

**T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BAZI SİĞ SU DALGA DENKLEMLERİNİN SONLU
ELEMENLAR YÖNTEMİ İLE SAYISAL ÇÖZÜMLERİ**

**Tezi Hazırlayan
Turgut AK**

**Tez Danışmanı
Doç. Dr. S. Battal Gazi KARAKOÇ**

**Matematik Anabilim Dalı
Doktora Tezi**

**Aralık 2017
NEVŞEHİR**

Doç. Dr. S. Battal Gazi KARAKOÇ danışmanlığında **Turgut AK** tarafından hazırlanan “**Bazı Sığ Su Dalga Denklemlerinin Sonlu Elemanlar Yöntemi İle Sayısal Çözümleri**” başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Doktora Tezi** olarak kabul edilmiştir.

22/12/2017

JÜRİ

Başkan : Prof. Dr. Kutsi S. ERDURAN



Üye : Doç. Dr. S. Battal Gazi KARAKOÇ



Üye : Doç. Dr. Yasin YAZLIK



Üye : Doç. Dr. Adnan TUNA



Üye : Yrd. Doç. Dr. Ali BAŞHAN



ONAY:

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulu'nun **27/12/2017** tarih ve **57-486** sayılı kararı ile onaylanmıştır.

16/01/2018

Prof. Dr. Sahtan ÖZTÜRK
Enstitü Müdürü



TEZ BİLDİRİM SAYFASI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada yer alan bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu ve bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.



Turgut AK

TEŞEKKÜR

Doktora çalıőmasının seçiminde, yürütülmesinde ve sonuçlandırılmasında bilgi birikimi ve tecrübesiyle bana rehberlik eden, yönlendiren, anlayıőını ve yardımlarını esirgemeyen değerli danıőmanım Doç. Dr. S. Battal Gazi KARAKOÇ'a, katkılarından dolayı Delaware Eyalet Üniversitesi, Matematiksel Bilimler Bölümü ğretim yesi Prof. Dr. Anjan BISWAS'a ve Badji Mokhtar Üniversitesi, Fizik Bölümü ğretim yesi Prof. Dr. Houria TRIKI'ye canı gönülden teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Yoğun alıőmaları arasında göstermiő oldukları ilgi, sabır, hoőgörü ve desteklerinden ötürü tez izleme komitesi yeleri Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi, İnaőat Mühendisliği Bölümü ğretim yesi Prof. Dr. Kutsi S. ERDURAN'a ve Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi, Matematik Bölümü ğretim yesi Doç. Dr. Yasin YAZLIK'a teşekkür ederim.

Eğitim-ğretim hayatım boyunca büyük ilgi ve destekleri ile her zaman yanımda olan, hiçbir zaman emeklerini ödeyemeyeceğim sevgili anneme ve babama, sabır ve sevgi ile bana destek olan eőime, sonsuz teőekkürlerimi sunarım.

Son olarak bilim insanlarının yetiőmesinde büyük katkısı olan ve doktora çalıőmalarım süresince beni maddi olarak destekleyen Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu, Bilim İnaőanı Destekleme Daire Baőkanlıęı'na da teőekkürü bir borç bilirim.

**BAZI SIĞ SU DALGA DENKLEMLERİNİN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE
SAYISAL ÇÖZÜMLERİ
(Doktora Tezi)**

Turgut AK

**NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Aralık 2017

ÖZET

Altı bölümden oluşan bu doktora tez çalışmasında, B-spline yaklaşım fonksiyonlarına bağlı sonlu elemanlar yöntemleri kullanılarak bazı sığ su dalga denklemlerinin sayısal çözümleri üzerinde çalışılmıştır. Elde edilen sayısal sonuçlar literatürde yer alan teorik ve diğer sayısal sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

İlk bölümde, diğer bölümlerde kullanılacak olan kavramlara yer verilmiştir. Dalgalarla ilgili temel kavramlar ve solitary dalga teorisi ile ilgili kısa bilgiler sunulmuştur. Sonlu elemanlar yönteminin temel adımları verildikten sonra B-spline yaklaşım fonksiyonları tanıtılmıştır. Son olarak, sayısal çözümleri elde edilecek olan modifiye edilmiş Korteweg-de Vries, modifiye edilmiş Kawahara ve Rosenau-Korteweg-de Vries dalga denklemleri tanıtılarak, bu denklemlerle ilgili literatürde yer alan çalışmalardan bahsedilmiştir.

İkinci bölümde, kübik B-spline yaklaşım fonksiyonları ile Galerkin sonlu elemanlar yöntemi uygulanan modifiye edilmiş Korteweg-de Vries denkleminin sayısal çözümleri elde edilmiştir. Von Neumann tekniği ile kararlılık analizi yapılmıştır. Tek solitary dalga hareketi, iki ve üç solitary dalganın etkileşimi ve Gaussian başlangıç şartı ile solitonların oluşumunu içeren problemler ele alınmıştır. Elde edilen sayısal sonuçlar ile analitik çözüm ve diğer yöntemlerle elde edilen sonuçlar tablolar halinde karşılaştırılmıştır.

Üçüncü bölümde, Petrov-Galerkin sonlu elemanlar yöntemi ile modifiye edilmiş Korteweg-de Vries denkleminin sayısal çözümleri elde edilmiştir. Ağırlık fonksiyonu olarak kuadratik B-spline, yaklaşım fonksiyonu olarak da kübik B-spline fonksiyonu kullanılmıştır. Von Neumann tekniği ile uygulanan yöntemin kararlılık analizi incelenmiştir. Elde edilen sayısal sonuçlar ile analitik çözüm ve literatürde yer alan sonuçları kıyaslayabilmek için, tek solitary dalga hareketi, iki ve üç solitary dalganın etkileşimi ve Gaussian başlangıç şartı ile solitonların oluşumunu içeren problemler üzerinde çalışılmıştır.

Dördüncü bölümde, septik B-spline yaklaşım fonksiyonlarına bağlı olarak kollokasyon sonlu elemanlar yöntemi ile modifiye edilmiş Kawahara denklemi sayısal olarak çözülmüştür. Von Neumann tekniği ile kararlılık analizi yapılmıştır. Uygulanan yöntemin doğruluğunu gözlemlemek için tek solitary dalga hareketi, iki ve üç solitary dalganın etkileşimi ve Gaussian başlangıç şartı ile solitonların oluşumunu içeren problemler incelenmiştir.

Beşinci bölümde, subdomain sonlu elemanlar yöntemi ile Rosenau-Korteweg-de Vries denklemi sayısal olarak çözülmüştür. Yaklaşım fonksiyonu olarak septik B-spline fonksiyonlar kullanılmıştır. Von Neumann tekniği ile uygulanan yöntemin kararlılık analizi incelenmiştir. Tek solitary dalga hareketi, iki ve üç solitary dalganın etkileşimi, Gaussian ve undular bore başlangıç şartları ile solitonların oluşumunu içeren problemler ile yöntemin doğruluğu kanıtlanmıştır.

Son olarak, altıncı bölümde uygulanan yöntemlerle ilgili değerlendirmelere yer verilmiştir.

Anahtar kelimeler: *mKdV denklemi, mKawahara denklemi, Rosenau-KdV denklemi, Sonlu elemanlar yöntemi, B-spline, Solitary dalgalar.*

Tez Danışman: Doç. Dr. S. Battal Gazi KARAKOÇ

Sayfa Adeti: 120

**NUMERICAL SOLUTIONS OF SOME SHALLOW WATER WAVE EQUATIONS
BY USING THE FINITE ELEMENT METHOD**

(Ph. D. Thesis)

Turgut AK

**NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES**

December 2017

ABSTRACT

In this thesis consisting of six sections, the numerical solutions of some shallow water wave equations have been studied by using the finite element methods based on B-spline functions. The obtained numerical results have been compared with the theoretical and other numerical results in the literature.

In the first section, it has been listed brief description of the materials which is used in the other sections. The brief information regarding to the theory of the solitary wave and the basic concepts related to waves has been presented. Having been given the fundamental steps of the finite element methods, B-spline approximation functions was represented. Finally, after being mentioned briefly about the modified Korteweg de Vries, modified Kawahara and the Rosenau-Korteweg de Vries equations whose numerical solutions will be obtained, it will be given some studies in the literature regarding to these equations.

In the second section, the numerical solutions of the modified Korteweg de Vries equation have been obtained using Galerkin finite element method and cubic B-spline approximation functions. The stability analysis has been studied via von Neumann technique. It has been addressed and studied the problems of the motion of single solitary wave, the interaction of two and three solitary waves and evolution of solitons with Gaussian initial condition. The obtained numerical results have been compared with analytical solution and the numerical solutions which are obtained in the literature using other methods in list of tables.

In the third section, the numerical solutions of modified Korteweg-de Vries equation have been obtained using the Petrov-Galerkin finite element method. While applying Petrov-Galerkin finite element method, it was used quadratic B-spline function as weight function, cubic B-spline function as approximation function. The stability analysis of the applied method has been examined via von Neumann technique. In order to compare the obtained numerical results with the analytical solution and the obtained numerical results in the literature,

it has been studied on the problems about the motion of single solitary wave, the interaction of two and three solitary waves and evolution of solitons with Gaussian initial condition.

In the fourth section, modified Kawahara equation has been solved numerically using collocation finite element method based on septic B-spline approximation functions. The stability analysis has been examined via von Neumann technique. In order to verify the accuracy of the applied method, the problems of the motion of single solitary wave, the interaction of two and three solitary waves and evolution of solitons with Gaussian initial condition have been studied.

In the fifth section, Rosenau-Korteweg-de Vries equation has been solved numerically with subdomain finite element method. Septic B-spline functions have been used as the approximation function. The stability analysis of the applied method has been studied via von Neumann technique. The accuracy of the method has been proved with the problems of the motion of single solitary wave, the interaction of two and three solitary waves and evolution of solitons with Gausssian and undular bore initial conditions.

Lastly, the assessments with regard to the applied methods have been included in the sixth section.

Keywords: *mKdV equation, mKawahara equation, Rosenau-KdV equation, Finite element method, B-spline, Solitary waves.*

Thesis Supervisor: Assoc. Prof. S. Battal Gazi KARAKOÇ

Page Number: 120

İÇİNDEKİLER

KABÜL VE ONAY SAYFASI.....	i
TEZ BİLDİRİM SAYFASI.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	vi
İÇİNDEKİLER.....	viii
TABLolar LİSTESİ.....	xi
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	xiii
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	xvi
1. BÖLÜM	
GİRİŞ.....	1
1.1. Dalgalar İle İlgili Temel Kavramlar.....	1
1.1.1. Taşıdıkları Enerji Biçimine Göre Dalgalar	2
1.1.2. Titreşim Biçimine Göre Dalgalar.....	2
1.2. Su Dalgaları.....	2
1.2.1. Su Dalgalarının Yapısı.....	2
1.2.2. Su Dalgalarının Sınıflandırılması.....	4
1.2.2.1. Dalgaların Oluşum Sebeplerine Göre Sınıflandırılması.....	4
1.2.2.2. Dalgaların Göreceli Derinliğe Göre Sınıflandırılması.....	6
1.2.2.3. Dalgaların Frekanslarına (Periyotlarına) Göre Sınıflandırılması.....	7
1.2.2.4. Dalgaların Dikliklerine Göre Sınıflandırılması.....	7
1.2.2.5. Dalgaların Yükseklik, Boy ve Derinliğe Göre Sınıflandırılması.....	8
1.3. Dalga Teorileri.....	8
1.3.1. Solitary Dalga Teorisine Fiziksel Bakış.....	8

1.4. Sonlu Elemanlar Yöntemi.....	13
1.4.1. Sonlu Elemanlar Yöteminin Uygulanışı.....	14
1.4.1.1. Galerkin Yöntemi.....	16
1.4.1.2. Petrov-Galerkin Yöntemi.....	16
1.4.1.3. Kollokasyon Yöntemi.....	17
1.4.1.4. Subdomain Yöntemi.....	17
1.4.2. Sonlu Elemanlar Yönteminin Avantajları ve Dezavantajları.....	17
1.4.2.1. Avantajları.....	18
1.4.2.2. Dezavantajları.....	18
1.5. B-Spline Fonksiyonlar.....	18
1.5.1. Lineer B-Spline Fonksiyonlar.....	21
1.5.2. Kuadratik B-Spline Fonksiyonlar.....	22
1.5.3. Kübik B-Spline Fonksiyonlar.....	24
1.5.4. Kuartik B-Spline Fonksiyonlar.....	26
1.5.5. Kuintik B-Spline Fonksiyonlar.....	28
1.5.6. Sektik B-Spline Fonksiyonlar.....	31
1.5.7. Septik B-Spline Fonksiyonlar.....	34
1.6. Dalga Denklemleri.....	37
1.6.1. Modifiye Edilmiş Korteweg-de Vries (mKdV) Denklemi.....	37
1.6.2. Modifiye Edilmiş Kawahara (mK) Denklemi.....	38
1.6.3. Rosenau-Korteweg-de Vries (R-KdV) Denklemi.....	38
1.7. Amaç ve Kapsam.....	40
2. BÖLÜM	
MODİFİYE EDİLMİŞ KORTEWEG-DE VRIES DENKLEMİNİN GALERKİN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE SAYISAL ÇÖZÜMÜ.....	41

2.1. mKdV Denkleminin Kübik B-Spline Galerkin Yöntemi İle Sayısal Çözümü.....	41
2.1.1. Denklemin Gelişimi ve Kübik B-Spline Fonksiyonlar.....	41
2.1.2. Galerkin Sonlu Elemanlar Yöntemi.....	43
2.1.3. Kararlılık Analizi.....	48
2.1.4. Sayısal Örnekler ve Sonuçlar.....	48
2.1.4.1. Tek Solitary Dalga Hareketi.....	49
2.1.4.2. İki Solitary Dalganın Etkileşimi.....	50
2.1.4.3. Üç Solitary Dalganın Etkileşimi.....	52
2.1.4.4. Solitonların Oluşumu.....	58
3. BÖLÜM	
MODİFİYE EDİLMİŞ KORTEWEG-DE VRIES DENKLEMİNİN PETROV- GALERKİN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE SAYISAL ÇÖZÜMÜ.....	60
3.1. mKdV Denkleminin Kübik B-Spline Petrov-Galerkin Yöntemi İle Sayısal Çözümü.....	60
3.1.1. Denklemin Gelişimi, Kuadratik ve Kübik B-Spline Fonksiyonlar.....	60
3.1.2. Petrov-Galerkin Sonlu Elemanlar Yöntemi.....	63
3.1.3. Kararlılık Analizi.....	67
3.1.4. Sayısal Örnekler ve Sonuçlar.....	68
3.1.4.1. Tek Solitary Dalga Hareketi.....	69
3.1.4.2. İki Solitary Dalganın Etkileşimi.....	70
3.1.4.3. Üç Solitary Dalganın Etkileşimi.....	72
3.1.4.4. Solitonların Oluşumu.....	75

4. BÖLÜM

MODİFİYE EDİLMİŞ KAWAHARA DENKLEMİNİN KOLLOKASYON SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE SAYISAL ÇÖZÜMÜ.....	80
4.1. mK Denkleminin Septik B-Spline Kollokasyon Yöntemi İle Sayısal Çözümü.....	80
4.1.1. Denklemin Gelişimi ve Septik B-Spline Fonksiyonlar.....	80
4.1.2. Kollokasyon Sonlu Elemanlar Yöntemi.....	83
4.1.3. Kararlılık Analizi.....	86
4.1.4. Sayısal Örnekler ve Sonuçlar.....	86
4.1.4.1. Tek Solitary Dalga Hareketi.....	87
4.1.4.2. İki Solitary Dalganın Etkileşimi.....	90
4.1.4.3. Üç Solitary Dalganın Etkileşimi.....	90
4.1.4.4. Solitonların Oluşumu.....	92

5. BÖLÜM

ROSENAU-KORTEWEG-DE VRIES DENKLEMİNİN SUBDOMAIN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE SAYISAL ÇÖZÜMÜ.....	95
5.1. R-KdV Denkleminin Sektik B-Spline Subdomain Yöntemi İle Sayısal Çözümü.....	95
5.1.1. Denklemin Gelişimi ve Sektik B-Spline Fonksiyonlar.....	95
5.1.2. Subdomain Sonlu Elemanlar Yöntemi.....	98
5.1.3. Kararlılık Analizi.....	101
5.1.4. Sayısal Örnekler ve Sonuçlar.....	102
5.1.4.1. Tek Solitary Dalga Hareketi.....	103
5.1.4.2. İki Solitary Dalganın Etkileşimi.....	105
5.1.4.3. Üç Solitary Dalganın Etkileşimi.....	106

5.1.4.4. Solitonların Oluşumu.....	111
5.1.4.4.1. Gaussian Balangıç Şartı.....	111
5.1.4.4.2. Undular Bore Başlangıç Şartı.....	111
6. BÖLÜM	
SONUÇ VE ÖNERİLER.....	114
KAYNAKLAR.....	115
ÖZGEÇMİŞ.....	120



TABLULAR LİSTESİ

Tablo 1.1	Dalga tipleri ve oluşum sebepleri [1]	4
Tablo 1.2	Göreceli derinliğe göre dalgalar [1]	6
Tablo 1.3	$\phi_m(x)$ ve $\phi'_m(x)$ 'in düğüm noktalarındaki değerleri	23
Tablo 1.4	$\phi_m(x)$, $\phi'_m(x)$ ve $\phi''_m(x)$ 'in düğüm noktalarındaki değerleri	25
Tablo 1.5	$\phi_m(x)$, $\phi'_m(x)$, $\phi''_m(x)$ ve $\phi'''_m(x)$ 'in düğüm noktalarındaki değerleri	27
Tablo 1.6	$\phi_m(x)$, $\phi'_m(x)$, $\phi''_m(x)$, $\phi'''_m(x)$ ve $\phi^{iv}_m(x)$ 'in düğüm noktalarındaki değerleri	30
Tablo 1.7	$\phi_m(x)$, $\phi'_m(x)$, $\phi''_m(x)$, $\phi'''_m(x)$, $\phi^{iv}_m(x)$ ve $\phi^v_m(x)$ 'in düğüm noktalarındaki değerleri	32
Tablo 1.8	$\phi_m(x)$, $\phi'_m(x)$, $\phi''_m(x)$, $\phi'''_m(x)$, $\phi^{iv}_m(x)$, $\phi^v_m(x)$ ve $\phi^{vi}_m(x)$ 'in düğüm noktalarındaki değerleri	35
Tablo 2.1	Kübik B-spline fonksiyonlar ve türevlerinin x_m düğüm noktalarındaki değerleri	43
Tablo 2.2	Tek solitary dalga için korunum sabitleri ve hata normlarının karşılaştırılması	50
Tablo 2.3	İki solitary dalganın etkileşimi için korunum sabitlerinin karşılaştırılması	53
Tablo 2.4	Üç solitary dalganın etkileşimi için korunum sabitlerinin karşılaştırılması	56
Tablo 2.5	Gaussian başlangıç şartı için korunum sabitleri	58
Tablo 3.1	Kübik B-spline fonksiyonlar ve türevlerinin x_m düğüm noktalarındaki değerleri	62
Tablo 3.2	Tek solitary dalga için korunum sabitleri ve hata normlarının karşılaştırılması	70
Tablo 3.3	İki solitary dalganın etkileşimi için korunum sabitlerinin karşılaştırılması	73
Tablo 3.4	Üç solitary dalganın etkileşimi için korunum sabitlerinin karşılaştırılması	75

Tablo 3.5	Gaussian başlangıç şartı için korunum sabitleri	76
Tablo 4.1	Septik B-spline fonksiyonlar ve türevlerinin x_m düğüm noktalarındaki değerleri	82
Tablo 4.2	Tek solitary dalga için korunum sabitleri ve hata normları	88
Tablo 4.3	İki solitary dalganın etkileşimi için korunum sabitleri	91
Tablo 4.4	Üç solitary dalganın etkileşimi için korunum sabitleri	92
Tablo 4.5	Gaussian başlangıç şartı için korunum sabitleri	94
Tablo 5.1	Sektik B-spline fonksiyonlar ve türevlerinin x_m düğüm noktalarındaki değerleri	97
Tablo 5.2	h ve Δt 'nin farklı değerleri ve tek solitary dalga için korunum sabitlerinin karşılaştırılması	104
Tablo 5.3	h ve Δt 'nin farklı değerleri ve tek solitary dalga için hata normlarının karşılaştırılması	104
Tablo 5.4	İki solitary dalganın etkileşimi için korunum sabitleri	107
Tablo 5.5	Üç solitary dalganın etkileşimi için korunum sabitleri	109
Tablo 5.6	c 'nin farklı değerleri ve Gaussian başlangıç şartı için korunum sabitleri	111
Tablo 5.7	Undular bore başlangıç şartı için korunum sabitleri	113

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1.1	Sinüsoidal bir dalganın karakteristiklerinin gösterimi [1]	3
Şekil 1.2	Dalgaların frekanslarına göre sınıflandırılması [1]	7
Şekil 1.3	Bazı lineer ve lineer olmayan dalga tipleri [1]	9
Şekil 1.4	Dalga teorilerinin geçerlilik sınırları [1]	9
Şekil 1.5	Dalga teorilerinin geçerli olduğu durumlar [1]	10
Şekil 1.6	Lineer B-spline fonksiyonlar	22
Şekil 1.7	Kuadratik B-spline fonksiyonlar	24
Şekil 1.8	Kübik B-spline fonksiyonlar	26
Şekil 1.9	Kuartik B-spline fonksiyonlar	29
Şekil 1.10	Kuintik B-spline fonksiyonlar	31
Şekil 1.11	Sektik B-spline fonksiyonlar	34
Şekil 1.12	Septik B-spline fonksiyonlar	37
Şekil 2.1	Tek solitary dalga hareketi	51
Şekil 2.2	a) $t=0$, b) $t=4$, c) $t=8$, d) $t=12$, e) $t=16$, f) $t=20$ zamanlarında tek solitary dalga hareketi	52
Şekil 2.3	$t = 20$ 'de hata dağılımı	53
Şekil 2.4	İki solitary dalganın etkileşimi	54
Şekil 2.5	a) $t=0$, b) $t=4$, c) $t=6$, d) $t=7$, e) $t=8$, f) $t=12$, g) $t=16$, h) $t=20$ zamanlarında iki solitary dalganın etkileşimi	55
Şekil 2.6	Üç solitary dalganın etkileşimi	56

Şekil 2.7	a) $t=0$, b) $t=6$, c) $t=7$, d) $t=8$, e) $t=10$, f) $t=12$, g) $t=16$, h) $t=20$ zamanlarında üç solitary dalganın etkileşimi	57
Şekil 2.8	$\mu = 0.1$ için Gaussian başlangıç şartı ile a) $t=0$, b) $t=2$, c) $t=6$, d) $t=10$ zamanlarında solitonların oluşumu	59
Şekil 2.9	$\mu = 0.04$ için Gaussian başlangıç şartı ile a) $t=0$, b) $t=2$, c) $t=6$, d) $t=10$ zamanlarında solitonların oluşumu	59
Şekil 3.1	Tek solitary dalga hareketi	70
Şekil 3.2	a) $t=0$, b) $t=4$, c) $t=8$, d) $t=12$, e) $t=16$, f) $t=20$ zamanlarında tek solitary dalga hareketi	71
Şekil 3.3	$t = 20$ 'de hata dağılımı	72
Şekil 3.4	İki solitary dalganın etkileşimi	73
Şekil 3.5	a) $t=0$, b) $t=4$, c) $t=6$, d) $t=7$, e) $t=8$, f) $t=12$, g) $t=16$, h) $t=20$ zamanlarında iki solitary dalganın etkileşimi	74
Şekil 3.6	Üç solitary dalganın etkileşimi	76
Şekil 3.7	a) $t=0$, b) $t=6$, c) $t=7$, d) $t=8$, e) $t=10$, f) $t=12$, g) $t=16$, h) $t=20$ zamanlarında üç solitary dalganın etkileşimi	77
Şekil 3.8	$\mu = 0.1$ için Gaussian başlangıç şartı için a) $t=0$, b) $t=2$, c) $t=6$, d) $t=10$ zamanlarında solitonların oluşumu	78
Şekil 3.9	$\mu = 0.04$ için Gaussian başlangıç şartı ile a) $t=0$, b) $t=2$, c) $t=6$, d) $t=10$ zamanlarında solitonların oluşumu	79
Şekil 4.1	Tek solitary dalga hareketi	88
Şekil 4.2	a) $t=0$, b) $t=30$, c) $t=70$, d) $t=100$ zamanlarında tek solitary dalga hareketi	89
Şekil 4.3	$t = 100$ 'de hata dağılımı	89

Şekil 4.4	a) $t=0$, b) $t=30$, c) $t=40$, d) $t=50$, e) $t=60$, f) $t=100$ zamanlarında iki solitary dalganın etkileşimi	91
Şekil 4.5	a) $t=0$, b) $t=40$, c) $t=60$, d) $t=90$, e) $t=110$, f) $t=150$ zamanlarında üç solitary dalganın etkileşimi	93
Şekil 4.6	Gaussian başlangıç şartı ile a) $t=0$, b) $t=1$, c) $t=3$, d) $t=5$ zamanlarında solitonların oluşumu	94
Şekil 5.1	Tek solitary dalga hareketi	105
Şekil 5.2	a) $h = \Delta t = 0.1$, b) $h = \Delta t = 0.05$, c) $h = \Delta t = 0.025$ için $t = 40$ 'da hata dağılımı	106
Şekil 5.3	a) $t=0$, b) $t=80$, c) $t=100$, d) $t=110$, e) $t=120$, f) $t=130$, g) $t=150$, h) $t=250$ zamanlarında iki solitary dalganın etkileşimi	108
Şekil 5.4	a) $t=0$, b) $t=50$, c) $t=80$, d) $t=100$, e) $t=120$, f) $t=140$, g) $t=170$, h) $t=250$ zamanlarında üç solitary dalganın etkileşimi	110
Şekil 5.5	a) $c=0.5$, b) $c=0.1$, c) $c=0.05$ için Gaussian başlangıç şartı ile solitonların oluşumu	112
Şekil 5.6	Undular bore başlangıç şartı ile a) $t=0$, b) $t=25$, c) $t=50$, d) $t=75$, e) $t=100$, f) $t=150$ zamanlarında solitonların oluşumu	113

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

KdV	Korteweg-de Vries
mKdV	Modifiye edilmiş Korteweg-de Vries
mK	Modifiye edilmiş Kawahara
R-KdV	Rosenau-Korteweg-de Vries



1. BÖLÜM

GİRİŞ

Doğadaki bir çok fiziksel olay kısmi diferansiyel denklemler ile açıklanabilmektedir. Doğadaki bu olayların matematiksel modellerini oluşturmak için bilim adamları çoğunlukla lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler kullanmaktadırlar. Uygulama alanlarının çok geniş olması nedeniyle kısmi diferansiyel denklemler teorisi her zaman matematiğin önemli inceleme alanlarından biri olmuştur. Matematik, doğal bilimler ve mühendislik dallarındaki birçok problem, kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerine indirgenebilmektedir. Modeller sonucunda ortaya çıkan denklemlerin büyük bir kısmı analitik olarak çözülememekte veya çözümünü bulmak çok zor olmaktadır. Bundan dolayı bu tip denklemleri çözmek için sayısal yöntemler geliştirilmiştir. Gelişen teknoloji ile birlikte daha hızlı bilgisayarlarda farklı algoritmalar kullanılarak hızlı ve etkili bir şekilde sonuca ulaşılabilmektedir.

1960'lı yıllarda geliştirilen sonlu elemanlar yöntemi, kısmi diferansiyel denklemler ile açıklanan problemleri çözmek için kullanılan güçlü tekniklerden biridir. Sonlu elemanlar yöntemi, temel olarak fonksiyonun çözüm bölgesinin sonlu alt bölgelere ayrılarak, araştırılan fiziksel bölgenin bağlantı noktaları yardımı ile bu alt bölgeler üzerinde yaklaşım fonksiyonlarının belirlenmesine dayanır. Böylece sürekli bir problem, ayrıklaştırılmış bir sonlu eleman problemine dönüşür.

Bu tezde, sonlu elemanlar yöntemlerinin kısmi diferansiyel denklemlere bazı uygulamaları üzerinde çalışılacaktır.

Bu bölümde ise, diğer bölümlerde kullanılacak olan kavramlara yer verilmiştir. İlk olarak dalgalarla ilgili temel kavramlar ve solitary dalga teorisi ile ilgili kısa bilgiler verilmiştir. Sonlu elemanlar yöntemi özetlendikten sonra B-spline interpolasyon polinomları tanıtılmıştır. Son olarak, sayısal çözümleri bulunacak olan modifiye edilmiş Korteweg-de Vries (mKdV), modifiye edilmiş Kawahara (mK) ve Rosenau-Korteweg-de Vries (R-KdV) denklemleri tanıtılarak, bu dalga denklemleri ile ilgili literatürde yer alan çalışmalar verilmiştir.

1.1 Dalgalar İle İlgili Temel Kavramlar

Dalga, bir fizik terimi olarak uzayda ve maddede yayılan ve enerjinin taşınmasına yol açan titreşimdir. Dalga hareketi, çok az kütle taşınımı ya da hiç kütle taşınımı olmadan bir noktadan başka bir noktaya enerji taşır.

1.1.1 Taşıdııkları Enerji Biçimine Göre Dalgalar

Dalgalar taşıdııkları enerji türlerine göre mekanik ve elektromanyetik dalgalar olmak üzere ikiye ayrılırlar.

Mekanik dalgalar yayılmak için maddesel ortama ihtiyaç duyarlar. Ses dalgaları, su dalgaları ve yay dalgaları mekanik dalgalardır. Bu tip dalgalar hareket sırasında mekanik enerji taşırlar.

Elektromanyetik dalgaların yayılması için maddesel ortam zorunlu değildir. Bu tür dalgalar boşlukta da yayılabilirler. Elektromanyetik dalgalardan bazıları ışık dalgaları, radyo dalgaları ve mikro dalgalardır.

1.1.2 Titreşim Biçimine Göre Dalgalar

Dalgalar titreşim biçimlerine göre enine ve boyuna dalgalar olmak üzere ikiye ayrılırlar.

Enine dalgalar yayılma yönü ile titreşim doğrultusunun birbirine dik olduğu dalgalardır. Elektromanyetik dalgalar ve bazı yay dalgaları bu tür dalgalara örnek olarak verilebilir.

Boyuna dalgalar ise yayılma yönü ile titreşim doğrultusunun aynı olduğu dalgalardır. Ses dalgaları ve bazı yay dalgaları bu türdür.

Mekanik dalgalar enine ve boyuna olabilirken, tüm elektromanyetik dalgalar eninedir.

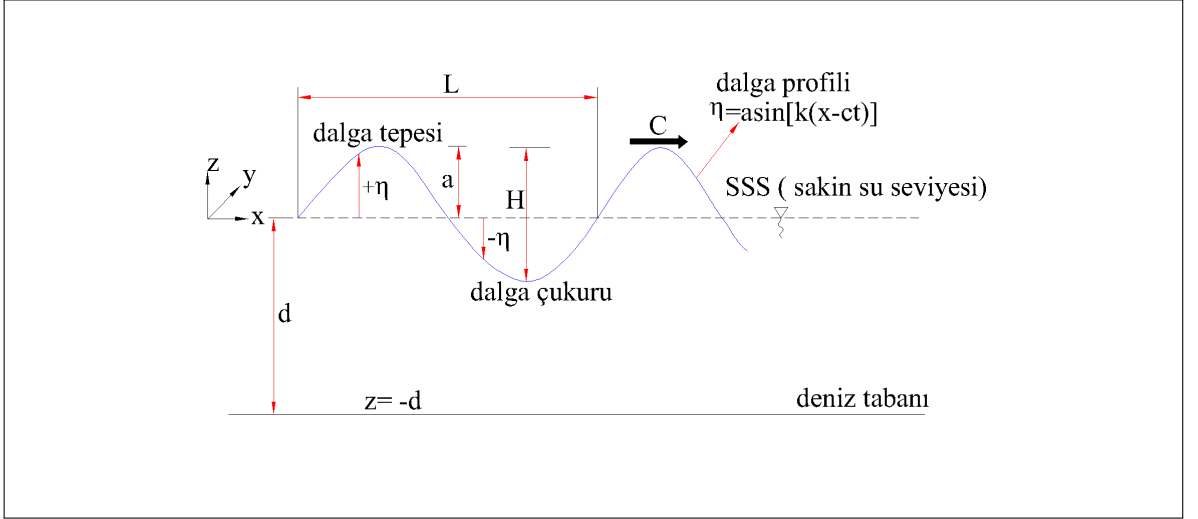
1.2 Su Dalgaları

Su hareketleri **dalga hareketi** ve **akıntılar** olmak üzere iki büyük gruba ayrılabilir. **Dalga hareketi** genellikle düzenli, periyodik ve akışkan kütlelerinin taşınmadığı hareketlerdir. Dalgaların yükseklikleri değişmesine rağmen periyodikliğini koruyarak çok uzun mesafeler katederek yayılmasına **dispersiyon** denir. **Akıntılar** ise düzensiz, periyodik olmayan hareketlerle akışkan kütlelerinin taşındığı bir su hareketidir [1].

1.2.1 Su Dalgalarının Yapısı

Uzunluğu yüksekliğine göre fazla olan dalgalara en basit anlamda sinüsoidal dalga denir. Bu tür dalgaların karakteristik yapısı Şekil 1.1'de gösterilmiştir.

Dalga Yönü (C): Dalganın ilerlediği yöndür.



Şekil 1.1 Sinüsoidal bir dalganın karakteristiklerinin gösterimi [1]

Dalga Tepesi: Dalga profilinin en üst noktasıdır.

Dalga Çukuru: Dalga profilinin en alt noktasıdır.

Dalga Boyu (L): Ardışık iki dalga tepesi veya dalga çukuru arasındaki yatay uzaklıktır. İlk olarak 1803 yılında Thomas Young [2] tarafından ortaya konulmuş ve Einstein [3] tarafından ispatlanmıştır.

Dalga Sayısı ($k = 2\pi/L$): Birim yatay uzunluktaki dalga boyunun 2π ile çarpımıdır.

Dalga Yüksekliği (H): Ardışık dalga tepesi ile dalga çukuru arasındaki düşey uzaklıktır.

Genlik (a): Sakin su seviyesinden dalga tepesine kadar olan düşey uzaklıktır. Bu uzaklık sinüsoidal dalgalar için dalga yüksekliğinin yarısıdır.

Periyot (T): Aynı kesitten ardışık iki tepe veya çukurun geçmesi için gereken süreyi ifade eder. Zaman birimi sn 'dir.

Dalga Frekansı ($f = 1/T$): Seçilen herhangi bir noktadan birim zamanda geçen dalga sayısıdır.

Açısal Frekans ($\omega = 2\pi/T$): Bir noktadan birim zamanda geçen dalga sayısının 2π ile çarpımıdır.

Dalga Yayılma Hızı ($c = L/T$): İlerleyen bir dalganın hızını ifade eder. Faz hızı olarak da adlandırılır. Bir dalga periyodu süresince dalga, bir dalga boyu kadar yol aldığı için dalga boyunun periyoda oranı ile ifade edilir. Birimi m/sn 'dir.

Grup Hızı (c_g): Dalgalar üst üste binerek dalga paketlerini oluştururlar. Dalga paketlerinin hızı, grup hızı olarak adlandırılır. Bu hız, faz hızından farklıdır. Enerjinin daha yoğun olduğu dalga paketleri, faz hızından daha yavaş hareket ederler.

Dalga Dikliği (H/L): Dalga yüksekliğinin dalga boyuna oranı ile ifade edilir.

Sakin Su Seviyesi (SSS): Dalga hareketinin olmadığı durumdaki su seviyesidir.

Dalga Profili (η): Dalganın su seviyesinden itibaren yaptığı yer değiştirme hareketidir.

Dalga profili

$$\eta(x,t) = a \sin(kx - \omega t) = \frac{H}{2} \sin \left[\frac{2\pi}{L} \left(x - \frac{L}{T} t \right) \right] \quad (1.1)$$

şeklinde ifade edilebilir.

1.2.2 Su Dalgalarının Sınıflandırılması

1.2.2.1 Dalgaların Oluşum Sebeplerine Göre Sınıflandırılması

Dalgalar oluşum sebeplerine göre sekiz başlık altında toplanabilir. Oluşum tiplerine göre dalgalar, Tablo 1.1’de verilmiştir [4].

Tablo 1.1 Dalga tipleri ve oluşum sebepleri [1]

Dalga Tipi	Periyot	Sebepler
Rüzgar dalgası (ağırlık dalgaları)	$\leq 15 \text{ sn}$	Rüzgar gerilmesi
Ölü deniz dalgası, soluğan (swell)	$\leq 30 \text{ sn}$	Rüzgar dalgası
Surf salınımı (Surf beat)	$1 - 5 \text{ dk}$	Dalga grubu
Seiche	$2 - 40 \text{ dk}$	Ani rüzgar değişimi
Çalkantı	$2 - 40 \text{ dk}$	Tsunami, surf salınımı
Tsunami	$5 - 60 \text{ dk}$	Deprem
Gel-git	$12 - 24 \text{ saat}$	Güneş ve ay çekimi
Fırtına kabarması (Storm surge)	$1 - 30 \text{ gün}$	Rüzgar gerilmesi ve atmosfer basıncındaki azalma

Rüzgar Dalgaları: Rüzgar dalgaları kendini üreten rüzgar yardımıyla hareket ederler ve ilerledikçe yükseklikleri artar. Bu tür dalgalar genelde kısa ve dik dalgalardır.

Ölü Deniz (Soluğan) Dalgaları: Ölü deniz (soluğan) dalgaları kendini üreten rüzgarların etkisi altında bulunmayan, ilerleyerek üretildikleri ortamın dışına çıkan ve hareketleri boyunca küçülme eğilimi gösteren dalgalardır. Bu tip dalgalar genellikle uzun dalgalardır. Ayrıca, rüzgar dalgalarına göre daha uzun süre özelliklerini korumalarına rağmen düzenli bir yüksekliğe ve periyoda sahip değildir. Rüzgar enerjisinin denize geçmesiyle birlikte oluşan dalgalar, bir süre ilerledikten sonra üretildikleri ortamın dışında hareket eden dalgalardır. Genelde fırtınadan sonra ortaya çıkarlar. Kalıntı dalgalar olarak da adlandırılırlar. Rüzgar olmamasına rağmen, fırtına sonucu açık denizlerde oluşan dalgaların etkisi kıyı kesiminde görülebilir. Bu dalgalar sörf için en uygun dalgalar olmalarına karşın kayak ve tekneler için

tehlike oluştururlar [1].

Surf Salınımı (Surf Beat): Bir dalga grubunda, kırılma bölgesinde kırılan dalga yüksekliğinin değişmesi ile uzun periyotlu, yavaş salınımlı dalgalar oluşur. Bu tür dalgalar surf salınımı olarak adlandırılır [1].

Seiche: Göl gibi kapalı ortamlarda suyun çalkantısı ile su seviyesinde doğal periyotlu küçük dalga hareketleri görölür. Seiche olarak adlandırılan bu dalga hareketi ilk olarak 1890'lı yıllarda François-Alphonse Forel tarafından İsviçre ile Fransa arasında yer alan Cenevre Gölü'nde gözlemlenmiştir [5, 6].

Çalkantı (Harbour Resonance): Göller, kapalı denizler, körfezler ve limanlar gibi yarı kapalı basenlerde hareket eden küçük genlikli ve periyotlu dalgalar, bir süre sonra kıyılardan yansımalar ve girişimler sonucunda, uzun periyotlu yüksek genlikli dalgaların oluşmasına neden olabilirler. Bu tür uzun periyotlu dalgalar, basen ya da denizin serbest salınımları olarak bilinirler ve çalkantı (rezonans) olarak adlandırılırlar. Bu durum limanlardaki bağlı gemileri etkilemektedir.

Tsunami: Tarihte yüzyıllar öncesine ait tsunami ile ilgili kayıtlara rastlanılmasına rağmen 15 Haziran 1896'da Japonya'da meydana gelen ve 21.000 kişinin can kaybına neden olan büyük Meiji tsunamisi sonrası Japonya'nın dünyaya yaptığı yardım çağrıları arasında bulunan bu kelime dünya dillerine kendiliğinden yerleşmiştir. Japonca'da "liman dalgası" anlamına gelir. Tsunami okyanus veya deniz tabanında oluşan volkanik patlamalar, depremler ve bunlara bağlı taban çökmesi veya zemin kayması sonucu enerjinin denize geçmesiyle birlikte oluşan uzun periyotlu dalgaları ifade eder. Açık denizlerde periyodu 5-60 dakika, dalga boyu $30 \leq L \leq 800$ km ve yüksekliği 1-100 cm civarındadır. Dalga boyu suyun derinliğine göre çok fazla olduğundan, okyanuslarda bile sığ suda ilerliyormuş gibi hareket ederler. Deniz tabanında meydana gelen tektonik olaylara bağlı olarak çok kısa bir zaman dilimi içinde deniz yüzeyinin altüst olması ile denizin eski dengesini koruması için meydana gelen bir seri dalgalanmadır. Tsunamiye Pasifik Okyanusu'nda çok sık, diğer okyanuslar ve denizlerde ise ender olarak rastlanmaktadır. Tsunami dalgasının diğer deniz dalgalarından en önemli farkı su ortamının sürüklenmesi, yani akıntılarla ilerlemesidir. Tsunami ilk oluştuğunda tek bir dalgadır. Ancak kısa bir zaman içinde üç ya da beş dalgaya dönüşür. Bu dalgalardan birincisi ve sonuncusu çok zayıf iken, diğer dalgalar kıyıya yaklaştıklarında etkilerini çok şiddetli bir şekilde hissettirebilecek enerjiyle ilerler [7].

Gel-Git Dalgası: Gel-git dalgaları ile ilgili olarak literatürdeki ilk çalışmalara bakıldığında, Galileo'nun 1632'de "Gelgit Üzerine Diyalog" (Dialogue Concerning the Two Chief World Systems-Dialogue on the Tides) adlı kitabında gelgit için "Denizdeki suların, Dünya'nın Güneş etrafında dönmesi sonucu savrulmasıdır." diyerek yanlışlığa düştüğü görülmektedir [8]. Fakat 1686'da Newton "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica" adlı eserinde gel-gitin kütle çekim kuvveti sonucu oluştuğunu açıklamıştır [9]. Gel-git dalgaları ayın dünya etrafında dönmesi sonucu yerçekimi ve merkezkaç etkileri ile meydana gelir. 12 ve 24 saatten biraz daha uzun periyotlara sahiptirler. Gel-git dalgalarının boyu, su derinliğinden çok daha uzundur. Kuzey denizinde su derinliğinin 100 m olduğu yerde dalga boyunun 1000 km olduğu tespit edilmiştir ($T = 12$ saat). Günümüzde su yüksekliği, akıntılar, ve gel-gitin oluşacağı zaman hesaplanabilmektedir [1]. Ayrıca her yıl 18 Ağustos günü binlerce insan, yüksekliği 10 m'yi bulan dünyanın en büyük gel-git dalgalarını gözlemlemek üzere Çin'in doğusundaki Kiantang nehri kıyılarına akın etmektedir.

Fırtına Kabarması (Storm Surge): Fırtına kabarması, deniz yüzeyinin fırtına veya kasırga gibi alçak basınç sistemi nedeniyle kabarması sonucu oluşur. Rüzgar olmaksızın alçak basınç etkisiyle de oluşabilirler. Ayrıca, su derinliği de fırtına dalgalarının oluşmasında etkilidir. Kıyı kesimindeki sığ sularda etkisini daha fazla gösterir.

1.2.2.2 Dalgaların Göreceli Derinliğe Göre Sınıflandırılması

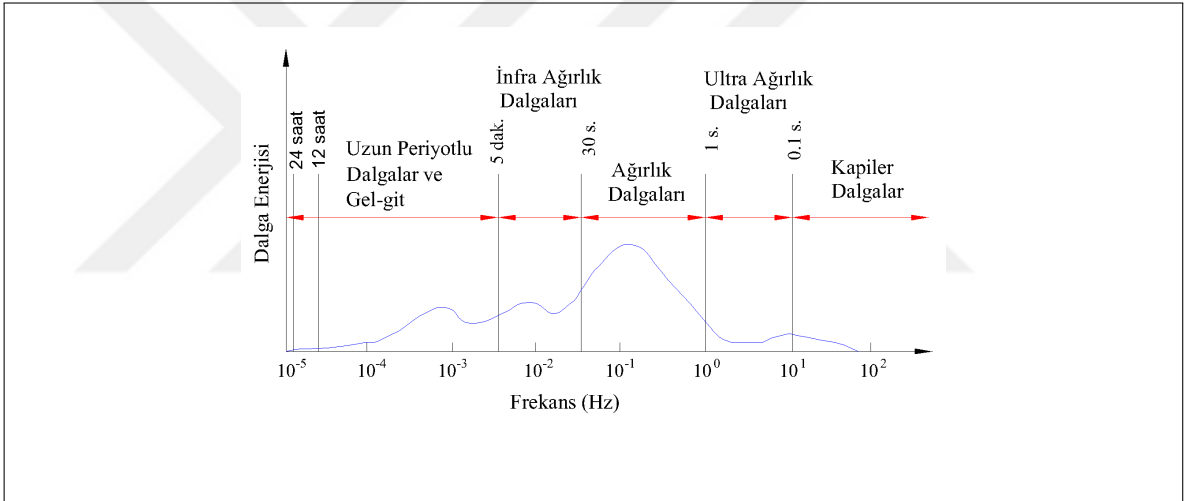
d/L oranı göreceli derinlik olarak adlandırılmaktadır. Derin su ve sığ su sınır şartları ile ilgili farklı görüşler vardır. Matematikçiler daha çok hesapların doğruluğunu dikkate aldıklarından derin su ve sığ su arasında kalan geçiş derinliği aralığını daha geniş alırken, mühendisler hesaplama süresini kısaltan, karmaşıklığı azaltan ve pratik olan daha dar geçiş derinliği sınırlarını kullanırlar. Bu nedenle bazı kaynaklarda derin su sınır şartı ($1/25$) olarak görülebilir.

Tablo 1.2 Göreceli derinliğe göre dalgalar [1]

Göreceli Derinlik	Dalga Tipi
$d/L < 1/20$	Sığ su dalgası
$1/20 < d/L < 1/2$	Geçiş derinliği dalgası
$1/2 < d/L$	Derin su dalgası
$L > 20d$	Uzun dalga
$L < 20d$	Kısa dalga

1.2.2.3 Dalgaların Frekanslarına (Periyotlarına) Göre Sınıflandırılması

Dalgalar periyotlarına göre de Şekil 1.2’de görüldüğü gibi sınıflandırılmaktadır [10]. Yüzeysel gerilme etkisiyle oluşan ve vizkoz etkiler ile çabuk sönümlenen en küçük dalgalar kapiler dalgalar veya dalgacıklar olarak adlandırılır. Bu dalgaların periyotları yaklaşık olarak 0.1 sn ve boyları 1.7 cm’den daha küçüktür. Rüzgar etkisiyle meydana gelen ultra ağırlık ve ağırlık dalgalarının periyotları 1 sn ile 30 sn arasında, boyları da 1 m ile 600 m arasında değişir. İnfra ağırlık dalgaları ise uzun periyotlu ağırlık dalgalarıdır. En uzun periyotlu dalgalar gel-git dalgalarıdır, periyotları 12 ile 24 saattir. Yerçekimi kuvvetine karşı rüzgar etkisiyle üretilen ve şeklin orta kısmında yer alan ağırlık veya rüzgar dalgalarının periyodu 1 sn ile 30 sn arasında değişiklik göstermektedir. Bu dalgaların yükseklikleri genellikle 1m olup, nadiren 10 m’nin üzerine çıktığı bilinmektedir [10].



Şekil 1.2 Dalgaların frekanslarına göre sınıflandırılması [1]

1.2.2.4 Dalgaların Dikliklerine Göre Sınıflandırılması

Dalga yüksekliğinin dalga boyuna oranına göre dalgalar iki sınıfa ayrılır.

Küçük Genlikli Dalgalar: H/L oranının sifira yaklaştığı yani sonsuz derecede küçük olduğu dalgalar küçük genlikli dalgalardır. Küçük genlikli dalga teorisinin $H/L < 1/20$ şartı için genellikle doğru sonuç verdiği söylenebilir. Küçük genlikli dalgalar matematiksel olarak tanımlanırken sınır şartlarındaki ikinci veya daha yüksek mertebeden olan ifadeler ihmal edilerek sınır şartları lineerleştirilmektedir.

Sonlu Genlikli (Lineer Olmayan) Dalgalar: H/L oranı sonsuz derecede küçük olmayan dalgalardır. Gerçek dalga profili, bir sinüs eğrisine göre daha sivri bir dalga tepesine; ancak

daha yayvan bir dalga çukuruna sahiptir. Bu nedenle H/L oranının büyük olduğu zamanlar için gerçeğe daha yakın sonuçlar elde etmek amacı ile lineer olmayan dalga teorileri geliştirilmiştir.

1.2.2.5 Dalgaların Yükseklik, Boy ve Derinliğe Göre Sınıflandırılması

Periyodik dalgalar genellikle H , L ve d parametrelerine bağlı olarak elde edilen Ursell (Stokes) parametresine göre karakterize edilmektedir. Ursell parametresi

$$U = \left(\frac{L}{d}\right)^2 \left(\frac{H}{d}\right) = \frac{HL^2}{d^3} \quad (1.2)$$

ile verilmektedir. Sığ sulardaki uzun ve yüksek dalgalar büyük Ursell parametresine sahip olup, lineer olmayan dalga teorileri ile ifade edilmektedirler [1].

