$ ve $n = 5$ için normalize laplasyan matrisleri gösterilmiş. Buradan yola çıkılarak C_n çevre grafına ait normalize laplasyan matrisi verilmiştir.



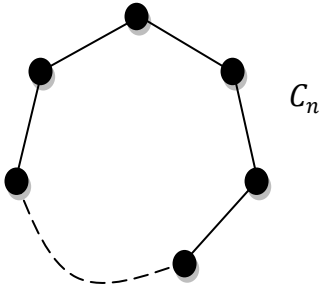
Şekil 4.1.

$$L_N(G) = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$



Şekil 4.2.

$$L_N(G) = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$



Şekil 4.3.

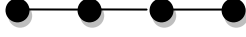
$$L_N(G) = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots & \dots & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \ddots & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots & \dots & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Sonuç olarak n noktalı çevre graf için genel normalize laplasyan matrisi elde edilir.

4.2. Yol Graflarda Normalize Laplasyan Matrisleri

Aşağıda P_4, P_5 yol graflarına karşılık gelen normalize laplasyan matrisleri verilerek; P_n yol grafi için genel normalize laplasyan matrisi gösterilmiştir.

P_4



Şekil 4.4.

$$L_N(G) = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{bmatrix}$$

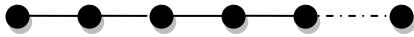
P_5



Şekil 4.5.

$$L_N(G) = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{bmatrix}$$

P_n



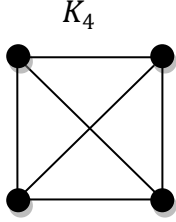
Şekil 4.6.

$$L_N(G) = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & & & \vdots \\ \vdots & 0 & -\frac{1}{2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{bmatrix}$$

Sonuç olarak n noktalı yol graflar için genel normalize laplasyan matrisi elde edilir.

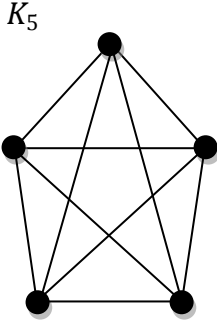
4.3. Tam Graflarda Normalize Laplasyan Matrisleri

Aşağıda K_4 , K_5 noktalı tam graflar ait normalize laplasyan matrisleri gösterilerek, K_n tam grafına karşılık gelen normalize laplasyan matrisine ait genel sonuç gösterilmiştir.



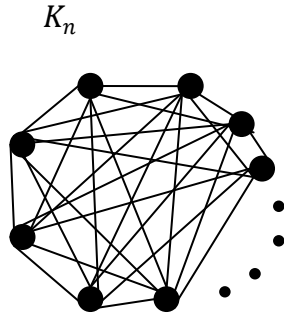
Şekil 4.7.

$$L_N(G) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & 1 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & 1 & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$



Şekil 4.8.

$$L_N(G) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-1}{4} & 1 & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & 1 & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & 1 & \frac{-1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & 1 \end{bmatrix}$$



Şekil 4.9.

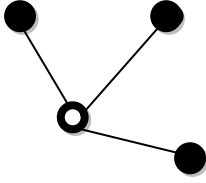
$$L_N(G) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{n-1} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{-1}{n-1} \\ \frac{-1}{n-1} & 1 & \frac{-1}{n-1} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{-1}{n-1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \frac{-1}{n-1} & 1 & \frac{-1}{n-1} \\ \frac{-1}{n-1} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{-1}{n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

Sonuç olarak n noktalı tam graflar için genel normalize laplasyan matrisi elde edilir.

4.4. Yıldız Graflarda Normalize Laplasyan Matrisleri

Aşağıda S_4 , S_5 yıldız graflarına karşılık gelen normalize laplasyan matrisleri verilmiş ve buradan yola çıkılarak S_n yıldız grafi için genel normalize laplasyan matrisine ulaşılmıştır.

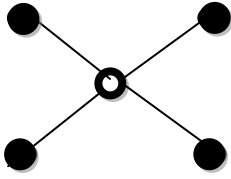
S_4



Şekil 4.10.

$$L_N(G) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & 1 \end{bmatrix}$$

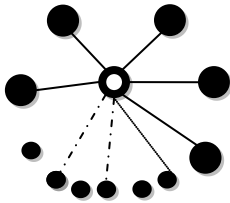
S_5



Şekil 4.11.

$$L_N(G) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{\sqrt{4}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{\sqrt{4}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{\sqrt{4}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{\sqrt{4}} \\ \frac{-1}{\sqrt{4}} & \frac{-1}{\sqrt{4}} & \frac{-1}{\sqrt{4}} & \frac{-1}{\sqrt{4}} & 1 \end{bmatrix}$$

S_n



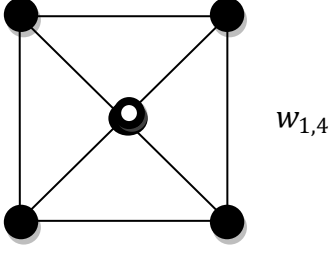
Şekil 4.12.

$$L_N(G) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \frac{-1}{\sqrt{n-1}} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \frac{-1}{\sqrt{n-1}} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{-1}{\sqrt{n-1}} & \frac{-1}{\sqrt{n-1}} & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Sonuç olarak n noktalı yıldız graflar için genel normalize laplasyan matrisi elde edilir.

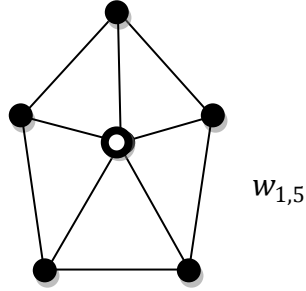
4.5. Tekerlek Graflarda Normalize Laplasyan Matrisleri

Bu alt kısımda, $W_{1,4}$, $W_{1,5}$ tekerlek grafları için normalize laplasyan matrisleri gösterilmiştir. Buradan yola çıkılarak $W_{1,n}$ tekerlek grafi için normalize laplasyan matrisi verilmiştir.



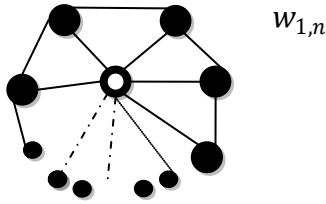
Şekil 4.13.

$$L_N(G) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{3} & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{3} & 1 & \frac{-1}{3} & 0 & \frac{-1}{2\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-1}{3} & 1 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{3} & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{2\sqrt{3}} & \frac{-1}{2\sqrt{3}} & \frac{-1}{2\sqrt{3}} & \frac{-1}{2\sqrt{3}} & 1 \end{bmatrix}$$



Şekil 4.14.

$$L_N(G) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{3} & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{\sqrt{15}} \\ \frac{-1}{3} & 1 & \frac{-1}{3} & 0 & 0 & \frac{-1}{\sqrt{15}} \\ 0 & \frac{-1}{3} & 1 & \frac{-1}{3} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{15}} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{3} & 1 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{\sqrt{15}} \\ \frac{-1}{3} & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & 1 & \frac{-1}{\sqrt{15}} \\ \frac{-1}{\sqrt{15}} & \frac{-1}{\sqrt{15}} & \frac{-1}{\sqrt{15}} & \frac{-1}{\sqrt{15}} & \frac{-1}{\sqrt{15}} & 1 \end{bmatrix}$$



Şekil 4.15.

$$L_N(G) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{3} & 0 & \dots & \dots & \frac{-1}{\sqrt{3n}} \\ \frac{-1}{3} & 1 & \frac{-1}{3} & 0 & \dots & \dots \\ 0 & \frac{-1}{3} & 1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \frac{-1}{\sqrt{3n}} \\ \frac{-1}{3} & 0 & \dots & \dots & 1 & \frac{-1}{\sqrt{3n}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3n}} & \frac{-1}{\sqrt{3n}} & \dots & \dots & \frac{-1}{\sqrt{3n}} & 1 \end{bmatrix}$$

Sonuç olarak n noktalı tekerlek graflar için genel normalize laplasyan matrisi elde edilir.

BÖLÜM 5

GRAF GRUPLAR

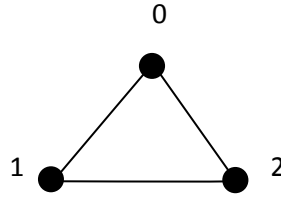
Bu bölümde Z_n 'de toplamsal gruplar ve çarpımsal grupların $n \geq 2$ için oluşan birim graf yapıları incelenecektir. Bu graf yapılarına ait komşuluk matrislerinden bahsedilecektir. Bu graf grup yapıları üçgensel graflar ile ifade edilecektir.

5.1. Z_n 'de Tanımlanan Grupların ve Halkaların Birim Graflarla Gösterimi

Tanım 5.1.1. Graflar cebirsel yapıların özelliklerini çalışmada kullanılan bir araçtır. Bir grubun x ve y gibi iki elemanı için $x.y = e$ ise grafta bu iki eleman komşu elemanlardır veya bir kenarla birleştirilen elemanlardır.

