T.C
NEVŞEHİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

CEBİRSEL YAPILAR ÜZERİNDE ESNEK DÖNÜŞÜMLER

Tezi Hazırlayan
Kıymet ÇAKIR

Tezi Yöneten
Doç. Dr. Hacı AKTAŞ

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Temmuz 2012
NEVŞEHİR

Doç. Dr. Hacı AKTAŞ danışmanlığında **Kıymet ÇAKIR** tarafından hazırlanan **'Cebirsel Yapılar Üzerinde Esnek Dönüşümler'** adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

16.07.2012

JÜRİ:

Başkan: Doç. Dr. Hacı AKTAŞ

Üye: Yrd. Doç. Dr. Orhan SÖNMEZ

Üye: Yrd. Doç. Dr. Deniz TOKAT

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulunun 16.07.2012 tarih ve 2012-43-2 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

16 / 07 / 2012

Prof. Dr. Selçuk KERVAN

Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

"Cebirsel Yapılar Üzerinde Esnek Dönüşümler" konulu tez çalışmamın seçiminde, yürütülmesinde ve değerlendirmesinde maddi manevi yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Doç. Dr. Hacı AKTAŞ' a teşekkür ederim.

Tez çalışmam boyunca verdiği maddi manevi destek, göstermiş olduğu sabır ve anlayıştan dolayı değerli babam Bekir ÇAKIR' a ve sevgili annem Ayfer ÇAKIR' a teşekkür ederim.

CEBİRSEL YAPILAR ÜZERİNDE ESNEK DÖNÜŞÜMLER

Kıymet ÇAKIR
Nevşehir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Yüksek Lisans Tezi, Temmuz 2012
Tez Danışmanı: Doç. Dr. Hacı AKTAŞ

ÖZET

Bu tez çalışması, Molodtsov tarafından başlatılan esnek küme teorisinin cebirsel alanlara uygulanmasından ve esnek dönüşüm kavramlarından oluşmaktadır. Temel kavramlar bölümünde, Molodtsov ve P. K. Maji tarafından esnek küme teorisi üzerine geliştirilen temel tanım ve teoremler verildi. Daha sonra esnek küme teorisinin cebirsel yapılara uygulaması olan esnek grup, esnek halka ve esnek halkanın esnek ideali gibi kavramlar açıklandı. Esnek dönüşüm kavramı verildikten sonra esnek dönüşümde grup kullanılarak yeni bir kavram olan grup esnek dönüşüm tanıtıldı. En son bölümde ise orijinal bir kavram olan kısıtlanmış esnek grup tanımı yapıldı ve bu tanım bazı temel teoremler üzerine uygulandı.

Anahtar Kelimeler: Esnek Küme Teorisi; Esnek Grup; Esnek Halka;Esnek Halkanın Esnek İdeali; Esnek Dönüşümler; Kısıtlanmış Esnek Grup

SOFT MAPPINGS ON ALGEBRAIC STRUCTURES

Kıymet ÇAKIR
Nevşehir University, Graduate School of Natural and Applied Sciences
Master Thesis, July 2012
Thesis Supervisor: Doç. Dr. Hacı AKTAŞ

ABSTRACT

This thesis consists of soft mappings and algebraic structures application of soft set theory which was initiated by Molodtsov. In the preliminary section of this thesis,fundamental definitions and theorems, which was defined by Molodtsov and P.K. Maji, are given to use in next sections. Soft groups, soft rings and soft ideal of a soft rings, which are applications of soft set theory to algebraic structures, are explained. After explaining soft mappings, a new concept, group soft mappings are introduced by using group in soft mappings. In the latter section, restricted soft group, which is an orijinal concept, is defined and this definition is carried out on some fundamental theorems.

Key Words: Soft Set Theory; Soft Group; Soft Rings; Soft İdeal of a Soft Ring; Soft Mapping; Restriction Soft Group.

İÇİNDEKİLER

1.BÖLÜM
GİRİŞ

Klasik küme teorisini başlatan George Cantor (1845-1918) nın hocasının sorduğu “ Bir periyodluk aralıkta, toplamı sıfır olan bir trigonometrik serinin katsayılarının hepsi sıfır mıdır?” şeklindeki soru üzerine gerçel sayıların o güne kadar fark edilmeyen bir özelliğinin farkına vardı. Bu da rasyonel sayılarla irrasyonel sayıların aynı çoklukta olmadığıdır. Başka bir ifadeyle, rasyonel sayılar ile irrasyonel sayıların kümesi arasında, her iki kümenin de sonsuz olmasına karşın, bire-bir bir dönüşüm yoktur. O halde bu iki kümenin sonsuzlukları aynı değildir. Böylelikle ortaya küme kavramı ve kümelerin içerdikleri eleman çokluğu açısından sınıflandırması ortaya çıktı.

George Cantor tarafından bu şekilde geliştirilen “Kümeler Teorisi” birçok alanda uygulanabildiği için güçlü bir teoridir. Fakat ekonomi, mühendislik, sosyal bilimler, çevre gibi daha birçok alanda ortaya çıkan belirsizlikleri giderebilmek için klasik küme yetrsiz kalmaktadır. Bu da Cantor’ un küme teorisinin belirsizliklerle başa çıkmak için yeterli olmadığını gösterir.

Bu belirsizliklerle başa çıkabilmek için bulanık küme teorisi[10] , aralık matematiği[11,12] , olasılık küme teorisi, esnek küme teorisi[1,2,3] gibi birçok teori geliştirildi. Bulanık küme, topolojik uzay gibi matematiksel konular esnek kümelerin özel bir hali olarak göz önüne alınabildiğinden dolayı, esnek küme kavramı daha genel bir teoridir.

Klasik matematikte, matematiksel modellerin tam çözümüne ihtiyaç vardır. Eğer bu model tam çözümü bulunamayacak kadar karmaşık ise yaklaşık çözüm bulunabilir ve bunun için birçok model vardır.

Esnek küme teorisi Rus araştırmacı Molodtsov[1] tarafından ilk kez 1999 yılında tanımlandı. Molodtsov genel matematikte belirsizlik modelleri için esnek küme kavramını ileri sürdü. Nesnelerin tanımlanmasında kullanılan şartlarda sınırlama yoktur, bu yüzden araştırmacılar ihtiyaç duydukları parametreleri tercih edebilirler. Bu da karar alma sürecini ve özel bilginin yokluğunda daha etkili yöntem bulmayı kolaylaştırır.

Olasılık teorisi, bulanık küme teorisi [10] , aralık matematiği [11,12] gibi karmaşık sistemler için mevcut birçok matematiksel kurallar vardır. Fakat bu tekniklerin her biriyle ilgili zorluklar ve eksiklikler vardır. Aralık matematiği birçok farklı belirsizlikleri olan problemler için etkili değildir. Dahası tüm bu teknikler kuralların parametrize edilmesinde eksiktir ve bu yüzden bu teknikler özellikle ekonomi, çevre ve sosyal bilimler alanındaki problemleri çözmede başarılı değildir. Esnek küme teorisi yukarıda belirtilen zorluklardan bağımsız bu düşüncedeki tek yöntemdir ve çok yönlü daha geniş kapsamlı birçok uygulama alanına sahiptir. Esnek küme teorisinin birçok alanda zengin bir uygulama potansiyeli vardır.

Esnek küme teorisini tanımlayan Molodtsov [1] (1999) esnek küme teorisini sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonlar, oyun teorisi, işlem araştırmaları, Riemann integrasyonu ve daha birçok alana başarılı bir şekilde uygulamıştır. Bu çalışmaları ile de esnek küme teorisine yön vermiştir. Daha sonra Maji ve arkadaşları [2] esnek küme üzerinde altküme, bir esnek kümenin tümleyeni, karar verme problemlerinde esnek küme teorisinin uygulanması gibi birçok yeni tanım sundular. Böylelikle Maji ve arkadaşları esnek küme teorisinin farklı birçok alana uygulanmasında ve hızlı bir şekilde genişlemesinde büyük etkileri olmuştur. Aktaş ve Çağman [4] esnek küme teorisini ilk defa cebirsel alana uygulayarak esnek grup kavramını tanıttılar ve bu çalışmaları ile esnek küme teorisinin farklı cebirsel alana uygulanmasında öncü oldular. Daha sonra Feng ve arkadaşları [8] esnek küme teorisini kullanarak halkaların cebirsel yapısıyla ilgili çalışmalar yaptılar. Bulanık esnek grup kavramı ise Aygünoğlu ve Aygün [7] tarafından tanıtıldı. Majumdar ve Samanta [6,9,] bulanık küme ve bulanık esnek küme arasındaki benzerlikler üzerine çalıştı.

Bu tez çalışması ise beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde genel ifadeler ile esnek küme teorisine neden ihtiyaç duyulduğu, hangi araştırmacıların hangi konular üzerine çalışma yaptığı gibi temel bilgiler verilerek esnek küme teorisinin kısa bir tarihçesi verildikten sonra tezin içeriğiyle ilgili kısa bir tanıtım yapıldı.

İkinci bölümde esnek küme teorisini tanımlayan ona yön veren Molodtsov' un ilk çalışması verildi ve esnek kümenin tümleyeni, iki esnek kümenin kesişimi, birleşimi gibi birçok temel tanım ve teorem ile esnek küme teorisinin gelişmesine ve ilerlemesine büyük katkı sağlayan P.K. Maji' nin yaptığı çalışmalar verildi.

Üçüncü bölümde esnek kümeler üzerine tanımlanan cebirsel ifadeler verildi. İlk olarak esnek küme teorisinin cebirsel alana uygulanmasını başlatan Aktaş ve Çağman[4] nın esnek grup, esnek alt grup, birim esnek grup, mutlak esnek grup, esnek homomorfizma gibi birçok tanım ve teoremi verildi. Daha sonra esnek küme teorisinin farklı cebirsel alanlara uygulaması olan esnek halka, esnek alt halka, esnek halkanın esnek ideali, idealistik esnek halka gibi kavramlar verilerek teoremler üzerine uygulandı.

Dördüncü bölümde ise esnek dönüşüm kavramı tanıtıldı. Esnek dönüşüm kavramı üzerine yapılan teoremler, birim esnek dönüşüm, sabit esnek dönüşüm, esnek dönüşüm altında kümenin ve esnek kümenin görüntüsü gibi kavramlar açıklandı. Esnek dönüşüm Pinaki Majumdar ve S.K. Samanta[6] tarafından tıp üzerine yapılan bir uygulaması verildi. Daha sonra esnek dönüşümde grup kullanılarak orijinal bir kavram olan grup esnek dönüşüm kavramı tanıtıldı ve teoremler üzerine uygulandı.

Son bölüm olan beşinci bölümde ise kendinden sonra yapılan birçok cebirsel çalışmaya öncü olan Aktaş ve Çağman [4] nın esnek grup kavramını biraz daha özelleştirerek orijinal bir tanım olan kısıtlanmış esnek grup kavramı tanıtıldı ve çeşitli özellikleri verildi.

2.BÖLÜM
TEMEL KAVRAMLAR

2.1.Molodtsov'un Esnek Küme Kavramı:

Ekonomi, mühendislik ve çevre bilimlerinde çeşitli belirsizlikler olduğundan karmaşık problemleri çözebilmek için klasik metotları kullanamayız. Belirsizliklerle başa çıkabilmek için matematiksel kurallar olarak göz önünde bulundurabileceğimiz, Olasılık Teorisi, Bulanık Küme Teorisi, Aralık matematiği olmak üzere üç farklı teori vardır. Fakat tüm bu teorilerde bir takım belirsizlikler vardır.

Olasılık teorisi sadece istatistiksel olaylara uygulanır. Matematiksel detaylara girmeksizin uygun bir istatiksel olayla ifadede etmek istediğimiz şey uzun bir deneme sonucu μ_n ile ifade edilen basit bir limitin var olmasıdır. μ_n ise

$$\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

şeklinde tanımlanır. Burada eğer denemede olay gerçekleşirse x_i , 1 e ve eğer olay gerçekleşmezse x_i , 0 a eşittir. Limitin var olduğunu test etmek için çok sayıda deneme yapılmalıdır. Bunu mühendislik alanında gerçekleştirebiliriz fakat sosyal problemlerde, çevre biliminde ve birçok ekonomik alanda gerçekleştiremeyiz.

Aralık matematiği, bir problemin kesin çözümü için tahmini bir aralık inşa ederek, hesaplama hatalarını belirlemeyi de içine alan metot olarak ortaya çıkar. Bir çok durumda faydalıdır fakat aralık matematiğindeki metotlar farklı belirsizlikleri olan problemler için uygun değildir. Bu metotlar düzgün değişen, uygun olmayan, eksik olan ve kısmen amaçla çelişen bir bilgiyi yaklaşık olarak tanımlayamaz.

Belirsizliklerle başa çıkabilmek için kullanılan teorilerden biri Zadeh [10] tarafından geliştirilen bulanık kümeler teorisidir.

Tanım2.1.1: $A \subset X$ kümesi için μ_A karakteristik fonksiyonu

$$\mu_A = \begin{cases} 1 & , \quad x \in A \\ 0 & , \quad x \notin A \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Bir küme ve onu karakteristik fonksiyonu arasındaki eşlemenin birebir eşleme olduğu açıktır.

Bir F bulanık kümesi, μ_F üyelik fonksiyonu tarafından tanımlanır. Her $x \in X$ noktası için , $\mu_F(x)$, [0, 1] aralığında bir reel sayıya denk gelir. $\mu_F(x)$ sayısı x noktasının F bulanık kümesine ait olma derecesi olarak tanımlanır.

Bulanık küme teorisi ilk bakışta bulanık küme için doğal işlemler sunar. F ve G bulanık kümeleri ve bu kümelerin üyelik fonksiyonları sırasıyla μ_F ve μ_G olsun.

F nin tümleyeni F^c olamak üzere F bulanık kümesinin tümleyeni

$$\mu_{F^c} = 1 - \mu_F(x)$$

şeklinde tanımlanır. $F \cap G$, aşağıdaki üyelik fonksiyonlarından biri ile tanımlanabilir.

$$\mu_{F\cap G}(x) = \min\{\, \mu_F(x) ,\ \mu_G(x) \,\}$$

$$\mu_{F\cap G}(x) = \mu_F(x).\mu_G(x)$$

$$\mu_{F\cap G}(x) = \max\{\, 0,\ \mu_F(x) + \mu_G(x) - 1\}$$

$F \cup G$ birleşimi için üyelik fonksiyonlarının üç olası durumu vardır.

$$\mu_{F\cup G}(x) = \max\{\, \mu_F(x) ,\ \mu_G(x) \,\}$$

$$\mu_{F\cup G}(x) = \mu_F(x) + \mu_G(x) - \mu_F(x).\mu_G(x)$$

$$\mu_{F\cup G}(x) = \min\{1,\ \mu_F(x) ,\ \mu_G(x)\}$$

Bulanık küme teorisi üzerine yapılan çalışmalar hızlı bir şekilde ilerliyor. Fakat “özel bir durumda üyelik fonksiyonları nasıl kurulur?” şeklinde bir zorluk vardır.

Üyelik fonksiyonu kurmak için sadece bir yol olduğu düşünülmemelidir. Üyelik fonksiyonunun doğası oldukça bireyseldir. Herkes $\mu_F(x) = 0{,}7$ notasyonunu kendi usulünce anlayabilir. Bu yüzden üyelik fonksiyonları ile aritmetik işlemler üzerine odaklanan bulanık küme işlemleri doğal gözükmez. Bu işlemler ağırlıkların ve uzunlukların toplamına benzerdir.

Bu zorlukların sebebi muhtemelen teorinin parametrizasyon kurallarının yetersizliğidir. Sonraki bölümde belirsizliklerle başa çıkabilmek için yukarıda ifade edilen zorluklardan bağımsız bir matematiksel kural ileri sürülecektir. Zorluklardan kaçınmak için yeterli parametrizasyonlar kullanılmalıdır.

Tanım 2.1.2: U evrensel küme ve E parametre kümesi olsun. F , E den U kümesinin kuvvet kümelerine tanımlı bir dönüşüm olmak üzere (F, E) ikilisine U üzerinde esnek küme denir.

Başka bir ifadeyle, bir esnek küme U kümesinin alt kümelerinin parametrize edilmiş bir ailesidir. $\varepsilon \in E$ için $F(\varepsilon)$ kümesi (F, E) esnek kümesinin ε-elemanlarının kümesi olarak yada esnek kümenin ε-yaklaşımlı elemanlarının kümesi olarak göz önüne alınabilir.

Örnek 2.1.3:

a. (F, E) esnek kümesi Bay X in satın alacağı evlerin parametrize edilmiş şekli olarak tanımlansın.

U- göz önüne alınan tüm evlerin kümesi

E- parametre kümesi (her bir parametre kelime veya cümle olabilir)

$E = \{$ pahalı, güzel, ahşap, ucuz, çevre düzenlemesi yapılmış, modern, iyi durumda, kötü durumda$\}$

Bu durumda esnek kümeyi tanımlamak pahalı evleri, güzel evleri ve diğerlerini göstermek anlamına gelir. $F(\varepsilon)$ kümeleri keyfi olabilir. Bu kümelerin bazıları boş olabilir bazılarının ise arakesitleri boştan farklı olabilir.

b. Zadeh' in bulanık kümesi, esnek kümenin özel bir hali olarak göz önüne alınabilir.

A bir bulanık küme ve μ_A ise A bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu olsun.

$\mu_A: U \to [0,1]$ şeklinde ifade edilir. μ_A fonksiyonu için α-seviye kümelerinin

$F(\alpha) = \{ x \in U: \ \mu_A(x) \geq \alpha\}$, $\alpha \in [0,1]$ ailesini göz önüne alalım. Eğer F ailesini biliyorsak, aşağıdaki formül aracılığıyla $\mu_A(x)$ fonksiyonlarını bulabiliriz.

$$\mu_A(x) = sup\alpha \ , \alpha \in [0,1] \ , \ x \in F(\alpha)$$

böylece Zadeh' in A bulanık kümelerinin her biri $(F, [0,1])$ esnek kümesi olarak göz önüne alınabilir.

c. (X, τ) topolojik uzay olsun yani X bir küme ve τ bir topolojidir. Diğer bir ifadeyle X in açık kümeleri diye ifade edilen alt kümelerinim ailesidir. x noktasının $T(x)$ açık komşuluklarının ailesi $T(x) = \{ V \in \tau : x \in V \}$, $(T(x), \tau)$ esnek kümesi olarak düşünülebilir.

