T. C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FİBONACCİ VE LUCAS $p-$SAYILARININ GENELLEŞTİRİLMESİ VE UYGULAMALARI

Tezi Hazırlayan
Cahit KÖME

Tez Danışmanı
Doç. Dr. Yasin YAZLIK

Matematik Anabilim Dalı
Doktora Tezi

Ekim 2018
NEVŞEHİR

T. C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FİBONACCİ VE LUCAS $p-$SAYILARININ GENELLEŞTİRİLMESİ VE UYGULAMALARI

Tezi Hazırlayan
Cahit KÖME

Tez Danışmanı
Doç. Dr. Yasin YAZLIK

Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Ekim 2018
NEVŞEHİR

Doç. Dr. Yasin YAZLIK danışmanlığında **Cahit KÖME** tarafından hazırlanan **"Fibonacci ve Lucas $p-$sayılarının Genelleştirilmesi ve Uygulamaları"** başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Doktora Tezi** olarak kabul edilmiştir.

19/10/2018

JÜRİ

Başkan : Prof. Dr. Necdet BATIR ....

Üye : Doç. Dr. Yasin YAZLIK ....

Üye : Doç. Dr. Necati TAŞKARA ....

Üye : Doç. Dr. Mustafa BAHŞİ ....

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Durhasan Turgut TOLLU ....

ONAY

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun 24/10/2018 tarih ve 45-420 kararı ile onaylanmıştır.

25/10/2018

Prof. Dr. Şahlan ÖZTÜRK

Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİM SAYFASI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada yer alan bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu ve bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Cahit KÖME

TEŞEKKÜR

Doktora çalışmam boyunca tecrübelerinden faydalandığım ve bu tezin hazırlanması sırasında, maddi ve manevi yardımlarını esirgemeyerek değerli zamanını ayıran tezi titizlikle inceleyen danışman hocam Sayın Doç. Dr. Yasin YAZLIK'a, çalışmalarım boyunca maddi ve manevi desteğini esirgemeden bana destek olan sevgili eşim Dr. Öğr. Üyesi Sure KÖME'ye ve varlığıyla bana en büyük motivasyonu sağlayan biricik kızım Beren KÖME'ye sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

FİBONACCİ VE LUCAS $p-$SAYILARININ GENELLEŞTİRİLMESİ VE UYGULAMALARI
(Doktora Tezi)

Cahit KÖME

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Ekim 2018

ÖZET

Bu tez çalışması altı bölümden oluşmaktadır.
İlk bölümde sayı dizilerine ait genel bir literatür taraması ve bazı temel kavramlar verilmiştir.
İkinci bölümde Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas $p-$sayıları tanımlanarak bu sayıların Binet formülleri ve üreteç fonksiyonları elde edilmiştir.
Üçüncü bölümde $m-$genişletilmiş Fibonacci $p-$fark ve $m-$genişletilmiş Lucas $p-$fark dizileri tanımlanarak $m-$genişletilmiş Fibonacci $p-$Newton interpolasyonu incelenmiştir.
Dördüncü bölümde genelleştirilmiş Fibonacci $p-$dizi ve genelleştirilmiş Lucas $p-$dizilerinin özel hali olan iki periyotlu Fibonacci ve Lucas dizilerinin terimleri kullanılarak $r-$circulant matrislerin spektral normları için alt ve üst sınırlar hesaplanmıştır.
Beşinci bölümde iki periyotlu Fibonacci ve Lucas dizilerinin terimleri kullanılarak $r-$circulant matrislerin determinantları ve tersleri elde edilmiştir.
Altıncı bölümde sonuç ve öneriler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Genelleştirilmiş Fibonacci $p-$sayıları, Genelleştirilmiş Lucas $p-$sayıları, $m-$genişletilmiş Fibonacci $p-$fark dizileri, $m-$genişletilmiş Lucas $p-$fark dizileri, $r-$circulant matris.
Tez Danışmanı: Doç. Dr. Yasin YAZLIK
Sayfa Adeti: 82

GENERALIZATIONS AND APPLICATIONS OF FIBONACCI AND LUCAS $p-$NUMBERS
(PhD Thesis)

Cahit KÖME

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
November 2018

ABSTRACT

This thesis consists of six chapters.
The first chapter is devoted to literature review and basic informations about number sequences.
In the second chapter, the generalized Fibonacci and Lucas $p-$numbers are defined and their Binet formulas and generating functions are obtained.
In the third chapter, the $m-$extension of Fibonacci $p-$difference and $m-$extension of Lucas $p-$difference sequence are given and $m-$extension of Fibonacci Newton interpolation is investigated.
In the fourth chapter, the upper and lower bounds of the spectral norms of the $r-$circulant matrices are calculated by using the elements of the bi-periodic Fibonacci and Lucas numbers which are the special cases of the generalized Fibonacci and Lucas $p-$numbers.
In the fifth chapter, the inverses and determinants of the $r-$circulant matrices are obtained by using the elements of the bi-periodic Fibonacci and Lucas sequences.
In the sixth chapter, results and discussions are given.

***Keywords:* *Generalized Fibonacci $p-$numbers*, *Generalized Lucas $p-$numbers*, $m-$*extension of Fibonacci* $p-$*difference sequences*, $m-$*extension of Lucas* $p-$*difference sequences*, $r-$*circulant matrix*.**
Thesis Supervisor: Assoc. Prof. Yasin YAZLIK
Page Number: 82

İÇİNDEKİLER

TABLOLAR LİSTESİ

ŞEKİLLER LİSTESİ

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}^{+}$	:	Sayma sayıları kümesi
$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	:	Kompleks sayılar kümesi
F_n	:	Fibonacci sayı dizisi
L_n	:	Lucas sayı dizisi
P_n	:	Pell sayı dizisi
Q_n	:	Pell–Lucas sayı dizisi
c_n	:	Düzeltilmiş Pell sayı dizisi
J_n	:	Jacobsthal sayı dizisi
j_n	:	Jacobsthal–Lucas sayı dizisi
W_n	:	Horadam sayı dizisi
$F_{k,n}$	:	$k-$Fibonacci sayı dizisi
$L_{k,n}$	:	$k-$Lucas sayı dizisi
$G_{k,n}$	:	Genelleştirilmiş $k-$Fibonacci sayı dizisi
$H_{k,n}$	:	Genelleştirilmiş $k-$Horadam sayı dizisi
q_n	:	İki periyotlu Fibonacci sayı dizisi
l_n	:	İki periyotlu Lucas sayı dizisi
f_n	:	Genelleştirilmiş Fibonacci $p-$sayı dizisi
ℓ_n	:	Genelleştirilmiş Lucas $p-$sayı dizisi
F_p	:	Fibonacci $p-$sayı dizisi
L_p	:	Lucas $p-$sayı dizisi
$F_{p,m}$	:	$m-$genişletilmiş Fibonacci $p-$sayı dizisi
$L_{p,m}$	:	$m-$genişletilmiş Lucas $p-$sayı dizisi
V	:	Vandermonde matrisi
Δ	:	Fark operatörü
$F_{p,m,n}^{(i)}$	:	$m-$genişletilmiş Fibonacci $p-$fark dizisi
$L_{p,m,n}^{(i)}$	:	$m-$genişletilmiş Lucas $p-$fark dizisi
$C_r(x)$	:	c_{ij} elemanlarına sahip $r-$circulant matris

$\|\|A\|\|_\infty$	:	A matrisinin maximum satır toplam normu
$\|\|A\|\|_1$	:	A matrisinin maximum sütun toplam normu
$\|\|A\|\|_2$	:	A matrisinin spektral normu
$\|\|A\|\|_E$	:	A matrisinin öklid normu
$\rho(A)$	:	A matrisinin spektral yarıçapı
$c_1(A)$	:	A matrisinin maximum sütun uzunluk normu
$r_1(A)$	:	A matrisinin maximum satır uzunluk normu
$A \oplus B$	:	A ile B matrislerinin direkt toplamı
$A \circ B$	:	A ile B matrislerinin Hadamard çarpımı

BÖLÜM 1

1.1. Giriş

Geçmişten günümüze yapılan tüm çalışmalar ve gözlemler, evrendeki her nesnenin belirli bir düzene göre hareket ettiğini açıklamaktadır. Bu sistem içindeki detaylar incelendikçe matematik biliminin önemi ortaya çıkmaktadır. Bazı ünlü bilim adamları ve felsefecilere göre evren matematik dilinde yazılmıştır. Evrende şu ana kadar gözlemlenmiş bütün varlıkların hareketleri matematik biliminin alfabeleri olan sayılar ile ifade edilebilmektedir. İçinde bulunduğumuz evrende bazı sayılar özellikle de Fibonacci sayıları sıkça karşımıza çıkmaktadır.
Fibonacci sayıları ilk olarak Leonardo Fibonacci tarafından 1202 yılında yazılan *"Liber Abaci"* adlı kitabında tavşanlarla ilgili bir soru ile ortaya çıkmıştır. Bu problem şu şekildedir [1]:
Biri erkek ve diğeri dişi olmak üzere bir çift yavru tavşan olsun.

- *Bir ay sonra bu yavru çift erginleşiyor,*
- *Erginleşen her çift tavşan bir ay sonra yeni bir çift yavru doğuruyor,*
- *Her yavru çift bir ay sonra erginleşiyor,*
- *Hiç bir tavşanın ölmediğini ve her dişi tavşanın bir erkek bir dişi yavru doğurduğunu varsayalım.*

Bu şartlar altında bir yılın sonunda toplam kaç tavşan olur?

- *İlk ay, sadece bir çift tavşan vardır*,
- *İkinci ay, bu tavşanlar erginleşir*,
- *Üçüncü ay, dişi bir çift yavru doğurur ve 1 yavru çift tavşan vardır*.

Bu şekilde yavru çiftler hesaplanmaya devam edilirse Ocak ayından başlamak suretiyle yetişkin, yavru ve toplam tavşan çifti sayısı aşağıdaki tablo ile verilebilir.

Tablo 1.1. Yetişkin, yavru ve toplam tavşan çifti sayısı

Çift Sayısı	Ocak	Şubat	Mart	Nisan	Mayıs	Haziran	Temmuz	$\cdots$
Yetişkin	0	1	1	2	3	5	8	$\cdots$
Yavru	1	0	1	1	2	3	5	$\cdots$
Toplam	1	1	2	3	5	8	13	$\cdots$

Böylece bir yılın sonundaki tavşan çifti sayısı kolaylıkla bulunabilir. Tabloya dikkat edilirse toplam tavşan çifti sayıları belirli bir düzene göre artış göstermektedir. Bu sayılar ardışık iki terimin birbirine eklenmesi yoluyla elde edilen sayılardır. Bu sayılara Fibonacci sayıları, bu sayıların oluşturduğu diziye ise Fibonacci dizisi denir. Bu dizinin ardışık terimlerinin limitine ”Altın oran” denir ve $\Phi = 1,618033988749894...$’e denk gelmektedir [2]. Bu sayı birçok bilim adamının araştırmalarına konu olmuş ve halen araştırılmaya devam edilmektedir. Birçok araştırmacıya göre bir nesnenin altın orana yakınlığı onun aynı zamanda estetik olarak güzelliğinin de bir ölçüsü olarak kabul edilmiştir. Fibonacci sayıları ve altın oranın doğada gözlemlendiği bazı yerler aşağıdaki gibidir [3–5].

Dünyanın ekvatoral çapı Fibonacci sayı dizisinin ardışık 3 elemanı kullanılarak elde edilebilir. Dünyanın ekvatoral çapı $55 \times 144 = 7920$ mil ve $89 \times 144 = 12816$ kilometre olarak bulunmuştur.

Bazı çiçeklerin yapraklarında Fibonacci sayılarını görmek mümkündür. Örneğin;

Tablo 1.2. Çiçek taç yapraklarındaki Fibonacci sayıları

Çiçek adı	**Taç yaprak sayısı**
Enchanter’s nightshade	2
Iris, lilly	3
Buttercup, columbine, delphinium, larkspur, wall lettuce	5
Celandine, delphinium, field senecio, squalid senecio	8
Chamomile, cineraria, corn marigold, double delphinium, globeflower	13
Aster, black-eyed Susan, chicory, doronicum, helenium, hawkbit	21
Daisy, gailliardia, plantain, pyrethrum, hawkweed	34

çam kozalağı, enginar, ananas gibi bitkilerin kabuklarının yapısında Fibonacci sayılarını görmek mümkündür. Ayçekirdeğinin çekirdeklerinin dizilimi ile yapılan çalışmalar üzerindeki spirallerin Fibonacci sayıları ile temsil edilebildiğini göstermektedir. Arı kovanlarında, alt küme teorisinde, bazı elementlerin atom numaralarında, Balmer serilerinde, fizikteki optikte, müzikte, şiir kafiye ve uyaklarında, nöropsikolojide, elektrik devrelerinde ve şebekelerinde ve buna benzer birçok alanda karşımıza çıkmaktadır [3].

1.2. Amaç ve Kapsam

Bu çalışmanın temel amacı genelleştirilmiş Fibonacci $p-$dizisi ve genelleştirilmiş Lucas $p-$dizilerini tanımlayarak, bu dizinin özelliklerini araştırmaktır. Ayrıca, genelleştirilmiş Fibonacci $p-$dizisi ve genelleştirilmiş Lucas $p-$dizilerinin özel halleri olan $m-$genişletilmiş Fibonacci $p-$sayıları ve $m-$genişletilmiş Lucas $p-$sayılarına sonlu fark yöntemleri uygulanarak $m-$genişletilmiş Fibonacci $p-$fark ve $m-$genişletilmiş Lucas $p-$fark dizileri elde edilerek temel özellikleri incelenecektir. Son olarak, $p = 1$ durumu için elemanları iki periyotlu Fibonacci ve Lucas sayılarından oluşan

$r-$circulant matrislerin normlarının alt ve üst sınırları hesaplanacak ve tanımlanan matrisin determinantları ve matris tersleri bu sayı dizileri ile karakterize edilecektir.

1.3. Kaynak Araştırması

Bu kısımda tez içerisinde kullanılan çalışmalar hakkında bilgiler verilecektir.

Horadam (1965), ”Basic properties of a certain generalized sequence of numbers” isimli çalışmasında Horadam dizisini tanımlamış ve bu diziye ait genel özellikleri incelemiştir [6].

Horadam (1994), ”Applications of Modified Pell Numbers to Representations” isimli çalışmasında modifiye edilmiş Pell dizisini tanımlayarak bu dizinin Binet formülünü ve bazı özelliklerini incelemiştir. Ayrıca bu dizinin pozitif tamsayılar ile temsillerini incelemiştir [7].

Solak (2005), ”On the norms of circulant matrices with the Fibonacci and Lucas numbers” isimli çalışmasında elemanları Fibonacci ve Lucas sayıları olan circulant matrislerin spektral normlarının alt ve üst sınırlarını elde etmiştir. Ayrıca bu matrislerin Hadarmard ve Kronecker çarpımlarını kullanarak bazı eşitsizlikler elde etmiştir [8].

Yang (2005), ”On the LU factorization of the Vandermonde matrix” isimli çalışmasında Vandermonde matrisinin L ve U alt ve üst iki üçgensel matris için $V = LU$ olacak şekilde elde etmiştir [9].