Grupta bir elemanın karesi kendine eşit ise bu eleman bir çizgiyle birim eleman ile birleştirilir. Bu anlamda grubun her bir elemanı birim elemanla komşu elemanlardır. Graf oluşturmada grubun birim elemanı temel rol aldığından bu tür graflar birim graf olarak adlandırılır. Birim grafı ifade edilen bir grubun mertebesi graftaki nokta sayısına eşittir.

Örnek 5.1.1. $Z_3 = \{0, 1, 2\}$ de toplama işlemine göre oluşan graf grup yapısı;

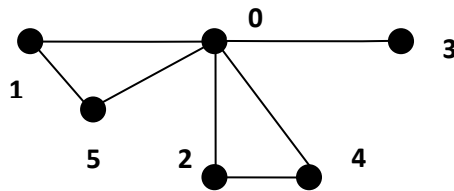


Şekil 5.1.1

şeklinde olur.

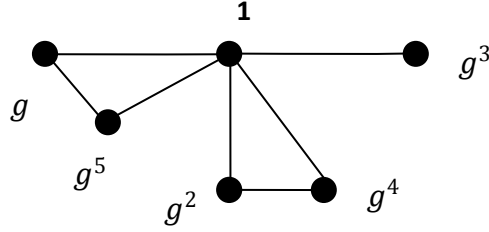
Aynı zamanda şekil 5.1.1 deki graf bir üçgensel graf örneğidir.

Örnek 5.1.2. (Z_6, \oplus) toplamsal grubunda oluşan graf yapısı aşağıdaki gibi Şekil 5.1.2 deki gibi olur.



Şekil 5.1.2.

Örnek 5.1.3. $G = \langle g \rangle$ altıncı mertebeden bir devirli grup olsun. Bu G grubunun graf yapısı şekil 5.1.3' deki gibidir.

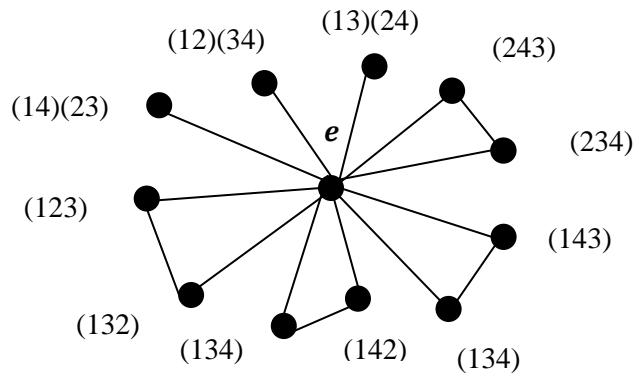


Şekil 5.1.3.

Tanım 5.1.2. G bir grup olsun. G nin arakesitlerinin birim alt grubu ve birleşimleri G' yi veren G' nin alt gruplarının ailesi G' nin bir takımı olarak isimlendirilir. Bu takımdan renklerin kümesi T ye komşu alt gruplarının görüntüleri farklı olacak şekilde bir fonksiyon tanımlamak suretiyle her alt grubuna bir renk karşılık getirilmiş olur. Bu şekilde gruplar yardımıyla bir graf boyanabilir. Bir grup bir takıma sahip ve boyanabilir ise grafiksel olarak iyi gruptur. Aksi halde kötü gruptur [19].

Örnek 5.1.4. G_4 alterne grubu için,

$G = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23), (123), (124), (134), (234), (132), (142), (143), (243)\}$ parametrelerin kümesi olsun. G üzerinde tanımlı $(F, A) F: A \rightarrow P(G)$ küme değerli F fonksiyonunu her $x \in A$ için $F(x) = \{y \in G: y = x^n, n \in \mathbb{Z}\}$ şeklinde tanımlansın. Buna göre G üzerinde tanımlı ve G nin elemanlarının tamsayı kuvvetlerinden oluşan alt grupların oluşturduğu esnek grup; $\{e\}, \{e, (12)(23)\}, \{e, (13)(24)\}, \{e, (14)(23)\}, \{e, (123), (132)\}, \{e, (124), (142)\}, \{e, (134), (143)\}, \{e, (234), (243)\}$ cebirsel yapısıdır. Buna karşılık gelen graf grup aşağıdaki Şekil 5.1.4 ile gösterilir.



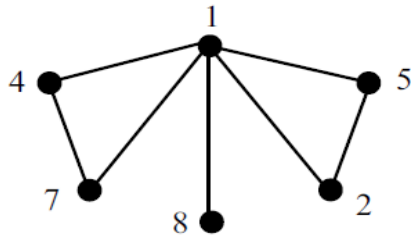
Şekil 5.1.4.

Şekilde verilen graf en az üç renkle boyanır. Bu grup bir takıma sahip boyanabilir olduğundan iyi gruptur.

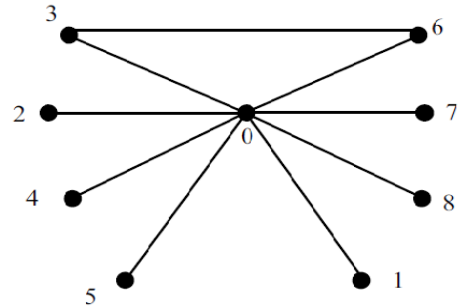
Tanım 5.1.3. Graf gruplara benzer bir tanımlama halka graflar içinde ifade edilir. Bu tanımlamada birimli ve değişmeli halka ve sıfır bölen graf alınır. x ve y birimli ve değişmeli bir R halkasının farklı elemanları olsun. x ve y nin komşu elemanlar olması için ($x \neq 0$ ve $y \neq 0$) $xy=0$ olması gerek ve yeter koşuldur. Buna göre halkanın sıfırı her elemanla komşudur. Birimli değişmeli halka üzerinde sıfır bölen graftan farklı olarak birimsel grafta tanımlanır.

R birimli ve değişmeli halka olmak üzere, $U(R)$ birimseller kümesini gösterir. x ve y $U(R)$ ' nin iki elemanı olmak üzere x ve y nin komşu olması için gerek ve yeter koşul $x.y=1$ olmalıdır. Bu tür graf R halkasının birimsel grafidir. Sıfır bölen grafta R ' nin tüm elemanları grafın köşelerini oluştururken, birimsel grafta köşeler R ' nin sadece birimsel elemanlarından oluşmaktadır [20].

Örnek 5.1.5. $Z_9 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, mod9 için çarpma işlemi üzerinde tanımlı halka yapısına ait birimsel graf Şekil 5.1.5 ve sıfır bölen graf Şekil 5.1.6 aşağıda verilmiştir.



Şekil 5.1.5.
Birim graf



Şekil 5.1.6.
Sıfır bölen graf

5.2. Yarı Grupların Graf Grup Yapıları

Bu kısımda çarpma işlemine göre tanımlanan yarı gruplar üzerinde tanımlanan birim graflar incelenecektir.

$(S,*)$ birimli değişmeli bir yarı grup ve birimi 1 olsun. Yani monoid olsun. $x \in S$ için, $x * y = y * x = 1$ olacak şekilde $y \in S$ varsa y ' ye x ' in tersidir denir [21].

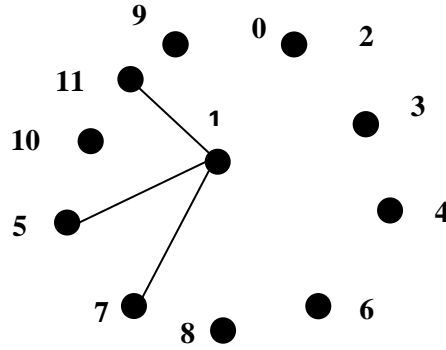
Eğer $y = x$ ise

$$x \cdot x = x^2 = 1 \quad (5.1)$$

olur.

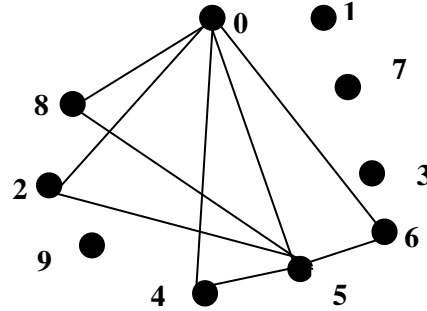
Örnek 5.2.1 ile Z_{12} de kalanların sınıfı çarpma işlemine göre bir yarı gruptur. Aynı zamanda bir monoiddir.