Esnek küme teorisinde herhangi bir nesnenin tanımlanması, klasik matematikte kullanılan metotlardan farklıdır. Klasik matematikte, nesnenin matematiksel modelini inşa ederiz ve bu modelin tam çözümünü tanımlarız. Genel olarak matematiksel modeller çok karmaşıktır ve tam çözüm bulanamaz. Bu yüzden ikinci adımda yaklaşık çözüm kavramını tanıtılacaktır.

Esnek küme teorisinde bu probleme zıt bir yaklaşım vardır. Nesnenin ilk tanımı doğal bir yaklaşıma sahiptir ve tam çözüm kavramını tanıtmaya gerek yoktur.

Esnek küme teorisinde yaklaşık tanımlamalar üzerinde herhangi bir kısıtlamanın olmaması, bu teoriyi güven verici ve pratikte kolayca uygulanabilir yapar. Reel sayılar, fonksiyonlar, dönüşümler gibi herhangi bir parametrizasyon kullanabiliriz.

Yani esnek küme teorisinde üyelik fonksiyonu kurma problemi veya buna benzer herhangi bir problem ortaya çıkmaz.

U kümesinin alt kümeleri için $*$ ile tanımlanan bir ikili işlem olduğunu varsayalım. (F, A) ve (G, B) U üzerinde esnek küme olsun. Esnek küme için $*$ işlemi

$$(F, A) * (G, B) = (H, A \times B)$$

şeklinde tanımlansın ve $\alpha \in A \ \ ve \ \ \beta \in B$ için $H(\alpha, \beta) = F(\alpha) * G(\beta)$ dır.

$(A \times B,\ A$ ve B kümelerinin kartezyen çarpımıdır.$)$ Bu tanım her bir esnek kümenin kendine özel bir doğası olarak dikkate alınır. Eğer esnek kümeler ile çok fazla işlem üretirsek, bu küme geniş parametre kümelerine sahip bir esnek küme olacaktır. Bazen parametre kümesinin bu tür genişlemesi kullanışlı olabilir. Bu yüzden, örnek2.1.3 (a) daki esnek kümenin kendi kendisiyle kesişimi daha ayrıntılı esnek küme ifadesini verir. Sonuçta bu esnek küme "pahalı ve güzel" , "modern ve ucuz" gibi evleri gösterir.

Parametre kümelerinin bu tür genişlemelere uygun olmadığı durumlarda, birçok seviye işlemi kullanabiliriz. Tabi ki bu tür seviye işlemlerinin uygulanabilirliği özel duruma ve göz önüne alınan probleme bağlıdır. Eğer genel matematik kuralı inşa etmek istiyorsak parametre kümeleri için evrensel seviye işlemi kullanmayacağız. Esnek küme teorisi açısından bulanık kümelerdeki işlemlere bakarsak, bulanık kümelerdeki tüm ikili işlemlerin evrensel seviye işlemini içerdiğini anlarız. A ve B iki bulanık küme olmak üzere

$$\mu_{A\cap B}(x) = \min\{\, \mu_A(x),\ \ \mu_B(x)\}$$

ifadesini iki bulanık kümenin ilk arakesit versiyonu olarak göz önüne alalım. A , B ve $A \cap B$ bulanık kümelerini $(F_A, [0,1])$, $(F_B, [0,1])$, $(F_{A\cap B}, [0,1])$ esnek kümeleri ile sırasıyla eşleyelim. Burada

$$F_A(x) = \{\, x \in U : \mu_A(x) \geq \alpha \,\} \quad , \quad \alpha \in [0,1]$$

$$F_B(x) = \{\, x \in U : \mu_B(x) \geq \alpha \,\} \quad , \quad \alpha \in [0,1]$$

$$F_{A\cap B}(x) = \{\, x \in U : \mu_A(x) \geq \alpha\ ,\ \ \mu_B(x) \geq \alpha \,\} \quad , \quad \alpha \in [0,1]$$

şeklinde ifade edilir.

$(F_A, [0,1])$ ve $(F_B, [0,1])$ esnek kümelerinin arakesiti $(H, [0,1] \times [0,1])$ ile tanımlanır ve

$H(\alpha, \beta) = F_A(\alpha) \times F_B(\beta) = \{x \in U : \mu_A(x) \geq \alpha\ ,\ \ \mu_B(x) \geq \beta\,\}$ şeklinde ifade edilir.

2.2.P.K. Maji, R. Biswas ve A. R. Roy’ un Esnek Küme Kavramı:

Maji ve arkadaşları esnek küme teorisi üzerinde çalışmış, karar verme problemleri üzerinde bazı metotlar geliştirmiştir ve Molodtsov’ un tanımını kullanarak birçok özellik tanımlamışlardır.

Örnek 2.2.1: [1]

Kabul edelim ki E parametre kümesi ve U göz önüne alınan şartları sağlayan evlerin kümesi olsun. Her bir parametre bir kelime veya cümledir.

$E =$ { pahalı, güzel, ahşap, ucuz, çevre düzenlemesi yapılmış, modern, iyi yapılı, kötü yapılı }

Bu durumda bir esnek kümeyi tanımlamak pahalı evleri, güzel evleri ve diğer evleri belirtmek anlamına gelir. (F, E)esnek kümesi Bay X in alacağı “evlerin çekiciliğini” tanımlar.

Sonraki ifademiz için aynı örneği daha detaylı olarak göz önüne alalım.

Kabul edelim ki U evrensel kümesi

$U =\{ h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6 \}$

ile verilen altı evden oluşsun ve E parametre kümesi

e_1 : “ pahalı” parametresini

e_2 : “ güzel” parametresini

e_3 : “ ahşap” parametresini

e_4 : “ ucuz” parametresini

e_5 : “çevre düzenlemesi yapılmış” parametresini göstermek üzere$E =\{ e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ olsun. Kabul edelim ki;

F(e_1) ={ h_2, h_4}

F(e_2) = {h_1, h_3}

F(e_3) = {h_3, h_4, h_5}

F(e_4) = {h_1, h_3, h_5}

F(e_5) = {h_1} olsun.

(F, E) esnek kümesi, U evrensel kümesinin alt kümelerinin $\{ F(e_i) , i = 1,2 \dots ,5 \}$ şeklinde parametrize edilmiş bir ailesidir. Göz önüne alınan F dönüşümü "evler (.)" şeklinde ifade edilir. Buradaki nokta (.) bir $e \in E$ parametresi tarafından doldurulur. Bu yüzden F (e_1) , "evler (pahalı)" şeklinde ifade edilir ve fonksiyonel değeri { h_2, h_4 } dir.

Bu yüzden biz (F, E)esnek kümesini aşağıdaki gibi yaklaşımların bir koleksiyonu olarak gösterebiliriz.

(F, E) ={ pahalı evler = {h_2, h_4} , güzel evler ={h_1, h_3} , ahşap evler = {h_3, h_4, h_5} , ucuz evler ={h_1, h_3, h_5} , çevre düzenlemesi yapılmış evler = {h_1} }

Burada her bir yaklaşımın iki kısmı vardır.

(i) Bir tahmini p

(ii) Bir yaklaşık değer kümesi v (veya sadece v değer kümesi)

Örneğin; "pahalı evler = {h_2, h_4 }" yaklaşımı için

(i) tahmini ismi pahalı evlerdir

(ii) yaklaşık değer kümesi veya değer kümesi {h_2, h_4 } dür.

	“Pahalı”	“Güzel”	“Ahşap”	“Ucuz”	“Çevre düzenlemesi yapılmış”
h_1	0	1	0	1	1
h_2	1	0	0	0	0
h_3	0	1	1	1	0
h_4	1	0	1	0	0
h_5	0	0	1	1	0
h_6	0	0	0	0	0

Tablo 1. Esnek Kümenin Tablo ile Gösterimi

Bu yüzden (F,E) esnek kümesi aşağıdaki yaklaşımların koleksiyonu olarak gösterilebilir.

(F, E) = { $p_1 = v_1, p_2 = v_2, \dots, p_n = v_n\}$

Bir esnek kümeyi bilgisayarda depolamak için, esnek kümeyi tablo ile temsil edebiliriz. (Yukarıdaki tablo bir esnek kümenin yerini tutar.)

Tanım 2.2.2: (F,E) esnek kümesinin tüm değerlerinin sınıfına esnek kümenin değer sınıfı denir ve $C_{(E,F)}$ ile gösterilir.

Yukarıdaki örnek için , $C_{(E,F)} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dir ve açıkça $C_{(E,F)} \subseteq P(U)$ dur.

Tanım 2.2.3: U evrensel kümesi üzerinde (F,A) ve (G,B) esnek kümeleri için eğer;

1. $A \subset B$
2. $\forall \varepsilon \in A$ için $F(\varepsilon)$ ve $G(\varepsilon)$ özdeş yaklaşımlar ise

(F,A) , (G,B) nin esnek alt kümesidir ve $(F,A) \;\tilde{\subset}\; (G,B)$ ile gösterilir.

Eğer (G,B) , (F,A) nın esnek alt kümesi ise (F,A) ya (G,B) nin esnek süper kümesidir denir ve $(F,A) \;\tilde{\supset}\; (G,B)$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.4: (F, A) ve (G, B) , U üzerinde tanımlı iki esnek küme olsun. Eğer (F, A) , (G, B) nin esnek alt kümesi ve (G, B) de (F, A) nın esnek alt kümesi ise (F, A) ve (G, B) ensek kümeleri eşittir denir.

Örnek 2.2.5: $A = \{e_1, e_3, e_5\} \subset E$ ve $B = \{e_1, e_2, e_3, e_5\} \subset E$ olsun. $A \subset B$ olduğu açıktır.

(F, A) ve (G, B) aynı $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ evrensel kümesi üzerinde aşağıdaki gibi tanımlı iki esnek küme olsun.

$G(e_1) = \{h_2, h_4\}$, $G(e_2) = \{h_1, h_3\}$, $G(e_3) = \{h_3, h_4, h_5\}$, $G(e_5) = \{h_1\}$

ve

$F(e_1) = \{h_2, h_4\}$, $F(e_3) = \{h_3, h_4, h_5\}$, $F(e_5) = \{h_1\}$

olsun. Bu durumda $(F, A) \tilde{\subset} (G, B)$ dir.

Tanım 2.2.6: Parametrelerin kümesi $E = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$ olsun. ⅂E ile gösterilen E kümesinin DEĞİLİ ⅂E $= \{\neg e_1, \neg e_2, \dots, \neg e_n\}$ şeklinde tanımlanır. Burada i için $\neg e_i = değil e_i$ dir.

Teorem 2.2.7:

- **i.** $⅂(⅂A) = A$
- **ii.** $⅂(A \cup B) = (⅂A \cup ⅂B)$
- **iii.** $⅂(A \cap B) = (⅂A \cap ⅂B)$

Tanım 2.2.8: (F, A) esnek kümesinin tümleyeni $(F, A)^c = (F^c, ⅂A)$ ile tanımlanır ve bu ifade F^c: ⅂A $\rightarrow P(U)$, $\forall \alpha \in ⅂A$ için $F^c(\alpha) = U - F(\neg \alpha)$ şeklinde tanımlanan bir dönüşümdür.

F^c, F in esnek tümleyen fonksiyonu olarak isimlendirilebilir. Açıkça $(F^c)^c$, F ile aynıdır ve $((F, A)^c)^c = (F, A)$ dır.

Örnek 2.2.9: Örnek2.2.1 göz önüne alalım.

$(F,A)^c$={ pahalı olmayan evler = $\{h_1,h_3,h_5,h_6\}$, güzel olmayan evler = $\{h_2,h_4,h_5,h_6\}$, ahşap olmayan evler = $\{h_1,h_2,h_6\}$, ucuz olmayan evler = $\{h_2,h_4,h_6\}$, çevre düzenlemesi yapılmamış evler = $\{h_2,h_3,h_4,h_5,h_6\}$ } şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.2.10: Eğer $\forall\varepsilon \in A$ için $F(\varepsilon) = \emptyset$ (boş küme) ise U üzerinde tanımlı (F,A) esnek kümesine boş esnek küme denir ve Φ ile gösterilir.

Örnek 2.2.11: Göz önüne alınan şartlar altında ahşap evlerin kümesi U ve parametrelerin kümesi A olsun. U evrensel kümesi $U = \{h_1,h_2,h_3,h_4,h_5\}$ ve A parametre kümesi A = {tuğla, çamur, çelik, taş} olarak verilsin. (F,A) esnek kümesi "evlerin inşaatı" olarak tanımlansın. F(tuğla) tuğladan yapılan evleri, F(çamur) çamurdan yapılan evleri, F(taş) taştan yapılan evleri ifade etmek üzere (F,A) = {F(tuğla) = $\emptyset$, F(çamur) = $\emptyset$, F(çelik) = $\emptyset$, F(taş) = $\emptyset$} dir ve bu yüzden (F,A) bir boş esnek kümedir.

Tanım 2.2.12: Eğer $\forall\varepsilon \in A$ için $F(\varepsilon) = U$ ise U üzerinde tanımlı (F,A) esnek kümesine mutlak esnek küme denir ve $\tilde{A}$ ile gösterilir. Açıkça $\tilde{A}^c = \Phi$ ve $\Phi^c = \tilde{A}$ dir.

Örnek 2.2.13: Göz önüne alınan şartlar altında ahşap evlerin kümesi U ve parametrelerin kümesi B olsun. U evrensel kümesi $U = \{h_1,h_2,h_3,h_4,h_5\}$ ve B parametre kümesi B = {tuğla değil, çamur değil, çelik değil, taş değil} olacak şekilde verilsin. (G,B) esnek kümesi de "evlerin inşaatı" olarak tanımlansın. G(tuğla değil) tuğladan yapılmayan evleri, G(çelik değil) çelikten yapılmayan evleri, G(taş değil) taştan yapılmayan evleri ifade etmek üzere;

(G,B) = {G(tuğla değil) = $\{h_1,h_2,h_3,h_4,h_5\}$, G(çamur değil) = $\{h_1,h_2,h_3,h_4,h_5\}$, G(çelik değil) = $\{h_1,h_2,h_3,h_4,h_5\}$, G(taş değil) = $\{h_1,h_2,h_3,h_4,h_5\}$} dir ve bu yüzden (G,B) mutlak esnek kümedir.

Molodtsov tarafında verilen öneriler ile iki esnek küme üzerindeki VE ve $VEYA$ işlemleri aşağıdaki gibi ifade edilir.

Tanım 2.2.14: Eğer (F,A) ve (G,B) iki esnek küme ise $(F,A) \wedge (G,B)$ ile gösterilen "(F,A) VE (G,B)" işlemi

$(F,A) \wedge (G,B) = (H, A \times B)$, $\forall(\alpha,\beta) \in A \times B$ için $H(\alpha,\beta) = F(\alpha) \cap G(\beta)$ şeklinde tanımlanır.

Örnek 2.2.15: "evlerin maliyeti" ile tanımlanan (F, A) ve "evlerin cazibesi" ile tanımlanan (G, B) esnek kümesini göz önüne alalım.

Kabul edelim ki, $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8, h_9, h_{10}\}$, $A =$ {çok pahalı, pahalı ucuz} ve

$B =$ {güzel, çevre düzenlemesi yapılmış, ucuz } şeklinde verilsin.

F(çok pahalı) = $\{h_2, h_4, h_7, h_8\}$, F(pahalı) = $\{h_1, h_3, h_5\}$ F(ucuz) = $\{h_6, h_9, h_{10}\}$ ve G(güzel) = $\{h_2, h_3, h_7\}$, G(çevre düzenlemesi yapılmış) = $\{h_5, h_6, h_8\}$, G(ucuz) = $\{h_6, h_9, h_{10}\}$ olsun.

O halde $(F, A) \wedge (G, B) = (H, A \times B)$ olmak üzere

H(çok pahalı, güzel) = $\{h_2, h_7\}$, H(çok pahalı, çevre düzenlemesi yapılmış) = $\{h_8\}$, H(çok pahalı, ucuz) = $\emptyset$, H(pahalı, güzel) = $\{h_3\}$, H(pahalı, çevre düzenlemesi yapılmış) = $\{h_5\}$, H(pahalı, ucuz) = $\emptyset$, H(ucuz, güzel) = $\emptyset$, H(ucuz, çevre düzenlemesi yapılmış) = $\{h_6\}$, H(ucuz, ucuz) = $\{h_6, h_9, h_{10}\}$ dur.

Tanım 2.2.16: Eğer (F, A) ve (G, B) iki esnek küme ise $(F, A) \vee (G, B)$ ile gösterilen "$(F, A)\ VEYA\ (G, B)$" işlemi $(F, A) \vee (G, B) = (O, A \times B)$, $\forall(\alpha, \beta) \in A \times B$ için $O(\alpha, \beta) = F(\alpha) \cup G(\beta)$ şeklinde tanımlanır.

Örnek 2.2.17: Yukarıdaki Örnek2.2.15 göz önüne alalım.

$(F, A) \vee (G, B) = (O, A \times B)$ ifadesi $\forall(\alpha, \beta) \in A \times B$ için $O(\alpha, \beta) = F(\alpha) \cup G(\beta)$ olarak tanımlandığından

O(çok pahalı, güzel) = $\{h_2, h_3, h_4, h_7, h_8\}$, O(çok pahalı, çevre düzenlemesi yapılmış) = $\{h_2, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8\}$, O(çok pahalı, ucuz) = $\{h_2, h_4, h_6, h_7, h_8, h_9, h_{10}\}$, O(pahalı, güzel) = $\{h_1, h_2, h_3, h_5, h_7\}$, O(pahalı, çevre düzenlemesi yapılmış) = $\{h_1, h_3, h_5, h_6, h_8\}$, O(pahalı, ucuz) = $\{h_1, h_3, h_5, h_6, h_9, h_{10}\}$, O(ucuz, güzel) = $\{h_2, h_3, h_6, h_7, h_9, h_{10}\}$, O(ucuz, güzel) = $\{h_2, h_3, h_6, h_7, h_9, h_{10}\}$, O(ucuz, çevre düzenlemesi yapılmış) = $\{h_5, h_6, h_8, h_9, h_{10}\}$, O(ucuz, ucuz) = $\{h_6, h_9, h_{10}\}$ dır.

Önerme 2.2.18: $\wedge$,$\vee$ işlemleri D' Morgan kurallarını sağlar.

i. $((F, A) \vee (G, B))^c = (F, A)^c \wedge (G, B)^c$

ii. $((F,A) \wedge (G,B))^c = (F,A)^c \vee (G,B)^c$

İspat:

i. $(F,A) \vee (G,B) = (O, A \times B)$ olduğunu kabul edelim.