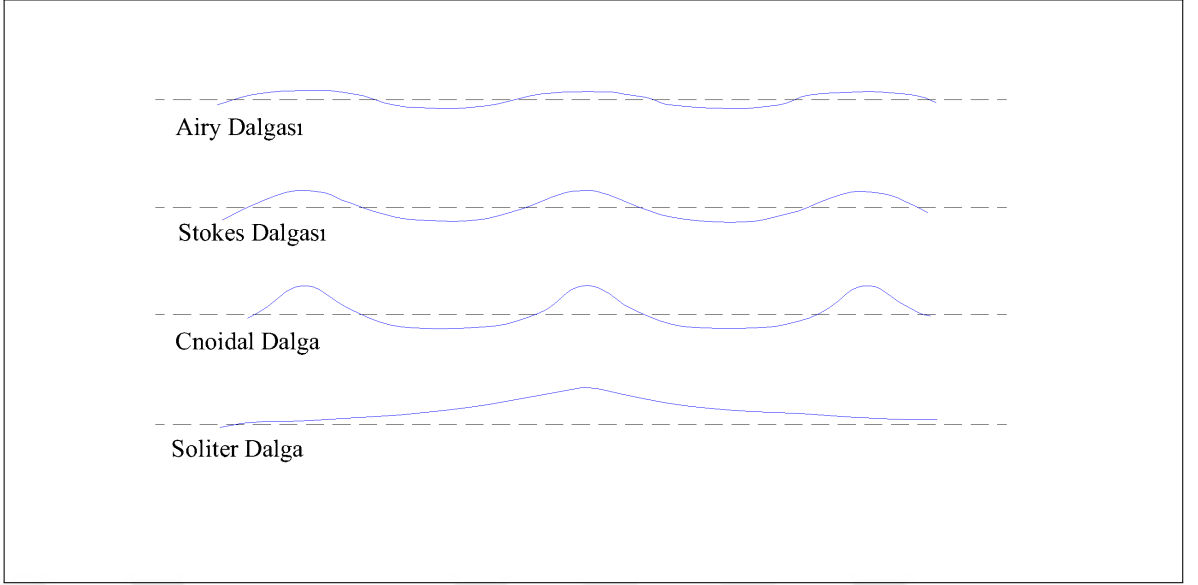
1.3 Dalga Teorileri

Günümüzde de önemli bir araştırma konusu olan periyodik dalgaların matematiksel olarak ifade edilmeleri oldukça zordur. Matematiksel olarak lineer formda ifade edilen dalgalar literatürde lineer dalga veya Airy dalgası olarak isimlendirilmektedir. Lineer dalgalar incelendiğinde dalga yüksekliğinin, dalga boyu ve su derinliğine göre oldukça küçük kaldığı tespit edilmiştir. Lineer dalga teorisi, uygulanabilirlik açısından çok basit olmasının yanı sıra birçok probleme çok iyi çözüm getirmektedir. Lineer dalga teorisi sadece küçük genlikli dalgalara uygulanabilmektedir. Bu teorinin en önemli avantajı, süperpoze edilebilme olanağını sağlamasıdır. Büyük genlikli dalgalarda görülen dalga tepesi ve çukuru arasındaki asimetri ve kütle taşınımı ise lineer dalga teorisi ile açıklanamadığından, lineer olmayan teorilerin kullanılmasını gerektirmektedir. Bazı lineer olmayan dalga tipleri Şekil 1.3'de gösterilmiştir. Lineer ve lineer olmayan dalga teorilerinin geçerlilik sınırları H/d ve d/L 'ye bağlı olarak verilmiştir [11].

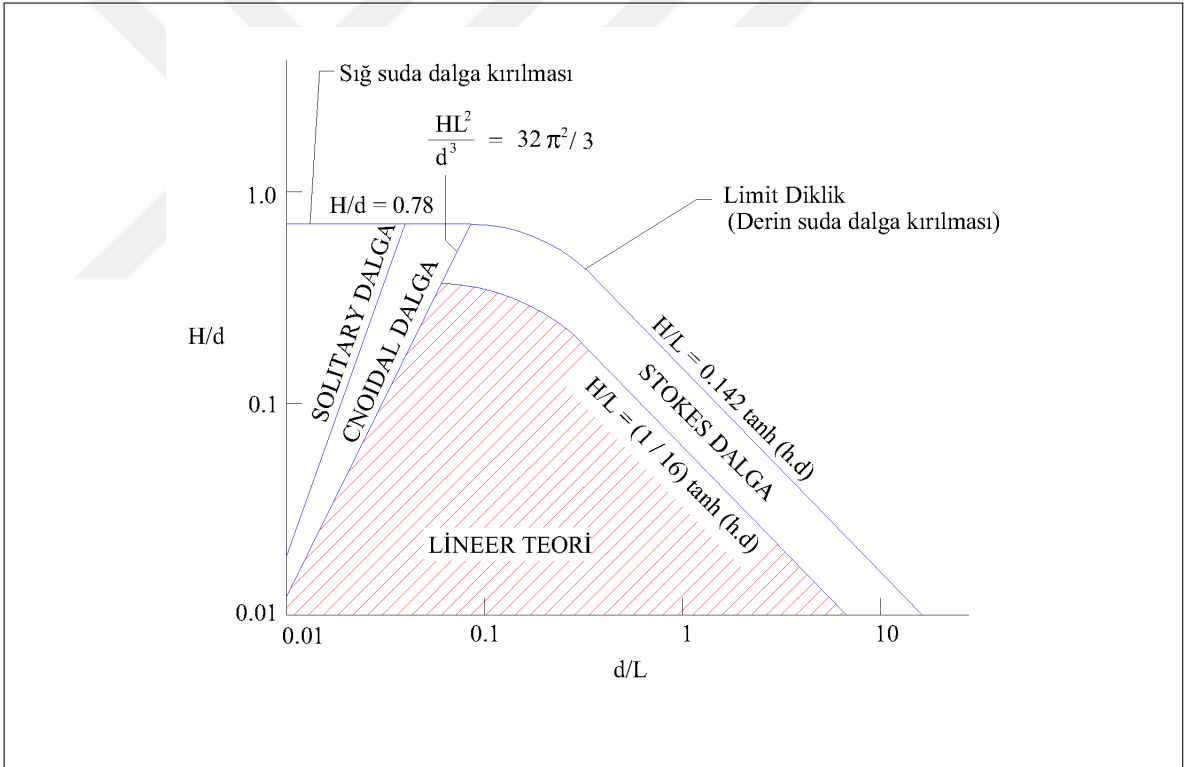
1.3.1 Solitary Dalga Teorisine Fiziksel Bakış

Solitary dalgalar sonlu genliğe sahip ve sabit hız ve şekil ile ilerleyen lineer olmayan dalgalardır. Solitonlar ise çarpıştıktan sonra hızını ve şeklini koruyan solitary dalgalarıdır.

İskoçyalı gemi inşaatı mühendisi olan J. S. Russell, daha hızlı ve verimli çalışan kanal tekneleri dizayn etmek için Union Kanal Şirketi adına deneyler yürütürken, 1834 yılında Ed-

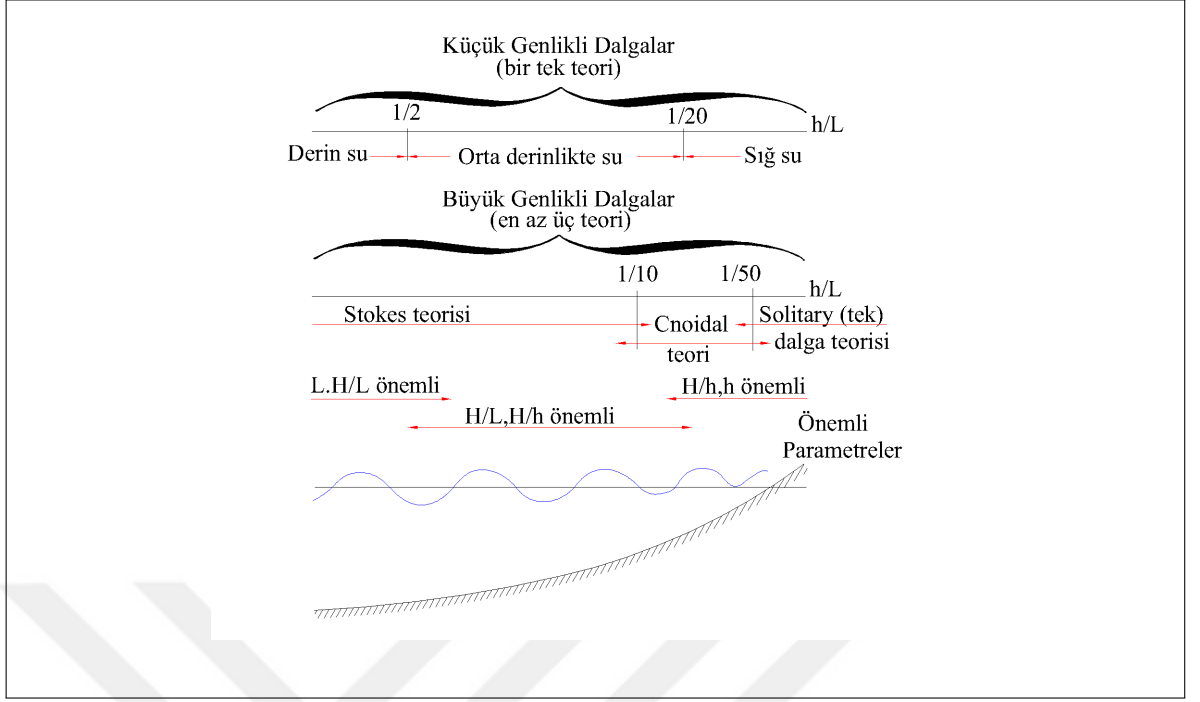


Şekil 1.3 Bazı lineer ve lineer olmayan dalga tipleri [1]



Şekil 1.4 Dalga teorilerinin geçerlilik sınırları [1]

inburgh'taki Heriot-Watt Üniversitesi'nin Riccarton kampüsüne çok yakın Hermiston'daki Union Kanalı'nda yaptığı bu deneylerden biri sırasında modern soliton çalışmalarına ışık tutan solitary dalgasının ilk gözlemini yapmış ve bu doğa olayını kendi sözleri ile 1844 yılında "Report on Waves" adlı eserinde şu şekilde ifade etmiştir [12]: "İki çift at tarafından dar bir kanal boyunca hızla çekilen bir botun hareketini gözlemliyordum. Bot aniden durduğunda, botun hareketini sağlayan kanaldaki su kütlesi durmayarak şiddetli bir çalka-



Şekil 1.5 Dalga teorilerinin geçerli olduğu durumlar [1]

lanma şeklinde botun uç kısmı etrafında toplandı ve aniden botu arkasında bırakarak, büyük bir hızla harekete geçti. Büyük bir solitary dalga yüksekliğine sahip olarak düşündüğüm, dairesel ve düzgün bir su kütlelerinin kanal boyunca şekil veya hızını bozmadan yoluna devam ettiğini gördüm. At üzerinde takip ettiğimde yaklaşık 30 feet mesafe sonunda, bu dalga formu ilk baştaki orijinal şeklinde ve yarı yüksekliğinde, 8 veya 9 mil/saat hızla ilerlerlemeye devam ediyordu. Daha sonra yüksekliği kademeli olarak azaldı ve yaklaşık 1 veya 2 mil takip sonunda, kanalın kenarlarında kayboldu. İşte 1834 yılının Ağustos ayı, ilk kez solitary (ötelenme) dalgası olarak adlandırdığım bu ilginç ve güzel olayı gözleme şansını bulduğum zamandı.”

Solitary dalga etkisi ile ilgili bu gözlemin önemi bugün optoelektronik ve telekomünikasyon alanlarında dikkat çekmesine rağmen, Russell gözlemlerini gemi gövdelerinin yeniden inşa edilmesinde uygulamıştır. Yıllarca dünyanın en büyük buharlı gemisi olma özelliğini koruyan Isambard Kingdom Brunel tarafından dizayn edilen Great Eastern gemisini inşa etmiştir [13].

J. S. Russell bu keşfini takip eden onlarca yıl boyunca, sabit şekil ve hız ile hareket eden bağımsız dinamiklerin (solitary dalgaların) varlığını kanıtlamak için laboratuvarında oluşturduğu su tanklarında ve kanallarda çalışmaya devam etmiştir. Su tanklarının bir ucuna ağırlık bırakarak solitary (ötelenme) dalgaları elde edebilmek için deneyler yapmış ve solitary dal-

galarının özellikleri ile ilgili şu dört gerçeği kanıtlamıştır [12]:

- (i) Solitary dalgaları $h \operatorname{sech}^2 [k(x - vt)]$ şekline sahiptir.
- (ii) Yeterince büyük miktardaki başlangıç su kütlesi, iki veya daha fazla bağımsız solitary dalga üretir.
- (iii) Normal dalgaların aksine solitary dalgalar asla birleşmezler. Küçük genlikli bir solitary dalga ile büyük genlikli bir solitary dalga çarpıştıktan sonra birbirinden ayrılarak şekillerinde herhangi bir bozulma olmaksızın yollarına devam edebilir. Aynı şartlar altında, normal dalgalar çarpıştıktan sonra ya düzleşme ya da dikleşerek sönme eğilimi göstererek hareket ederler. Solitary dalgalar kararlı bir şekilde uzun mesafeler boyunca ilerleyebilirler.
- (iv) g yerçekimi ivmesi olmak üzere, d derinliğindeki bir kanalda hareket eden h yüksekliğine sahip bir solitary dalgasının hızı

$$v = \sqrt{g(d + h)} \quad (1.3)$$

ile ifade edilir. Diğer bir ifade ile dalganın hızı, yüksekliğine ve suyun derinliğine bağlıdır.

Bir solitary dalganın hızı, genliği ile orantılıdır. Dolayısıyla büyük genliğe sahip bir solitary dalga, küçük genliğe sahip bir solitary dalgadan daha hızlı hareket edecektir. Burada solitary dalga ile normal dalga arasındaki fark tekrar ön plana çıkmaktadır. Şöyle ki, biri alçak biri yüksek tonda iki ses oluştuğunda kulak her iki sesi aynı anda algılayacaktır. Eğer bu iletim sırasında solitary dalgalar kullanılsaydı yükses sesin daha önce algılanması gerekirdi [14].

19. yüzyılın sonuna kadar J. S. Russell'in çalışmaları deneysel olarak kaldı. Solitary dalga problemi bir denklemin çözümü şeklinde elde edilemedi. Bu problem yıllarca araştırmalara konu oldu. 1895 yılında Hollandalı fizikçi Diederick Korteweg ve doktora öğrencisi Gustav de Vries bugün kendi isimleri ile anılan ve

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + c \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \epsilon \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} + \mu u(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (1.4)$$

formunda sığ su dalgalarının hareketini modelleyen bir diferansiyel denklem üzerinde çalışmaya başladılar. Bu denklemde

- $u(x, t)$ dalganın genliğine,
- $c = \sqrt{gd}$ küçük genlikli dalganın hızına,
- $\varepsilon = c \left(\frac{d^2}{6} - \frac{T}{2\rho g} \right)$ dağılma parametresine,
- $\mu = \frac{3c}{2d}$ lineer olmayan parametreye,
- T yüzey gerilimine,
- ρ suyun yoğunluğuna,

karşılık gelmektedir. Ayrıca (1.4) denkleminin tam çözümü

$$u(x, t) = h \operatorname{sech}^2(x - ct) \quad (1.5)$$

olarak elde edilmiştir [15].

Bu çalışma ile D. J. Korteweg ve G. de Vries, (1.4) denkleminin J. S. Russell'in deneylerini açıkladığını savundular. J. S. Russell'in tanımladığı dalgalara benzeyen solitary dalga çözümlerine ilave olarak periyodik çözümleri buldular ve bu çalışmalarını de Vries'in doktora tezinde yayınladılar [15]. Fakat onların bu çalışmaları ve J. S. Russell'in gözlemleri, 20. yüzyılın ortalarına kadar su dalgaları üzerinde çalışan matematikçiler, fizikçiler ve mühendisler tarafından göz ardı edildi. 1965 yılında Norman Julius Zabusky ve Martin David Kruskal, sonlu farklar yöntemi ile KdV denkleminin sayısal çözümlerini incelerken, çarpışma sonrasında solitary dalgaların şekillerinin değişmediğini gözlemleyerek bu tip dalgalara *soliton* adını verdiler [16]. Soliton teorisi için kilometre taşı niteliğinde olan bu çalışmanın ardından, 1967 yılında ters saçılma dönüşüm metodu ile KdV denkleminin soliton çözümleri analitik olarak elde edilmiştir [17].

Sayısal ve analitik olarak KdV denkleminin soliton çözümleri elde edildikten sonra bu alandaki çalışmalar hız kazandı. Solitary dalga olarak ilk kez bir su kanalında gözlenen solitonlar, günümüzde akışkanlar mekaniği, temel parçacıklar fiziği, lazer fiziği, biyofizik, biyoloji ve fiber optik alanlarında yaygın olarak kullanılmaktadır [18].

Solitonlar yapısı bozulmadan uzun mesafeler boyunca hareket ettiğinden, teorik olarak fiber optikte normal dalga yerine solitonlar alınarak taşınan sinyallerde herhangi bir kayıp olmaksızın bilgiler çok uzun mesafeler boyunca taşınabilecektir.

2006 yılında Harvard Üniversitesi, Elektrik Elektronik Mühendisliği Bölümü Öğretim Üyesi Donhee Ham ile doktora öğrencileri David Ricketts ve Xiaofen Li tarafından elektronik bir aygıt sayesinde solitonlar elde edilmiştir [19].

2013 yılında Tsukuba Üniversitesi, Çevre Bilimleri Bölümü Öğretim Üyesi Hidekazu Kuwayama tarafından hücrelerde soliton hareketleri gözlemlenmiştir. *Doğal amoeba*'lardan üretilen *mutant amoeba*'ların doğal olanlara göre açlık halinde çoklu hücresel yapıya soliton yapı göstererek kavuştukları ve şekillerini değiştirmeden sabit bir hızla hareket ettikleri tespit edilmiştir [20]. Mutant amoeba'ları ilginç kılan ise benzer hareket gösteren başka bir grupla karşılaştıklarında yapıları bozulmadan hareketlerine devam ediyor olmasıydı.

Son olarak, 2016 yılında Sydney Üniversitesi'nde Andrea Blanco-Redondo'nun liderliğini yaptığı fizikçilerden oluşan bir grup araştırmacı tarafından optik solitonların hassas lazer cerrahisi, görüntüleme cihazları ve iletişim teknolojileri gibi birçok alanda gelecekteki uygulamalara kapı açan ve "saf-kuartik solitonlar" olarak adlandırılan yeni bir sınıfı keşfedilmiştir [21]. Bu tip solitonların en önemli özelliği literatürde yer alan diğer solitonlardan güçlü ve farklı bir şekle sahip olmasıydı.

1.4 Sonlu Elemanlar Yöntemi

Sonlu elemanlar yönteminin bulunuşu ile ilgili net bir tarih vermek çok zor olmakla birlikte modern sonlu elemanlar yönteminin izleri 20. yüzyılın başlarına kadar sürülebilir. Yöntem, inşaat mühendisliği ve havacılık alanlarında karmaşık elastikiyet ve yapısal analiz problemlerini çözme gereksinimi ile ortaya çıkmıştır. 1940'lı yıllarda bu alandaki ilk çalışmalar, Alexander Hrennikoff [22] ve Richard Courant [23] tarafından gerçekleştirilmiştir. Bu çalışmaların ardından 1950'lerde Boeing Şirketi'nin yapısal analiz probleminin çözümü ile ilgili talebi üzerine Harold Clifford Martin ve arkadaşları uçak kanatlarını modellemek için üçgen gerilim elemanlarını kullanarak bugün sonlu elemanlar yöntemi olarak bilinen analiz tekniğine önemli katkıda bulunmuşlardır [24]. 1960 yılında ise Ray William Clough'un düzlemdeki gerilme analizi ile ilgili makalesinde ilk kez "sonlu eleman" terimi kullanılmıştır [25]. 1973 yılında Gilbert Strang ve George J. Fix tarafından sonlu elemanlar yöntemine kesin bir matematiksel temel oluşturulmuştur [26]. Bilgisayarların gelişmesi ve bu konuda çalışanların sayısının artmasıyla, yöntem sürekli geliştirilmiştir. Günümüzde sonlu elemanlar yöntemi neredeyse mühendisliğin tüm alanlarında kullanılmaktadır.

1.4.1 Sonlu Elemanlar Yönteminin Uygulanışı

Sonlu elemanlar yöntemi, kısmi diferansiyel denklemlerle açıklanan problemleri çözmek için kullanılan sayısal bir yöntemdir. Bu yöntemde, problemin çözüm bölgesi bağlantılı, küçük ve sonlu alt bölgelere ayrılır. Bu alt bölgelere “sonlu eleman (finite element)” denir. Bağlantı noktalarına “düğüm (node)” ya da “düğüm noktaları (nodal points)” denir. Problemin çözüm bölgesi düğüm noktaları yardımı ile sonlu elemanların birleşimi olarak ifade edilir. Sonlu elemanlardaki yaklaşım fonksiyonları, araştırılan fiziksel bölgenin düğüm noktaları cinsinden belirlenir. Bu durumda sürekli bir fiziksel problem, düğüm noktaları yardımı ile ayrıklaştırılmış bir sonlu eleman problemine dönüşür. Bu lineer problemin çözülebilmesi için oluşan lineer denklem sisteminin çözülmesi gerekir.

Sonlu elemanlar yöntemi uygulanırken izlenmesi gereken temel adımlar aşağıda verilmiştir [27].

1. **Problemin Çözüm Bölgesinin Ayrıklaştırılması.** İlk adım olarak, çözüm bölgesi sonlu elemanlara bölünür. Elemanlar ve düğüm noktaları numaralandırılır. Bir program yardımıyla sonlu eleman ağı oluşturulur.
2. **İnterpolasyon Fonksiyonunun Seçimi.** Eleman üzerindeki değişkenleri interpolate etmek için interpolasyon fonksiyonları kullanılır. Genellikle, interpolasyon fonksiyonu olarak polinomlar seçilir. Polinomun derecesi elemana atanan düğüm sayısına bağlıdır.
3. **Eleman Özelliklerinin Bulunması.** Bilinmeyen fonksiyonların düğüm değerlerini diğer parametrelere bağlayan sonlu eleman için matris denklemi oluşturulur. Bunun için farklı yaklaşımlar kullanılabilir. Bu yaklaşımlar için kullanılan en yaygın yöntemler: Kollokasyon, Galerkin, Petrov-Galerkin ve Subdomain yöntemleridir.
4. **Eleman Denklemlerinin Birleştirilmesi.** Tüm çözüm bölgesi için global denklem sistemini elde etmek için tüm eleman denklemlerinin birleştirilmesi gerekir. Başka bir deyişle, ayrıklaştırma işleminde kullanılan tüm elemanlar için lokal eleman denklemleri birleştirilmelidir. Birleştirme işlemi için eleman bağlantıları kullanılır. Çözümünden önce, sınır şartları uygulanır.
5. **Global Denklem Sisteminin Çözümü.** Sonlu eleman global denklem sistemi ayrık, simetrik ve pozitif tanımlıdır. Çözüm için direkt veya iteratif yöntemler kullanılabilir. Çözümün bir sonucu olarak, araştırılan fonksiyonun düğüm değerleri elde edilir.

6. Sonuçların Değerlendirilmesi. İlave parametreler hesaplandıktan sonra sonuçlar grafik veya tablo şeklinde verilir.

Sonlu elemanlar yöntemi, herhangi bir diferansiyel denkleme aşağıdaki gibi uygulanabilir. Sonlu elemanlar yönteminde bir denklemin tam çözümü, her bir sonlu eleman üzerinde kendisi ve belirli bir mertebeye kadar türevleri sürekli olan interpolasyon polinomları ve bilinmeyenlerin kombinasyonu olarak ifade edilir.

Sonlu elemanlar yönteminin integral formları, varyasyonel yöntemler ve ağırlıklı kalan yöntemleri olmak üzere iki farklı yoldan elde edilir. Bir diferansiyel denklemin tam çözümü ile yaklaşık çözümü arasındaki farkın sıfırdan farklı bir ağırlık fonksiyonu ile çarpılarak toplamalarının minimum yapılması işlemine ağırlıklı kalan yaklaşımı, bu yaklaşıma dayanan yöntemlere ise ağırlıklı kalan yöntemleri denir. Yöntemi ifade etmek için Ω tanım bölgesinde

$$Lu(x) = f(x) \quad (1.6)$$

şeklinde ifade edilen diferansiyel denklemde, L bir diferansiyel operatör, $f(x)$ bilinen bir fonksiyon ve $u(x)$ denklemin tam çözümü olsun. (1.6) diferansiyel denkleminin sayısal çözümü için ağırlıklı rezidü yöntemi kullanıldığında $u(x)$ tam çözümü yerine

$$u(x) \approx u_N(x) = \sum_{j=1}^N c_j \phi_j(x) \quad (1.7)$$

formundaki bir $u_N(x)$ yaklaşım serisi kullanılır. Burada $j = 1, 2, \dots, N$ olmak üzere, $\phi_j(x)$ interpolasyon polinomları diferansiyel denklemin Ω tanım bölgesinde tanımlı yaklaşım fonksiyonları ve c_j 'ler ise bilinmeyen katsayılardır. Sonlu elemanlar yönteminde, $\phi_j(x)$ fonksiyonları problemin tüm sınır şartlarını sağlayacak şekilde seçilirler fakat genelde diferansiyel denklemini sağlamazlar. (1.6) diferansiyel denkleminde $u(x)$ yerine (1.7) yaklaşımı kullanılırsa,

$$Lu_N(x) - f(x) = L \sum_{j=1}^N c_j \phi_j(x) - f(x) = R(x) \quad (1.8)$$

olarak tanımlanan $R(x)$ rezidü fonksiyonu elde edilir. W_i ağırlık fonksiyonları integrasyonu minimize edecek biçimde tanımlanmış olan özel fonksiyonlar olmak üzere, ağırlık fonksiy-

onu ve $R(x)$ rezidü ifadesinin çarpımları, Ω tanım bölgesi üzerinde integre edilirse

$$\int_{\Omega} W_i(x) R(x) dx = \int_{\Omega} W_i(x) \left(L \sum_{j=1}^N c_j \phi_j(x) - f(x) \right) dx = 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.9)$$

şeklinde N bilinmeyen N denklemden oluşan bir denklem sistemi elde edilir [14]. Bu denklem sistemi çözülerek c_j bilinmeyenleri (1.7) yaklaşım serisinde yerine yazılırsa $u_N(x)$ yaklaşık çözümüne ulaşılır.

Ağırlıklı kalanlar yönteminde, ağırlık fonksiyonunun seçimine göre yöntem farklı isimler alır. Bunlardan bazıları Galerkin, Petrov-Galerkin, kollokasyon ve subdomain yöntemleridir.

1.4.1.1 Galerkin Yöntemi

Galerkin yönteminde (1.9) eşitliğindeki ağırlık fonksiyonu, $W_i = \phi_i$ taban fonksiyonları olarak seçilir.

$[a, b]$ konum aralığı olmak üzere, (1.7) çözümü (1.6) denkleminde yerine yazılarak denklemin her iki tarafı $\phi_i(x)$ ile çarpıldıktan sonra integrali alınır,

$$\int_a^b \phi_i \left(L \sum_{j=1}^N c_j \phi_j(x) - f(x) \right) dx = 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.10)$$

elde edilir.

1.4.1.2 Petrov-Galerkin Yöntemi

Petrov-Galerkin yönteminde (1.9) eşitliğindeki ağırlık fonksiyonu, ϕ_i taban fonksiyonlarından farklı olarak $W_i = \psi_i$ seçilir.

$[a, b]$ konum aralığı olmak üzere, (1.7) çözümü (1.6) denkleminde yerine yazılarak denklemin her iki tarafı $\psi_i(x)$ ile çarpılarak integrali alınır,

$$\int_a^b \psi_i \left(L \sum_{j=1}^N c_j \phi_j(x) - f(x) \right) dx = 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.11)$$

elde edilir.

1.4.1.3 Kollokasyon Yöntemi

Kollokasyon yönteminde (1.9) eşitliğindeki ağırlık fonksiyonu,

$$\delta(x - x_i) = \begin{cases} \infty, & x = x_i \\ 0, & x \neq x_i \end{cases} \quad (1.12)$$

dirac delta fonksiyonu olarak seçilir.

$[a, b]$ konum aralığı olmak üzere, (1.7) çözümü (1.6) denkleminde yerine yazılarak denklemin her iki tarafı $W_i = \delta(x - x_i)$ ile çarpılarak integrali alınır,

$$\int_a^b \delta(x - x_i) \left(L \sum_{j=1}^N c_j \phi_j(x) - f(x) \right) dx = 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.13)$$

elde edilir. (1.8)-(1.13) denklemlerinden ve dirac delta fonksiyonunun özelliğinden dolayı

$$\int_a^b \delta(x - x_i) R(x) dx = R(x_i) = 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.14)$$

olur. Bu durumda x_i düğüm noktalarında kalan sıfır olarak kabul edilir.

1.4.1.4 Subdomain Yöntemi

Subdomain yönteminde (1.9) eşitliğindeki ağırlık fonksiyonu, $W_i = 1$ olarak seçilir.

$[a, b]$ konum aralığı olmak üzere, (1.7) çözümü (1.6) denkleminde yerine yazılarak denklemin integrali alınır,

$$\int_a^b 1 \left(L \sum_{j=1}^N c_j \phi_j(x) - f(x) \right) dx = 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.15)$$

elde edilir.

1.4.2 Sonlu Elemanlar Yönteminin Avantajları ve Dezavantajları

Birçok sayısal yöntemde olduğu gibi sonlu elemanlar yönteminin de diğer yöntemlere göre avantajları ve dezavantajları vardır.

1.4.2.1 Avantajları

- Sonlu elemanlar yöntemi ile düzensiz şekilli yapılar ve karmaşık bölgeler kolayca modellenilebilir.
- Sonlu eleman denklemleri ayrı ayrı oluşturulduğu için farklı malzemelerden oluşan yapıları modellemeye olanak sağlar.
- Farklı sınır koşulları ile uygulamaya olanak sağlar. Sınır koşulları değiştiğinde sonlu eleman modeli değişmez.
- Gerektiğinde sonlu eleman modelini ve büyüklüklerini değiştirmeye olanak sağlar.
- Sistemin temel denklemleri kurulduktan sonra, sınır koşulları oldukça basit satır sütun işlemleri ile denklem sistemine dahil edilebilir.
- Günümüzde sonlu elemanlar yönteminin uygulamaları için kullanılacak çok sayıda yazılım (Fortran, Abaqus, Ansys, Nastran, FreeFEM++, GetFEM++, Autodesk Simulation vb.) mevcuttur.

1.4.2.2 Dezavantajları

- Problemin çözüm bölgesinin alt bölgelere ayrılması işlemi tecrübe gerektirir.
- Bazı problemlerde sınır şartlarının uygulanması sırasında zorluklarla karşılaşılabilir.
- Elde edilen sonucun doğruluğu bilgisayar programına girilen verilere ve yöntemin doğru uygulanışına bağlıdır.
- Diğer yaklaşık yöntemlerde olduğu gibi, sonlu elemanlar yönteminde de çözümün doğruluğu için fiziksel problem incelenerek çıkabilecek sonuçlar önceden kestirilmeli ve elde edilen sonuçlarla karşılaştırılarak yorumlanmalıdır.

1.5 B-Spline Fonksiyonlar

Çok sayıda veri noktasına bir tek eğri ile yaklaşmak çoğu zaman büyük kolaylıklar sağlasa da bazı durumlarda büyük hatalara neden olabilmektedir. Ayrıca, Lagrange ve Newton interpolasyon yöntemlerinde seçilen veri noktalarının sayısı arttıkça, yaklaşım polinomlarının derecelerinin arttığı bilinmektedir. Bu durumda, yapılacak işlemlerin yoğunluğu ve zorluk

derecesindeki artışa bağlı olarak hata yapılması ihtimali de artmaktadır. Bu gibi durumlarla karşılaşmamak için ardışık iki veri noktası arasında birinci, ikinci, üçüncü veya daha yüksek dereceden polinomlar ile yaklaşımın yapıldığı spline interpolasyon yöntemi önerilmektedir. Spline interpolasyonu, tanım aralığını birbirini örtmeyen alt aralıklara bölerek, belirlenen alt aralıklarda daha düşük dereceden yaklaşım polinomu bulunması esasına dayanır [29]. Dolayısıyla spline interpolasyon yaklaşımı, parçalı polinom yaklaşımıdır. 1946 yılında ilk kez *B-spline* terimi *Basis spline* kelime grubunun kısaltması olarak Isaac Jacob Schoenberg tarafından ortaya atılmıştır [30]. 1960'lı yıllara kadar yavaş gelişim gösteren spline fonksiyonlar teorisi gün geçtikçe matematiksel modellere ve fiziksel problemlere uygulanmıştır.

Spline fonksiyonlar,

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b \quad (1.16)$$

sonlu parçalanışının her bir $[x_m, x_{m+1}]$ alt aralığında k . dereceden polinomlar olup, tanımlanan her alt aralıkta $(k - 1)$. mertebeden türevlenebilen sürekli fonksiyonlardır. Parçaların birleştiği noktalar düğüm noktası olarak bilinir. İç kısımdaki düğüm noktalarının sayısı $(k - 1)$ 'e eşit veya daha büyüktür. Spline fonksiyonların en önemli özelliği düğüm noktalarında sürekli olmasıdır.

B-spline fonksiyonların oluşturulacağı noktaların bir kümesi

$$\dots < x_{-2} < x_{-1} < x_0 < x_1 < x_2 < \dots \quad \text{ve} \quad \lim_{i \rightarrow \infty} x_i = \infty, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} x_{-i} = -\infty \quad (1.17)$$

olmak üzere, 0. dereceden B-spline fonksiyonu

$$B_i^0 = \begin{cases} 1, & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (1.18)$$

olarak tanımlanır [31]. B_i^0 , B-spline fonksiyonunun süreksiz olduğu açıkça görülmektedir. Diğer taraftan her sıçrama noktasında

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_i^+} B_i^0(x) &= 1 = B_i^0(x_i) \\ \lim_{x \rightarrow x_{i+1}^+} B_i^0(x) &= 0 = B_i^0(x_{i+1}) \end{aligned} \right\} \text{ her } i \text{ ve } x_i \text{ için} \quad (1.19)$$

olduğundan, $B_i^0(x)$ B-spline fonksiyonu sağdan süreklidir. Bu eşitliklerden $B_i^0(x)$, B-spline fonksiyonunun sadece $[x_i, x_{i+1})$ aralığında değer aldığı açıktır. Yüksek dereceden B-spline fonksiyonlar ise,

$$B_i^k = \frac{x - x_i}{x_{i+k} - x_i} B_i^{k-1}(x) + \frac{x_{i+k+1} - x}{x_{i+k+1} - x_{i+1}} B_{i+1}^{k-1}(x) \quad , \quad k = 1, 2, \dots \quad , \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.20)$$

indirgeme bağıntısı ile hesaplanır [32]. B_i^k , B-spline fonksiyonu aynı veri noktalarında tanımlı ve derecesi k olan spline fonksiyonlar için bazdır. Derecesi k olan B-spline fonksiyonu, $-\infty \leq i \leq \infty$ ve

$$(x - x_{m+i})_+^k = \begin{cases} (x - x_{m+i})^k, & x_{m+i} \leq x \\ 0 & , \quad x_{m+i} > x \end{cases} \quad (1.21)$$

olmak üzere

$$B_i^k(x) = \frac{1}{h^k} \sum_{k=0}^{k+1} \binom{k+1}{m} (-1)^m (x - x_{m+i})_+^k, \quad (1.22)$$

formülü ile elde edilebilir.

Spline fonksiyonların bilinen bazı özellikleri aşağıda verilmiştir:

- Spline fonksiyonlar, düzgün fonksiyonlardır.
- Spline fonksiyonlar, uygun bazlara sahip sonlu lineer uzaylardır.
- Spline fonksiyonların türevleri ve integralleri yine bir spline fonksiyondur.
- Spline fonksiyonların türev ve integralleri kolay alınabilir.
- Spline fonksiyonların elle hesaplanabilmesinin yanı sıra gelişen teknoloji ile birlikte bilgisayar programları yardımı ile de hesaplanması oldukça kolaydır.
- Determinant özellikleri açısından, spline fonksiyonlar kullanıldığında ortaya çıkan matrisler ile kolayca hesaplama yapılabilir.
- Düşük dereceli spline fonksiyonlar, polinomların aksine daha esnekler ve polinomlar gibi keskin salınım sergilemezler.

1.5.1 Linear B-Spline Fonksiyonlar

$[a, b]$ aralığının bir düzgün parçalanması

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b \quad (1.23)$$

ve ϕ_m fonksiyonları x_m düğüm noktasındaki lineer B-spline fonksiyonlardır. Bu yaklaşım fonksiyonları kullanılarak $u(x, t)$ çözümü için

$$u_m(x, t) = \sum_{m=0}^N \phi_m(x) \delta_m(t) \quad (1.24)$$

formundaki $u_m(x, t)$ yaklaşık çözümü araştırılır.

ϕ_m lineer B-spline fonksiyonları $m = 0(1)N$ için $h = x_{m+1} - x_m$ olmak üzere,

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h} \begin{cases} (x_{m+1} - x) - 2(x_m - x), & [x_{m-1}, x_m] \\ (x_{m+1} - x), & [x_m, x_{m+1}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (1.25)$$

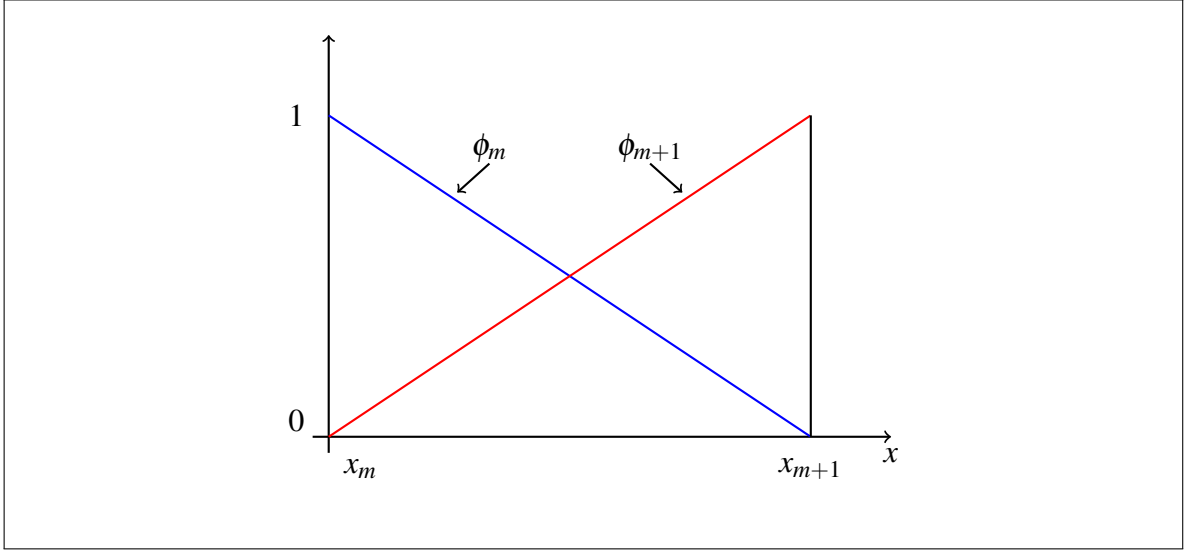
şeklinde parçalı polinom fonksiyonları olarak tanımlanır [33]. Bu durumda $\phi_0(x)$, $\phi_1(x)$, \dots , $\phi_N(x)$ fonksiyonları, $[a, b]$ aralığında tanımlı fonksiyonlar için bir baz teşkil eder. $\phi_m(x)$ lineer B-spline fonksiyonu ve türevleri $[x_{m-1}, x_{m+1}]$ aralığı dışında sıfırdır. Herbir ϕ_m lineer B-spline fonksiyonu $[x_{m-1}, x_{m+1}]$ aralığında ardışık iki elemanı örtmektedir. Şekil 1.6'da görüldüğü gibi, tipik bir $[x_m, x_{m+1}]$ elemanı da ϕ_m ve ϕ_{m+1} gibi iki lineer B-spline fonksiyonu tarafından örtülmektedir. Diğer taraftan tipik bir $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı

$$h\xi = x - x_m, \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (1.26)$$

lokal koordinat dönüşümü ile $[0, 1]$ aralığına dönüştürülerek, lineer B-spline fonksiyonlar ξ cinsinden

$$\begin{aligned} \phi_m(\xi) &= 1 - \xi, \\ \phi_{m+1}(\xi) &= \xi \end{aligned} \quad (1.27)$$

şeklinde yazılabilir [33].



Şekil 1.6 Lineer B-spline fonksiyonlar

1.5.2 Kuadratik B-Spline Fonksiyonlar

$[a, b]$ aralığının bir düzgün parçalanması

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b \quad (1.28)$$

ve ϕ_m fonksiyonları x_m düğüm noktasındaki kuadratik B-spline fonksiyonlardır. Bu yaklaşım fonksiyonları kullanılarak $u(x, t)$ çözümü için

$$u_m(x, t) = \sum_{m=-1}^N \phi_m(x) \delta_m(t) \quad (1.29)$$

formundaki $u_m(x, t)$ yaklaşık çözümü araştırılır.

ϕ_m kuadratik B-spline fonksiyonları $m = -1(1)N$ için $h = x_{m+1} - x_m$ olmak üzere,

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^2} \begin{cases} (x_{m+2} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^2 + 3(x_m - x)^2, & [x_{m-1}, x_m] \\ (x_{m+2} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^2, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+2} - x)^2, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (1.30)$$

şeklinde parçalı polinom fonksiyonları olarak tanımlanır [33]. Bu durumda $\phi_{-1}(x)$, $\phi_0(x)$, \dots , $\phi_N(x)$ fonksiyonları, $[a, b]$ aralığında tanımlı fonksiyonlar için bir baz teşkil eder. $\phi_m(x)$ kuadratik B-spline fonksiyonu ve türevleri $[x_{m-1}, x_{m+2}]$ aralığı dışında sıfırdır. Herbir ϕ_m kuadratik B-spline fonksiyonu $[x_{m-1}, x_{m+2}]$ aralığında ardışık üç elemanı örtmektedir. Şekil

1.7’de görüldüğü gibi, tipik bir $[x_m, x_{m+1}]$ elemanı da ϕ_{m-1} , ϕ_m ve ϕ_{m+1} gibi üç kuadratik B-spline fonksiyonu tarafından örtülmektedir. $\phi_m(x)$ ve birinci mertebeden türevinin düğüm noktalarındaki değerleri Tablo 1.3’de verilmiştir. Diğer taraftan tipik bir $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı

Tablo 1.3 $\phi_m(x)$ ve $\phi'_m(x)$ ’in düğüm noktalarındaki değerleri

x	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}
ϕ_m	0	1	1	0
$h\phi'_m$	0	-2	2	0

$$h\xi = x - x_m, \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (1.31)$$

lokal koordinat dönüşümü ile $[0, 1]$ aralığına dönüştürülerek, kuadratik B-spline fonksiyonlar ξ cinsinden

$$\begin{aligned} \phi_{m-1}(\xi) &= (1 - \xi)^2, \\ \phi_m(\xi) &= 1 + 2\xi - 2\xi^2, \\ \phi_{m+1}(\xi) &= \xi^2 \end{aligned} \quad (1.32)$$

şeklinde yazılabilir [33]. Tipik $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı (1.30) kuadratik B-spline fonksiyonları tarafından örtüldüğünden, bu aralık üzerindeki herhangi bir $u(x, t)$ değeri için x_m noktasındaki yaklaşım fonksiyonu ve x ’e göre birinci türevi δ_m eleman parametreleri cinsinden

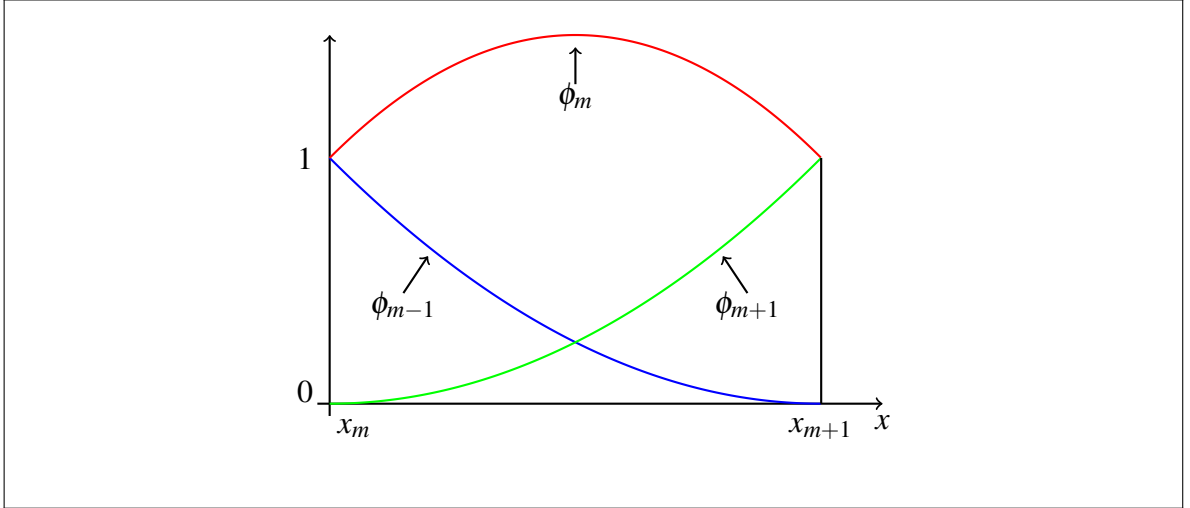
$$u_m(x_m, t) = \sum_{i=m-1}^{m+1} \phi_i(x_m) \delta_i(t) \quad (1.33)$$

eşitliği kullanılarak

$$u_m(x_m, t) = u_m = \delta_{m-1} + \delta_m, \quad (1.34)$$

$$u'_m = \frac{2}{h} (-\delta_{m-1} + \delta_m), \quad (1.35)$$

olarak hesaplanır [33].



Şekil 1.7 Kuadratik B-spline fonksiyonlar

1.5.3 Kübik B-Spline Fonksiyonlar

$[a, b]$ aralığının bir düzgün parçalanması

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b \quad (1.36)$$

ve ϕ_m fonksiyonları x_m düğüm noktasındaki kübik B-spline fonksiyonlardır. Bu yaklaşım fonksiyonları kullanılarak $u(x, t)$ çözümü için

$$u_m(x, t) = \sum_{m=-1}^{N+1} \phi_m(x) \delta_m(t) \quad (1.37)$$

formundaki $u_m(x, t)$ yaklaşık çözümü araştırılır.