Stakhov ve Rozin (2006), ”Theory of Binet formulas for Fibonacci and Lucas $p-$numbers” isimli çalışmalarında Fibonacci ve Lucas $p-$sayılarını tanımlamış ve bu diziler için Binet formüllerini bulmuşlardır. Ayrıca p’nin farklı değerleri için ayrı ayrı Binet formüllerini vermişlerdir [10].

Stakhov ve Rozin (2006), ”The continuous functions for the Fibonacci and Lucas $p-$numbers” isimli çalışmalarında Fibonacci ve Lucas $p-$sürekli fonksiyonlarını tanımlamışlardır. p’nin farklı değerleri için bu dizilere ait sürekli fonksiyonlar elde etmişlerdir [11].

Falcon ve Plaza (2007), ”On the Fibonacci $k-$numbers” isimli çalışmalarında Fibonacci sayılarının yeni bir genelleştirilmesi olarak $k-$Fibonacci dizisini tanımlamışlardır. Bu diziyi geometrik dönüşümlerin ardışık uygulamalarını çalışırken tanımlamışlardır. Ayrıca $k-$Fbonacci dizisi için Binet formülü, üreteç fonksiyonu ve bu diziye ait birçok temel özellikler verilmiştir [12].

Koçer ve Tuğlu (2007), ”The Binet Formulas for the Pell and Pell-Lucas $p-$Numbers” isimli çalışmalarında Pell $p-$sayı ve Pell-Lucas $p-$sayı dizilerini tanımlamışlardır. p’nin özel durumlarına göre Pell $p-$sayı ve Pell-Lucas $p-$sayı dizilerinin ayrı ayrı Binet formüllerini elde etmişlerdir [13].

Kılıç (2008), ”The Binet formula, sums and representations of generalized Fibonacci $p-$numbers” isimli çalışmasında, Fibonacci $p-$dizilerinin Binet formülünü, toplamlarını ve temsillerini elde etmiştir. Fibonacci $p-$dizilerinin üreteç fonksiyonlarının kombinatorik temsillerini de vermiştir. Ayrıca, genelleştirilmiş Fibonacci $p-$sayılarının toplamları için matris yöntemini kullanarak bir toplam formülü geliştirmiştir [14].

Koçer ve ark. (2009), ”On the $m-$extension of the Fibonacci and Lucas $p-$numbers” isimli çalışmalarında Fibonacci ve Lucas $p-$dizilerinin $m-$genişlemesini tanımlayarak bu dizilere ait Binet formüllerini elde etmişlerdir. Son olarak p ve m'nin farklı değerleri için $m-$genişletilmiş Fibonacci $p-$sayı ve $m-$genişletilmiş Lucas $p-$sayılarının farklı sayı dizilerine ingirgenmeleri verilmiştir [15].

Edson ve Yayenie (2009), ”A New Generalization of Fibonacci Sequence & Extended Binet's Formula” isimli çalışmalarında iki periyotlu Fibonacci dizilerini tanımlayarak bu dizilere ait Binet formülünü, üreteç fonksiyonlarını, Cassini, Catalan, d'Ocagne gibi temel özellikleri incelemişlerdir. Binet formüllerinden binom katsayılarını içeren toplam formüllerini elde etmişlerdir [16].

Taşçı ve Firengiz (2010), ”Incomplete Fibonacci and Lucas $p-$numbers” isimli çalışmasında tamamlanmamış Fibonacci $p-$ sayıları ve tamamlanmamış Lucas $p-$sayılarını tanımlamış ve bu dizilere ait özellikleri ve rekürans bağlantılarını incelemişlerdir. Öte yandan tamamlanmamış Fibonacci $p-$sayıları ve tamamlanmamış Lucas $p-$sayıları arasındaki bazı bağlantıları elde etmişlerdir [17].

Cooper (2010), ”An identity for period k second order linear recurrence systems” isimli çalışmasında k periyodik lineer ikinci mertebeden rekürans sistemini tanımlamıştır. k'nın farklı değerleri için diziler elde etmiş ve bu dizileri ağaç diyagramları ile ifade etmiştir [18].

Shen ve Cen (2010), ”On the bounds for the norms of $r-$circulant matrices with the Fibonacci and Lucas numbers” isimli çalışmalarında elemanları Fibonacci ve Lucas sayıları olan $r-$circulant matrislerin spektral normlarının alt ve üst sınırlarını elde etmişlerdir. Ayrıca bu matrislerin Kronecker ve Hadamard çarpımlarının da alt ve üst sınırlarını elde etmişlerdir [19].

Shen ve Cen (2010), ”On the spectral norms of $r-$circulant matrices with the $k-$Fibonacci and $k-$Lucas numbers” isimli çalışmalarında elemanları $k-$Fibonacci ve $k-$Lucas sayıları olan $r-$circulant matrislerin spektral normlarının alt ve üst sınırlarını elde etmişlerdir. Aynı zamanda bu matrislerin Kronecker ve Hadamard çarpımlarının alt ve üst sınırlarını elde etmişlerdir [20].

Uslu ve ark. (2010), "The Generalized $k-$Fibonacci and $k-$Lucas Numbers" isimli çalışmalarında genelleştirilmiş $k-$Fibonacci ve genelleştirilmiş $k-$Lucas dizilerini tanımlayarak bu diziye ait Binet formüllerini, toplam formüllerini, Cassini ve Simpson eşitliklerini ve bu iki dizi arasındaki bazı bağıntıları elde etttiler [21].

Shen ve ark. (2011), "On the determinants and inverses of circulant matrices with Fibonacci and Lucas numbers" isimli çalışmalarında elemanları Fibonacci ve Lucas sayıları olan circulant matrislerin determinantlarını ve terslerini hesaplamışlardır [22].

Falcon (2011), "On the $k-$Lucas numbers" isimli çalışmalarında Lucas sayılarının yeni bir genelleştirilmesi olarak $k-$Lucas dizisini tanımlamıştır. Bu çalışmada $k-$Lucas dizisinin temel özellikleri ve $k-$Fibonacci dizisi ile arasındaki ilişkileri elde etmiştir [23].

Yayenie (2011), "A note on generalized Fibonacci sequences" isimli çalışmasında iki periyotlu Fibonacci sayılarının birçok özelliklerini detaylı bir şekilde incelemiştir. Bu diziye ait Binom toplam formülünü elde etmiştir. Ayrıca bu çalışmada genelleştirilmiş Lucas ve genelleştirilmiş Catalan özdeşliğini de vermiştir. Son olarak modifiye edilmiş genelleştirilmiş Fibonacci sayı dizisini tanımlayarak bu diziye ait üreteç fonksiyonu ve Binet formülünü elde etmiştir [24].

Tuğlu ve ark. (2011), "Bivariate Fibonacci like $p-$polynomials" isimli çalışmalarında iki değişkenli Fibonacci $p-$polinomları ve iki değişkenli Lucas $p-$polinomlarının temel özelliklerini üreteç fonksiyonlarını kullanarak ispat etmişlerdir [25].

Cessa ve Eguibar (2011), "Inverse of the Vandermonde and Vandermonde confluent matrices" isimli çalışmalarında Vandermonde matrisinin tersini alt ve üst üçgensel matrisler kullanarak hesaplamışlardır [26].

Yazlık ve Taşkara (2012), "Spectral norm, Eigenvalues and Determinant of Circulant Matrix involving the Generalized $k-$Horadam numbers" isimli çalışmalarında elemanları genelleştirilmiş $k-$Horadam sayıları olan circulant matrislerin spektral normlarının alt ve üst sınırlarını özdeğerlerini ve determinantlarını delde etmişlerdir [27].

Alp ve ark. (2012), "Two-periodic ternary recurrences and their Binet-formula" isimli çalışmalarında iki periyotlu üçüncü dereceden rekürans bağıntılarını tanımlamışlardır. Ayrıca bu rekürans bağıntılarının karakteristik denkleminin köklerinin özel durumları için Binet formüllerini elde etmişlerdir [28].

Yazlık ve Taşkara (2012), "A note on generalized $k-$Horadam sequence" isimli çalışmalarında genelleştirilmiş $k-$Horadam dizisini tanımlamışlardır. Bu diziye temel özellikleri determinantları kullanarak ispatlamışlardır [29].

Yazlık ve Taşkara (2013), ”On the norms of an $r-$circulant matrix with the generalized $k-$Horadam numbers” isimli çalışmalarında elemanları $k-$Horadam sayıları olan $r-$circulant matrislerin spektral normlarının alt ve üst sınırlarını elde etmişlerdir. Ayrıca bu matrislerin özdeğerlerini ve determinantlarını detaylı bir şekilde incelemişlerdir [30].

Yazlık ve Taşkara (2013), ”On the inverse of circulant matrix via generalized $k-$Horadam numbers” isimli çalışmalarında elemanları genelleştirilmiş $k-$Horadam sayıları olan circulant matrislerin determinantlarını ve terslerini hesaplamışlardır[31].

Bahsi (2014), ”On the norms of $r-$circulant matrices with the hyper-Fibonacci and Lucas numbers” isimli çalışmasında elemanları hyper-Fibonacci ve Lucas sayıları olan $r-$circulant matrislerin spektral normlarının alt ve üst sınırlarını elde etmiştir [32].

Bilgici (2014), ”Two generalizations of Lucas sequence” isimli çalışmasında iki periyotlu Lucas sayılarını tanımlayarak bu diziye ait temel özellikleri incelemiştir. Ayrıca iki periyotlu Fibonacci ve iki periyotlu Lucas dizileri arasında birçok bağıntı bulmuştur. Son olarak modifiye edilmiş genelleştirilmiş Lucas dizilerini tanımlayarak modifiye edilmiş genelleştirilmiş Fibonacci dizisi ile arasındaki ilişkileri elde etmiş ve bu diziyle ilgili temel özellikleri vermiştir [33].

Bahsi (2015), ”On the norms of circulant matrices with the generalized Fibonacci and Lucas numbers” isimli çalışmasında elemanları genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayıları olan circulant matrislerin spektral normlarının alt ve üst sınırlarını elde etmiştir. Ayrıca bu matrislerin Hadarmard ve Kronecker çarpımlarını kullanarak bazı eşitsizlikleri de incelemiştir [34].

Ramirez (2016), ”A $q-$Analogue of the Bi-Periodic Fibonacci Sequence” isimli çalışmasında iki periyotlu Fibonacci sayılarının $q-$analogunu tanımlamıştır. İki periyotlu Fibonacci sayılarının $q-$analogunun Binom toplam formüllerini, üreteç fonksiyonlarını ve bu diziye ait bazı özellikleri elde etmiştir. Ayrıca bu dizinin kombinatorik bazı özelliklerini de detaylı olarak incelemiştir [35].

Kızılateş ve Tuğlu (2016), ”On the bounds for the spectral norms of geometric circulant matrices” isimli çalışmasında elemanları genelleştirilmiş Fibonacci ve hyperharmonic sayılar olan geometrik circulant matrislerin spektral normları için alt ve üst sınırlarını elde etmiştir [36].

Falcon (2016), ”The $k-$Fibonacci difference sequences” isimli çalışmasında $k-$Fibonacci fark dizilerini tanımlamıştır. Bu yeni fark dizisine ait toplam formülünü ve üreteç fonksiyonunu elde etmiştir. Ayrıca bu dizilerin yaklaşık değerlerini Newton interpolasyonu yöntemi ile bularak k'nın özel durumları için incelemiştir [37].

Bahsi (2016), ”On the norms of $r-$circulant matrices with the hyperharmonic numbers” isimli çalışmasında elemanları hyperharmonic sayılar olan $r-$circulant matrislerin normlarının alt ve üst sınırlarını elde etmiştir [38].

Köme ve Yazlık (2017), ”On the spectral norms of $r-$circulant matrices with the biperiodic Fibonacci and Lucas numbers” isimli çalışmalarında elemanları iki periyotlu Fibonacci ve Lucas sayıları olan $r-$circulant matrislerin normlarının alt ve üst sınırlarını incelediler. Ayrıca bu matrislerin Kronecker ve Hadamard çarpımlarının da alt ve üst sınırlarını elde etmişlerdir [39].

Yang ve Zang (2018), ”Some identities of the generalized Fibonacci and Lucas sequences” isimli çalışmalarında iki periyotlu Fibonacci ve Lucas sayılarının yeni bir genellemesini elde ettiler. Bu dizi ile iki periyotlu Fibonacci ve iki periyotlu Lucas sayıları arasında bağıntılar elde etmişlerdir. Ayrıca genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayılarının Binet ve toplam formüllerini incelemişlerdir [40].

Tan (2018), ”A $q-$Analogue of the Bi-Periodic Lucas Sequence” isimli çalışmasında iki periyotlu Lucas sayılarının $q-$analogunu tanımlamıştır. $q-$iki periyotlu Fibonacci sayıları ile $q-$iki periyotlu Lucas sayıları arasındaki eşitlikleri incelemiştir. Ayrıca bu diziye ait Binom formülünü elde etmiştir [41].

Yazlık ve Köme (2018), ”A new generalization of Fibonacci and Lucas $p-$numbers” isimli çalışmalarında Fibonacci ve Lucas $p-$sayılarının yeni bir genellemesi olan iki periyotlu Fibonacci ve Lucas $p-$sayılarını tanımlamışlardır. Ayrıca Vandermonde matrisini kullanarak iki periyotlu Fibonacci ve Lucas $p-$sayılarının genelleştirilmiş Binet formülünü hesaplamışlardır [42].

Köme ve Yazlık (2018), ”On the determinants and inverses of $r-$circulant matrices with biperiodic Fibonacci and Lucas numbers” isimli çalışmalarında elemanları iki periyotlu Fibonacci ve Lucas sayıları olan $r-$circulant matrislerin terslerini ve determinantlarını hesaplamışlardır [43].

Coskun ve Taskara (2018), ”A note on the bi-periodic Fibonacci and Lucas matrix sequences” isimli çalışmalarında iki periyotlu Fibonacci ve iki periyotlu Lucas matris dizilerini tanımlayarak bu matris dizilerinin Binet formülllerini ve bazı temel özelliklerini incelemişlerdir. Ayrıca iki periyotlu Fibonacci ve iki periyotlu Lucas matris dizileri arasında bazı bağıntıları elde etmişlerdir [44].

1.4. Temel Kavramlar

Bu bölümde tez içerisinde kullanılacak olan genel tanımlar ve özellikler verilecektir.

Tanım 1.4.1 ([3, 45])**.** $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ ve

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, n \in \mathbb{N}, \tag{1.2}$$

ile tanımlanan $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisine Fibonacci dizisi denir. Denklem (1.2) sabit katsayılı 2. mertebeden bir lineer fark denklemi olup, karakteristik denklemi $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ şeklindedir. Karakteristik denkleme ait kökler ise sırasıyla $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$'dir. n. Fibonacci sayısı için Binet formülü

$$F_n = \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2} \tag{1.3}$$

şeklindedir. Ayrıca Fibonacci dizisinin üreteç fonksiyonu ise,

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = \frac{1}{1 - x - x^2} \tag{1.4}$$

dir. Denklem (1.3)'den $\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lambda_1$ olduğu kolayca görülür.