O halde $((F,A) \vee (G,B))^c = (O, A \times B)^c = (O^c, \urcorner(A \times B))$ dir.

$(F,A)^c \wedge (G,B)^c = (F^c, \urcorner A) \wedge (G^c, \urcorner B)$

$= (J, \urcorner A \times \urcorner B)$, $(J(x,y) = F^c(x) \cap G^c(y))$

$= (J, \urcorner(A \times B))$

Şimdi $(\neg\alpha, \neg\beta) \in \urcorner(A \times B)$ yi ele alalım. Bu takdirde ;

$$O^c(\neg\alpha, \neg\beta) = U - O(\alpha, \beta)$$

$$= U - [F(\alpha) \cup G(\beta)]$$

$$= [U - F(\alpha)] \cap [U - G(\beta)]$$

$$= F^c(\neg\alpha) \cap G^c(\neg\beta)$$

$$= J(\neg\alpha, \neg\beta)$$

ise O^c ile J aynıdır. Böylece ispat tamamlanır.

ii. $(F,A) \wedge (G,B) = (H, A \times B)$ olduğunu kabul edelim.

O halde $((F,A) \wedge (G,B))^c = (H, A \times B)^c = (H^c, \urcorner(A \times B))$ dir
$(F,A)^c \vee (G,B)^c = (F^c, \urcorner A) \vee (G^c, \urcorner B)$

$= (K, \urcorner A \times \urcorner B)$, $(K(x,y) = F^c(x) \cup G^c(y))$

$= (K, \urcorner(A \times B))$ dir.

Şimdi $(\neg\alpha, \neg\beta) \in \urcorner(A \times B)$ yi ele alalım. Bu takdirde

$$H^c(\neg\alpha, \neg\beta) = U - H(\alpha, \beta)$$

$$= U - [F(\alpha) \cap G(\beta)]$$

$$= [U - F(\alpha)] \cup [U - G(\beta)]$$

$= F^c(\neg\alpha) \cup G^c(\neg\beta)$

$= K(\neg\alpha, \neg\beta)$

ise H^c ve K aynıdır. Böylece ispat tamamlanır.

Tanım 2.2.19: U üzerinde (F, A) ve (G, B) esnek kümelerinin birleşimi (H, C) dir. Burada $C = A \cup B$ ve $e \in C$ için

$$H(e) = \begin{cases} F(e) & , \quad eğer\ e \in A - B \\ G(e) & , \quad eğer\ e \in B - A \\ F(e) \cup G(e) & , \quad eğer\ e \in A \cap B \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır ve $(F, A) \,\tilde{\cup}\, (G, B) = (H, C)$ şeklinde gösterilir.

Yukarıdaki örnekte $(F, A) \,\tilde{\cup}\, (G, B) = (H, C)$ olmak üzere; H(çok pahalı) = $\{h_2, h_4, h_7, h_8\}$, H(pahalı) = $\{h_1, h_3, h_5\}$, H(ucuz) = $\{h_6, h_9, h_{10}\}$, H(güzel) = $\{h_2, h_3, h_7\}$ ve H(çevre düzenlemesi yapılmış) = $\{h_5, h_6, h_8\}$ dir.

Tanım2.2.20: U üzerinde tanımlı (F, A) ve (G, B) iki esnek kümenin keşişimi (H, C) dir. Burada $C = A \cap B$ ve her $e \in C$ için $H(e) = F(e)$ veya $G(e)$ (her ikisinde aynı küme ise) şeklinde tanımlanır ve $(F, A) \,\tilde{\cap}\, (G, B) = (H, C)$ ile gösterilir.

Yukarıdaki örnekte $(F, A) \,\tilde{\cap}\, (G, B) = (H, C)$ olmak üzere; $C = \{\text{ucuz}\}$ ve H(ucuz) = $\{h_6, h_9, h_{10}\}$ dur.

Önerme2.2.21: Esnek kümeler üzerinde aşağıdaki sonuçlar vardır.

- **i.** $(F, A) \,\tilde{\cup}\, (F, A) = (F, A)$
- **ii.** $(F, A) \,\tilde{\cap}\, (F, A) = (F, A)$
- **iii.** $(F, A) \,\tilde{\cup}\, \Phi = \Phi$, burada Φ boş esnek kümedir.
- **iv.** $(F, A) \,\tilde{\cap}\, \Phi = \Phi$
- **v.** $(F, A) \,\tilde{\cup}\, \tilde{A} = \tilde{A}$, burada $\tilde{A}$ mutlak esnek kümedir.
- **vi.** $(F, A) \,\tilde{\cap}\, \tilde{A} = (F, A)$

Önerme 2.2.22: Esnek kümelerin tümleyeni üzerinde aşağıdaki sonuçlar vardır.

- **i.** $((F, A) \,\tilde{\cup}\, (G, B))^c = (F, A)^c \,\tilde{\cup}\, (G, B)^c$
- **ii.** $((F, A) \,\tilde{\cap}\, (G, B))^c = (F, A)^c \,\tilde{\cap}\, (G, B)^c$

İspat: i. $(F,A)\,\tilde{\cup}\,(G,B) = (H, A \cup B)$ olduğunu kabul edelim.

Burada

$$H(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha) & , \quad \alpha \in A - B \\ G(\alpha) & , \quad \alpha \in B - A \\ F(\alpha) \cup G(\alpha) & , \quad \alpha \in A \cap B \end{cases}$$

şeklindedir. Bu takdirde

$$((F,A)\,\tilde{\cup}\,(G,B))^c = (H,\ A \cup B)^c$$

$$= (H^c, ⅂A \cup ⅂B) \text{ dir.}$$

$$H^c(\neg\alpha) = U - H(\alpha) \quad , \quad \forall \neg\alpha \in ⅂A \cup ⅂B \text{ ve}$$

$$H^c(\neg\alpha) = \begin{cases} F^c(\neg\alpha) & , \quad \neg\alpha \in ⅂A - ⅂B \\ G^c(\neg\alpha) & , \quad \neg\alpha \in ⅂B - ⅂A \\ F^c(\neg\alpha) \cup G^c(\neg\alpha) & , \quad \neg\alpha \in ⅂A \cap ⅂B \end{cases}$$

Şimdide

$$(F,A)^c\,\tilde{\cup}\,(G,B)^c = (F^c, ⅂A)\,\tilde{\cup}\,(G^c, ⅂B)$$

$$= (K, ⅂A \cup ⅂B)$$

$$K(\neg\alpha) = \begin{cases} F^c(\neg\alpha) & , \quad \neg\alpha \in ⅂A - ⅂B \\ G^c(\neg\alpha) & , \quad \neg\alpha \in ⅂B - ⅂A \\ F^c(\neg\alpha) \cup G^c(\neg\alpha) & , \quad \neg\alpha \in ⅂A \cap ⅂B \end{cases}$$

ise H^c ile K aynıdır. Böylece ispat tamamlanır.

ii. $(F,A)\,\tilde{\cap}\,(G,B) = (H, A \cap B)$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde

$$((F,A)\,\tilde{\cap}\,(G,B))^c = (H, A \cap B)^c$$

$$= (H^c, ⅂A \cap ⅂B)$$

Şimdi de

$$(F,A)^c\,\tilde{\cap}\,(G,B)^c = (F^c, ⅂A)\,\tilde{\cap}\,(G^c, ⅂B)$$

$$= (K, ⅂A \cap ⅂B) \quad \text{diyelim.}$$

$\forall \neg\alpha \in (\urcorner A \cap \urcorner B)$ için

$$K(\neg\alpha) = F^c(\neg\alpha) \quad \text{veya} \quad G^c(\neg\alpha)$$

$$= F(\alpha) \quad \text{veya} \quad G(\alpha) \quad , \quad \alpha \in A \cap B$$

$$= H(\alpha)$$

$$= H^c(\neg\alpha)$$

ise K ile H^c aynıdır. Böyle ispat tamamlanır.

Önerme2.2.23: (F,A) , (G,B) ve (H,C) , U üzerinde üç esnek küme olmak üzere;

- **i.** $(F,A)\,\tilde{\cup}\,((G,B)\,\tilde{\cup}\,(H,C)) = ((F,A)\,\tilde{\cup}\,(G,B))\,\tilde{\cup}\,(H,C)$
- **ii.** $(F,A)\,\tilde{\cap}\,((G,B)\,\tilde{\cap}\,(H,C)) = ((F,A)\,\tilde{\cap}\,(G,B))\,\tilde{\cap}\,(H,C)$
- **iii.** $(F,A)\,\tilde{\cup}\,\big((G,B)\,\tilde{\cap}\,(H,C)\big) = ((F,A)\,\tilde{\cup}\,(G,B))\,\tilde{\cap}\,((F,A)\,\tilde{\cup}\,(H,C))$
- **iv.** $(F,A)\,\tilde{\cap}\,\big((G,B)\,\tilde{\cup}\,(H,C)\big) = ((F,A)\,\tilde{\cap}\,(G,B))\,\tilde{\cup}\,((F,A)\,\tilde{\cap}\,(H,C))$

Önerme 2.2.24: (F,A) , (G,B) ve (H,C) , U üzerinde üç esnek küme olmak üzere;

- **i.** $(F,A) \vee ((G,B) \vee (H,C)) = ((F,A) \vee (G,B)) \vee (H,C)$
- **ii.** $(F,A) \wedge ((G,B) \wedge (H,C)) = ((F,A) \wedge (G,B)) \wedge (H,C)$
- **iii.** $(F,A) \vee \big((G,B) \wedge (H,C)\big) = ((F,A) \vee (G,B)) \wedge ((F,A) \vee (H,C))$
- **iv.** $(F,A) \wedge \big((G,B) \vee (H,C)\big) = ((F,A) \wedge (G,B)) \vee ((F,A) \wedge (H,C))$

Önerme2.2.23 ve Önerme2.2.24 ün ispatları esnek kümelerin genel özellikleri kullanılarak kolay bir şekilde yapılır.

Tanım 2.2.25: (F,A) ve (G,B) , U üzerinde esnek kümeler olsun. (F,A) ve (G,B) nin ikili kesişimi (H,C) ve $C = A \cap B$ olmak üzere, her $x \in C$ için $H(x) = F(x) \cap G(x)$ şeklinde tanımlanır ve $(F,A)\,\tilde{\sqcap}\,(G,B)$ ile gösterilir.

Teorem 2.2.26:[3] $f: A \to B$ fonksiyon, P ve Q, A nın boş olmayan alt kümeleri olsun.

- **i.** $P \subset Q \Longrightarrow f(P) \subset f(Q)$
- **ii.** $f(P \cup Q) = f(P) \cup f(Q)$
- **iii.** $f(P \cap Q) \subset f(P) \cap f(Q)$
- **iv.** f bire-bir ise $f(P \cap Q) = f(P) \cap f(Q)$
- **v.** f örten ise $\big(f(P)\big)^c \subset f(P^c)$

vi. f birebir-örten ise $\left(f(P)\right)^c \subset f(P^c)$

Teorem 2.2.27:[3] $f: A \rightarrow B$ örten bir dönüşüm ve S ve T, B nin boş olmayan alt kümeleri olsun.

i. $S \subset T \Rightarrow f^{-1}(S) \subset f^{-1}(T)$
ii. $f^{-1}(S \cup T) = f^{-1}(S) \cup f^{-1}(T)$
iii. $f^{-1}(S \cap T) = f^{-1}(S) \cap f^{-1}(T)$
iv. $f^{-1}(S^c) = \left(f^{-1}(S)\right)^c$

3.BÖLÜM
ESNEK CEBİRSEL YAPILAR

3.1. Esnek Gruplar

G bir grup H de G nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer H kümesi G de tanımlanan grup işlemi ile bir grup oluyorsa H ye G nin bir alt grubu denir ve $H < G$ şeklinde gösterilir. Bu bölüm boyunca G bir grup ve A boş olmayan bir küme olarak alınacaktır.

R, A nın bir elemanı ile G nin bir elemanı arasında keyfi bir bağıntı olsun.

$$F: A \longrightarrow P(G) \qquad , \qquad F(x) = \{\, y \in G : (x, y) \in R \,, x \in A \,, y \in G\}$$

olarak tanımlanabilir. (F, A) çifti G üzerinde esnek kümedir. A dan G ye tanımlanan küme değerli fonksiyon $A \times G$ üzerinde R bağıntısı tanımlar ve bu bağıntı

$R = \{\, (x, y) \in A \times G : y \in F(x)\}$ şeklindedir. (A, G, R) üçlüsü yaklaşım kümesi olarak ifade edilir.

Tanım 3.1.1:[4] (F, A) , G üzerinde esnek küme olsun. $\forall x \in A$ için $F(x) < G$ olmak üzere (F, A) çiftine G üzerinde bir esnek grup denir.

Örnek 3.1.2:[4] $G = A = S_3 = \{e, (12), (13), (23), (123), (132)\}$ olsun ve $F: S_3 \rightarrow S_3$ fonksiyonunun değer kümesi $F(x) = \{y \in G : xRy \Leftrightarrow y = x^n \,, n \in N\}$ şeklinde tanımlansın. (F, A) esnek grubunun alt kümeleri $\{\, F(x) : x \in A\,\}$ şeklinde parametrize edilen bir ailedir. Bu bize G nin alt gruplarının koleksiyonunu verir. Yukarıda tanımlanan özel F dönüşümü için $F(x)$ değeri G nin bir alt grubudur. Bu durumda (F, A) esnek grubunu G nin alt gruplarının koleksiyonu olarak alabiliriz.

$F(e) = \{e\}$, $F(12) = \{e, (12)\}$, $F(13) = \{e, (13)\}$, $F(23) = \{e, (23)\}$,
$F(123) = F(132) = \{e, (123), (132)\}$

Tablo2 bu esnek grubun gösterimidir.

Eğer $y = x^n$ ve $n \in N$ ise (x, y), 1 ile ve eğer $y \neq x^n$ ise (x, y), 0 ile gösterilir. Her bir alt esnek grup aşağıdaki Tablo 2 deki bir sütunla sayısal olarak temsil edilebilir.

x	y					
	e	(12)	(13)	(23)	(123)	(132)
e	1	0	0	0	0	0
(12)	1	1	0	0	0	0
(13)	1	0	1	0	0	0
(23)	1	0	0	1	0	0
(123)	1	0	0	0	1	1
(132)	1	0	0	0	1	1

Tablo 2

Bir parametre kümesi üzerinde tanımlanan her fonksiyon için bir esnek grup karşılık gelmeyebilir. $G = S_3$ ve $H(x) = \{y \in G : xRy \Leftrightarrow o(x) = o(y)\}$ olmak üzere $H: G \to P(G)$ tanımlı küme değerli fonksiyon verilsin. $(12) \in S_3$ için $H(12) = \{(12), (13), (23)\}$ elde edilir. $H(12)$, G nin alt grubu olmadığından (H, G) bir esnek grup değildir.

Teorem 3.1.3:[4] (F, A) ve (H, A), G üzerinde iki esnek grup olsun. Bu iki esnek grubun kesişimi olan $(F, A) \widetilde{\cap} (H, A)$ da G üzerinde bir esnek gruptur.

İspat : $(F, A) \widetilde{\cap} (H, A) = (U, C)$, $C = A \cap A = A$ ve

$\forall x \in C$ için $U(x) = F(x)$ veya $U(x) = H(x)$ dir.

$U: A \to P(G)$ ye tanımlı bir dönüşümdür. Bu yüzden (U, A), G üzerinde esnek kümedir.

(F, A) ve (H, A) G üzerinde esnek grup olduğundan

$\forall x \in A$ için $U(x) = F(x) < G$ veya $U(x) = H(x) < G$ dir.

Teorem 3.1.4: [4] (F, A) ve (H, B), G üzerinde esnek grup olsun. Eğer $A \cap B = \emptyset$ ise $(F, A) \tilde{\cup} (H, B)$ da G üzerinde bir esnek gruptur.

İspat : $(F, A) \tilde{\cup} (H, B) = (U, C)$ olmak üzere $A \cap B = \emptyset$ olduğundan

$\forall x \in C$ için ya $x \in A - B$ yada $x \in B - A$ dır.

Eğer $x \in A - B$ ise $U(x) = F(x) < G$ ve

eğer $x \in B - A$ ise $U(x) = H(x) < G$ dir. Bu yüzden $(F, A) \tilde{\cup} (H, B)$ G üzerinde esnek gruptur.

Teorem 3.1.5: [4] (F, A) ve (H, B), G üzerinde iki esnek grup olmak üzere $(F, A) \wedge (H, B)$, G üzerinde bir esnek gruptur.

İspat : $(F, A) \wedge (H, B) = (U, A \times B)$ olsun.

$\forall (\alpha, \beta) \in A \times B$ için $U(\alpha, \beta) = F(\alpha) \cap G(\beta)$ dir.

$F(\alpha)$ ve $H(\beta)$, G nin birer alt grubu olduğu için $F(\alpha) \cap G(\beta)$ da G nin bir alt grubudur. Böylece $(F, A) \wedge (H, B)$ nin G üzerinde esnek grup olduğu elde edilir.

Teorem3.1.4 ve Teorem3.1.5 ikiden daha fazla grup için genellenebilir.

Tanım 3.1.6: [4] (F, A) , G üzerinde esnek grup olsun.

- **i.** 'e' G grubunun birim elemanı olmak üzere eğer $\forall x \in A$ için $F(x) = \{e\}$ ise (F, A), G üzerinde birim esnek grup olarak tanımlanır.
- **ii.** Eğer $\forall x \in A$ için $F(x) = G$ ise (F, A), G üzerinde mutlak esnek grup olarak tanımlanır.

Teorem 3.1.7: [4]

- **i.** (F, A) , G üzerinde bir esnek grup ve f, G den K ya tanımlı bir homomorfizma olsun. Eğer $\forall x \in A$ için $F(x) = Kerf$ ise $(f(F), A)$, K üzerinde bir birim esnek gruptur. ($Kerf = \{ g \in G : f(g) = e_K \}$, e_K, K nin birim elemanı)
- **ii.** (F, A) bir mutlak esnek grup ve f, G den K ye tanımlı bir homomorfizma ise

$(f(F), A)$, K üzerinde bir mutlak esnek gruptur.

İspat:

i. e_K , K nın birim elemanı olmak üzere $x \in A$ için $f\big(F(x)\big) = e_K$ dır. Tanım3.1.6 dan $(f(F), A)$, K üzerinde bir birim esnek gruptur.

ii. (F, A) , G üzerinde mutlak esnek grup olduğundan $\forall x \in A$ için $F(x) = G$ dir. $\forall x \in A$ için $f\big(F(x)\big) = f(G) = K$ dir. Tanım3.1.6 dan $(f(F), A)$, K üzerinde mutlak esnek gruptur.