ϕ_m kübik B-spline fonksiyonları $m = -1(1)N + 1$ için $h = x_{m+1} - x_m$ olmak üzere,

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (x - x_{m-2})^3, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ h^3 + 3h^2(x - x_{m-1}) + 3h(x - x_{m-1})^2 - 3(x - x_{m-1})^3, & [x_{m-1}, x_m] \\ h^3 + 3h^2(x_{m+1} - x) + 3h(x_{m+1} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^3, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+2} - x)^3, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (1.38)$$

şeklinde parçalı polinom fonksiyonları olarak tanımlanır [33]. Bu durumda $\phi_{-1}(x)$, $\phi_0(x)$, \dots , $\phi_N(x)$, $\phi_{N+1}(x)$ fonksiyonları, $[a, b]$ aralığında tanımlı fonksiyonlar için bir baz teşkil

eder. $\phi_m(x)$ kübik B-spline fonksiyonu ve türevleri $[x_{m-2}, x_{m+2}]$ aralığı dışında sıfırdır. Herbir ϕ_m kübik B-spline fonksiyonu $[x_{m-2}, x_{m+2}]$ aralığında ardışık dört elemanı örtmektedir. Şekil 1.8'de görüldüğü gibi, tipik bir $[x_m, x_{m+1}]$ elemanı da ϕ_{m-1} , ϕ_m , ϕ_{m+1} ve ϕ_{m+2} gibi dört kübik B-spline fonksiyonu tarafından örtülmektedir. $\phi_m(x)$ ve ikinci mertebeye kadar türevlerinin düğüm noktalarındaki değerleri Tablo 1.4'de verilmiştir. Diğer taraftan tipik bir $[x_m, x_{m+1}]$

Tablo 1.4 $\phi_m(x)$, $\phi'_m(x)$ ve $\phi''_m(x)$ 'in düğüm noktalarındaki değerleri

x	x_{m-2}	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}
ϕ_m	0	1	4	1	0
$h\phi'_m$	0	-3	0	3	0
$h^2\phi''_m$	0	6	-12	6	0

aralığı

$$h\xi = x - x_m, \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (1.39)$$

lokal koordinat dönüşümü ile $[0, 1]$ aralığına dönüştürülerek, kübik B-spline fonksiyonlar ξ cinsinden

$$\begin{aligned} \phi_{m-1}(\xi) &= (1 - \xi)^3, \\ \phi_m(\xi) &= 1 + 3(1 - \xi) + 3(1 - \xi)^2 - 3(1 - \xi)^3, \\ \phi_{m+1}(\xi) &= 1 + 3\xi + 3\xi^2 - 3\xi^3, \\ \phi_{m+2}(\xi) &= \xi^3 \end{aligned} \quad (1.40)$$

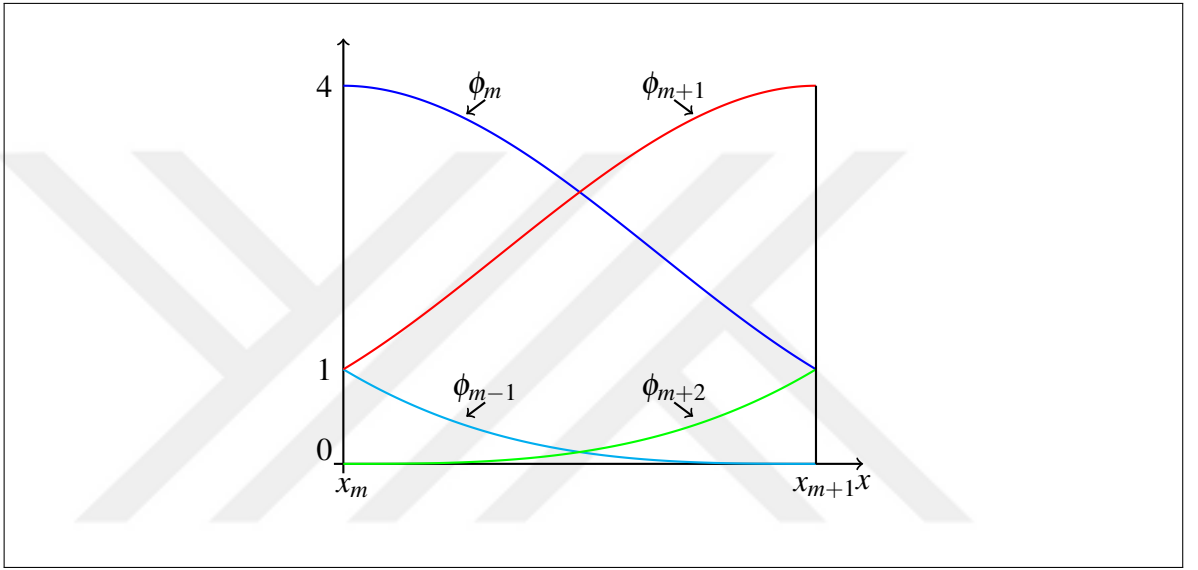
şeklinde yazılabilir [33]. Tipik $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı (1.38) kübik B-spline fonksiyonları tarafından örtüldüğünden, bu aralık üzerindeki herhangi bir $u(x, t)$ değeri için x_m noktasındaki yaklaşım fonksiyonu ve x' e göre ikinci mertebeye kadar türevleri δ_m eleman parametreleri cinsinden

$$u_m(x_m, t) = \sum_{i=m-1}^{m+2} \phi_i(x_m) \delta_i(t) \quad (1.41)$$

eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
 u_m(x_m, t) &= u_m = \delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1}, \\
 u'_m &= \frac{3}{h} (-\delta_{m-1} + \delta_{m+1}), \\
 u''_m &= \frac{6}{h^2} (\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1}),
 \end{aligned} \tag{1.42}$$

olarak hesaplanır [33].



Şekil 1.8 Kübik B-spline fonksiyonlar

1.5.4 Kuartik B-Spline Fonksiyonlar

$[a, b]$ aralığının bir düzgün parçalanması

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b \tag{1.43}$$

ve ϕ_m fonksiyonları x_m düğüm noktasındaki kuartik B-spline fonksiyonlardır. Bu yaklaşım fonksiyonları kullanılarak $u(x, t)$ çözümü için

$$u_m(x, t) = \sum_{m=-2}^{N+1} \phi_m(x) \delta_m(t) \tag{1.44}$$

formundaki $u_m(x, t)$ yaklaşık çözümü araştırılır.

ϕ_m kuartik B-spline fonksiyonları $m = -2(1)N + 1$ için $h = x_{m+1} - x_m$ olmak üzere,

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^4} \begin{cases} (x - x_{m-2})^4, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ (x - x_{m-2})^4 - 5(x - x_{m-1})^4, & [x_{m-1}, x_m] \\ (x - x_{m-2})^4 - 5(x - x_{m-1})^4 + 10(x - x_m)^4, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+3} - x)^4 - 5(x_{m+2} - x)^4, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ (x_{m+3} - x)^4, & [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (1.45)$$

şeklinde parçalı polinom fonksiyonları olarak tanımlanır [33]. Bu durumda $\phi_{-2}(x)$, $\phi_{-1}(x)$, $\phi_0(x)$, \dots , $\phi_N(x)$, $\phi_{N+1}(x)$ fonksiyonları, $[a, b]$ aralığında tanımlı fonksiyonlar için bir baz teşkil eder. $\phi_m(x)$ kuartik B-spline fonksiyonu ve türevleri $[x_{m-2}, x_{m+3}]$ aralığı dışında sıfırdır. Herbir ϕ_m kuartik B-spline fonksiyonu $[x_{m-2}, x_{m+3}]$ aralığında ardışık beş elemanı örtmektedir. Şekil 1.9'de görüldüğü gibi, tipik bir $[x_m, x_{m+1}]$ elemanı da ϕ_{m-2} , ϕ_{m-1} , ϕ_m , ϕ_{m+1} ve ϕ_{m+2} gibi beş kuartik B-spline fonksiyonu tarafından örtülmektedir. $\phi_m(x)$ ve üçüncü mertebeye kadar türevlerinin düğüm noktalarındaki değerleri Tablo 1.5'de verilmiştir. Diğer

Tablo 1.5 $\phi_m(x)$, $\phi'_m(x)$, $\phi''_m(x)$ ve $\phi'''_m(x)$ 'in düğüm noktalarındaki değerleri

x	x_{m-2}	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}	x_{m+3}
ϕ_m	0	1	11	11	1	0
$h\phi'_m$	0	-4	-12	12	4	0
$h^2\phi''_m$	0	12	-12	-12	12	0
$h^3\phi'''_m$	0	-24	72	-72	24	0

tarafından tipik bir $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı

$$h\xi = x - x_m, \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (1.46)$$

lokal koordinat dönüşümü ile $[0, 1]$ aralığına dönüştürülerek, kuartik B-spline fonksiyonlar ξ cinsinden

$$\begin{aligned}
\phi_{m-2}(\xi) &= 1 - 4\xi + 6\xi^2 - 4\xi^3 + \xi^4, \\
\phi_{m-1}(\xi) &= 11 - 12\xi - 6\xi^2 + 12\xi^3 - 4\xi^4, \\
\phi_m(\xi) &= 11 + 12\xi - 6\xi^2 - 12\xi^3 + 6\xi^4, \\
\phi_{m+1}(\xi) &= 1 + 4\xi + 6\xi^2 + 4\xi^3 - 4\xi^4, \\
\phi_{m+2}(\xi) &= \xi^4
\end{aligned} \tag{1.47}$$

şeklinde yazılabilir [33]. Tipik $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı (1.45) kuartik B-spline fonksiyonları tarafından örtüldüğünden, bu aralık üzerindeki herhangi bir $u(x, t)$ değeri için x_m noktasındaki yaklaşım fonksiyonu ve x 'e göre üçüncü mertebeye kadar türevleri δ_m eleman parametreleri cinsinden

$$u_m(x_m, t) = \sum_{i=m-2}^{m+2} \phi_i(x_m) \delta_i(t) \tag{1.48}$$

eşitliği kullanılarak

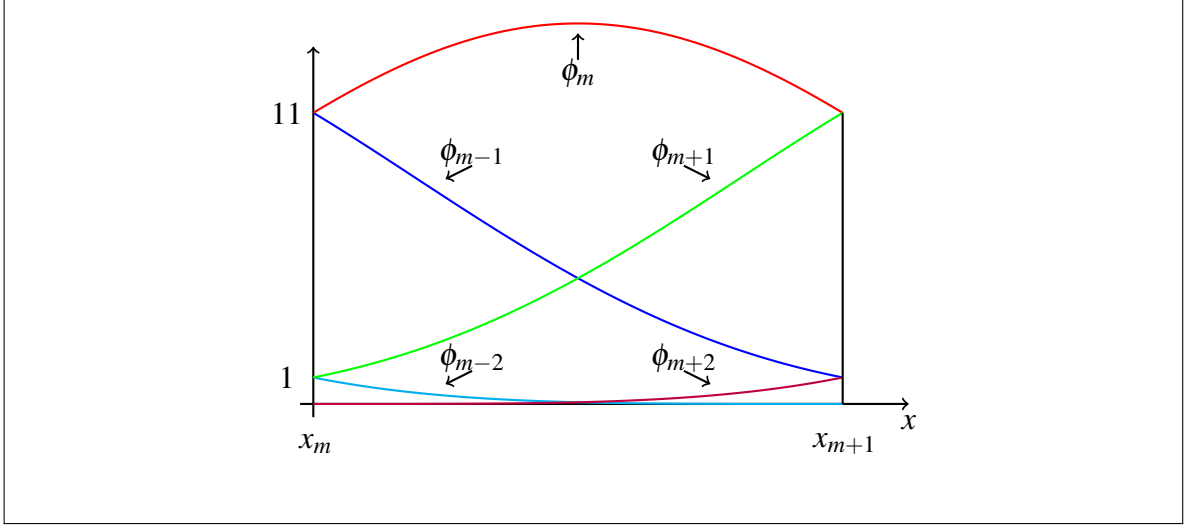
$$\begin{aligned}
u_m(x_m, t) &= u_m = \delta_{m-2} + 11\delta_{m-1} + 11\delta_m + \delta_{m+1}, \\
u'_m &= \frac{4}{h} (-\delta_{m-2} - 3\delta_{m-1} + 3\delta_m + \delta_{m+1}), \\
u''_m &= \frac{12}{h^2} (\delta_{m-2} - \delta_{m-1} - \delta_m + \delta_{m+1}), \\
u'''_m &= \frac{24}{h^3} (-\delta_{m-2} + 3\delta_{m-1} - 3\delta_m + \delta_{m+1}),
\end{aligned} \tag{1.49}$$

olarak hesaplanır [33].

1.5.5 Kuintik B-Spline Fonksiyonlar

$[a, b]$ aralığının bir düzgün parçalanması

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b \tag{1.50}$$



Şekil 1.9 Kuartik B-spline fonksiyonlar

ve ϕ_m fonksiyonları x_m düğüm noktasındaki kuintik B-spline fonksiyonlardır. Bu yaklaşım fonksiyonları kullanılarak $u(x, t)$ çözümü için

$$u_m(x, t) = \sum_{m=-2}^{N+2} \phi_m(x) \delta_m(t) \quad (1.51)$$

formundaki $u_m(x, t)$ yaklaşık çözümü araştırılır.

ϕ_m kuintik B-spline fonksiyonları $m = -2(1)N + 2$ için $h = x_{m+1} - x_m$ olmak üzere,

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^5} \begin{cases} (x - x_{m-3})^5, & [x_{m-3}, x_{m-2}] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5, & [x_{m-1}, x_m] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5 - 20(x - x_m)^5, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5 - 20(x - x_m)^5 + 15(x - x_{m+1})^5, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5 - 20(x - x_m)^5 + 15(x - x_{m+1})^5 - 6(x - x_{m+2})^5, & [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (1.52)$$

şeklinde parçalı polinom fonksiyonları olarak tanımlanır [33]. Bu durumda $\phi_{-2}(x)$, $\phi_{-1}(x)$, $\phi_0(x)$, \dots , $\phi_{N+1}(x)$, $\phi_{N+2}(x)$ fonksiyonları, $[a, b]$ aralığında tanımlı fonksiyonlar için bir baz teşkil eder. $\phi_m(x)$ kuintik B-spline fonksiyonu ve türevleri $[x_{m-3}, x_{m+3}]$ aralığı dışında

sıfırdır. Herbir ϕ_m kuintik B-spline fonksiyonu $[x_{m-3}, x_{m+3}]$ aralığında ardışık altı elemanı örtmektedir. Şekil 1.10'da görüldüğü gibi, tipik bir $[x_m, x_{m+1}]$ elemanı da ϕ_{m-2} , ϕ_{m-1} , ϕ_m , ϕ_{m+1} , ϕ_{m+2} ve ϕ_{m+3} gibi altı kuintik B-spline fonksiyonu tarafından örtülmektedir. $\phi_m(x)$ ve dördüncü mertebeye kadar türevlerinin düğüm noktalarındaki değerleri Tablo 1.6'da verilmiştir. Diğer taraftan tipik bir $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı

Tablo 1.6 $\phi_m(x)$, $\phi_m'(x)$, $\phi_m''(x)$, $\phi_m'''(x)$ ve $\phi_m^{iv}(x)$ 'in düğüm noktalarındaki değerleri

x	x_{m-3}	x_{m-2}	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}	x_{m+3}
ϕ_m	0	1	26	66	26	1	0
$h\phi_m'$	0	-5	-50	0	50	5	0
$h^2\phi_m''$	0	20	40	-120	40	20	0
$h^3\phi_m'''$	0	-60	120	0	-120	60	0
$h^4\phi_m^{iv}$	0	120	-480	720	-480	120	0

$$h\xi = x - x_m, \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (1.53)$$

lokal koordinat dönüşümü ile $[0, 1]$ aralığına dönüştürülerek, kuintik B-spline fonksiyonlar ξ cinsinden

$$\begin{aligned} \phi_{m-2}(\xi) &= 1 - 5\xi + 10\xi^2 - 10\xi^3 + 5\xi^4 - \xi^5, \\ \phi_{m-1}(\xi) &= 26 - 50\xi + 20\xi^2 + 20\xi^3 - 20\xi^4 + 5\xi^5, \\ \phi_m(\xi) &= 66 - 60\xi^2 + 30\xi^4 - 10\xi^5, \\ \phi_{m+1}(\xi) &= 26 + 50\xi + 20\xi^2 - 20\xi^3 - 20\xi^4 + 10\xi^5, \\ \phi_{m+2}(\xi) &= 1 + 5\xi + 10\xi^2 + 10\xi^3 + 5\xi^4 - 5\xi^5, \\ \phi_{m+3}(\xi) &= \xi^5 \end{aligned} \quad (1.54)$$

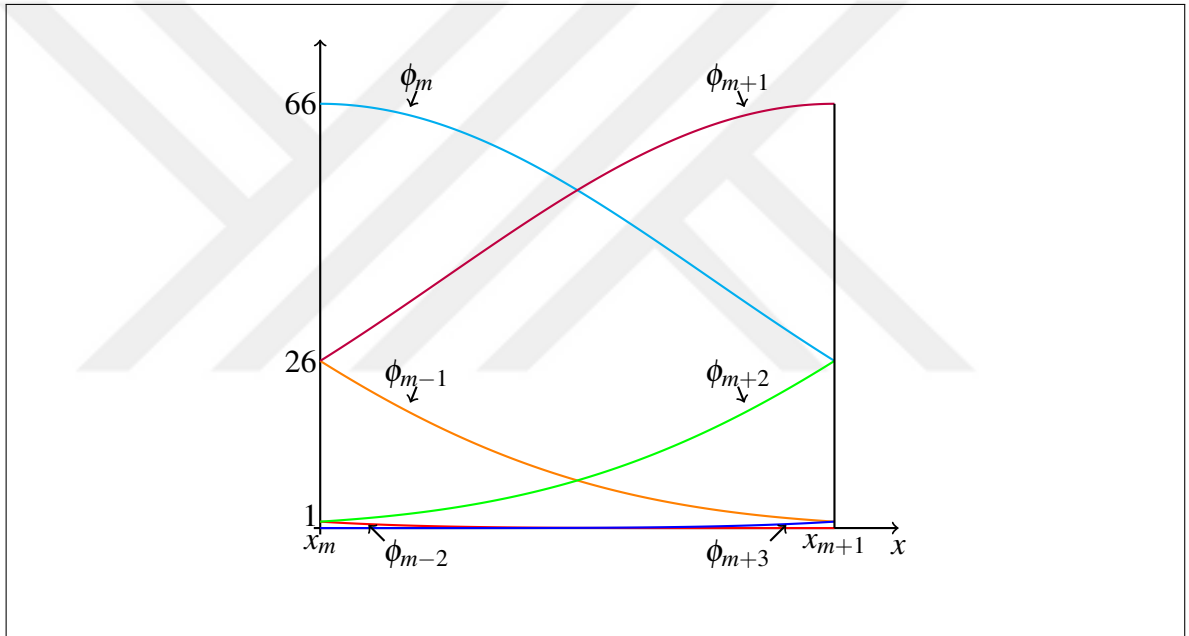
şeklinde yazılabilir [33]. Tipik $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı (1.52) kuintik B-spline fonksiyonları tarafından örtüldüğünden, bu aralık üzerindeki herhangi bir $u(x, t)$ değeri için x_m noktasındaki yaklaşım fonksiyonu ve x 'e göre dördüncü mertebeye kadar türevleri δ_m eleman parametreleri cinsinden

$$u_m(x_m, t) = \sum_{i=m-2}^{m+3} \phi_i(x_m) \delta_i(t) \quad (1.55)$$

eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
 u_m(x_m, t) &= u_m = \delta_{m-2} + 26\delta_{m-1} + 66\delta_m + 26\delta_{m+1} + \delta_{m+2}, \\
 u'_m &= \frac{5}{h} (-\delta_{m-2} - 10\delta_{m-1} + 10\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \\
 u''_m &= \frac{20}{h^2} (\delta_{m-2} + 2\delta_{m-1} - 6\delta_m + 2\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \\
 u'''_m &= \frac{60}{h^3} (-\delta_{m-2} + 2\delta_{m-1} - 2\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \\
 u_m^{iv} &= \frac{120}{h^4} (\delta_{m-2} - 4\delta_{m-1} + 6\delta_m - 4\delta_{m+1} + \delta_{m+2}),
 \end{aligned} \tag{1.56}$$

olarak hesaplanır [33].



Şekil 1.10 Kuintik B-spline fonksiyonlar

1.5.6 Sektik B-Spline Fonksiyonlar

$[a, b]$ aralığının bir düzgün parçalanması

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b \tag{1.57}$$

ve ϕ_m fonksiyonları x_m düğüm noktasındaki sektik B-spline fonksiyonlardır. Bu yaklaşım fonksiyonları kullanılarak $u(x, t)$ çözümü için

$$u_m(x, t) = \sum_{m=-3}^{N+2} \phi_m(x) \delta_m(t) \tag{1.58}$$

formundaki $u_m(x, t)$ yaklaşık çözümü araştırılır.

ϕ_m sektik B-spline fonksiyonları $m = -3(1)N + 2$ için $h = x_{m+1} - x_m$ olmak üzere,

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^6} \begin{cases} (x - x_{m-3})^6, & [x_{m-3}, x_{m-2}] \\ (x - x_{m-3})^6 - 7(x - x_{m-2})^6, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ (x - x_{m-3})^6 - 7(x - x_{m-2})^6 + 21(x - x_{m-1})^6, & [x_{m-1}, x_m] \\ (x - x_{m-3})^6 - 7(x - x_{m-2})^6 + 21(x - x_{m-1})^6 - 35(x - x_m)^6, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x - x_{m+4})^6 - 7(x - x_{m+3})^6 + 21(x - x_{m+2})^6, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ (x - x_{m+4})^6 - 7(x - x_{m+3})^6, & [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ (x - x_{m+4})^6, & [x_{m+3}, x_{m+4}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (1.59)$$

şeklinde parçalı polinom fonksiyonları olarak tanımlanır [33]. Bu durumda $\phi_{-3}(x)$, $\phi_{-2}(x)$, $\phi_{-1}(x)$, $\phi_0(x)$, \dots , $\phi_{N+1}(x)$, $\phi_{N+2}(x)$ fonksiyonları, $[a, b]$ aralığında tanımlı fonksiyonlar için bir baz teşkil eder. $\phi_m(x)$ sektik B-spline fonksiyonu ve türevleri $[x_{m-3}, x_{m+4}]$ aralığı dışında sıfırdır. Herbir ϕ_m sektik B-spline fonksiyonu $[x_{m-3}, x_{m+4}]$ aralığında ardışık yedi elemanı örtmektedir. Şekil 1.11'de görüldüğü gibi, tipik bir $[x_m, x_{m+1}]$ elemanı da ϕ_{m-3} , ϕ_{m-2} , ϕ_{m-1} , ϕ_m , ϕ_{m+1} , ϕ_{m+2} ve ϕ_{m+3} gibi yedi sektik B-spline fonksiyonu tarafından örtülmektedir. $\phi_m(x)$ ve beşinci mertebeye kadar türevlerinin düğüm noktalarındaki değerleri Tablo 1.7'de verilmiştir. Diğer taraftan tipik bir $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı

Tablo 1.7 $\phi_m(x)$, $\phi'_m(x)$, $\phi''_m(x)$, $\phi'''_m(x)$, $\phi^{iv}_m(x)$ ve $\phi^v_m(x)$ 'in düğüm noktalarındaki değerleri

x	x_{m-3}	x_{m-2}	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}	x_{m+3}	x_{m+4}
ϕ_m	0	1	57	302	302	57	1	0
$h\phi'_m$	0	-6	-150	-240	240	150	6	0
$h^2\phi''_m$	0	30	270	-300	-300	270	30	0
$h^3\phi'''_m$	0	-120	-120	960	-960	120	120	0
$h^4\phi^{iv}_m$	0	360	-1080	720	720	-1080	360	0
$h^5\phi^v_m$	0	-720	3600	-7200	7200	-3600	720	0

$$h\xi = x - x_m, \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (1.60)$$

lokal koordinat dönüşümü ile $[0, 1]$ aralığına dönüştürülerek, sektik B-spline fonksiyonlar ξ cinsinden

$$\begin{aligned}
\phi_{m-3}(\xi) &= 1 - 6\xi + 15\xi^2 - 20\xi^3 + 15\xi^4 - 6\xi^5 + \xi^6, \\
\phi_{m-2}(\xi) &= 57 - 150\xi + 135\xi^2 - 20\xi^3 - 45\xi^4 + 30\xi^5 - 6\xi^6, \\
\phi_{m-1}(\xi) &= 302 - 240\xi - 150\xi^2 + 160\xi^3 + 30\xi^4 - 60\xi^5 + 15\xi^6, \\
\phi_m(\xi) &= 302 + 240\xi - 150\xi^2 - 160\xi^3 + 30\xi^4 + 60\xi^5 - 20\xi^6, \\
\phi_{m+1}(\xi) &= 57 + 150\xi + 135\xi^2 + 20\xi^3 - 45\xi^4 - 30\xi^5 + 15\xi^6, \\
\phi_{m+2}(\xi) &= 1 + 6\xi + 15\xi^2 + 20\xi^3 + 15\xi^4 + 6\xi^5 - 6\xi^6, \\
\phi_{m+3}(\xi) &= \xi^6
\end{aligned} \tag{1.61}$$

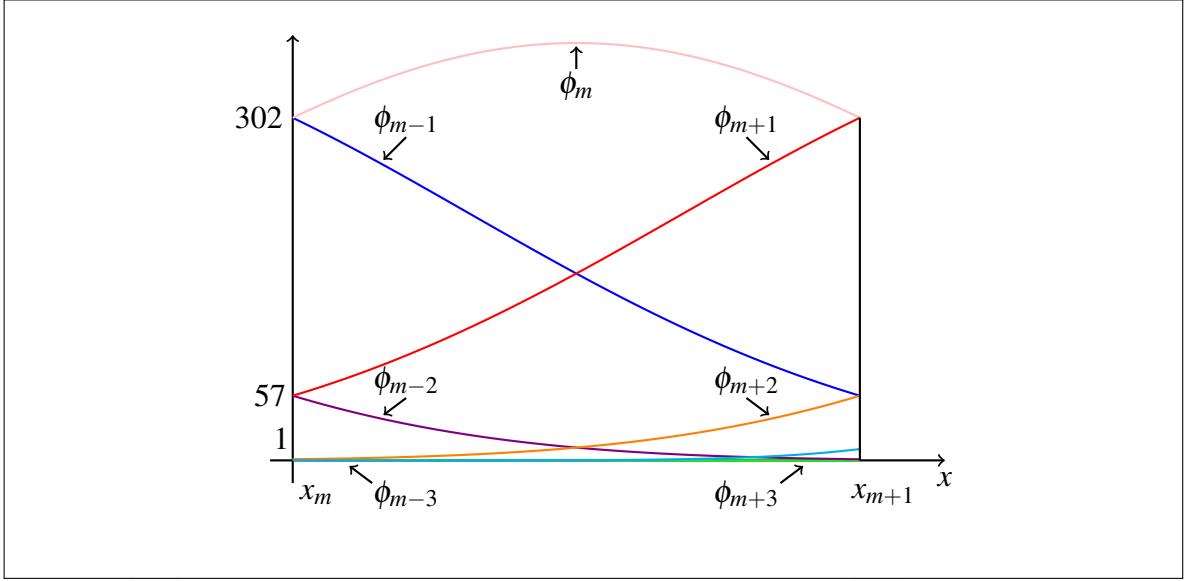
şeklinde yazılabilir [33]. Tipik $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı (1.59) sektik B-spline fonksiyonları tarafından örtüldüğünden, bu aralık üzerindeki herhangi bir $u(x, t)$ değeri için x_m noktasındaki yaklaşım fonksiyonu ve x 'e göre beşinci mertebeye kadar türevleri δ_m eleman parametreleri cinsinden

$$u_m(x_m, t) = \sum_{i=m-3}^{m+3} \phi_i(x_m) \delta_i(t) \tag{1.62}$$

eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
u_m(x_m, t) &= u_m = \delta_{m-3} + 57\delta_{m-2} + 302\delta_{m-1} + 302\delta_m + 57\delta_{m+1} + \delta_{m+2}, \\
u'_m &= \frac{6}{h} (-\delta_{m-3} - 25\delta_{m-2} - 40\delta_{m-1} + 40\delta_m + 25\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \\
u''_m &= \frac{30}{h^2} (\delta_{m-3} + 9\delta_{m-2} - 10\delta_{m-1} - 10\delta_m + 9\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \\
u'''_m &= \frac{120}{h^3} (-\delta_{m-3} - \delta_{m-2} + 8\delta_{m-1} - 8\delta_m + \delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \\
u^{iv}_m &= \frac{360}{h^4} (\delta_{m-3} - 3\delta_{m-2} + 2\delta_{m-1} + 2\delta_m - 3\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \\
u^v_m &= \frac{720}{h^5} (-\delta_{m-3} + 5\delta_{m-2} - 10\delta_{m-1} + 10\delta_m - 5\delta_{m+1} + \delta_{m+2}),
\end{aligned} \tag{1.63}$$

olarak hesaplanır [33].



Şekil 1.11 Sektik B-spline fonksiyonlar

1.5.7 Septik B-Spline Fonksiyonlar

$[a, b]$ aralığının bir düzgün parçalanması

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b \quad (1.64)$$

ve ϕ_m fonksiyonları x_m düğüm noktasındaki septik B-spline fonksiyonlardır. Bu yaklaşım fonksiyonları kullanılarak $u(x, t)$ çözümü için

$$u_m(x, t) = \sum_{m=-3}^{N+3} \phi_m(x) \delta_m(t) \quad (1.65)$$

formundaki $u_m(x, t)$ yaklaşık çözümü araştırılır.

ϕ_m septik B-spline fonksiyonları $m = -3(1)N + 3$ için $h = x_{m+1} - x_m$ olmak üzere,

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^7} \begin{cases} (x - x_{m-4})^7, & [x_{m-4}, x_{m-3}] \\ (x - x_{m-4})^7 - 8(x - x_{m-3})^7, & [x_{m-3}, x_{m-2}] \\ (x - x_{m-4})^7 - 8(x - x_{m-3})^7 + 28(x - x_{m-2})^7, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ (x - x_{m-4})^7 - 8(x - x_{m-3})^7 + 28(x - x_{m-2})^7 \\ - 56(x - x_{m-1})^7, & [x_{m-1}, x_m] \\ (x_{m+4} - x)^7 - 8(x_{m+3} - x)^7 + 28(x_{m+2} - x)^7 \\ - 56(x_{m+1} - x)^7, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+4} - x)^7 - 8(x_{m+3} - x)^7 + 28(x_{m+2} - x)^7, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ (x_{m+4} - x)^7 - 8(x_{m+3} - x)^7, & [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ (x_{m+4} - x)^7, & [x_{m+3}, x_{m+4}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (1.66)$$

şeklinde parçalı polinom fonksiyonları olarak tanımlanır [33]. Bu durumda $\phi_{-3}(x)$, $\phi_{-2}(x)$, $\phi_{-1}(x)$, $\phi_0(x)$, \dots , $\phi_{N+1}(x)$, $\phi_{N+2}(x)$, $\phi_{N+3}(x)$ fonksiyonları, $[a, b]$ aralığında tanımlı fonksiyonlar için bir baz teşkil eder. $\phi_m(x)$ septik B-spline fonksiyonu ve türevleri $[x_{m-4}, x_{m+4}]$ aralığı dışında sıfırdır. Herbir ϕ_m septik B-spline fonksiyonu $[x_{m-4}, x_{m+4}]$ aralığında ardışık sekiz elemanı örtmektedir. Şekil 1.12'de görüldüğü gibi, tipik bir $[x_m, x_{m+1}]$ elemanı da ϕ_{m-3} , ϕ_{m-2} , ϕ_{m-1} , ϕ_m , ϕ_{m+1} , ϕ_{m+2} , ϕ_{m+3} ve ϕ_{m+4} gibi sekiz septik B-spline fonksiyonu tarafından örtülmektedir. $\phi_m(x)$ ve altıncı mertebeye kadar türevlerinin düğüm noktalarındaki değerleri Tablo 1.8'de verilmiştir. Diğer taraftan tipik bir $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı

Tablo 1.8 $\phi_m(x)$, $\phi_m'(x)$, $\phi_m''(x)$, $\phi_m'''(x)$, $\phi_m^{iv}(x)$, $\phi_m^v(x)$ ve $\phi_m^{vi}(x)$ 'in düğüm noktalarındaki değerleri

x	x_{m-4}	x_{m-3}	x_{m-2}	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}	x_{m+3}	x_{m+4}
ϕ_m	0	1	120	1191	2416	1191	120	1	0
$h\phi_m'$	0	-7	-392	-1715	0	1715	392	7	0
$h^2\phi_m''$	0	42	1008	630	-3360	630	1008	42	0
$h^3\phi_m'''$	0	-210	-1680	3990	0	-3990	1680	210	0
$h^4\phi_m^{iv}$	0	840	0	-7560	13440	-7560	0	840	0
$h^5\phi_m^v$	0	-2520	10080	-12600	0	12600	-10080	2520	0
$h^6\phi_m^{vi}$	0	5040	-30240	75600	-100800	75600	-30240	5040	0

$$h\xi = x - x_m, \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (1.67)$$

lokal koordinat dönüşümü ile $[0, 1]$ aralığına dönüştürülerek, septik B-spline fonksiyonlar ξ cinsinden

$$\begin{aligned}
\phi_{m-3}(\xi) &= 1 - 7\xi + 21\xi^2 - 35\xi^3 + 135\xi^4 - 21\xi^5 + 7\xi^6 - \xi^7, \\
\phi_{m-2}(\xi) &= 120 - 392\xi + 504\xi^2 - 280\xi^3 + 84\xi^5 - 42\xi^6 + 7\xi^7, \\
\phi_{m-1}(\xi) &= 1191 - 1715\xi + 315\xi^2 + 665\xi^3 - 315\xi^4 - 105\xi^5 + 105\xi^6 - 21\xi^7, \\
\phi_m(\xi) &= 2416 - 1680\xi^2 + 560\xi^4 - 140\xi^6 + 35\xi^7, \\
\phi_{m+1}(\xi) &= 1191 + 1715\xi + 315\xi^2 - 665\xi^3 - 315\xi^4 + 105\xi^5 + 105\xi^6 - 35\xi^7, \\
\phi_{m+2}(\xi) &= 120 + 392\xi + 504\xi^2 + 280\xi^3 - 84\xi^5 - 42\xi^6 + 21\xi^7, \\
\phi_{m+3}(\xi) &= 1 + 7\xi + 21\xi^2 + 35\xi^3 + 135\xi^4 + 21\xi^5 + 7\xi^6 - 7\xi^7, \\
\phi_{m+4}(\xi) &= \xi^7
\end{aligned} \tag{1.68}$$

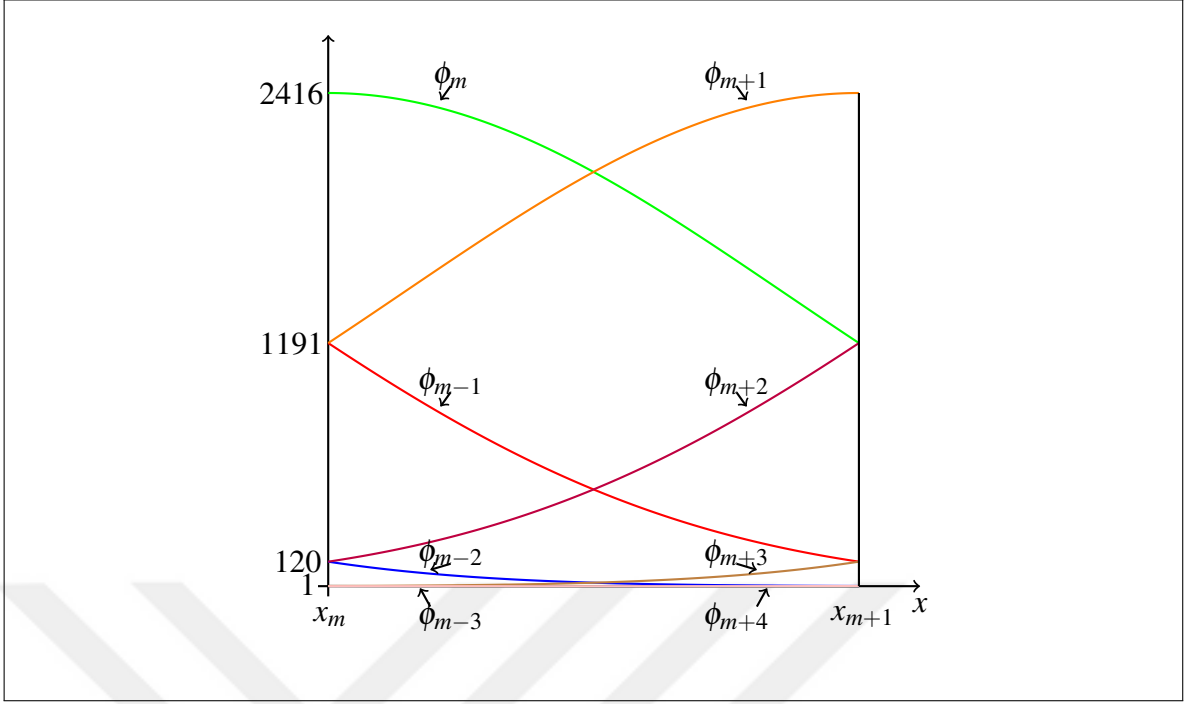
şeklinde yazılabilir [33]. Tipik $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı (1.66) septik B-spline fonksiyonları tarafından örtüldüğünden, bu aralık üzerindeki herhangi bir $u(x, t)$ değeri için x_m noktasındaki yaklaşım fonksiyonu ve x' e göre altıncı mertebeye kadar türevleri δ_m eleman parametreleri cinsinden

$$u_m(x_m, t) = \sum_{i=m-3}^{m+4} \phi_i(x_m) \delta_i(t) \tag{1.69}$$

eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
u_m(x_m, t) &= u_m = \delta_{m-3} + 120\delta_{m-2} + 1191\delta_{m-1} + 2416\delta_m + 1191\delta_{m+1} + 120\delta_{m+2} + \delta_{m+3}, \\
u'_m &= \frac{7}{h} (-\delta_{m-3} - 56\delta_{m-2} - 245\delta_{m-1} + 245\delta_{m+1} + 56\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \\
u''_m &= \frac{42}{h^2} (\delta_{m-3} + 24\delta_{m-2} + 15\delta_{m-1} - 80\delta_m + 15\delta_{m+1} + 24\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \\
u'''_m &= \frac{210}{h^3} (-\delta_{m-3} - 8\delta_{m-2} + 19\delta_{m-1} - 19\delta_{m+1} + 8\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \\
u^{iv}_m &= \frac{840}{h^4} (\delta_{m-3} - 9\delta_{m-1} + 16\delta_m - 9\delta_{m+1} + \delta_{m+3}), \\
u^v_m &= \frac{2520}{h^5} (-\delta_{m-3} + 4\delta_{m-2} - 5\delta_{m-1} + 5\delta_{m+1} - 4\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \\
u^{vi}_m &= \frac{5040}{h^6} (\delta_{m-3} - 6\delta_{m-2} + 15\delta_{m-1} - 20\delta_m + 15\delta_{m+1} - 6\delta_{m+2} + \delta_{m+3}),
\end{aligned} \tag{1.70}$$

olarak hesaplanır [33].



Şekil 1.12 Septik B-spline fonksiyonlar

1.6 Dalga Denklemleri

Bu kısımda, üzerinde çalışılacak olan dalga denklemleri tanıtıldıktan sonra bu denklemlerle ilgili literatürde yer alan çalışmalardan bahsedilecektir.

1.6.1 Modifiye Edilmiş Korteweg-de Vries (mKdV) Denklemi

Sığ su dalga dinamikleri, akışkanlar mekaniği ve lineer olmayan oluşum denklemleri alanlarında en popüler araştırma alanlarından biridir. Dalga dinamikleri ile ilgili olarak öne çıkan denklemlerden biri olan Korteweg-de Vries denklemi, sığ su dalga dinamiklerinin modellenmesinde kullanılmaktadır.

Modifiye edilmiş Korteweg-de Vries denklemi

$$U_t + \varepsilon U^2 U_x + \mu U_{xxx} = 0 \quad (1.71)$$

şeklinde ifade edilmektedir [34]. Burada, ε ve μ keyfi pozitif parametrelerdir. İlave olarak, U_t terimi bir yönde yayılan dalganın zaman gelişimini, $U^2 U_x$ lineer olmayan terimi dalga dikleşmesini ve U_{xxx} lineer terimi de dalganın yayılımını temsil etmektedir.

Literatürde çeşitli dalga modelleri ile analitik sonuçların elde edildiği çok sayıda çalışma vardır. Bu çalışmalar soliton çözümlerini, şok dalga çözümlerini, aşırı büyük dalga çözüm-

lerini, soliton pertürbasyon teorisini, kararlılık analizini, yarı kararlı çözümleri ve diğer birkaç özelliği kapsamaktadır. Ancak, mKdV denklemi ile ilgili sınırlı sayıda sayısal çalışma vardır. D. Kaya Adomain decomposition metodunu kullanarak, yüksek mertebeden mKdV denkleminin açık çözümlerini hesaplamıştır [35]. Kuadratik B-spline interpolasyon fonksiyonları ile Galerkin yöntemi uygulanarak A. Biswas ve K. R. Raslan tarafından denklem sayısal olarak çözülmüştür [36]. Son olarak, K. R. Raslan ve H. A. Baghdady tarafından denklem sonlu farklar yöntemi kullanılarak sayısal olarak çözümlenerek, fark çözümlerinin kararlılığı ispatlanmıştır [37].

1.6.2 Modifiye Edilmiş Kawahara (mK) Denklemi

Sığ su dalga dinamikleri, akışkanlar dinamiği alanında ciddi şekilde büyüyen bir araştırma alanıdır. Bu araştırma alanına odaklanan modellemelerden biri olan modifiye edilmiş Kawahara denklemi, tek katmanlı sığ su akışkanlarının incelenmesinde kullanılmaktadır.

Modifiye edilmiş Kawahara denklemi

$$U_t + \alpha U^2 U_x + \beta U_{xxx} - \gamma U_{xxxxx} = 0 \quad (1.72)$$

şeklinde ifade edilmektedir [38]. Burada, α , β ve γ keyfi pozitif parametrelerdir. İlave olarak, U_t terimi bir yönde yayılan dalganın zaman gelişimini, $U^2 U_x$ lineer olmayan terimi dalga dikişmesini, U_{xxx} ve U_{xxxxx} lineer terimleri de dalganın yayılımını temsil etmektedir.

mK denklemi, yüzey geriliminin orta değerleri için uzun dalga rejiminde su dalgalarını modellemek için kullanılmaktadır. KdV denkleminin bu tür su rejimleri için yetersiz kaldığı tespit edilmiştir [39].

Literatürde mK denkleminin analitik çözümleri ile ilgili son yıllara ait çok sayıda çalışma bulunmaktadır [40–48]. Ancak denklemin sayısal çözümleri ile ilgili adomain decomposition ve meshless metodları üzerine oldukça sınırlı sayıda çalışma mevcuttur [49–52].

1.6.3 Rosenau-Korteweg-de Vries (R-KdV) Denklemi

Dinamik sistemlerdeki lineer olmayan kompleks olayların öneminden dolayı, lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler için hareketli dalga çözümlerine olan ilgi son yıllarda hızlı bir şekilde artış göstermektedir. Bu tip lineer olmayan dalga olayları özellikle akışkanlar mekaniği, katı hal fiziği, plazma fiziği ve lineer olmayan optik gibi bilimin çeşitli alanlarında

ortaya çıkmaktadır.

Zayıf lineer olmayan uzun dalgalar için genel bir model olan KdV denklemi

$$U_t + bU_{xxx} + dUU_x = 0 \quad (1.73)$$

şeklinindedir [15]. Burada U bir reel değerli fonksiyon, a ve b keyfi reel sabitlerdir. KdV denklemi non-lineerlik ve dispersiyon arasında denge içeren fiziksel sistemlerde ortaya çıkmaktadır. Örnek olarak, uzun dalga boyuna sahip yüzey dalgaları, küçük genlikli sığ su ve sığ yoğunluk-tabakalı akışkanlardaki iç dalgalar KdV denklemi ile tanımlanabilmektedir.

1988 yılında yoğun dağılımlı sistemlerin dinamiklerini açıklamak için Philip Rosenau tarafından

$$U_t + aU_x + cU_{xxx} + d(U^2)_x = 0 \quad (1.74)$$

formundaki Rosenau denklemi önerilmiştir [53].

Doğrusal olmayan dalga kavramından yola çıkarak, 2009 yılında Jin-Ming Zuo tarafından Rosenau denkleminde U_{xxx} viskozite terimi eklendiğinde oluşan

$$U_t + aU_x + bU_{xxx} + cU_{xxx} + d(U^2)_x = 0 \quad (1.75)$$

formundaki yeni denklem, Rosenau-Korteweg-de Vries (R-KdV) denklemi olarak adlandırılmıştır [54].

(1.75) denkleminde, bağımlı değişken $U(x,t)$ sığ su dalgasını temsil ederken, bağımsız değişkenler x ve t sırasıyla uzaysal ve zamansal değişkenleri belirtmektedir. Ayrıca, a , b , c ve d keyfi pozitif parametrelerdir. İlave olarak, U_t terimi bir yönde yayılan dalganın zaman gelişimini, U_x lineer terimi sürüklenme terimini, U_{xxx} lineer terimi dalga yayılımını, U_{xxx} lineer terimi zamana bağlı dalga yayılımını, $(U^2)_x$ lineer olmayan terimi de dalga dikleşmesini temsil etmektedir.

Son zamanlarda bu dalga denkleminin analitik çözümleri üzerine çok sayıda çalışma yapılmıştır [55–58]. Ancak sayısal çözümler üzerine sınırlı sayıda çalışma bulunmaktadır. Özellikle son yıllarda, sayısal çözümler üzerine yorum yapabilmek için Rosenau-KdV denkleminde sonlu fark yönteminin çeşitli versiyonları uygulanmıştır [59–61]. Son olarak, S.

B. G. Karakoç ve T. Ak tarafından sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak R-KdV denkleminin sayısal çözümleri elde edilmiştir. İlave olarak tek solitary dalga hareketi simülasyonlarla incelenerek, von-Neumann kararlılık analizi ile yöntemin şartsız kararlı olduğu gösterilmiştir [62, 63].

1.7 Amaç ve Kapsam

Bu çalışmada ikinci ve üçüncü bölümde, B-spline interpolasyon fonksiyonları ile Galerkin ve Petrov-Galerkin yöntemleri uygulanarak sonlu eleman yaklaşımına bağlı yeni bir algoritma kullanılarak mKdV denkleminin sayısal olarak çözümleri yapılacaktır. Von Neumann kararlılık analizi uygulanarak, yöntemin kararlılığı araştırıldıktan sonra tek solitary dalga dinamiklerini, aynı yönde ilerleyen farklı büyüklükteki iki ve üç solitary dalganın etkileşimini ve Gaussian başlangıç koşulu ile solitonların oluşumunu içeren dört problem sayısal olarak incelenerek, elde edilen sonuçlar simülasyonlarla desteklenecektir.

Dördüncü bölümde, septik B-spline yaklaşım fonksiyonları kullanılarak kollokasyon sonlu elemanlar yöntemi ile modifiye edilmiş Kawahara denkleminin sayısal analizi yapılacaktır. Von Neumann teorisi ile uygulanan yöntemin kararlılık analizi yapıldıktan sonra, sayısal simülasyonlar ile tek solitary dalga hareketi, aynı yönde ilerleyen farklı büyüklüklere sahip iki ve üç solitary dalganın etkileşimi ve Gaussian başlangıç şartı ile dalgaların oluşumu gibi dört problem üzerinde çalışılacaktır.

Beşinci bölümde, sektik B-spline yaklaşım fonksiyonlarına bağlı subdomain sonlu elemanlar yöntemi uygulanarak R-KdV denkleminin sayısal çözümleri elde edilecektir. Ayrıca von Neumann teorisi ile yöntemin kararlılık analizi yapılarak, tek solitary dalga hareketi, aynı yönde ilerleyen farklı büyüklüklere sahip iki ve üç solitary dalganın etkileşimi, Gaussian ve undular bore başlangıç şartları ile solitonların oluşumunu içeren beş problem üzerinde çalışılacaktır.

2. BÖLÜM

MODİFİYE EDİLMİŞ KORTEWEG-DE VRIES DENKLEMİNİN GALERKİN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE SAYISAL ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde, Galerkin sonlu elemanlar yöntemi ile mKdV denkleminin sayısal çözümleri elde edilmiştir. Yaklaşım fonksiyonu ve ağırlık fonksiyonu olarak kübik B-spline fonksiyonlar kullanılmıştır. Von Neumann tekniği uygulanarak sunulan yöntemin kararlılık analizi yapılmıştır. Lineerleştirme işlemi için lumped lineerleştirme tekniği seçilmiştir. Sonlu elemanlar yaklaşımı, tek solitary dalga hareketi, aynı yönde ilerleyen farklı genliklere sahip iki ve üç solitary dalganın etkileşimi ve Gaussian başlangıç şartı ile dalgaların oluşumu ve soliton dizisinin gelişimini içeren problemler üzerinde çalışılmıştır.

2.1 mKdV Denkleminin Kübik B-Spline Galerkin Yöntemi ile Sayısal Çözümü

2.1.1 Denklem Gelişimi ve Kübik B-Spline Fonksiyonlar

Bu bölümde, ε ve μ pozitif parametreler, x ve t indisleri sırasıyla konuma ve zamana göre türevleri belirtmek üzere $x \rightarrow \pm\infty$ iken $U \rightarrow 0$ fiziksel sınır koşulları ile mKdV denklemi

$$U_t + \varepsilon U^2 U_x + \mu U_{xxx} = 0 \quad (2.1)$$

üzerinde durulacaktır.

Sayısal yöntemi uygulayabilmek için çözüm bölgesi, $a \leq x \leq b$ aralığı üzerinde sınırlandırılarak, x_m düğüm noktaları ile $a = x_0 < x_1 \cdots < x_N = b$ gibi N eşit alt aralığa bölünmüştür. $m = 0, 1, 2, \dots, N$ için bu aralıkların uzunlukları $h = \frac{b-a}{N} = (x_{m+1} - x_m)$ 'dir.

$$\begin{aligned} U(a,t) = 0, \quad U(b,t) = 0, \\ U_x(a,t) = 0, \quad U_x(b,t) = 0 \quad , \quad t > 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

homojen sınır şartları ve

$$U(x,0) = f(x) \quad , \quad a \leq x \leq b \quad (2.3)$$

başlangıç şartı seçilerek denklem çözülecektir.

$[a, b]$ aralığı üzerindeki x_m düğüm noktalarında $\phi_m(x)$ kübik B-spline yaklaşım fonksiyonları

$m = -1(1)N + 1$ için

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (x - x_{m-2})^3, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ h^3 + 3h^2(x - x_{m-1}) + 3h(x - x_{m-1})^2 - 3(x - x_{m-1})^3, & [x_{m-1}, x_m] \\ h^3 + 3h^2(x_{m+1} - x) + 3h(x_{m+1} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^3, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+2} - x)^3, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (2.4)$$

olarak verilmiştir [33]. Bu yaklaşım fonksiyonlarının $\{\phi_{-1}(x), \phi_0(x), \dots, \phi_{N+1}(x)\}$ kümesi $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlanacak olan yaklaşık çözüm için bir baz oluşturur. $U(x, t)$ tam çözümüne yaklaşan $U_N(x, t)$ yaklaşık çözümü

$$U_N(x, t) = \sum_{j=-1}^{N+1} \phi_j(x) \delta_j(t) \quad (2.5)$$

ile verilir. Burada $\delta_j(t)$, ağırlıklı rezidü ve sınır şartlarından belirlenen zamana bağlı parametredir. Her eleman için

$$h\xi = x - x_m, \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (2.6)$$

lokal koordinat dönüşümü kullanılarak, $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerinde daha kolay bir şekilde çalışılabilen $[0, 1]$ aralığına dönüştürülür. Bu durumda kübik B-spline fonksiyonlar, $[0, 1]$ aralığı üzerinde ξ değişkenine bağlı olarak aşağıdaki formda tanımlanabilir.

$$\begin{aligned} \phi_{m-1}(\xi) &= (1 - \xi)^3, \\ \phi_m(\xi) &= 1 + 3(1 - \xi) + 3(1 - \xi)^2 - 3(1 - \xi)^3, \\ \phi_{m+1}(\xi) &= 1 + 3\xi + 3\xi^2 - 3\xi^3, \\ \phi_{m+2}(\xi) &= \xi^3 \end{aligned} \quad (2.7)$$

$[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerinde $\phi_{m-1}(x)$, $\phi_m(x)$, $\phi_{m+1}(x)$ ve $\phi_{m+2}(x)$ dışındaki tüm spline fonksiyonlar sıfırdır. Ayrıca, herbir kübik B-spline dört elemanı örter öyle ki her $[x_m, x_{m+1}]$ elemanı da dört spline tarafından örtülür. δ_{m-1} , δ_m , δ_{m+1} , δ_{m+2} eleman parametreleri ve ϕ_{m-1} , ϕ_m , ϕ_{m+1} , ϕ_{m+2} eleman şekil fonksiyonları olmak üzere, $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerinde $U(x, t)$

fonksiyonuna

$$U_N(x_m, t) = \sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j(x_m) \delta_j(t) \quad (2.8)$$

ile yaklaşılr. x_m düğüm noktalarındaki $\phi_m(x)$ kübik B-spline fonksiyonlar ve türev değerleri Tablo 2.1'deki gibi verilebilir.