Örnek 5.2.1. $Z_{12} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ çarpma işlemine göre tanımlanan yarı grubun (mod12)' ye göre birim graf ile gösterimi,



Şekil 5.2.1. Z_{12} ' de birim graf

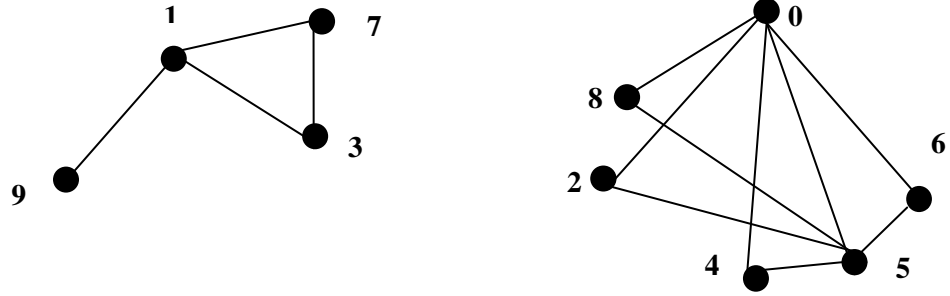
Örnek 5.2.2. $Z_{10} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ çarpma işlemine göre tanımlanan yarı grubun (mod10)' a göre sıfır graf ile gösterimi Şekil 6.2.2' de verilmiştir.



Şekil 5.2.2. Z_{10} ' da sıfır graf

Tanım 5.2.1. S bir yarı gruba ait birim ve sıfır grafların oluşturduğu komşuluk matrisleri, birim ve sıfır grafların birbirinden bağımsız oluşturdukları komşuluk matrislerinin toplamına eşittir.

Örnek 5.2.3. Z_{10} Çarpımsal grubuna göre oluşan yarı gruplara ait birim-sıfır graf Şekil 5.2.3' deki gibidir. Birim- sıfır grafta birbirinden bağımsız çizilmelerine rağmen aynı küme içerisinde ortak olarak alınıp, matris yapıları beraber değerlendirilmelidir.

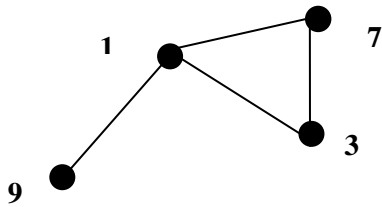


Şekil 5.2.3. Birim- sıfır graflar

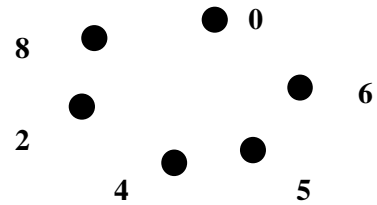
$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Birim - sıfır grafa ait komşuluk matrisi olur.

Kenar içermeyen sıfır grafta noktalar arasında bir kenar bulunmamaktadır. Ayrıca birim grafta ise Z_{10} ' a göre kalanlar sınıfı çarpma işlemine göre birimle eşleşmektedir. Buna göre oluşan şekiller aşağıdaki gibidir.



Şekil 5.2.4.
Birim graf

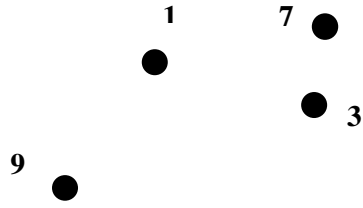


Şekil 5.2.5.
Kenar içermeyen sıfır graf

$$B = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

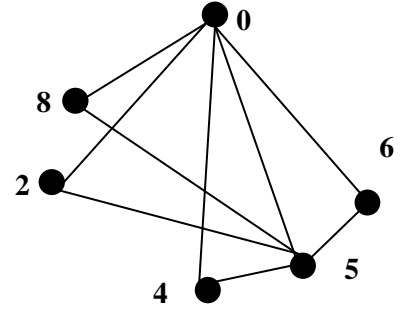
Birim graf ve kenar içermeyen sıfır grafa ait komşuluk matrisi bulunur.

Kenar içermeyen birim graf ve sıfır graf aşağıdaki gibi olur.



Şekil 5.2.6.

Kenar içermeyen birim graf



Şekil 5.2.7. Sıfır graf

$$C = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Kenar içermeyen birim graf ve sıfır grafa ait komşuluk matrisi bulunur.

Yarı gruplarda, birim graf ve sıfır graflara ait komşuluk matrislerinin toplamı birim-sıfır grafına ait komşuluk matrisine eşittir. Yani,

$$A = B + C \quad (5.2)$$

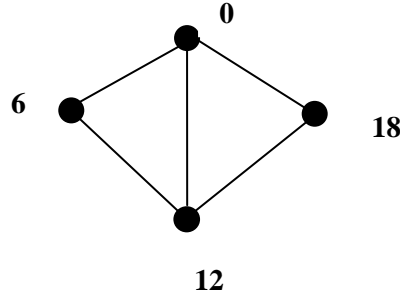
olur [21].

Teorem 5.2.1. $p_i Z_n = \{0, p_i, 2p_i, \dots, (n-1)p_i\} \pmod n$ ye göre çarpma işlemi üzerinde bir yarı gruptur. Her bir p_i ($1 \leq i \leq t, t \geq 2$) için $p_i | n$ ve $n = p_1 p_2, \dots, p_t$ de her bir p_i için olduğundan yarı grup bir birime sahip değildir. Bundan dolayı yarı grup özel birim grafa da sahip değildir.

İspat : $p_i Z_n = \{0, p_i, \dots, p_i (n-1)\}$ çarpma işlemi üzerinde mod n göre tanımlı bir yarı grup olsun. $n = p_1 p_2, \dots, p_t$ dir. $t \geq 2$ için p_1, p_2, \dots, p_t $1 \leq i \leq t$ farklı sayılardır. Açıkça görülüyor ki $1 \notin p_i Z_n$ olduğundan $p_i Z_n$ birim içermez. Dolayısıyla $p_i Z_n$ yarı gurubu özel biri grafa sahip değildir.

Aynı zamanda bu yarıgrup birim-sıfır graf da içermez.

Örnek 5.2.4. $6Z_{24} = \{0, 6, 12, 18\}$ kümesi $(\pmod{24})$ 'e göre yarı grup üzerinde çarpma işlemi ile tanımlanmıştır. Bu gruba ait sıfır tam bölen bir yarı grup Şekil 5.2.8 ile verilmiştir.



Şekil 5.2.8.

$6Z_{24}$ Sıfır tam bölen grafa ait komşuluk matrisi ise

$$\begin{array}{c} \mathbf{0} \quad \mathbf{6} \quad \mathbf{12} \quad \mathbf{18} \\ \mathbf{0} \left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \\ \mathbf{6} \\ \mathbf{12} \\ \mathbf{18} \end{array}$$

Şeklindedir.

Benzer şekilde $3Z_{24}$, $8Z_{24}$, ... , örnekleri ile de çalışılabilir [22].

BÖLÜM 6

BAZI ÖZEL GRAFLAR İÇİN \oplus_n TOPLAMA İŞLEMİNE GÖRE GRAF GRUP YAPILARI

Bu bölümde bazı özel graflar için komşuluk matrislerinin (*yol, çevre, yıldız, tekerlek, tam, euler graf*) \oplus_n toplama işlemine göre oluşan komşuluk matrisleri ve bu komşuluk matrislerinin ürettiği gruplar ve her bir elemana ait graflar verilecektir. Burada \oplus_n , matrislerin toplamını gösterecek ve matris bileşenlerinin toplamını da Z_n deki toplama işlemi oluşturacaktır.

Tanım 6.1. G bir graf ve H , G grafına ait komşuluk matrisi olsun.

H ' in ürettiği küme $\Omega = \langle H \rangle = \{kH: k \in Z\}$ ile tanımlansın. Buradan,

$$H \oplus_n H \equiv 2H \pmod{n}$$

$$H \oplus_n H \oplus_n H \equiv 3H \pmod{n}$$

(6.1)

.....

$$\underbrace{H \oplus_n H \oplus_n \dots \oplus_n H}_k \equiv kH \pmod{n}$$

n moduna göre $n \geq 2$ için $H^{-1} \equiv kH \pmod{n}$ ve $H \oplus_n kH \equiv e \pmod{n}$ ve ($k = 2, 3, \dots, (n-1)$) olacak şekilde $H^{-1} \in \Omega$ varsa, Ω kümesine H komşuluk matrisi tarafından üretilen matris grubu denir. Bu grubun her bir elemanına karşılık gelen grafların kümesine de graf grup denir.

Burada tanımlanan etkisiz eleman,

$$e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi $n \times n$ tipinde bir sıfır matristir.

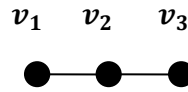
G grafinin noktalarının kümesi , $V_G = \{ v_1, v_2, \dots, v_n \}$ olan n noktalı bir graf ve $kH \in \Omega$ da komşuluk matrisleri olsun.

$$kH = \begin{cases} n, & v_i \sim v_j, \quad v_i \text{ ve } v_j; \quad n \text{ kenar ile bağlı ise} \\ 0, & v_i \text{ ve } v_j, \quad v_i \text{ ve } v_j; \quad \text{bir kenar ile bağlı değil ise} \end{cases}$$

Tanım 6.1' den bazı özel graflar için (*yol, çevre, yıldız, tekerlek, tam, euler graf*) komşuluk matrislerinin ürettiği küme bir grup oluşturur. Bu grupların komşuluk matrislerini ve bu matrislere karşılık gelen graf grupları araştıralım.