Tanım 3.1.8: [4] (F, A) ve (H, K), G üzerinde iki esnek grup olsun. Eğer ;

(1) $K \subset A$

(2) $\forall x \in K$ için $H(x)$, $F(x)$ in bir alt grubu

ise (H, K) ya (F, A) nın bir esnek alt grubu denir ve $(H, K) \mathrel{\tilde{<}} (F, A)$ şeklinde gösterilir.

Örnek 3.1.9: $G = S_3$, $A = S_3$ ve $K = A_3$ olsun.

Eğer $F(x) = \{\, y \in S_3 : xRy \Leftrightarrow y = x^n , n \in N \,\}$ ve

$H(x) = \{y \in A_3 : xRy \Leftrightarrow y \in < x >\}$ şeklinde tanımlanırsa, her $x \in A$ için $A_3 < S_3$ ve $H(x) < F(x)$ olduğu için $(H, K) \mathrel{\tilde{<}} (F, A)$ dır.

Esnek alt grubun tanımını kullanarak, klasik alt grubun özelliklerine benzeyen esnek alt grubun bazı özelliklerini listelenebilir.

Teorem 3.1.10: [4]

i. (F, A) ve (H, A), G üzerinde iki esnek grup olsun. Eğer $\forall x \in A$ için $F(x) \subseteq H(x)$ ise (F, A) , (H, A) nın esnek alt grubudur.

ii. Eğer $E = \{e_G\}$ ve (U, E) , (F, G) her ikisi de G üzerinde esnek grup ise (U, E) , (F, G) nin bir esnek alt grubudur.

İspat:

i. $A \subseteq A$ olduğu açıktır.

(F,A) ve (H,A), G üzerinde esnek grup olduğu için $\forall x \in A$ için $F(x) < G$ ve $H(x) < G$ dir. Ve ayrıca teoremden dolayı $F(x) \subseteq H(x)$ olduğundan $F(x) < H(x)$ dir.

Bundan dolayı $(F,A) \mathrel{\tilde{<}} (H,A)$ elde edilir.

ii. $E = \{e\}$ olduğundan $E \subset G$ olduğu açıktır.

(U,E) ve (F,G), G üzerinde esnek grup olduğundan $e \in E$ için $U(e) < G$ ve $\forall x \in G$ için $F(x) < G$ dir. $E = \{e\}$ olduğundan $U(e) < F(e)$ dir.

Bundan dolayı da $(U,E) \mathrel{\tilde{<}} (F,G)$ olduğu elde edilir.

Teorem 3.1.11: [4] (F,A) , G üzerinde esnek grup ve $\{ (H_i, K_i): i \in I\}$ (F,A) nın boş olmayan esnek alt gruplarının ailesi olsun. O halde;

i. $\tilde{\cap}_{i\in I} (H_i , K_i)$, (F,A) nın bir esnek alt grubudur.

ii. $\wedge_{i\in I}(H_i , K_i)$, $\wedge_{i\in I}(F,A)$ nın esnek alt grubudur.

iii. $\forall i,j \in I$ için $K_i \cap K_j = \emptyset$ ise $\tilde{\cup}_{i\in I} (H_i , K_i)$, (F,A) nın esnek alt grubudur.

İspat:

i. $\bigcap_{i\in I} K_i \subset A$ olduğu açıktır.

$\forall x \in \bigcap_{i\in I} K_i$ için $\tilde{\cap}_{i\in I} (H_i , K_i) = H_i(x)$ dir.

$\forall i \in I$ için $(H_i , K_i) \mathrel{\tilde{<}} (F,A)$ olduğundan $\forall x \in \bigcap_{i\in I} K_i$ için $H_i(x) < F(x)$ dir. Bundan dolayı ise $\tilde{\cap}_{i\in I} (H_i , K_i) \mathrel{\tilde{<}} (F,A)$ olduğu elde edilir.

ii. $K_i \subset A$ olduğundan $K_1 \times K_2 \times \dots K_i \subset A \times A \times \dots \times A$, $\forall i \in I$ için $\wedge_{i\in I}(H_i , K_i) = (U, K_1 \times K_2 \times \dots K_i)$ olsun.

$\forall (x_1, x_2, \dots, x_i) \in K_1 \times K_2 \times \dots K_i$ için $U(x_1, x_2, \dots, x_i) = H_1(x_1) \cap H_2(x_2) \cap \dots \cap H_i(x_i)$ dir. $\forall i \in I$ için $(H_i , K_i) \mathrel{\tilde{<}} (F,A)$ olduğundan $H_1(x_1) < F(x_1)$, $H_2(x_2) < F(x_2)$, ... , $H_i(x_i) < F(x_i)$ dir. Dolayısıyla $\bigcap_{i\in I} H_i(x_i) < \bigcap_{i\in I} F(x_i)$ dir. Bundan dolayı $\wedge_{i\in I}(H_i , K_i) \mathrel{\tilde{<}} \wedge_{i\in I}(F,A)$ olduğu elde edilir.

iii. $\forall i \in I$ için $K_i \subset A$ olduğundan $\bigcup_{i\in I} K_i \subset A$ dır.

$C = \bigcup_{i\in I} K_i$, $\tilde{\cup}_{i\in I} (H_i , K_i) = (U,C)$ olsun. $\forall i,j \in I$ için $K_i \cap K_j = \emptyset$ olduğundan $\forall x \in C$ için $x \in K_i - K_j$ veya $x \in K_j - K_i$ dir.

Eğer $x \in K_i - K_j$ ise $U(x) = H_i(x)$ dir. $\forall i \in I$ için $(H_i , K_i) \lessapprox (F, A)$ olduğundan $H_i(x) < F(x)$ dir.

Eğer $x \in K_j - K_i$ ise $U(x) = H_j(x)$ dir. $\forall i \in I$ için $(H_i , K_i) \lessapprox (F, A)$ olduğundan $H_j(x) < F(x)$ dir. Bundan dolayı $\forall i, j \in I$ için $K_i \cap K_j = \emptyset$ olmak şartıyla $\tilde{\cup}_{i\in I} (H_i , K_i) \lessapprox (F, A)$ olduğu elde edilir.

Teorem 3.1.12: [4] (F, A) ve (H, B) , G üzerinde iki esnek grup ve (F, A) , (H, B) nin esnek alt grubu olsun. Eğer f , G den K ye tanımlı bir homomorfizma ise $(f(F), A)$ ve $(f(F), B)$ nin her ikisi de K üzerinde birer esnek alt gruptur ve $(f(F), A)$, $(f(F), B)$ nin bir esnek alt grubudur.

İspat: *f*, G den K ya homomorfizma olduğundan $\forall x \in A$ ve $\forall y \in B$ için $f\big(F(x)\big)$ ve $f\big(H(y)\big)$, K nın alt grubudur. Bu yüzden $(f(F), A)$ ve $(f(H), B)$ K üzerinde esnek gruptur.

Eğer (F, A) , (H, B) nin bir esnek alt grubu ise $\forall x \in A$ için $F(x)$, $H(x)$ in bir alt grubudur ve $f\big(F(x)\big)$ de $f\big(H(x)\big)$ in bir alt grubudur. Tanım3.1.6 dan $(f(F), A) \lessapprox (f(H), B)$ elde edilir.

Tanım 3.1.13: [4] (F, A) ve (H, B) sırasıyla G ve K üzerinde iki esnek grup ve $f: G \to K$ ve $g: A \to B$ tanımlı iki fonksiyon olsun. Eğer ;

1. f , G den K ya tanımlı örten bir homomorfizma
2. g , A dan B ye tanımlı örten bir dönüşüm ve
3. $\forall x \in A$ için $f\big(F(x)\big) = H\big(g(x)\big)$

şartları sağlıyorsa (f, g) ye bir esnek homomorfizma denir ve (F, A) , (H, B) ye esnek homomorfiktir şeklinde ifade edilir. $(F, A) \sim (H, B)$ şeklinde gösterilir.

Bu tanımda eğer f , G den K ye izomorfizma ve g , A dan B ye birebir örten bir dönüşüm ise (f, g) ye bir esnek izomorfizma denir ve (F, A) , (H, B) ye esnek izomorfiktir. $(F, A) \cong (H, B)$ şeklinde gösterilir.

Örnek 3.1.14: [4] $(Z, +)$ ve $(Z_m, \oplus)$ gruplarını göz önüne alalım. $k \in Z$ için $f(k) = \bar{k}$ şeklinde Z den Z_m ye homomorfizma ve $k \in Z^+$ için $g(k) = \bar{k}$ şeklinde Z^+ dan

Z_m ye bir dönüşüm tanımlayalım.

$$F: Z^+ \to P(Z)$$

$$F(x) = \{\, y \in Z : y = 5kx \;\;,\;\; k \in Z\} \qquad \text{ve}$$

$$H: Z_m \to P(Z_m)$$

$$H(u) = \{\, \bar{y} \in Z_m : y = uk \,, k \in 5Z\,\}$$

şeklinde verilsin. Buna göre

$f\big(F(x)\big) = 5xZ$ ve $H(u) = \{\overline{ku} : k \in 5Z\,\}$ elde edilir. Böylece (F, Z^+) ve (H, Z_m) sırasıyla Z ve Z_m üzerinde esnek gruptur.

$F(x) = \{\,\overline{5xk} : k \in Z\,\}$ ve $H\big(g(x)\big) = \{\,\overline{xs} : s \in 5Z\,\}$ olduğu için $f\big(F(x)\big) = H\big(g(x)\big)$ dir. Böylece (f, g) bir esnek homomorfizmadır ve (F, Z^+) , (H, Z_m) ye esnek homomorfiktir.

Tanım 3.1.15: [4] (F, A), G üzerinde bir esnek grup ve (H, B) , (F, A) nın bir esnek alt grubu olsun. Eğer $H(x)$, $F(x)$ in bir normal alt grubu (yani $H(x) \lhd F(x)$, $\forall x \in B$) ise (H, B), (F, A) nın bir esnek normal alt grubudur ve $(H, B) \,\tilde{\lhd}\, (F, A)$ şeklinde gösterilir.

Teorem 3.1.16: [4] (F, A) , G üzerinde bir esnek grup ve (H_i, K_i), $i \in I$, (F, A) nın esnek normal alt gruplarının bir ailesi olsun. O halde;

- **i.** $\tilde{\cap}_{i\in I}\,(H_i\,, K_i)$ **,** (F, A) nın bir esnek normal alt grubudur.
- **ii.** $\wedge_{i\in I}(H_i\,, K_i\,)$, $\wedge_{i\in I}(F, A)$ nın bir esnek normal alt grubudur.
- **iii.** $\forall i, j \in I$ için $K_i \cap K_j = \emptyset$ ise $\tilde{\cup}_{i\in I}\,(H_i\,, K_i)$, (F, A) nın bir esnek normal alt grubudur.

İspat: $i \in I$ için $(H_i\,, K_i) \,\tilde{\lhd}\, (F, A)$ olduğundan $(H_i\,, K_i) \,\tilde{<}\, (F, A)$ dır.

- **i.** $C = \bigcap_{i\in I} K_i$ ve $\tilde{\cap}_{i\in I}\,(H_i\,, K_i) = (U, C)$ olsun. $\forall x \in C$ ve $\forall i \in I$ için $U(x) = H_i(x)$ dir. $i \in I$ için $(H_i\,, K_i) \,\tilde{\lhd}\, (F, A)$ olduğundan $\forall x \in C$ ve $\forall i \in I$ için $H_i(x) \lhd F(x)$ dir. Dolayısıyla $\tilde{\cap}_{i\in I}\,(H_i\,, K_i) \,\tilde{\lhd}\, (F, A)$ elde edilir.

ii. $\wedge_{i\in I}(H_i\,,K_i) = (U, K_1 \times K_2 \times \dots K_i)$ olsun.

$\forall (x_1, x_2, \dots, x_i) \in K_1 \times K_2 \times \dots K_i$ için $U(x_1, x_2, \dots, x_i) = H_1(x_1) \cap H_2(x_2) \cap \dots \cap H_i(x_i)$ dir. $i \in I$ için $(H_i\,,K_i) \trianglelefteq (F, A)$ olduğundan $H_1(x_1) \lhd F(x_1)\,,\; H_2(x_2) \lhd F(x_2)\,, \dots\,, H_i(x_i) \lhd F(x_i)$ elde edilir. Bu yüzden $\bigcap_{i\in I} H_i(x_i) \lhd \bigcap_{i\in I} F(x_i)$ dur. Yani $\wedge_{i\in I}(H_i\,,K_i\,) \trianglelefteq \wedge_{i\in I}(F, A)$ dır.

iii. $C = \tilde{\cup}_{i\in I} K_i$ ve $\tilde{\cup}_{i\in I}\,(H_i\,,K_i) = (U, C)$ olsun. $\forall i, j \in I$ için $K_i \cap K_j = \emptyset$ olduğundan $\forall x \in C$ için $x \in K_i - K_j$ veya $x \in K_j - K_i$ dir.

Eğer $x \in K_i - K_j$ ise $U(x) = H_i(x)$ dir. $\forall i \in I$ için $(H_i\,,K_i) \trianglelefteq (F, A)$ olduğundan $H_i(x) \lhd F(x)$ dir.

Eğer $x \in K_j - K_i$ ise $U(x) = H_j(x)$ dir. $\forall i \in I$ için $(H_i\,,K_i) \trianglelefteq (F, A)$

olduğundan $H_j(x) \lhd F(x)$ dir. Dolayısıyla $\forall i, j \in I$ için $K_i \cap K_j = \emptyset$ olmak şartıyla $\tilde{\cup}_{i\in I}\,(H_i\,,K_i) \trianglelefteq (F, A)$ dır.

Tanım 3.1.17: [4] (F, A) ve (H, B) sırasıyla G ve K üzerinde iki esnek grup olsun. (F, A) ve (H, B) esnek gruplarının çarpımı

$(F, A) \times (H, B) = (U, A \times B)$ olmak üzere,

$\forall (x, y) \in A \times B$ için $U(x\,, y) = F(x) \times H(y)$ şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.1.18: [4] (F, A) ve (H, B) sırasıyla G ve K üzerinde iki esnek grup olmak üzere $(F, A) \times (H, B)$ çarpımı $G \times K$ üzerinde esnek gruptur.

İspat: Tanım3.1.17 den $(F, A) \times (H, B) = (U, A \times B)$ olsun. $\forall (x, y) \in A \times B$ için $U(x, y) = F(x) \times H(y)$ dir. (F, A), G üzerinde esnek grup olduğundan $\forall x \in A$ için $F(x) < G$ ve (H, B) , K üzerinde esnek grup olduğundan $\forall y \in B$ için $H(y) < K$ dır. Dolayısıyla $\forall (x, y) \in A \times B$ için $U(x, y) = F(x) \times H(y) < G \times K$ dır. Böylece ispat tamamlanır.

3.2. Esnek Halka

Tanım 3.2.1: [5] (F,A) esnek küme olsun. $supp(F,A) = \{x \in A: F(x) = \emptyset\}$, (F,A) esnek kümesinin desteği olarak adlandırılır. Eğer bir esnek kümenin desteği boş kümeye eşit değilse bu esnek küme boş olmayan esnek küme olarak adlandırılır.

Tanım 3.2.2: (F,A), R halkası üzerinde boş olmayan bir esnek küme olsun. Her $x \in A$ için $F(x)$ R nin alt halkası ise (F,A) ya bir esnek halka denir.

Örnek 3.2.3: $R = A = Z_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$ olsun. Küme değerli $F: A \to \mathcal{P}(R)$ fonksiyonu $F(x) = \{y \in R : x.y = 0\}$ ile tanımlansın.

$F(0) = R$, $F(1) = \{0\}$, $F(2) = \{0,3\}$

$F(3) = \{0,2,4\}$, $F(4) = \{0,3\}$, $F(5) = \{0\}$

Yukarıdaki tüm kümeler R nin alt halkasıdır. Bu yüzden (F,A), R üzerinde esnek halkadır.

Teorem 3.2.4: [5] (F,A) ve (G,B), R üzerinde esnek halka olsun.

i. Eğer $(F,A) \wedge (G,B)$ boş olmayan bir esnek küme ise R üzerinde esnek halkadır.

ii. Eğer $(F,A) \tilde{\sqcap} (G,B)$ boş olmayan bir esnek küme ise R üzerinde esnek halkadır.

İspat :

i. $(F,A) \wedge (G,B) = (H,C)$, $C = A \times B$ olmak üzere;
Her $(a,b) \in C$ için $H(a,b) = F(a) \cap G(b)$ şeklinde tanımlandığından ve (H,C) boş olmayan bir esnek küme olduğundan $H(a,b) = F(a) \cap G(b) \neq \emptyset$ dir. R nin alt halkalarının herhangi sayıdaki kesişimleri yine R nin alt halkası olduğu için $H(a,b)$, R nin alt halkasıdır. Bu yüzden (H,C), R üzerinde bir esnek halkasıdır.

ii. $(F,A) \tilde{\sqcap} (G,B) = (H,C)$ ve $C = A \cap B$olmak üzere;
Her $x \in C$ için $H(x) = F(x) \cap G(x)$ şeklinde tanımlanır. (H,C) boş olmayan bir esnek küme olduğundan $H(x) = F(x) \cap G(x) \neq \emptyset$ olacak şekilde $x \in A \cap B$ vardır. $F(x)$ ve $G(x)$, R nin birer alt halkası olduğu için

$F(x) \cap G(x)$ de R nin bir alt halkasıdır. Dolayısıyla $(H, C) = (F, A) \tilde{\sqcap} (G, B)$, R üzerinde bir esnek halkadır.

Tanım 3.2.5: [5] (F, A) ve (G, B), R üzerinde iki esnek halka olsun. Eğer;

1. $B \subset A$ ve,
2. $\forall x \in supp(G, B)$ için $G(x)$, $F(x)$ in bir alt halkası

ise (G, B) ye (F, A) nın bir esnek alt halkası denir.

Örnek 3.2.6: [5] $R = A = 2Z$ ve $B = 6Z \subset A$ olsun. Aşağıdaki gibi tanımlanan $F: A \to \mathcal{P}(R)$ ve $G: B \to \mathcal{P}(R)$ küme değerli fonksiyonları göz önüne alalım.