' ve '' sembolleri sırasıyla x 'e göre birinci ve ikinci türevleri belirtmek üzere, (2.4) kübik

Tablo 2.1 Kübik B-spline fonksiyonlar ve türevlerinin x_m düğüm noktalarındaki değerleri

x	x_{m-2}	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}
$\phi_m(x)$	0	1	4	1	0
$h\phi'_m(x)$	0	3	0	-3	0
$h^2\phi''_m(x)$	0	6	-12	6	0

B-spline fonksiyonları ve (2.5) yaklaşık çözümü kullanılarak, U , U' ve U'' 'nin düğüm noktalarındaki değerleri δ_m eleman parametreleri cinsinden

$$\begin{aligned} U_m = U(x_m) &= \delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1}, \\ U'_m = U'(x_m) &= \frac{3}{h}(-\delta_{m-1} + \delta_{m+1}), \\ U''_m = U''(x_m) &= \frac{6}{h^2}(\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1}) \end{aligned} \quad (2.9)$$

olarak bulunur.

2.1.2 Galerkin Sonlu Elemanlar Yöntemi

$W(x)$ ağırlık fonksiyonu ile Galerkin sonlu elemanlar yöntemi (2.1) denkleminde uygulanarak,

$$\int_a^b W(U_t + \varepsilon U^2 U_x + \mu U_{xxx}) dx = 0 \quad (2.10)$$

ağırlıklı integrali bulunur. Bir tek $[x_m, x_{m+1}]$ elemanı için, (2.6) dönüşümü (2.10) denkleminde uygulanarak

$$\int_0^1 W \left[U_t + \varepsilon \left(\frac{U^2}{h} \right) U_\xi + \mu U_{\xi\xi\xi} \right] d\xi = 0 \quad (2.11)$$

integrali elde edilir. (2.11) denkleminin terimlerinin integrali alınarak, (2.1) denkleminin zayıf formu

$$\int_0^1 [W(U_t + \varepsilon \lambda U_\xi) - (\mu W_\xi U_{\xi\xi})] d\xi + \mu W U_{\xi\xi} \Big|_0^1 = 0 \quad (2.12)$$

olarak elde edilir. Burada $\lambda = \frac{U^2}{h}$ ifadesi lokal olarak sabit alındıktan sonra, $(U_m + U_{m+1})^2/4$ ifadesi yardımıyla λ için bir lumped değeri

$$\lambda = \frac{1}{4h} (\delta_{m-1} + 5\delta_m + 5\delta_{m+1} + \delta_{m+2})^2 \quad (2.13)$$

şeklinde hesaplanır ve lineerleştirme işlemi yapılır.

Ağırlık fonksiyonu olarak (2.7) ile verilen kübik B-spline fonksiyonları alınarak ve (2.8) yaklaşımı (2.12) integral denkleminde yerine yazılarak, eleman katkıları

$$\sum_{i,j=m-1}^{m+2} \left[\int_0^1 \phi_i \phi_j d\xi \right] \delta_j^e + \sum_{i,j=m-1}^{m+2} \left[\left(\varepsilon \lambda \int_0^1 \phi_i \phi_j' d\xi \right) - \left(\mu \int_0^1 \phi_i' \phi_j'' d\xi \right) + (\mu \phi_i \phi_j'' \Big|_0^1) \right] \delta_j^e = 0 \quad (2.14)$$

formunda ifade edilir.

$\delta^e = (\delta_{m-1}, \delta_m, \delta_{m+1}, \delta_{m+2})^T$ eleman parametreleri olmak üzere (2.14) denklemi matris notasyonunda

$$[A^e] \delta^e + [\varepsilon \lambda B^e - \mu (C^e - D^e)] \delta^e = 0 \quad (2.15)$$

olarak yazılır.

$[x_m, x_{m+1}]$ tipik elemanı için i, j indisleri sadece $m-1, m, m+1, m+2$ değerlerini almak üzere, karesel A^e, B^e, C^e ve D^e eleman matrisleri aşağıdaki integraller ile hesaplanmıştır:

$$A_{ij}^e = \int_0^1 \phi_i \phi_j d\xi = \frac{1}{140} \begin{bmatrix} 20 & 129 & 60 & 1 \\ 129 & 1188 & 933 & 60 \\ 60 & 933 & 1188 & 129 \\ 1 & 60 & 129 & 20 \end{bmatrix}$$

$$B_{ij}^e = \int_0^1 \phi_i \phi_j' d\xi = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} -10 & -9 & 18 & 1 \\ -71 & -150 & 183 & 38 \\ -38 & -183 & 150 & 71 \\ -1 & -18 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

$$C_{ij}^e = \int_0^1 \phi_i' \phi_j'' d\xi = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -9 & 15 & -3 & -3 \\ -15 & 9 & 27 & -21 \\ 21 & -27 & -9 & 15 \\ 3 & 3 & -15 & 9 \end{bmatrix}$$

$$D_{ij}^e = \phi_i \phi_j''|_0^1 = \begin{bmatrix} -6 & 12 & -6 & 0 \\ -24 & 54 & -36 & 6 \\ -6 & 36 & -54 & 24 \\ 0 & 6 & -12 & 6 \end{bmatrix}$$

$\delta = (\delta_{-1}, \delta_0, \dots, \delta_N, \delta_{N+1})^T$ global eleman parametreleri olmak üzere, tüm elemanlar birleştirilerek (2.15) denkleminde aşağıdaki matris denklemi elde edilir.

$$[A] \dot{\delta} + [\varepsilon \lambda B - \mu (C - D)] \delta = 0. \quad (2.16)$$

$A, \lambda B, C$ ve D septadiagonal matrislerinin herbir satırı

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{140} (1, 120, 1191, 2416, 1191, 120, 1), \\ \lambda B &= \frac{1}{20} (-\lambda_1, -18\lambda_1 - 38\lambda_2, 9\lambda_1 - 183\lambda_2 - 71\lambda_3, 10\lambda_1 + 150\lambda_2 - 150\lambda_3 - 10\lambda_4, \\ &\quad 71\lambda_2 + 183\lambda_3 - 9\lambda_4, 38\lambda_3 + 18\lambda_4, \lambda_4), \\ C &= \frac{1}{2} (3, 24, -57, 0, 57, -24, -3), \\ D &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \end{aligned} \quad (2.17)$$

formunda olup, burada $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ve λ_4 değerleri

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{4h}(\delta_{m-2} + 5\delta_{m-1} + 5\delta_m + \delta_{m+1})^2, \\
\lambda_2 &= \frac{1}{4h}(\delta_{m-1} + 5\delta_m + 5\delta_{m+1} + \delta_{m+2})^2, \\
\lambda_3 &= \frac{1}{4h}(\delta_m + 5\delta_{m+1} + 5\delta_{m+2} + \delta_{m+3})^2, \\
\lambda_4 &= \frac{1}{4h}(\delta_{m+1} + 5\delta_{m+2} + 5\delta_{m+3} + \delta_{m+4})^2
\end{aligned} \tag{2.18}$$

şeklindeir. (2.16) denkleminde $\dot{\delta}_m$ ve δ_m parametreleri yerine sırasıyla

$$\dot{\delta}_m = \frac{1}{\Delta t} (\delta_m^{n+1} - \delta_m^n) \quad , \quad \delta_m = \frac{1}{2} (\delta_m^{n+1} + \delta_m^n) \tag{2.19}$$

ileri fark yaklaşımı ve Crank-Nicolson formülasyonu kullanılırsa,

$$\left\{ A + [\varepsilon\lambda B - \mu(C - D)] \frac{\Delta t}{2} \right\} \delta^{n+1} = \left\{ A - [\varepsilon\lambda B - \mu(C - D)] \frac{\Delta t}{2} \right\} \delta^n \tag{2.20}$$

$(N + 3) \times (N + 3)$ tipinde matris sistemi elde edilir. Burada Δt zaman adımını göstermektedir. (2.20) matris sistemine (2.2) sınır şartları uygulanırsa, bu sistem $(N + 1) \times (N + 1)$ tipinde bir matris sistemine dönüşür. Bu denklem sistemi Thomas algoritması ile çözülür. Çözüm sürecinde non-lineerlik etkisini minimize etmek için herbir zaman adımında iki kez $\delta^{n*} = \delta^n + \frac{1}{2}(\delta^n - \delta^{n-1})$ iç iterasyon işlemi uygulanmıştır.

(2.20) matris sisteminin tipik bir üyesi için n ve $n + 1$ gibi iki zaman adımı arasındaki ilişki δ^n ve δ^{n+1} parametreleri cinsinden

$$\begin{aligned}
&\gamma_1 \delta_{m-3}^{n+1} + \gamma_2 \delta_{m-2}^{n+1} + \gamma_3 \delta_{m-1}^{n+1} + \gamma_4 \delta_m^{n+1} + \gamma_5 \delta_{m+1}^{n+1} + \gamma_6 \delta_{m+2}^{n+1} + \gamma_7 \delta_{m+3}^{n+1} \\
&= \gamma_7 \delta_{m-3}^n + \gamma_6 \delta_{m-2}^n + \gamma_5 \delta_{m-1}^n + \gamma_4 \delta_m^n + \gamma_3 \delta_{m+1}^n + \gamma_2 \delta_{m+2}^n + \gamma_1 \delta_{m+3}^n
\end{aligned} \tag{2.21}$$

olarak yazılabilir. Burada δ parametlerinin katsayıları

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \frac{1}{140} - \frac{\varepsilon\lambda\Delta t}{40} - \frac{3\mu\Delta t}{4}, \\
\gamma_2 &= \frac{120}{140} - \frac{56\varepsilon\lambda\Delta t}{40} - \frac{24}{4}\mu\Delta t, \\
\gamma_3 &= \frac{1191}{140} - \frac{245\varepsilon\lambda\Delta t}{40} + \frac{57\mu\Delta t}{4}, \\
\gamma_4 &= \frac{2416}{140}, \\
\gamma_5 &= \frac{1191}{140} + \frac{245\varepsilon\lambda\Delta t}{40} - \frac{57\mu\Delta t}{4}, \\
\gamma_6 &= \frac{120}{140} + \frac{56\varepsilon\lambda\Delta t}{40} + \frac{24}{4}\mu\Delta t, \\
\gamma_7 &= \frac{1}{140} + \frac{\varepsilon\lambda\Delta t}{40} + \frac{3\mu\Delta t}{4}
\end{aligned} \tag{2.22}$$

şeklindedir. (2.20) matris sisteminde iterasyona başlayabilmek için, başlangıç ve sınır şartları kullanılarak $\delta^0 = (\delta_{-1}^0, \dots, \delta_{N+1}^0)$ başlangıç vektörü belirlenmelidir. Bunun için $t = 0$ anında $[a, b]$ aralığı üzerindeki

$$U_N(x, 0) = \sum_{m=-1}^{N+1} \phi_m(x) \delta_m^0 \tag{2.23}$$

yaklaşımı ile

$$\begin{aligned}
U_N(x_m, 0) &= U(x_m, 0) \quad , \quad m = 0, 1, \dots, N \\
U'_N(x_0, 0) &= U'(x_N, 0) = 0
\end{aligned} \tag{2.24}$$

şartları kullanılırsa, aşağıdaki üçlü bant matris sistemine Thomas algoritması uygulanarak δ_m^0 başlangıç vektörü kolayca hesaplanır.

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & & -3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{-1}^0 \\ \delta_0^0 \\ \vdots \\ \delta_N^0 \\ \delta_{N+1}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U'(x_0, 0) \\ U(x_0, 0) \\ \vdots \\ U(x_N, 0) \\ U'(x_N, 0) \end{bmatrix}$$

2.1.3 Kararlılık Analizi

Kararlılık analizi von Neumann teorisine bağlı olarak incelenmiştir. k dalga sayısı ve h eleman büyüklüğü olmak üzere, genlikteki ρ büyüme faktörü

$$\delta_m^n = \rho^n e^{imkh} \quad (2.25)$$

sayısal şemanın lineerleştirilmiş formundan belirlenir. (2.25) eşitliği ile verilen Fourier mod (2.21) lineer sisteminde yerine yazılarak,

$$\begin{aligned} & \gamma_1 \rho^{n+1} e^{i(m-3)kh} + \gamma_2 \rho^{n+1} e^{i(m-2)kh} + \gamma_3 \rho^{n+1} e^{i(m-1)kh} + \gamma_4 \rho^{n+1} e^{imkh} \\ & + \gamma_5 \rho^{n+1} e^{i(m+1)kh} + \gamma_6 \rho^{n+1} e^{i(m+2)kh} + \gamma_7 \rho^{n+1} e^{i(m+3)kh} \\ & = \gamma_7 \rho^n e^{i(m-3)kh} + \gamma_6 \rho^n e^{i(m-2)kh} + \gamma_5 \rho^n e^{i(m-1)kh} + \gamma_4 \rho^n e^{imkh} \\ & + \gamma_3 \rho^n e^{i(m+1)kh} + \gamma_2 \rho^n e^{i(m+2)kh} + \gamma_1 \rho^n e^{i(m+3)kh} \end{aligned} \quad (2.26)$$

eşitliği elde edilir. Eğer, (2.26) ile verilen eşitlikte

$$e^{ikh} = \cos(kh) + i \sin(kh) \quad (2.27)$$

Euler formülü kullanılarak, bu denklem sadeleştirilirse ρ büyüme faktörü

$$\rho = \frac{a - ib}{a + ib} \quad (2.28)$$

olarak bulunur. Burada

$$\begin{aligned} a &= 14496 + 8292 \cos(kh) + 1440 \cos(2kh) + 12 \cos(3kh), \\ b &= -[6000 - (1715\varepsilon\lambda - 23940\mu)\Delta t] \sin(kh) + [(392\varepsilon\lambda + 10080\mu)\Delta t] \sin(2kh) \\ & \quad + [(7\varepsilon\lambda + 1260\mu)\Delta t] \sin(3kh) \end{aligned} \quad (2.29)$$

ve $|\rho| = 1$ 'dir. Bu da lineerleştirilmiş şemanın şartsız kararlı olduğunu gösterir.

2.1.4 Sayısal Örnekler ve Sonuçlar

Tek solitary dalga hareketi, aynı yönde ilerleyen iki ve üç solitary dalganın etkileşimi ve solitonların oluşumu gibi dört problem için mKdV denkleminin sayısal çözümleri elde edilmiştir.

Seçilen bazı zamanlarda analitik çözüm ve sayısal çözüm arasındaki farkı hesaplamak için

$$L_2 = \|U^{tam} - U_N\|_2 \simeq \sqrt{h \sum_{j=1}^N |U_j^{tam} - (U_N)_j|^2} \quad (2.30)$$

hata normu ve

$$L_\infty = \|U^{tam} - U_N\|_\infty \simeq \max_j |U_j^{tam} - (U_N)_j|, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (2.31)$$

hata normu kullanılmıştır. mKdV denkleminin (2.1) sırasıyla kütle, momentum ve enerjiye karşılık gelen

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_a^b U dx \simeq h \sum_{j=1}^N U_j^n, \\ I_2 &= \int_a^b U^2 dx \simeq h \sum_{j=1}^N (U_j^n)^2, \\ I_3 &= \int_a^b \left[U^4 - \frac{6\mu}{\varepsilon} (U_x)^2 \right] dx \simeq h \sum_{j=1}^N \left[(U_j^n)^4 - \frac{6\mu}{\varepsilon} (U_x)_j^n \right] \end{aligned} \quad (2.32)$$

şeklinde üç korunum sabitine sahiptir [34, 64]. Uygulanan yöntemin doğruluğunu kontrol etmek için I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitlerindeki değişim incelenmiştir.

2.1.4.1 Tek Solitary Dalga Hareketi

İlk olarak $x \rightarrow \pm\infty$ iken $U \rightarrow 0$ sınır şartı ve $t = 0$ alınarak elde edilen

$$U(x, 0) = A \operatorname{sech}[k(x - x_0)] \quad (2.33)$$

başlangıç koşulu ile mKdV denkleminin (2.1) solitary dalga çözümleri elde edilmiştir. ε , μ , c ve x_0 keyfi sabitler olmak üzere mKdV denkleminin (2.1) analitik çözümü

$$U(x, t) = A \operatorname{sech}[k(x - ct - x_0)] \quad (2.34)$$

şeklinde [36]. Burada $A = \sqrt{\frac{6c}{\varepsilon}}$ ve $k = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}$ ifadeleri sırasıyla dalga genliği ve dalga sayısını temsil etmektedir. İlave olarak, korunum sabitleri analitik olarak

$$I_1 = \pi \sqrt{\frac{6\mu}{\varepsilon}}, \quad I_2 = \frac{12\sqrt{\mu c}}{\varepsilon}, \quad I_3 = -\frac{64c^2}{\varepsilon^2} \sqrt{\frac{\mu}{c}} \quad (2.35)$$

eşitlikleri ile elde edilmiştir [36].

Solitary dalga çözümünden elde edilen sonuçlar ile daha önce yapılan çalışmaya ait sonuçları karşılaştırabilmek için, $[0, 80]$ aralığı üzerinde $\varepsilon = 3$, $\mu = 1$, $c = 0.845$, $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ parametreleri seçilmiştir. Bu parametreler ile elde edilen solitary dalga 1.3 genliğe sahiptir. Diğer taraftan $t = 20$ 'ye kadar seçilen zaman adımlarında korunum sabitleri, L_2 ve L_∞ hata normları hesaplanarak, elde edilen sonuçlar Tablo 2.2'de verilmiştir. Bu tablo aynı zamanda uygulanan yöntem yardımıyla hesaplanan sayısal sonuçlar ile daha önce elde edilen sonuçların karşılaştırmasını içermektedir. Tablodan da görülebileceği gibi, programın çalışması esnasında hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normlarına ait değerler diğer çalışmada elde edilen değerlerden daha küçük, korunum sabitleri ise neredeyse sabit kalmaktadır. $t = 0, 1, 2, \dots, 20$ için tek solitary dalga hareketi Şekil 2.1'de gösterilmiştir. Ayrıca $\varepsilon = 3$, $\mu = 1$, $c = 0.845$, $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ parametreleri için, $t = 0$ 'dan $t = 20$ 'ye kadar seçilen zaman adımlarında tek solitary dalganın şekli ve konumu Şekil 2.2'de verilmiştir. Problemin çözüm bölgesi üzerinde $t = 20$ anında analitik ve sayısal sonuçlar arasındaki hatayı tespit edebilmek için, 1.3 genliğe sahip tek solitary dalga üzerinde hata dağılımı Şekil 2.3'de gösterilmiştir.

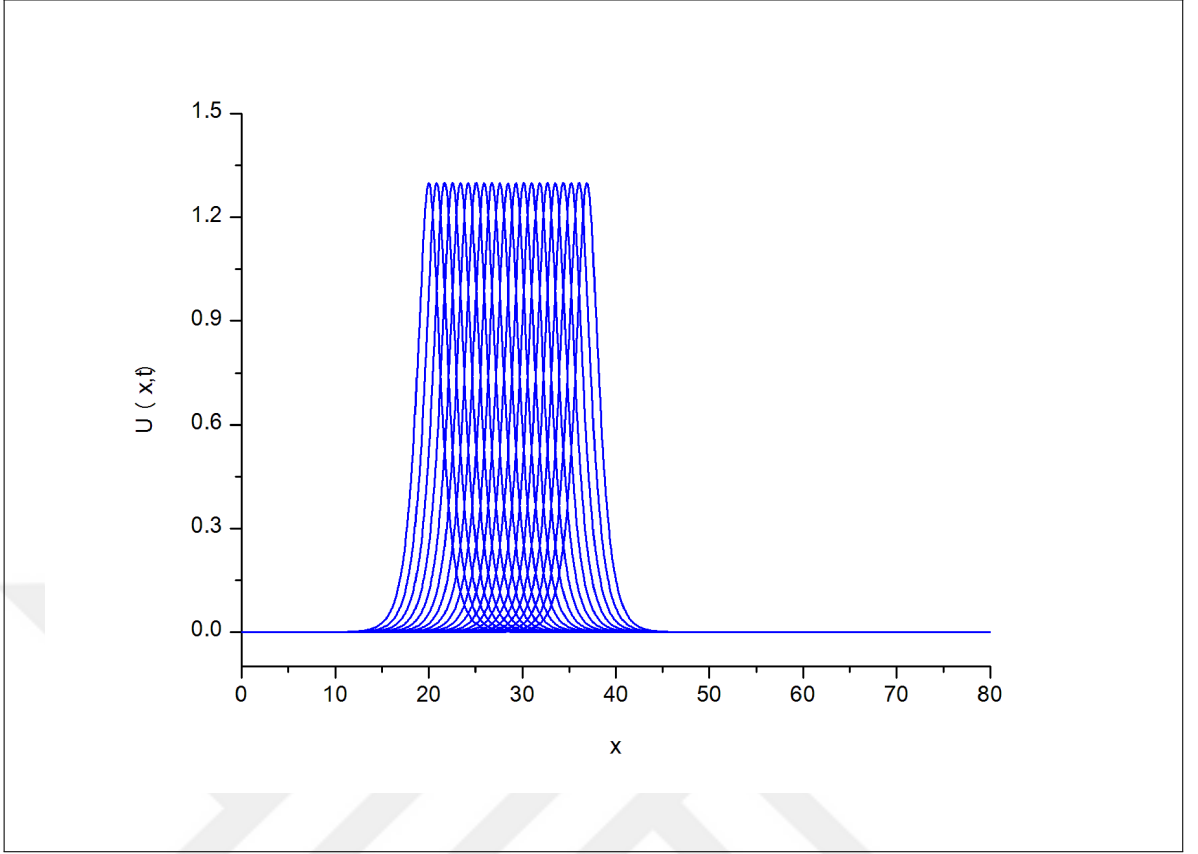
Tablo 2.2 Tek solitary dalga için korunum sabitleri ve hata normlarının karşılaştırılması

t	1	5	10	15	20
I_1	4.442866	4.442866	4.442866	4.442866	4.442866
[36]	4.443000	4.443138	4.444142	4.443420	4.443171
I_2	3.676941	3.676941	3.676941	3.676941	3.676941
[36]	3.677069	3.677535	3.678094	3.678642	3.679192
I_3	2.072792	2.073533	2.073695	2.073772	2.073841
[36]	2.073575	2.074357	2.075303	2.076232	2.077161
L_2	6.279015e-04	1.252048e-03	2.138787e-03	2.960441e-03	3.656694e-03
[36]	-	-	-	-	-
L_∞	3.624348e-04	8.415234e-04	1.403498e-03	1.887116e-03	2.294197e-03
[36]	1.206756e-03	3.621519e-03	5.942047e-03	7.626772e-03	8.642137e-03

2.1.4.2 İki Solitary Dalganın Etkileşimi

İkinci problem olarak, farklı genliklere sahip ayırık iki solitary dalganın lineer toplamı olarak verilen

$$U(x, 0) = \sum_{i=1}^2 \alpha_i \operatorname{sech}[\beta_i(x - x_i)] \quad (2.36)$$

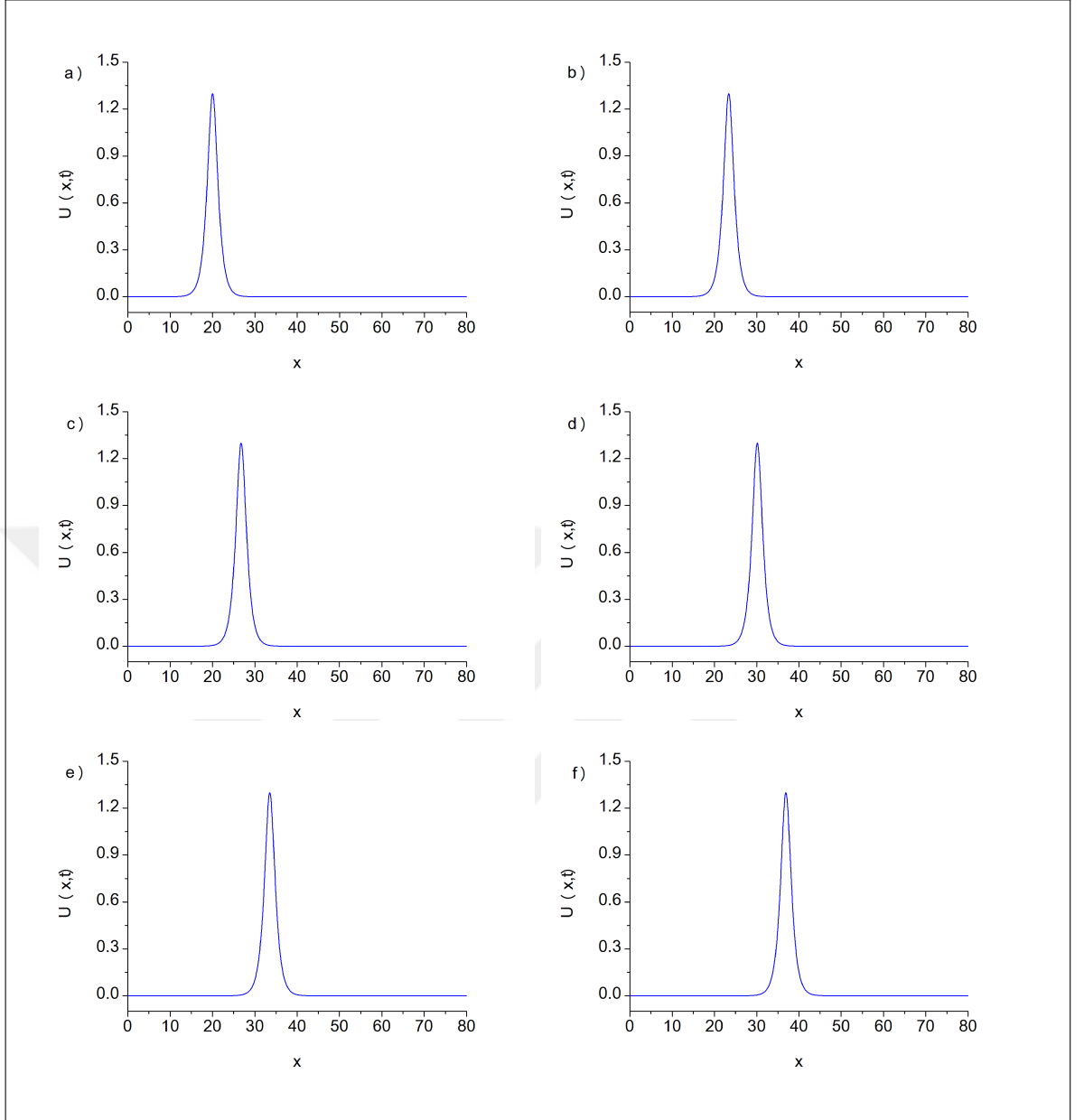


Şekil 2.1 Tek solitary dalga hareketi

başlangıç şartını kullanarak, aynı yönde ilerleyen farklı büyüklükteki iki solitary dalganın etkileşimi üzerinde çalışılmıştır. Burada $i = 1, 2$ için, $a_i = \sqrt{\frac{6c_i}{\varepsilon}}$, $\beta_i = \sqrt{\frac{c_i}{\mu}}$, c_i ve x_i keyfi sabitlerdir.

Hesaplanan sonuçlar ile daha önce elde edilen sonuçları karşılaştırabilmek için $0 \leq x \leq 80$ aralığı üzerinde $\varepsilon = 3$, $\mu = 1$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.01$, $c_1 = 2$, $c_2 = 1$, $x_1 = 15$ ve $x_2 = 25$ parametreleri seçilmiştir. $t = 0$ 'dan $t = 20$ 'ye kadar uygulanan yöntem ile elde edilen I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitlerinin değerleri ile daha önce elde edilen değerler karşılaştırmalı olarak Tablo 2.3'de verilmiştir. Tablodan da görüldüğü gibi, programın çalışması sırasında hesaplanan korunum sabitlerinin değerleri hemen hemen sabit kalmaktadır. $t = 0, 1, 2, \dots, 20$ için iki solitary dalganın etkileşimi Şekil 2.4'de gösterilmiştir.

Seçilen parametreler ile $t = 0$ anında büyük solitonun başlangıç noktası $x_1 = 15$, hızı $c_1 = 2$ ve genliği $\alpha_1 = 2$ iken, küçük solitonun başlangıç noktası $x_2 = 25$, hızı $c_2 = 1$ ve genliği $\alpha_2 = 1.41$ 'dir. Şekil 2.5, aynı yönde ilerleyen farklı genliklere sahip iki solitary dalganın etkileşiminin zamana göre gelişimini göstermektedir. Şekilden açıkça görüldüğü gibi, $t = 0$ anında simülasyonun başlangıcında büyük soliton küçük solitonun sol tarafında yer almaktadır. Zaman ilerledikçe, yaklaşık olarak $t = 7$ anına kadar büyük soliton küçük solitonu

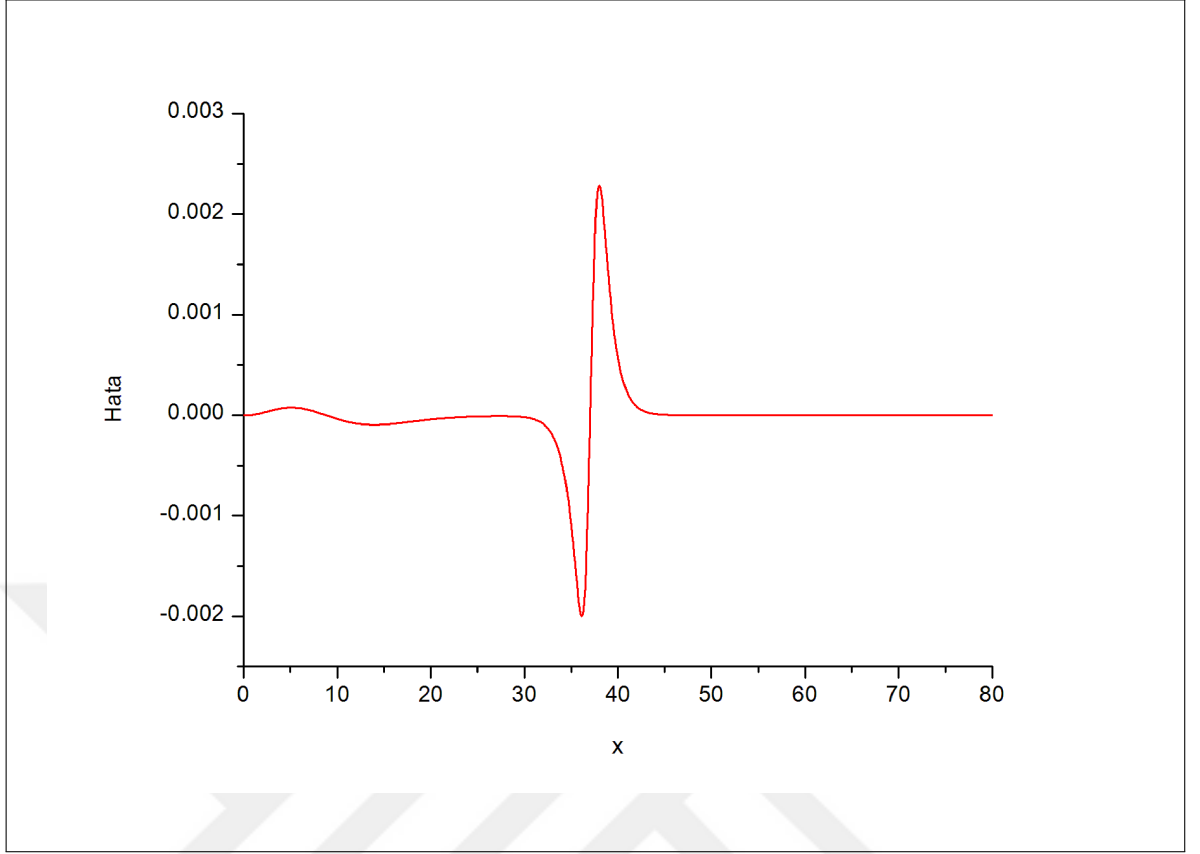


Şekil 2.2 a) $t=0$, b) $t=4$, c) $t=8$, d) $t=12$, e) $t=16$, f) $t=20$ zamanlarında tek solitary dalga hareketi

yakalamakta ve küçük soliton absorbe edilmektedir. Bu örtüşme süreci $t = 8$ anına kadar devam etmektedir. Sonra büyük soliton küçük solitonu geçmekte ve ayrılma süreci başlamaktadır. $t = 16$ anında etkileşim tamamlandıktan sonra büyük soliton tamamen küçük solitondan ayrılmaktadır. Bu süreçten sonra her iki soliton da ilk yapısını ve hızını koruyarak yoluna devam etmektedir.

2.1.4.3 Üç Solitary Dalganın Etkileşimi

Üçüncü problem olarak, aynı yönde ilerleyen ve farklı genliklere sahip üç solitary dalganın etkileşimi üzerinde durulacaktır. Farklı genliklere sahip ayrı üç solitary dalganın lineer



Şekil 2.3 $t = 20$ 'de hata dağılımı

Tablo 2.3 İki solitary dalganın etkileşimi için korunum sabitlerinin karşılaştırılması

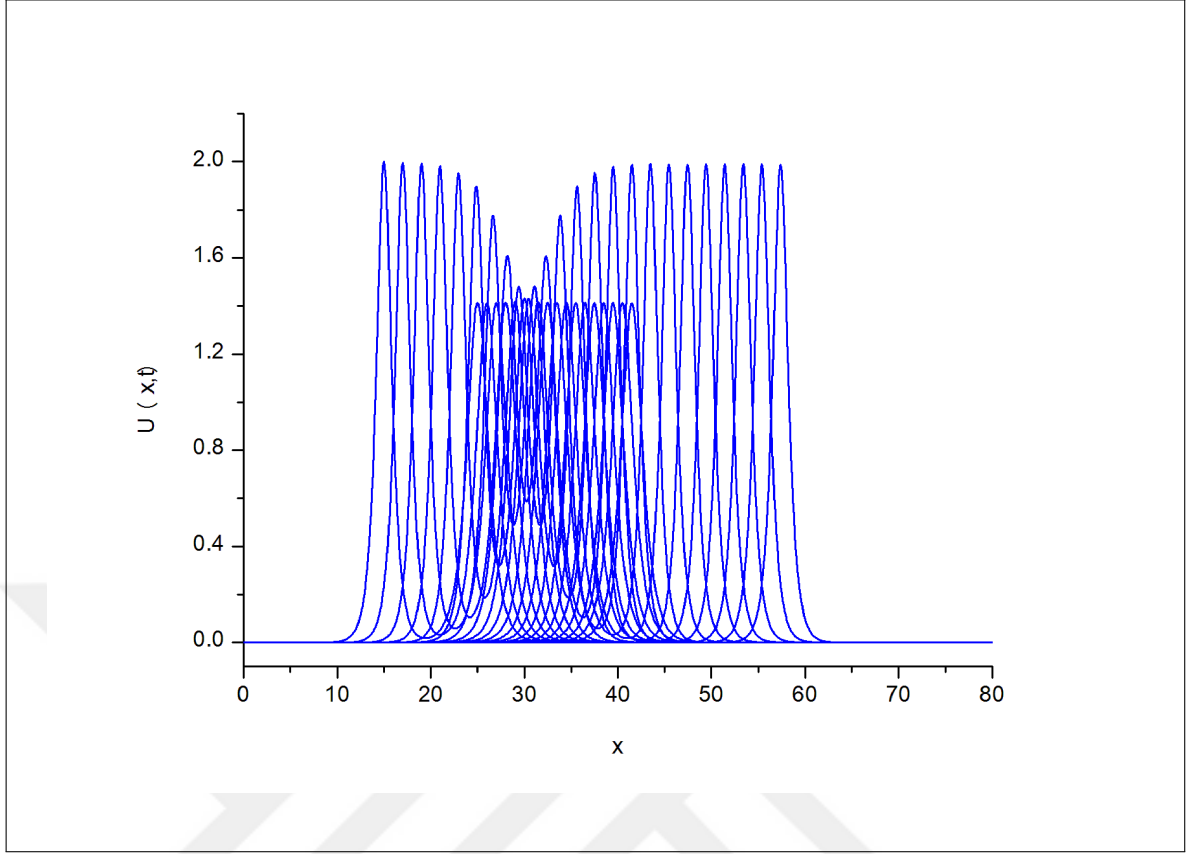
t	1	5	10	15	20
I_1	8.885732	8.885732	8.885732	8.885732	8.885732
[36]	8.886014	8.886776	8.889742	8.885983	8.884880
I_2	9.659345	9.659345	9.659345	9.659345	9.659345
[36]	9.659527	9.663714	9.662547	9.661071	9.661224
I_3	10.270822	10.857214	10.954278	10.307099	10.338321
[36]	10.239870	10.249000	10.246790	10.242580	10.242030

toplama olarak verilen

$$U(x, 0) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \operatorname{sech}[\beta_i (x - x_i)] \quad (2.37)$$

başlangıç şartını kullanarak, aynı yönde ilerleyen farklı büyüklükteki üç solitary dalganın etkileşimi üzerinde çalışılmıştır. Burada, $i = 1, 2, 3$ için $a_i = \sqrt{\frac{6c_i}{\varepsilon}}$, $\beta_i = \sqrt{\frac{c_i}{\mu}}$, c_i ve x_i keyfi sabitlerdir.

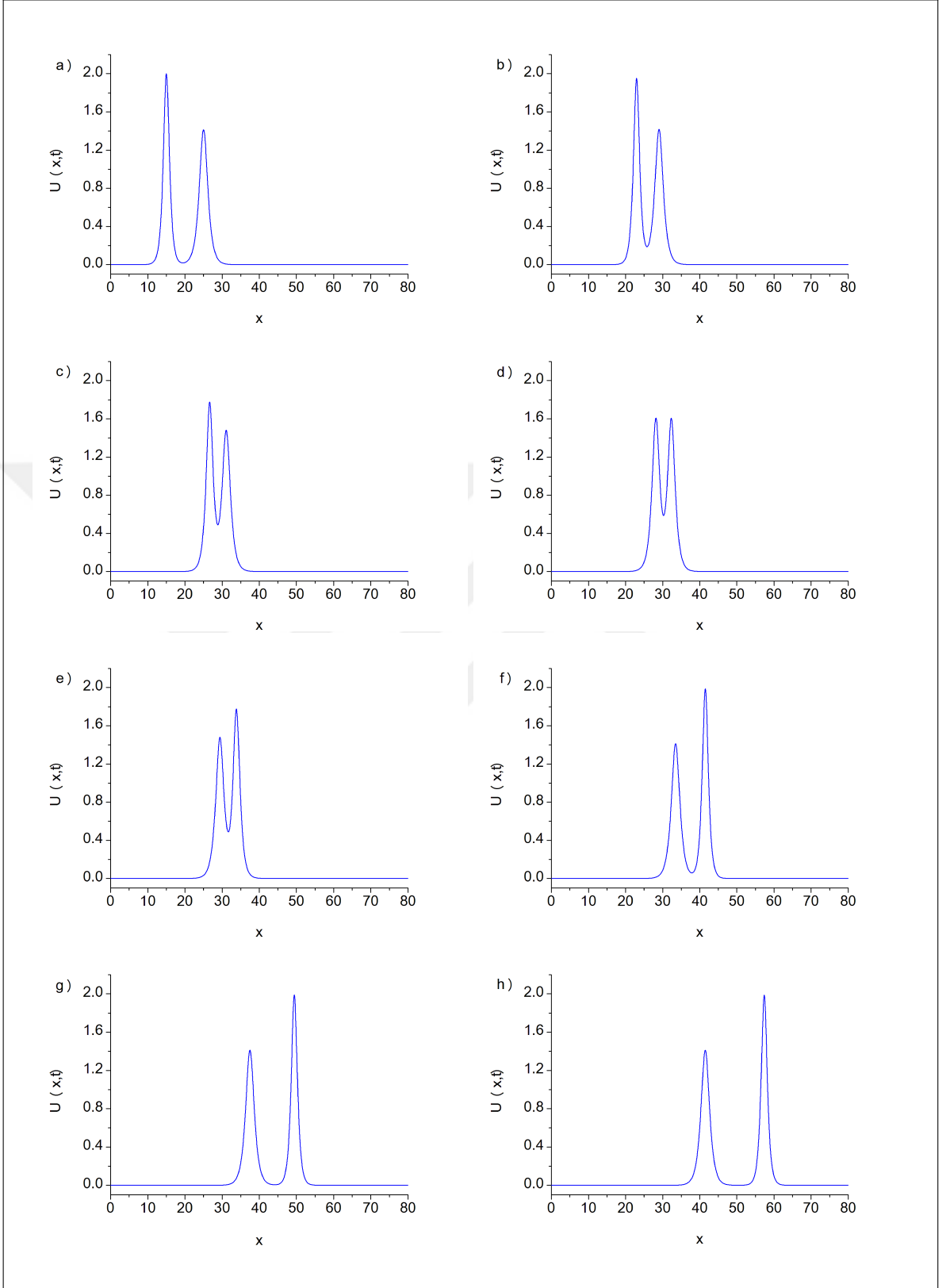
Hesaplanan sonuçlar ile daha önce elde edilen sonuçları karşılaştırabilmek için $0 \leq x \leq 80$ aralığı üzerinde $\varepsilon = 3$, $\mu = 1$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.01$, $c_1 = 2$, $c_2 = 1$, $c_3 = 0.5$, $x_1 = 15$, $x_2 = 25$ ve



Şekil 2.4 İki solitary dalganın etkileşimi

$x_3 = 35$ parametreleri seçilmiştir. $t = 0$ 'dan $t = 20$ 'ye kadar uygulanan yöntem ile elde edilen I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitlerinin değerleri ile daha önce elde edilen değerler karşılaştırmalı olarak Tablo 2.4'de verilmiştir. Tablodan da görüldüğü gibi, programın çalışması esnasında hesaplanan korunum sabitlerinin değerleri hemen hemen sabit kalmaktadır. $t = 0, 1, 2, \dots, 20$ için üç solitary dalganın etkileşimi Şekil 2.6'da gösterilmiştir.

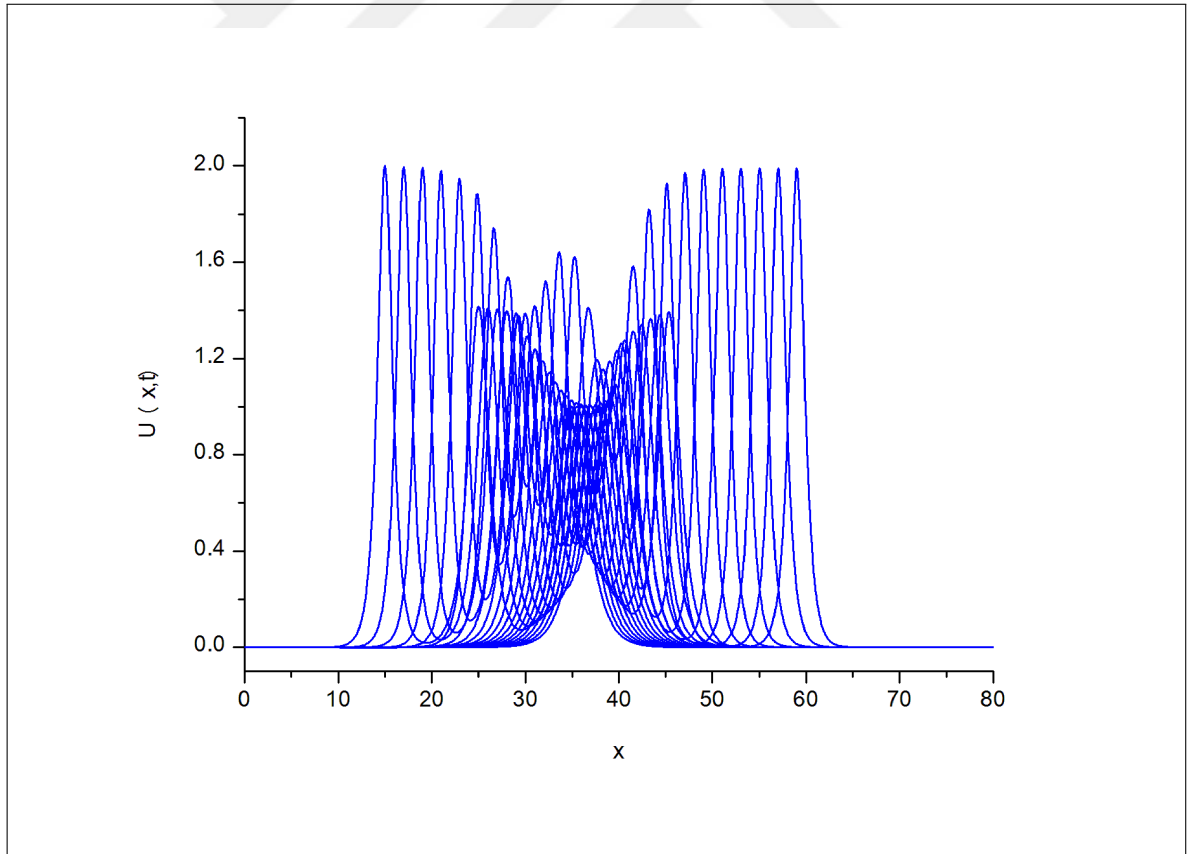
Seçilen parametreler ile $t = 0$ anında büyük solitonun başlangıç noktası $x_1 = 15$, hızı $c_1 = 2$ ve genliği $\alpha_1 = 2$; ortadaki solitonun başlangıç noktası $x_2 = 25$, hızı $c_2 = 1$ ve genliği $\alpha_2 = 1.41$; küçük solitonun başlangıç noktası $x_3 = 35$, hızı $c_3 = 0.5$ ve genliği $\alpha_3 = 1$ 'dir. Şekil 2.7, aynı yönde ilerleyen farklı genliklere sahip üç solitary dalganın etkileşiminin zamana göre gelişimini göstermektedir. Şekilden açıkça görüldüğü gibi, $t = 0$ anında simülasyonun başlangıcında büyük soliton solda, küçük soliton sağda diğer soliton da bu iki solitonun arasında yer almaktadır. Zaman ilerledikçe, yaklaşık olarak $t = 6$ anında etkileşim başlamakta, örtüşme süreci $t = 6$ ve $t = 20$ zaman aralığında meydana gelmektedir. $t = 20$ anında etkileşim tamamlandıktan sonra solitonlar tamamen birbirinden ayrılmaktadır. Bu süreçten sonra her üç soliton da ilk yapısını ve hızını koruyarak yoluna devam etmektedir.