Tanım 1.4.2 ([3])**.** $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ ve

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n, n \in \mathbb{N}, \tag{1.5}$$

ile tanımlanan $\{L_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisine Lucas dizisi denir. n. Lucas sayısı için Binet formülü

$$L_n = \lambda_1^n + \lambda_2^n \tag{1.6}$$

şeklindedir. Ayrıca Lucas dizisinin üreteç fonksiyonu ise,

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n x^n = \frac{2 - x}{1 - x - x^2} \tag{1.7}$$

dir. Denklem (1.6)'dan $\lim_{n\to\infty} \frac{L_{n+1}}{L_n} = \lambda_1$ olduğu kolayca görülür.

Tanım 1.4.3 ([46])**.** $P_0 = 0$, $P_1 = 1$ ve

$$P_{n+2} = 2P_{n+1} + P_n, n \in \mathbb{N}, \tag{1.8}$$

ile tanımlanan $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisine Pell dizisi denir. Denklem (1.8)'nin karakteristik denklemi $r^2 - 2r - 1 = 0$ şeklindedir. Karakteristik denkleme ait kökler ise sırasıyla $\gamma = 1 + \sqrt{2}$ ve $\delta = 1 - \sqrt{2}$ 'dir. n. Pell sayısı için Binet formülü

$$P_n = \frac{\gamma^n - \delta^n}{\gamma - \delta} \tag{1.9}$$

şeklindedir. Öte yandan, Pell dizisinin üreteç fonksiyonu ise

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n x^n = \frac{x}{1 - 2x - x^2} \tag{1.10}$$

dir.

Tanım 1.4.4 ([46]). $Q_0 = 2$, $Q_1 = 2$ ve

$$Q_{n+2} = 2Q_{n+1} + Q_n, n \in \mathbb{N}, \tag{1.11}$$

ile tanımlanan $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisine Pell-Lucas dizisi denir. $n.$ Pell-Lucas sayısı için Binet formülü

$$Q_n = \gamma^n + \delta^n \tag{1.12}$$

dir. Ayrıca Pell-Lucas dizisinin üreteç fonksiyonu ise,

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_n x^n = \frac{2-2x}{1-2x-x^2} \tag{1.13}$$

şeklindedir.

Tanım 1.4.5 ([7]). $c_0 = 1$, $c_1 = 1$ ve

$$c_{n+2} = 2c_{n+1} + c_n, n \in \mathbb{N}, \tag{1.14}$$

ile tanımlanan $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisine modifiye edilmiş Pell dizisi denir. $n.$ modifiye edilmiş Pell sayısının Binet formülü

$$c_n = \frac{\gamma^n + \delta^n}{\gamma + \delta} \tag{1.15}$$

dir. Ayrıca modifiye edilmiş Pell dizisinin üreteç fonksiyonu ise,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \frac{1-x}{1-2x-x^2} \tag{1.16}$$

şeklindedir.

Lemma 1.4.1 ([47]). Pell, Pell-Lucas ve modifiye edilmiş Pell dizileri arasındaki bazı eşitlikler aşağıdaki gibi verilmiştir:

- $$P_n^2 = \frac{1}{8}\left(Q_{2n} + 2\left(-1\right)^{n+1}\right) \tag{1.17}$$
- $$P_n c_{n+2} = \frac{1}{8} P_{2n+2} - (-1)^n \tag{1.18}$$
- $$\sum_{i=1}^{n} P_{2i} c_{2i+2} = \frac{1}{4} P_{2n} P_{2n+4} - n. \tag{1.19}$$

Tanım 1.4.6 ([48])**.** $J_0 = 0$, $J_1 = 1$ ve

$$J_{n+2} = J_{n+1} + 2J_n, n \in \mathbb{N}, \tag{1.20}$$

olarak tanımlanan $\{J_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisine Jacobsthal dizisi denir. Denklem (1.20)'nin karakteristik denklemi $r^2 - r - 2 = 0$ şeklindedir. Karakteristik denkleme ait kökler ise sırasıyla $\phi = 2$ ve $\varphi = -1$ 'dir. n. Jacobsthal sayısının Binet formülü

$$J_n = \frac{\phi^n - \varphi^n}{\phi - \varphi} \tag{1.21}$$

dir. Ayrıca Jacobsthal dizisinin üreteç fonksiyonu ise,

$$\sum_{n=0}^{\infty} J_n x^n = \frac{x}{1 - x - 2x^2} \tag{1.22}$$

şeklindedir.

Tanım 1.4.7 ([48])**.** $j_0 = 2$, $j_1 = 1$ ve

$$j_{n+2} = j_{n+1} + 2j_n, n \in \mathbb{N}, \tag{1.23}$$

olarak tanımlanan $\{j_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisine Jacobsthal-Lucas dizisi denir. n. Jacobsthal-Lucas sayısının Binet formülü

$$j_n = \phi^n + \varphi^n \tag{1.24}$$

dir. Ayrıca Jacobsthal dizisinin üreteç fonksiyonu ise,

$$\sum_{n=0}^{\infty} j_n x^n = \frac{2 - x}{1 - x - 2x^2} \tag{1.25}$$

şeklindedir.

Lemma 1.4.2 ([48])**.** Jacobsthal dizisi ile Jacobsthal–Lucas dizisi arasındaki bazı eşitlikler aşağıdaki gibi verilmiştir.

- $$j_n J_n = J_{2n} \tag{1.26}$$
- $$j_n = J_{n+1} + 2J_{n-1} \tag{1.27}$$
- $$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{J_{n+1}}{J_n} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{j_{n+1}}{j_n} \right) = 2 \tag{1.28}$$
- $$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{j_n}{J_n} \right) = 3 \tag{1.29}$$

Tanım 1.4.8 ([6]). $a, b, p, q \in \mathbb{Z}$ ve $W_0 = a, W_1 = b$ ve

$$W_{n+2} = pW_{n+1} - qW_n, n \in \mathbb{N}, \tag{1.30}$$

ile tanımlanan $\{W_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisine Horadam dizisi denir. Denklem (1.30)'nin karakteristik denklemi $r^2 - pr + q = 0$ şeklindedir. Karakteristik denkleme ait kökler ise sırasıyla $\psi = \frac{p+\sqrt{p^2-4q}}{2}$ ve $\nu = \frac{p-\sqrt{p^2-4q}}{2}$ 'dir. $A = \frac{b-A\nu}{\psi-\nu}$ ve $B = \frac{b-A\psi}{\psi-\nu}$ olmak üzere n. Horadam sayısı için Binet formülü,

$$W_n = A\psi^n + B\nu^n \tag{1.31}$$

şeklindedir. Horadam dizisinin üreteç fonksiyonu ise,

$$\sum_{n=0}^{\infty} W_n x^n = \frac{a + x(b - pa)}{1 - px + qx^2} \tag{1.32}$$

dir.

Tanım 1.4.9 ([12]). $k > 0$, $F_{k,0} = 0$, $F_{k,1} = 1$ ve

$$F_{k,n+2} = kF_{k,n+1} + F_{k,n}, n \in \mathbb{N}, \tag{1.33}$$

ile tanımlanan $\{F_{k,n}\}_{n=0}^{\infty}$ dizisine $k-$Fibonacci dizisi denir. $k-$Fibonacci dizisinin karakteristik denklemi $r^2 = kr+1$ şeklindedir. Karakteristik denkleme ait kökler sırasıyla $r_1 = \frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}$ ve $r_2 = \frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}$ dir. n. $k-$Fibonacci sayısı için Binet formülü,

$$F_{k,n} = \frac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2} \tag{1.34}$$

şeklindedir. Ayrıca ardışık iki $k-$Fibonacci sayısının limiti $\lim_{n\to\infty} \dfrac{F_{k,n}}{F_{k,n-1}} = r_1$ dir.

Tanım 1.4.10 ([23]). $k > 0, L_{k,0} = 2$, $L_{k,1} = k$ ve

$$L_{k,n+2} = kL_{k,n+1} + L_{k,n}, n \in \mathbb{N}, \tag{1.35}$$

ile tanımlanan $\{L_{k,n}\}_{n=0}^{\infty}$ dizisine $k-$Lucas dizisi denir. n. $k-$Lucas sayısı için Binet formülü, $r_1 = \frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}$ ve $r_2 = \frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}$ olmak üzere,

$$L_{k,n} = r_1^n + r_2^n \tag{1.36}$$

şeklindedir.

Tanım 1.4.11 ([21])**.** $k>0$, $G_{k,0}=a$ ve $G_{k,1}=b$ ve

$$G_{k,n+2}=kG_{k,n+1}+G_{k,n}, n\in\mathbb{N}, \tag{1.37}$$

ile tanımlanan $\{G_{k,n}\}_{n=0}^{\infty}$ dizisine genelleştirilmiş $k-$Fibonacci dizisi denir. Genelleştirilmiş $k-$Fibonacci dizisinin Binet formülü $r_1=\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}$, $r_2=\frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}$, $C=b-ar_1$ ve $D=b-ar_2$ olmak üzere

$$G_{k,n}=\frac{Cr_1^n-Dr_2^n}{r_1-r_2} \tag{1.38}$$

dır.

Tanım 1.4.12 ([29])**.** $k>0$ ve $f(k)$ ve $g(k)$, k'nın skaler değerli polinomları ve $f(k)^2+4g(k)>0$ olsun. $H_{k,0}=a$, $H_{k,1}=b$ ve

$$H_{k,n+2}=f(k)H_{k,n+1}+g(k)H_{k,n}, n\in\mathbb{N}, \tag{1.39}$$

ile tanımlanan $\{H_{k,n}\}_{n=0}^{\infty}$ dizisine genelleştirilmiş $k-$Horadam dizisi denir. Denklem (1.39)'nin karakteristik denklemi $t^2-f(k)t-g(k)=0$ şeklindedir. Karakteristik denkleme ait kökler ise sırasıyla $t_1=\frac{f(k)+\sqrt{f(k)^2+4g(k)}}{2}$ ve $t_2=\frac{f(k)-\sqrt{f(k)^2+4g(k)}}{2}$'dir. $X=b-at_2$ ve $Y=b-at_1$ olmak üzere $n.$ genelleştirilmiş $k-$Horadam sayısı için Binet formülü,

$$H_{k,n}=\frac{Xt_1^n-Yt_2^n}{t_1-t_2} \tag{1.40}$$

şeklindedir.

Tanım 1.4.13 ([16])**.** Sıfırdan farklı herhangi a ve b reel sayıları $q_0=0, q_1=1$ ve

$$q_{n+2}=\begin{cases} aq_{n+1}+q_n, & n\equiv 0 \text{ (mod 2)} \\ bq_{n+1}+q_n, & n\equiv 1 \text{ (mod 2)}, \end{cases}, n\in\mathbb{N} \tag{1.41}$$

ile tanımlanan $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisine iki periyotlu Fibonacci dizisi denir. Bu diziye ait karakteristik denklem $x^2-abx-ab=0$ dir. Karakteristik denkleminin kökleri $\alpha=\frac{ab+\sqrt{a^2b^2+4ab}}{2}$, $\beta=\frac{ab-\sqrt{a^2b^2+4ab}}{2}$ ve $\xi(m)=m-2\lfloor\frac{m}{2}\rfloor$ olmak üzere $n.$ iki periyotlu Fibonacci sayısı için Binet formülü

$$q_n=\left(\frac{a^{1-\xi(n)}}{ab^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}}\right)\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta} \tag{1.42}$$

dir. Öte yandan iki periyotlu Fibonacci sayılarının üreteç fonksiyonu ise,

$$F(x)=\frac{x\left(1+ax-x^2\right)}{1-(ab+2)x^2+x^4} \tag{1.43}$$

şeklindedir. Karakteristik denklemin kökleri arasında

- $(\alpha+1)(\beta+1)=1,$ (1.44)

- $\alpha+\beta=ab,$ (1.45)

- $\alpha\beta=-ab,$ (1.46)

- $\alpha+1=\dfrac{\alpha^2}{ab},$ (1.47)

- $\beta+1=\dfrac{\beta^2}{ab},$ (1.48)

- $-\beta(\alpha+1)=\alpha,$ (1.49)

- $-\beta(\beta+1)=\beta$ (1.50)

bağıntıları vardır [16].

Tanım 1.4.14 ([33]). Sıfırdan farklı herhangi a ve b reel sayıları $l_0=2, l_1=a$ ve

$$l_{n+2}=\begin{cases} bl_{n+1}+l_n, & n\equiv 0 \text{ (mod 2)} \\ al_{n+1}+l_n, & n\equiv 1 \text{ (mod 2)}, \end{cases}, n\in\mathbb{N} \tag{1.51}$$

ile tanımlanan $\{l_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisine iki periyotlu Lucas dizisi denir. $n.$ iki periyotlu Lucas sayısı için Binet formülü, $\alpha=\frac{ab+\sqrt{a^2b^2+4ab}}{2}$ ve $\beta=\frac{ab-\sqrt{a^2b^2+4ab}}{2}$ olmak üzere

$$l_n=\left(\frac{a^{\xi(n)}}{ab^{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor}}\right)(\alpha^n+\beta^n) \tag{1.52}$$

dir. İki periyotlu Lucas sayılarının üreteç fonksiyonu ise,

$$L(x)=\frac{2+ax-(ab+2)x^2+ax^3}{1-(ab+2)x^2+x^4} \tag{1.53}$$

şeklindedir.

Sonuç 1.4.1 ([33]). $\xi(m)=m-2\lfloor\frac{m}{2}\rfloor$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

- $\xi(m+n)=\xi(m)+\xi(n)-2\xi(m)\xi(n)$

- $\xi(m)\xi(n+1)=\frac{1}{2}\left[\xi(m)+\xi(n+1)-\xi(m+n+1)\right]$

- $\xi(m+1)\xi(n)=\frac{1}{2}\left[\xi(m+1)+\xi(n)-\xi(m+n+1)\right]$

- $\xi(m+1)\xi(n+1)=\frac{1}{2}\left[\xi(m+1)+\xi(n+1)-\xi(m+n)\right].$

Lemma 1.4.3 ([33]). l_n, n. iki periyotlu Lucas sayısı ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\left(\frac{1}{a}\right) l_n l_{n+1} = \frac{1}{(ab)^{n+1}}\left[\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1}\right] + (-1)^n \tag{1.54}$$

eşitliği sağlanır.

Tanım 1.4.15 ([10]). $p \in \mathbb{N}^+$, $n \geq p+1$, $F_p(0) = 0$, $F_p(1) = 1$, $F_p(2) = 1$, $\ldots$, $F_p(p) = 1$ ve

$$F_p(n) = F_p(n-1) + F_p(n-p-1), n \in \mathbb{N}, \tag{1.55}$$

ile tanımlanan diziye Fibonacci $p-$dizisi denir. Özel olarak $p = 1$ için Fibonacci $p-$dizisi, Fibonacci sayı dizisine indirgenir.

Tanım 1.4.16 ([10]). $p \in \mathbb{N}^+$, $n \geq p+1$ ve $L_p(0) = p+1$, $L_p(1) = 1$, $L_p(2) = 1$, $\ldots$, $L_p(p) = 1$ ve

$$L_p(n) = L_p(n-1) + L_p(n-p-1), n \in \mathbb{N}, \tag{1.56}$$

ile tanımlanan diziye Lucas $p-$dizisi denir. Özel olarak $p = 1$ için Lucas $p-$dizisi, Lucas sayı dizisine indirgenir.