$F(x) = \{ nx : n \in Z \}$ ve $G(x) = \{ 5nx : n \in Z \}$

Görüldüğü gibi $\forall x \in B$ için $G(x) = 5xZ$, $xZ = F(x)$ in bir alt halkasıdır. Bundan dolayı (G, B) , (F, A) nın bir esnek alt halkasıdır.

Teorem 3.2.7: [5] (F, A) ve (G, B), R üzerinde iki esnek halka olsun.

- **i.** $\forall x \in B \subset A$ için $G(x) \subset F(x)$ ise (G, B), (F, A) nın bir esnek alt halkasıdır.
- **ii.** $(F, A) \tilde{\sqcap} (G, B)$ boş olmayan bir esnek küme ise $(F, A) \tilde{\sqcap} (G, B)$, hem (F, A) nın hem de (G, B) nin esnek alt halkasıdır.

İspat:

- **i.** Tanım3.2.5 den ispat açıktır.
- **ii.** $(F, A) \tilde{\sqcap} (G, B) = (H, C)$ olmak üzere $A \cap B \subset A$ ve $H(x) = F(x) \cap G(x)$, $F(x)$ in bir alt halkası olduğundan dolayı (H, C) , (F, A) nın bir esnek alt halkasıdır. Benzer şekilde (H, C) , (G, B) nin de bir esnek alt halkasıdır.

Örnek 3.2.8: [5] $R = Z$, $A = 2Z$ ve $B = 3Z$ olsun. Aşağıdaki gibi tanımlanan $F: A \to \mathcal{P}(R)$ ve $G: B \to \mathcal{P}(R)$ küme değerli fonksiyonları göz önüne alalım.

$F(x) = \{ 2nx : n \in Z \} = 2xZ$ ve $G(x) = \{ 3nx : n \in Z \} = 3xZ$

$(F, A) \tilde{\sqcap} (G, B) = (H, C)$ ve $C = A \cap B$ olduğundan

$\forall x \in C$ için $H(x) = F(x) \cap G(x) = 6xZ$ dir. Bu $H(x) = F(x) \cap G(x)$ ifadesi hem $F(x) = 2xZ$ hem de $G(x) = 3xZ$ nin alt halkasıdır. Sonuç olarak $(F, A) \tilde{\sqcap} (G, B)$, hem (F, A) nın hem de (G, B) nin esnek alt halkasıdır.

Teorem 3.2.9: [5] $(F_i, A_i)_{i \in I}$, R üzerindeki esnek halkaların boş olmayan bir ailesi olsun. O halde;

i. $\wedge_{i \in I}(F_i, A_i)$ boş olmayan bir esnek küme ise, R üzerinde bir esnek halkadır.
ii. $\tilde{\sqcap}\,(F_i, A_i)$ boş olmayan bir esnek küme ise, R üzerinde bir esnek halkadır.
iii. Eğer $\{\, A_i \,:\, i \in I \,\}$ ikişerli ayrık ise $\tilde{\cup}_{i \in I}\,(F_i, A_i)$, R üzerinde bir esnek halkadır.

İspat :

i. Tanım3.2.2 ve Teorem3.2.4 kullanılarak Teorem3.1.16 nın ispatına benzer şekilde yapılır.
ii. Bir halkanın alt halkalarının herhangi bir sayıdaki kesişimi yine bir alt halka olduğu için ispat açıktır.
iii. Tanım 2.2.19 dan ve Tanım3.2.2 kulanılarak Teorem3.1.16(iii) nin ispatına benzer şekilde yapılır.

3.3. Esnek Halkanın Esnek İdeali

Klasik cebirde “ R bir halka, *I* da R nin bir alt halkası olsun. Eğer her $r \in R$ için $rI \subseteq I$ ise *I* ya sol ideal; $Ir \subseteq I$ ise *I* ya sağ ideal denir. Eğer *I* hem sağ ideal hem de sol ideal ise *I* ya kısaca ideal denir.” şeklinde tanımlanan ideal kavramı önemli bir kavramdır. Bu nedenle bu bölümde bir esnek halkanın esnek idealini tanıtacağız.

Tanım 3.3.1: [5] (F, A) , R üzerinde bir esnek halka olsun. Boş olmayan bir (γ, I) esnek kümesi için

1. $I \subset A$
2. $\forall x \in supp(\gamma\,, I)$ için $\gamma(x)$, $F(x)$ in idealidir

şartları sağlanıyorsa R üzerindeki (γ, I) esnek kümesine (F, A) nın bir esnek ideali denir.

Örnek 3.3.2: [5] $R = A = Z_4 = \{\, 0, 1, 2, 3 \,\}$ ve $I = \{\, 0, 1, 2 \,\}$ olsun ve aşağıdaki gibi tanımlanan $F: A \to \mathcal{P}(R)$ küme değerli fonksiyonunu göz önüne alalım.

$F(x) = \{\, y \in R : x.y \in \{\, 0, 2\}\}$

$F(0) = R$, $F(1) = \{0\,\}$, $F(2) = Z_4$, $F(3) = \{\, 0, 2 \,\}$

Görüldüğü gibi yukarıdaki kümelerin hepsi R nin birer alt halkasıdır. Bu nedenle (F, A), R üzerinde bir esnek halkadır. Diğer taraftan; $\gamma(x) = \{\, y \in R : x.y = 0 \,\}$ ile tanımlanan $\gamma: I \to \mathcal{P}(R)$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Görüldüğü gibi

$\gamma(0) = R$, R nin bir ideali , $\gamma(1) = \{\, 0 \,\}$, $F(1) = \{\, 0\}$ ın bir ideali ve $\gamma(2) = \{\, 0, 2 \,\}$, $F(2) = Z_4$ ün bir idealidir. Böylece (γ, I) , (F, A) nın bir esnek idealidir.

Teorem 3.3.3: [5] (γ_1, I_1) ve (γ_2, I_2) , R üzerindeki (F, A) esnek halkasının esnek idealleri olsunlar. $(\gamma_1, I_1) \,\tilde{\sqcap}\, (\gamma_2, I_2)$ boşolmayan bir esnek küme ise (F, A) nın esnek idealidir.

Teorem 3.3.4: [5] (γ_1, I_1) ve (γ_2, I_2) sırasıyla R üzerindeki (F, A) ve (G, B) esnek halkalarının idealleri olsunlar. $(\gamma_1, I_1) \,\tilde{\sqcap}\, (\gamma_2, I_2)$ boş olmayan bir esnek küme ise $(F, A) \,\tilde{\sqcap}\, (G, B)$ nin esnek idealidir.

İspat: Tanım2.2.25 den $(\gamma_1, I_1) \,\tilde{\sqcap}\, (\gamma_2, I_2) = (\gamma, I)$ ve $I = I_1 \cap I_2$ olmak üzere $\forall x \in I$ için $\gamma(x) = \gamma_1(x) \cap \gamma_2(x)$ şeklinde yazabiliriz. Benzer olarak $(F, A) \,\tilde{\sqcap}\, (G, B) = (H, C)$ ve $C = A \cap B$ olmak üzere $\forall x \in C$ için $H(x) = F(x) \cap G(x)$ dir.

$I_1 \cap I_2$ boştan farklı olduğu için $\gamma(x) = \gamma_1(x) \cap \gamma_2(x) \neq \emptyset$ olacak şekilde bir $x \in supp(\gamma, I)$ vardır.

$I_1 \cap I_2 \subset A \cap B$ olduğundan $\forall x \in supp(\gamma, I)$ için $\gamma(x)$ nin $H(x)$ halkasının bir ideali olduğunu göstermeliyiz.

$\gamma_1(x) \subset F(x)$ ve $\gamma_2(x) \subset G(x)$ olduğundan dolayı $\gamma_1(x) \cap \gamma_2(x) \subset F(x) \cap G(x)$ dir. Bu yüzden $\gamma(x)$, R nin alt halkasıdır.

Son olarak $\forall r \in H(x)$ ve $\forall a \in \gamma(x)$ için $r.a \in \gamma(x)$ olduğu gösterilecektir.

$\gamma_1(x)$, $F(x)$ in bir ideali olduğundan, $r \in H(x) = F(x) \cap G(x)$ ve $a \in \gamma(x) = \gamma_1(x) \cap \gamma_2(x)$ için $r.a \in \gamma_1(x)$ ve $r.a \in \gamma_2(x)$ elde edilir. Böylece $r.a \in \gamma(x)$ dır.

Örnek 3.3.5: [5] $R = M_2(Z)$ (yani terimleri tam sayı olan 2×2 tipinde matris), $A = 3Z$, $B = 5Z$, $I_1 = 6Z$ ve $I_2 = 10Z$ olsun. Aşağıdaki gibi tanımlanan $F\colon A \to \mathcal{P}(R)$ ve $G\colon B \to \mathcal{P}(R)$ fonksiyonlarını göz önüne alalım.

$$F(x) = \left\{\begin{bmatrix} nx & 0 \\ 0 & nx \end{bmatrix} : n \in Z\right\} \quad \text{ve} \quad G(x) = \left\{\begin{bmatrix} 0 & nx \\ 0 & nx \end{bmatrix} : n \in Z\right\}$$

Bu fonksiyonlar R nin alt halkasıdır. Bu yüzden (F, A) ve (G, B), R üzerinde esnek halkadır.

Aşağıdaki gibi tanımlanan $\gamma_1\colon I_1 \to P(R)$ ve $\gamma_2\colon I_2 \to P(R)$ küme değerli fonksiyonlarını göz önüne alalım.

$\gamma_1(x) = \left\{\begin{bmatrix} nx & nx \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : n \in Z\right\}$ ve $\gamma_2(x) = \left\{\begin{bmatrix} 0 & nx \\ 0 & nx \end{bmatrix} : n \in Z\right\}$ bu fonksiyonlar sırasıyla $F(x)$ ve $G(x)$ in idealleridir.

$\forall x \in I_1 \cap I_2$ için

$\gamma_1(x) \cap \gamma_2(x) = \left\{\begin{bmatrix} 0 & nx \\ 0 & o \end{bmatrix} : n \in Z\right\} \lhd F(x) \cap G(x) = \left\{\begin{bmatrix} nx & 0 \\ 0 & nx \end{bmatrix} : n \in Z\right\}$ dir. Bu ise

$(\gamma_1, I_1) \mathbin{\tilde{\sqcap}} (\gamma_2, I_2)$ nin , $(F, A) \mathbin{\tilde{\sqcap}} (G, B)$ nin esnek ideali olduğunu gösterir.

Teorem 3.3.6: [5] (F, A) , R üzerinde esnek halka ve (γ_1, I_1) , (γ_2, I_2) R üzerindeki (F, A) nın bir esnek idealleri olsunlar. Eğer I_1 ve I_2 ayrık ise $(\gamma_1, I_1) \mathbin{\tilde{\cup}} (\gamma_2, I_2)$, (F, A) nın esnek idealidir.

İspat: Tanım2.2.19 dan $(\gamma_1, I_1) \mathbin{\tilde{\cup}} (\gamma_2, I_2) = (\beta, I)$, $I_1 \cup I_2 = I$ olmak üzere $\forall x \in I$ için

$$\beta(x) = \begin{cases} \gamma_1 & , \quad x \in I_1 - I_2 \\ \gamma_2 & , \quad x \in I_2 - I_1 \\ \gamma_1(x) \cup \gamma_2(x) & , \quad x \in I_1 \cap I_2 \end{cases}$$

yazılır.

(γ_1, I_1) ve (γ_2, I_2), (F, A) nın esnek idealleri olduğu için $I \subset A$ dır. I_1 ve I_2 ayrık olduğundan $\forall x \in supp(\beta, I)$ için $x \in I_1 - I_2$ veya $x \in I_2 - I_1$ dir.

Eğer $x \in I_1 - I_2$ ise (γ_1, I_1) , (F, A) nın esnek ideali olduğu için $\beta(x) = I_1(x) \neq \emptyset$, $F(x)$ in bir idealidir.

Benzer olarak eğer $x \in I_2 - I_1$ ise (γ_2, I_2) , (F, A) nın esnek ideali olduğu için $\beta(x) = I_2(x) \neq \emptyset$, $F(x)$ in bir idealidir. Böylece $\forall x \in supp(\beta, I)$ için $\beta(x)$, $F(x)$ nin bir idealidir. Bundan dolayı da (β, I) , (F, A) nın bir esnek idealidir.

Teorem 3.3.7: [5] (F, A), R üzerinde bir esnek halka ve $(\gamma_k, I_k)_{k\in I}$, (F, A) nın ideallerinin boştan farklı bir ailesi olsun. O zaman

- **i.** $\widetilde{\sqcap}_k\, (\gamma_k, I_k)$ boş olmayan bir esnek küme ise (F, A) nın bir esnek idealidir.
- **ii.** $\wedge_{k\in I}(\gamma_k, I_k)$ boş olmayan bir esnek küme ise $\wedge_{k\in I}(F, A)$ nın bir esnek idealidir
- **iii.** Eğer $\{ I_k : k \in I \}$ ikişerli ayrık ise ve $\widetilde{\cup}_{k\in I}\, (\gamma_k, I_k)$ boş olmayan bir esnek küme ise $\widetilde{\cup}_{k\in I}\, (\gamma_k, I_k)$, (F, A) nın bir esnek idealidir.

İspat: Bir halkanın ideallerinin boştan farklı herhangi bir ailesinin kesişimi, o halkanın ideali olduğu için teoremin ispatı Teorem3.1.11 ve Teorem3.1.16 nın ispatına benzer olarak yapılır.

3.4 İdealistik Esnek Halkalar

Tanım 3.4.1: [5] (F, A) , R üzerinde boş olmayan bir esnek küme olsun. Eğer her $x \in supp(F, A)$ için $F(x)$, R nin bir ideali ise (F, A) ya R üzerinde idealistik esnek halka denir.

Örnek 3.4.2: Örnek3.3.2 de $\forall x \in A$ için $F(x)$, R nin ideali olduğundan (F, A) R üzerinde bir idealistik esnek halkadır.

Teorem 3.4.3: [5] (F, A) ve (G, B), R üzerinde idealistik esnek halkalar olsun. Eğer $(F, A) \widetilde{\sqcap} (G, B)$ boş olmayan bir esnek küme ise R üzerinde bir idealistik esnek halkadır.

İspat: Tanım2.2.25 den $(F, A) \widetilde{\sqcap} (G, B) = (H, C)$ ve $C = A \cap B$ olmak üzere $\forall x \in C$ için $H(x) = F(x) \cap G(x)$ yazılır.

(H, C) nin R üzerinde boş olmayan bir esnek küme olduğunu varsayalım. Eğer $x \in supp(H, C)$ ise $H(x) = F(x) \cap G(x) \neq \emptyset$ ve boştan farklı $F(x)$ ve $G(x)$ kümeleri R nin idealleridir. Dolayısıyla bir halkanın ideallerinin boştan farklı herhangi bir ailesinin kesişimi, o halkanın bir ideali olduğundan $\forall x \in supp(H, C)$ için $H(x)$ R nin bir idealidir.

Sonuç olarak $(F, A) \widetilde{\sqcap} (G, B) = (H, C)$, R üzerinde bir idealistik esnek halkadır.

Teorem 3.4.4: [5] (F, A) ve (G, B), R üzerinde idealistik esnek halka olsunlar. Eğer A ve B ayrık ise $(F, A) \widetilde{\sqcup} (G, B)$ R üzerinde bir idealistik esnek halkadır.

İspat: Tanım2.2.19 dan $(F, A) \widetilde{\sqcup} (G, B) = (H, C)$ ve $C = A \cup B$ olmak üzere $\forall x \in C$ için

$$H(x) = \begin{cases} F(x) & , \quad x \in A - B \\ G(x) & , \quad x \in B - A \\ F(x) \cup G(x) & , \quad x \in A \cap B \end{cases}$$

yazılır. $A \cap B = \emptyset$ olduğunu varsayalım. Bu varsayım altında eğer $x \in supp(H, C)$ ise $x \in A - B$ veya $x \in B - A$ dır.

Eğer $x \in A - B$ ise (F, A), R üzerinde bir idealistik esnek halka olduğu için $H(x) = F(x)$, R nin bir idealidir. Benzer olarak eğer $x \in B - A$ ise (G, B), R üzerinde bir idealistik esnek halka olduğu için $H(x) = G(x)$, R nin bir idealidir.

Bu yüzden $\forall x \in supp(H, C)$ için $H(x)$, R nin bir idealidir.

Sonuç olarak $(F, A) \widetilde{\sqcup} (G, B) = (H, C)$ R üzerinde bir idealistik esnek halkadır. $\boxdot$

R halkasının iki farklı idealinin birleşimi R nin ideali olmayabileceği için eğer bu teoremde eğer $A \cup B$ ayrık değilse genelde bu sonuç doğru değildir. Bunu aşağıdaki şekilde örnekleyebiliriz.

Örnek 3.4.5: $R = Z_{10} = \{\, 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 \,\}$, $A = \{\, 0,4 \,\}$ ve $B = \{\, 4 \,\}$ olsun.

$F(x) = \{\, y \in R : x.y = 0 \,\}$ ile tanımlanan küme değerli $F: A \to \mathcal{P}(R)$ fonksiyonunu göz önüne alalım.

$F(0) = R$ ve $F(4) = \{\, 0,5 \,\}$ dir. R ve $\{0,5\}$, R nin ideali olduğu için (F,A), R üzerinde bir idealistik esnek halkadır.

$G(x) = \{\, 0 \,\} \cup \{\, y \in R : x + y \in \{0,2,4,6,8\,\}\}$ ile tanımlanan $G: B \to \mathcal{P}(R)$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Görüldüğü gibi $G(4) = \{\, 0,2,4,6,8 \,\}$ R nin ideali olduğu için (G,B), R üzerinde bir idealistik esnek halkadır.

$F(4) \cup G(4) = \{\, 0,2,4,5,6,8 \,\}$, R nin ideali olmadığı için $(F,A) \tilde{\cup} (G,B)$, R üzerinde bir idealistik esnek halka değildir.

Teorem 3.4.6:[5] (F,A) ve (G,B), R üzerinde idealistik esnek halkalar olsun. Eğer $(F,A) \wedge (G,B)$ boş olmayan bir esnek halka ise R üzerinde bir idealistik esnek halkadır.

İspat: Tanım2.2.14 den $(F,A) \wedge (G,B) = (H,C)$ ve $C = A \times B$ olmak üzere $\forall (a,b) \in C$ için $H(a,b) = F(a) \cap G(b)$ yazılır.