6.1. Yol Graflarda Graf Grup Yapıları

6.1.1 Üç noktalı yol graflarda graf grup yapıları



Şekil 6.1.1.

Şekil 6.1.1. deki G yol grafına ait komşuluk matrisi H ,

$$H = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

şeklindedir.

\oplus_2 toplama işlemine göre H ' in ürettiği kümeyi gösterelim ve graf grubu bulalım.

$$H \oplus H \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = e$$

Yani $H^{-1} = H$ olur. \oplus_2 toplamına göre bir graf grubudur. Ayrıca,

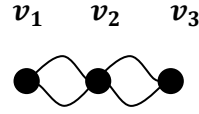
$$\Omega = \{H, e\} \tag{6.2}$$

bir graf gruptur.

\oplus_3 işlemine göre graf grubu bulalım.

$$H \oplus H \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \equiv 2H$$

\oplus_3 işlemine göre aşağıdaki Şekil 6.1.2 deki $2H$ grafını elde ederiz.



Şekil 6.1.2.

$$H \oplus 2H \equiv 3H \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \equiv e$$

$H^{-1} = 2H$ olur. G yol grafi \oplus_3 toplama işlemine göre bir graf gruptur. Ayrıca

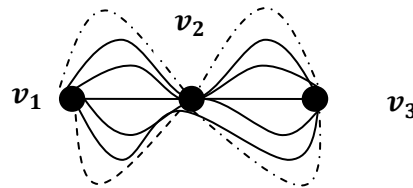
$$\Omega = \{H, 2H, e\} \tag{6.3}$$

bir graf gruptur.

\oplus_n toplama işlemine göre $(n-1)H$ matrisine ait grafa her iki nokta arasında $(n-1)$ tane kenar vardır. $(n-1)H$ graf matrisi ve grafi aşağıdaki Şekil 6.1.3. ile gösterebiliriz.

$$(n-1)H \equiv \begin{bmatrix} 0 & (n-1) & 0 \\ (n-1) & 0 & (n-1) \\ 0 & (n-1) & 0 \end{bmatrix}$$

ile gösterilir.



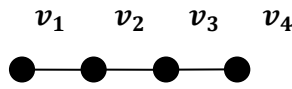
Şekil 6.1.3.

Üç noktalı G yol grafına ait komşuluk matrisi $H^{-1} = (n-1)H = e$ olduğundan \oplus_n toplama işlemine göre bir graf gruptur. Ayrıca

$$\Omega = \{H, 2H, 3H, \dots, (n-1)H, e\} \quad (6.4)$$

bir graf gruptur.

6.1.2. Dört noktalı yol graflarda graf grup yapıları



Şekil 6.1.4

Şekil 6.1.4' deki G yol grafına ait komşuluk matrisi;

$$H = \begin{matrix} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

ile gösterilir.

\oplus_2 işlemine göre graf grubu bulalım.

$$H \oplus H \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \equiv 2H \equiv e$$

$H^{-1} = H$ olur. G grafi \oplus_2 toplama işlemine göre bir graf gruptur. Ayrıca,

$$\Omega = \{H, e\}$$

bir graf gruptur.

\oplus_3 toplama işlemine göre graf grubu bulalım.

$$H \oplus H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \equiv 2H$$

\oplus_3 ' e göre aşağıda Şekil 6.1.5' deki $2H$ ' a ait grafi elde ederiz.



Şekil 6.1.5.

$$H \oplus 2H \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \equiv 3H = e$$

$H^{-1} = 2H$ olduğundan \oplus_3 toplama işlemine G grafi bir graf gruptur. Buradan,

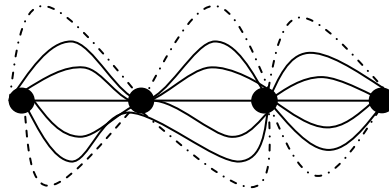
$$\Omega = \{H, 2H, e\}$$

bir graf gruptur.

\oplus_n de $(n-1)H$ graf matrisi ve bu matrise ait grafta her iki nokta arasında $(n-1)$ tane kenar olur. $(n-1)H$ matrisi,

$$(n-1)H \equiv \begin{bmatrix} 0 & (n-1) & 0 & 0 \\ (n-1) & 0 & (n-1) & 0 \\ 0 & (n-1) & 0 & (n-1) \\ 0 & 0 & (n-1) & 0 \end{bmatrix}$$

$(n-1)H$ matrisine ait *yol grafi* aşağıdaki Şekil 6.1.6 ile gösterebiliriz.



Şekil 6.1.6.

\oplus_n toplama işlemine göre $H^{-1} = (n-1)H$ olduğundan, G dört nokta *yol grafi* \oplus_n toplama işlemine göre bir graf grup olduğu görülür. Ayrıca G *yol grafi* üzerinde,

$$\Omega = \{H, 2H, 3H, \dots, (n-1)H, e\}$$

bir graf gruptur.

6.1.3. m noktalı yol graflarda graf grup yapıları

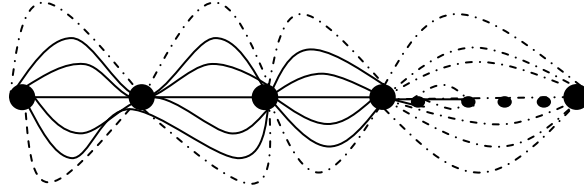


Şekil 6.1.7.

Şekil 6.1.7' deki m noktalı bir *yol graf* \oplus_n toplama işlemine göre $(n-1)H$ matrisine ait komşuluk matrisi ve bu matrisin graf yapısı aşağıdaki Şekil 6.1.8' deki gibidir.

$$(n-1)H \equiv \begin{bmatrix} 0 & n-1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ n-1 & 0 & n-1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & n-1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & n-1 & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & n-1 & 0 & n-1 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & n-1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilir.



Şekil 6.1.8.

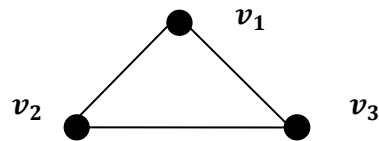
m noktalı G yol grafında \oplus_n toplama işlemine göre $H^{-1} = (n-1)H$ olduğundan bir graf gruptur. Ayrıca,

$$\Omega = \{H, 2H, 3H, \dots, (n-1)H, e\}$$

bir graf gruptur.

6.2. Çevre Graflarda Graf Grup Yapıları

6.2.1. Üç noktalı çevre graflarda graf grup yapıları



Şekil 6.2.1.

Şekil 6.2.1 deki G çevre grafinin ait komşuluk matrisi;

$$H = \begin{matrix} & v_1 & v_2 & v_3 \\ v_1 & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ v_2 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ v_3 & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \text{ olur.}$$

\oplus_2 toplama işlemine göre grup grubu bulalım.

$$H \oplus H \equiv 2H \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \equiv e$$

$H^{-1} = H$ olduğundan G graf matrisi \oplus_n toplama işlemine göre bir graf grubudur.

Ayrıca,

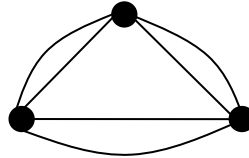
$$\Omega = \{H, e\}$$

bir graf grubudur.

\oplus_3 toplama işlemine göre graf grubu inceleyelim.

$$H \oplus H \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \equiv 2H$$

\oplus_3 toplama işlemine göre aşağıdaki Şekil 6.2.2' deki $2H$ matrisine ait grafi elde ederiz.



Şekil 6.2.2.

$$H \oplus 2H \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \equiv e$$

Buradan $H^{-1} = 2H$ olduğundan G üç noktalı çevre grafi \oplus_3 toplama işlemine göre bir graf grubudur. Ayrıca,

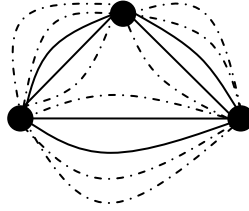
$$\Omega = \{H, 2H, e\}$$

bir graf gruptur.

\oplus_n ' de $(n-1)H$ matrisi aşağıdaki gibidir ve bu matrise ait graf Şekil 6.2.3 ile gösterilir.

$$(n-1)H \equiv \begin{bmatrix} 0 & n-1 & n-1 \\ n-1 & 0 & n-1 \\ n-1 & n-1 & 0 \end{bmatrix}$$

olur.



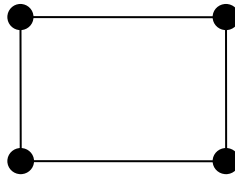
Şekil 6.2.3.

$H^{-1} = (n-1)H$ olduğundan üç noktalı çevre grafi \oplus_n işlemine göre bir graf gruptur. Ayrıca,

$$\Omega = \{H, 2H, 3H, \dots, (n-1)H, e\}$$

bir graf gruptur.

6.2.2. Dört noktalı çevre graflarda graf grup yapıları



Şekil 6.2.4.