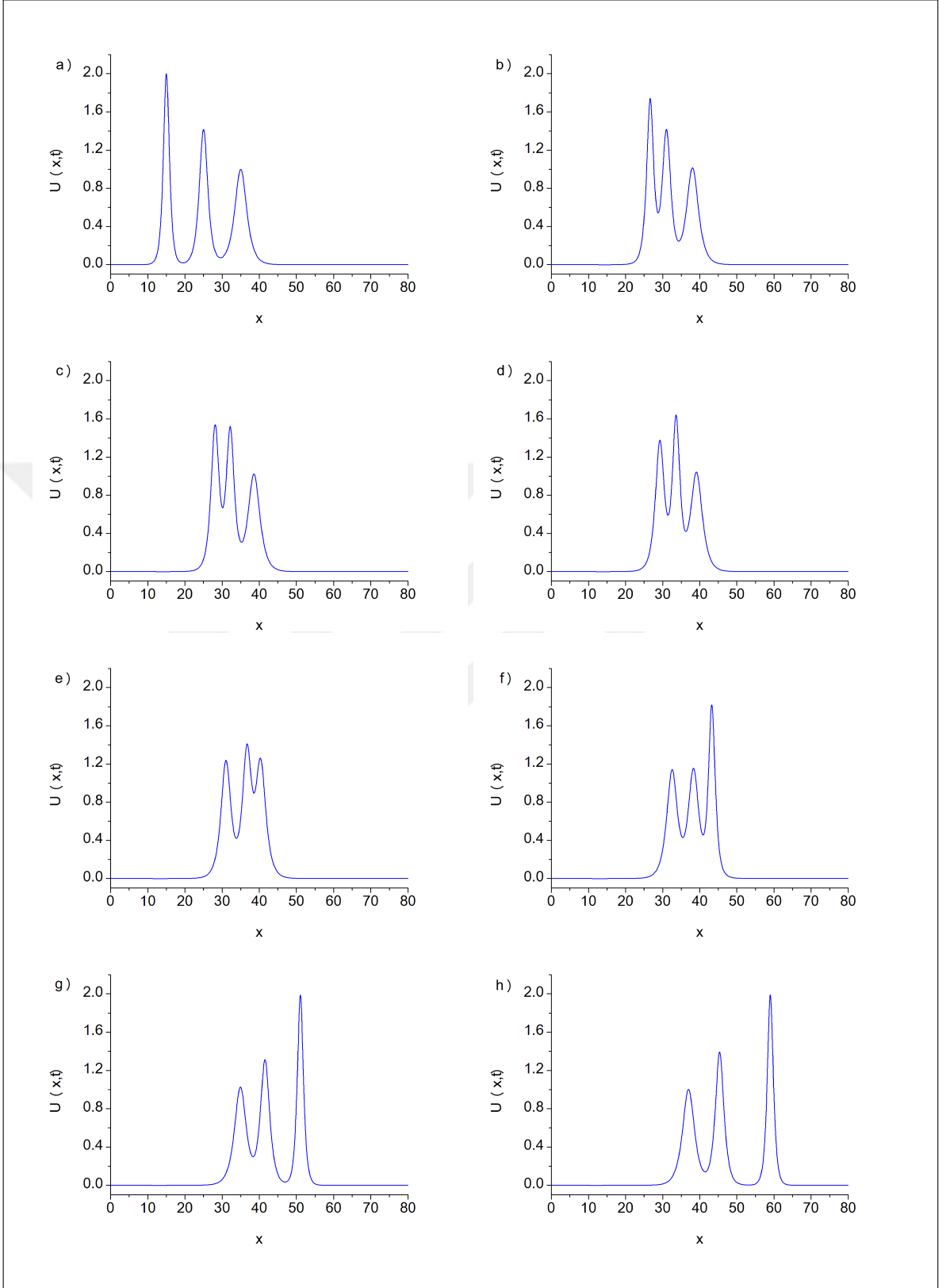
Şekil 2.5 a) $t=0$, b) $t=4$, c) $t=6$, d) $t=7$, e) $t=8$, f) $t=12$, g) $t=16$, h) $t=20$ zamanlarında iki solitary dalganın etkileşimi

Tablo 2.4 Üç solitary dalganın etkileşimi için korunum sabitlerinin karşılaştırılması

t	1	5	10	15	20
I_1	13.328677	13.328677	13.328677	13.328677	13.328677
[36]	13.329060	13.330630	13.338780	13.332640	13.332060
I_2	12.519943	12.519943	12.519943	12.519943	12.519943
[36]	12.520280	12.526260	12.540860	12.526660	12.524900
I_3	11.321178	13.483073	12.415348	12.413743	11.499146
[36]	11.249790	11.261270	11.288040	11.259970	11.256730



Şekil 2.6 Üç solitary dalganın etkileşimi



Şekil 2.7 a) $t=0$, b) $t=6$, c) $t=7$, d) $t=8$, e) $t=10$, f) $t=12$, g) $t=16$, h) $t=20$ zamanlarında üç solitary dalganın etkileşimi

2.1.4.4 Solitonların Oluşumu

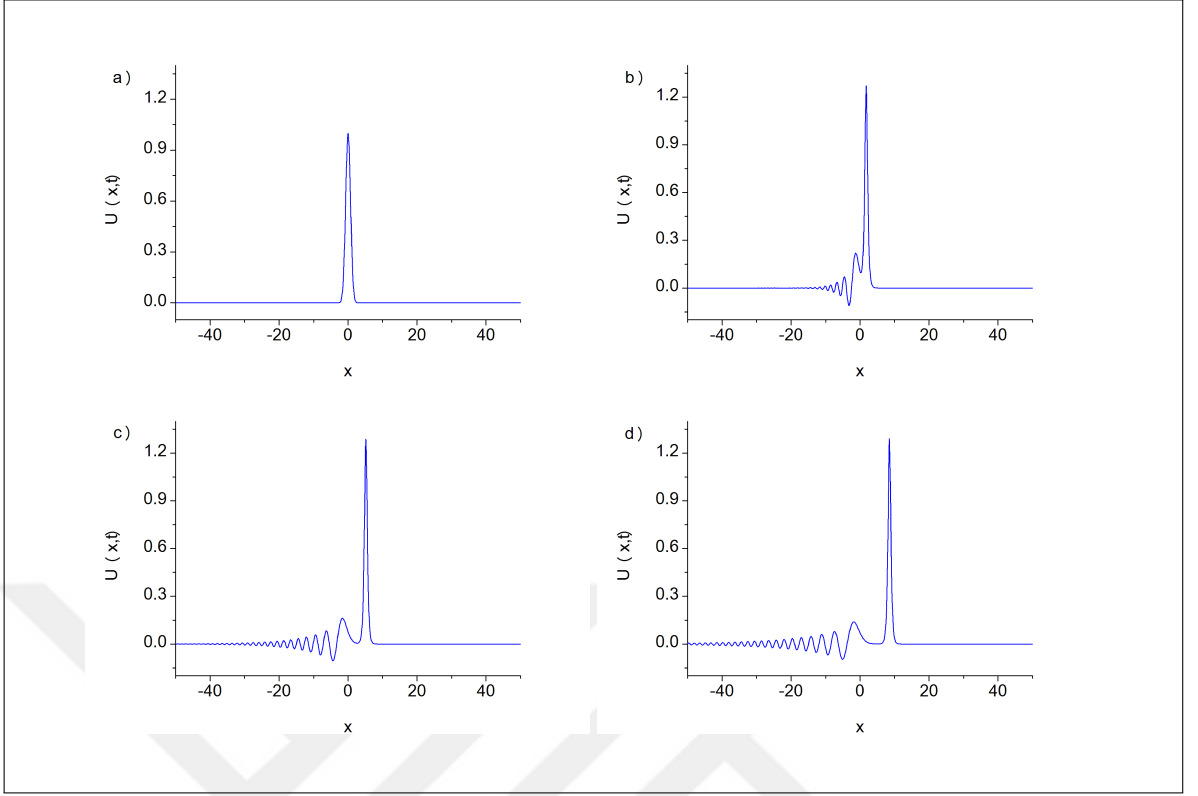
Son problem olarak, μ ' nün farklı değerleri için

$$U(x, 0) = \exp \left[- (x - x_0)^2 \right] \quad (2.38)$$

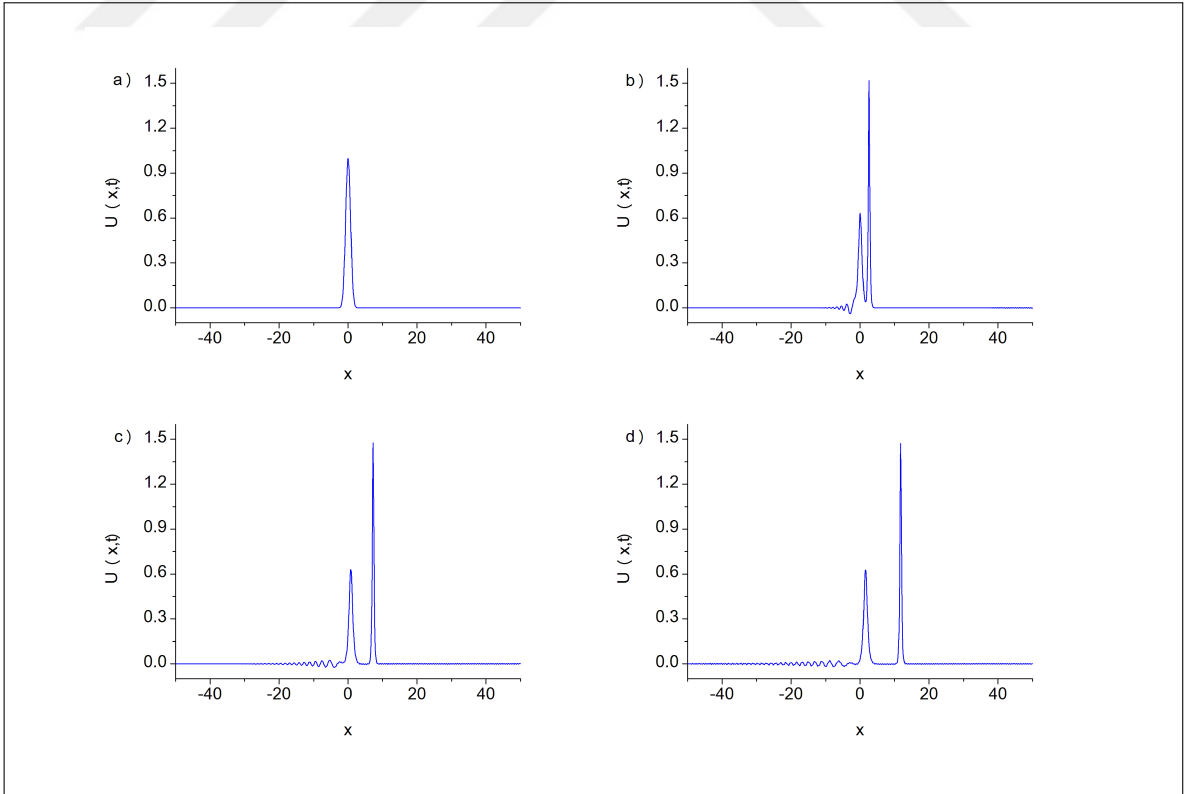
Gaussian başlangıç koşulu kullanılarak, bir soliton dizisinin oluşumu üzerinde çalışılmıştır. Bu problemde, çözümün davranışı μ ' nün değerlerine bağlıdır. Bundan dolayı, $-50 \leq x \leq 50$ aralığı üzerinde $\varepsilon = 1$, $x_0 = 0$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.01$ parametreleri için $\mu = 0.1$ ve $\mu = 0.04$ değerleri seçilmiştir. Sayısal hesaplamalar $t = 10$ anına kadar yapılmıştır. μ ' nün farklı değerleri için hareketin üç korunum sabitinin değerleri Tablo 2.5'te sunulmuştur. Ayrıca, Gaussian başlangıç şartına göre solitonların oluşumu Şekil 2.8 ve Şekil 2.9'da gösterilmiştir.

Tablo 2.5 Gaussian başlangıç şartı için korunum sabitleri

t	$\mu = 0.1$			$\mu = 0.04$		
	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
0	1.772454	1.253314	.2453184	1.772454	1.253314	.1859635
2	1.772454	1.253314	.2455421	1.772454	1.253314	.1829387
4	1.772454	1.253314	.2098375	1.772454	1.253314	.1900922
6	1.772454	1.253314	.2065022	1.772454	1.253314	.2083623
8	1.772454	1.253314	.2010116	1.772454	1.253314	.2204479
10	1.772454	1.253314	.1748934	1.772454	1.253314	.2350400



Şekil 2.8 $\mu = 0.1$ için Gaussian başlangıç şartı ile a) $t=0$, b) $t=2$, c) $t=6$, d) $t=10$ zamanlarında solitonların oluşumu



Şekil 2.9 $\mu = 0.04$ için Gaussian başlangıç şartı ile a) $t=0$, b) $t=2$, c) $t=6$, d) $t=10$ zamanlarında solitonların oluşumu

3. BÖLÜM

MODİFİYE EDİLMİŞ KORTEWEG-DE VRIES DENKLEMİNİN PETROV-GALERKİN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE SAYISAL ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde, Petrov-Galerkin sonlu elemanlar yöntemi ile mKdV denkleminin sayısal çözümleri elde edilmiştir. Yaklaşım fonksiyonu olarak kübik B-spline, ağırlık fonksiyonu olarak kuadratik B-spline fonksiyonlar kullanılmıştır. Von Neumann tekniği uygulanarak sunulan yöntemin kararlılık analizi yapılmıştır. Lineerleştirme işlemi için lumped lineerleştirme tekniği seçilmiştir. Sonlu elemanlar yaklaşımı, tek solitary dalga hareketi, aynı yönde ilerleyen farklı genliklere sahip iki ve üç solitary dalganın etkileşimi ve Gaussian başlangıç şartı ile dalgaların oluşumu ve soliton dizisinin gelişimini içeren problemler üzerinde çalışılmıştır.

3.1 mKdV Denkleminin Kübik B-Spline Petrov-Galerkin Yöntemi ile Sayısal Çözümü

3.1.1 Denklemin Gelişimi, Kuadratik ve Kübik B-Spline Fonksiyonlar

Bu bölümde, ε ve μ pozitif parametreler, x ve t indisleri sırasıyla konuma ve zamana göre türevleri belirtmek üzere $x \rightarrow \pm\infty$ iken $U \rightarrow 0$ fiziksel sınır koşulları ile mKdV denklemini

$$U_t + \varepsilon U^2 U_x + \mu U_{xxx} = 0 \quad (3.1)$$

üzerinde durulacaktır.

Sayısal yöntemi uygulayabilmek için çözüm bölgesi, $a \leq x \leq b$ aralığı üzerinde sınırlandırılarak, x_m düğüm noktaları ile $a = x_0 < x_1 \cdots < x_N = b$ gibi N eşit alt aralığa bölünmüştür. $m = 0, 1, 2, \dots, N$ için bu aralıkların uzunlukları $h = \frac{b-a}{N} = (x_{m+1} - x_m)$ 'dir.

$$\begin{aligned} U(a,t) = 0, \quad U(b,t) = 0, \\ U_x(a,t) = 0, \quad U_x(b,t) = 0 \quad , \quad t > 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

homojen sınır şartları ve

$$U(x,0) = f(x) \quad , \quad a \leq x \leq b \quad (3.3)$$

başlangıç şartı seçilerek denklem çözülecektir.

$[a, b]$ aralığı üzerindeki x_m düğüm noktalarında $\phi_m(x)$ kübik B-spline yaklaşım fonksiyonları $m = -1(1)N + 1$ için

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (x - x_{m-2})^3, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ h^3 + 3h^2(x - x_{m-1}) + 3h(x - x_{m-1})^2 - 3(x - x_{m-1})^3, & [x_{m-1}, x_m] \\ h^3 + 3h^2(x_{m+1} - x) + 3h(x_{m+1} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^3, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+2} - x)^3, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (3.4)$$

olarak verilmiştir [33]. Bu yaklaşım fonksiyonlarının $\{\phi_{-1}(x), \phi_0(x), \dots, \phi_{N+1}(x)\}$ kümesi $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlanacak olan yaklaşık çözüm için bir baz oluşturur. $U(x, t)$ tam çözümüne yaklaşan $U_N(x, t)$ yaklaşık çözümü

$$U_N(x, t) = \sum_{j=-1}^{N+1} \phi_j(x) \delta_j(t) \quad (3.5)$$

ile verilir. Burada $\delta_j(t)$, ağırlıklı rezidü ve sınır şartlarından belirlenen zamana bağlı parametredir. Her eleman için

$$h\xi = x - x_m, \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (3.6)$$

lokal koordinat dönüşümü kullanılarak, $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerinde daha kolay bir şekilde çalışılabilen $[0, 1]$ aralığına dönüştürülür. Bu durumda kübik B-spline şekil fonksiyonlar, $[0, 1]$ aralığı üzerinde ξ değişkenine bağlı olarak aşağıdaki formda tanımlanabilir.

$$\begin{aligned} \phi_{m-1}(\xi) &= (1 - \xi)^3, \\ \phi_m(\xi) &= 1 + 3(1 - \xi) + 3(1 - \xi)^2 - 3(1 - \xi)^3, \\ \phi_{m+1}(\xi) &= 1 + 3\xi + 3\xi^2 - 3\xi^3, \\ \phi_{m+2}(\xi) &= \xi^3 \end{aligned} \quad (3.7)$$

$[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerinde $\phi_{m-1}(x)$, $\phi_m(x)$, $\phi_{m+1}(x)$ ve $\phi_{m+2}(x)$ dışındaki tüm spline fonksiyonlar sıfırdır. Ayrıca, herbir kübik B-spline dört elemanı örter öyle ki her $[x_m, x_{m+1}]$ elemanı da dört spline tarafından örtülür. δ_{m-1} , δ_m , δ_{m+1} , δ_{m+2} eleman parametreleri ve ϕ_{m-1} , ϕ_m , ϕ_{m+1} , ϕ_{m+2} eleman şekil fonksiyonları olmak üzere, $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerinde $U(x, t)$

fonksiyonuna

$$U_N(x_m, t) = \sum_{j=m-1}^{m+2} \phi_j(x_m) \delta_j(t) \quad (3.8)$$

ile yaklaşılr. x_m düğüm noktalarındaki $\phi_m(x)$ kübik B-spline fonksiyonlar ve türev değerleri Tablo 3.1'deki gibi verilebilir.

' ve '' sembolleri x 'e göre sırasıyla birinci ve ikinci türevleri belirtmek üzere, (3.4) kübik

Tablo 3.1 Kübik B-spline fonksiyonlar ve türevlerinin x_m düğüm noktalarındaki değerleri

x	x_{m-2}	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}
$\phi_m(x)$	0	1	4	1	0
$h\phi'_m(x)$	0	3	0	-3	0
$h^2\phi''_m(x)$	0	6	-12	6	0

B-spline fonksiyonları ve (3.5) yaklaşık çözümü kullanılarak, U , U' ve U'' 'nin düğüm noktalarındaki değerleri δ_m eleman parametreleri cinsinden

$$\begin{aligned} U_m = U(x_m) &= \delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1}, \\ U'_m = U'(x_m) &= \frac{3}{h}(-\delta_{m-1} + \delta_{m+1}), \\ U''_m = U''(x_m) &= \frac{6}{h^2}(\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1}) \end{aligned} \quad (3.9)$$

olarak bulunur.

$\psi_m(x)$ ağırlık fonksiyonu olarak kuadratik B-spline fonksiyonlar seçilmiştir. $[a, b]$ aralığı üzerindeki x_m düğüm noktalarında $\psi_m(x)$ kuadratik B-spline fonksiyonlar

$$\psi_m(x) = \frac{1}{h^2} \begin{cases} (x_{m+2} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^2 + 3(x_m - x)^2, & [x_{m-1}, x_m] \\ (x_{m+2} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^2, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+2} - x)^2, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (3.10)$$

şeklinde tanımlanmıştır [33].

$[x_m, x_{m+1}]$ sonlu aralığı için (3.6) lokal koordinat dönüşümü kullanılarak, ψ_m kuadratik B-

spline fonksiyonlar ξ cinsinden

$$\begin{aligned}\psi_{m-1}(\xi) &= (1 - \xi)^2, \\ \psi_m(\xi) &= 1 + 2\xi - 2\xi^2, \\ \psi_{m+1}(\xi) &= \xi^2\end{aligned}\tag{3.11}$$

şeklinde tanımlanabilir.

3.1.2 Petrov-Galerkin Sonlu Elemanlar Yöntemi

$\psi(x)$ ağırlık fonksiyonu ile Petrov-Galerkin sonlu elemanlar yöntemi (3.1) denkleminde uygulanarak,

$$\int_a^b \psi(U_t + \varepsilon U^2 U_x + \mu U_{xxx}) dx = 0\tag{3.12}$$

ağırlıklı integrali bulunur. Bir tek $[x_m, x_{m+1}]$ için, (3.6) dönüşümü (3.12) denkleminde uygulanarak

$$\int_0^1 \psi \left[U_t + \varepsilon \left(\frac{U^2}{h} \right) U_\xi + \mu U_{\xi\xi\xi} \right] d\xi = 0\tag{3.13}$$

integrali elde edilir. (3.13) denkleminin terimlerinin integrali alınarak, (3.1) denkleminin zayıf formu

$$\int_0^1 [\psi(U_t + \lambda U_\xi) + \beta \psi_\xi U_{\xi\xi}] d\xi - \beta \psi U_{\xi\xi} \Big|_0^1 = 0\tag{3.14}$$

olarak elde edilir. Burada $\lambda = \frac{U^2}{h}$ ifadesi lokal olarak sabit alındıktan sonra, $(U_m + U_{m+1})^2/4$ ifadesi yardımıyla λ için bir lumped değeri

$$\lambda = \frac{1}{4h} (\delta_{m-1} + 5\delta_m + 5\delta_{m+1} + \delta_{m+2})^2\tag{3.15}$$

şeklinde hesaplanır ve lineerleştirme işlemi yapılır.

ψ_m ağırlık fonksiyonu olarak (3.11) ile verilen kuadratik B-spline fonksiyonları alınarak ve

(3.8) yaklaşımı (3.14) integral denkleminde yerine yazılarak, eleman katkıları

$$\sum_{i,j=m-1}^{m+2} \left[\int_0^1 \psi_i \phi_j d\xi \right] \delta_j^e + \sum_{i,j=m-1}^{m+2} \left[\left(\varepsilon \lambda \int_0^1 \psi_i \phi_j' d\xi \right) - \left(\mu \int_0^1 \psi_i' \phi_j'' d\xi \right) + (\mu \psi_i \phi_j''|_0^1) \right] \delta_j^e = 0 \quad (3.16)$$

formunda ifade edilir.

$\delta^e = (\delta_{m-1}, \delta_m, \delta_{m+1}, \delta_{m+2})^T$ eleman parametreleri olmak üzere (3.16) denklemi matris notasyonunda

$$[A^e] \delta^e + [\varepsilon \lambda B^e - \mu (C^e - D^e)] \delta^e = 0 \quad (3.17)$$

olarak yazılır.

$[x_m, x_{m+1}]$ tipik elemanı için i, j indisleri sadece $m-1, m, m+1, m+2$ değerlerini almak üzere, 3×4 tipindeki dikdörtgensel A^e, B^e, C^e ve D^e eleman matrisleri aşağıdaki integraller ile hesaplanmıştır:

$$A_{ij}^e = \int_0^1 \psi_i \phi_j d\xi = \frac{1}{60} \begin{bmatrix} 10 & 71 & 38 & 1 \\ 19 & 221 & 221 & 19 \\ 1 & 38 & 71 & 10 \end{bmatrix}$$

$$B_{ij}^e = \int_0^1 \psi_i \phi_j' d\xi = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} -6 & -7 & 12 & 1 \\ -13 & -41 & 41 & 13 \\ -1 & -12 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

$$C_{ij}^e = \int_0^1 \psi_i' \phi_j'' d\xi = \begin{bmatrix} -4 & 6 & 0 & -2 \\ 2 & -6 & 6 & -2 \\ 2 & 0 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$D_{ij}^e = \psi_i \phi_j''|_0^1 = \begin{bmatrix} -6 & 12 & -6 & 0 \\ -6 & 18 & -18 & 6 \\ 0 & 6 & -12 & 6 \end{bmatrix}$$

$\delta = (\delta_{-1}, \delta_0, \dots, \delta_N, \delta_{N+1})^T$ global eleman parametreleri olmak üzere, tüm elemanlar birleştirilerek (3.17) denkleminde aşağıdaki matris denklemi elde edilir.

$$[A]\dot{\delta} + [\varepsilon\lambda B - \mu(C - D)]\delta = 0 \quad (3.18)$$

3x4 tipindeki $A, \lambda B, C$ ve D dikdörtgenel matrislerinin herbir satırı

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{60}(1, 57, 302, 302, 57, 1), \\ \lambda B &= \frac{1}{10}(-\lambda_1, -12\lambda_1 - 13\lambda_2, 7\lambda_1 - 41\lambda_2 - 6\lambda_3, 6\lambda_1 + 41\lambda_2 - 7\lambda_3, 13\lambda_2 + 12\lambda_3, \lambda_3), \\ C &= 2(1, 1, -8, 8, -1, -1), \\ D &= (0, 0, 0, 0, 0, 0) \end{aligned} \quad (3.19)$$

formunda olup, burada λ_1, λ_2 ve λ_3 değerleri

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{4h}(\delta_{m-2} + 5\delta_{m-1} + 5\delta_m + \delta_{m+1})^2, \\ \lambda_2 &= \frac{1}{4h}(\delta_{m-1} + 5\delta_m + 5\delta_{m+1} + \delta_{m+2})^2, \\ \lambda_3 &= \frac{1}{4h}(\delta_m + 5\delta_{m+1} + 5\delta_{m+2} + \delta_{m+3})^2 \end{aligned} \quad (3.20)$$

şeklinde. (3.18) denkleminde $\dot{\delta}_m$ ve δ_m parametreleri yerine sırasıyla

$$\dot{\delta}_m = \frac{1}{\Delta t}(\delta_m^{n+1} - \delta_m^n) \quad , \quad \delta_m = \frac{1}{2}(\delta_m^{n+1} + \delta_m^n) \quad (3.21)$$

ileri fark yaklaşımı ve Crank-Nicolson formülasyonu kullanılırsa

$$\left\{ A + [\varepsilon\lambda B - \mu(C - D)] \frac{\Delta t}{2} \right\} \delta^{n+1} = \left\{ A - [\varepsilon\lambda B - \mu(C - D)] \frac{\Delta t}{2} \right\} \delta^n \quad (3.22)$$

matris sistemi elde edilir. Burada Δt zaman adımını göstermektedir. (3.22) matris sistemine (3.2) sınır şartları uygulanırsa, bu sistem bir karesel matris sistemine dönüşür. Bu denklem

sistemi Thomas algoritması ile çözülür. Çözüm sürecinde non-lineerlik etkisini minimize etmek için herbir zaman adımında iki kez $\delta^{n*} = \delta^n + \frac{1}{2}(\delta^n - \delta^{n-1})$ iç iterasyon işlemi uygulanmıştır.

(3.22) matris sisteminin tipik bir üyesi için n ve $n+1$ gibi iki zaman adımı arasındaki ilişki δ^n ve δ^{n+1} parametreleri cinsinden

$$\begin{aligned} & \gamma_1 \delta_{m-2}^{n+1} + \gamma_2 \delta_{m-1}^{n+1} + \gamma_3 \delta_m^{n+1} + \gamma_4 \delta_{m+1}^{n+1} + \gamma_5 \delta_{m+2}^{n+1} + \gamma_6 \delta_{m+3}^{n+1} \\ & = \gamma_6 \delta_{m-2}^n + \gamma_5 \delta_{m-1}^n + \gamma_4 \delta_m^n + \gamma_3 \delta_{m+1}^n + \gamma_2 \delta_{m+2}^n + \gamma_1 \delta_{m+3}^n \end{aligned} \quad (3.23)$$

olarak yazılabilir. Burada δ parametrelerinin katsayıları

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{1}{60} - \frac{\varepsilon \lambda \Delta t}{20} - \mu \Delta t, \\ \gamma_2 &= \frac{57}{60} - \frac{25 \varepsilon \lambda \Delta t}{20} - \mu \Delta t, \\ \gamma_3 &= \frac{302}{60} - \frac{40 \varepsilon \lambda \Delta t}{20} + 8 \mu \Delta t, \\ \gamma_4 &= \frac{302}{60} + \frac{40 \varepsilon \lambda \Delta t}{20} - 8 \mu \Delta t, \\ \gamma_5 &= \frac{57}{60} + \frac{25 \varepsilon \lambda \Delta t}{20} + \mu \Delta t, \\ \gamma_6 &= \frac{1}{60} + \frac{\varepsilon \lambda \Delta t}{20} + \mu \Delta t \end{aligned} \quad (3.24)$$

şekindedir. (3.22) matris sisteminde iterasyona başlayabilmek için, başlangıç ve sınır şartları kullanılarak $\delta^0 = (\delta_{-1}^0, \dots, \delta_{N+1}^0)$ başlangıç vektörü belirlenmelidir. Bunun için $t = 0$ anında $[a, b]$ aralığı üzerindeki

$$U_N(x, 0) = \sum_{m=-1}^{N+1} \phi_m(x) \delta_m^0 \quad (3.25)$$

yaklaşımı ile

$$U_N(x_m, 0) = U(x_m, 0), \quad (3.26)$$

$$U'_N(x_0, 0) = U'(x_N, 0) = 0, \quad m = 0, 1, \dots, N$$

şartları kullanılırsa,

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & & -3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{-1}^0 \\ \delta_0^0 \\ \vdots \\ \delta_N^0 \\ \delta_{N+1}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U'(x_0, 0) \\ U(x_0) \\ \vdots \\ U(x_N) \\ U'(x_N, 0) \end{bmatrix}$$

üçlü bant matris sistemine Thomas algoritması uygulanarak δ_m^0 başlangıç vektörü kolayca hesaplanır.

3.1.3 Kararlılık Analizi

Kararlılık analizi von Neumann teorisine bağlı olarak incelenmiştir. k dalga sayısı ve h eleman büyüklüğü olmak üzere, genlikteki ρ büyüme faktörü

$$\delta_m^n = \rho^n e^{ijkh} \quad (3.27)$$

sayısal şemanın lineerleştirilmiş formundan belirlenir. (3.27) eşitliği ile verilen Fourier mod (3.23) lineer sisteminde yerine yazılarak,

$$\begin{aligned} & \gamma_1 \rho^{n+1} e^{i(m-2)kh} + \gamma_2 \rho^{n+1} e^{i(m-1)kh} + \gamma_3 \rho^{n+1} e^{imkh} \\ & + \gamma_4 \rho^{n+1} e^{i(m+1)kh} + \gamma_5 \rho^{n+1} e^{i(m+2)kh} + \gamma_6 \rho^{n+1} e^{i(m+3)kh} \\ & = \gamma_6 \rho^n e^{i(m-2)kh} + \gamma_5 \rho^n e^{i(m-1)kh} + \gamma_4 \rho^n e^{imkh} \\ & + \gamma_3 \rho^n e^{i(m+1)kh} + \gamma_2 \rho^n e^{i(m+2)kh} + \gamma_1 \rho^n e^{i(m+3)kh} \end{aligned} \quad (3.28)$$

eşitliği elde edilir. Eğer, (3.28) ile verilen eşitlikte

$$e^{ikh} = \cos(kh) + i \sin(kh) \quad (3.29)$$

Euler formülü kullanılarak, bu denklem sadeleştirilirse ρ büyüme faktörü

$$\rho = \frac{a - ib}{a + ib} \quad (3.30)$$

olarak bulunur. Burada

$$\begin{aligned}
 a &= 14496 + 8292 \cos(kh) + 1440 \cos(2kh) + 12 \cos(3kh), \\
 b &= - [6000 - (1715\varepsilon\lambda - 23940\mu) \Delta t] \sin(kh) + [(392\varepsilon\lambda + 10080\mu) \Delta t] \sin(2kh) \\
 &\quad + [(7\varepsilon\lambda + 1260\mu) \Delta t] \sin(3kh)
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

ve $|\rho| = 1$ 'dir. Bu da lineerleştirilmiş şemanın şartsız kararlı olduğunu gösterir.

3.1.4 Sayısal Örnekler ve Sonuçlar

Tek solitary dalga hareketi, aynı yönde ilerleyen iki ve üç solitary dalganın etkileşimi ve solitonların oluşumu gibi dört problem için mKdV denkleminin sayısal çözümleri elde edilmiştir. Seçilen bazı zamanlarda analitik çözüm ve sayısal çözüm arasındaki farkı hesaplamak için

$$L_2 = \|U^{tam} - U_N\|_2 \simeq \sqrt{h \sum_{j=1}^N |U_j^{tam} - (U_N)_j|^2} \tag{3.32}$$

hata normu ve

$$L_\infty = \|U^{tam} - U_N\|_\infty \simeq \max_j |U_j^{tam} - (U_N)_j|, \quad j = 1, 2, \dots, N \tag{3.33}$$

hata normu kullanılmıştır. mKdV denklemi (3.1) sırasıyla kütle, momentum ve enerjiye karşılık gelen

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_a^b U dx \simeq h \sum_{j=1}^N U_j^n, \\
 I_2 &= \int_a^b U^2 dx \simeq h \sum_{j=1}^N (U_j^n)^2, \\
 I_3 &= \int_a^b \left[U^4 - \frac{6\mu}{\varepsilon} (U_x)^2 \right] dx \simeq h \sum_{j=1}^N \left[(U_j^n)^4 - \frac{6\mu}{\varepsilon} (U_x)_j^n \right]
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

şeklinde üç korunum sabitine sahiptir [34, 64]. Uygulanan yöntemin doğruluğunu kontrol etmek için I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitlerindeki değişim incelenmiştir.

3.1.4.1 Tek Solitary Dalga Hareketi

İlk olarak $x \rightarrow \pm\infty$ iken $U \rightarrow 0$ sınır şartı ve $t = 0$ alınarak elde edilen

$$U(x, 0) = A \operatorname{sech}[k(x - x_0)] \quad (3.35)$$

başlangıç koşulu ile mKdV denkleminin (3.1) solitary dalga çözümleri elde edilmiştir. ε , μ , c ve x_0 keyfi sabitler olmak üzere mKdV denkleminin (3.1) analitik çözümü

$$U(x, t) = A \operatorname{sech}[k(x - ct - x_0)] \quad (3.36)$$

şeklinde [36]. Burada $A = \sqrt{\frac{6c}{\varepsilon}}$ ve $k = \sqrt{\frac{c}{\mu}}$ ifadeleri sırasıyla dalga genliği ve dalga sayısını temsil etmektedir. İlave olarak, korunum sabitleri analitik olarak

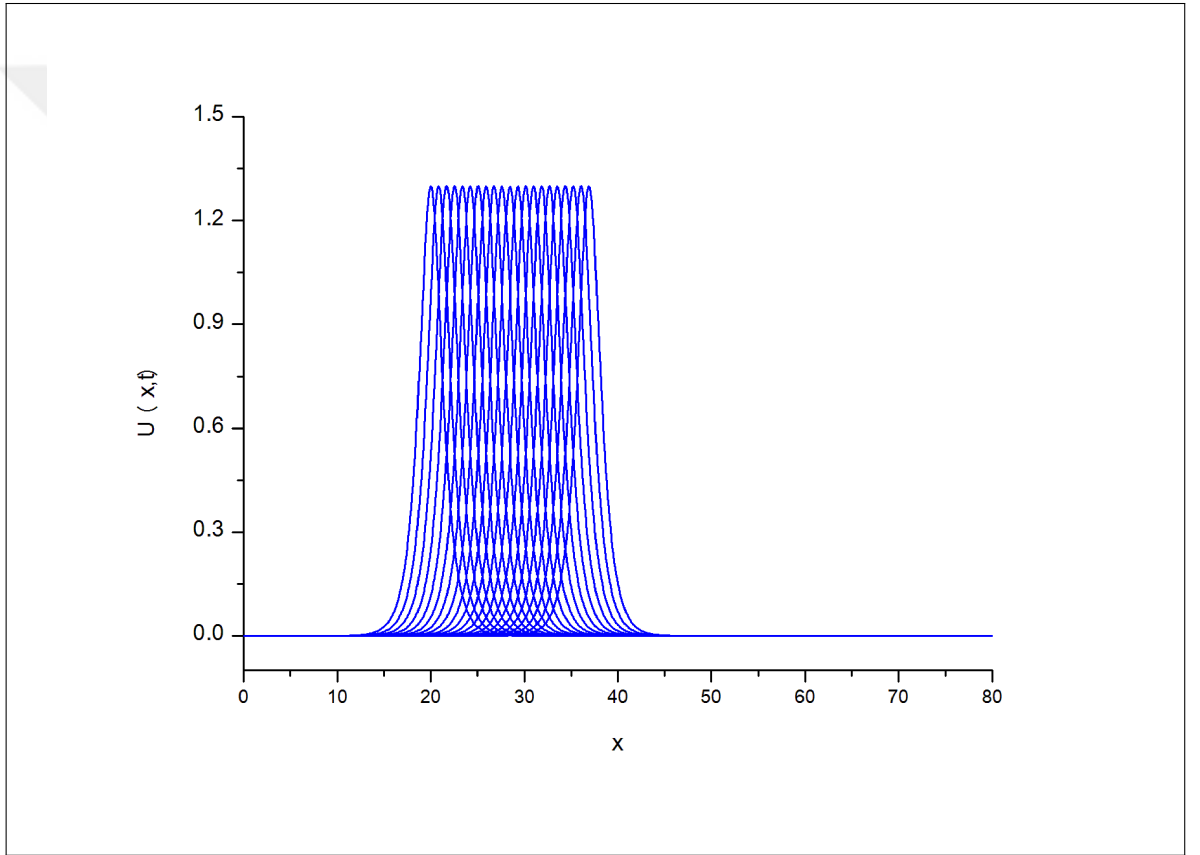
$$I_1 = \pi \sqrt{\frac{6\mu}{\varepsilon}}, \quad I_2 = \frac{12\sqrt{\mu c}}{\varepsilon}, \quad I_3 = -\frac{64c^2}{\varepsilon^2} \sqrt{\frac{\mu}{c}} \quad (3.37)$$

eşitlikleri ile elde edilmiştir [36].

Solitary dalga çözümünden elde edilen sonuçlar ile daha önce yapılan çalışmaya ait sonuçları karşılaştırmak için, $[0, 80]$ aralığı üzerinde $\varepsilon = 3$, $\mu = 1$, $c = 0.845$, $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ parametreleri seçilmiştir. Bu parametreler ile elde edilen solitary dalga 1.3 genliğe sahiptir. Diğer taraftan $t = 20$ 'ye kadar seçilen zaman adımlarında korunum sabitleri, L_2 ve L_∞ hata normları hesaplanarak, elde edilen sonuçlar Tablo 3.2'de verilmiştir. Bu tablo aynı zamanda uygulanan yöntem yardımıyla hesaplanan sayısal sonuçlar ile daha önce elde edilen sonuçların karşılaştırmasını içermektedir. Tablodan da görülebileceği gibi, programın çalışması esnasında hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normlarına ait değerler diğer çalışmada elde edilen değerlerden daha küçük, korunum sabitleri ise neredeyse sabit kalmaktadır. $t = 0, 1, 2, \dots, 20$ için tek solitary dalga hareketi Şekil 3.1'de gösterilmiştir. Ayrıca $\varepsilon = 3$, $\mu = 1$, $c = 0.845$, $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ parametreleri için, $t = 0$ 'dan $t = 20$ 'ye kadar seçilen zaman adımlarında tek solitary dalganın şekli ve konumu Şekil 3.2'de verilmiştir. Problemin çözüm bölgesi üzerinde $t = 20$ anında analitik ve sayısal sonuçlar arasındaki hatayı tespit edebilmek için, 1.3 genliğe sahip tek solitary dalga üzerinde hata dağılımı Şekil 3.3'de gösterilmiştir.

Tablo 3.2 Tek solitary dalga için korunum sabitleri ve hata normlarının karşılaştırılması

t	1	5	10	15	20
I_1	4.442866	4.442866	4.442866	4.442866	4.442866
[36]	4.443000	4.443138	4.444142	4.443420	4.443171
I_2	3.676941	3.676941	3.676941	3.676941	3.676941
[36]	3.677069	3.677535	3.678094	3.678642	3.679192
I_3	2.072795	2.073537	2.073699	2.073776	2.073846
[36]	2.073575	2.074357	2.075303	2.076232	2.077161
L_2	6.286951e-04	1.249516e-03	2.131860e-03	2.949376e-03	3.641638e-03
[36]	-	-	-	-	-
L_∞	3.630992e-04	8.397466e-04	1.399503e-03	1.880855e-03	2.285638e-03
[36]	1.206756e-03	3.621519e-03	5.942047e-03	7.626772e-03	8.642137e-03

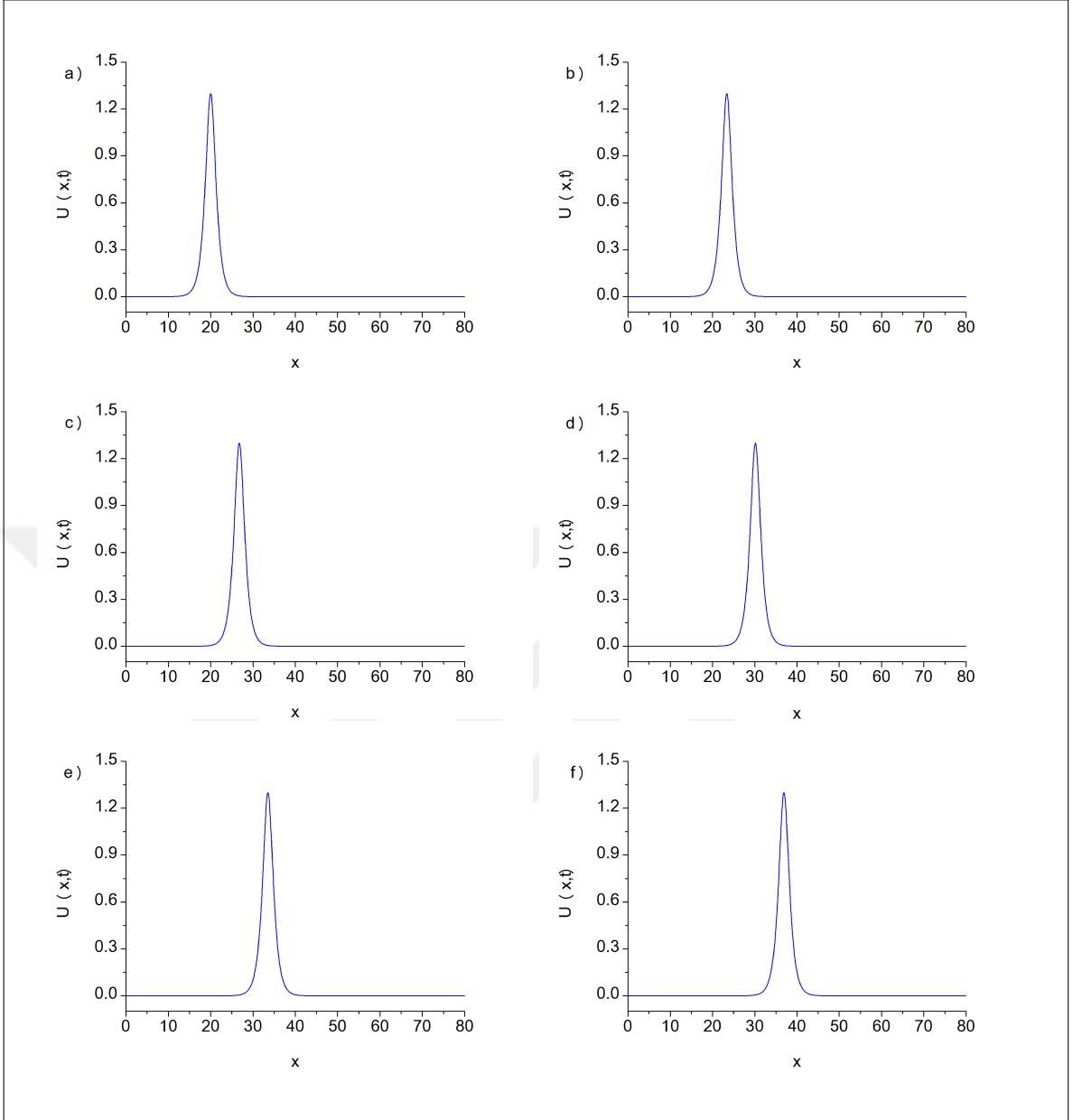


Şekil 3.1 Tek solitary dalga hareketi

3.1.4.2 İki Solitary Dalganın Etkileşimi

İkinci problem olarak, farklı genliklere sahip ayrık iki solitary dalganın lineer toplamı olarak verilen

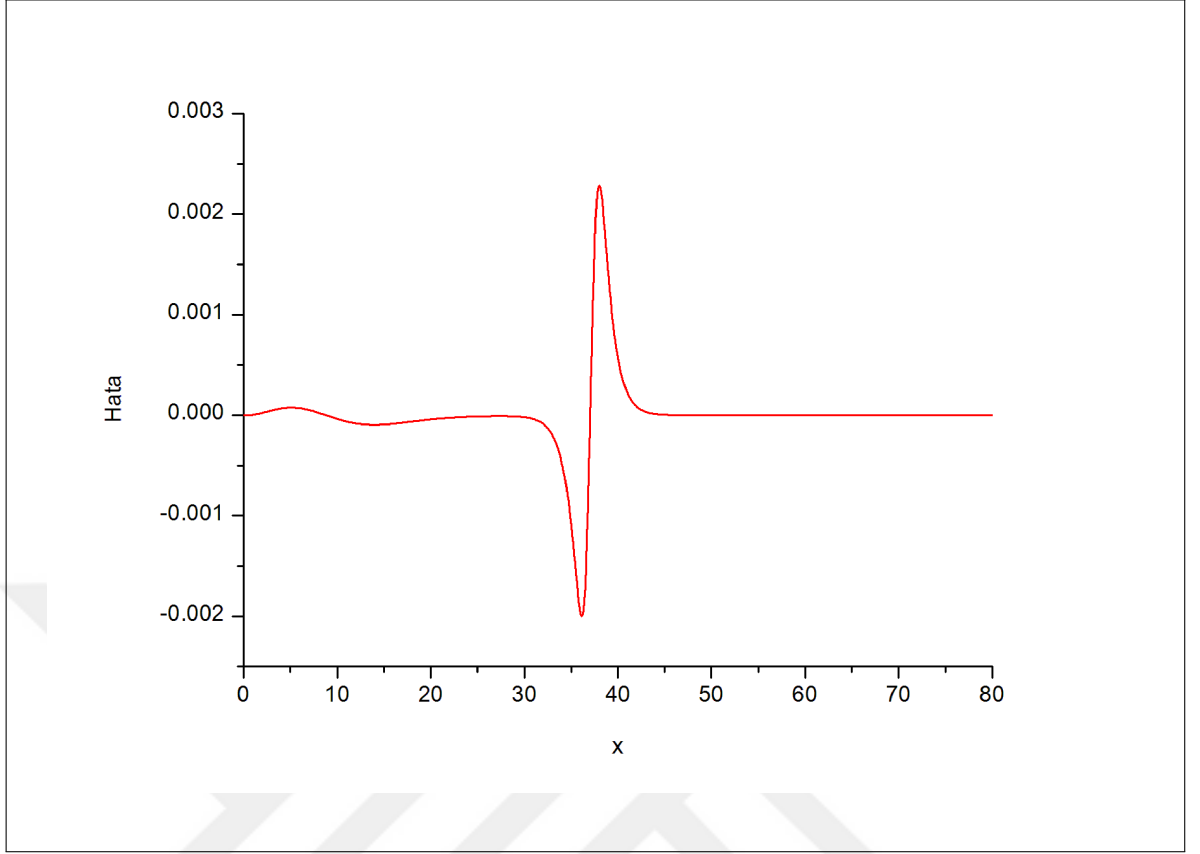
$$U(x,0) = \sum_{i=1}^2 \alpha_i \operatorname{sech}[\beta_i(x-x_i)] \quad (3.38)$$



Şekil 3.2 a) $t=0$, b) $t=4$, c) $t=8$, d) $t=12$, e) $t=16$, f) $t=20$ zamanlarında tek solitary dalga hareketi

başlangıç şartını kullanarak, aynı yönde ilerleyen farklı büyüklükteki iki solitary dalganın etkileşimi üzerinde çalışılmıştır. Burada $i = 1, 2$ için, $a_i = \sqrt{\frac{6c_i}{\varepsilon}}$, $\beta_i = \sqrt{\frac{c_i}{\mu}}$, c_i ve x_i keyfi sabitlerdir.

Hesaplanan sonuçlar ile daha önce elde edilen sonuçları karşılaştırabilmek için $0 \leq x \leq 80$ aralığı üzerinde $\varepsilon = 3$, $\mu = 1$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.01$, $c_1 = 2$, $c_2 = 1$, $x_1 = 15$ ve $x_2 = 25$ parametreleri seçilmiştir. $t = 0$ 'dan $t = 20$ 'ye kadar uygulanan yöntem ile elde edilen I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitlerinin değerleri ile daha önce elde edilen değerler karşılaştırmalı olarak Tablo 3.3'de verilmiştir. Tablodan da görüldüğü gibi, programın çalışması sırasında hesaplanan korunum sabitlerinin değerleri hemen hemen sabit kalmaktadır. $t = 0, 1, 2, \dots, 20$ için iki solitary



Şekil 3.3 $t = 20$ 'de hata dağılımı

dalganın etkileşimi Şekil 3.4'de gösterilmiştir.