(H,C) nin R üzerinde boş olmayan bir esnek küme olduğunu varsayalım. Eğer $(x,y) \in supp(H,C)$ ise $H(x,y) = F(x) \cap G(y) \neq \emptyset$ dır. (F,A) ve (G,B), R üzerinde idealistik esnek halkalar olduğu için boştan farklı olan $F(x)$ ve $G(x)$ kümeleri R nin idealleridir. Dolayısıyla, her $(x,y) \in supp(H,C)$ için $H(x,y)$, R nin bir idealidir. Sonuç olarak $(F,A) \wedge (G,B) = (H,C)$, R üzerinde bir idealistik esnek halkadır.

Örnek 3.4.7: [5] $R = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix} : x,y,z \in Z \right\}$, $A = 6Z$ ve $B = 10Z$ olsun. Aşağıdaki gibi tanımlanan $F: A \to \mathcal{P}(R)$ ve $G: B \to \mathcal{P}(R)$ fonksiyonlarını göz önüne alalım.

$F(x) = \left\{ \begin{bmatrix} nx & nx \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : n \in Z \right\}$ ve $G(x) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & nx \\ 0 & nx \end{bmatrix} : n \in Z \right\}$ dir.

(F,A) ve (G,B) R üzerinde bir idealistik esnek halkalardır.

$C = A \times B$ olmak üzere $(F,A) \wedge (G,B) = (H,C)$ alalım. t, x ve y nin en küçük ortak katı olmak üzere her $(x,y) \in C$ için

$H(x,y) = F(x) \cap G(y) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & tn \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : n \in Z \right\}$, R nin bir idealidir.

Tanım 3.4.8: [5] Eğer her $x \in A$ için $F(x) = 0$ ise R halkası üzerindeki (F,A) idealistik esnek halkası aşikar olarak adlandırılır.

Eğer her $x \in A$ için $F(x) = R$ ise R üzerindeki (F,A) idealistik esnek halkası tam olarak adlandırılır.

Örnek 3.4.9: [5] p bir asal sayı, $R = Z_p$ ve $A = Z_p - \{ 0 \}$ olsun.

$F(x) = \{ y \in R : (x.y)^{p-1} = 1 \} \cup \{ 0 \}$ ile tanımlanan $F: A \to \mathcal{P}(R)$ küme değerli fonksiyonunu göz önüne alalım. Her $x \in A$ için $F(x) = R$, R nin bir idealidir. Bu yüzden (F,A) , R üzerinde tam idealistik esnek halkadır.

Şimdide $G(x) = \{ y \in R : xy = 0 \}$ ile tanımlanan $G: B \to \mathcal{P}(R)$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Görüldüğü gibi her $x \in A$ için $G(x) = \{ 0 \}$, R nin bir idealidir. Bu yüzden de (G,A), R üzerinde bir aşikar idealistik esnek halkadır.

(F,A), R üzerinde bir esnek küme ve $f: R \to R'$ de halka dönüşümü olsun. O zaman $f(F): A \to \mathcal{P}(R')$, her $x \in A$ için $f(F)(x) = f\big(F(x)\big)$ olmak üzere R' üzerinde bir $(f(F),A)$ esnek kümesi tanımlayabiliriz. Tanımdan dolayı $supp(f(F),A) = supp(F,A)$ olduğunu görebiliriz.

Önerme 3.4.10: [5] $f: R \to R'$ bir halka epimorfizması olsun. Eğer (F,A), R üzerinde bir idealistik esnek halka ise $(f(F),A)$, R' üzerinde bir idealistik esnek halkadır.

İspat : (F,A) Tanım3.4.1 gereği (F,A) boş olmayan bir esnek küme olduğundan (F,A), R üzerinde bir idealistik esnek halka olduğu için $(f(F),A)$ nın R' üzerinde boş olmayan bir esnek küme olduğunu elde ederiz.

Her $x \in supp(f(F),A)$ için $f(F)(x) = f\big(F(x)\big) \neq \emptyset$ dir. Boştan farklı $F(x)$ kümesi R nin bir ideali ve f bir epimorfizma olduğu için $f\big(F(x)\big)$, R' nün bir idealidir. Bu yüzden her $x \in supp(f(F),\ A)$ için $f\big(F(x)\big)$, R' nün bir idealidir. Sonuç olarak $(f(F),A)$, R' üzerinde bir idealistik esnek halkadır.

Teorem 3.4.11: [5] (F, A), R üzerinde bir idealistik esnek halka ve $f: R \rightarrow R'$ bir halka epimorfizması olsun. O halde

i. Eğer her $x \in A$ için $F(x) = kerf$ ise $(f(F), A)$, R' üzerinde aşikar idealistik esnek halkadır.

ii. Eğer (F, A) tam ise $(f(F), A)$, R' üzerinde tam idealistik esnek halkadır.

İspat:

i. $\forall x \in A$ için $F(x) = kerf$ olduğunu varsayalım. O zaman her $x \in A$ için $f(F)(x) = f\big(F(x)\big) = \{\, 0_{R'} \}$ dür. Böylece Öneri3.4.10 ve Tanım3.4.8 den dolayı $(f(F), A)$, R' üzerinde aşikar idealistik esnek halkadır.

ii. (F, A) nın tam olduğunu varsayalım. O zaman her $x \in A$ için $F(x) = R$ dir. Bu yüzden $\forall x \in A$ için $f(F)(x) = f\big(F(x)\big) = f(R) = R'$ dir. Sonuç olarak Önerme3.4.10 dan ve Tanım3.4.8 den dolayı $(f(F), A)$, R' üzerinde tam idealistik esnek halkadır.

Tanım 3.4.12: [5] (F, A) ve (G, B) sırasıyla R ve R' halkaları üzerinde esnek halkalar olsun. $f: R \rightarrow R'$ ve $g: A \rightarrow B$ iki dönüşüm olsun.

Eğer;

1. f bir halka epimorfizması,
2. g örten bir dönüşüm,
3. Her $x \in A$ için $f\big(F(x)\big) = G\big(g(x)\big)$

şartları sağlanıyorsa (f, g) ikilisi bir esnek halka homomorfizması denir.

Eğer (F, A) ve (G, B) arasında bir esnek halka homomorfizması varsa (F, A), (G, B) ye esnek homomorfiktir denir ve $(F, A) \sim (G, B)$ ile gösterilir. Ayrıca eğer f bir halka izomorfizması ve g birebir-örten dönüşüm ise (f, g) ye esnek halka izomorfizması denir. Bu durumda (F, A), (G, B) ye esnek olarak izomorfik denir ve $(F, A) \simeq (G, B)$ ile gösterilir.

Örnek 3.4.13: [5] $R = Z$ ve $R' = \{\, 0 \,\} \times Z$ halkalarını göz önüne alalım.

$A = 2Z$ ve $B = \{0\} \times 6Z$ olsun. (F, A) ve (G, B) sırasıyla R ve R' üzerinde birer esnek halkadır. $x \in A$ ve $(0, y) \in B$ için

$F(x) = 18xZ$ ve $G\big((0, y)\big) = \{\,0\,\} \times 6yZ$ şeklinde tanımlanan $F: A \to \mathcal{P}(R)$ ve $G: B \to \mathcal{P}(R')$ küme değerli fonksiyonlarını göz önüne alalım.

$f(x) = (0, x)$ ile tanımlanan $f: R \to R'$ fonksiyonu bir halka izomorfizmasıdır. Dahası

$g(y) = (0, 3y)$ olarak tanımlanan $g: A \to B$ fonksiyonu örten bir dönüşümdür.

Görüldüğü gibi her $x \in A$ için

$f\big(F(x)\big) = f(18xZ) = \{0\} \times 18xZ$ ve

$G\big(g(x)\big) = G(\{0\} \times 6xZ) = \{0\} \times 18xZ$ dir.

Sonuç olarak (f, g) bir esnek halka izomorfizmasıdır ve $(F, A) \simeq (G, B)$ dir.

4.BÖLÜM
ESNEK DÖNÜŞÜMLER

Esnek dönüşüm kavramı 2010 yılında P. Majumdar ve S.K. Samanta[6] tarafından tanıtıldı. Bu bölüm boyunca X evrensel küme, E parametre kümesi olarak alınacak ve esnek dönüşüm kavramı verilecektir.

4.1.Esnek Dönüşüm

Tanım 4.1.1: [6] A ve B boştan farklı küme ve E parametre kümesıi olsun.

$$F: E \rightarrow P(\, B^A)$$

dönüşümüne E altında A dan B ye esnek dönüşüm denir.

Buradaki B^A ifadesi A dan B ye tanımlı tüm fonksiyonları ifade eder.E altında A dan B ye esnek dönüşüm olan F, B^A üzerinde bir esnek kümedir.

Örnek 4.1.2: [6] $X = \{x_1, x_2\}$, $I = [0,1]$ olsun. I^X, X'in tüm bulanık alt kümelerinin koleksiyonudur.

f_i ler;

$f_1 = \{\ (x_1, 0{,}8)\ , (x_2, 0{,}4)\ \}$, $f_2 = \{\ (x_1, 0{,}7)\ ,\ (x_2\ , 0)\ \}$,

f_3=$\{\ (x_1, 0{,}1)\ ,\ (x_2, 0{,}8)\}$, $f_4 = \{\ (x_1, 0{,}5)\ , (x_2, 0{,}5)\ \}$

f_5 =$\{\ (x_1, 0{,}2)\ ,\ (x_2, 0{,}3)\}$

şeklinde tanımlanmak üzere $C = \{f_i\ , i = 1,2, \dots ,5\} \subseteq I^X$ olsun .

$F: E = (0, 1) \rightarrow P(I^X)$ fonksiyonu

$\alpha \in E = (0,1)$ için $F(\alpha)$ C nin aynı α seviyelerine sahip olan elemanlarının (yani; $x \in X : f \in I^X$ için $f(x) > \alpha$,) koleksiyonu olacak şekilde tanımlayalım.

Örneğin

$F(0,6) = \{f_1, f_2\}$ $F(0.1) = \{f_1, f_4, f_5\}$ $F(0.9) = \emptyset$

F, E altında X den I ya esnek dönüşümdür.

Örnek 4.1.3: [6] $E = \{e_1, e_2\}$, $A = \{x_1, x_2\}$, $B = \{x_3, x_4, x_5\}$ olsun.

$f_1, f_{2,}, f_3, f_4 : A \to B$ fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlansın.

$f_1(x_1) = x_3$ $f_1(x_2) = x_4$

$f_2(x_1) = x_4$ $f_2(x_2) = x_3$

$f_3(x_1) = x_4$ $f_3(x_2) = x_5$

$f_4(x_1) = x_5$ $f_4(x_5) = x_4$

$F: E \to P(B^A)$ esnek dönüşümü $F(e_1) = \{f_1, f_4\}$ $F(e_2) = \{f_1, f_2, f_3\}$ şeklinde tanımlansın. O zaman F, E altında A dan B ye tanımlı bir esnek dönüşümdür.

Tanım 4.1.4: [6] A, B, C boş olmayan kümeler ve E', E_1, E_2 parametre kümeleri olsun.

1. $i_A: A \to A$ birim fonksiyon olmak üzere her $e \in E'$ için $F(e) = \{i_A\}$ şeklinde tanımlanan $F: E' \to P(A^A)$ esnek dönüşümüne E' altında A da esnek birim dönüşüm denir.
2. Her $e \in E'$ için $F(e)$ A dan B ye tanımlı sabit fonksiyonların koleksiyonu ise $F: E' \to P(B^A)$ esnek dönüşümüne E'altında bir sabit esnek dönüşüm denir.
3. (U, E) üzerinde $F_1: E_1 \to P(B^A)$ ve $F_2: E_2 \to P(B^A)$ iki esnek dönüşümü eğer
   a) $E_1 = E_2$ **b)** $\forall e \in E_1 = E_2$ *için* $F_1(e) = F_2(e)$
   şartlarını sağlıyorsa birbirine eşittir denir ve $F_1 = F_2$ şeklinde gösterilir.
4. $F: E' \to P(B^A)$ esnek dönüşümü ve $E'' \subseteq E'$ için her $e \in E''$ için $F_{E''}(e) = F(e)$ şeklinde tanımlanan $F_{E''}: E'' \to P(B^A)$ esnek dönüşümüne F nin E'' ye kısıtlanmışı denir.
5. $F: E_1 \to P(B^A)$, $G: E_2 \to P(C^B)$ ve $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$ olmak üzere iki esnek dönüşümün çarpımı,

$$G * F: E_1 \cap E_2 \rightarrow P(C^A)$$

$e \in E_1 \cap E_2$ için

$(G * F)(e) = \{h^e = g^e \circ f^e: A \rightarrow C;\ g^e \in G(e), f^e \in F(e)\}$ şeklinde tanımlanır.

Örnek 4.1.5: [6] $A=\{x_1, x_2\}$, $B=\{x_3, x_4, x_5\}$, $C=\{x_5, x_6, x_7\}$, $E_1 = \{e_1, e_2\} = E_2$ $f_1, f_2: A \rightarrow B$ ve $g_1, g_2: B \rightarrow C$ olsun.

$F: E_1 \rightarrow P(B^A)$ esnek dönüşümü $F(e_1) = \{f_1\}$, $F(e_2) = \{f_2\}$ şeklinde tanımlansın.

$G: E_2 \rightarrow P(C^B)$ esnek dönüşümü de $G(e_1) = \{g_1, g_2\}$ ve $G(e_2) = \{g_2\}$ şeklinde tanımlansın.

F ve G nin çarpımı mümkündür ve H=$G * F: E_1 \cap E_2 \rightarrow P(C^A)$

$H(e_1) = \{g_1 \circ f_1,\ g_2 \circ f_1\}$ ve $G(e_2) = \{g_2 \circ f_2\}$ elde edilir.

Tanım 4.1.6: [6] $F: E \rightarrow P(B^A)$ esnek dönüşüm olmak üzere;

- Eğer $\forall f, e \in E$ için $e \neq f$ iken $F(e) \neq F(f)$ ise F ye zayıf birebir denir.
- Eğer $\forall e, f \in E$ için $e \neq f$ iken $F(e) \cap F(f) = \emptyset$ ise F ye güçlü birebir denir.

Yukarıdaki tanımda da açık olarak gözükmektedir ki bir güçlü birebir esnek dönüşüm aynı zamanda zayıf birebir esnek dönüşümdür.

Tanım 4.1.7: [6] $F: E \rightarrow P(B^A)$ esnek dönüşüm olmak üzere

i. Eğer her $f \in B^A$ için $f \in F(e)$ olacak şekilden az bir ve $e \in E$ var ise F ye zayıf örten denir.

ii. Eğer $f \in B^A$ iken her $e \in E$ için $f \in F(e)$ ise F ye güçlü örten denir.

Tanım 4.1.8: [6] $F: E \rightarrow P(B^A)$ tanımlı bir esnek dönüşüm olmak üzere eğer F hem zayıf (güçlü) birebir hem de zayıf (güçlü) örten ise F ye zayıf (güçlü) birebir-örten denir.

Örnek 4.1.9: [6] Örnek 4.1.5 deki F güçlü birebir esnek dönüşümdür. Fakat G zayıf birebirdir.

$E_1 = E_2 = \{e_1, e_2\}$

- $f_1, f_2 : A \to B$ $\quad\quad$ $F{:}E_1 \to P(B^A)$

$F(e_1) = \{f_1\}$ $\quad\quad$ $F(e_2) = \{f_2\}$

$e_1 \neq e_2$ iken $F(e_1) \cap F(e_2) = \emptyset$ olduğundan güçlü birebirdir.

- $g_1, g_2 : B \to C$ $\quad\quad$ $G: E_2 \to P(C^B)$
  $G(e_1) = \{g_1, g_2\}$ $\quad\quad$ $G(e_2) = \{g_2\}$
  $e_1 \neq e_2$ iken $G(e_1) \neq G(e_2)$ olduğundan G zayıf birebirdir.

Teorem 4.1.10: [6] Eğer G ve F güçlü örten ise $G * F$ de güçlü örtendir.

İspat: $F: E_1 \to P(B^A)$ ve $G: E_2 \to P(C^B)$ ve $E = E_1 \cap E_2$

olmak üzere H= $G * F: E \to P(C^A)$ dır.

$f \in C^A$ olsun o zaman $f: A \to C$ bir dönüşümdür. Şimdi $g: A \to B$ fonksiyonunu alalım. Eğer $y \in B \setminus g(A)$ ise x_0, A nın sabit bir elemanı olmak üzere $h(y) = f(x_0)$ ve her $x \in A$ için $h\big(g(x)\big) = f(x)$ olacak şekilde bir $h: B \to C$ fonksiyonu tanımlayalım. F ve G güçlü örten olduğundan her $e \in E$ için $g \in F(e)$ ve $h \in G(e)$dir. Bundan dolayı $\forall e \in E$ için $f = h \circ g \in (G * F)(e)$ dir. Ayrıca f, C^Anın herhangi bir elemanıdır.

Böylece $H = G * F$ de güçlü örtendir.

Sonuç 4.1.11: [6] $E_1 = E_2 = E$ olsun. Eğer F zayıf örten ve G güçlü örten ise $G * F$ zayıf örtendir.

Uyarı 4.1.12: İki zayıf (güçlü) birebir esnek dönüşümün çarpımı zayıf (güçlü) birebir olmayabilir. Aşağıdaki örnek verilebilir.

Örnek 4.1.13: [6] $E = \{e_1, e_2\}$, $A = \{x_1, x_2\}$, $B = \{y_1, y_2\}$ ve $C = \{z_1, z_2\}$ olsun.

$f_1, f_2 \in B^A$ fonksiyonları $f_1(x_1) = y_1$, $f_1(x_2) = y_2$, $f_2(x_1) = y_2$, $f_2(x_2) = y_1$ ve $g_1, g_2 \in C^B$ fonksiyonları $g_1(y_1) = z_1$, $g_1(y_2) = z_2$, $g_2(y_1) = z_2$, $g_2(y_2) = z_1$ şeklinde tanımlansın.

$F: E \to P(B^A)$ güçlü birebir esnek dönüşümü

$$F(e_1) = \{f_1\} \quad , \quad F(e_2) = \{f_2\}$$

şeklinde tanımlansın. Diğer bir $G: E \to P(C^B)$ güçlü birebir esnek dönüşümü de

$$G(e_1) = \{g_1\} \qquad G(e_2) = \{g_2\}$$

şeklinde tanımlansın. O zaman $G * F: E \to P(C^A)$

$$(G * F)(e_1) = \{g_1 \circ f_1\} \quad (G * F)(e_2) = \{g_2 \circ f_2\}$$

şeklindedir. Fakat $e_1 \neq e_2$ olmasına rağmen $(G * F)(e_1) = (G * F)(e_2)$ dir.