Tanım 1.4.17 ([15]). $m > 0$, $p \in \mathbb{N}^+$, $n \geq p+1$ ve $F_{p,m}(0) = 0$, $F_{p,m}(1) = 1$, $F_{p,m}(2) = m$, $\ldots$, $F_{p,m}(p) = m^{p-1}$ ve

$$F_{p,m}(n) = mF_{p,m}(n-1) + F_{p,m}(n-p-1), n \in \mathbb{N}, \tag{1.57}$$

ile tanımlanan diziye $m-$genişletilmiş Fibonacci $p-$dizisi denir. Özel olarak $m = 1$ alınırsa Fibonacci $p-$dizisine indirgenir.

Tanım 1.4.18 ([15]). $m > 0$, $p \in \mathbb{N}^+$, $n \geq p+1$ ve $L_{p,m}(0) = p+1$, $L_{p,m}(1) = m$, $L_{p,m}(2) = m^2$, $\ldots$, $L_{p,m}(p) = m^p$ ve

$$L_{p,m}(n) = mL_{p,m}(n-1) + L_{p,m}(n-p-1), n \in \mathbb{N}, \tag{1.58}$$

ile tanımlanan diziye $m-$genişletilmiş Lucas $p-$dizisi denir. Özel olarak $m = 1$ alınırsa Lucas $p-$dizisine indirgenir.

Tanım 1.4.19. Herhangi $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$ sabit katsayılar için, homojen lineer rekürans bağlantısı

$$\gamma_n = a_1\gamma_{n-1} + a_2\gamma_{n-2} + \cdots + a_k\gamma_{n-k} + a_{k+1}\gamma_{n-k-1} \tag{1.59}$$

verilsin. Bu durumda Denklem (1.59)'e ait karakteristik denklem

$$x^{k+1} - a_1 x^k - a_2 x^{k-1} - \cdots - a_{k+1} = 0 \tag{1.60}$$

ve bu denklemin $k+1$ tane farklı kökü $r_1, r_2, \ldots, r_k, r_{k+1}$ olmak üzere

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_{k+1} \\ r_1^2 & r_2^2 & \cdots & r_{k+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1^k & r_2^k & \cdots & r_{k+1}^k \end{bmatrix} \tag{1.61}$$

matrisine $(k+1) \times (k+1)$ tipinde Vandermonde matrisi denir [49].

Lemma 1.4.4 ([9]). $\mathbf{V} = [v_{ij}]$ matrisi $(n+1) \times (n+1)$ tipinde bir Vandermonde matrisi olmak üzere, **V** matrisi

$$l_{ij} = \begin{cases} 1 & , \quad i = j \,, \\ \displaystyle\sum_{1 \le m_1 \le m_2 \le \ldots \le m_{i-j} \le j} r_{m_1} r_{m_2} \ldots r_{m_j} & , \quad i > j \ge 1, \\ 0 & , \quad i < j \end{cases} \tag{1.62}$$

ve

$$u_{ij} = \begin{cases} 1 & , \quad i = 1 \,, \\ \displaystyle\prod_{\substack{m=1 \\ m \ne j}}^{i-1} (r_j - r_m) & , \quad i \le j, \\ 0 & , \quad i > j \end{cases} \tag{1.63}$$

şeklinde $\mathbf{L} = [l_{ij}]$ ve $\mathbf{U} = [u_{ij}]$ alt ve üst üçgensel matrisleri olmak üzere, **V = LU** şeklinde yazılabilir.

Lemma 1.4.5 ([26]). $\mathbf{V} = [v_{ij}]$ matrisi $(n+1) \times (n+1)$ tipinde bir Vandermonde matrisi olmak üzere,

$$l_{ij}^{-1} = \begin{cases} 1 & , \quad i = j \,, \\ l_{i-1,j-1}^{-1} - l_{i-1,j}^{-1} r_{i-1} & , \quad i = 2, 3, \ldots, n+1; j = 2, 3, \ldots, i-1, \\ 0 & , \quad i < j \end{cases} \tag{1.64}$$

ve

$$u_{ij}^{-1} = \begin{cases} \displaystyle\prod_{\substack{m=1 \\ m \ne i}}^{j} \frac{1}{r_i - r_m} & , \quad i \le j, \\ 0 & , \quad i > j \,. \end{cases} \tag{1.65}$$

şeklinde $\mathbf{L}^{-1} = [l_{ij}^{-1}]$ ve $\mathbf{U}^{-1} = [u_{ij}^{-1}]$ alt ve üst üçgensel matrisleri olmak üzere, $\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{L}^{-1}$ şeklinde yazılabilir.

Tanım 1.4.20 ([37]). Sonlu fark yöntemleri $k-$Fibonacci dizisine uygulanırsa $\{F_{k,n}\}_{n=0}^{\infty}$

$$\Delta(F_{k,n}) = F_{k,n+1} - F_{k,n} \tag{1.66}$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde $F_{k,n}$'in n'ye göre ikinci basamaktan farkı

$$\Delta^2(F_{k,n}) = \Delta(\Delta(F_{k,n})) = F_{k,n+2} - 2F_{k,n+1} + F_{k,n} \tag{1.67}$$

olarak elde edilir. Böyle devam ederek $F_{k,n}$'in n'ye göre i. basamaktan farkı

$$\Delta^{(i)}(F_k) = F_k^{(i)} = \{\Delta^{(i)}(F_{k,n})\} = \{F_{k,n}^{(i)}\} = \{F_{k,n+1}^{(i-1)} - F_{k,n}^{(i-1)}\} \tag{1.68}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.4.21 ([50]). Herhangi $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1} \in \mathbb{C}$ için elemanları $c_{i,j} = x_{j-i(\text{mod n})}$ olacak şekilde $n \times n$ tipindeki

$$C = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-2} & x_{n-1} \\ x_{n-1} & x_0 & x_1 & \cdots & x_{n-3} & x_{n-2} \\ x_{n-2} & x_{n-1} & x_0 & \cdots & x_{n-4} & x_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_2 & x_3 & x_4 & \cdots & x_0 & x_1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_{n-1} & x_0 \end{bmatrix} \tag{1.69}$$

matrise circulant matris denir.

Tanım 1.4.22 ([19]). Herhangi $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1} \in \mathbb{C}$ için elemanları

$$c_{i,j} = \begin{cases} x_{j-i}, & j \geq i, \\ r x_{n+j-i}, & j < i, \end{cases}$$

olacak şekilde $n \times n$ tipindeki

$$C_r = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-2} & x_{n-1} \\ r x_{n-1} & x_0 & x_1 & \cdots & x_{n-3} & x_{n-2} \\ r x_{n-2} & r x_{n-1} & x_0 & \cdots & x_{n-4} & x_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ r x_2 & r x_3 & r x_4 & \cdots & x_0 & x_1 \\ r x_1 & r x_2 & r x_3 & \cdots & r x_{n-1} & x_0 \end{bmatrix} \tag{1.70}$$

matrise $r-$circulant matris denir.

Tanım 1.4.23 ([51]). F reel ya da komplex sayılar cismi ve V, F cismi üzerinde tanımlanmış vektör uzayı olmak üzere $||.|| : V \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dönüşümü

- $\forall v \in V$ için $||v|| \geq 0$ ve $||v|| = 0 \iff v = 0$
- $\alpha \in F$ ve $v \in V$ için $||\alpha v|| = |\alpha| ||v||$
- $u, v \in V$ için $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$

şartlarını sağlıyor ise, $||.||$ dönüşümüne vektör normu denir. Üzerinde norm tanımlanmış bir vektör uzayına ise normlu uzay denir.

Tanım 1.4.24 ([51]). $\mathbb{M}_{mn}(F)$, elemanları F cisminden alınan $m \times n$ matrislerin kümesi ve $A, B \in \mathbb{M}_{mn}(F)$ ve $\alpha \in F$ olmak üzere

- $0 \leq ||A||$ ve $||A|| = 0 \iff A = 0$
- $||\alpha A|| = |\alpha| ||A||$, $\alpha \in F$
- $||A + B|| \leq ||A|| + ||B||$
- $||AB|| \leq ||A|| ||B||$

şartlarını sağlayan $||.|| : \mathbb{M}_{mn}(F) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dönüşümüne matris normu denir ve $||A||$ ile gösterilir.

Tanım 1.4.25 ([51]). A, $n \times n$ tipinde bir matris olmak üzere

- $||A||_F = \left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right]^{\frac{1}{2}}$ ifadesi A matrisinin Frobenious normu,
- $A^* = \left(\overline{A}\right)^T$ olmak üzere, $||A||_2 = \sqrt{\max_{1\leq i\leq n} \lambda_i(A^*A)}$ ifadesi A matrisinin spektral normu,
- $||A||_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ ifadesi A matrisinin maximum sütun toplam normu,
- $||A||_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ ifadesi A matrisinin maximum satır toplam normu,
- $$c_1(A) = \max_j \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|^2} \tag{1.71}$$

  ifadesi A matrisinin maximum sütun uzunluk normu,
- $$r_1(A) = \max_i \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2} \tag{1.72}$$

  ifadesi A matrisinin maximum satır uzunluk normu şeklinde tanımlanır.

Lemma 1.4.6 ([51]). A, $m \times n$ tipinde bir matris olmak üzere, A matrisinin normları arasında

- $\dfrac{1}{\sqrt{n}}||A||_F \leq ||A||_2 \leq ||A||_F,$ (1.73)
- $||A||_2 \leq \sqrt{||A||_1||A||_\infty},$
- $\frac{1}{\sqrt{n}}||A||_\infty \leq ||A||_2 \leq \sqrt{m}||A||_\infty,$
- $\frac{1}{\sqrt{m}}||A||_1 \leq ||A||_2 \leq \sqrt{n}||A||_1$

bağıntıları bulunmaktadır.

Tanım 1.4.26 ([51]). $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ $n \times n$ tipinde iki matris olmak üzere $A \circ B = [a_{ij} \cdot b_{ij}]$ olarak verilen çarpıma A ve B matrislerinin Hadarmard çarpımı denir.

Lemma 1.4.7 ([52]). A, B ve C $n \times n$ tipinde matrisler olmak üzere, eğer $A = B \circ C$ ise $||A||_2 \leq r_1(B)c_1(C)$ dir.

BÖLÜM 2

Bu bölümde genelleştirilmiş Fibonacci $p-$dizisi ve genelleştirilmiş Lucas $p-$dizileri tanımlanarak bu diziler için elde edilen özellikler verilecektir.

2.1. Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas $p-$Sayıları

Tanım 2.1.1 ([42]). $p \in \mathbb{N}$, $a, b > 0$ için,

$$f_0 = 0, f_1 = 1, f_2 = a, \ldots, f_p = a^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} b^{\lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor} \tag{2.3}$$

ve

$$f_n = \begin{cases} af_{n-1} + f_{n-p-1}, & n \equiv 0 \text{ (mod 2)} \\ bf_{n-1} + f_{n-p-1}, & n \equiv 1 \text{ (mod 2)} \end{cases}, \quad n \geq p+1 \tag{2.4}$$

rekürans bağlantısı ile tanımlanan $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ reel sayı dizisine genelleştirilmiş Fibonacci $p-$dizisi denir ve bu dizinin elemanlarına da genelleştirilmiş Fibonacci $p-$sayıları denir.

Tanım 2.1.2 ([42]). $p \in \mathbb{N}$, $a, b > 0$ için,

$$\ell_0 = p+1, \ell_1 = a, \ell_2 = ab, \ldots, \ell_p = a^{\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor} b^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} \tag{2.5}$$

ve

$$\ell_n = \begin{cases} b\ell_{n-1} + \ell_{n-p-1}, & n \equiv 0 \text{ (mod 2)}, \\ a\ell_{n-1} + \ell_{n-p-1}, & n \equiv 1 \text{ (mod 2)} \end{cases}, \quad n \geq p+1 \tag{2.6}$$

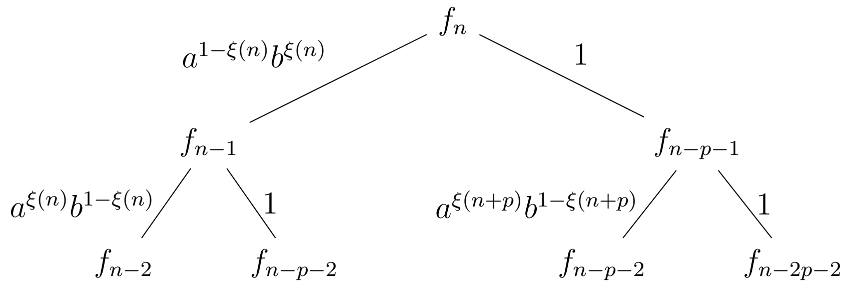
rekürans bağlantısı ile tanımlanan $\{\ell_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ reel sayı dizisine genelleştirilmiş Lucas $p-$dizisi denir ve bu dizinin elemanlarına da genelleştirilmiş Lucas $p-$sayıları denir.

$\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{\ell_n\}_{n=0}^{\infty}$ sayı dizileri a, b ve p'nin farklı değerleri için birçok farklı sayı dizisine indirgenebilir. Aşağıdaki tabloda indirgenen sayı dizileri verilmiştir.

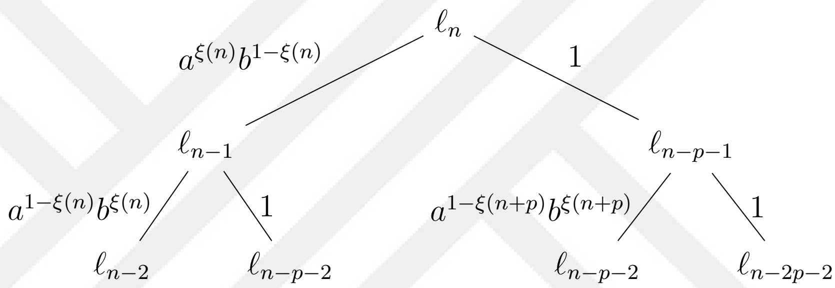
Tablo 2.3. Genelleştirilmiş Fibonacci $p-$dizisi ve genelleştirilmiş Lucas $p-$dizilerinin p, a ve b değerleri için özel durumları

p	a	b	f_n	ℓ_n
1	1	1	Fibonacci dizisi F_n [3]	Lucas dizisi L_n [3]
1	2	2	Pell dizisi P_n [3]	Pell-Lucas dizisi Q_n [3]
1	k	k	$k-$Fibonacci dizisi $\{F_{k,n}\}_{n=0}^{\infty}$ [12]	$k-$Lucas dizisi $\{L_{k,n}\}_{n=0}^{\infty}$ [23]
1	a	b	İki periyotlu Fibonacci dizisi q_n [16]	İki periyotlu Lucas dizisi l_n [33]
p	1	1	Fibonacci $p-$dizisi $F_{p,n}$ [10]	Lucas $p-$dizisi $L_{p,n}$ [10]
p	2	2	Pell $p-$dizisi $F_{p,n}$ [13]	Pell-Lucas $p-$dizisi $L_{p,n}$ [13]
p	m	m	$m-$genişletilmiş Fibonacci $p-$dizisi $F_{p,m,n}$ [15]	$m-$genişletilmiş Lucas $p-$dizisi $L_{p,m,n}$ [15]
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Genelleştirilmiş Fibonacci $p-$dizisi ve genelleştirilmiş Lucas $p-$dizilerine ait ağaç diyagramları aşağıdaki gibi verilir.