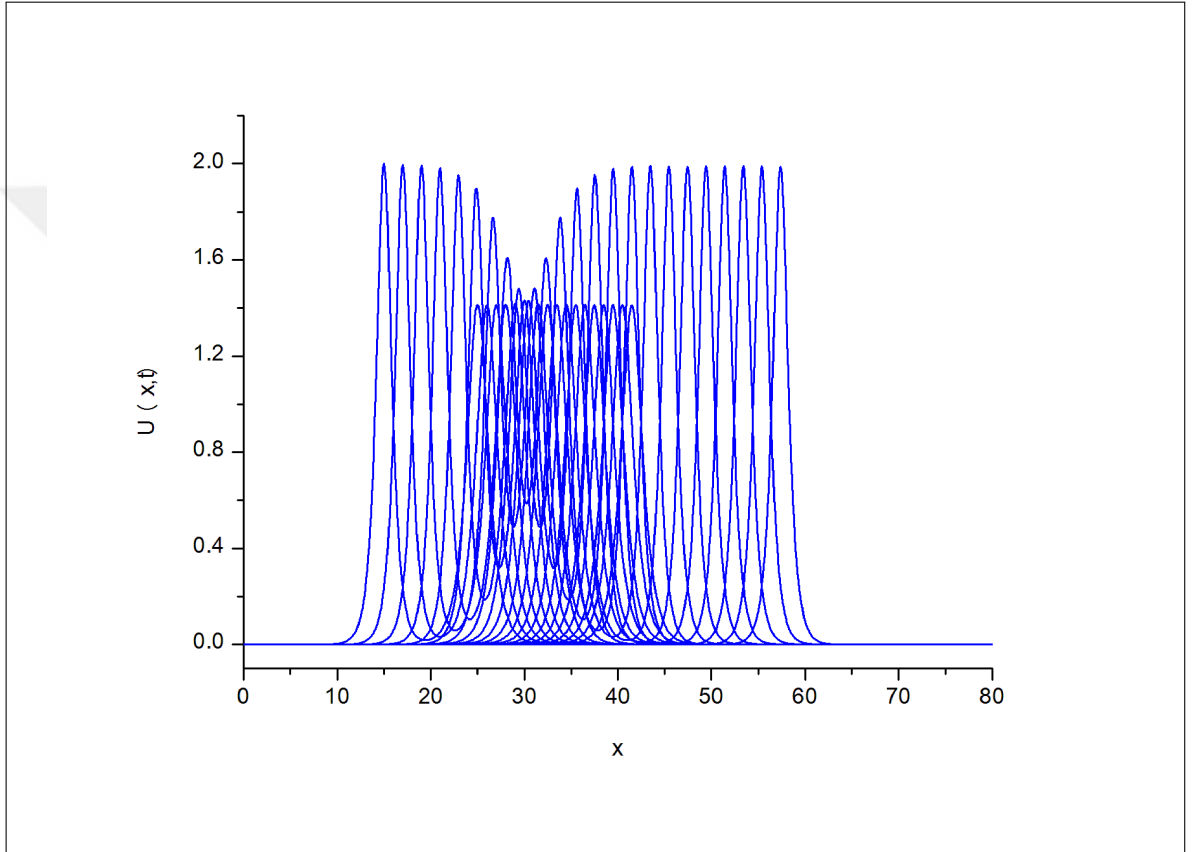
Seçilen parametreler ile $t = 0$ anında büyük solitonun başlangıç noktası $x_1 = 15$, hızı $c_1 = 2$ ve genliği $\alpha_1 = 2$ iken küçük solitonun başlangıç noktası $x_2 = 25$, hızı $c_2 = 1$ ve genliği $\alpha_2 = 1.41$ 'dir. Şekil 3.5, aynı yönde ilerleyen farklı genliklere sahip iki solitary dalganın etkileşiminin zamana göre gelişimini göstermektedir. Şekilden açıkça görüldüğü gibi, $t = 0$ anında simülasyonun başlangıcında büyük soliton küçük solitonun sol tarafında yer almaktadır. Zaman ilerledikçe, yaklaşık olarak $t = 7$ anına kadar büyük soliton küçük solitonu yakalamakta ve küçük soliton absorbe edilmektedir. Bu örtüşme süreci $t = 8$ anına kadar devam etmektedir. Sonra büyük soliton küçük solitonu geçmekte ve ayrılma süreci başlamaktadır. $t = 16$ anında etkileşim tamamlandıktan sonra büyük soliton tamamen küçük solitondan ayrılmaktadır. Bu süreçten sonra her iki soliton da ilk yapısını ve hızını koruyarak yoluna devam etmektedir.

3.1.4.3 Üç Solitary Dalganın Etkileşimi

Üçüncü problem olarak, aynı yönde ilerleyen ve farklı genliklere sahip üç solitary dalganın etkileşimi üzerinde durulacaktır. Farklı genliklere sahip ayrık üç solitary dalganın lineer

Tablo 3.3 İki solitary dalganın etkileşimi için korunum sabitlerinin karşılaştırılması

t	1	5	10	15	20
I_1	8.885732	8.885732	8.885732	8.885732	8.885732
[36]	8.886014	8.886776	8.889742	8.885983	8.884880
I_2	9.659345	9.659345	9.659345	9.659345	9.659345
[36]	9.659527	9.663714	9.662547	9.661071	9.661224
I_3	10.270908	10.853235	10.954396	10.307195	10.338415
[36]	10.239870	10.249000	10.246790	10.242580	10.242030



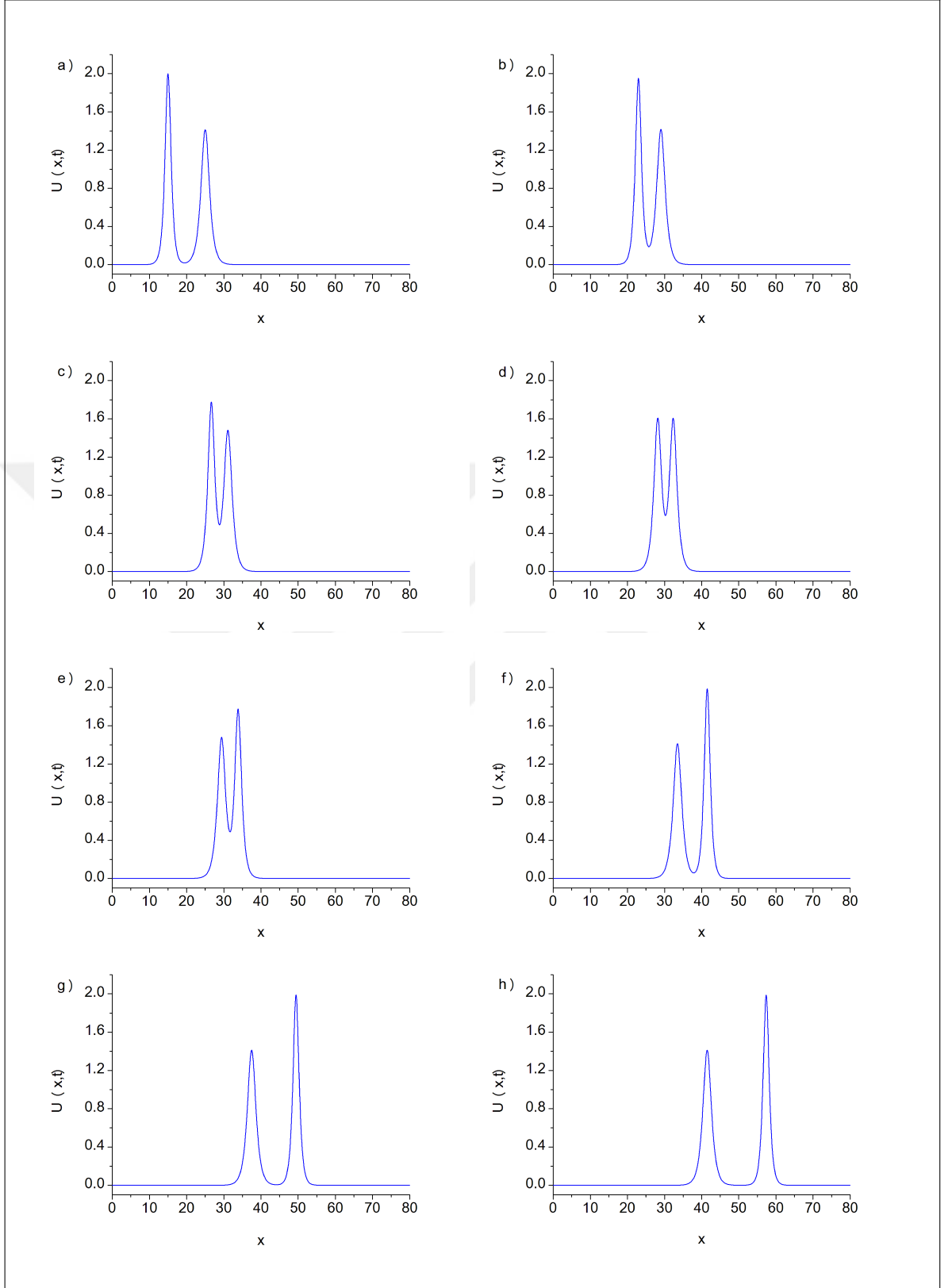
Şekil 3.4 İki solitary dalganın etkileşimi

toplama olarak verilen

$$U(x, 0) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \operatorname{sech} [\beta_i (x - x_i)] \quad (3.39)$$

başlangıç şartını kullanarak, aynı yönde ilerleyen farklı büyüklükteki üç solitary dalganın etkileşimi üzerinde çalışılmıştır. Burada, $i = 1, 2, 3$ için $a_i = \sqrt{\frac{6c_i}{\varepsilon}}$, $\beta_i = \sqrt{\frac{c_i}{\mu}}$, c_i ve x_i keyfi sabitlerdir.

Hesaplanan sonuçlar ile daha önce elde edilen sonuçları karşılaştırabilmek için $0 \leq x \leq 80$ aralığı üzerinde $\varepsilon = 3$, $\mu = 1$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.01$, $c_1 = 2$, $c_2 = 1$, $c_3 = 0.5$, $x_1 = 15$, $x_2 = 25$ ve



Şekil 3.5 a) $t=0$, b) $t=4$, c) $t=6$, d) $t=7$, e) $t=8$, f) $t=12$, g) $t=16$, h) $t=20$ zamanlarında iki solitary dalganın etkileşimi

$x_3 = 35$ parametreleri seçilmiştir. $t = 0$ 'dan $t = 20$ 'ye kadar uygulanan yöntem ile elde edilen I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitlerinin değerleri ile daha önce elde edilen değerler karşılaştırmalı

olarak Tablo 3.4’de verilmiştir. Tablodan da görüldüğü gibi, programın çalışması esnasında hesaplanan korunum sabitlerinin değerleri neredeyse sabit kalmaktadır. $t = 0, 1, 2, \dots, 20$ için üç solitary dalganın etkileşimi Şekil 3.6’da gösterilmiştir.

Seçilen parametreler ile $t = 0$ anında büyük solitonun başlangıç noktası $x_1 = 15$, hızı $c_1 = 2$ ve genliği $\alpha_1 = 2$; ortadaki solitonun başlangıç noktası $x_2 = 25$, hızı $c_2 = 1$ ve genliği $\alpha_2 = 1.41$; küçük solitonun başlangıç noktası $x_3 = 35$, hızı $c_3 = 0.5$ ve genliği $\alpha_3 = 1$ ’dir. Şekil 3.7, aynı yönde ilerleyen farklı genliklere sahip üç solitary dalganın etkileşiminin zamana göre gelişimini göstermektedir. Şekilden açıkça görüldüğü gibi, $t = 0$ anında simülasyonun başlangıcında büyük soliton solda, küçük soliton sağda diğer soliton da bu iki solitonun arasında yer almaktadır. Zaman ilerledikçe, yaklaşık olarak $t = 6$ anında etkileşim başlamakta, örtüşme süreci $t = 6$ ve $t = 20$ zaman aralığında meydana gelmektedir. $t = 20$ anında etkileşim tamamlandıktan sonra solitonlar tamamen birbirinden ayrılmaktadır. Bu süreçten sonra her üç soliton da ilk yapısını ve hızını koruyarak yoluna devam etmektedir.

Tablo 3.4 Üç solitary dalganın etkileşimi için korunum sabitlerinin karşılaştırılması

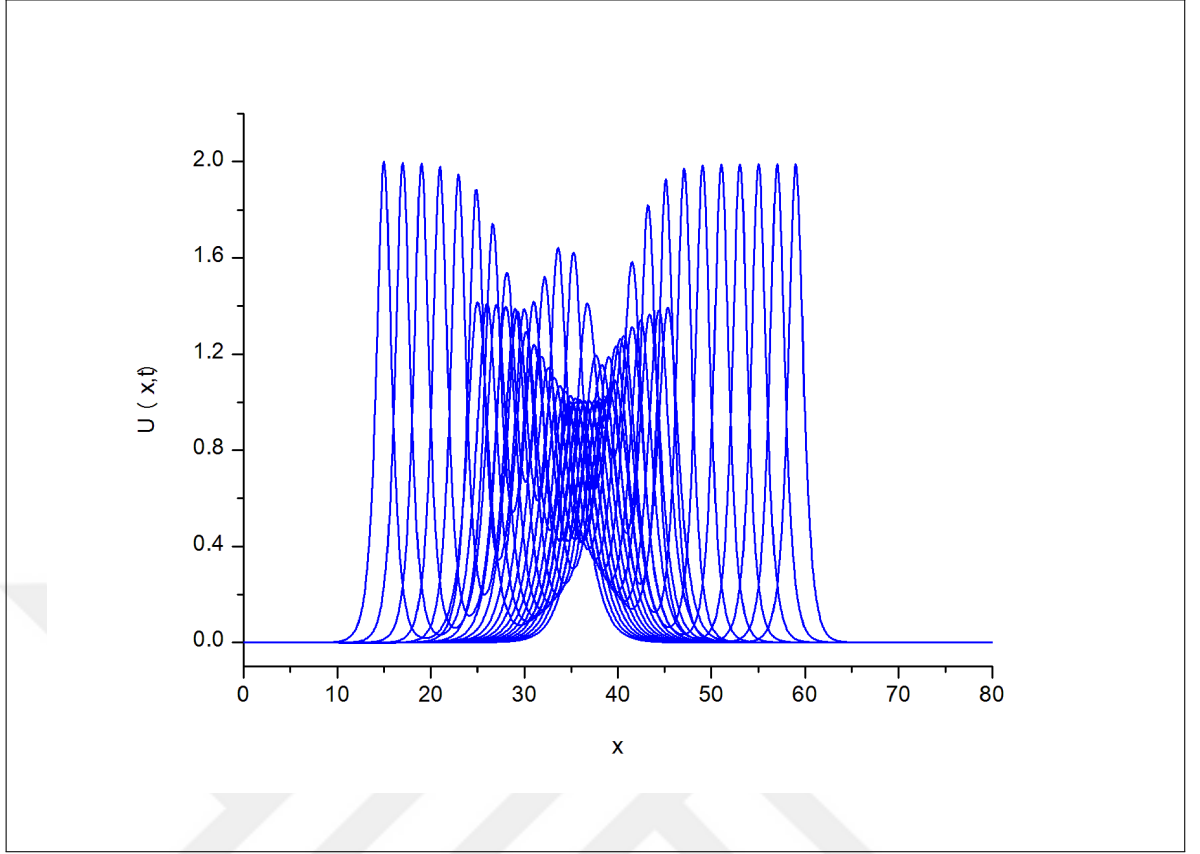
t	1	5	10	15	20
I_1	13.328677	13.328677	13.328677	13.328677	13.328677
[36]	13.329060	13.330630	13.338780	13.332640	13.332060
I_2	12.519943	12.519943	12.519943	12.519943	12.519943
[36]	12.520280	12.526260	12.540860	12.526660	12.524900
I_3	11.321264	12.452085	12.476293	12.413843	11.499239
[36]	11.249790	11.261270	11.288040	11.259970	11.256730

3.1.4.4 Solitonların Oluşumu

Son problem olarak, μ ’nün çeşitli değerleri için

$$U(x, 0) = \exp \left[-(x - x_0)^2 \right] \quad (3.40)$$

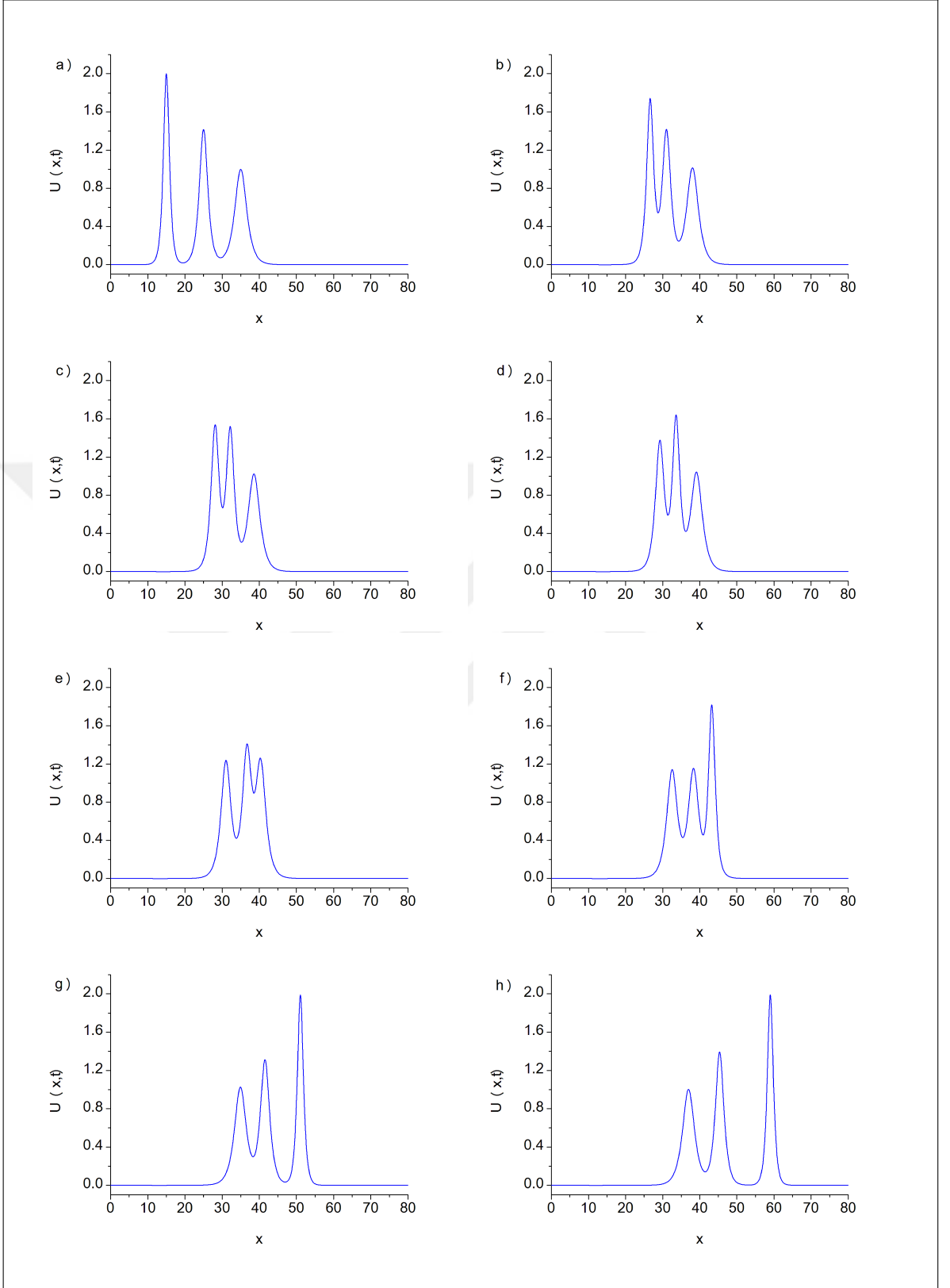
Gaussian başlangıç koşulu kullanılarak, bir soliton dizisinin oluşumu üzerinde çalışılmıştır. Bu problemde, çözümün davranışı μ ’nün değerlerine bağlıdır. Bundan dolayı, $-50 \leq x \leq 50$ aralığı üzerinde $\varepsilon = 1$, $x_0 = 0$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.01$ parametreleri için $\mu = 0.1$ ve $\mu = 0.04$ değerleri seçilmiştir. Sayısal hesaplamalar $t = 10$ anına kadar yapılmıştır. μ ’nün farklı değerleri için hareketin üç korunum sabitinin değerleri Tablo 3.5’te sunulmuştur. Ayrıca, Gaussian başlangıç şartına göre solitonların oluşumu Şekil 3.8 ve Şekil 3.9’da gösterilmiştir.



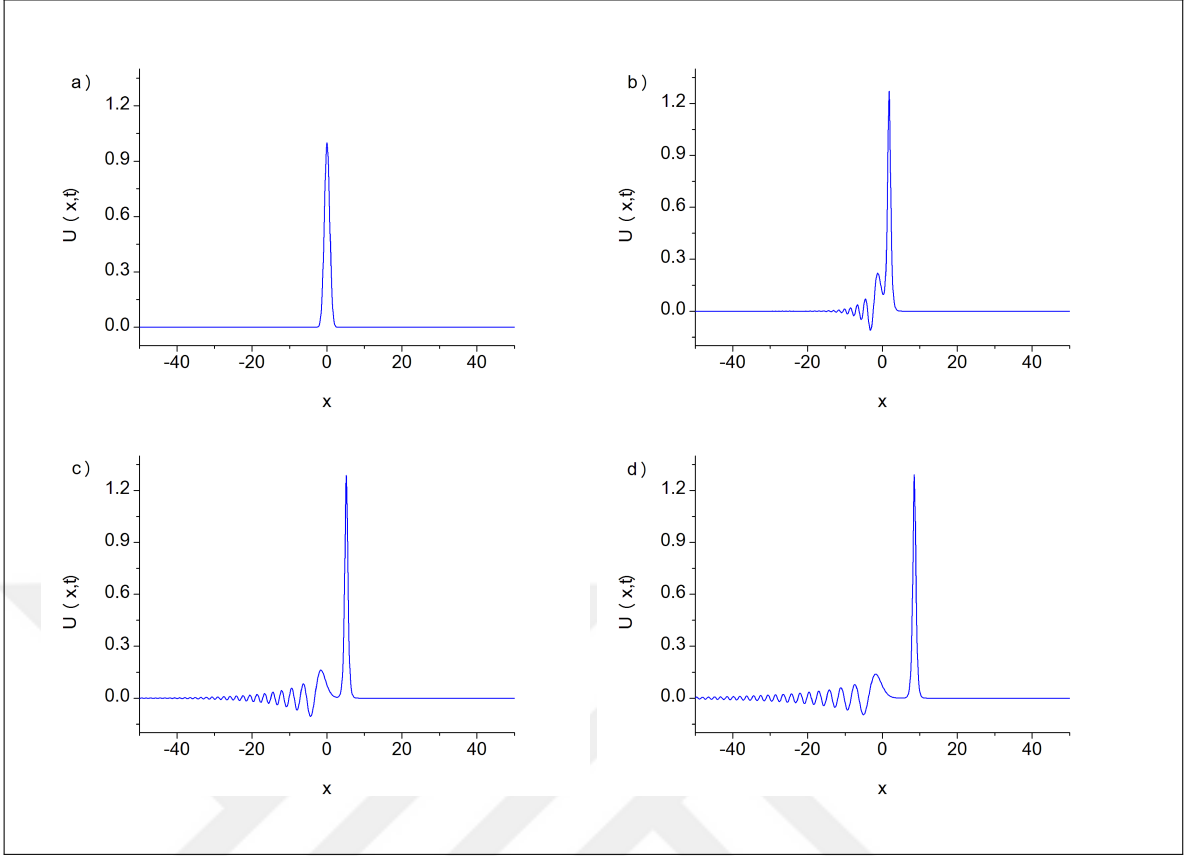
Şekil 3.6 Üç solitary dalganın etkileşimi

Tablo 3.5 Gaussian başlangıç şartı için korunum sabitleri

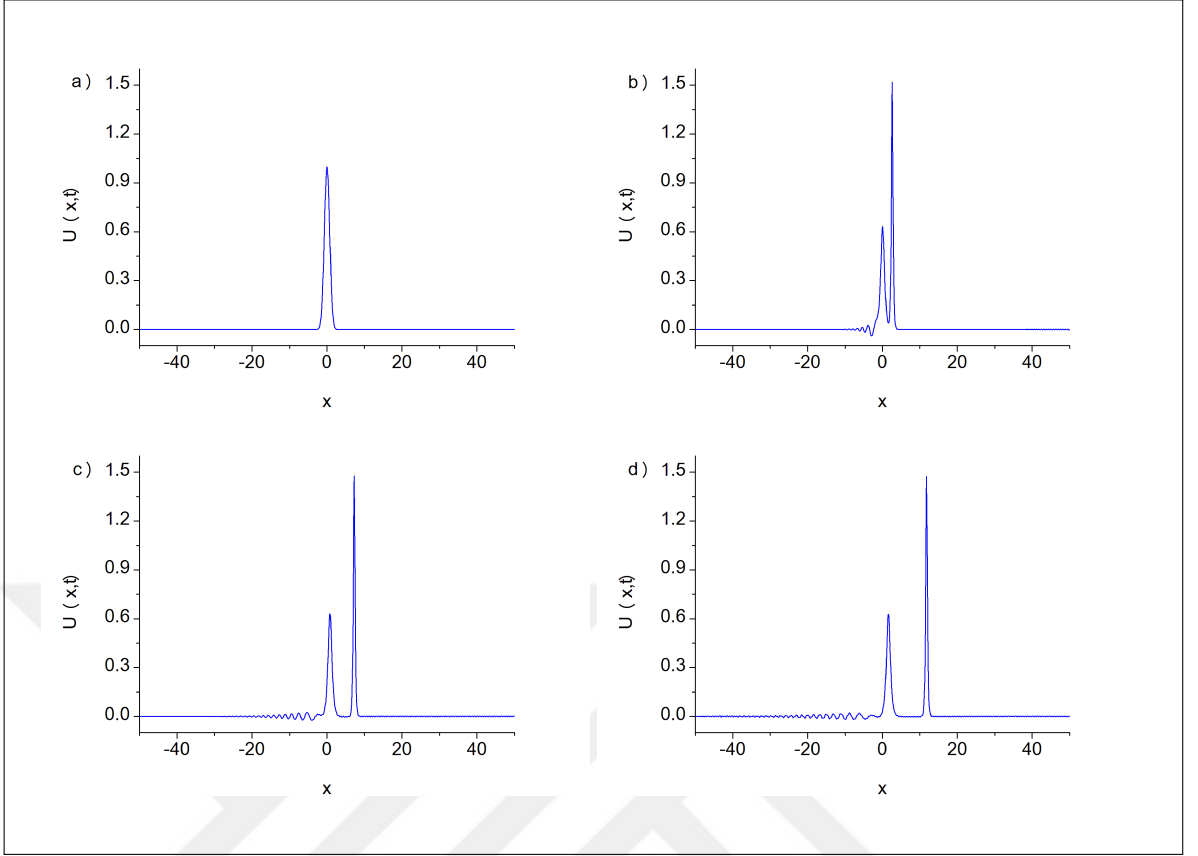
t	$\mu = 0.1$			$\mu = 0.04$		
	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
0	1.772454	1.253314	.2355683	1.772454	1.253314	.1958645
2	1.772454	1.253314	.2456447	1.772454	1.253314	.1845277
4	1.772454	1.253314	.2099601	1.772454	1.253314	.1912904
6	1.772454	1.253314	.2066328	1.772454	1.253314	.2079808
8	1.772454	1.253314	.2010120	1.772454	1.253314	.2229795
10	1.772454	1.253314	.1747070	1.772454	1.253314	.2363841



Şekil 3.7 a) $t=0$, b) $t=6$, c) $t=7$, d) $t=8$, e) $t=10$, f) $t=12$, g) $t=16$, h) $t=20$ zamanlarında üç solitary dalganın etkileşimi



Şekil 3.8 $\mu = 0.1$ için Gaussian başlangıç şartı için a) $t=0$, b) $t=2$, c) $t=6$, d) $t=10$ zamanlarında solitonların oluşumu



Şekil 3.9 $\mu = 0.04$ için Gaussian başlangıç şartı ile a) $t=0$, b) $t=2$, c) $t=6$, d) $t=10$ zamanlarında solitonların oluşumu

4. BÖLÜM

MODİFİYE EDİLMİŞ KAWAHARA DENKLEMİNİN KOLLOKASYON SONLU ELEMENLAR YÖNTEMİ İLE SAYISAL ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde, kollokasyon sonlu elemanlar yöntemi ile mK denkleminin sayısal çözümleri elde edilmiştir. Yaklaşım fonksiyonu olarak septik B-spline fonksiyonlar kullanılmıştır. Von Neumann tekniği uygulanarak sunulan yöntemin kararlılık analizi yapılmıştır. Lineerleştirme işlemi için normal lineerleştirme tekniği seçilmiştir. Sonlu elemanlar yaklaşımı, tek solitary dalga hareketi, aynı yönde ilerleyen farklı genliklere sahip iki ve üç solitary dalganın etkileşimi ve Gaussian başlangıç şartı ile solitonların oluşumunu içeren problemler üzerinde çalışılmıştır.

4.1 mK Denkleminin Septik B-Spline Kollokasyon Yöntemi ile Sayısal Çözümü

4.1.1 Denklem Gelişimi, Septik B-Spline Fonksiyonlar

Bu bölümde, α , β ve γ pozitif parametreler, x ve t indisleri sırasıyla konuma ve zamana göre türevleri belirtmek üzere, $x \rightarrow \pm\infty$ iken $U \rightarrow 0$ fiziksel sınır koşulları ile mK denklemi

$$U_t + \alpha U^2 U_x + \beta U_{xxx} - \gamma U_{xxxxx} = 0 \quad (4.1)$$

üzerinde durulacaktır.

Sayısal yöntemi uygulayabilmek için çözüm bölgesi, $a \leq x \leq b$ aralığı üzerinde sınırlandırılarak, x_m düğüm noktaları ile $a = x_0 < x_1 \cdots < x_N = b$ gibi N eşit alt aralığa bölünmüştür. $m = 0, 1, 2, \dots, N$ için bu aralıkların uzunlukları $h = \frac{b-a}{N} = (x_{m+1} - x_m)$ 'dir.

$$\begin{aligned} U(a,t) &= 0, & U(b,t) &= 0, \\ U_x(a,t) &= 0, & U_x(b,t) &= 0, \\ U_{xxx}(a,t) &= 0, & U_{xxx}(b,t) &= 0 \quad , \quad t > 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

homojen sınır şartları ve

$$U(x,0) = f(x) \quad , \quad a \leq x \leq b \quad (4.3)$$

başlangıç şartı seçilerek denklem çözülecektir.

$[a, b]$ aralığı üzerindeki x_m düğüm noktalarında $\phi_m(x)$ septik B-spline yaklaşım fonksiyonları $m = -3(1)N + 3$ için

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^7} \begin{cases} (x - x_{m-4})^7, & [x_{m-4}, x_{m-3}] \\ (x - x_{m-4})^7 - 8(x - x_{m-3})^7, & [x_{m-3}, x_{m-2}] \\ (x - x_{m-4})^7 - 8(x - x_{m-3})^7 + 28(x - x_{m-2})^7, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ (x - x_{m-4})^7 - 8(x - x_{m-3})^7 + 28(x - x_{m-2})^7 \\ - 56(x - x_{m-1})^7, & [x_{m-1}, x_m] \\ (x_{m+4} - x)^7 - 8(x_{m+3} - x)^7 + 28(x_{m+2} - x)^7 \\ - 56(x_{m+1} - x)^7, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+4} - x)^7 - 8(x_{m+3} - x)^7 + 28(x_{m+2} - x)^7, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ (x_{m+4} - x)^7 - 8(x_{m+3} - x)^7, & [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ (x_{m+4} - x)^7, & [x_{m+3}, x_{m+4}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (4.4)$$

olarak verilmiştir [33]. Bu yaklaşım fonksiyonlarının $\phi_{-3}(x)$, $\phi_{-2}(x)$, $\phi_{-1}(x)$, $\phi_0(x)$, \dots , $\phi_{N+1}(x)$, $\phi_{N+2}(x)$, $\phi_{N+3}(x)$ kümesi $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlanacak olan yaklaşık çözüm için bir baz oluşturur. $U(x, t)$ tam çözümüne yaklaşan $U_N(x, t)$ yaklaşık çözümü

$$U_N(x, t) = \sum_{j=-3}^{N+3} \phi_j(x) \delta_j(t) \quad (4.5)$$

ile verilir. Burada $\delta_j(t)$, ağırlıklı rezidü ve sınır şartlarından belirlenen zamana bağlı parametredir. Her eleman için

$$h\xi = x - x_m, \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (4.6)$$

lokal koordinat dönüşümü kullanılarak, $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerinde daha kolay bir şekilde çalışılabilen $[0, 1]$ aralığına dönüştürülür. Bu durumda septik B-spline fonksiyonlar, $[0, 1]$

aralığı üzerinde ξ değişkenine bağlı olarak aşağıdaki formda tanımlanabilir.

$$\begin{aligned}
\phi_{m-3}(\xi) &= 1 - 7\xi + 21\xi^2 - 35\xi^3 + 35\xi^4 - 21\xi^5 + 7\xi^6 - \xi^7, \\
\phi_{m-2}(\xi) &= 120 - 392\xi + 504\xi^2 - 280\xi^3 + 84\xi^5 - 42\xi^6 + 7\xi^7, \\
\phi_{m-1}(\xi) &= 1191 - 1715\xi + 315\xi^2 + 665\xi^3 - 315\xi^4 - 105\xi^5 + 105\xi^6 - 21\xi^7, \\
\phi_m(\xi) &= 2416 - 1680\xi + 560\xi^4 - 140\xi^6 + 35\xi^7, \\
\phi_{m+1}(\xi) &= 1191 + 1715\xi + 315\xi^2 - 665\xi^3 - 315\xi^4 + 105\xi^5 + 105\xi^6 - 35\xi^7, \\
\phi_{m+2}(\xi) &= 120 + 392\xi + 504\xi^2 + 280\xi^3 - 84\xi^5 - 42\xi^6 + 21\xi^7, \\
\phi_{m+3}(\xi) &= 1 + 7\xi + 21\xi^2 + 35\xi^3 + 35\xi^4 + 21\xi^5 + 7\xi^6 - \xi^7, \\
\phi_{m+4}(\xi) &= \xi^7,
\end{aligned} \tag{4.7}$$

$[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerinde $\phi_{m-3}(x)$, $\phi_{m-2}(x)$, $\phi_{m-1}(x)$, $\phi_m(x)$, $\phi_{m+1}(x)$, $\phi_{m+2}(x)$, $\phi_{m+3}(x)$ ve $\phi_{m+4}(x)$ dışındaki tüm spline fonksiyonlar sıfırdır. Herbir septik B-spline sekiz elemanı örter öyle ki her $[x_m, x_{m+1}]$ elemanı da sekiz spline tarafından örtülür. δ_{m-3} , δ_{m-2} , δ_{m-1} , δ_m , δ_{m+1} , δ_{m+2} , δ_{m+3} , δ_{m+4} eleman parametreleri ve ϕ_{m-3} , ϕ_{m-2} , ϕ_{m-1} , ϕ_m , ϕ_{m+1} , ϕ_{m+2} , ϕ_{m+3} , ϕ_{m+4} eleman şekil fonksiyonları olmak üzere, $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerinde $U(x, t)$ fonksiyonuna

$$U_N(x_m, t) = \sum_{j=m-3}^{m+4} \phi_j(x_m) \delta_j(t) \tag{4.9}$$

ile yaklaşılır. x_m düğüm noktalarındaki $\phi_m(x)$ septik B-spline fonksiyonlar ve türev değerleri Tablo 4.1'deki gibi verilebilir.

Tablo 4.1 Septik B-spline fonksiyonlar ve türevlerinin x_m düğüm noktalarındaki değerleri

x	x_{m-4}	x_{m-3}	x_{m-2}	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}	x_{m+3}	x_{m+4}
$\phi_m(x)$	0	1	120	1191	2416	1191	120	1	0
$h\phi'_m(x)$	0	-7	-392	-1715	0	1715	392	7	0
$h^2\phi''_m(x)$	0	42	1008	630	-3360	630	1008	42	0
$h^3\phi'''_m(x)$	0	-210	-1680	3990	0	-3990	1680	210	0
$h^4\phi^{iv}_m(x)$	0	840	0	-7560	13440	-7560	0	840	0
$h^5\phi^v_m(x)$	0	-2520	10080	-12600	0	12600	-100800	2520	0
$h^6\phi^{vi}_m(x)$	0	5040	-30240	75600	-100800	75600	-30240	5040	0

' , '' , '''' , iv , v ve vi sembolleri sırasıyla x 'e göre altıncı mertebeye kadar türevleri belirtmek üzere, (4.4) septik B-spline fonksiyonları ve (4.5) deneme fonksiyonu kullanılarak, U , U' , U'' , U''' ,

U^{iv} , U^v ve U^{vi} 'nin düğüm noktalarındaki değerleri δ_m eleman parametreleri cinsinden

$$\begin{aligned}
U_m &= U(x_m) = \delta_{m-3} - 6\delta_{m-2} + 15\delta_{m-1} - 20\delta_m + 15\delta_{m+1} - 6\delta_{m+2} + \delta_{m+3}, \\
U'_m &= U'(x_m) = \frac{7}{h}(-\delta_{m-3} - 56\delta_{m-2} - 245\delta_{m-1} + 245\delta_{m+1} + 56\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \\
U''_m &= U''(x_m) = \frac{42}{h^2}(\delta_{m-3} + 24\delta_{m-2} + 15\delta_{m-1} - 80\delta_m + 15\delta_{m+1} + 24\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \\
U'''_m &= U'''(x_m) = \frac{210}{h^3}(-\delta_{m-3} - 8\delta_{m-2} + 19\delta_{m-1} - 19\delta_{m+1} + 8\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \\
U^{iv}_m &= U^{iv}(x_m) = \frac{840}{h^4}(\delta_{m-3} - 9\delta_{m-1} + 16\delta_m - 9\delta_{m+1} + \delta_{m+3}), \\
U^v_m &= U^v(x_m) = \frac{2520}{h^5}(-\delta_{m-3} + 4\delta_{m-2} - 5\delta_{m-1} + 5\delta_{m+1} - 4\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \\
U^{vi}_m &= U^{vi}(x_m) = \frac{5040}{h^6}(\delta_{m-3} - 6\delta_{m-2} + 15\delta_{m-1} - 20\delta_m + 15\delta_{m+1} - 6\delta_{m+2} + \delta_{m+3})
\end{aligned} \tag{4.10}$$

olarak bulunur.

4.1.2 Kollokasyon Sonlu Elemanlar Yöntemi

(4.10) denklemindeki ifadeler (4.1) denkleminde yerlerine yazılarak,

$$\begin{aligned}
&\dot{\delta}_{m-3} + 120\dot{\delta}_{m-2} + 1191\dot{\delta}_{m-1} + 2416\dot{\delta}_m + 1191\dot{\delta}_{m+1} + 120\dot{\delta}_{m+2} + \dot{\delta}_{m+3} \\
&+ \frac{7\alpha Z_m}{h}(-\delta_{m-3} - 56\delta_{m-2} - 245\delta_{m-1} + 245\delta_{m+1} + 56\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) \\
&+ \frac{210\beta}{h^3}(-\delta_{m-3} - 8\delta_{m-2} + 19\delta_{m-1} - 19\delta_{m+1} + 8\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) \\
&- \frac{2520\gamma}{h^5}(-\delta_{m-3} + 4\delta_{m-2} - 5\delta_{m-1} + 5\delta_{m+1} - 4\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) = 0
\end{aligned} \tag{4.11}$$

denklemini elde edilir. Lineerleştirme tekniği için, (4.1) denkleminde lineer olmayan $U^2 U_x$ teriminde U^2 terimi

$$Z_m = U_m^2 = (\delta_{m-3} + 120\delta_{m-2} + 1191\delta_{m-1} + 2416\delta_m + 1191\delta_{m+1} + 120\delta_{m+2} + \delta_{m+3})^2 \tag{4.12}$$

şeklinde lokal sabit olarak alınmıştır. (4.11) denkleminde $\dot{\delta}_m$ ve δ_m parametreleri yerine sırasıyla

$$\dot{\delta}_m = \frac{1}{\Delta t} (\delta_m^{n+1} - \delta_m^n) \quad , \quad \delta_m = \frac{1}{2} (\delta_m^{n+1} + \delta_m^n) \tag{4.13}$$

ileri fark yaklaşımı ve Crank-Nicolson formülasyonu kullanılırsa, n ve $n + 1$ gibi iki zaman adımı arasındaki ilişki δ^n ve δ^{n+1} parametreleri cinsinden

$$\begin{aligned} & \gamma_1 \delta_{m-3}^{n+1} + \gamma_2 \delta_{m-2}^{n+1} + \gamma_3 \delta_{m-1}^{n+1} + \gamma_4 \delta_m^{n+1} + \gamma_5 \delta_{m+1}^{n+1} + \gamma_6 \delta_{m+2}^{n+1} + \gamma_7 \delta_{m+3}^{n+1} \\ & = \gamma_7 \delta_{m-3}^n + \gamma_6 \delta_{m-2}^n + \gamma_5 \delta_{m-1}^n + \gamma_4 \delta_m^n + \gamma_3 \delta_{m+1}^n + \gamma_2 \delta_{m+2}^n + \gamma_1 \delta_{m+3}^n \end{aligned} \quad (4.14)$$

olarak yazılabilir. Burada

$$E = \frac{7}{2h} \alpha \Delta t, \quad M = \frac{105}{h^3} \beta \Delta t, \quad K = \gamma \frac{840}{h^4} \Delta t \quad (4.15)$$

ve Δt zaman adımını göstermek üzere, δ parametrelerinin katsayıları

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= [1 - EZ_m - M + K], \\ \gamma_2 &= [120 - 56EZ_m - 8M - 4K], \\ \gamma_3 &= [1191 - 245EZ_m + 19M + 5K], \\ \gamma_4 &= [2416], \\ \gamma_5 &= [1191 + 245EZ_m - 19M - 5K], \\ \gamma_6 &= [120 + 56EZ_m + 8M + 4K], \\ \gamma_7 &= [1 + EZ_m + M - K], \\ m &= 0, 1, \dots, N \end{aligned} \quad (4.16)$$

şeklindedir.

(4.14) sistemi $\delta_{-3}, \delta_{-2}, \dots, \delta_{N+1}, \delta_{N+2}, \delta_{N+3}$ şeklinde $N + 7$ bilinmeyene sahip $N + 1$ lineer denklemden oluşur. Bu sistemin çözülebilmesi için (4.2) sınır şartlarından elde edilebilecek altı ek şarta ihtiyaç vardır. Bu şartlar yardımıyla (4.14) sistemindeki $\delta_{-3}, \delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_N, \delta_{N+1}, \delta_{N+2}$ ve δ_{N+3} parametreleri yok edilerek, $\delta = (\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_N)$ şeklinde $N + 1$ bilinmeyene sahip

$$A\delta^{n+1} = B\delta^n \quad (4.17)$$

$(N + 1) \times (N + 1)$ tipinde septadiagonal matris sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi Thomas algoritması ile çözülür. Çözüm sürecinde non-lineerlik etkisini minimize etmek için herbir zaman adımında iki kez $\delta^{n*} = \delta^n + \frac{1}{2} (\delta^n - \delta^{n-1})$ iç iterasyon işlemi uygulanmıştır.

dır.

4.1.3 Kararlılık Analizi

Kararlılık analizi von Neumann teorisine bağlı olarak incelenmiştir. k dalga sayısı ve h eleman büyüklüğü olmak üzere, genlikteki ρ büyüme faktörü

$$\delta_m^n = \rho^n e^{imkh} \quad (4.21)$$

sayısal şemanın lineerleştirilmiş formundan belirlenir. (4.21) eşitliği ile verilen Fourier mod (4.14) lineer sisteminde yerine yazılarak,

$$\begin{aligned} & \gamma_1 \rho^{n+1} e^{i(m-3)kh} + \gamma_2 \rho^{n+1} e^{i(m-2)kh} + \gamma_3 \rho^{n+1} e^{i(m-1)kh} + \gamma_4 \rho^{n+1} e^{imkh} \\ & + \gamma_5 \rho^{n+1} e^{i(m+1)kh} + \gamma_6 \rho^{n+1} e^{i(m+2)kh} + \gamma_7 \rho^{n+1} e^{i(m+3)kh} \\ & = \gamma_7 \rho^n e^{i(m-3)kh} + \gamma_6 \rho^n e^{i(m-2)kh} + \gamma_5 \rho^n e^{i(m-1)kh} + \gamma_4 \rho^n e^{imkh} \\ & + \gamma_3 \rho^n e^{i(m+1)kh} + \gamma_2 \rho^n e^{i(m+2)kh} + \gamma_1 \rho^n e^{i(m+3)kh} \end{aligned} \quad (4.22)$$

eşitliği elde edilir. Eğer, (4.22) ile verilen eşitlikte

$$e^{ikh} = \cos(kh) + i \sin(kh) \quad (4.23)$$

Euler formülü kullanılarak, bu denklem sadeleştirilirse ρ büyüme faktörü

$$\rho = \frac{a - ib}{a + ib} \quad (4.24)$$

olarak bulunur. Burada

$$\begin{aligned} a &= (\gamma_3 + \gamma_5) \cos[hk] + (\gamma_2 + \gamma_6) \cos[2hk] + (\gamma_1 + \gamma_7) \cos[3hk] + \gamma_4, \\ b &= (\gamma_7 - \gamma_1) \sin[hk] + (\gamma_6 - \gamma_2) \sin[2hk] + (\gamma_5 - \gamma_3) \sin[3hk] \end{aligned} \quad (4.25)$$

ve $|\rho| = 1$ 'dir. Bu da lineerleştirilmiş şemanın şartsız kararlı olduğunu gösterir.

4.1.4 Sayısal Örnekler ve Sonuçlar

Tek solitary dalga hareketi, aynı yönde ilerleyen iki ve üç solitary dalganın etkileşimi ve solitonların oluşumu gibi dört problem için mKawahara denkleminin sayısal çözümleri elde edilmiştir. Seçilen bazı zamanlarda analitik çözüm ve sayısal çözüm arasındaki farkı hesapla-

mak için

$$L_2 = \|U^{tam} - U_N\|_2 \simeq \sqrt{h \sum_{j=1}^N |U_j^{tam} - (U_N)_j|^2} \quad (4.26)$$

hata normu ve

$$L_\infty = \|U^{tam} - U_N\|_\infty \simeq \max_j |U_j^{tam} - (U_N)_j|, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (4.27)$$

hata normu kullanılmıştır. mKawahara denklemi (4.1) sırasıyla kütle ve momentuma karşılık gelen

$$I_1 = \int_a^b U dx \simeq h \sum_{j=1}^N U_j^n, \quad (4.28)$$

$$I_2 = \int_a^b U^2 dx \simeq h \sum_{j=1}^N (U_j^n)^2$$

şeklinde iki korunum sabitine sahiptir. Uygulanan yöntemin doğruluğunu kontrol etmek için I_1 ve I_2 korunum sabitlerindeki değişim incelenmiştir.

4.1.4.1 Tek Solitary Dalga Hareketi

$x \rightarrow \pm\infty$ iken $U \rightarrow 0$ sınır şartı ve $t = 0$ alınarak elde edilen

$$U(x, 0) = A \operatorname{sech}^2 [k(x - x_0)] \quad (4.29)$$

başlangıç koşulu ile mKawahara denkleminin (4.1) solitary dalga çözümleri elde edilmiştir. α , β , γ ve x_0 keyfi sabitler olmak üzere mKawahara denkleminin (4.1) analitik çözümü

$$U(x, t) = A \operatorname{sech}^2 [k(x - ct - x_0)] \quad (4.30)$$

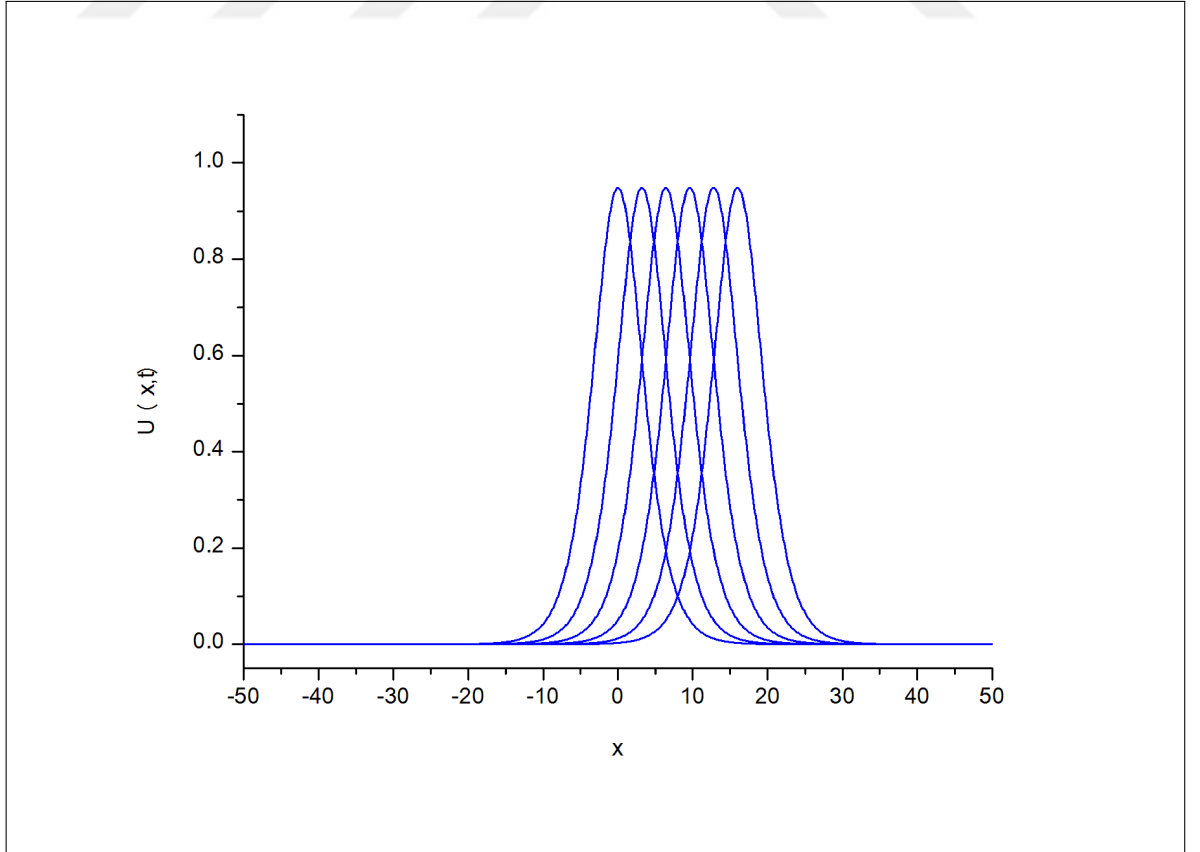
şeklinde dir. Burada $A = \frac{3}{\sqrt{10}} \sqrt{\frac{\beta^2}{\alpha\gamma}}$, $k = \sqrt{\frac{1}{20} \frac{\beta}{\gamma}}$ ve $c = \frac{4}{25} \frac{\beta^2}{\gamma}$ ifadeleri sırasıyla dalga genliği, dalga sayısı ve dalga hızını temsil etmektedir.