Teorem 4.1.14: [6] Esnek dönüşümlerin çarpımı birleşimlidir.

İspat: $e \in E$ olsun. O zaman

- $$\begin{aligned}\big((F * G) * H\big)(e) &= \{t \circ h : t = f \circ g \in (F * G)(e), h \in H(e)\}\\ &= \{(f \circ g) \circ h : f \in F(e), g \in G(e), h \in H(e)\}\\ &= \{f \circ (g \circ h) : f \in F(e), g \in G(e), h \in H(e)\}\\ &= \{(f \circ s) : f \in F(e), s \in (G * H)(e)\}\\ &\subseteq \big(F * (G * H)\big)(e) \text{ dir.}\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\big(F * (G * H)\big)(e) &= \{f \circ t : f \in F(e),\ t = g \circ h \in (G * H)(e)\}\\ &= \{f \circ (g \circ h) : f \in F(e), g \in G(e), h \in H(e)\}\\ &= \{(f \circ g) \circ h : f \in F(e), g \in G(e), h \in H(e)\}\\ &= \{(s \circ h) : s \in (F * G)(e), h \in H(e)\}\\ &\subseteq \big((F * G) * H\big)(e) \text{ dir.}\end{aligned}$$

Bu iki durumdan dolayı esnek dönüşümlerin çarpımı birleşimlidir.

Tanım 4.1.15: [6] $F: E \to P(B^A)$ esnek dönüşümüne, eğer her $e \in E$ için $F(e)$, A dan B ye birebir (örten) fonksiyonların bir koleksiyonu ise doğal birebir (örten) denir.

Eğer F hem doğal birebir hem de doğal örten ise o zaman F ye doğal birebir-örten denir.

(X, E) esnek evrensel olsun. $A \neq \emptyset$ olmak üzere $A \subseteq X$ olsun. A dan A ya tanımlı tüm esnek dönüşümlerin koleksiyonu $\mathfrak{I}_{\mathrm{E}}$ ve iki esnek dönüşüm arasındaki çarpım işlemi olan $*$ bizim ikili işlemimiz olsun. O zaman $(\mathfrak{I}_{\mathrm{E}},*)$ bir monoiddir.

Gerçekten Teorem4.1.14 de $*$ çarpımının birleşmeli olduğu gösterildi. I_A , A üzerindeki birim esnek dönüşüm olmak üzere $F \in \mathfrak{I}_{\mathrm{E}}$ için $F * I_A = I_A * F = F$ olur. Yani $(\mathfrak{I}_{\mathrm{E}},*)$ ın birim elemanı vardır.

4.2 Esnek Dönüşüm Altında Kümenin ve Esnek Kümenin Görüntüsü

Tanım 4.2.1: [6] $F: E \to P(B^A)$ esnek dönüşümü ve $T \subseteq A$ olsun. $F(T)$, E den $P(B)$ ye

$$F(T) = \bigcap_{f_e \in F(e)} f_e(T) = \bigcap_{f_e \in F(e)} \{f_e(t): t \in T\}$$

olacak şekilde bir dönüşümdür. Böylece $(F(T), E)$, B üzerinde esnek kümedir.

Örnek 4.2.2: [6] $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4\}$, $E = \{e_1, e_2\}$, $A = \{x_1, x_2, x_3\}$ $B = \{y_1, y_2, y_3\}$ olsun.

$F: E \to P(B^A)$ esnek dönüşümü $F(e_1) = \{f_1, f_2\}$ ve $F(e_2) = \{f_3\}$ şeklinde tanımlansın. Buradaki $f_1, f_2, f_3, f_4: A \to B$ fonksiyonları

$f_1(x_1) = y_1$, $f_1(x_2) = y_2$, $f_1(x_3) = y_3$

$f_2(x_1) = y_2$, $f_2(x_2) = y_3$, $f_2(x_3) = y_1$

$f_3(x_1) = y_3$, $f_3(x_2) = y_1$, $f_3(x_3) = y_2$ şeklinde verilsin.

$T = \{x_1, x_2\} \subseteq A$ olsun. O halde $F(T): E \to P(B)$ dir.

$F(T)(e_1) = \{y_2\}$, $F(T)(e_2) = \{y_1, y_3\}$ elde edilir.

Teorem 4.2.3: [6] $F: E \to P(B^A)$ esnek dönüşümü ve $T_1 \neq \emptyset$, $T_2 \neq \emptyset$ olmak üzere $T_1, T_2 \subseteq A$ olsun.

i. $T_1 \subset T_2 \Rightarrow F(T_1) \subset F(T_2)$

ii. $F(T_1 \cup T_2) = F(T_1) \cup F(T_2)$

iii. $F(T_1 \cap T_2) \subset F(T_1) \cap F(T_2)$ ve F doğal birebir ise $F(T_1 \cap T_2) = F(T_1) \cap F(T_2)$ dir.

iv. Eğer F, doğal birebir ise $F({T_1}^c) \subset \left(F(T_1)\right)^c$

İspat*:* $F: E \to P(B^A)$ bir esnek dönüşüm olsun. $e \in E$ için $F(e) = \{f_e \mid f_e: A \to B\}$ dir.

i. Teorem2.2.26 den her $f_e: A \to B$ dönüşümü için

$T_1 \subset T_2 \Rightarrow f_e(T_1) \subset f_e(T_2)$ dir. O halde

$$\bigcap_{f_e \in F(e)} f_e(T_1) \subset \bigcap_{f_e \in F(e)} f_e(T_2) \Rightarrow F(T_1)(e) \subset F(T_2)(e) \text{ dir.}$$

ii. Teorem2.2.26 dan her f_e*:*$A \to B$ dönüşümü için

$f_e(T_1 \cup T_2) = f_e(T_1) \cup f_e(T_2)$ ve böylece $F(T_1 \cup T_2) \supset F(T_1) \cup F(T_2)$ dir.

iii. Teorem2.2.26 dan dolayı $f_e(T_1 \cap T_2) \subset f_e(T_1) \cap f_e(T_2)$ dir. Dolayısıyla,

$\bigcap_{f_e \in F(e)} f_e(T_1 \cap T_2) \subset \bigcap_{f_e \in F(e)} [f_e(T_1) \cap f_e(T_2)] = \left(F(T_1) \cap F(T_2)\right)(e)$ ve böylece

$F(T_1 \cap T_2) \subset F(T_1) \cap F(T_2)$ elde edilir.

iv. Tanım4.2.1 ve De Morgan Kuralından

$$\left(F(T_1)\right)^c = \left(\bigcap_{f_e \in F(e)} f_e(T_1)\right)^c = \bigcup_{f_e \in F(e)} \left(f_e(T_1)\right)^c$$

ve Teorem2.2.26 dan

$$F({T_1}^c) = \bigcap_{f_e \in F(e)} f_e({T_1}^c) = \bigcap_{f_e \in F(e)} \left(f_e(T_1)\right)^c$$

$$= \left(\bigcup_{f_e \in F(e)} f_e(T_1)\right)^c$$

$$= \bigcap_{f_e \in F(e)} \left(f_e(T_1)\right)^c$$

$\subset \bigcup_{f_e \in F(e)} \left(f_e(T_1)\right)^c = \left(F(T_1)\right)^c$elde edilir.

Tanım 4.2.4: [6] $F: E \to P(B^A)$ bir esnek dönüşüm ve $T \subset B$ olsun. T nin F altındaki ters görüntüsü, $e \in E$ için

$$F^{-1}(T)(e) = \bigcup_{f_e \in F(e)} \{S: f_e(S) \subset T\} = \bigcup_{f_e \in F(e)} {f_e}^{-1}(T)$$

şeklinde tanımlanır. Böylece $(F^{-1}(T), E)$ ters görüntüsü A üzerinde bir esnek kümedir.

Teorem4.2.5: [6] $F: E \to P(B^A)$ bir doğal örten esnek dönüşüm olsun. $S \neq \emptyset$ ve $T \neq \emptyset$ olmak üzere $S, T \subseteq B$ olsun. O zaman

i. $S \subset T \Rightarrow F^{-1}(S) \subset F^{-1}(T)$

ii. $F^{-1}(S \cup T)$=$F^{-1}(S) \cup F^{-1}(T)$

iii. $F^{-1}(S \cap T)$=$F^{-1}(S) \cap F^{-1}(T)$

iv. $F^{-1}(S^c) \supset \left(F^{-1}(S)\right)^c$

İspat: Tanım4.2.4 den ispat açıktır.

Tanım 4.2.6: [6] F:E→ $P(B^A)$ bir esnek küme ve $E_1 \subset E$ olmak üzere $S = (P, E_1)$, A üzerinde bir esnek küme olsun. $F(S)$ ile gösterilen, F nin S altındaki görüntüsü, $e \in E_1$ için $P(e) = \emptyset$ ise $F(S)(e) = \emptyset$ dir aksi halde

$$F(S)(e) = \bigcap_{f_e \in F(e)} f_e\left(P(e)\right) = \bigcap_{f_e \in F(e)} \{f_e(t): t \in P(e)\}$$

şeklinde tanımlanır.

Dolayısıyla $(F(S), E)$, B üzerinde bir esnek kümedir.

Örnek 4.2.7: [6] $E = E_1 = E_2 = \{e_1, e_2\}$, $A = \{x_1, x_2\}$, $B = \{y_1, y_2, y_3\}$ olsun.

f_1, $f_2: A \to B$ fonksiyonlarını

$f_1(x_1) = y_1$, $f_1(x_2) = y_2$

$f_2(x_1) = y_3$, $f_2(x_2) = y_2$

şeklinde tanımlayalım.

Ayrıca $P: E \to P(A)$ fonksiyonunu

$P(e_1) = \{x_2\}$, $P(e_2) = \{x_1\}$ şeklinde tanımlayalım. O zaman $(P, E) = S$, A üzerinde bir esnek kümedir.

$F: E \to P(B^A)$ dönüşümünü ise

$F(e_1) = f_1$, $F(e_2) = f_2$ şeklinde tanımlayalım. O zaman

$F(S)(e_1) = \{y_2\}$ *ve* $F(S)(e_2) = \{y_3\}$ olur. Dolayısıyla $F(S) = \{\{y_2\}, \{y_3\}\}$ elde edilir . $(F(S), E)$ de B üzerinde esnek kümedir.

Teorem 4.2.8: [6] $F: E \to P(B^A)$ esnek dönüşüm ve $S_1 = (P_1, E_1)$ ve $S_2 = (P_2, E_2)$, A üzerinde iki esnek küme olsun.

i. $S_1 \subset S_2 \Longrightarrow F(S_1) \subset F(S_2)$

ii. $F(S_1 \cup S_2) = F(S_1) \cup F(S_2)$

iii. $F(S_1 \cap S_2) \subset F(S_1) \cap F(S_2)$ ve F doğal birebir ise $F(S_1 \cap S_2) = F(S_1) \cap F(S_2)$ dir.

iv. $F({S_1}^c) \subset F(S_1)^c$

İspat*:* Tanım 4.2.5 kullanılarak Teorem4.2.3 deki ispata benzer şekilde yapılır.

4.3.Esnek Dönüşümün Bir Uygulaması

Esnek dönüşüm ile tıbbi tanı sorunu arasında hastalık-semptom ilişkisi kurulabilir. Üçüncü dünya ülkelerinde bir hasta belirli semptomlarla doktora gelir ve doktor sadece semptomları değerlendirerek tanıyı koyar, çünkü bu vakaların çoğunda klinik araç gereç yeterli değildir. Bu nedenle insan hatalarının olasılığı fazladır. Esnek dönüşüm ile doktorların hastalıklara doğru tanı koymalarında yardımcı olunabilir. Bu nedenle ilk olarak hastalık-semptom arasındaki ilişkiyi gösteren esnek dönüşüm modeli tanımlanmalıdır. Bu model farklı coğrafi bölgelerde farklılık gösterebilir.

$E = \{d_1, d_2, \dots, d_m\}$ hastalıkların kümesi; $A = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ bilinen tüm semptomların kümesi ve $J = [0,1]$ olsun.

$F: E \to P(J^A)$ esnek dönüşümü $\forall e \in E$ için $F(e) = \{f_e\}$ tek elemanlıdır, $f_e: A \to J$ tanımlı içine fonksiyondur. Bu fonksiyon hastalıkla ilgili semptomların her birine sayısal değerler verir. Bu değerler belirli bir hastalığın semptomlarına göre olasılıklarını gösterir. Bu esnek dönüşüm modeli bir grup uzman doktorun gözetiminde yapılabilir.

Şimdi bir hastanın belirli semptomlarla doktora geldiğini varsayalım. S semptomların kümesi olsun. Buradan $F(S)$ bulunarak hastalık tespit edilebilir. Her $d_j \in E$ ye karşılık $F(S)(d_j) \subset J$ kümesi oluşturabiliriz. Şimdi semptomlara göre belirli bir hastalığın skorunu hesaplayalım. Bu skor $d_j \in E$ olmak üzere

$$skor(d_j) = \sum_{s_i \in F(S)d_j} f_{d_j}(s_i)$$

Şeklinde tanımlanır. Eğer *skor* (d_k) maksimum ise bu kişinin $d_k \in E$ hastalığından acı çektiği sonucu çıkarılır.

Süreci başka bir örnekle açıklayalım;

$E = \{d_1, d_2, d_3\}$ ve d_1 grip, d_2 astım, d_3 zatüre olsun. $A = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ semptomların kümesinden s_1 hafif ateş , s_2 yüksek ateş , s_3 akut solunum sıkıntısı , s_4 aksırma hapşurma , s_5 halsizlik , s_6 vücut ağrısı , s_7 baş ağrısı , s_8 hırıltılı öksürük , s_9 akciğerdeki balgam , s_{10} solunum sırasındaki ıslık sesi ve s_{11} burun akıntısı olsun.

Aşağıdaki çizelgedeki gibi $f_1,\ f_2,\ f_3$ biçiminde üç fonksiyon tanımlayalım.

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}	s_{11}
f_1	0.8	0.2	0.1	0.7	0	0.4	0.9	0	0	0	1.0
f_2	0.1	0	0.9	0.6	0.1	0	0.1	1.0	0.7	0.9	0.3
f_3	0.3	0.6	0.5	0.1	0	0.8	0.6	0.4	1.0	0.4	0.1

Tablo 3

$F: E \to P(J^A)$ esnek dönüşümünü $F(d_1) = \{f_1\}$, $F(d_2) = \{f_2\}$, $F(d_3) = \{f_3\}$ şeklinde inşa edelim. Bir hasta $S = \{s_2, s_4, s_6, s_7, s_{11}\}$ semptomları ile gelir ve F altında S nin görüntüsü bulunarak, her birinin skoru hesaplanır.

$skor(d_1) = 3.2$

$skor(d_2) = 1.0$

$skor(d_3) = 2.2$

böylece hastanın gripten acı çektiği çıkarımına varılır. Bu model, hastalık semptomlarının ve de klinik sonuçlarının dahil edilerek geliştirildiği önemli bir modeldir.

4.4.Grup Esnek Dönüşümü

Bu bölümde A ve B grup alınarak aralarındaki homomorfizma ile grup esnek dönüşümü tanımlanmıştır.

Tanım 4.4.1: E parametre kümesi G ve H de iki grup olsun.

$$F: E \rightarrow P(H^G)$$

Dönüşümüne E altında G grubundan H grubuna grup esnek dönüşüm denir. Buradaki H^G ifadesi G grubundan H grubuna tanımlı tüm homomorfizmaları gösterir.

Örnek 4.4.2: $E = \{ e_1, e_2 \}$, $G = (R^2, +)$ ve $H = (R, +)$ iki grup olsun. Aşağıdaki gibi tanımlanan f_1, f_2, $f_3: G \rightarrow H$ grup homomorfizmalarını göz önüne alalım.

$x = (x_1, x_2) \in R^2$ olmak üzere

$f_1(x) = x_1 - x_2$, $f_2(x) = x_1 + x_2$, $f_3(x) = 3x_2$ olsun.

$F: E \rightarrow P(H^G)$ grup esnek dönüşümü $F(e_1) = \{ f_1 \}$, $F(e_2) = \{ f_2, f_3 \}$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 4.4.3: E', E_1 , E_2 parametre kümeleri G, H ve K grup olsun.

1. $F: E' \rightarrow P(G^G)$ grup esnek dönüşümü ve her $x \in E'$ için $F(x) = \{ I_G \}$, $I: G \rightarrow G$ tanımlı grup homomorfizması olmak üzere F birim grup esnek dönüşümü olarak adlandırılır.
2. $F: E' \rightarrow P(H^G)$ grup esnek dönüşümü $E'' \subset E'$ olmak üzere $\forall e \in E''$ için $F_{E''}: E'' \rightarrow P(H^G)$ grup esnek dönüşümü $F_{E''}(e) = F(e)$ olarak tanımlanır ve $F_{E''}$ grup esnek dönüşümüne F nin E'' ye kısıtlanmışı denir.
3. $F: E_1 \rightarrow P(H^G)$ ve $J: E_2 \rightarrow P(K^H)$ iki grup esnek dönüşümü olsun. $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$ olmak üzere iki grup esnek dönüşümünün işlemi $(J * F)$: $E_1 \cap E_2 \rightarrow P(K^G)$, $e \in E_1 \cap E_2$ iken

$(J * F)(e) = \{ h = j \circ f: A \to C : j(e) \circ f(e) = h(e),\ j(e) \in J(e),\ f(e) \in F(e)\}$ şeklinde ifade edilir.

Örnek 4.4.4: $E_1 = \{e_1, e_2\} = E_2$, $G = (R^2, +)$, $H = (R, +)$ ve $K = (R^+, +)$ olsun.

$f_1, f_2: G \to H$ ve $j_1, j_2: H \to K$ tanımlı grup homomorfizması olsun.

$J: E_2 \to P(K^H)$ grup esnek dönüşümü

$J(e_1) = \{ j_1 \}$, $J(e_2) = \{ j_2 \}$ şeklinde tanımlansın ve

$F: E_1 \to P(H^G)$ grup esnek dönüşümü de

$F(e_1) = \{ f_1, f_2 \}$, $F(e_2) = \{ f_2 \}$ şeklinde tanımlansın.

F ve J nin işlemi $H = J * F: E_1 \cap E_2 \to P(K^G)$ olduğundan

$H(e_1) = \{j_1 \circ f_1, j_1 \circ f_2 \}$ ve $H(e_2) = \{j_2 \circ f_2 \}$ dir.