Şekil 6.2.4 deki G çevre grafına ait komşuluk matrisi,

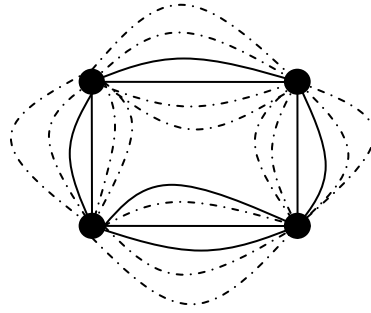
$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ile gösterilir.

\oplus_n toplama işlemine göre $(n-1)H$ matrisine ait grafta her iki düğüm arasında $(n-1)$ tane ayrıt vardır. Aşağıda $(n-1)H$ matrisi verilmiş ve Şekil 6.2.5 ile de bu matrise ait graf gösterilmiştir.

$$(n-1)H \equiv \begin{bmatrix} 0 & n-1 & 0 & n-1 \\ n-1 & 0 & n-1 & 0 \\ 0 & n-1 & 0 & n-1 \\ n-1 & 0 & n-1 & 0 \end{bmatrix}$$

olur.



Şekil 6.2.5.

$H^{-1} = (n-1)H$ olduğundan dört noktalı çevre graf \oplus_n toplama işlemine göre bir graf gruptur. Ayrıca \oplus_n işlemine göre dört noktalı çevre graflar için H tarafından üretilen elemanların kümesi,

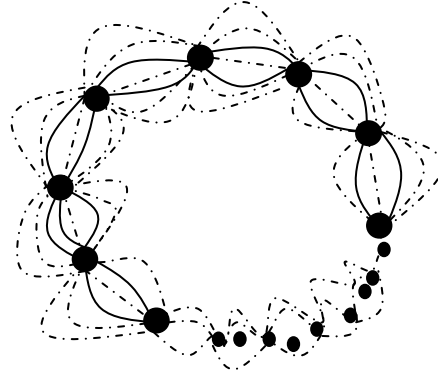
$$\Omega = \{H, 2H, 3H, \dots, (n-1)H, e\}$$

bir graf gruptur.

6.2.3. m noktalı çevre graflarda graf grup yapıları

Üç, dört noktalı çevre graflardan yola çıkarak m noktalı bir için çevre graf için \oplus_n toplama işlemine göre, $(n-1)H$ için oluşan komşuluk matrisi ve bu matrise ait graf Şekil 6.2.6' daki gibi olur.

$$(n-1)H \equiv \begin{bmatrix} 0 & n-1 & 0 & \dots & 0 & n-1 \\ n-1 & 0 & n-1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & n-1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & n-1 \\ n-1 & 0 & \dots & \dots & n-1 & 0 \end{bmatrix}$$



Şekil 6.2.6.

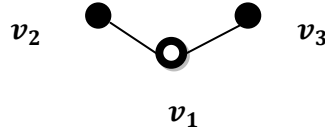
$H^{-1} = (n - 1)H$ olduğundan m noktalı çevre graf \oplus_n toplama işlemine göre bir graf gruptur. Ayrıca,

$$\Omega = \{H, 2H, 3H, \dots, (n - 1)H, e\}$$

bir graf gruptur.

6.3. Yıldız Graflarda Graf Grup Yapıları

6.3.1. Üç noktalı yıldız graflarda graf grup yapıları



Şekil 6.3.1.

Şekil 6.3.1 deki üç noktalı G yıldız grafına ait komşuluk matrisi H ,

$$H = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

şeklindedir.

\oplus_2 toplama işlemine göre graf grubu bulalım.

$$H \oplus H \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \equiv e$$

$H^{-1} = H$ olduğundan G üç noktalı yıldız grafi \oplus_2 toplama işlemine göre graf gruptur. Ayrıca,

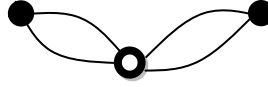
$$\Omega = \{H, e\}$$

bir graf gruptur.

\oplus_3 toplama işlemine göre graf grubu bulalım.

$$H \oplus H \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \equiv 2H$$

\oplus_3 ' de $2H$ matrisine ait graf aşağıdaki Şekil 6.3.2 ile gösterilmiştir.



Şekil 6.3.2.

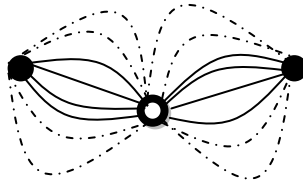
$$H \oplus 2H \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \equiv e$$

$H^{-1} = 2H$ olduğundan G yıldız grafi \oplus_3 ' de bir graf gruptur.

\oplus_n toplama işlemine göre $(n-1)H$ matrisine ait grafa her iki nokta arasında $(n-1)$ tane kenar vardır. $(n-1)H$ matrisi ve bu matrise ait graf aşağıdaki Şekil 6.3.3 ile gösterilmiştir.

$$(n-1)H \equiv \begin{bmatrix} 0 & n-1 & n-1 \\ n-1 & 0 & 0 \\ n-1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

İle ifade edilir.



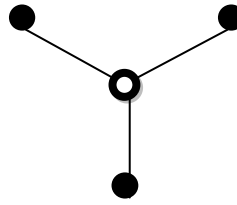
Şekil 6.3.3.

Üç noktalı G yıldız grafına ait komşuluk matrisi $H^{-1} = (n-1)H$ olduğundan \oplus_n toplama işlemine göre bir graf grubudur. Ayrıca \oplus_n de üç noktalı yıldız graflar için H tarafından üretilen elemanların kümesi,

$$\Omega = \{H, 2H, 3H, \dots, (n-1)H, e\}$$

bir graf grubudur.

6.3.2. Dört noktalı yıldız graflarda graf grup yapıları



Şekil 6.3.4.

Şekil 6.3.4 deki G yıldız grafına ait komşuluk matrisi,

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

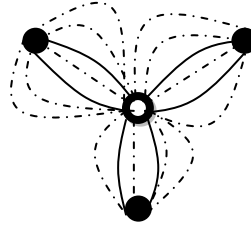
ile gösterilir.

\oplus_n toplama işlemine göre $(n-1)H$ matrisine ait grafa birbirine komşu kenarlar arasında $(n-1)$ tane kenar vardır. $(n-1)H$ matrisi,

$$(n-1)H \equiv \begin{bmatrix} 0 & n-1 & n-1 & n-1 \\ n-1 & 0 & 0 & 0 \\ n-1 & 0 & 0 & 0 \\ n-1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ile gösterilir.

\oplus_n toplama işlemine göre $(n-1)H$ matrisine ait graf Şekil 6.3.5 ile gösterilir.



Şekil 6.3.5.

Dört noktalı G yıldız grafiğine ait komşuluk matrisinde $H^{-1} = (n-1)H$ olduğundan \oplus_n toplama işlemine göre bir graf gruptur. Ayrıca,

$$\Omega = \{H, 2H, 3H, \dots, (n-1)H, e\}$$

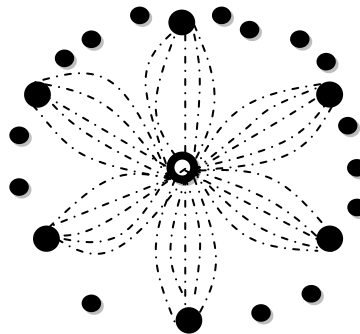
bir graf gruptur.

6.3.3. m noktalı yıldız graflarda graf grup yapıları

Üç, dört noktalı yıldız graflardan yola çıkarak m noktalı bir yıldız grafiğin \oplus_n toplama işlemine göre $(n-1)H'$ a ait komşuluk matrisi aşağıdaki gibidir.

$$(n-1)H \equiv \begin{bmatrix} 0 & n-1 & n-1 & \dots & \dots & n-1 \\ n-1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ n-1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n-1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

\oplus_n ' e göre $(n-1)H$ matrisine ait graf aşağıdaki Şekil 6.3.6 ile gösterilir.



Şekil 6.3.6.

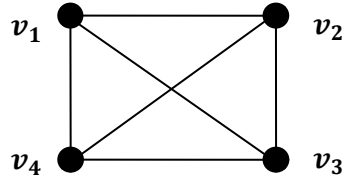
m noktalı G yıldız grafinin H komşuluk matrisi için, $H^{-1} = (n-1)H$ olduğundan \oplus_n toplama işlemine göre bir graf grubudur. Ayrıca \oplus_n de m noktalı yıldız graflar için H tarafından üretilen elemanların kümesi,

$$\Omega = \{H, 2H, 3H, \dots, (n-1)H, e\}$$

bir graf grubudur.

6.4. Tam Graflarda Graf Grup Yapıları

6.4.1. Dört düğümlü tam graflarda graf grup yapıları



Şekil 6.4.1.

Şekil 6.4.1 de G tam grafinin H komşuluk matrisi ;

$$H = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

şeklindedir.