Solitary dalga çözümü için, $[-50, 50]$ aralığı üzerinde $\alpha = \beta = \gamma = 1$, $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.05$ parametreleri seçilmiştir. Bu parametreler ile elde edilen solitary dalga 0.94868 genliğe sahiptir. Diğer taraftan $t = 100$ 'e kadar seçilen zaman adımlarında korunum sabitleri, L_2 ve L_∞ hata normları hesaplanarak, elde edilen sonuçlar Tablo 4.2'de verilmiştir. Tablo-

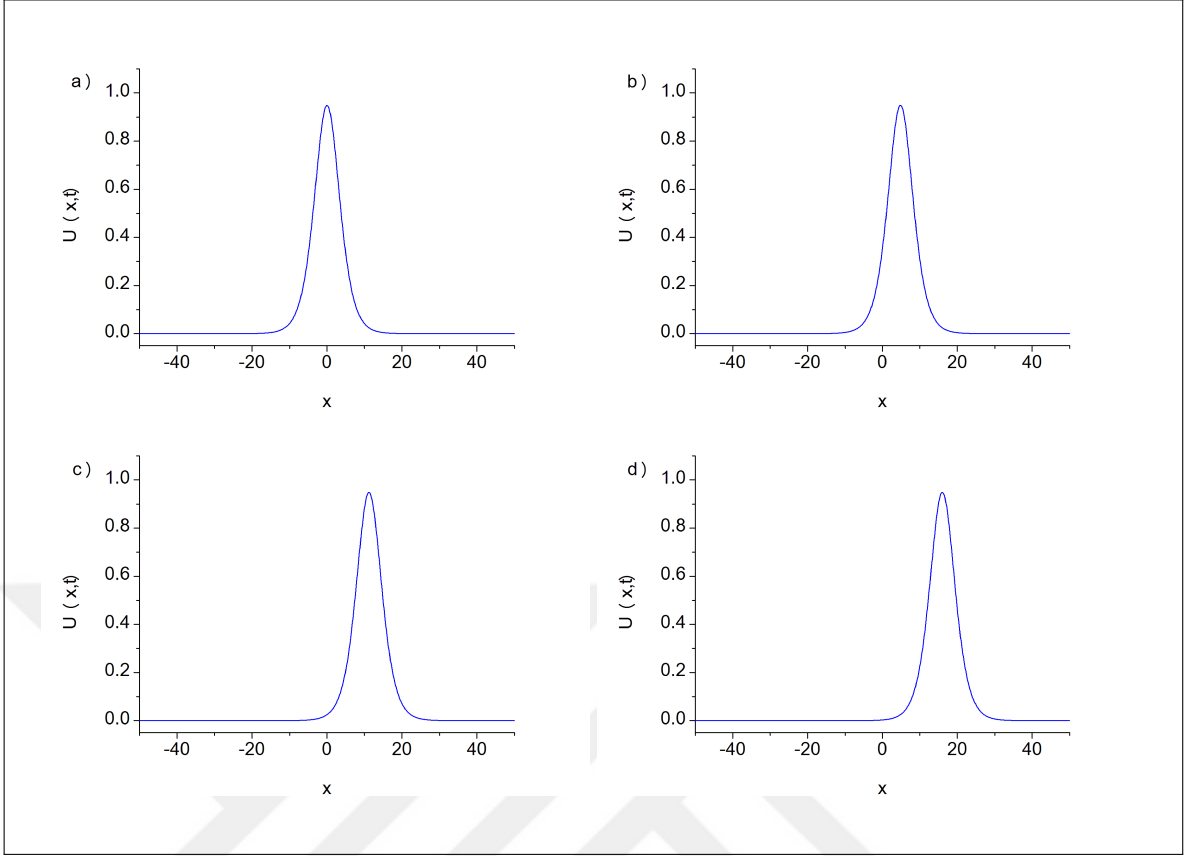
dan da görülebileceği gibi, programın çalışması esnasında hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları oldukça küçük, korunum sabitleri ise neredeyse sabit kalmaktadır. Burada I_1 ve I_2 korunum sabitlerinin bağıl değişim yüzdeleri sırasıyla $1.164 \times 10^{-4} \%$ ve $6.854 \times 10^{-10} \%$ 'dir. $t = 0, 20, 40, \dots, 100$ için tek solitary dalga hareketi Şekil 4.1'de gösterilmiştir. Ayrıca $\alpha = \beta = \gamma = 1$, $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.05$ parametreleri için, $t = 0$ 'dan $t = 100$ 'e kadar seçilen zaman adımlarında tek solitary dalganın şekli ve konumu Şekil 4.2'de verilmiştir. Problemin çözüm bölgesi üzerinde $t = 100$ anında analitik ve sayısal sonuçlar arasındaki hatayı tespit edebilmek için, 0.94868 genliğe sahip tek solitary dalga üzerinde hata dağılımı Şekil 4.3'de gösterilmiştir.

Tablo 4.2 Tek solitary dalga için korunum sabitleri ve hata normları

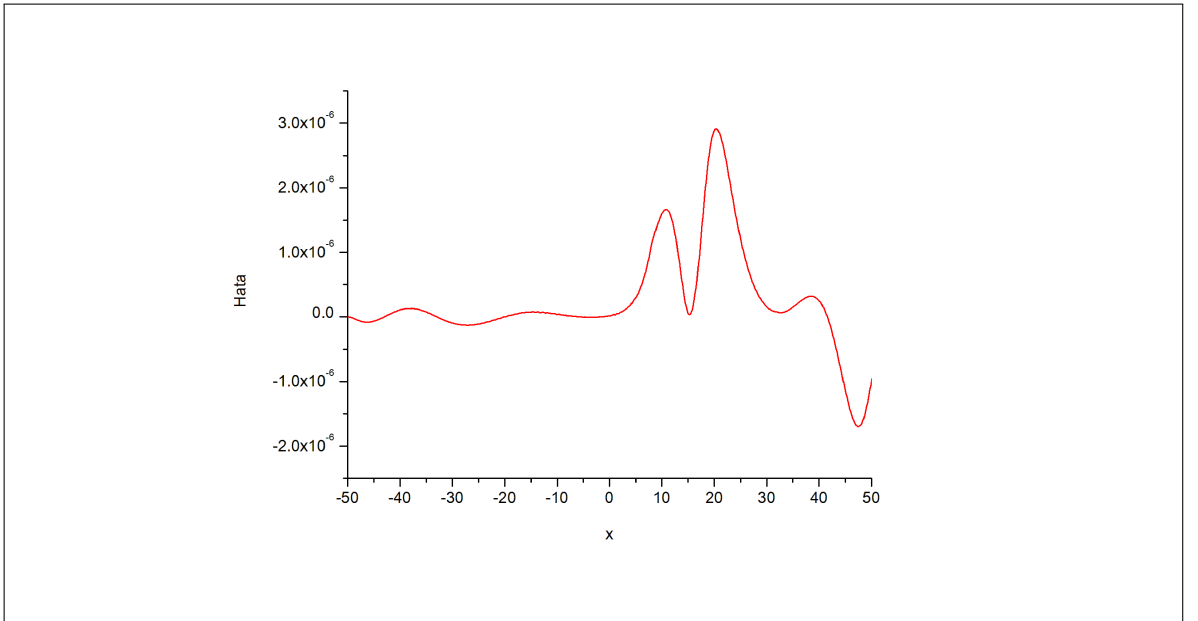
t	I_1	I_2	L_2	L_∞
0	8.4852829335	5.3665642087	.0000000000	.0000000000
20	8.4852829848	5.3665642087	2.747538e-6	1.260529e-6
40	8.4852830757	5.3665642086	4.045791e-6	1.620782e-6
60	8.4852821848	5.3665642087	5.629183e-6	2.617156e-6
80	8.4852800315	5.3665642087	6.811939e-6	2.680477e-6
100	8.4852730550	5.3665642087	8.275389e-6	2.909858e-6



Şekil 4.1 Tek solitary dalga hareketi



Şekil 4.2 a) $t=0$, b) $t=30$, c) $t=70$, d) $t=100$ zamanlarında tek solitary dalga hareketi



Şekil 4.3 $t = 100$ 'de hata dağılımı

4.1.4.2 İki Solitary Dalganın Etkileşimi

İkinci problem olarak, farklı genliklere sahip ayrık iki solitary dalganın lineer toplamı olarak verilen

$$U(x, 0) = \sum_{i=1}^2 a_i \operatorname{sech}^2 [b_i (x - x_i)] \quad (4.31)$$

başlangıç şartını kullanarak, aynı yönde ilerleyen farklı büyüklükteki iki solitary dalganın etkileşimi üzerinde çalışılmıştır. Burada $i = 1, 2$ için $a_i = \sqrt{\frac{45}{8} \frac{c_i}{\alpha}}$, $b_i = \sqrt{\frac{5}{16} \frac{c_i}{\beta}}$, c_i ve x_i keyfi sabitlerdir.

İki solitary dalganın etkileşimi için, $-50 \leq x \leq 100$ aralığı üzerinde $\alpha = \beta = \gamma = 1$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.05$, $c_1 = 0.85$, $c_2 = 0.35$, $x_1 = 0$ ve $x_2 = 20$ parametreleri seçilmiştir. $t = 0$ 'dan $t = 100$ 'e kadar uygulanan yöntem ile elde edilen korunum sabitlerinin değerleri Tablo 4.3'te verilmiştir. Tablodan da görüldüğü gibi, programın çalışması sırasında hesaplanan korunum sabitlerinin değerleri hemen hemen sabit kalmaktadır.

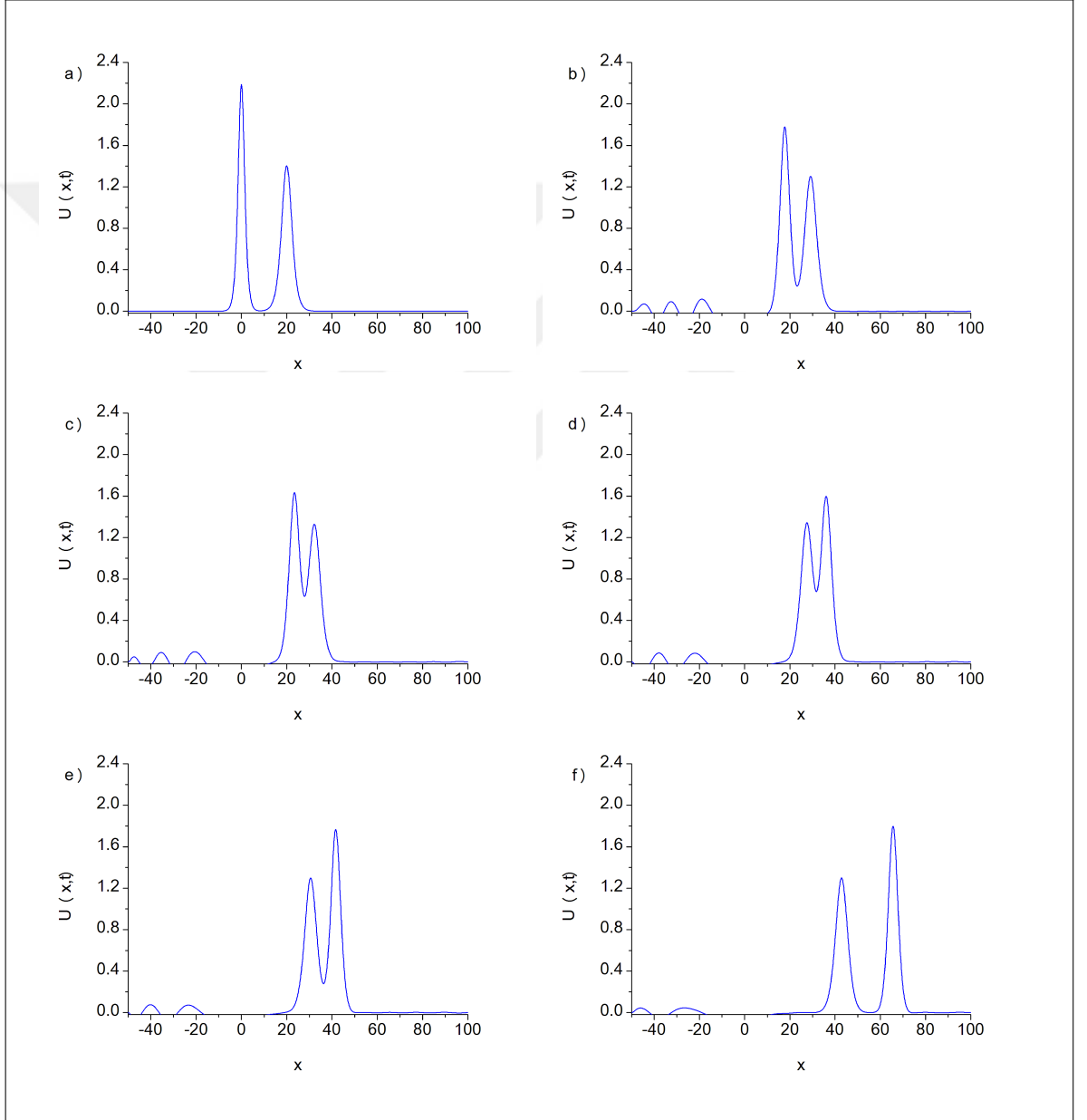
Seçilen parametreler ile $t = 0$ anında büyük solitary dalganın başlangıç noktası $x_1 = 0$, hızı $c_1 = 0.85$ ve genliği $a_1 = 2.19$ iken küçük solitary dalganın başlangıç noktası $x_2 = 20$, hızı $c_2 = 0.35$ ve genliği $a_2 = 1.40$ 'dır. Şekil 4.4, aynı yönde ilerleyen farklı genliklere sahip iki solitary dalganın etkileşiminin zamana göre gelişimini göstermektedir. Şekilden açıkça görüldüğü gibi, $t = 0$ anında simülasyonun başlangıcında büyük solitary dalga küçük solitary dalganın sol tarafında yer almaktadır. Zaman ilerledikçe, yaklaşık olarak $t = 30$ anına kadar büyük solitary dalga küçük solitary dalgayı yakalamakta ve küçük solitary dalga absorbe edilmektedir. Bu örtüşme süreci $t = 60$ anına kadar devam etmektedir. Sonra büyük solitary dalga küçük solitary dalgayı geçmekte ve ayrılma süreci başlamaktadır. $t = 100$ anında etkileşim tamamlandıktan sonra büyük solitary dalga tamamen küçük solitary dalgadan ayrılmaktadır. Bu süreçten sonra her iki solitary dalga da ilk yapısını ve hızını koruyarak yoluna devam etmektedir.

4.1.4.3 Üç Solitary Dalganın Etkileşimi

Üçüncü problem olarak, aynı yönde ilerleyen ve farklı genliklere sahip üç solitary dalganın etkileşimi üzerinde durulacaktır. Farklı genliklere sahip ayrık üç solitary dalganın lineer

Tablo 4.3 İki solitary dalganın etkileşimi için korunum sabitleri

t	I_1	I_2
0	16.9705316311	20.3069218846
20	16.8465452348	20.1187647065
40	16.9748060046	20.0565572215
60	16.8992214653	19.9988890134
80	17.2676453891	19.9762119420
100	17.0413144553	19.9424422093



Şekil 4.4 a) t=0, b) t=30, c) t=40, d) t=50, e) t=60, f) t=100 zamanlarında iki solitary dalganın etkileşimi

toplamı olarak verilen

$$U(x,0) = \sum_{i=1}^3 a_i \operatorname{sech}^2 [b_i (x - x_i)] \quad (4.32)$$

başlangıç şartını kullanarak, aynı yönde ilerleyen farklı büyüklükteki üç solitary dalganın etkileşimi üzerinde çalışılmıştır. Burada, $i = 1, 2, 3$ için $a_i = \sqrt{\frac{45 c_i}{8 \alpha}}$, $b_i = \sqrt{\frac{5 c_i}{16 \beta}}$, c_i ve x_i keyfi sabitlerdir.

Üç solitary dalganın etkileşimi için, $-50 \leq x \leq 100$ aralığı üzerinde $\alpha = \beta = \gamma = 1$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.05$, $c_1 = 0.85$, $c_2 = 0.50$, $c_3 = 0.25$, $x_1 = -25$, $x_2 = 0$ ve $x_3 = 20$ parametreleri seçilmiştir. $t = 0$ 'dan $t = 150$ 'ye kadar uygulanan yöntem ile elde edilen korunum sabitlerinin değerleri Tablo 4.4'te verilmiştir. Tablodan da görüldüğü gibi, programın çalışması esnasında hesaplanan korunum sabitlerinin değerleri neredeyse sabit kalmaktadır.

Seçilen parametreler ile $t = 0$ anında büyük solitary dalganın başlangıç noktası $x_1 = -25$, hızı $c_1 = 0.85$ ve genliği $a_1 = 2.19$; ortadaki solitary dalganın başlangıç noktası $x_2 = 0$, hızı $c_2 = 0.5$ ve genliği $a_2 = 1.68$; küçük solitary dalganın başlangıç noktası $x_3 = 20$, hızı $c_3 = 0.25$ ve genliği $a_3 = 1.19$ 'dur. Şekil 4.5, aynı yönde ilerleyen farklı genliklere sahip üç solitary dalganın etkileşiminin zamana göre gelişimini göstermektedir. Şekilden açıkça görüldüğü gibi, $t = 0$ anında simülasyonun başlangıcında büyük solitary dalga solda, küçük solitary dalga sağda diğer solitary dalga da bu iki solitary dalganın arasında yer almaktadır. Zaman ilerledikçe, yaklaşık olarak $t = 40$ anında etkileşim başlamakta, örtüşme süreci $t = 40$ ve $t = 110$ zaman aralığında meydana gelmektedir. $t = 150$ anında etkileşim tamamlandıktan sonra solitary dalgalar tamamen birbirinden ayrılmaktadır. Bu süreçten sonra her üç solitary dalga da ilk yapısını ve hızını koruyarak yoluna devam etmektedir.

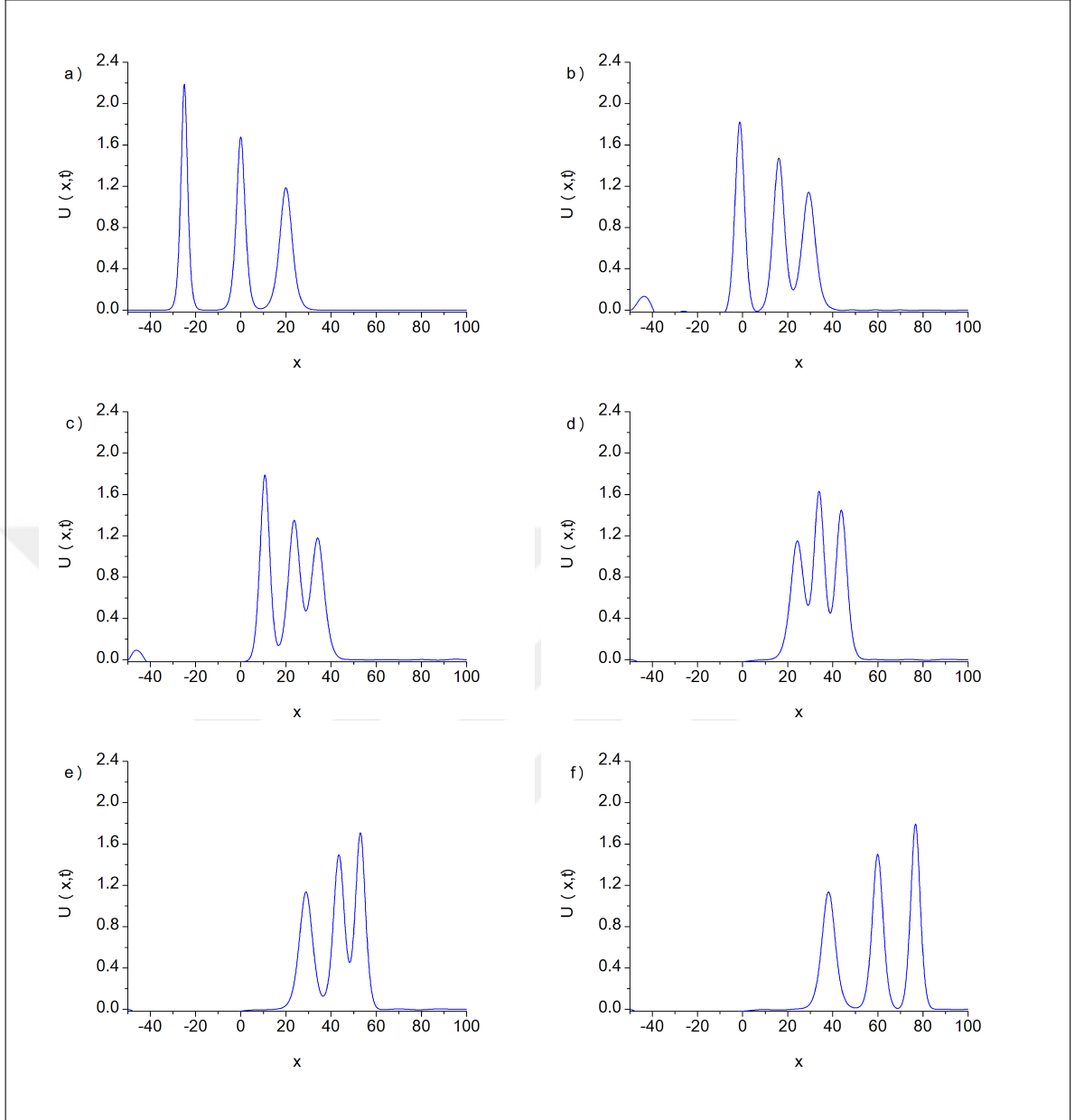
Tablo 4.4 Üç solitary dalganın etkileşimi için korunum sabitleri

t	I_1	I_2
0	25.4557818426	28.5673455186
25	25.6820777780	28.2475921308
50	25.7935768834	28.2118286972
75	25.1357840031	28.0967148921
100	24.9519313985	28.0933900647
125	24.9751678109	28.0875884719
150	25.0303969354	28.0810761856

4.1.4.4 Solitonların Oluşumu

Son problem olarak,

$$U(x, 0) = \exp \left[- (x - x_0)^2 \right] \quad (4.33)$$

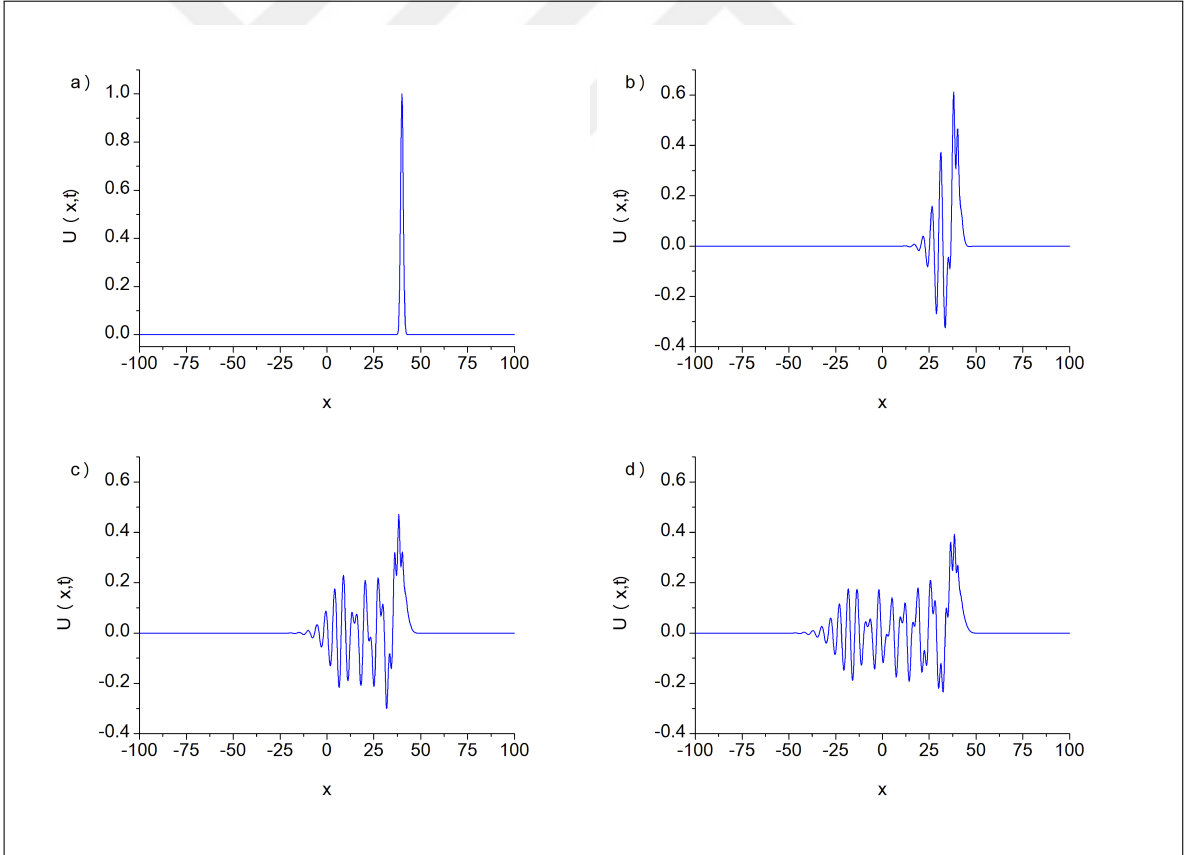


Şekil 4.5 a) $t=0$, b) $t=40$, c) $t=60$, d) $t=90$, e) $t=110$, f) $t=150$ zamanlarında üç solitary dalganın etkileşimi

Gaussian başlangıç koşulu kullanılarak, bir soliton dizisinin oluşumu üzerinde çalışılmıştır. $-100 \leq x \leq 100$ aralığı üzerinde $\alpha = \beta = \gamma = 1$, $x_0 = 40$, $h = 0.25$ ve $\Delta t = 0.25$ parametreleri seçilmiştir. Sayısal hesaplamalar $t = 5$ anına kadar yapılarak, hareketin iki korunum sabitinin değerleri Tablo 4.5'te sunulmuştur. I_1 ve I_2 korunum sabitlerinin bağıl değişim yüzdeleri sırasıyla 1.782×10^{-8} ve $\%$, $4.048 \times 10^{-8} \%$ olarak bulunmuştur. Şekil 4.6'dan da görüldüğü gibi, Gaussian başlangıç şartı ile herhangi bir soliton oluşumu gerçekleşmemekte, ancak zaman ilerledikçe dalgaların artan sayıda, düzensiz salınım yaptığı gözlemlenmektedir.

Tablo 4.5 Gaussian başlangıç şartı için korunum sabitleri

t	I_1	I_2
0	1.7724538509	1.2533141373
1	1.7724538507	1.2533141369
2	1.7724538506	1.2533141369
3	1.7724538506	1.2533141368
4	1.7724538506	1.2533141368
5	1.7724538506	1.2533141368



Şekil 4.6 Gaussian başlangıç şartı ile a) $t=0$, b) $t=1$, c) $t=3$, d) $t=5$ zamanlarında solitonların oluşumu

5. BÖLÜM

ROSENAU-KORTEWEG-DE VRIES DENKLEMİNİN SUBDOMAIN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE SAYISAL ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde, subdomain sonlu elemanlar yöntemi ile R-KdV denkleminin sayısal çözümleri elde edilmiştir. Yaklaşım fonksiyonu olarak sektik B-spline fonksiyonlar kullanılmıştır. Von Neumann tekniği uygulanarak sunulan yöntemin kararlılık analizi yapılmıştır. Lineerleştirme işlemi için lumped lineerleştirme tekniği seçilmiştir. Sonlu elemanlar yaklaşımı, tek solitary dalga hareketi, aynı yönde ilerleyen farklı genliklere sahip iki ve üç solitary dalganın etkileşimi, Gaussian ve undular bore başlangıç şartları ile dalgaların oluşumu ve soliton dizisinin gelişimini içeren problemler üzerinde çalışılmıştır.

5.1 R-KdV Denkleminin Sektik B-Spline Subdomain Yöntemi ile Sayısal Çözümü

5.1.1 Denklem Gelişimi ve Sektik B-Spline Fonksiyonlar

Bu bölümde, a, b, c ve d pozitif parametreler, x ve t indisleri sırasıyla konuma ve zamana göre türevleri belirtmek üzere, $x \rightarrow \pm\infty$ iken $U \rightarrow 0$ fiziksel sınır koşulları ile R-KdV denklemi

$$U_t + aU_x + bU_{xxx} + cU_{xxxxt} + d(U^2)_x = 0 \quad (5.1)$$

üzerinde durulacaktır.

Sayısal yöntemi uygulayabilmek için çözüm bölgesi, $a \leq x \leq b$ aralığı üzerinde sınırlandırılarak, x_m düğüm noktaları ile $a = x_0 < x_1 \cdots < x_N = b$ gibi N eşit alt aralığa bölünmüştür. $m = 0, 1, 2, \dots, N$ için bu aralıkların uzunlukları $h = \frac{b-a}{N} = (x_{m+1} - x_m)$ 'dir.

$$\begin{aligned} U(a,t) &= 0, & U(b,t) &= 0, \\ U_x(a,t) &= 0, & U_x(b,t) &= 0, \\ U_{xx}(a,t) &= 0, & U_{xx}(b,t) &= 0, \quad t > 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

homojen sınır şartları ve

$$U(x,0) = f(x) \quad , \quad a \leq x \leq b \quad (5.3)$$

başlangıç şartı seçilerek denklem çözülecektir.

$[a, b]$ aralığı üzerindeki x_m düğüm noktalarında $\phi_m(x)$ sektik B-spline yaklaşım fonksiyonları $m = -3(1)N + 2$ için

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^6} \begin{cases} (x - x_{m-3})^6, & [x_{m-3}, x_{m-2}] \\ (x - x_{m-3})^6 - 7(x - x_{m-2})^6, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ (x - x_{m-3})^6 - 7(x - x_{m-2})^6 + 21(x - x_{m-1})^6, & [x_{m-1}, x_m] \\ (x - x_{m-3})^6 - 7(x - x_{m-2})^6 + 21(x - x_{m-1})^6 - 35(x - x_m)^6, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x - x_{m+4})^6 - 7(x - x_{m+3})^6 + 21(x - x_{m+2})^6, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ (x - x_{m+4})^6 - 7(x - x_{m+3})^6, & [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ (x - x_{m+4})^6, & [x_{m+3}, x_{m+4}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (5.4)$$

olarak verilmiştir [33]. Bu yaklaşım fonksiyonlarının $\phi_{-3}(x), \phi_{-2}(x), \phi_{-1}(x), \phi_0(x), \dots, \phi_{N+1}(x), \phi_{N+2}(x)$ kümesi $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlanacak olan yaklaşık çözüm için bir baz oluşturur. $U(x, t)$ tam çözümüne yaklaşan $U_N(x, t)$ yaklaşık çözümü

$$U_N(x, t) = \sum_{j=-3}^{N+2} \phi_j(x) \delta_j(t) \quad (5.5)$$

ile verilir. Burada $\delta_j(t)$, ağırlıklı rezidü ve sınır şartlarından elde edilen zamana bağlı parametredir. Her eleman için

$$h\xi = x - x_m, \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (5.6)$$

lokal koordinat dönüşümü kullanılarak, $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerinde daha kolay bir şekilde çalışılabilen $[0, 1]$ aralığına dönüştürülür. Bu durumda $[0, 1]$ aralığı üzerinde ξ değişkenine

bağlı olarak aşağıdaki formda tanımlanabilir.

$$\begin{aligned}
\phi_{m-3}(\xi) &= 1 - 6\xi + 15\xi^2 - 20\xi^3 + 15\xi^4 - 6\xi^5 + \xi^6, \\
\phi_{m-2}(\xi) &= 57 - 150\xi + 135\xi^2 - 20\xi^3 - 45\xi^4 + 30\xi^5 - 6\xi^6, \\
\phi_{m-1}(\xi) &= 302 - 240\xi - 150\xi^2 + 160\xi^3 + 30\xi^4 - 60\xi^5 + 15\xi^6, \\
\phi_m(\xi) &= 302 + 240\xi - 150\xi^2 - 160\xi^3 + 30\xi^4 + 60\xi^5 - 20\xi^6, \\
\phi_{m+1}(\xi) &= 57 + 150\xi + 135\xi^2 + 20\xi^3 - 45\xi^4 - 30\xi^5 + 156\xi^6, \\
\phi_{m+2}(\xi) &= 1 + 6\xi + 15\xi^2 + 20\xi^3 + 15\xi^4 + 6\xi^5 - 6\xi^6, \\
\phi_{m+3}(\xi) &= \xi^6
\end{aligned} \tag{5.7}$$

$[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerinde $\phi_{m-3}(x)$, $\phi_{m-2}(x)$, $\phi_{m-1}(x)$, $\phi_m(x)$, $\phi_{m+1}(x)$, $\phi_{m+2}(x)$ ve $\phi_{m+3}(x)$ dışındaki tüm spline fonksiyonlar sıfırdır. Herbir sektik B-spline yedi elemanı örter öyle ki her $[x_m, x_{m+1}]$ elemanı da yedi spline tarafından örtülür. δ_{m-3} , δ_{m-2} , δ_{m-1} , δ_m , δ_{m+1} , δ_{m+2} , δ_{m+3} eleman parametreleri ve ϕ_{m-3} , ϕ_{m-2} , ϕ_{m-1} , ϕ_m , ϕ_{m+1} , ϕ_{m+2} , ϕ_{m+3} eleman şekil fonksiyonları olmak üzere, $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerinde $U(x, t)$ fonksiyonuna

$$U_N(x_m, t) = \sum_{j=m-3}^{m+3} \phi_j(x_m) \delta_j(t) \tag{5.8}$$

ile yaklaşılır. x_m düğüm noktalarındaki $\phi_m(x)$ sektik B-spline fonksiyonlar ve türev değerleri Tablo 5.1'deki gibi verilebilir.

Tablo 5.1 Sektik B-spline fonksiyonlar ve türevlerinin x_m düğüm noktalarındaki değerleri

x	x_{m-3}	x_{m-2}	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}	x_{m+3}
$\phi_m(x)$	1	57	302	302	57	1	0
$h\phi'_m(x)$	-6	-150	-240	240	150	6	0
$h^2\phi''_m(x)$	30	270	-300	-300	270	30	0
$h^3\phi'''_m(x)$	-120	-120	960	-960	120	120	0
$h^4\phi^{iv}_m(x)$	360	-1080	720	720	-1080	360	0
$h^5\phi^v_m(x)$	-720	3600	-7200	7200	-3600	720	0

', ', ', ' ve ' sembolleri sırasıyla x 'e göre beşinci mertebeye kadar türevleri belirtmek üzere, (5.4) sektik B-spline fonksiyonları ve (5.5) deneme fonksiyonu kullanılarak, U , U' , U'' , U''' ,

U^{iv} ve U^v 'nin düğüm noktalarındaki değerleri δ_m eleman parametreleri cinsinden

$$\begin{aligned}
U_m &= U(x_m) = \delta_{m-3} + 57\delta_{m-2} + 302\delta_{m-1} + 302\delta_m + 57\delta_{m+1} + \delta_{m+2}, \\
U'_m &= U'(x_m) = \frac{6}{h}(-\delta_{m-3} - 25\delta_{m-2} - 40\delta_{m-1} + 40\delta_m + 25\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \\
U''_m &= U''(x_m) = \frac{30}{h^2}(\delta_{m-3} + 9\delta_{m-2} - 10\delta_{m-1} - 10\delta_m + 9\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \\
U'''_m &= U'''(x_m) = \frac{120}{h^3}(-\delta_{m-3} - \delta_{m-2} + 8\delta_{m-1} - 8\delta_m + \delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \\
U^{iv}_m &= U^{iv}(x_m) = \frac{360}{h^4}(\delta_{m-3} - 3\delta_{m-2} + 2\delta_{m-1} + 2\delta_m - 3\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \\
U^v_m &= U^v(x_m) = \frac{720}{h^5}(-\delta_{m-3} + 5\delta_{m-2} - 10\delta_{m-1} + 10\delta_m - 5\delta_{m+1} + \delta_{m+2})
\end{aligned} \tag{5.9}$$

olarak bulunur.

5.1.2 Subdomain Sonlu Elemanlar Yöntemi

$$W_m(x) = \begin{cases} 1, & x \in [x_m, x_{m+1}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \tag{5.10}$$

ağırlık fonksiyonu ile subdomain sonlu elemanlar yöntemi (5.1) denkleminde uygulanarak,

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} 1. [U_t + aU_x + bU_{xxx} + cU_{xxxxt} + d(U^2)_x] dx = 0 \tag{5.11}$$

ağırlıklı integrali bulunur. (5.9) denklemindeki ifadeler (5.11) zayıf formunda yerlerine yazılarak, (5.11) denkleminin terim terime integrali alınırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{h}{7}(\dot{\delta}_{m-3} + 120\dot{\delta}_{m-2} + 1191\dot{\delta}_{m-1} + 2416\dot{\delta}_m + 1191\dot{\delta}_{m+1} + 120\dot{\delta}_{m+2} + \dot{\delta}_{m+3}) \\
&+ a(-\delta_{m-3} - 56\delta_{m-2} - 245\delta_{m-1} + 245\delta_{m+1} + 56\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) \\
&+ \frac{30b}{h^2}(-\delta_{m-3} - 8\delta_{m-2} + 19\delta_{m-1} - 19\delta_{m+1} + 8\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) \\
&+ \frac{120c}{h^3}(\dot{\delta}_{m-3} - 9\dot{\delta}_{m-1} + 16\dot{\delta}_m - 9\dot{\delta}_{m+1} + \dot{\delta}_{m+3}) \\
&+ 2dZ_m(-\delta_{m-3} - 56\delta_{m-2} - 245\delta_{m-1} + 245\delta_{m+1} + 56\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) = 0
\end{aligned} \tag{5.12}$$

denklemini elde edilir. Lineerleştirme tekniği için, (5.1) denkleminde lineer olmayan UU_x teriminde U terimi

$$Z_m = U_m = \delta_{m-3} + 57\delta_{m-2} + 302\delta_{m-1} + 302\delta_m + 57\delta_{m+1} + \delta_{m+2} \tag{5.13}$$

şeklinde lokal sabit olarak alındıktan sonra, $U_m + U_{m+1}/2$ ifadesi yardımıyla Z_m için bir lumped değeri

$$Z_m = \frac{1}{2}(\delta_{m-3}^n + 58\delta_{m-2}^n + 359\delta_{m-1}^n + 604\delta_m^n + 359\delta_{m+1}^n + 58\delta_{m+2}^n + \delta_{m+3}^n) \quad (5.14)$$

olarak hesaplanır.

(5.12) denkleminde $\dot{\delta}_m$ ve δ_m parametreleri yerine sırasıyla

$$\dot{\delta}_m = \frac{1}{\Delta t} (\delta_m^{n+1} - \delta_m^n) \quad , \quad \delta_m = \frac{1}{2} (\delta_m^{n+1} + \delta_m^n) \quad (5.15)$$

ileri fark yaklaşımı ve Crank-Nicolson formülasyonu kullanılırsa, n ve $n + 1$ gibi iki zaman adımı arasındaki ilişki δ^n ve δ^{n+1} parametreleri cinsinden

$$\begin{aligned} & \gamma_1 \delta_{m-3}^{n+1} + \gamma_2 \delta_{m-2}^{n+1} + \gamma_3 \delta_{m-1}^{n+1} + \gamma_4 \delta_m^{n+1} + \gamma_5 \delta_{m+1}^{n+1} + \gamma_6 \delta_{m+2}^{n+1} + \gamma_7 \delta_{m+3}^{n+1} \\ & = \gamma_7 \delta_{m-3}^n + \gamma_6 \delta_{m-2}^n + \gamma_5 \delta_{m-1}^n + \gamma_4 \delta_m^n + \gamma_3 \delta_{m+1}^n + \gamma_2 \delta_{m+2}^n + \gamma_1 \delta_{m+3}^n \end{aligned} \quad (5.16)$$

olarak yazılabilir. Burada

$$E = \frac{7\Delta t}{2h}, \quad M = \frac{105b\Delta t}{h^3}, \quad K = \frac{840c}{h^4} \quad (5.17)$$

ve Δt zaman adımını göstermek üzere, δ parametrelerinin katsayıları

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= 1 - E(a + dZ_m) - M + K, \\ \gamma_2 &= 120 - 56E(a + dZ_m) - 8M, \\ \gamma_3 &= 1191 - 245E(a + dZ_m) + 19M - 9K, \\ \gamma_4 &= 2416 + 16K, \\ \gamma_5 &= 1191 + 245E(a + dZ_m) - 19M - 9K, \\ \gamma_6 &= 120 + 56E(a + dZ_m) + 8M, \\ \gamma_7 &= 1 + E(a + dZ_m) + M + K, \\ m &= 0, 1, \dots, N - 1 \end{aligned} \quad (5.18)$$

şeklindedir.

(5.16) sistemi $\delta_{-3}, \delta_{-2}, \dots, \delta_{N+1}, \delta_{N+2}$ şeklinde $N + 6$ bilinmeyene sahip N lineer denklemden oluşur. Bu sistemin çözülebilmesi için (5.2) sınır şartlarından elde edilebilecek altı ek şarta ihtiyaç vardır. Bu şartlar yardımıyla (5.16) sistemindeki $\delta_{-3}, \delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_N, \delta_{N+1}, \delta_{N+2}$ ve δ_{N+3} parametreleri yok edilerek, $\delta = (\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{N-1})$ şeklinde N bilinmeyene sahip

$$A\delta^{n+1} = B\delta^n \quad (5.19)$$

$N \times N$ tipinde matris sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi Thomas algoritması ile çözülür. Çözüm sürecinde non-lineerlik etkisini minimize etmek için herbir zaman adımında iki kez $\delta^{n*} = \delta^n + \frac{1}{2}(\delta^n - \delta^{n-1})$ iç iterasyon işlemi uygulanmıştır.

(5.16) denklem sisteminde iterasyona başlayabilmek için, başlangıç ve sınır şartları kullanılarak $\delta^0 = (\delta_0^0, \delta_1^0, \dots, \delta_{N-1}^0)$ başlangıç vektörü belirlenmelidir. Bunun için, $t = 0$ anında $[a, b]$ aralığı üzerindeki

$$U_N(x, 0) = \sum_{m=-3}^{N+3} \phi_m(x) \delta_m^0 \quad (5.20)$$

yaklaşımı ile

$$\begin{aligned} U_N(x, 0) &= U(x_m, 0) & m &= 0, 1, 2, \dots, N \\ (U_N)'(a, 0) &= 0 & , & (U_N)'(b, 0) = 0, \\ (U_N)''(a, 0) &= 0 & , & (U_N)''(b, 0) = 0, \\ (U_N)'''(a, 0) &= 0 & , & (U_N)'''(b, 0) = 0 \end{aligned} \quad (5.21)$$

şartları kullanılırsa,

$$W\delta^0 = C \quad (5.22)$$

matris sistemine Thomas algoritması uygulanarak δ_m^0 başlangıç vektörü kolayca hesaplanır.

Burada

Euler formülü kullanılarak, bu denklem sadeleştirilirse ρ büyüme faktörü

$$\rho = \frac{\omega - i\bar{\omega}}{\omega + i\bar{\omega}} \quad (5.26)$$

olarak bulunur. Bu durumda

$$\beta = E(a + dZ_m) \quad , \quad \lambda = M \quad , \quad \mu = K \quad , \quad m = 0, 1, \dots, N-1 \quad (5.27)$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} \omega &= (1208 + 8\mu) + (1191 - 9\mu) \cos(kh) + 120 \cos(2kh) + (1 + \mu) \cos(3kh), \\ \bar{\omega} &= (245\beta - 19\lambda) \sin(kh) + (56\beta + 8\lambda) \sin(2kh) + (\beta + \lambda) \sin(3kh) \end{aligned} \quad (5.28)$$

ve $|\rho| = 1$ 'dir. Bu da lineerleştirilmiş şemanın şartsız kararlı olduğunu gösterir.

5.1.4 Sayısal Örnekler ve Sonuçlar

Tek solitary dalga hareketi, aynı yönde ilerleyen iki ve üç solitary dalganın etkileşimi ve solitonların oluşumu gibi dört problem için R-KdV denkleminin sayısal çözümleri elde edilmiştir. Seçilen bazı zamanlarda analitik çözüm ve sayısal çözüm arasındaki farkı hesaplamak için

$$L_2 = \|U^{tam} - U_N\|_2 \simeq \sqrt{h \sum_{j=1}^N |U_j^{tam} - (U_N)_j|^2} \quad (5.29)$$

hata normu ve

$$L_\infty = \|U^{tam} - U_N\|_\infty \simeq \max_j |U_j^{tam} - (U_N)_j| \quad , \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (5.30)$$

hata normu kullanılmıştır. R-KdV denklemi (5.1) sırasıyla momentum ve enerjiye karşılık gelen

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_a^b U dx \simeq h \sum_{j=1}^N U_j^n, \\ I_2 &= \int_a^b [U^2 + c(U_{xx})^2] dx \simeq h \sum_{j=1}^N [(U_j^n)^2 + c(U_{xx})_j^n] \end{aligned} \quad (5.31)$$

şeklinde iki korunum sabitine sahiptir [55]. Uygulanan yöntemin doğruluğunu kontrol etmek için I_1 ve I_2 korunum sabitlerindeki değişim incelenmiştir.

5.1.4.1 Tek Solitary Dalganın Hareketi

$x \rightarrow \pm\infty$ iken $U \rightarrow 0$ sınır şartı ve $t = 0$ alınarak elde edilen

$$U(x, 0) = A \operatorname{sech}^4 [B(x - x_0)] \quad (5.32)$$

başlangıç koşulu ile R-KdV denkleminin (5.1) solitary dalga çözümleri elde edilmiştir. A dalga genliği, B dalga sayısı, v dalga hızı ve x_0 başlangıç noktası olmak üzere R-KdV denkleminin (5.1) analitik çözümü

$$U(x, t) = A \operatorname{sech}^4 [B(x - vt - x_0)] \quad (5.33)$$

şeklinde dir. Burada

$$A = \frac{210bB^2}{13d}, \quad B = \frac{1}{3} \left[\frac{-13ac + \sqrt{169a^2c^2 + 144b^2c}}{32bc} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad v = \frac{b}{52cB^2} \quad (5.34)$$

ve a, b, c, d keyfi sabitlerdir.

Solitary dalga çözümünden elde edilen sonuçlar ile daha önce yapılan çalışmaya ait sonuçları karşılaştırmak için, (h) ve (Δt) 'nin farklı değerleri ile $[-70, 100]$ aralığı üzerinde $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$, $d = 0.5$ ve $v = 1.18$ parametreleri seçilmiştir. Bu parametreler ile elde edilen solitary dalga 0.52632 genliğe sahiptir. Diğer taraftan $t = 40$ 'ye kadar seçilen zaman adımlarında korunum sabitleri, L_2 ve L_∞ hata normları hesaplanarak, elde edilen sonuçlar Tablo 5.2 ve Tablo 5.3'de verilmiştir. Bu tablo aynı zamanda uygulanan yöntem yardımıyla hesaplanan sayısal sonuçlar ile daha önce elde edilen sonuçların karşılaştırmasını içermektedir. Tablolardan da görülebileceği gibi, programın çalışması esnasında hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları diğer çalışmalarda elde edilen değerlerden daha küçük, korunum sabitleri ise neredeyse sabit kalmaktadır. Burada I_1 ve I_2 korunum sabitlerinin bağıl değişim yüzdeleri sırasıyla $h = \Delta t = 0.1$ için 2.221×10^{-6} ve 6.000×10^{-10} , $h = \Delta t = 0.05$ için 9.171×10^{-7} ve 1.400×10^{-9} , $h = \Delta t = 0.025$ için 3.838×10^{-6} ve 3.700×10^{-7} 'dir. $t = 0, 10, \dots, 40$ için tek solitary dalga hareketi Şekil 5.1'te gösterilmiştir. Burada beklenildiği gibi, zaman ilerledikçe solitonun genliğini ve şeklini koruyarak sabit hızla sağa doğru hareket ettiği gözlemlenmiştir.