Şekil 2.1. Genelleştirilmiş Fibonacci $p-$dizisi için ağaç diyagramı



Şekil 2.2. Genelleştirilmiş Lucas $p-$dizisi için ağaç diyagramı

Şekil 2.1. ve 2.2. 'den $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{\ell_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizilerine ilişkin eşitlikler aşağıda verilmiştir. Burada p'ye göre iki durum söz konusudur.

- p çift ise,

$$\begin{aligned}
f_n &= a^{1-\xi(n)}b^{\xi(n)}f_{n-1} + f_{n-p-1} \\
&= a^{1-\xi(n)}b^{\xi(n)}\left(a^{\xi(n)}b^{1-\xi(n)}f_{n-2} + f_{n-p-2}\right) + a^{\xi(n+p)}b^{1-\xi(n+p)}f_{n-p-2} + f_{n-2p-2} \\
&= abf_{n-2} + a^{1-\xi(n)}b^{\xi(n)}f_{n-p-2} + a^{\xi(n)}b^{1-\xi(n)}f_{n-p-2} + f_{n-2p-2} \\
&= abf_{n-2} + \left(a^{1-\xi(n)}b^{\xi(n)} + a^{\xi(n)}b^{1-\xi(n)}\right)f_{n-p-2} + f_{n-2p-2} \\
&= abf_{n-2} + (a+b)\,f_{n-p-2} + f_{n-2p-2}
\end{aligned}$$

dir.

- p tek ise,

$$
\begin{aligned}
f_n &= a^{1-\xi(n)}b^{\xi(n)}f_{n-1}+f_{n-p-1}\\
&= a^{1-\xi(n)}b^{\xi(n)}\left(a^{\xi(n)}b^{1-\xi(n)}f_{n-2}+f_{n-p-2}\right)+a^{\xi(n+p)}b^{1-\xi(n+p)}f_{n-p-2}+f_{n-2p-2}\\
&= abf_{n-2}+a^{1-\xi(n)}b^{\xi(n)}f_{n-p-2}+a^{1-\xi(n)}b^{\xi(n)}f_{n-p-2}+f_{n-2p-2}\\
&= abf_{n-2}+2a^{1-\xi(n)}b^{\xi(n)}f_{n-p-2}+f_{n-2p-2}\\
&= abf_{n-2}+2\left(f_{n-p-1}-f_{n-2p-2}\right)+f_{n-2p-2}\\
&= abf_{n-2}+2f_{n-p-1}-f_{n-2p-2}
\end{aligned}
$$

dir. Benzer şekilde p'nin durumuna göre genelleştirilmiş Lucas $p-$dizisine ait eşitlikler de aşağıdaki gibi verilebilir.

- p çift ise,

$$
\begin{aligned}
\ell_n &= a^{\xi(n)}b^{1-\xi(n)}\ell_{n-1}+\ell_{n-p-1}\\
&= a^{\xi(n)}b^{1-\xi(n)}\left(a^{1-\xi(n)}b^{\xi(n)}\ell_{n-2}+\ell_{n-p-2}\right)+a^{1-\xi(n+p)}b^{\xi(n+p)}\ell_{n-p-2}+\ell_{n-2p-2}\\
&= ab\ell_{n-2}+a^{\xi(n)}b^{1-\xi(n)}\ell_{n-p-2}+a^{1-\xi(n)}b^{\xi(n)}\ell_{n-p-2}+\ell_{n-2p-2}\\
&= ab\ell_{n-2}+\left(a^{\xi(n)}b^{1-\xi(n)}+a^{1-\xi(n)}b^{\xi(n)}\right)\ell_{n-p-2}+\ell_{n-2p-2}\\
&= ab\ell_{n-2}+(a+b)\,\ell_{n-p-2}+\ell_{n-2p-2}
\end{aligned}
$$

dir.

- p tek ise,

$$
\begin{aligned}
\ell_n &= a^{\xi(n)}b^{1-\xi(n)}\ell_{n-1}+\ell_{n-p-1}\\
&= a^{\xi(n)}b^{1-\xi(n)}\left(a^{1-\xi(n)}b^{\xi(n)}\ell_{n-2}+\ell_{n-p-2}\right)+a^{1-\xi(n+p)}b^{\xi(n+p)}\ell_{n-p-2}+\ell_{n-2p-2}\\
&= ab\ell_{n-2}+a^{\xi(n)}b^{1-\xi(n)}\ell_{n-p-2}+a^{\xi(n)}b^{1-\xi(n)}\ell_{n-p-2}+\ell_{n-2p-2}\\
&= ab\ell_{n-2}+2a^{\xi(n)}b^{1-\xi(n)}\ell_{n-p-2}+\ell_{n-2p-2}\\
&= ab\ell_{n-2}+2\left(\ell_{n-p-1}-\ell_{n-2p-2}\right)+\ell_{n-2p-2}\\
&= ab\ell_{n-2}+2\ell_{n-p-1}-\ell_{n-2p-2}
\end{aligned}
$$

dir. Genelleştirilmiş Fibonacci $p-$dizisi ve genelleştirilmiş Lucas $p-$dizisini sağlayan $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$
\alpha_n=\begin{cases} f_n, & \alpha_0=0,\alpha_1=1,\alpha_2=a,\ldots,\alpha_p=a^{\lfloor\frac{p}{2}\rfloor}b^{\lfloor\frac{p-1}{2}\rfloor}\\ \ell_n, & \alpha_0=p+1,\alpha_1=a,\alpha_2=ab,\ldots,\alpha_p=a^{l\lfloor\frac{p+1}{2}\rfloor}b^{l\lfloor\frac{p}{2}\rfloor}. \end{cases} \tag{2.7}
$$

$\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin reküurans bağıntısı

$$
\alpha_n=\begin{cases} ab\alpha_{n-2}+(a+b)\,\alpha_{n-p-2}+\alpha_{n-2p-2}, & p \text{ çift ise,}\\ ab\alpha_{n-2}+2\alpha_{n-p-1}-\alpha_{n-2p-2}, & p \text{ tek ise,} \end{cases} \tag{2.8}
$$

dir. Denklem (2.8)'in karakteristik denklemi ise

$$\begin{cases} x^{2p+2} - abx^{2p} - (a+b)\,x^{p} - 1 = 0, & p \text{ çift ise,} \\ x^{2p+2} - abx^{2p} - 2x^{p+1} + 1 = 0, & p \text{ tek ise} \end{cases} \tag{2.9}$$

şeklindedir. (2.9)'de $x^2 = r$ alınırsa

$$\begin{cases} r^{p+1} - abr^{p} - (a+b)\,r^{\frac{p}{2}} - 1 = 0, & p \text{ çift ise,} \\ r^{p+1} - abr^{p} - 2r^{\frac{p+1}{2}} + 1 = 0, & p \text{ tek ise} \end{cases} \tag{2.10}$$

elde edilir.

Lemma 2.1.1 ([42]). p pozitif tek tamsayı olsun. O zaman genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas $p-$dizisinin karakteristik denklemi $\alpha_p(x)$ katlı köke sahip değildir.

İspat. Denklem (2.9)'dan

$$\alpha_p(x) = (x^{p+1} - 1)^2 - abx^{2p} \tag{2.11}$$

olsun. Bu durumda $\alpha_p(x)$ fonksiyonunun türevi

$$\alpha'_p(x) = 2(p+1)x^{p}(x^{p+1} - 1) - 2pabx^{2p-1} \tag{2.12}$$

dir. Eğer

$$\alpha_p(x) = 0 \tag{2.13}$$

ise Denklem (2.11)'den

$$ab = \frac{(x^{p+1} - 1)^2}{x^{2p}} \tag{2.14}$$

ve

$$\alpha'_p(x) = 0 \tag{2.15}$$

ise Denklem (2.12)'den

$$ab = \frac{(p+1)x^{p}(x^{p+1} - 1)}{px^{2p-1}} = \left(\frac{(p+1)x}{p}\right)\left(\frac{x^{p+1} - 1}{x^{p}}\right) \tag{2.16}$$

elde edilir. Denklem (2.14) ve (2.16)'dan

$$ab = \left(\frac{p+1}{p}\right) x\sqrt{ab} \tag{2.17}$$

ve

$$x = \frac{p\sqrt{ab}}{p+1} \tag{2.18}$$

elde edilir. Eğer $\alpha_p(x) = \alpha'_p(x) = 0$ ise Denklem (2.9) katlı köke sahiptir. Varsayalım ki t katlı bir kök olsun. Bu durumda $ab = \left(\frac{p+1}{p}\right)^2 t^2$ dir. $\alpha_p(t) = 0$ olduğundan Denklem (2.9)'un karakteristik denklemi

$$\begin{aligned} t^{2p+2} - \left(\frac{p+1}{p}\right)^2 t^{2p+2} - 2t^{p+1} + 1 &= -\frac{(2p+1)}{p^2} t^{2p+2} - 2t^{p+1} + 1 \\ &= (2p+1)t^{2(p+1)} + 2p^2 t^{p+1} - p^2 \qquad (2.19) \\ &= 0 \end{aligned}$$

dir. $\lambda = t^{p+1}$ için Denklem (2.19)'ye ait diskriminant

$$4p^4 + 4p^2(2p+1) = 4p^2(p+1)^2 \qquad (2.20)$$

dir. Buradan $\lambda_{1,2} = \left\{-p, \frac{p}{2p+1}\right\}$ dir. Benzer şekilde $\alpha'_p(t) = 0$ için hesaplamalar yapılırsa

$$\begin{aligned} 2(p+1)t^p(t^{p+1} - 1) - 2p\left(\frac{p+1}{p}\right)^2 t^{2p+1} &= 0 \\ \Rightarrow 2(p+1)t^p(t^{p+1} - 1) &= 2p\left(\frac{p+1}{p}\right)^2 t^{2p+1} \\ \Rightarrow (t^{p+1} - 1) - (p+1)t^{p+1} &= t^{p+1} \qquad (2.21) \\ \Rightarrow t^{p+1} &= -p \\ \Rightarrow t &= (-p)^{\frac{1}{p+1}} \qquad (2.22) \end{aligned}$$

elde edilir. $ab = \left(\frac{p+1}{p}\right)^2 t^2$ olup bu ifadede p'nin tek değerleri için a ve b, ya negatif reel sayı ya da komplex sayı olacağından a ve b nin pozitif reel sayı olması ile çelişir. Dolayısıyla $\alpha_p(x)$ katlı köke sahip değildir. □

Aşağıdaki teorem ile genelleştirilmiş Fibonacci p ve genelleştirilmiş Lucas $p-$dizilerinin Binet formülleri verilecektir.

Teorem 2.1.1 ([42]). Denklem (2.10), $(r_1, r_2, \ldots, r_{p+1})$ gibi $(p+1)$ tane köke sahip ve p tek olsun. Bu durumda α_n,

$$\alpha_n = \sum_{i=1}^{p+1}\left(\sum_{j=1}^{p}(-1)^j \frac{\displaystyle\sum_{\substack{1\le m_1<m_2<\ldots<m_{p+1-j}\le p+1 \\ m_1,m_2,\ldots,m_{p+1-j}\neq i}} r_{m_1}r_{m_2}\ldots r_{m_{p+1-j}}}{\displaystyle\prod_{\substack{1\le m\le p+1 \\ m\neq i}}(r_i - r_m)}\alpha_{2j-2+\xi(n)} + \frac{\alpha_{2p+\xi(n)}}{\displaystyle\prod_{\substack{1\le m\le p+1 \\ m\neq i}}(r_i - r_m)}\right) r_i^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \qquad (2.23)$$

dir.

İspat. $r_1, r_2, \ldots, r_{p+1}$ Denklem (2.10)'un $(p+1)$ tane farklı kökü olsun. Bu durumda Denklem (2.9)'nin $2p+2$ tane farklı reel kökü olacağından

$$\begin{aligned}\alpha_n &= k_1(\sqrt{r_1})^n + k_2(-\sqrt{r_1})^n + k_3(\sqrt{r_2})^n + k_4(-\sqrt{r_2})^n + \cdots \\ &\quad + k_{2p+1}(\sqrt{r_{p+1}})^n + k_{2p+2}(-\sqrt{r_{p+1}})^n\end{aligned}$$

denklemini sağlayan $k_1, k_2, \ldots, k_{2p+1}, k_{2p+2}$ gibi $(2p+2)$ tane katsayı vardır. Burada n'in çift ya da tek olma durumuna göre iki durum söz konusudur. İlk olarak

- n çift ise,

$$\begin{aligned}(k_1+k_2)+(k_3+k_4)+\cdots+(k_{2p+1}+k_{2p+2}) &= \alpha_0\\ (k_1+k_2)r_1+(k_3+k_4)r_2+\cdots+(k_{2p+1}+k_{2p+2})r_{p+1} &= \alpha_2\\ (k_1+k_2)r_1^2+(k_3+k_4)r_2^2+\cdots+(k_{2p+1}+k_{2p+2})r_{p+1}^2 &= \alpha_4\\ &\ \ \vdots\\ (k_1+k_2)r_1^p+(k_3+k_4)r_2^p+\cdots+(k_{2p+1}+k_{2p+2})r_{p+1}^p &= \alpha_{2p}\end{aligned}$$

lineer denklem sistemi yazılabilir. Bu sistem daha genel olarak

$$\begin{aligned}\alpha_n &= (k_1+k_2)(\sqrt{r_1})^n + (k_3+k_4)(\sqrt{r_2})^n + \cdots + (k_{2p+1}+k_{2p+2})(\sqrt{r_{p+1}})^n\\ &= \sum_{i=1}^{p+1}(k_{2i-1}+k_{2i})(\sqrt{r_i})^n\end{aligned}$$

dir. $k_1, k_2, \ldots, k_{2p+2}$ katsayılarını belirleyebilmek için $\mathbf{V}\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha}$ lineer denklem sistemi çözülmelidir. Burada $\mathbf{V} = [v_{ij}] = r_j^{i-1}$ Vandermonde matrisi, $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{p+1})^T$ ve $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2p})^T$ sütun vektörlerdir. Böylece $n = 0, 2, 4, \ldots, 2p$ ve $\gamma_p = k_{2p-1} + k_{2p}$ için

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1\\ r_1 & r_2 & r_3 & \ldots & r_{p+1}\\ r_1^2 & r_2^2 & r_3^2 & \ldots & r_{p+1}^2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ r_1^p & r_2^p & r_3^p & \ldots & r_{p+1}^p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \gamma_3\\ \vdots\\ \gamma_{p+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_0\\ \alpha_2\\ \alpha_4\\ \vdots\\ \alpha_{2p}\end{pmatrix} \tag{2.24}$$

elde edilir. Burada $(p+1)\times(p+1)$ Vandermonde matrisi $\mathbf{L} = [l_{ij}]$ alt üçgensel ve $\mathbf{U} = [u_{ij}]$ üst üçgensel matris olmak üzere $\mathbf{V} = \mathbf{LU}$ şeklinde yazılabilir. Burada $\mathbf{L}$ ve $\mathbf{U}$ matrislerinin (i,j). elemanı sırasıyla

$$l_{ij} = \begin{cases} 1 & , \quad i = j\ , \\ \displaystyle\sum_{1\le m_1\le m_2\le \ldots \le m_{i-j}\le j} r_{m_1} r_{m_2} \ldots r_{m_j} & , \quad i > j \ge 1, \\ 0 & , \quad i < j \end{cases} \tag{2.25}$$

ve

$$u_{ij}=\begin{cases}1 & , \quad i=1\ ,\\ \prod\limits_{\substack{m=1\\ m\neq j}}^{i-1}(r_j-r_m) & , \quad i\leq j,\\ 0 & , \quad i>j\ .\end{cases} \tag{2.26}$$