\oplus_2 toplama işlemine göre graf grubu inceleyelim.

$$H \oplus H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \equiv 2H \equiv e$$

$H^{-1} = H$ olduğundan G dört noktalı tam grafi \oplus_2 toplam işlemine göre bir graf grubudur. Ayrıca,

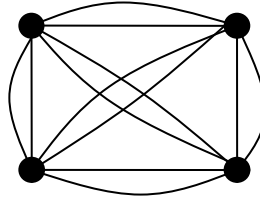
$$\Omega = \{H, e\}$$

bir graf grubudur.

\oplus_3 toplama işlemine göre graf grubu inceleyelim.

$$H \oplus H \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \equiv 2H$$

\oplus_3 toplama işlemine göre $2H$ matrisine ait graf aşağıdaki Şekil 6.4.2 ile gösterilmiştir.



Şekil 6.4.2.

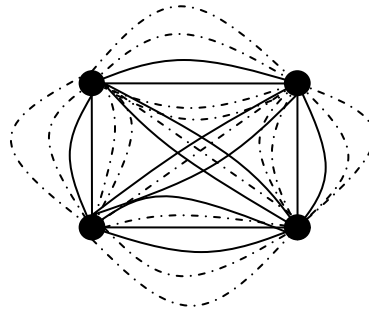
$$H \oplus 2H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \equiv 3H \equiv e$$

$H^{-1} = 2H$ olduğundan dört noktalı *tam grafi* \oplus_3 toplama işlemine göre bir graf grubudur. Ayrıca, $\Omega = \{H, 2H, e\}$ bir graf grubudur.

\oplus_n toplama işlemine göre $(n-1)H$ matrisine ait grafa her iki nokta arasında $(n-1)$ tane kenar vardır. \oplus_n 'de $(n-1)H$ komşuluk matrisi aşağıdaki gibidir.

$$(n-1)H \equiv \begin{bmatrix} 0 & n-1 & n-1 & n-1 \\ n-1 & 0 & n-1 & n-1 \\ n-1 & n-1 & 0 & n-1 \\ n-1 & n-1 & n-1 & 0 \end{bmatrix}$$

$(n-1)H$ a ait komşuluk matrisine ait graf Şekil 6.4.3' deki gibidir.



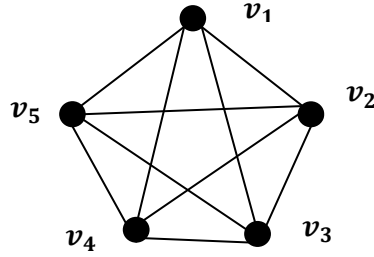
Şekil 6.4.3.

$H^{-1} = (n-1)H$ olduğundan, dört noktalı *tam grafa* ait H komşuluk matrisi \oplus_n toplama işlemine göre bir graf grubudur. Ayrıca,

$$\Omega = \{H, 2H, 3H, \dots, (n-1)H, e\}$$

bir graf grubudur.

6.4.2. Beş noktalı tam graflarda graf grup yapıları



Şekil 6.4.4.

Şekil 6.4.4' deki G tam grafına ait komşuluk matrisi,

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ile gösterilir.

\oplus_2 toplama işlemine göre graf grubu inceleyelim.

$$H \oplus H \equiv 2H \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \equiv e$$

$H^{-1} = H$ olduğundan G ye ait graf matris \oplus_2 toplama işlemine göre bir graf grubudur.

Ayrıca,

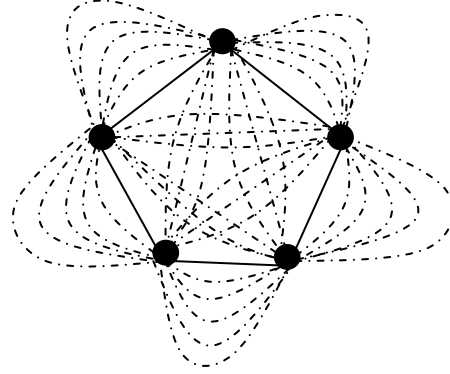
$$\Omega = \{H, e\}$$

bir graf grubudur.

\oplus_n toplama işlemine göre $(n-1)H$ matrisine ait grafa her iki düğüm arasında $(n-1)$ tane kenar vardır. $(n-1)H$ komşuluk matrisi aşağıdaki gibidir.

$$(n-1)H \equiv \begin{bmatrix} 0 & n-1 & n-1 & n-1 & n-1 \\ n-1 & 0 & n-1 & n-1 & n-1 \\ n-1 & n-1 & 0 & n-1 & n-1 \\ n-1 & n-1 & n-1 & 0 & n-1 \\ n-1 & n-1 & n-1 & n-1 & 0 \end{bmatrix}$$

$(n-1)H$ komşuluk matrisine ait graf aşağıdaki Şekil 6.4.5' deki gibidir.



Şekil 6.4.5.

$H^{-1} = (n-1)H$ olduğundan, beş noktalı *tam grafa* ait H komşuluk matrisi \oplus_n toplama işlemine göre bir graf gruptur. Ayrıca,

$$\Omega = \{H, 2H, 3H, \dots, (n-1)H, e\}$$

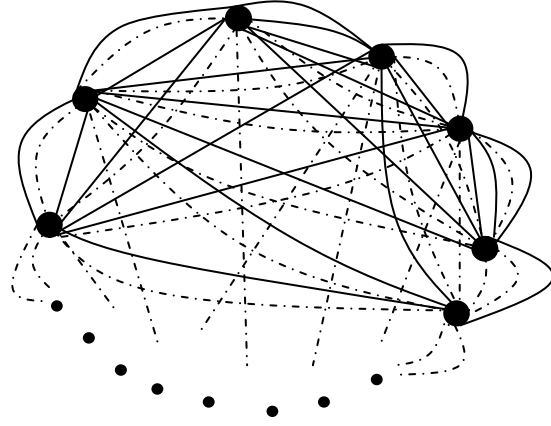
bir graf gruptur.

6.4.3. m noktalı tam graflarda graf grup yapıları

m noktalı bir *tam graf* için \oplus_n toplama işlemine göre $(n-1)H$ matrisi aşağıdaki gibidir.

$$(n-1)H \equiv \begin{bmatrix} 0 & n-1 & n-1 & \dots & \cdot & n-1 \\ n-1 & 0 & n-1 & \dots & \cdot & n-1 \\ n-1 & n-1 & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ n-1 & \cdot & \cdot & \dots & 0 & n-1 \\ n-1 & n-1 & \cdot & \dots & n-1 & 0 \end{bmatrix}$$

m noktalı *tam graflar* için, \oplus_n toplama işlemine göre $(n-1)H$ matrisine ait graf Şekil 6.4.6 daki gibidir.



Şekil 6.4.6.

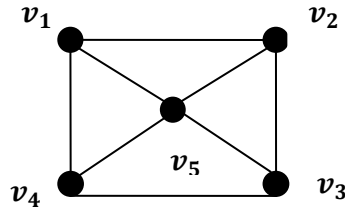
$H^{-1} = (n - 1)H$ olduğundan m noktalı tam grafa \oplus_n toplama işlemine göre bir graf grubudur. Ayrıca \oplus_n toplama işlemine göre m noktalı tam graflar için H tarafından üretilen elemanların kümesi,

$$\Omega = \{H, 2H, 3H, \dots, (n - 1)H, e\}$$

bir graf grubudur.

6.5. Tekerlek Graflarda Graf Grup Yapıları

6.5.1. Beş noktalı tekerlek graflarda graf grup yapıları



Şekil 6.5.1.

Şekil 6.5.1 deki G tam grafi için komşuluk matrisi H ,

$$H = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

şeklindedir.

\oplus_2 toplama işlemine göre graf grubu inceleyelim.

$$H \oplus H \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \equiv e$$

$H^{-1} = H$ olduğundan G tekerlek grafına ait graf matris \oplus_2 toplama işlemine göre bir graf gruptur. Ayrıca,

$$\Omega = \{H, e\}$$

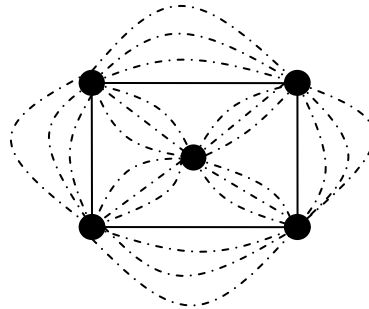
bir graf gruptur.

\oplus_n toplama işlemine göre $(n-1)H$ matrisine ait grafa birbirine komşu her iki nokta arasında $(n-1)$ tane kenar vardır. $(n-1)H$ komşuluk matrisi aşağıdaki gibidir.

$$(n-1)H \equiv \begin{bmatrix} 0 & n-1 & 0 & n-1 & n-1 \\ n-1 & 0 & n-1 & 0 & n-1 \\ 0 & n-1 & 0 & n-1 & n-1 \\ n-1 & 0 & n-1 & 0 & n-1 \\ n-1 & n-1 & n-1 & n-1 & 0 \end{bmatrix}$$

ile gösterilir.