Tanım 4.4.5: $F: E \to P(H^G)$ bir grup esnek dönüşüm olmak üzere;

- Eğer her $f, e \in E$ için $e \neq f$ iken $F(e) \neq F(f)$ ise F ye zayıf birebir grup esnek dönüşüm denir.
- Eğer her $e, f \in E$ için $e \neq f$ iken $F(e) \cap F(f) = \emptyset$ ise F ye güçlü birebir grup esnek dönüşüm denir.

Yukarıdaki tanımda da açık olarak gözükmektedir ki güçlü birebir grup esnek dönüşümü ayrıca zayıf birebir grup esnek dönüşümüdür.

Tanım 4.4.6: $F: E \to P(H^G)$ bir grup esnek dönüşüm olmak üzere

i. Eğer herhangi bir $f \in H^G$ ve $\exists e \in E$ için $f \in F(e)$ ise F ye zayıf örten grup esnek dönüşüm denir.

ii. Eğer $f \in H^G$ iken $\forall e \in E$ için $f \in F(e)$ ise F ye güçlü örten grup esnek dönüşüm denir.

Tanım 4.4.7: $F: E \to P(H^G)$ tanımlı grup esnek dönüşüm olmak üzere eğer F hem zayıf (güçlü) birebir hem de zayıf (güçlü) örten ise F ye zayıf (güçlü) birebir-örten grup esnek dönüşüm denir.

Tanım 4.4.8: $F: E \to P(H^G)$ bir grup esnek dönüşümü ve $T < G$ olsun. T grubunun F altındaki görüntüsü

$$F(T)(e) = \bigcap_{f_e \in F(e)} f_e(T) = \bigcap_{f_e \in F(e)} \{ f_e(t) : \ t \in T \}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 4.4.9: Herhangi bir esnek grup dönüşümü altında bir grubun görüntüsü yine bir gruptur.

İspat: $F: E \to P(H^G)$ bir grup esnek dönüşüm ve $T < G$ olsun. Tanım4.4.8 den

$$F(T)(e) = \bigcap_{f_e \in F(e)} f_e(T) = \bigcap_{f_e \in F(e)} \{ f_e(t) : \ t \in T \}$$

dir.

f_e ler G den H ya tanımlı grup homomorfizmaları olduğundan $f_e(T) < H$ dir. Alt grupların kesişimi grup olduğu için F altında T grubunun görüntüsü yine bir gruptur.

Teorem 4.4.10: $F: E \to P(H^G)$ bir esnek grup dönüşüm ve $K_1, K_2 < G$ olsun.

i. $K_1 < K_2 \ \Rightarrow F(K_1) < F(K_2)$

ii. $F(K_1 \cap K_2) < F(K_1) \cap F(K_2)$

İspat : $F: E \to P(H^G)$ grup esnek dönüşümü ve $e \in E$ için

$F(e) = \{ f_e : \ f_e: G \to H$ grup homomorfizması $\}$ dır.

i. Teorem2.2.26 dan her bir $f_e: G \to H$ grup homomorfizması için

$K_1 < K_2 \ \Rightarrow f_e(K_1) < f_e(K_2)$ dir.

$$\bigcap_{f_e \in F(e)} f_e(K_1) < \bigcap_{f_e \in F(e)} f_e(K_2) \Rightarrow F(K_1)(e) < F(K_2)(e)$$

olduğundan ispat tamamlanır.

ii. Teorem 2.2.26 dan

$f_e(K_1 \cap K_2) < f_e(K_1) \cap f_e(K_2)$ dir.

$$\bigcap_{f_e \in F(e)} f_e(K_1 \cap K_2) < \bigcap_{f_e \in F(e)} \big(f_e(K_1) \cap f_e(K_2)\big)$$

$$= \left(\bigcap_{f_e \in F(e)} f_e(K_1)\right) \cap \left(\bigcap_{f_e \in F(e)} f_e(K_2)\right) = F(K_1) \cap F(K_2)$$

Böylece $F(K_1 \cap K_2) < F(K_1) \cap F(K_2)$ elde edilir.

Tanım 4.4.11: $F: E \to P(H^G)$ bir grup esnek dönüşüm, $S = (K, E_1)$, G üzerinde tanımlı bir esnek grup ve $E_1 \subset E$ olsun. (K, E_1) esnek grubunun F altındaki görüntüsü $e \in E_1$ için , $K(e) = \emptyset$ ise $F(S)(e) = \emptyset$ aksi halde,

$$F(S)(e) = \bigcap_{f_e \in F(e)} f_e\big(K(e)\big) = \bigcap_{f_e \in F(e)} \{ f_e(t) : \; t \in K(e)\}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 4.4.12: $F: E \to P(H^G)$ bir grup esnek dönüşüm ve $S_1 = (K_1, E_1)$ ve $S_2 = (K_2, E_2)$, G üzerinde tanımlı iki esnek grup olsun.

- **i.** $S_1 \mathrel{\tilde{\lessapprox}} S_2 \Rightarrow F(S_1) \mathrel{\tilde{\lessapprox}} F(S_2)$
- **ii.** $F(S_1 \tilde{\cap} S_2) \mathrel{\tilde{\lessapprox}} F(S_1) \tilde{\cap} F(S_2)$
- **iii.** $F(S_1 \wedge S_2) \mathrel{\tilde{\lessapprox}} F(S_1) \wedge F(S_2)$

İspat: 1 ve 2 nin ispatı Tanım 4.4.11, Tanım 3.1.8 ve Tanım 3.1.3 den açıktır.

iii.

$$F(S_1 \wedge S_2) = \bigcap_{f_e \in F(e)} f_e\left((K_1, E_1) \wedge (K_2, E_2)\right)$$

$$= \bigcap_{f_e \in F(e)} f_e\,(T, E_1 \times E_2)$$

Her $(x, y) \in E_1 \times E_2$ için

$$= \bigcap_{f_e \in F(e)} f_e\left(K_1(x) \cap K_2(y)\right) \precsim \bigcap_{f_e \in F(e)} \left(f_e\left(K_1(x)\right) \cap f_e\left(K_2(y)\right)\right)$$

$$= \left(\bigcap_{f_e \in F(e)} f_e\left(K_1(x)\right)\right) \cap \left(\bigcap_{f_e \in F(e)} f_e\left(K_2(y)\right)\right)$$

$= F(S_1) \cap F(S_2)$ dir. Böylece $F(S_1 \wedge S_2) \precsim F(S_1) \wedge F(S_2)$ elde edilir.

5.BÖLÜM
KISITLANMIŞ ESNEK GRUP

Bu bölüm boyunca A bir parametre kümesi ve G bir grup olarak alınacaktır.

Tanım 5.1: (F,A) G üzerinde tanımlı bir esnek grup olsun. Eğer her $x,y \in A$ için

$F(x) \cap F(y) \in (F,A)$ ise (F,A) ya bir kısıtlanmış esnek grup denir.

Her kısıtlanmış esnek grup, esnek gruptur fakat her esnek grup, kısıtlanmış esnek grup değildir. Bunu aşağıdaki örnekle gösterelim.

Örnek 5.2: $A = \{ e_1, e_2, e_3\}$, $G = D_4$ olsun. G üzerinde tanımlanan (F,A) esnek grubu

$(F,A) = \{F(e_1) = \{ e, a, a^2, a^3 \} , F(e_2) = \{ e, \ a^2, b, a^2b \}, F(e_3) = \{e, ab, a^2, a^3b\} \}$ şeklinde tanımlansın.

$e_1, e_2 \in A$ için $F(e_1) \cap F(e_2) \notin (F,A)$ olduğundan G üzerindeki (F,A) esnek grubu bir kısıtlanmış esnek grup değildir.

Teorem 5.3: (F,A) ve (K,B) bir kısıtlanmış esnek grup ise $(F,A) \tilde{\cap} (G,B)$ de bir kısıtlanmış esnek gruptur.

İspat: Tanım 2.2.20 den $(F,A) \tilde{\cap} (K,B) = (H,C)$ ve $A \cap B = C$ olmak üzere her $x \in C$ için $H(x) = F(x)$ veya $K(x)$ (her ikiside aynı) şeklinde tanımlanır.

$\forall x,y \in C$ için $H(x) \cap H(y) = F(x) \cap F(y) \in (F,A)$ olduğundan

$H(x) \cap H(y) \in (F,A)$ dır.

Her $x,y \in C$ için $H(x) \cap H(y) = K(x) \cap K(y) \in (K,B)$ olduğundan

$H(x) \cap H(y) \in (K,B)$ dir.

Bundan dolayı $(F,A)\ \widetilde{\cap}\ (K,B)$ bir kısıtlanmış esnek gruptur.

Teorem 5.4: (F,A) ve (K,B) birer kısıtlanmış esnek grup ve $A\cap B=\emptyset$ ise $(F,A)\ \widetilde{\cup}\ (K,B)$ de kısıtlanmış esnek gruptur.

İspat: Tanım2.2.19 dan $(F,A)\ \widetilde{\cup}\ (K,B)=(H,C)$, $C=A\cup B$ ve $A\cap B=\emptyset$ olmak üzere $\forall e\in C$ için

$$H(e)=\begin{cases}F(e) & , \quad e\in A-B\\ K(e) & , \quad e\in B-A\end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır.

Eğer her $x,y\in A-B$ ise $H(x)\cap H(y)=F(x)\cap F(y)\in(F,A)$ olduğundan

$H(x)\cap H(y)\in(F,A)$ dır.

Eğer her $x,y\in B-A$ ise $H(x)\cap H(y)=K(x)\cap K(y)\in(K,B)$ olduğundan

$H(x)\cap H(y)\in(K,B)$ dir. Dolayısıyla $A\cap B=\emptyset$ olmak şartıyla ise $(F,A)\ \widetilde{\cup}\ (K,B)$ bir kısıtlanmış esnek gruptur.

Teorem5.5: (F,A) ve (K,B) birer kısıtlanmış esnek grup ise $(F,A)\wedge(K,B)$ de bir kısıtlanmış esnek gruptur.

İspat: Tanım 2.2.14 den $(F,A)\wedge(K,B)=(H,A\times B)$,

Her $(\alpha,\beta)\in A\times B$ için $H(\alpha,\beta)=F(\alpha)\cap K(\beta)$ şeklinde tanımlanır.

Her $(\alpha,\beta),(x,y)\in A\times B$ için

$$\begin{aligned}H(\alpha,\beta)\cap H(x,y)&=\big(F(\alpha)\cap K(\beta)\big)\cap\big(F(x)\cap K(y)\big)\\&=\big(F(\alpha)\cap F(x)\big)\cap\big(K(\beta)\cap K(y)\big)\text{ dir.}\end{aligned}$$

(F,A) bir kısıtlanmış esnek grup olduğundan $F(\alpha)\cap F(x)=F(u)$ ve (K,B) kısıtlanmış esnek grup olduğundan $K(\beta)\cap K(y)=K(v)$ olacak şekilde $(u,v)\in A\times B$ vardır. O halde $F(u)\cap K(v)=H(u,v)$ dir. $(H,A\times B)$ bir esnek grup olduğundan $H(u,v)\in(H,A\times B)$ dir. Dolayısıyla $(F,A)\wedge(K,B)$ de bir kısıtlanmış esnek gruptur.

Teorem 5.6: Eğer (F, A) birim esnek grup ise aynı zamanda kısıtlanmış esnek gruptur.

İspat: Birim esnek grubun tanımından her $x \in A$ için $F(x) = \{ e \}$ dir.

Her $x, y \in A$ için $F(x) \cap F(y) = \{ e \} \cap \{ e \} = \{ e \} \in (F, A)$

olduğundan birim esnek grup kısıtlanmış esnek gruptur.$\boxdot$

(F, A) G üzerinde bir esnek grup, $f: G \to K$ ya tanımlı bir homomorfizma olsun.

$kerf = \{ g \in G : f(g) = e_k \}$ olmak üzere eğer $\forall x \in A$ için

$F(x) = kerf$ ise $(f(F),\ A)$ ya K üzerinde birim esnek gruptur. $(f(F),\ A)$ birim esnek grup olduğundan aynı zamanda bir kısıtlanmış esnek gruptur.

Teorem 5.7: Eğer (F, A) mutlak esnek grup ise aynı zamanda bir kısıtlanmış esnek gruptur.

İspat: Mutlak esnek grup tanımından her $x \in A$ için $F(x) = G$ dir.

Her $x, y \in A$ için $F(x) \cap F(y) = G \cap G = G \in (F, A)$ olduğundan, (F, A) aynı zamanda kısıtlanmış esnek gruptur.$\boxdot$

(F, A), G üzerinde mutlak esnek grup, $f: G \to K$ bir homomorfizma olsun. O halde $(f(F),\ A)$ K üzerinde mutlak esnek gruptur. $(f(F), A)$ mutlak esnek grup olduğundan aynı zamanda bir kısıtlanmış esnek gruptur.

Tanım 5.8: (F, A) ve (H, K), G üzerinde kısıtlanmış esnek grup olsun. Eğer

1. $K \subset A$
2. $\forall x \in K$ için $H(x) < F(x)$

ise (H, K) ya (F, A) kısıtlanmış esnek alt grubu denir.

Örnek 5.9: $A = \{e_1, e_2, e_3 \}$, $K = \{ e_1, e_2 \}$ ve $G = S_3$ olsun. (F, A) ve (H, K), G üzerinde aşağıdaki gibi tanımlı kısıtlanmış esnek gruplar olsun.

$F(e_1) = \{e, x \}$, $F(e_2) = \{ e, x, y^2\}$, $F(e_3) = \{ e, x, y \}$ ve

$H(e_1) = \{ e \}$, $H(e_2) = \{ e, y^2\}$ şeklinde tanımlansın. $K \subset A$ ve her $x \in K$ için

$H(x) < F(x)$ şartları sağlandığından (H,K) , (F,A) nın kısıtlanmış esnek alt grubudur.

Teorem 5.10:

1. (F,A) ve (H,A) , G üzerinde kısıtlanmış esnek gruplar olsun. Her $x \in A$ için $F(x) \subseteq H(x)$ ise (F,A), (H,A) nın bir kısıtlanmış esnek alt grubudur.
2. $E = \{ e \}$ olmak üzere (U,E) ve (F,G) , G üzerinde kısıtlanmış esnek grup ise (U,E) , (F,G) nin bir kısıtlanmış esnek alt grubudur.

İspat: Teorem3.1.10 dan ispat açıktır.

KAYNAKLAR

1. Molodtsov, D., Soft Set Theory-First Results, Computers and Mathematics with Applications 37 (1999) 19-31.
2. Maji, P.K., Biswas, R., Roy, A.R., Soft Set Theory Computers and Mathematics with Applications 45 (2003) 555-562.
3. Mapa, S.K., Higher Algebra, Sarat Book Distributors, 2005.
4. Aktaş, H., Çağman, N., Soft Set and Soft Groups, Information Science 177 (2007) 2726-2735.
5. Acar, U., Koyuncu, F. Tanay, B., Soft Sets and Soft Rings, Computers and Mathematics with Applications 59 (2010) 3458-3463.
6. Majumdar, P., Samanta, S.K., On Soft Mappings, Computers and Mathematics with Applications 60 (2010) 2666-2672.
7. Aygünoğlu, A., Aygün, H., Introduction to Fuzzy Soft Groups, Computers and Mathematics with Applications 58 (2009) 1279-1286.
8. Feng, F., Jun, Y.B., Zhao, X., Soft Semirings, Computers and Mathematics with Applications 56 (2008) 2621-2628.
9. Majumdar, P., Samanta, S.K., Similarity Measure of Soft Sets, New Mathematics & Natural Computation 4 (1) (2008) 1-12
10. Zadeh, L.A.,Fuzzy Set, Information and Control 8, 338-353 (1965).
11. Atanassov, K., Operators over İnternal Valued Intuitionistic Fuzzy set, Fuzzy Sets and Systems 64, 159-174 (1994)
12. Gorzalzany, M.B., A Method of Inference in Approximate Reasoning Based on Interval-valued Fuzzy Sets, Fuzzy Sets and Systems 21, 1-17 (1987).
13. Majumdar, P., Samanta, S.K., Generalised Fuzzy Soft Sets, in Proc of the International Conf. on Soft Computing & Intelligent System, ICSCIS-07, Jabalpur, India, 27-29 December 2007, vol. 1, pp. 40-44.
14. Babitha, K.V., Sunil, J.J., Soft Set Relations and Functions, Computers and Mathematics with Applications 60 (2010) 1840-1849.
15. Aslam, M., Qurashi, S.M., Some Contributions to Soft Groups, Anmals of Fuzzy Mathematics an Informatics (AFMI).
16. Gong, K., Xiao, Z., Zhang, X., The Bijective Soft Set with Its Operations, Computers and Mathematics with Applications 60 (2010) 2270-2278.

17. Babitha, K.V., Sunil, J.J., Transitive Closures and Orderings on Soft Sets, Computers and Mathematics with Applications 62 (2011) 2235-2239.
18. Aygünoğlu, A., Aygun, H., Introduction to Fuzzy Soft Groups, Computers and Mathematics with Applications 58 (6) (2009) 1279-1286.
19. Park, J.H., Kim, O.H., Kwun, Y.C., Some Properties of Equivalence Soft Set Relations, Computers and Mathematics with Applications 63 (2012) 1079-1088
20. Yang, H., Guo, Z., Kernels and Clousers of Soft Set Relations and Soft Set Relation Mappings, Computers and Mathematics with Applications 61 (2011) 651-662
21. Min,W.K., Similarity in Soft Set Theory, Applied Mathematics Letters 25 (2012) 310-314
22. Molodtsov, D., The Theory of Soft Set, URSS Publishers, Moscow, 2004.
23. Kong, Z., et al., The Normal Parameter Reduction of Soft Sets and Its Algorith, Computers & Mathemetics with Applications 56 (2008) 3029-3037
24. Maji, P.K., et al., Fuzzy Soft-Sets The Journal of Fuzzy Mathematics 9 (3) (2001) 589-602.
25. Ali, M.I., et al., On Some New Operations in Soft Set Theory, Computers and Mathematics with Applications 57 (2009) 1547-1553.

ÖZGEÇMİŞ

Kıymet Çakır 1988 yılında Yozgat'ın Yenifakılı ilçesinde doğdu. İlköğretimi Yenifakılı' da tamamladı. 2002 yılında Yozgat Anadolu Lisesini kazandı. 2006 yılında kazandığı İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2010 yılında mezun oldu. Aynı yıl Nevşehir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalında Yüksek Lisansa Başladı.

e-posta: kiymet.66@hotmail.com