şeklindedir [9]. Vandermonde matrisinin tersi ise $\mathbf{V}^{-1} = [v_{ij}^{-1}]$, $\mathbf{L}^{-1} = [l_{ij}^{-1}]$ ve $\mathbf{U}^{-1} = [u_{ij}^{-1}]$ olmak üzere $\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{L}^{-1}$ dir. $\mathbf{L}^{-1}$ ve $\mathbf{U}^{-1}$ matrislerinin (i,j). elemanları sırasıyla

$$l_{ij}^{-1}=\begin{cases}1 & , \quad i=j\ ,\\ l_{i-1,j-1}^{-1}-l_{i-1,j}^{-1}r_{i-1} & , \quad i=2,3,\ldots,p+1; j=2,3,\ldots,i-1,\\ 0 & , \quad i<j\end{cases} \tag{2.27}$$

ve

$$u_{ij}^{-1}=\begin{cases}\prod\limits_{\substack{m=1\\ m\neq i}}^{j}\dfrac{1}{r_i-r_m} & , \quad i\leq j,\\ 0 & , \quad i>j\ .\end{cases} \tag{2.28}$$

şeklindedir [26]. Denklem (2.27) ve (2.28) kullanılarak Vandermonde matrisinin tersi $\mathbf{V}^{-1} = [v_{ij}^{-1}]$ olmak üzere

$$v_{ij}^{-1}=\begin{cases}(-1)^j\dfrac{\sum\limits_{\substack{1\leq m_1<m_2<\ldots<m_{p+1-j}\leq p+1\\ m_1,m_2,\ldots,m_{p+1-j}\neq i}} r_{m_1}r_{m_2}\ldots r_{m_{p+1-j}}}{\prod\limits_{\substack{1\leq m\leq p+1\\ m\neq i}}(r_i-r_m)} & , \quad 1\leq j<p+1,\\ \dfrac{1}{\prod\limits_{\substack{1\leq m\leq p+1\\ m\neq i}}(r_i-r_m)} & , \quad \text{if } j=p+1\end{cases} \tag{2.29}$$

bulunur. $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$ olduğundan $\boldsymbol{\gamma}$'nın i. elemanı $\boldsymbol{\gamma_i} = \sum_{j=1}^{p+1} v_{ij}^{-1}\alpha_{2j-2}$ şeklindedir. Böylece

$$\alpha_n=\sum_{i=1}^{p+1}\left(\sum_{j=1}^{p}(-1)^j\frac{\sum\limits_{\substack{1\leq m_1<m_2<\ldots<m_{p+1-j}\leq p+1\\ m_1,m_2,\ldots,m_{p+1-j}\neq i}} r_{m_1}r_{m_2}\ldots r_{m_{p+1-j}}}{\prod\limits_{\substack{1\leq m\leq p+1\\ m\neq i}}(r_i-r_m)}\alpha_{2j-2}+\frac{\alpha_{2p}}{\prod\limits_{\substack{1\leq m\leq p+1\\ m\neq i}}(r_i-r_m)}\right)r_i^{\frac{n}{2}} \tag{2.30}$$

elde edilir. Şimdi ise

- n tek olsun.

Bu durumda

$$\begin{aligned}
(k_1-k_2)\sqrt{r_1}+(k_3-k_4)\sqrt{r_2}+\cdots+(k_{2p+1}-k_{2p+2})\sqrt{r_{p+1}} &= \alpha_1\\
(k_1-k_2)\left(\sqrt{r_1}\right)^3+(k_3-k_4)\left(\sqrt{r_2}\right)^3+\cdots+(k_{2p+1}-k_{2p+2})\left(\sqrt{r_{p+1}}\right)^3 &= \alpha_3\\
(k_1-k_2)\left(\sqrt{r_1}\right)^5+(k_3-k_4)\left(\sqrt{r_2}\right)^5+\cdots+(k_{2p+1}-k_{2p+2})\left(\sqrt{r_{p+1}}\right)^5 &= \alpha_5\\
&\vdots\\
(k_1-k_2)\left(\sqrt{r_1}\right)^{2p+1}+(k_3-k_4)\left(\sqrt{r_2}\right)^{2p+1}+\cdots+(k_{2p+1}-k_{2p+2})\left(\sqrt{r_{p+1}}\right)^{2p+1} &= \alpha_{2p+1}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu ifade daha genel olarak $\gamma_p = k_{2p-1} - k_{2p}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= (k_1-k_2)(\sqrt{r_1})^n+(k_3-k_4)(\sqrt{r_2})^n+\cdots+(k_{2p+1}-k_{2p+2})(\sqrt{r_{p+1}})^n\\
&= \sum_{i=1}^{p+1}(k_{2i-1}-k_{2i})(\sqrt{r_i})^n
\end{aligned} \tag{2.31}$$

dir. Denklem (2.31)'de $n = 1, 3, 5, \ldots, 2p+1$ için

$$\begin{pmatrix}
\sqrt{r_1} & \sqrt{r_2} & \sqrt{r_3} & \cdots & \sqrt{r_{p+1}}\\
\sqrt{r_1}^3 & \sqrt{r_2}^3 & \sqrt{r_3}^3 & \cdots & \sqrt{r_{p+1}}^3\\
\sqrt{r_1}^5 & \sqrt{r_2}^5 & \sqrt{r_3}^5 & \cdots & \sqrt{r_{p+1}}^5\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
\sqrt{r_1}^{2p+1} & \sqrt{r_2}^{2p+1} & \sqrt{r_3}^{2p+1} & \cdots & \sqrt{r_{p+1}}^{2p+1}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \gamma_3\\ \vdots\\ \gamma_{p+1}\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_3\\ \alpha_5\\ \vdots\\ \alpha_{2p+1}\end{pmatrix} \tag{2.32}$$

denklem sistemi elde edilir. Burada l_{ij} ve l_{ij}^{-1} ifadeleri n çift durumundaki değerler ile aynıdır. u_{ij} ve u_{ij}^{-1} değerleri n tek için

$$u_{ij} = \begin{cases}
\sqrt{r_j} & , \quad i = 1\,,\\
\sqrt{r_j}\displaystyle\prod_{\substack{m=1\\ m\neq j}}^{i-1}(r_j - r_m) & , \quad i \le j,\\
0 & , \quad i > j
\end{cases} \tag{2.33}$$

ve

$$u_{ij}^{-1} = \begin{cases}
\displaystyle\prod_{\substack{m=1\\ m\neq i}}^{j}\frac{1}{\sqrt{r_i}(r_i - r_m)} & , \quad i \le j,\\
0 & , \quad i > j\,.
\end{cases} \tag{2.34}$$

elde edilir. Denklem (2.27) ve (2.34) kullanılarak

$$v_{i,j}^{-1}=\begin{cases}(-1)^j\dfrac{\displaystyle\sum_{\substack{1\le m_1<m_2<\ldots<m_{p+1-j}\le p+1\\ m_1,m_2,\ldots,m_{p+1-j}\neq i}} r_{m_1}r_{m_2}\ldots r_{m_{p+1-j}}}{\sqrt{r_i}\displaystyle\prod_{\substack{1\le m\le p+1\\ m\neq i}}(r_i-r_m)}, & 1\le j<p+1,\\ \dfrac{1}{\sqrt{r_i}\displaystyle\prod_{\substack{1\le m\le p+1\\ m\neq i}}(r_i-r_m)}, & \text{if } j=p+1\end{cases}\tag{2.35}$$

yazılabilir. Böylece

$$\alpha_n=\sum_{i=1}^{p+1}\left(\sum_{j=1}^{p}(-1)^j\frac{\displaystyle\sum_{\substack{1\le m_1<m_2<\ldots<m_{p+1-j}\le p+1\\ m_1,m_2,\ldots,m_{p+1-j}\neq i}} r_{m_1}r_{m_2}\ldots r_{m_{p+1-j}}}{\displaystyle\prod_{\substack{1\le m\le p+1\\ m\neq i}}(r_i-r_m)}\alpha_{2j-1}+\frac{\alpha_{2p+1}}{\displaystyle\prod_{\substack{1\le m\le p+1\\ m\neq i}}(r_i-r_m)}\right)r_i^{\frac{n-1}{2}}\tag{2.36}$$

bulunur. Sonuç olarak Denklem (2.30) ve Denklem (2.36)'dan genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas $p-$dizilerinin Binet formülü

$$\alpha_n=\sum_{i=1}^{p+1}\left(\sum_{j=1}^{p}(-1)^j\frac{\displaystyle\sum_{\substack{1\le m_1<m_2<\ldots<m_{p+1-j}\le p+1\\ m_1,m_2,\ldots,m_{p+1-j}\neq i}} r_{m_1}r_{m_2}\ldots r_{m_{p+1-j}}}{\displaystyle\prod_{\substack{1\le m\le p+1\\ m\neq i}}(r_i-r_m)}\alpha_{2j-2+\xi(n)}+\frac{\alpha_{2p+\xi(n)}}{\displaystyle\prod_{\substack{1\le m\le p+1\\ m\neq i}}(r_i-r_m)}\right)r_i^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\tag{2.37}$$

elde edilir. □

Teorem 2.1.2. Genelleştirilmiş Fibonacci $p-$dizisinin üreteç fonksiyonu

$$F(x)=\begin{cases}\frac{x\left(1+ax-x^{p+1}\right)}{1-abx^2-2x^{p+1}+x^{2p+2}}, & p \text{ tek ise}\\ \frac{x\left(1+ax+x^{p+1}\right)}{1-abx^2-(a+b)x^{p+2}-x^{2p+2}}, & p \text{ çift ise}\end{cases}\tag{2.38}$$

dir.

İspat. Genelleştirilmiş Fibonacci $p-$dizisinin üreteç fonksiyonu

$$F(x)=\sum_{m=0}^{\infty}f_mx^m\tag{2.39}$$

olsun. Denklem (2.39)'dan aşağıdaki eşitlikler

$$F(x) = f_0+f_1x+f_2x^2+\cdots+f_px^p+\ldots,\tag{2.40}$$

$$bxF(x) = bf_0x+bf_1x^2+bf_2x^3+\cdots+bf_px^{p+1}+\ldots,\tag{2.41}$$

$$x^{p+1}F(x) = f_0x^{p+1}+f_1x^{p+2}+f_2x^{p+3}+\cdots+f_px^{2p+1}+\ldots\tag{2.42}$$

yazılabilir. Denklem (2.40), (2.41) ve (2.42)'den

$$\begin{aligned}(1-bx-x^{p+1})F(x) &= (f_0+f_1x+f_2x^2+\cdots+f_px^p)\\ &\quad -(bf_0x+bf_1x^2+bf_2x^3+\cdots+bf_{p-1}x^p)\\ &\quad +\sum_{m=p+1}^{\infty} f_mx^m-\sum_{m=p+1}^{\infty} bf_{m-1}x^m-\sum_{m=p+1}^{\infty} f_{m-p-1}x^m\end{aligned}$$

elde edilir. Burada p'nin iki durumu söz konusudur.

- Eğer p tek ise,

$$(1-bx-x^{p+1})F(x)=f_0+\sum_{m=1}^{p}(f_m-bf_{m-1})x^m+\sum_{m=\frac{p+1}{2}}^{\infty}(f_{2m}-bf_{2m-1}-f_{2m-p-1})x^{2m} \tag{2.43}$$

elde edilir. Denklem (2.43) ve Tanım (2.1.1)'den

$$(1-bx-x^{p+1})F(x)=f_0+\sum_{m=1}^{p}(f_m-bf_{m-1})x^m+x(a-b)\sum_{m=\frac{p+1}{2}}^{\infty} f_{2m-1}x^{2m-1} \tag{2.44}$$

yazılabilir. Şimdi

$$f(x)=\sum_{m=\frac{p+1}{2}}^{\infty} f_{2m-1}x^{2m-1} \tag{2.45}$$

olsun. Bu toplama ait terimler gerekli katsayılar ile çarpılırsa

$$f(x) = \sum_{m=\frac{p+1}{2}}^{\infty} f_{2m-1}x^{2m-1}, \tag{2.46}$$

$$abx^2f(x) = \sum_{m=\frac{p+1}{2}}^{\infty} abf_{2m-1}x^{2m+1}=\sum_{m=\frac{p+3}{2}}^{\infty} f_{2m-3}x^{2m-1}, \tag{2.47}$$

$$2x^{p+1}f(x) = 2\sum_{m=\frac{p+1}{2}}^{\infty} f_{2m-1}x^{2m+p}=2\sum_{m=p+1}^{\infty} f_{2m-p-2}x^{2m-1}, \tag{2.48}$$

$$x^{2p+2}f(x) = \sum_{m=\frac{p+1}{2}}^{\infty} f_{2m-1}x^{2m+2p+1}=\sum_{m=\frac{3(p+1)}{2}}^{\infty} f_{2m-2p-3}x^{2m-1} \tag{2.49}$$

elde edilir. Denklem (2.46), (2.47), (2.48) ve (2.49)'dan

$$\begin{aligned}&\left(1-abx^2-2x^{p+1}+x^{2p+2}\right)f(x) \qquad (2.50)\\ &=\sum_{m=\frac{p+1}{2}}^{\frac{3p+1}{2}} f_{2m-1}x^{2m-1}-\sum_{m=\frac{p+3}{2}}^{\frac{3p+1}{2}} abf_{2m-3}x^{2m-1}-2\sum_{m=p+1}^{\frac{3p+1}{2}} f_{2m-p-2}x^{2m-1}\\ &+\left[\sum_{m=\frac{3p+3}{2}}^{\infty}\left(f_{2m-1}-abf_{2m-3}-2f_{2m-p-2}+f_{2m-2p-3}\right)x^{2m-1}\right]\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$f(x)=\frac{\sum_{m=\frac{p+1}{2}}^{\frac{3p+1}{2}} f_{2m-1}x^{2m-1}-\sum_{m=\frac{p+3}{2}}^{\frac{3p+1}{2}} abf_{2m-3}x^{2m-1}-2\sum_{m=p+1}^{\frac{3p+1}{2}} f_{2m-p-2}x^{2m-1}}{(1-abx^2-2x^{p+1}+x^{2p+2})} \quad (2.51)$$

bulunur. Denklem (2.51), Denklem (2.44)'de yerine yazılırsa genelleştirilmiş Fibonacci $p-$dizisinin üreteç fonksiyonu

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{f_0+\sum_{m=1}^{p}(f_m-bf_{m-1})x^m+x(a-b)f(x)}{(1-bx-x^{p+1})} \\ &= \frac{x\left(1+ax-x^{p+1}\right)}{(1-abx^2-2x^{p+1}+x^{2p+2})} \end{aligned} \quad (2.52)$$

elde edilir.