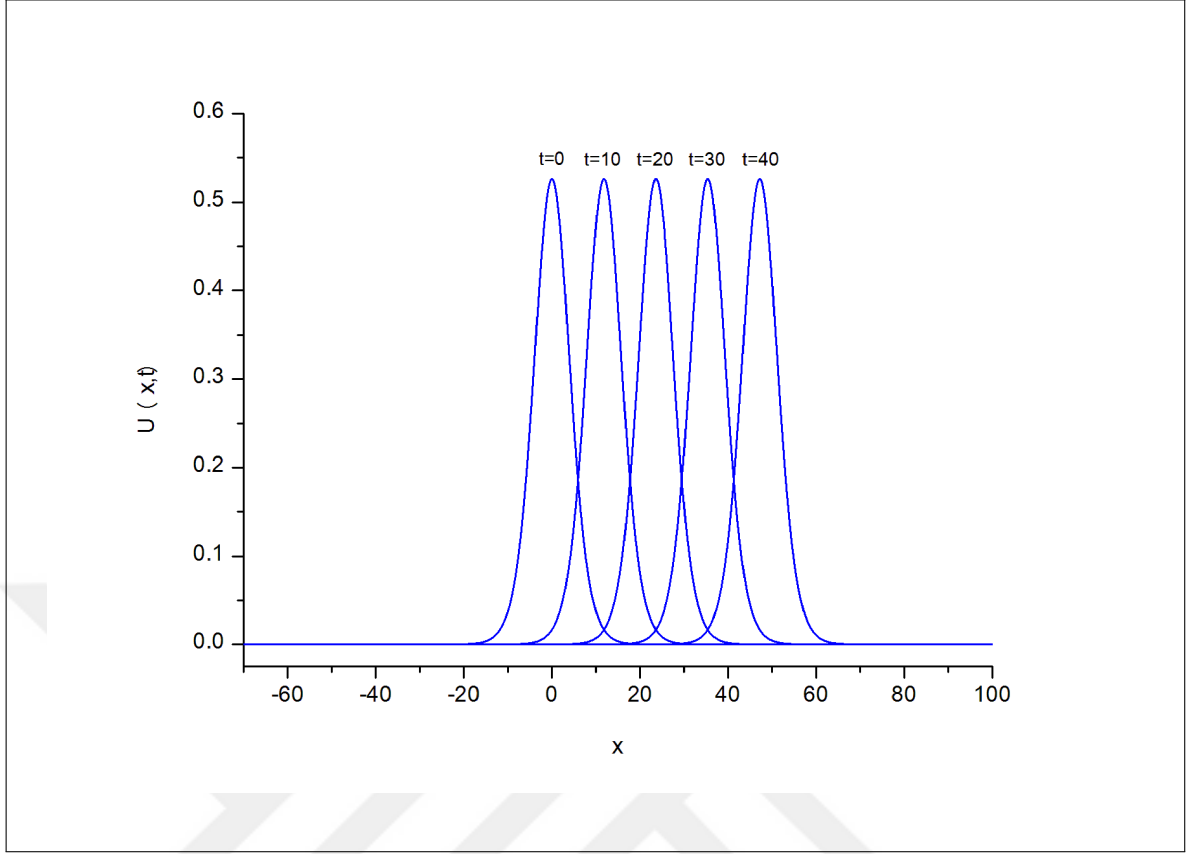
Problemin çözüm bölgesi üzerinde $t = 40$ anında analitik ve sayısal sonuçlar arasındaki hatayı tespit edebilmek için, 0.52632 genliğe sahip tek solitary dalga üzerinde hata dağılımı Şekil 5.2’de gösterilmiştir.

Tablo 5.2 h ve Δt ’nin farklı değerleri ve tek solitary dalga için korunum sabitlerinin karşılaştırılması

$h = \Delta t = 0.1$		I_1		I_2		
t		[59]	[63]	[59]	[63]	
0	5.4981750556	5.4977225480	5.4981750556	1.9897841614	1.9845533653	1.9897841615
10	5.4981749939	5.4977249365	5.4981750556	1.9897841614	1.9845950759	1.9897841624
20	5.4981749598	5.4977287449	5.4981750556	1.9897841614	1.9846459641	1.9897841629
30	5.4981749423	5.4977319638	5.4981750555	1.9897841614	1.9846798272	1.9897841633
40	5.4981749335	5.4977342352	5.4981750621	1.9897841614	1.9847015013	1.9897841635
$h = \Delta t = 0.05$		I_1		I_2		
t		[59]	[63]	[59]	[63]	
0	5.4981692134	5.4980606845	5.4981692134	1.9897831853	1.9843901753	1.9897831853
10	5.4981691962	5.4980608372	5.4981692136	1.9897831854	1.9844010295	1.9897831855
20	5.4981691829	5.4980610805	5.4981692136	1.9897831852	1.9844143675	1.9897831855
30	5.4981691736	5.4980612870	5.4981692134	1.9897831856	1.9844232703	1.9897831854
40	5.4981691629	5.4980613985	5.4981692116	1.9897831853	1.9844289740	1.9897831852
$h = \Delta t = 0.025$		I_1		I_2		
t		[59]	[63]	[59]	[63]	
0	5.4981698357	5.4981454184	5.4981698357	1.9897809061	1.9849493353	1.9897809062
10	5.4981697751	5.4981454791	5.4981698365	1.9897809063	1.9843521098	1.9897809077
20	5.4981697199	5.4981455454	5.4981698322	1.9897809028	1.9843555206	1.9897809038
30	5.4981696708	5.4981456095	5.4981698290	1.9897808998	1.9843578113	1.9897809019
40	5.4981696247	5.4981456591	5.4981698203	1.9897808987	1.9843592922	1.9897808975

Tablo 5.3 h ve Δt ’nin farklı değerleri ve tek solitary dalga için hata normlarının karşılaştırılması

$h = \Delta t = 0.1$		$L_2 \times 10^3$		$L_\infty \times 10^3$	
t		[59]	[63]	[59]	[63]
0		0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
10		0.356724	1.641934	0.141639	0.631419
20		0.646705	3.045414	0.244374	1.131442
30		0.902514	4.241827	0.326169	1.533771
40		1.162489	5.297873	0.411492	1.878952
$h = \Delta t = 0.05$		$L_2 \times 10^4$		$L_\infty \times 10^4$	
t		[59]	[63]	[59]	[63]
0		0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
10		0.854386	4.113510	0.343706	1.582641
20		1.779040	7.631169	0.627075	2.835874
30		2.810186	10.62971	0.975412	3.843906
40		3.783328	13.27645	1.293116	4.709118
$h = \Delta t = 0.025$		$L_2 \times 10^4$		$L_\infty \times 10^5$	
t		[59]	[63]	[59]	[63]
0		0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
10		0.351702	1.028173	1.420544	3.965867
20		0.916735	1.905450	3.258903	7.097948
30		1.043479	2.650990	4.681364	9.610332
40		1.183139	3.306738	4.847163	11.76011



Şekil 5.1 Tek solitary dalga hareketi

5.1.4.2 İki Solitary Dalganın Etkileşimi

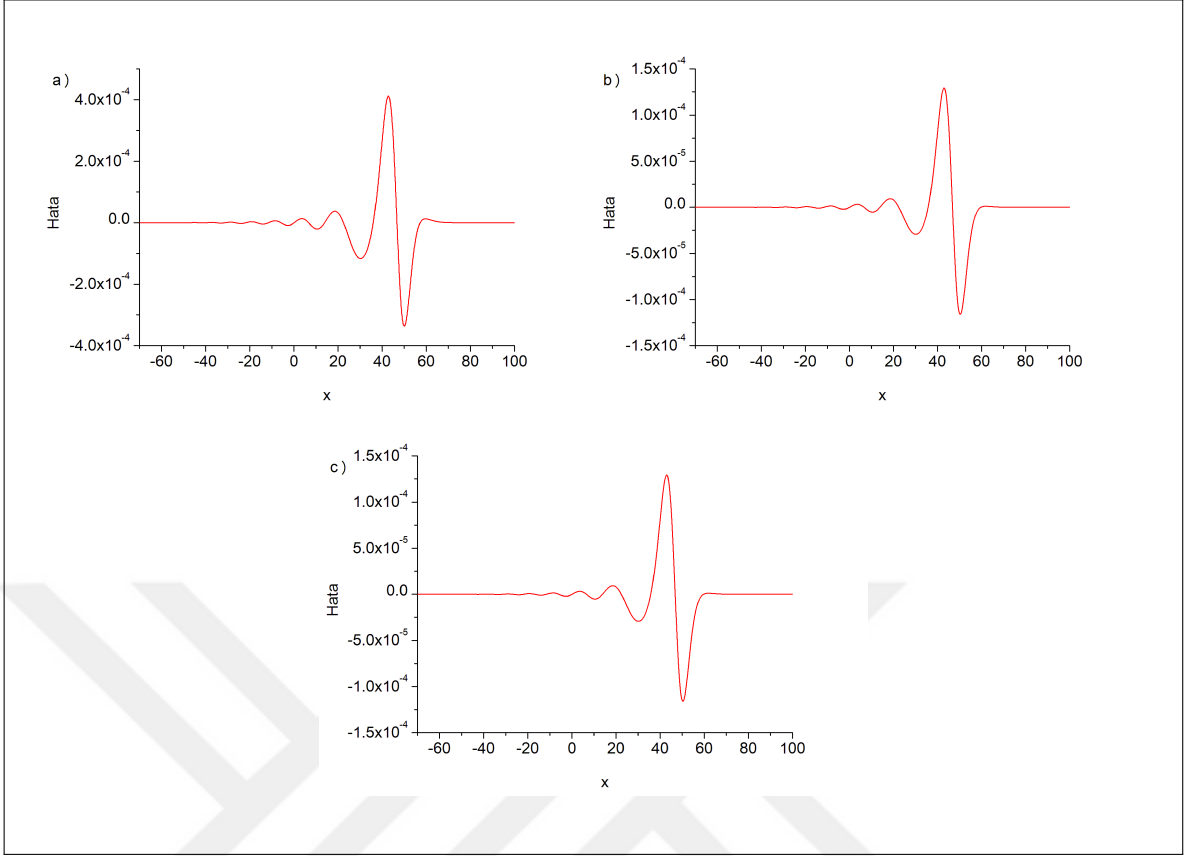
İkinci problem olarak, farklı genliklere sahip ayrık iki solitary dalganın lineer toplamı olarak verilen

$$U(x, 0) = \sum_{i=1}^2 A_i \operatorname{sech}^4 [B_i (x - x_i)] \quad (5.35)$$

başlangıç şartını kullanarak, aynı yönde ilerleyen farklı büyüklükteki iki solitary dalganın etkileşimi üzerinde çalışılmıştır. Burada $i = 1, 2$ için, $A_i = \frac{210bB_i^2}{13d}$, $B_i = \left| \sqrt{\frac{b}{52cv_i}} \right|$, v_i ve x_i keyfi sabitlerdir.

İki solitary dalganın etkileşimi için, $-100 \leq x \leq 400$ aralığı üzerinde $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$, $d = 0.5$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.1$, $v_1 = 0.3$, $v_2 = 0.5$, $x_1 = -70$ ve $x_2 = -35$ parametreleri seçilmiştir. $t = 0$ 'dan $t = 250$ 'e kadar uygulanan yöntem ile elde edilen korunum sabitlerinin değerleri Tablo 5.4'te verilmiştir. Tablodan da görüldüğü gibi, programın çalışması sırasında hesaplanan korunum sabitlerinin değerleri hemen hemen sabit kalmaktadır.

Seçilen parametreler ile $t = 0$ anında büyük solitary dalganın başlangıç noktası $x_1 = -70$,



Şekil 5.2 a) $h = \Delta t = 0.1$, b) $h = \Delta t = 0.05$, c) $h = \Delta t = 0.025$ için $t = 40$ 'da hata dağılımı

hızı $v_1 = 0.3$ ve genliği $A_1 = 2.07$ iken küçük solitary dalganın başlangıç noktası $x_2 = -35$, hızı $v_2 = 0.5$ ve genliği $A_2 = 1.24$ 'dır. Şekil 5.3, aynı yönde ilerleyen farklı genliklere sahip iki solitary dalganın etkileşiminin zamana göre gelişimini göstermektedir. Şekilden açıkça görüldüğü gibi, $t = 0$ anında simülasyonun başlangıcında büyük solitary dalga küçük solitary dalganın sol tarafında yer almaktadır. Zaman ilerledikçe, yaklaşık olarak $t = 80$ anına kadar büyük solitary dalga küçük solitary dalgayı yakalamakta ve küçük solitary dalga absorbe edilmektedir. Bu örtüşme süreci $t = 150$ anına kadar devam etmektedir. Sonra büyük solitary dalga küçük solitary dalgayı geçmekte ve ayrılma süreci başlamaktadır. $t = 250$ anında etkileşim tamamlandıktan sonra büyük solitary dalga tamamen küçük solitary dalgadan ayrılmaktadır. Bu süreçten sonra her iki solitary dalga da ilk yapısını ve hızını koruyarak yoluna devam etmektedir.

5.1.4.3 Üç Solitary Dalganın Etkileşimi

Üçüncü problem olarak, aynı yönde ilerleyen ve farklı genliklere sahip üç solitary dalganın etkileşimi üzerinde durulacaktır. Farklı genliklere sahip ayrık üç solitary dalganın lineer

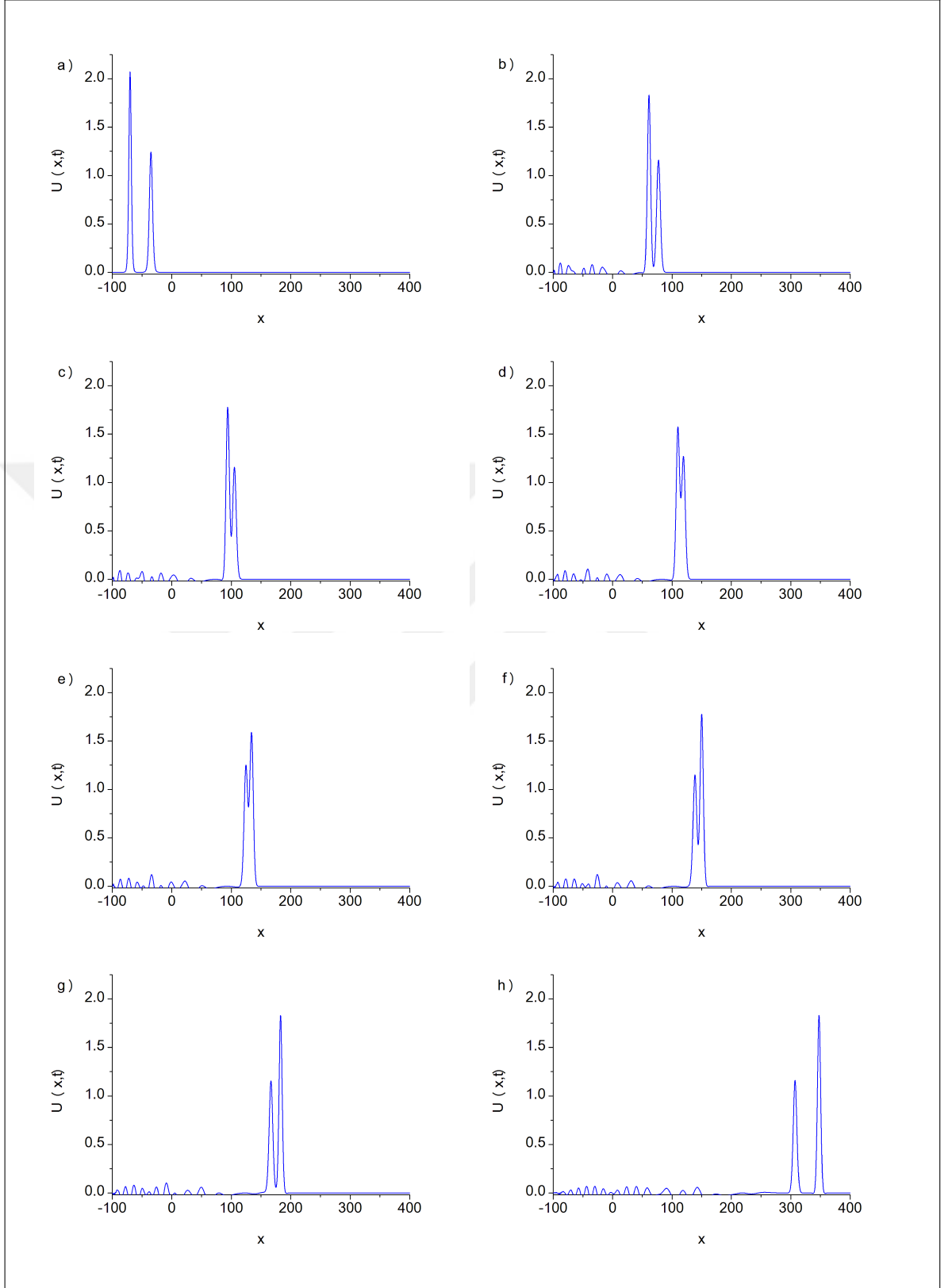
Tablo 5.4 İki solitary dalganın etkileşimi için korunum sabitleri

t	I_1	I_2
0	19.3547763167	23.4555195111
50	18.6976052814	23.4623857679
100	18.6524580290	23.4627919923
150	18.6849314916	23.4648227878
200	18.6798456059	23.4658462283
250	18.6670839625	23.4662281908

toplamı olarak verilen

$$U(x, 0) = \sum_{i=1}^3 A_i \operatorname{sech}^4 [B_i (x - x_i)] \quad (5.36)$$

başlangıç şartını kullanarak, aynı yönde ilerleyen farklı büyüklükteki üç solitary dalganın etkileşimi üzerinde çalışılmıştır. Burada, $i = 1, 2, 3$ için $A_i = \frac{210bB_i^2}{13d}$, $B_i = \left| \sqrt{\frac{b}{52cv_i}} \right|$, v_i ve x_i keyfi sabitlerdir.



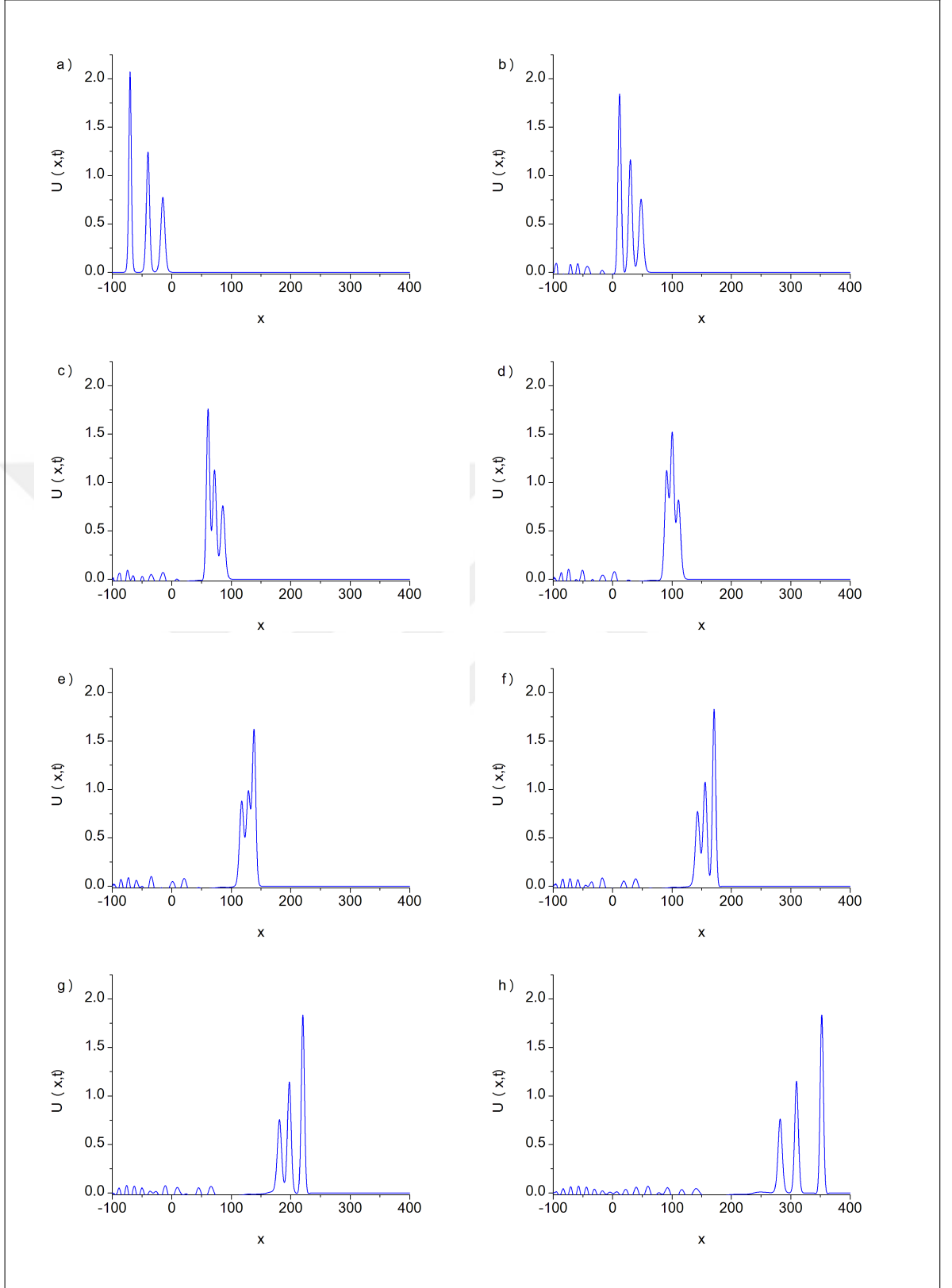
Şekil 5.3 a) $t=0$, b) $t=80$, c) $t=100$, d) $t=110$, e) $t=120$, f) $t=130$, g) $t=150$, h) $t=250$ zamanlarında iki solitary dalganın etkileşimi

Üç solitary dalganın etkileşimi için, $-100 \leq x \leq 400$ aralığı üzerinde $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$, $d = 0.5$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.1$, $v_1 = 0.3$, $v_2 = 0.5$, $v_3 = 0.8$, $x_1 = -70$, $x_2 = -40$ ve $x_3 = -15$ parametreleri seçilmiştir. $t = 0$ 'dan $t = 250$ 'ye kadar uygulanan yöntem ile elde edilen korunum sabitlerinin değerleri Tablo 5.5'te verilmiştir. Tablodan da görüldüğü gibi, programın çalışması esnasında hesaplanan korunum sabitlerinin değerleri neredeyse sabit kalmaktadır.

Seçilen parametreler ile $t = 0$ anında büyük solitary dalganın başlangıç noktası $x_1 = -70$, hızı $v_1 = 0.3$ ve genliği $A_1 = 2.07$; ortadaki solitary dalganın başlangıç noktası $x_2 = -40$, hızı $v_2 = 0.5$ ve genliği $A_2 = 1.24$; küçük solitary dalganın başlangıç noktası $x_3 = -15$, hızı $v_3 = 0.8$ ve genliği $A_3 = 0.78$ 'dir. Şekil 5.4, aynı yönde ilerleyen farklı genliklere sahip üç solitary dalganın etkileşiminin zamana göre gelişimini göstermektedir. Şekilden açıkça görüldüğü gibi, $t = 0$ anında simülasyonun başlangıcında büyük solitary dalga solda, küçük solitary dalga sağda diğer solitary dalga da bu iki solitary dalganın arasında yer almaktadır. Zaman ilerledikçe, yaklaşık olarak $t = 50$ anında etkileşim başlamakta, örtüşme süreci $t = 50$ ve $t = 170$ zaman aralığında meydana gelmektedir. $t = 250$ anında etkileşim tamamlandıktan sonra solitary dalgalar tamamen birbirinden ayrılmaktadır. Bu süreçten sonra her üç solitary dalga da ilk yapısını ve hızını koruyarak yoluna devam etmektedir.

Tablo 5.5 Üç solitary dalganın etkileşimi için korunum sabitleri

t	I_1	I_2
0	26.0335670001	27.0338255158
50	25.3912010200	27.0410243545
100	25.1890637167	27.0421570504
150	25.1729836835	27.0438944266
200	25.1975503011	27.0448261554
250	25.1823024487	27.0452250712



Şekil 5.4 a) $t=0$, b) $t=50$, c) $t=80$, d) $t=100$, e) $t=120$, f) $t=140$, g) $t=170$, h) $t=250$ zamanlarında üç solitary dalganın etkileşimi

5.1.4.4 Solitonların Oluşumu

Gaussian Başlangıç Şartı Bu bölümde, R-KdV denklemi yardımıyla

$$U(x, 0) = \exp \left[- (x - x_0)^2 \right] \quad (5.37)$$

Gaussian başlangıç şartı ve

$$U(-50, t) = U(200, t) = 0 \quad , \quad t > 0 \quad (5.38)$$

sınır şartı kullanılarak, c 'nin çeşitli değerleri için solitonların oluşumu üzerinde çalışılmıştır. Bu durumda, çözümün davranışı c 'nin değerlerine bağlıdır. Bundan dolayı, $0 \leq t \leq 10$ aralığında $c = 0.5$, $c = 0.1$ ve $c = 0.05$ değerleri seçilmiştir.

Bu problemde, $-50 \leq x \leq 200$ aralığı üzerinde parametreler $a = 1$, $b = 1$, $d = 0.5$, $x_0 = 40$, $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.1$ olarak alınmıştır. Sayısal hesaplamalar $t = 10$ 'a kadar gerçekleştirilmiştir. c 'nin farklı değerleri için hareketin iki korunum sabitinin değerleri Tablo 5.6'da sunulmuştur. Zaman ilerledikçe korunum sabitlerinin neredeyse sabit kaldığı tablodan görülmektedir. Ayrıca, Şekil 5.5'de c 'nin farklı değerleri için $t = 10$ 'da dalgaların davranışları gösterilmiştir. Şekil 5.5'ten de görüldüğü gibi herhangi bir soliton oluşumu gerçekleşmemektedir. Fakat, c değeri azaldıkça dalgaların artan sayıda, düzensiz salınım yaptığı gözlemlenmektedir.

Tablo 5.6 c 'nin farklı değerleri ve Gaussian başlangıç şartı için korunum sabitleri

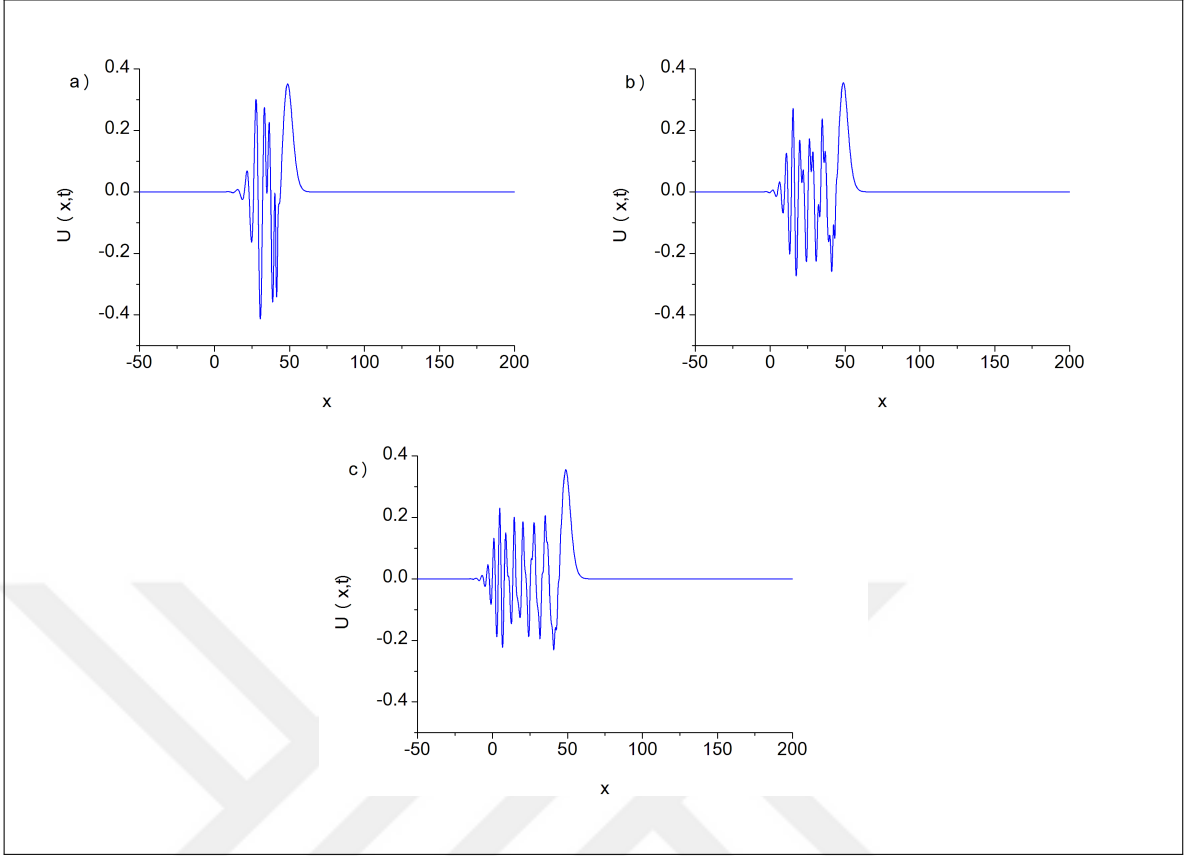
t	$c = 0.5$		$c = 0.1$		$c = 0.05$	
	I_1	I_2	I_1	I_2	I_1	I_2
0	1.7724808968	3.1332182119	1.7724808968	1.6293102517	1.7724808968	1.4413217567
2	1.7724808968	3.1332186282	1.7724808968	1.6293106040	1.7724808968	1.4413219747
4	1.7724808968	3.1332190741	1.7724808968	1.6293106594	1.7724808968	1.4413219158
6	1.7724808968	3.1332193712	1.7724808968	1.6293106739	1.7724808968	1.4413218732
8	1.7724808968	3.1332196926	1.7724808968	1.6293107034	1.7724808968	1.4413218681
10	1.7724808968	3.1332197526	1.7724808968	1.6293107402	1.7724808968	1.4413218931

Undular Bore Başlangıç Şartı Son olarak, R-KdV denklemi yardımıyla

$$U(x, 0) = \frac{1}{2} U_0 \left[1 - \tanh \left(\frac{|x| - x_0}{d} \right) \right] \quad (5.39)$$

undular bore başlangıç şartı ve

$$U(-50, t) = U(350, t) = 0 \quad , \quad t > 0 \quad (5.40)$$

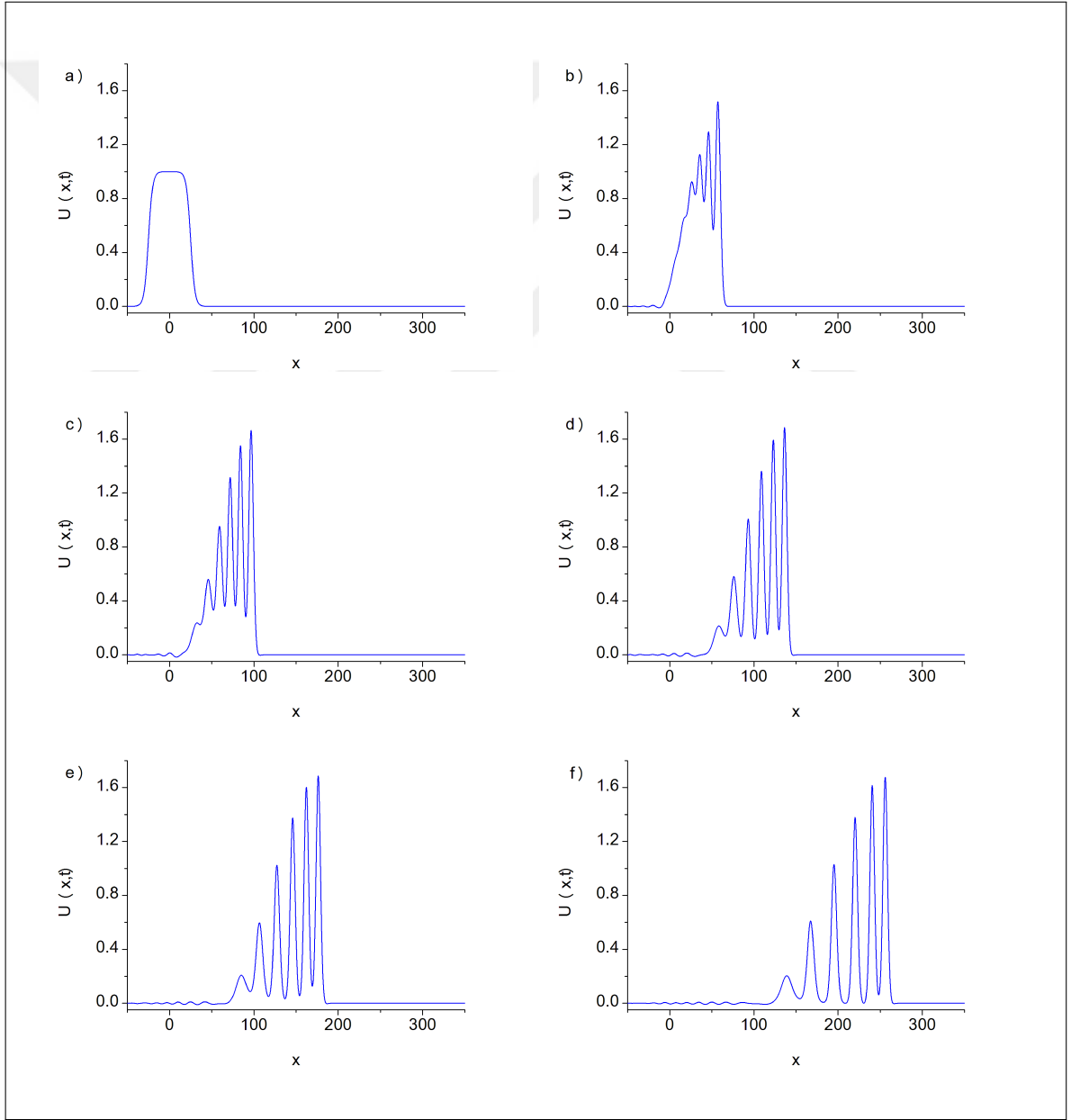


Şekil 5.5 a) $c=0.5$, b) $c=0.1$, c) $c=0.05$ için Gaussian başlangıç şartı ile solitonların oluşumu sınır şartı kullanılarak, c 'nin çeşitli değerleri için solitonların oluşumu üzerinde çalışılmıştır. Bu durumda, çözümün davranışı c 'nin değerlerine bağlıdır. Undular bore $t = 0$ anında denge yüzeyi üzerindeki yüksekliğini yansıtır. Genliğin su seviyesindeki değişimin merkezi ise $x = x_0$ 'dır. d parametresi değişimin dikliğini ölçer. d 'nin küçük değerleri daha dik olmaya eğimlidir.

Sayısal hesaplamalar için, parametreler $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$, $d = 0.5$, $v = 1.18$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.1$, $U_0 = 1$, $x_0 = 25$ ve $d = 5$ olarak alınmıştır. Program $t = 150$ 'ye kadar çalıştırılmış ve hesaplanan korunum sabitleri Tablo 5.7'de listelenmiştir. Tablodan hesaplama sırasında korunum sabitlerinin değerlerini koruduğu görülmektedir. Şekil 5.6, seçilen zamanlarda soliton dizisinin oluşumunu göstermektedir. Zaman ilerledikçe, altı solitonun oluşarak sağa doğru hareket ettiği gözlemlenmektedir.

Tablo 5.7 Undular bore başlangıç şartı için korunum sabitleri

t	I_1	I_2
0.0	50.0000031022	45.0046240676
25	49.9962032980	45.0046392765
50	49.9953438219	45.0046467879
75	49.9926519881	45.0046494681
100	49.9947407323	45.0046572374
125	49.9933952569	45.0046645828
150	49.9916251623	45.0046688213



Şekil 5.6 Undular bore başlangıç şartı ile a) $t=0$, b) $t=25$, c) $t=50$, d) $t=75$, e) $t=100$, f) $t=150$ zamanlarında solitonların oluşumu

6. BÖLÜM

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu bölümde, modifiye edilmiş Korteweg-de Vries (mKdV) ve modifiye edilmiş Kawahara (mK) sığ su dalga denklemleri ve Rosenau-Korteweg-de Vries (R-KdV) dağılımlı sığ su dalga denkleminin fiziksel davranışlarını incelemek için uygulanan yöntemler ve elde edilen sonuçlarla ilgili tartışmalara yer verilecektir.

İkinci ve üçüncü bölümde, mKdV denklemi B-spline yaklaşım fonksiyonlarına bağlı olarak sırasıyla Galerkin ve Petrov-Galerkin sonlu elemanlar yöntemleri ile sayısal olarak çözülmüştür. Tek solitary dalga hareketi, iki ve üç solitary dalganın etkileşimi ve Gaussian başlangıç şartı ile solitonların oluşumunu içeren problemler ile elde edilen sonuçların, literatürde yer alan bazı sayısal sonuçlardan daha iyi olduğu tespit edilmiştir. Bu durumda, uygulanan yöntemin mKdV denklemi için karşılaştırılan yöntemlerden daha pratik, doğru ve etkili bir sayısal yaklaşım tekniği olduğu söylenebilir.

Dördüncü bölümde, septik B-spline yaklaşım fonksiyonları ile kollokasyon sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak mK denkleminin sayısal çözümleri elde edilmiştir. Literatürde yer alan çalışmalara ilave olarak, tek solitary dalga hareketinin yanı sıra ilk kez iki ve üç solitary dalganın etkileşimi ve Gaussian başlangıç şartı ile solitonların oluşumu incelendiğinde, solitonların oluşumu dışında uygulanan yöntemin bu fiziksel olayları başarılı bir şekilde modellediği gözlemlenmiştir.

Beşinci bölümde, subdomain sonlu elemanlar yöntemi ile R-KdV denklemi sayısal olarak çözülmüştür. Yaklaşım fonksiyonu olarak septik B-spline fonksiyonlar kullanılmıştır. Tek solitary dalga hareketi incelenerek, elde edilen sonuçların diğer çalışmalardaki sayısal sonuçlardan daha iyi olduğu gözlemlenmiştir. Ayrıca, literatürdeki çalışmalardan farklı olarak ilk kez iki ve üç solitary dalganın etkileşimi ile Gaussian ve undular bore başlangıç şartları kullanılarak soliton dizisinin oluşumu gösterilmiştir. Gaussian başlangıç şartı ile soliton oluşumu dışında diğer fiziksel problemler simülasyonlarla etkili bir şekilde gösterilmiştir.

Bu tez çalışmasında, mKdV, mK ve R-KdV dalga denklemleri ile dağılımlı ve dağılımlı olmayan sığ su dalgalarının bazı fiziksel özellikleri başarılı bir şekilde gösterilerek, sayısal simülasyonlarla desteklenmiştir. Sonuç olarak, uygulanan sonlu elemanlar yöntemleri benzer tipteki lineer olmayan oluşum denklemlerinin çözümünde güvenilir bir şekilde kullanılabilir.

KAYNAKLAR

1. Yüksel, Y., Özkan Çevik, E., “Kıyı Mühendisliği”, *Beta Basım Yayım Dağıtım*, s. 732, İstanbul, 2009.
2. Young, T., “Bakerian Lecture: Experiments and calculations relative to physical optics”, *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 94, 1-16, 1804.
3. Einstein, A., “Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt”, *Annalen der Physik*, 322 (6), 132-148, 1905.
4. Gourley, M. R., Apelt, C. J., “Coastal Hydraulics and Sediment Transport in a Coastal System”, *Department of Civil Engineering, University of Queensland Press*, s. 249, Brisbane, 1985.
5. Forel, F. A., “Le-Léman-Monographie Limnologique, Tome I”, *Editions Rogue*, s. 543, Lausanne, 1892.
6. Forel, F. A., “Le-Léman-Monographie Limnologique, Tome II”, *Editions Rogue*, s. 651, Lausanne, 1895.
7. Yalçiner, A. C., “Denizin kıyıya taşıdığı felaket: Tsunami”, *Tübitak Bilim ve Teknik Dergisi*, 322, 48-57, 1994.
8. Galileo, G., “Dialogue Concerning the Two Chief World Systems”, 1632.
9. Newton, I., “Philosophiae Naturalis Principia Mathematica”, 1686.
10. Kamphuis, J. W., “Introduction to Coastal Engineering and Management”, World Scientific Publishing, s. 472, Singapore, 2000.
11. Komar, P. D., “Beach Processes and Sedimentation”, *Prentice-Hall*, s. 479, New Jersey, 1976.
12. Russell, J. S., “Report on waves”, *Report of the Fourteenth Meeting of the British Association for the Advancement of Science*, s. 311–390, York, 1844.
13. Hobhouse, H., “The building of the Great Eastern”, *Southern Millwall: Drunken Dock and the Land of Promise*, 43-44, 466–480, 1994.
14. Irk, D., “Bazı kısmi türevli diferensiyel denklem sistemlerinin B-spline sonlu elemanlar çözümleri”, *Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi*, s. 4, Eskişehir, 2007.
15. Korteweg, D. J., de Vries, G., “On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary wave”, *Philosophical Magazine*, 39, 422-443, 1895.

16. Zabusky, N. J., Kruskal, M. D., "Interaction of solitons in a collisionless plasma and recurrence of initial states", *Physical Review Letters*, 15, 240-243, 1965.
17. Gardner, C. S., Greene, J. M., Kruskal, M. D., Miura, R. M., "Method for solving the Korteweg-de Vries equation", *Physical Review Letters*, 19, 1095-1097, 1967.
18. Gu, C., "Soliton Theory and Its Applications", *Springer-Verlag*, s. 403, Berlin, 1995.
19. Ricketts, D. S., Li, X., Ham, D., "Taming electrical solitons-A new direction in picosecond electronics", *IEEE Radio Frequency Integrated Circuits Symposium*, s. 33-36, San Francisco, 2006.
20. Kuwayama, H., Ishida, S., "Biological soliton in multicellular movement", *Scientific Reports*, 3:2272, 1-5, 2013.
21. Blanco-Redondo, A., Martijn, S. C., Sipe, J. E., Krauss, T. F., Eggleton, B. J., Husko, C., "Pure-quartic solitons", *Nature Communications*, 7:10427, 1-8, 2016.
22. Hrennikoff, A., "Solution of problems of elasticity by the frame-work method", *ASME Journal of Applied Mechanics*, 8, 619-715, 1941.
23. Courant, R., "Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations", *Bulletin of the American Mathematical Society*, 49, 1-23, 1943.
24. Turner, M., Clough, R. W., Martin, H. C., Topp, L. J., "Stiffness and deflection analysis of complex structures", *Journal of the Aeronautical Sciences*, 23 (9), 805-823, 1956.
25. Clough, R. W., "The finite element method in plane stress analysis", *Proceedings of the 2nd ASCE Conference on Electronic Computation*, Pittsburg, 1960.
26. Strang, G., Fix, G. J., "An Analysis of the Finite Element Method", *Prentice-Hall*, s. 306, New Jersey, 1973.
27. Karakoç, S. B. G., "Sonlu elemanlar yöntemi ile modifiye edilmiş eşit genişlikli dalga denkleminin sayısal çözümleri", *İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi*, s. 10-12, Malatya, 2011.
28. Reddy, J. N., "An Introduction to the Finite Element Method 2nd ed.", *McGraw-Hill Education*, s. 684, New York, 1993.
29. Davies, A. J., "The Finite Element Method: A First Approach", *Oxford University Press*, s. 300, Oxford, 1980.
30. Schoenberg, I. J., "Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions, Part B: On the problem of osculatory interpolation, a second

- class of analytic approximation formulae”, *Quarterly of Applied Mathematics*, 4 (2), 112-141, 1946.
31. de Boor, C., “A Practical Guide to Splines”, *Springer-Verlag*, s. 392, New York 1978.
 32. Höllig, K., “Finite Element Methods with B-Splines”, *Society for Industrial & Applied Mathematics*, s. 145, Philadelphia, 2003.
 33. Prenter, P. M., “Splines and Variational Methods”, *John Wiley*, s. 487, New York, 1975.
 34. Miura, R. M., Gardner, C. S., Kruskal, M. D., “Korteweg–de Vries equation and generalizations. II. Existence of conservation laws and constants of motion”, *Journal of Mathematical Physics*, 9, 1204-1209, 1968.
 35. Kaya, D., “An application for the higher order modified KdV equation by decomposition method”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 10 (6), 693-702, 2005.
 36. Biswas, A., Raslan, K. R., “Numerical simulation of the modified Korteweg-de Vries equation”, *Physics of Wave Phenomena*, 19 (2), 142-147, 2011.
 37. Raslan, K. R., Baghdady, H. A., “A finite difference scheme for the modified Korteweg-de Vries equation”, *General Mathematical Notes*, 27 (1), 101-103, 2015.
 38. Kawahara, T., “Oscillatory solitary waves in dispersive media”, *Journal of the Physical Society of Japan*, 33 (1), 260-264, 1972.
 39. Haragus, M., Lombardini, E., Scheel, A., “Spectral stability of wave trains in the Kawahara equation”, *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, 8, 482-509, 2006.
 40. Wazwaz, A.-M., “New solitary wave solutions to the modified Kawahara equation”, *Physics Letters A*, 360 (4-5), 588-592, 2007.
 41. Biswas, A., “Soliton perturbation theory for the modified Kawahara equation”, *Applications and Applied Mathematics: An International Journal*, 3 (6), 218-223, 2008.
 42. Biswas, A., Zerrad, E., “Soliton perturbation theory for the generalized Kawahara equation”, *Advanced Studies in Theoretical and Applied Mechanics*, 1 (1), 39-44, 2008.
 43. Biswas, A., “Solitary wave solution for the generalized Kawahara equation”, *Applied Mathematics Letters*, 22 (2), 208-210, 2009.

44. Kurulay, M., "Approximate analytic solutions of the modified Kawahara equation with homotopy analysis method", *Advances in Difference Equations*, 2012:178, 1-6, 2012.
45. Elgarayhi, A., "Exact traveling wave solutions for the modified Kawahara equation", *Zeitschrift für Naturforschung A*, 60 (3), 139-144, 2014.
46. Ullah, H., Nawaz, R., Islam, S., Idrees, M., Fiza, M., "The optimal homotopy asymptotic method with application to modified Kawahara equation", *Journal of the Association of Arab Universities for Basic and Applied Sciences*, 18, 82-88, 2015.
47. Bekir, A., Guner, O., Bilgil, H., "Optical soliton solutions for the variable coefficient modified Kawahara equation", *Optik*, 126, 2518-2522, 2015.
48. Safavi, M., Khajehnasiri, A. A., "Solutions of the modified Kawahara equation with time-and space-fractional derivatives", *Journal of Modern Methods in Numerical Mathematics*, 7 (1), 10-18, 2016.
49. Polat, N., Kaya, D., Tutalar, H. I., "A analytic and numerical solution to a modified Kawahara equation and a convergence analysis of the method", *Applied Mathematics and Computation*, 181 (1), 193-199, 2006.
50. Bibi, N., Tirmizi, S. I. A., Haq, S., "Meshless method of lines for numerical solution of Kawahara type equations", *Applied Mathematics*, 2, 608-618, 2011.
51. Bakodah, H. O., "New approach for numerical solution of Kawahara and modified Kawahara equations by adomian decomposition method", *International Journal of Conceptions on Computing and Information Technology*, 3 (2), 40-43, 2015.
52. Zarebnia, M., Aghili, M., "A new approach for numerical solution of the modified Kawahara equation", *Journal of Nonlinear Analysis and Application*, 2, 48-59, 2016.
53. Rosenau, P., "Dynamics of dense discrete systems", *Progress of Theoretical Physics*, 79, 1028-1042, 1988.
54. Zuo, J.-M., "Solitons and periodic solutions for the Rosenau-KdV and Rosenau-Kawahara equations", *Applied Mathematics and Computation*, 2015 (2), 835-840, 2009.
55. Esfahani, A., "Solitary wave solutions for generalized Rosenau-KdV equation", *Communications in Theoretical Physics*, 55 (3), 396-398, 2011.
56. Razborova. P., Triki, H., Biswas, A., "Perturbation of dispersive shallow water waves", *Ocean Engineering*, 63, 1-7, 2013.

57. Ebadi, G., Mojaver, A., Triki, H., Yıldırım, A., Biswas, A., “Topological solitons and other solutions of the Rosenau-KdV equation with power law nonlinearity”, *Romanian Journal of Physics*, 58 (1-2), 1-10, 2013.
58. Saha, A., “Topological 1-soliton solutions for the generalized Rosenau-KdV equation”, *Fundamental Journal of Mathematical Physics*, 2 (1), 19-23, 2012.
59. Hu, J., Hu, B., “Conservative linear difference scheme for Rosenau-KdV equation”, *Advances in Mathematical Physics*, Article ID 423718, 7 pages, 2013.
60. Wongsaijai, B., Poochinapan, K., “A three-level average implicit finite difference scheme to solve equation obtained by coupling the Rosenau-KdV equation and the Rosenau-RLW equation”, *Applied Mathematics and Computation*, 245, 289-304, 2014.
61. Zheng, M., Zhou, J., “An average linear difference scheme for the generalized Rosenau-KdV equation”, *Journal of Applied Mathematics*, Article ID 202793, 9 pages, 2014.
62. Karakoc, S. B. G., Ak, T., “Numerical solution of Rosenau-KdV equation using subdomain finite element method”, *New Trends in Mathematical Sciences*, 4 (1), 223-235, 2016.
63. Karakoc, S. B. G., Ak, T., “Numerical simulation of dispersive shallow water waves with Rosenau-KdV equation”, *International Journal of Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, 3 (3), 32-40, 2016.
64. Miura, R. M., “The Korteweg–de Vries equation: a survey of results”, *SIAM Review*, 18, 412-459, 1976.

ÖZGEÇMİŞ

1987 yılında Giresun'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Giresun'da tamamladı. 2005 yılında kazandığı Gazi Üniversitesi, Kırşehir Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü'nden 2009 yılında mezun oldu. Hemen ardından Niğde Üniversitesi'nde memur olarak göreve başladı. 2009 yılında Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı'nda başlamış olduğu yüksek lisans eğitimini ve 2011 yılında Nevşehir Üniversitesi'nde başlamış olduğu pedagojik formasyon eğitimini 2012 yılında tamamladı. Aynı yıl Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı'nda doktora yapmaya hak kazandı. Yüksek lisans ve doktora eğitimi boyunca TÜBİTAK tarafından desteklendi. 2014 yılı Şubat ayında göreve başladığı Yalova Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi'nde öğretim görevlisi olarak akademik çalışmalarına devam etmektedir.

Adres: Yalova Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi
Ulaştırma Mühendisliği Bölümü
Merkez Yerleşke, P.K: 77200
Merkez/YALOVA

E-Posta: akturgut@yahoo.com