\oplus_n ' de $(n-1)H$ matrisine ait graf Şekil 6.5.2' deki gibidir.



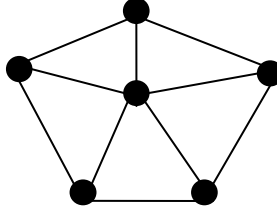
Şekil 6.5.2.

$H^{-1} = (n-1)H$ ve $H + (n-1)H = e$ olduğundan beş noktalı G tekerlek grafi \oplus_n toplama işlemine göre bir graf gruptur. Ayrıca,

$$\Omega = \{H, 2H, 3H, \dots, (n-1)H, e\}$$

bir graf gruptur.

6.5.2. Altı noktalı tekerlek graflarda graf grup yapıları



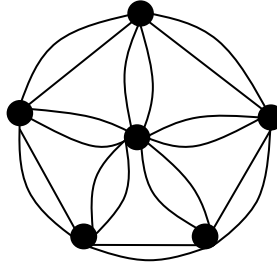
Şekil 6.5.3.

Şekil 6.5.3' deki G tekerlek grafiğine ait komşuluk matrisi,

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

\oplus_3 toplama işlemine göre $2H$ komşuluk matrisine ait graf Şekil 6.5.4' deki gibidir.



Şekil 6.5.4.

$H^{-1} = 2H$ olduğundan, altı noktalı tekerlek graf \oplus_3 toplama işlemine göre de bir graf gruptur. Ayrıca,

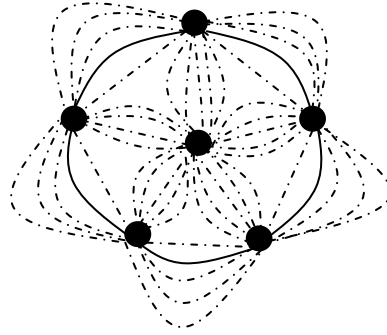
$$\Omega = \{H, 2H, e\}$$

bir graf gruptur.

\oplus_n ' de $(n-1)H$ komşuluk matrisi aşağıdaki gibidir.

$$(n-1)H \equiv \begin{bmatrix} 0 & n-1 & 0 & 0 & n-1 & n-1 \\ n-1 & 0 & n-1 & 0 & 0 & n-1 \\ 0 & n-1 & 0 & n-1 & 0 & n-1 \\ 0 & 0 & n-1 & 0 & n-1 & n-1 \\ n-1 & 0 & 0 & n-1 & 0 & n-1 \\ n-1 & n-1 & n-1 & n-1 & n-1 & 0 \end{bmatrix}$$

\oplus_n toplama işlemine göre $(n-1)H$ komşuluk matrisine ait graf Şekil 6.5.5' deki gibidir.



Şekil 6.5.5.

$H^{-1} = (n-1)H$ olduğundan altı noktalı G tekerlek grafi \oplus_n toplama işlemine göre graf gruptur. Ayrıca,

$$\Omega = \{H, 2H, 3H, \dots, (n-1)H, e\}$$

bir graf gruptur.

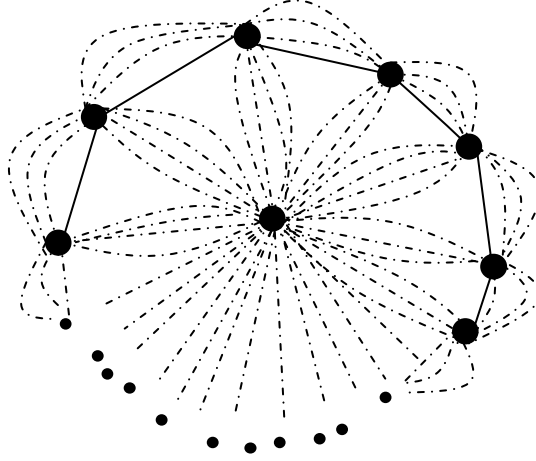
6.5.3. m noktalı tekerlek graflarda graf grup yapıları

\oplus_n toplama işlemine göre m noktalı G tekerlek grafına ait komşuluk matrisi $(n-1)H$, matrisinde her bir nokta arasında $(n-1)$ tane kenar vardır. m noktalı bir tekerlek graf için \oplus_n ' de $(n-1)H$ komşuluk matrisi aşağıdaki gibidir.

$$(n-1)H \equiv \begin{bmatrix} 0 & n-1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & n-1 \\ n-1 & 0 & n-1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & n-1 \\ 0 & n-1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & n-1 & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & n-1 & 0 & n-1 & \cdot \\ n-1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & n-1 & 0 & n-1 \\ n-1 & n-1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & n-1 & 0 \end{bmatrix}$$

olur.

\oplus_n toplama işlemine göre $(n - 1)H$ matrisine ait graf Şekil 6.5.6' daki gibidir.



Şekil 6.5.6.

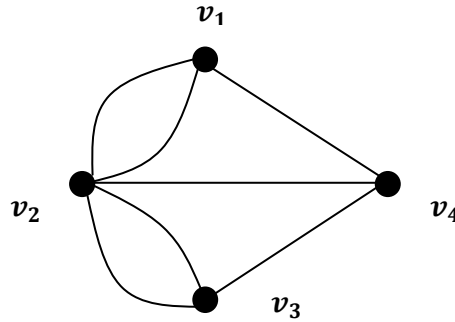
$H^{-1} = (n - 1)H$ ve $H \oplus (n - 1)H = e$ olduğundan m noktalı G tekerlek grafi \oplus_n toplama işlemine göre bir graf grubudur. Ayrıca,

$$\Omega \equiv \{H, 2H, 3H, \dots, (n - 1)H, e\}$$

bir graf grubudur.

6.6. Euler Grafının Graf Grup Yapıları

Dört noktadan oluşan *Euler grafına* ait komşuluk matrisi ve bu komşuluk matrisinin \oplus_n toplama işlemine göre inşa edilen grafları bulunacaktır. Bu graflara ait komşuluk matrislerinin \oplus_n toplama işlemine göre graf grup yapılarına verilecektir.



Şekil 6.6.1. *Euler Grafı*

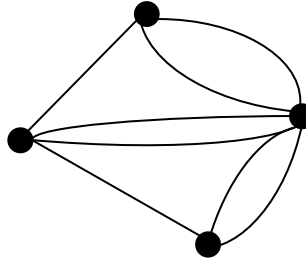
Şekil 6.6.1' deki *Euler grafi*na ait komşuluk matrisi H ,

$$H = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ v_1 & [0 & 2 & 0 & 1] \\ v_2 & [2 & 0 & 2 & 1] \\ v_3 & [0 & 2 & 0 & 1] \\ v_4 & [1 & 1 & 1 & 0] \end{array} \end{array}$$

\oplus_3 toplama işlemine göre graf grup yapısını inceleyelim.

$$H \oplus H \equiv \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \equiv 2H$$

\oplus_3 toplama işlemine göre $2H$ matrisine ait graf şekil Şekil 6.6.2' deki gibidir.



Şekil 6.6.2.

$$H \oplus 2H \equiv \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \equiv e$$

$H^{-1} = 2H$ olduğundan *Euler grafi* \oplus_3 toplama işlemine göre bir graf gruptur.

Ayrıca,

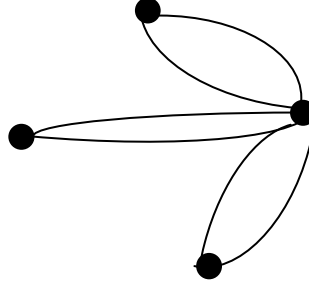
$$\Omega \equiv \{H, 2H, e\}$$

bir graf gruptur.

\oplus_4 toplama işlemine göre graf grup yapısını inceleyelim.

$$H \oplus H \equiv \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \equiv 2H$$

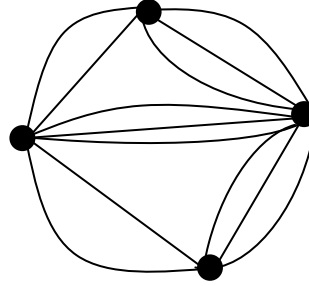
\oplus_4 de $2H$ matrisine ait graf Şekil 6.6.3 ile gösterilmiştir.



Şekil 6.6.3.

$$H \oplus 2H \equiv \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \equiv 3H$$

\oplus_4 toplama işlemine göre $3H$ matrisine ait graf Şekil 6.6.4' deki gibidir.



Şekil 6.6.4.

$$H \oplus 3H = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = e$$

$H^{-1} = 3H$ ve $H \oplus 3H = e$ olduğundan *Euler grafi* \oplus_4 toplama işlemine göre graf gruptur. Ayrıca,

$$\Omega = \{H, 2H, 3H, e\}$$

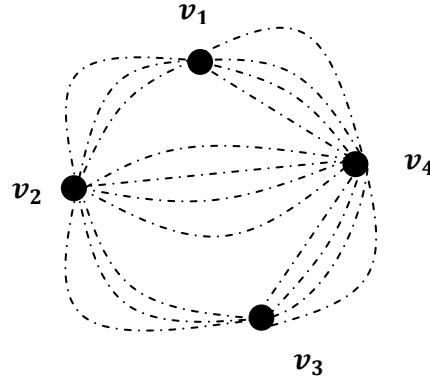
bir graf gruptur.