- Eğer p çift ise,

Denklem (2.43)'ten

$$(1-bx-x^{p+1})F(x)=f_0+\sum_{m=1}^{p}(f_m-bf_{m-1})x^m+\sum_{m=\frac{p+2}{2}}^{\infty}(f_{2m}-bf_{2m-1}-f_{2m-p-1})x^{2m} \quad (2.53)$$

yazılabilir. Denklem (2.53) ve Tanım (2.1.1)'den

$$(1-bx-x^{p+1})F(x)=f_0+\sum_{m=1}^{p}(f_m-bf_{m-1})x^m+x(a-b)\sum_{m=\frac{p+2}{2}}^{\infty} f_{2m-1}x^{2m-1} \quad (2.54)$$

elde edilir. Şimdi

$$f(x)=\sum_{m=\frac{p+2}{2}}^{\infty} f_{2m-1}x^{2m-1} \quad (2.55)$$

olsun. Bu toplama ait terimler gerekli katsayılar ile çarpılırsa

$$f(x) = \sum_{m=\frac{p+2}{2}}^{\infty} f_{2m-1}x^{2m-1}, \quad (2.56)$$

$$abx^2f(x) = \sum_{m=\frac{p+2}{2}}^{\infty} abf_{2m-1}x^{2m+1}=\sum_{m=\frac{p+4}{2}}^{\infty} f_{2m-3}x^{2m-1}, \quad (2.57)$$

$$(a+b)x^{p+2}f(x) = (a+b)\sum_{m=\frac{p+2}{2}}^{\infty} f_{2m-1}x^{2m+p+1}=(a+b)\sum_{m=p+2}^{\infty} f_{2m-p-3}x^{2m-1} \quad (2.58)$$

$$x^{2p+2}f(x) = \sum_{m=\frac{p+2}{2}}^{\infty} f_{2m-1}x^{2m+2p+1}=\sum_{m=\frac{3p+4}{2}}^{\infty} f_{2m-2p-3}x^{2m-1} \quad (2.59)$$

elde edilir. Denklem (2.56), (2.57), (2.58) ve (2.59)'dan

$$\begin{aligned}
&\left(1-abx^2-(a+b)x^{p+2}-x^{2p+2}\right)f(x)\\
&=\sum_{m=\frac{p+2}{2}}^{\frac{3p+2}{2}} f_{2m-1}x^{2m-1}-\sum_{m=\frac{p+4}{2}}^{\frac{3p+2}{2}} abf_{2m-3}x^{2m-1}-(a+b)\sum_{m=p+2}^{\frac{3p+2}{2}} f_{2m-p-3}x^{2m-1}\\
&+\left[\sum_{m=\frac{3p+4}{2}}^{\infty}\left(f_{2m-1}-abf_{2m-3}-(a+b)f_{2m-p-3}+f_{2m-2p-3}\right)x^{2m-1}\right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$f(x)=\frac{\sum_{m=\frac{p+2}{2}}^{\frac{3p+2}{2}} f_{2m-1}x^{2m-1}-\sum_{m=\frac{p+4}{2}}^{\frac{3p+2}{2}} abf_{2m-3}x^{2m-1}-(a+b)\sum_{m=p+2}^{\frac{3p+2}{2}} f_{2m-p-3}x^{2m-1}}{\left(1-abx^2-(a+b)x^{p+2}-x^{2p+2}\right)} \tag{2.60}$$

olarak bulunur. Denklem (2.60), Denklem (2.54)'te yerine yazılırsa genelleştirilmiş Fibonacci $p-$dizisinin üreteç fonksiyonu

$$\begin{aligned}
F(x) &= \frac{f_0+\sum_{m=1}^{p}(f_m-bf_{m-1})x^m+x(a-b)f(x)}{(1-bx-x^{p+1})}\\
&= \frac{x\left(1+ax+x^{p+1}\right)}{\left(1-abx^2-(a+b)x^{p+2}-x^{2p+2}\right)}
\end{aligned} \tag{2.61}$$

elde edilir. □

Teorem 2.1.3. Genelleştirilmiş Lucas $p-$dizisinin üreteç fonksiyonu

$$L(x)=\begin{cases}\frac{1+p+ax-abpx^2-(1+p)x^{p+1}+apx^{p+2}}{1-abx^2-2x^{p+1}+x^{2p+2}}, & p \text{ tek ise}\\ \frac{1+p+ax-abpx^2+(1+p)x^{p+1}-apx^{p+2}}{1-abx^2-(a+b)x^{p+2}-x^{2p+2}}, & p \text{ çift ise}\end{cases} \tag{2.62}$$

dir.

İspat. Genelleştirilmiş Lucas $p-$dizisinin üreteç fonksiyonu

$$L(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\ell_m x^m \tag{2.63}$$

olsun. Denklem (2.63)'ten aşağıdaki eşitlikler

$$L(x) = \ell_0+\ell_1x+\ell_2x^2+\cdots+\ell_px^p+\ldots, \tag{2.64}$$

$$axL(x) = a\ell_0x+a\ell_1x^2+a\ell_2x^3+\cdots+a\ell_px^{p+1}+\ldots, \tag{2.65}$$

$$x^{p+1}L(x) = \ell_0x^{p+1}+\ell_1x^{p+2}+\ell_2x^{p+3}+\cdots+\ell_px^{2p+1}+\ldots \tag{2.66}$$

yazılabilir. Denklem (2.64), (2.65) ve (2.66)'dan

$$\begin{aligned}(1-ax-x^{p+1})L(x) &= (\ell_0+\ell_1x+\ell_2x^2+\cdots+\ell_px^p)\\ &\quad -(a\ell_0x+a\ell_1x^2+a\ell_2x^3+\cdots+a\ell_{p-1}x^p)\\ &\quad +\sum_{m=p+1}^{\infty}\ell_mx^m-\sum_{m=p+1}^{\infty}a\ell_{m-1}x^m-\sum_{m=p+1}^{\infty}\ell_{m-p-1}x^m \qquad (2.67)\end{aligned}$$

elde edilir. Burada p'ye göre iki durum söz konusudur.

- <u>Eğer p tek ise</u>,

$$\begin{aligned}(1-ax-x^{p+1})L(x) &= \ell_0+\sum_{m=1}^{p}(\ell_m-a\ell_{m-1})x^m\\ &\quad +\sum_{m=\frac{p+1}{2}}^{\infty}(\ell_{2m}-a\ell_{2m-1}-\ell_{2m-p-1})x^{2m} \qquad (2.68)\end{aligned}$$

dir. Tanım (2.1.2) ve Denklem (2.68)'den

$$(1-ax-x^{p+1})L(x)=\ell_0+\sum_{m=1}^{p}(\ell_m-a\ell_{m-1})x^m+x(b-a)\sum_{m=\frac{p+1}{2}}^{\infty}\ell_{2m-1}x^{2m-1} \qquad (2.69)$$

elde edilir. Şimdi

$$l(x)=\sum_{m=\frac{p+1}{2}}^{\infty}\ell_{2m-1}x^{2m-1} \qquad (2.70)$$

olsun. Bu toplama ait terimler gerekli katsayılar ile çarpılırsa

$$l(x) = \sum_{m=\frac{p+1}{2}}^{\infty}\ell_{2m-1}x^{2m-1}, \qquad (2.71)$$

$$abx^2l(x) = \sum_{m=\frac{p+1}{2}}^{\infty}ab\ell_{2m-1}x^{2m+1}=\sum_{m=\frac{p+3}{2}}^{\infty}\ell_{2m-3}x^{2m-1}, \qquad (2.72)$$

$$2x^{p+1}l(x) = 2\sum_{m=\frac{p+1}{2}}^{\infty}\ell_{2m-1}x^{2m+p}=2\sum_{m=p+1}^{\infty}\ell_{2m-p-2}x^{2m-1}, \qquad (2.73)$$

$$x^{2p+2}l(x) = \sum_{m=\frac{p+1}{2}}^{\infty}\ell_{2m-1}x^{2m+2p+1}=\sum_{m=\frac{3(p+1)}{2}}^{\infty}\ell_{2m-2p-3}x^{2m-1} \qquad (2.74)$$

elde edilir. Denklem (2.71), (2.72), (2.73) ve (2.74) kullanılarak

$$\left(1-abx^2-2x^{p+1}+x^{2p+2}\right)l(x)$$

$$= \sum_{m=\frac{p+1}{2}}^{\frac{3p+1}{2}} \ell_{2m-1}x^{2m-1} - \sum_{m=\frac{p+3}{2}}^{\frac{3p+1}{2}} ab\ell_{2m-3}x^{2m-1} - 2\sum_{m=p+1}^{\frac{3p+1}{2}} \ell_{2m-p-2}x^{2m-1}$$
$$+ \left[\sum_{m=\frac{3p+3}{2}}^{\infty} \left(\ell_{2m-1} - ab\ell_{2m-3} - 2\ell_{2m-p-2} + \ell_{2m-2p-3}\right) x^{2m-1}\right]$$

elde edilir. Buradan

$$l(x) = \frac{\sum_{m=\frac{p+1}{2}}^{\frac{3p+1}{2}} \ell_{2m-1}x^{2m-1} - \sum_{m=\frac{p+3}{2}}^{\frac{3p+1}{2}} ab\ell_{2m-3}x^{2m-1} - 2\sum_{m=p+1}^{\frac{3p+1}{2}} \ell_{2m-p-2}x^{2m-1}}{(1 - abx^2 - 2x^{p+1} + x^{2p+2})} \quad (2.75)$$

bulunur. Bu ifade (2.69)'da yerine yazılırsa genelleştirilmiş Lucas $p-$dizisine ait üreteç fonksiyon

$$\begin{aligned} L(x) &= \frac{\ell_0 + \sum_{m=1}^{p}(\ell_m - a\ell_{m-1})x^m + x(a-b)l(x)}{(1 - ax - x^{p+1})} \\ &= \frac{1 + p + ax - abpx^2 - (1+p)x^{p+1} + apx^{p+2}}{1 - abx^2 - 2x^{p+1} + x^{2p+2}} \end{aligned} \quad (2.76)$$

elde edilir.

- Eğer p çift ise,

Denklem (2.67)'den

$$\begin{aligned} (1 - ax - x^{p+1})l(x) &= \ell_0 + \sum_{m=1}^{p}(\ell_m - a\ell_{m-1})x^m \\ &+ \sum_{m=\frac{p+2}{2}}^{\infty} (\ell_{2m} - a\ell_{2m-1} - \ell_{2m-p-1})x^{2m} \end{aligned} \quad (2.77)$$

yazılabilir. Tanım (2.1.2) ve Denklem (2.77)'den

$$(1 - ax - x^{p+1})l(x) = \ell_0 + \sum_{m=1}^{p}(\ell_m - a\ell_{m-1})x^m + x(b-a)\sum_{m=\frac{p+2}{2}}^{\infty} \ell_{2m-1}x^{2m-1} \quad (2.78)$$

elde edilir. Şimdi

$$l(x) = \sum_{m=\frac{p+2}{2}}^{\infty} \ell_{2m-1}x^{2m-1} \quad (2.79)$$

olsun. Bu toplama ait terimler gerekli katsayılar ile çarpılırsa

$$l(x) = \sum_{m=\frac{p+2}{2}}^{\infty} \ell_{2m-1} x^{2m-1}, \tag{2.80}$$

$$abx^2 l(x) = \sum_{m=\frac{p+2}{2}}^{\infty} ab\ell_{2m-1} x^{2m+1} = \sum_{m=\frac{p+4}{2}}^{\infty} \ell_{2m-3} x^{2m-1}, \tag{2.81}$$

$$(a+b)x^{p+2} l(x) = (a+b) \sum_{m=\frac{p+2}{2}}^{\infty} \ell_{2m-1} x^{2m+p+1} = (a+b) \sum_{m=p+2}^{\infty} \ell_{2m-p-3} x^{2m-1}, \tag{2.82}$$

$$x^{2p+2} l(x) = \sum_{m=\frac{p+2}{2}}^{\infty} \ell_{2m-1} x^{2m+2p+1} = \sum_{m=\frac{3p+4}{2}}^{\infty} \ell_{2m-2p-3} x^{2m-1} \tag{2.83}$$

elde edilir. Denklem (2.80), (2.81), (2.82) ve (2.83)'ten

$$\left(1 - abx^2 - (a+b)x^{p+2} - x^{2p+2}\right) l(x)$$

$$= \sum_{m=\frac{p+2}{2}}^{\frac{3p+2}{2}} \ell_{2m-1} x^{2m-1} - \sum_{m=\frac{p+4}{2}}^{\frac{3p+2}{2}} ab\ell_{2m-3} x^{2m-1} - (a+b) \sum_{m=p+2}^{\frac{3p+2}{2}} \ell_{2m-p-3} x^{2m-1}$$
$$+ \left[\sum_{m=\frac{3p+4}{2}}^{\infty} \left(\ell_{2m-1} - ab\ell_{2m-3} - (a+b)\ell_{2m-p-3} + \ell_{2m-2p-3}\right) x^{2m-1} \right]$$

elde edilir. Buradan

$$l(x) = \frac{\sum_{m=\frac{p+2}{2}}^{\frac{3p+2}{2}} \ell_{2m-1} x^{2m-1} - \sum_{m=\frac{p+4}{2}}^{\frac{3p+2}{2}} ab\ell_{2m-3} x^{2m-1} - (a+b) \sum_{m=p+2}^{\frac{3p+2}{2}} \ell_{2m-p-3} x^{2m-1}}{(1 - abx^2 - (a+b)x^{p+2} - x^{2p+2})} \tag{2.84}$$

olarak bulunur. Denklem (2.84), Denklem (2.78)'de yerine yazılırsa genelleştirilmiş Lucas $p-$dizisinin üreteç fonksiyonu

$$\begin{aligned} L(x) &= \frac{\ell_0 + \sum_{m=1}^{p} (\ell_m - a\ell_{m-1}) x^m + x(b-a) l(x)}{(1 - ax - x^{p+1})} \\ &= \frac{1 + p + ax - abpx^2 + (1+p)x^{p+1} - apx^{p+2}}{1 - abx^2 - (a+b)x^{p+2} - x^{2p+2}} \end{aligned} \tag{2.85}$$

dir. □

Teorem 2.1.4. p tek olsun. Bu durumda genelleştirilmiş Fibonacci $p-$sayılarına ait binom formülü

$$f_n = a^{\xi(n-1)} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{p+1} \rfloor} \binom{n - pi - 1}{i} (ab)^{\lfloor \frac{n-(p+1)i-1}{2} \rfloor} \tag{2.86}$$

dir.