Euler grafinin \oplus_n toplama işlemine göre bir graf grup olduğunu göstermek için komşuluk matrislerinin, $H^{-1} = (n-1)H$ ve $H \oplus (n-1)H = e$ olması gerekir.

Euler grafının \oplus_n toplama işlemine göre $(n-1)H$ komşuluk matrisi aşağıdaki gibidir.

$$(n-1)H \equiv \begin{bmatrix} 0 & n-2 & 0 & n-1 \\ n-2 & 0 & n-2 & n-1 \\ 0 & n-2 & 0 & n-1 \\ n-1 & n-1 & n-1 & 0 \end{bmatrix}$$

\oplus_n toplama işlemine göre $(n-1)H$ komşuluk matrisinde, $\{(v_1 \sim v_4), (v_2 \sim v_4), (v_3 \sim v_4)\}$ noktaları arasında $(n-1)$ kenar, $\{(v_1 \sim v_2), (v_2 \sim v_3)\}$ noktaları arasında $(n-2)$ kenar bulunmaktadır. \oplus_n toplama işlemine göre $(n-1)H$ komşuluk matrisi aşağıdaki Şekil 6.6.5 ile gösterilir.



Şekil 6.6.5.

$$H \oplus (n-1)H \equiv \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & n-2 & 0 & n-1 \\ n-2 & 0 & n-2 & n-1 \\ 0 & n-2 & 0 & n-1 \\ n-1 & n-1 & n-1 & 0 \end{bmatrix} \equiv e$$

$H^{-1} = (n-1)H$ olduğundan, Euler grafının \oplus_n toplama işlemine göre bir graf grup olduğu gösterilmiş olur. Ayrıca \oplus_n toplama işlemine göre *Euler grafi* için H tarafından üretilen elemanların kümesi,

$$\Omega = \{H, 2H, 3H, \dots, (n-1)H, e\}$$

bir graf gruptur.

BÖLÜM 7

SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında matematikte ve mühendislikte önemli bir yeri olan graf teori konusu cebirsel olarak ele alınmıştır. Çalışmamızda graflar üzerinde tanımlanan komşuluk matrisleri, laplasyan matrisleri, normalize laplasyan matrisleri en genel haliyle incelenmiştir.

Birim ve sıfır graflardan yararlanarak bir grup yapısının graflarla gösterimi verilmiştir. Ayrıca bir grafın komşuluk matrisinin ortaya çıkardığı grup yapılarının gösterdiği grafların kümesi, çeşitli özel graflar için bu yapının varlığı gösterilmiştir.

Graf teori, fizik, kimya gibi temel bilimlerin yanı sıra iletişim ağları gibi uygulamalı bilimlerde de yaygın biçimde kullanılmaktadır. Altıncı bölümde elde edilen graf grupların bu anlamda özel kullanım alanlarının olabileceği öngörülmektedir.

KAYNAKLAR

- [1] Dođansoy, Ali, 93.I, *Matematik Dünyası Dergisi*, 10-16, 1993.
- [2] Shirinivas, S.G. , Vetril, S. , Elango N.M., “Applications of Graph Theory in Computer Science an Overview”, *international journal of Engineering Science and Techonology*, 4610-4621, 2010.
- [3] Ahuja, R.K., Magnanti, T.L. ve Orlin, J.B. *Network Flows*, “Theory Algorithms and Applications”, *Prentice Hall*. New Jersey, 1993.
- [4] Seyhanlı, S.S., “Graf Teorinin İlköğretim 8. sınıf Olasılık Konusunun Öğretiminde Öğrenci Başarısına Etkisi”, *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Estitüsü, Yüksek Lisans Tezi*, s.13-15, Balıkesir, Eylül, 2007.
- [5] Birgin, K., “Yönlü ve Yönsüz Grafların Enerjisi”, *Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi*, 2-3, Nevşehir, Eylül, 2014.
- [6] Diestel, R., “Graph Theory” , Graduate Text in Matematics, vol. 173, Elektronik Edition, 1-3, New York, 2005.
- [7] Gross, J. L.,& Yellen, J., “Handbook of Graphtheory”. *CRC Press*, 3-4, 2004.
- [8] Birgin, K., “Yönlü ve Yönsüz Grafların Enerjisi”, *Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi*, 6, Nevşehir, Eylül, 2014
- [9] Diestel, R., “Graph Theory”, Graduate Text in Matematics, vol.173, elektronik edition, 4-6, New York, 2005.
- [10] Saran, M. S. , “Graf Teorinin Bazı Mühendislik Uygulamaları”, *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Estitüsü, Yüksek Lisans Tezi*, 7-8, Balıkesir, Şubat, 2008.
- [11] Kandasamy, W. V., Smarandache, F., “Graphs as Groups”, ISBN-10:1-59973-093-6, *Cuart*, 14-18, Romanya, 2009.
- [12] Gross, J. L., Yellen, J., “Handbook of Graphtheory”, ISBN: 1584880902, *CRC Press*, 52-54, New York, 2004.
- [13] Birgin, K., “Yönlü ve Yönsüz Grafların Enerjisi”, *Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi*, 6-9, Nevşehir, Eylül, 2014.

- [14] Zumstein, P., “Comparison of Spectral Method Sthroughthe Adjacency Matrix and the Laplacian of a Graph”, *ETH Zurich, Doctoraldissertation Diploma Thesis*, 13, Zürich, 2005.
- [15] Zumstein, P., “Comparison of Spectral Method Sthroughthe Adjacency Matrix and the Laplacian of a Graph”, *Doctoraldissertation Diploma Thesis, ETH*, 16, Zürich 2005.
- [16] Bozkurt, Ş. B., “Grafin Bazı İndeksleri ve Bazı Matrislerinin Özdeğerleri ve Enerjiler için Sınırlar”, *Konya Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora tezi*, 18-22, Konya, 2013
- [17] Kelner, J., Nachin, M., “An Algorithmist’s Toolkit”, Lecture 2, 1-2, September, 2007.
- [18] Ersoy, F. , “Grafların Komşuluk Matrisleri”, *Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi*, 18, Bursa, 2013.
- [19] Kandasamy, W. V., Smarandache, F., “Graphs as Groups”, *Cuart*, 54-68, Romanya ,2009.
- [20] Kandasamy, W. V., Smarandache, F., “Graphs as Groups”, *Cuart*, 130-134, Romanya, 2009.
- [21] Kandasamy, W. V., Smarandache, F., “Graphs as Groups”, *Cuart*, 84-90, Romanya, 2009.
- [22] Kandasamy, W. V., Smarandache, F., “Graphs as Groups”, *Cuart*, 111-115, Romanya, 2009.
- [23] Ersoy, F. , “Grafların Komşuluk Matrisleri”, *Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi*, 12-14, Bursa, 2013.
- [24] Gross, J. L., Yellen, J., “Handbook of Graphtheory”, ISBN: 1584880902, *CRC Press*, 19-20, New York, 2004.
- [25] Ersoy, F. , “Grafların Komşuluk Matrisleri”, *Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi*, 19-25, Bursa, 2013.

ÖZGEÇMİŞ

Hüseyin Hilmi EROĞLU 1981 yılında Malatya ilinin Akçadağ ilçesinde doğdu. İlkokulu Atatürk ilkokulunda, ortaokulu Rahmi Akıncı İlköğretim Okulunda, Liseyi Hacı Ahmet Akıncı Lisesinde tamamladı. 2000 yılında Cumhuriyet Üniversitesi Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği Bölümünü kazandı. 2005 yılında mezun oldu ve aynı yıl Kayseri ili Felahiye ilçesinde Felahiye Çok Programlı Lisesinde matematik öğretmeni olarak atandı. 2007, 2008 yılları arasında askerlik görevini yedek subay öğretmen olarak Muş ili Korkut ilçesi Korkut Çok programlı Lisesinde tamamladı. Askerlik dönüşü 2008 yılında Kayseri ili Tomarza ilçesi Tomarza Çok Programlı Lisesinde göreve başladı. 2011 yılının Eylül ayında Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde matematik alanında yüksek lisans eğitimine başladı. 2012 yılında Kayseri ili Melikgazi ilçesi Şehit Saim Çelik Çok programlı Anadolu Lisesinde göreve başladı. Halen aynı okulda matematik öğretmeni olarak görevine devam etmektedir.

Adres: Şehit Saim Çelik Çok Programlı Anadolu Lisesi

Melikgazi - KAYSERİ

Telefon: 0 352 247 1049

Belgegeçer: 0 352 247 1017

e-posta : Hher44@hotmail.com