İspat. İspat n üzerinden tümevarım ile yapılacaktır. $n = p$ için

$$\begin{aligned} f_p &= a^{\xi(p-1)} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{p-1}{p+1} \rfloor} \binom{p-pi-1}{i} (ab)^{\lfloor \frac{p-(p+1)i-1}{2} \rfloor} \\ &= \binom{p-1}{0} (ab)^{\lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor} \\ &= a^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} b^{\lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor} \end{aligned}$$

ve $n = p+1$ için

$$\begin{aligned} f_{p+1} &= a^{\xi(p)} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{p}{p+1} \rfloor} \binom{p+1-pi-1}{i} (ab)^{\lfloor \frac{p+1-(p+1)i-1}{2} \rfloor} \\ &= a\binom{p}{0} (ab)^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} \\ &= a\left(a^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} b^{\lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor}\right) = af_p + f_0 \end{aligned}$$

iddia doğrudur. Şimdi ise $p+2 \leq k \leq N$ olacak şekilde N tamsayısı için doğru olsun. Bu takdirde,

$$\begin{aligned} f_{N+1} &= a^{1-\xi(N+1)} b^{\xi(N+1)} f_N + f_{N-p} \\ &= a^{1-\xi(N+1)} b^{\xi(N+1)} \left[a^{\xi(N-1)} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{N-1}{p+1} \rfloor} \binom{N-pi-1}{i} (ab)^{\lfloor \frac{N-(p+1)i-1}{2} \rfloor} \right] \\ &\quad + a^{\xi(N-p-1)} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{N-p-1}{p+1} \rfloor} \binom{N-p-pi-1}{i} (ab)^{\lfloor \frac{N-p-(p+1)i-1}{2} \rfloor} \end{aligned}$$

dir. $N=(p+1)t$ için

$$\begin{aligned}
f_{N+1} &= a^{1-\xi((p+1)t+1)}b^{\xi((p+1)t+1)}\left[a^{\xi((p+1)t-1)}\sum_{i=0}^{t-1}\binom{(p+1)t-pi-1}{i}(ab)^{\lfloor\frac{(p+1)t-(p+1)i-1}{2}\rfloor}\right.\\
&\quad\left.+a^{\xi((p+1)t-p-1)}\sum_{i=0}^{t-1}\binom{(p+1)t-pi-p-1}{i}(ab)^{\lfloor\frac{(p+1)t-(p+1)i-p-1}{2}\rfloor}\right]\\
&= b\left[a\sum_{i=0}^{t-1}\binom{(p+1)t-pi-1}{i}(ab)^{\lfloor\frac{(p+1)(t-i)-1}{2}\rfloor}\right.\\
&\quad\left.+\sum_{i=0}^{t-1}\binom{(p+1)t-pi-p-1}{i}(ab)^{\lfloor\frac{(p+1)(t-i-1)}{2}\rfloor}\right]\\
&= \sum_{i=0}^{t-1}\binom{(p+1)t-pi-1}{i}(ab)^{\lfloor\frac{(p+1)(t-i)}{2}\rfloor}\\
&\quad+\sum_{i=0}^{t-1}\binom{(p+1)t-p(i+1)-1}{i}(ab)^{\lfloor\frac{(p+1)(t-i-1)}{2}\rfloor}\\
&= \binom{(p+1)t-1}{0}(ab)^{\lfloor\frac{(p+1)t}{2}\rfloor}+\binom{(p+1)t-p-1}{1}(ab)^{\lfloor\frac{(p+1)(t-1)}{2}\rfloor}+\dots\\
&\quad+\binom{p+t-1}{t-1}(ab)^{\lfloor\frac{(p+1)(t-2)}{2}\rfloor}+\binom{(p+1)t-p-1}{0}(ab)^{\lfloor\frac{(p+1)(t-1)}{2}\rfloor}\\
&\quad+\binom{(p+1)t-2p-1}{1}(ab)^{\lfloor\frac{(p+1)(t-2)}{2}\rfloor}+\dots+\binom{t-1}{t-1}\\
&= a^{\xi((p+1)t)}\sum_{i=0}^{t}\binom{(p+1)t-pi}{i}(ab)^{\lfloor\frac{(p+1)t-(p+1)i}{2}\rfloor}\\
&= a^{\xi(N)}\sum_{i=0}^{\lfloor\frac{N}{p+1}\rfloor}\binom{N-pi}{i}(ab)^{\lfloor\frac{N-(p+1)i}{2}\rfloor}
\end{aligned}$$

dir. $N=pt$ için teoremin ispatı benzer şekilde yapılabilir. □

Teorem 2.1.5. p tek olsun. Bu durumda genelleştirilmiş Lucas $p-$sayılarına ait binom formülü

$$\ell_n=a^{\xi(n)}\sum_{i=0}^{\lfloor\frac{n}{p+1}\rfloor}\frac{n}{n-pi}\binom{n-pi}{i}(ab)^{\lfloor\frac{n-(p+1)i}{2}\rfloor} \tag{2.87}$$

dir.

İspat. İspat n üzerinden tümevarım ile yapılacaktır. $n=p$ için

$$\begin{aligned}
\ell_p &= a^{\xi(p)}\sum_{i=0}^{\lfloor\frac{p}{p+1}\rfloor}\frac{p}{p-pi}\binom{p-pi}{i}(ab)^{\lfloor\frac{p-(p+1)i}{2}\rfloor}\\
&= a\frac{p}{p}\binom{p}{0}(ab)^{\lfloor\frac{p}{2}\rfloor}\\
&= a^{\lfloor\frac{p+1}{2}\rfloor}b^{\lfloor\frac{p}{2}\rfloor}
\end{aligned}$$

ve $n = p + 1$ için

$$\begin{aligned}
\ell_{p+1} &= a^{\xi(p+1)} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{p+1}{p+1} \rfloor} \frac{p+1}{p+1-pi} \binom{p+1-pi}{i} (ab)^{\lfloor \frac{p+1-(p+1)i}{2} \rfloor} \\
&= \frac{p+1}{p+1} \binom{p+1}{0} (ab)^{\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor} + \frac{p+1}{1} \binom{1}{1} (ab)^{0} \\
&= (ab)^{\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor} + p + 1 = b\ell_p + \ell_0
\end{aligned}$$

iddia doğrudur. Şimdi $p + 2 \leq k \leq N$ olcak şekilde N tamsayısı için doğru olsun. Bu takdirde,

$$\begin{aligned}
\ell_{N+1} &= a^{\xi(N+1)} b^{1-\xi(N+1)} \ell_N + \ell_{N-p} \\
&= a^{\xi(N+1)} b^{1-\xi(N+1)} \left[a^{\xi(N)} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{N}{p+1} \rfloor} \frac{N}{N-pi} \binom{N-pi}{i} (ab)^{\lfloor \frac{N-(p+1)i}{2} \rfloor} \right] \\
&\quad + a^{\xi(N-p)} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{N-p}{p+1} \rfloor} \frac{N-p}{N-p-pi} \binom{N-p-pi}{i} (ab)^{\lfloor \frac{N-p-(p+1)i}{2} \rfloor}
\end{aligned}$$

dir. $N=(p+1)t$ için işleme devam edilecek olursa

$$\begin{aligned}
\ell_{N+1} &= a^{\xi((p+1)t+1)}b^{1-\xi((p+1)t+1)} \\
&\quad \times\left[a^{\xi((p+1)t)}\sum_{i=0}^{t}\frac{(p+1)\,t}{(p+1)\,t-pi}\binom{(p+1)t-pi}{i}(ab)^{\lfloor\frac{(p+1)t-(p+1)i}{2}\rfloor}\right] \\
&\quad +a^{\xi((p+1)t-p)}\sum_{i=0}^{t-1}\frac{(p+1)\,t-p}{(p+1)\,t-p(i+1)}\binom{(p+1)t-p(i+1)}{i}(ab)^{\lfloor\frac{(p+1)(t-i)-p}{2}\rfloor} \\
&= a^{\xi((p+1)t+1)}\sum_{i=0}^{t}\frac{(p+1)\,t}{(p+1)\,t-pi}\binom{(p+1)t-pi}{i}(ab)^{\lfloor\frac{(p+1)(t-i)}{2}\rfloor} \\
&\quad +a^{\xi((p+1)t+1)}\sum_{i=0}^{t-1}\frac{(p+1)\,t-p}{(p+1)\,t-p(i+1)}\binom{(p+1)t-p(i+1)}{i}(ab)^{\lfloor\frac{(p+1)(t-i)-p}{2}\rfloor} \\
&= a^{\xi((p+1)t+1)} \\
&\quad \times\left[\frac{(p+1)t}{(p+1)t}\binom{(p+1)t}{0}(ab)^{\lfloor\frac{(p+1)t}{2}\rfloor}\right. \\
&\quad +\frac{(p+1)t}{(p+1)t-p}\binom{(p+1)t-p}{1}(ab)^{\lfloor\frac{(p+1)t-(p+1)}{2}\rfloor} \\
&\quad +\cdots+\frac{(p+1)t}{(p+1)t-pt}\binom{(p+1)t-pt}{t} \\
&\quad +\frac{(p+1)t-p}{(p+1)t-p}\binom{(p+1)t-p}{0}(ab)^{\lfloor\frac{(p+1)t-p}{2}\rfloor} \\
&\quad +\frac{(p+1)t-p}{(p+1)t-2p}\binom{(p+1)t-2p}{1}(ab)^{\lfloor\frac{(p+1)(t-1)-p}{2}\rfloor} \\
&\quad \left.+\cdots+\frac{(p+1)t-p}{(p+1)t-pt}\binom{(p+1)t-pt}{t-1}\right] \\
&= a^{\xi((p+1)t+1)}\sum_{i=0}^{\lfloor\frac{(p+1)t+1}{p+1}\rfloor}\frac{(p+1)\,t+1}{(p+1)\,t+1-pi}\binom{(p+1)t+1-pi}{i}(ab)^{\lfloor\frac{(p+1)t+1-(p+1)i}{2}\rfloor} \\
&= a^{\xi(N+1)}\sum_{i=0}^{\lfloor\frac{N+1}{p+1}\rfloor}\frac{N+1}{N+1-pi}\binom{N+1-pi}{i}(ab)^{\lfloor\frac{N+1-(p+1)i}{2}\rfloor}
\end{aligned}$$

dir. $N=pt$ için teoremin ispatı benzer şekilde yapılabilir. $\square$

2.2. Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas $p-$Sayılarının Uygulamaları

Bu bölümde a, b ve p değerleri için genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas $p-$sayılarının özel durumları incelenecektir.

2.3. Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas $1-$Sayıları

Denklem (2.37) için genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas $1-$sayılarına ait Binet formülleri

$$f_n = \left(\frac{f_{2+\xi(n)} - f_{\xi(n)}r_2}{r_1 - r_2}\right) r_1^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} - \left(\frac{f_{2+\xi(n)} - f_{\xi(n)}r_1}{r_1 - r_2}\right) r_2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \tag{2.88}$$

ve

$$\ell_n = \left(\frac{\ell_{2+\xi(n)} - \ell_{\xi(n)}r_2}{r_1 - r_2}\right) r_1^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} - \left(\frac{\ell_{2+\xi(n)} - \ell_{\xi(n)}r_1}{r_1 - r_2}\right) r_2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \tag{2.89}$$

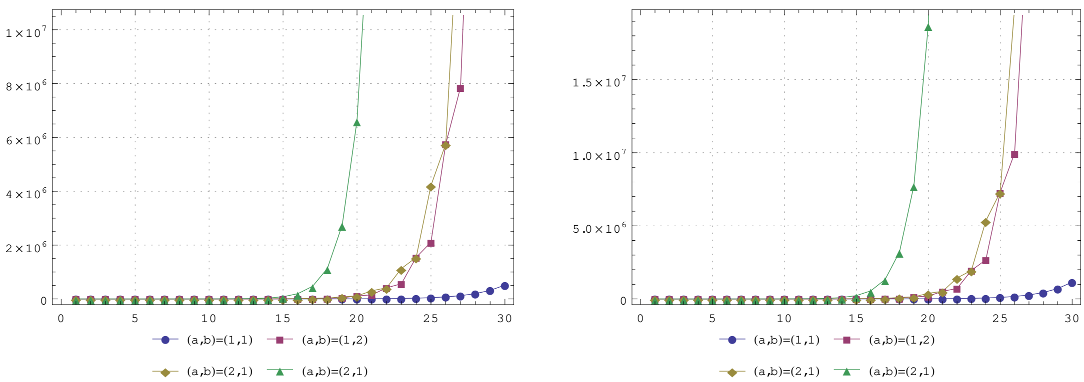
şeklindedir[16]. Burada $r_1 = \left(\frac{ab+2-\sqrt{a^2b^2+4ab}}{2}\right)$ ve $r_2 = \left(\frac{ab+2+\sqrt{a^2b^2+4ab}}{2}\right)$'dir. Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas $1-$sayılarına ait birkaç terim aşağıdaki gibi verilmiştir.

Tablo 2.4. Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas $1-$sayılarının tablo gösterimi

(a,b)	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(2,2)$
f_n	$\{0,1,1,2,3,\ldots\}$	$\{0,1,1,3,4,\ldots\}$	$\{0,1,2,3,8,\ldots\}$	$\{0,1,2,5,12,\ldots\}$
ℓ_n	$\{2,1,3,4,7\ldots\}$	$\{2,1,4,5,14,\ldots\}$	$\{2,2,4,10,14,\ldots\}$	$\{2,2,6,14,34,\ldots\}$

Ayrıca genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas $1-$sayıları için ilk 30 terime ait grafikler sırasıyla aşağıdaki gibidir.

Şekil 2.3. Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas $1-$sayılarının grafik gösterimi



2.4. Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas $2-$Sayıları

Denklem (2.37) için genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas $2-$sayılarına ait Binet formülleri

$$\begin{aligned} f_n &= \left(\frac{f_{4+\xi(n)} - (r_2+r_3)f_{2+\xi(n)} + r_2r_3f_{\xi(n)}}{(r_1-r_3)(r_1-r_2)}\right) r_1^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \\ &+ \left(\frac{f_{4+\xi(n)} - (r_1+r_3)f_{2+\xi(n)} + r_1r_3f_{\xi(n)}}{(r_2-r_3)(r_2-r_1)}\right) r_2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \\ &+ \left(\frac{f_{4+\xi(n)} - (r_1+r_2)f_{2+\xi(n)} + r_1r_2f_{\xi(n)}}{(r_3-r_2)(r_3-r_1)}\right) r_3^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\ell_n &= \left(\frac{\ell_{4+\xi(n)}-(r_2+r_3)\ell_{2+\xi(n)}+r_2r_3\ell_{\xi(n)}}{(r_1-r_3)(r_1-r_2)}\right)r_1^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\\ &+\left(\frac{\ell_{4+\xi(n)}-(r_1+r_3)\ell_{2+\xi(n)}+r_1r_3\ell_{\xi(n)}}{(r_2-r_3)(r_2-r_1)}\right)r_2^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\\ &+\left(\frac{\ell_{4+\xi(n)}-(r_1+r_2)\ell_{2+\xi(n)}+r_1r_2\ell_{\xi(n)}}{(r_3-r_2)(r_3-r_1)}\right)r_3^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\end{aligned}$$

şeklindedir [28]. Burada

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{\sqrt[3]{2a^3b^3+9a^2b+\sqrt{\left(2a^3b^3+9a^2b+9ab^2+27\right)^2-4\left(a^2b^2+3a+3b\right)^3}+9ab^2+27}}{3\sqrt[3]{2}}\\ &+\frac{\sqrt[3]{2}\left(a^2b^2+3a+3b\right)}{3\sqrt[3]{2a^3b^3+9a^2b+\sqrt{\left(2a^3b^3+9a^2b+9ab^2+27\right)^2-4\left(a^2b^2+3a+3b\right)^3}+9ab^2+27}}\\ &+\frac{ab}{3},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_2 &= \frac{\left(-1+i\sqrt{3}\right)\sqrt[3]{2a^3b^3+9a^2b+\sqrt{\left(2a^3b^3+9a^2b+9ab^2+27\right)^2-4\left(a^2b^2+3a+3b\right)^3}+9ab^2+27}}{6\sqrt[3]{2}}\\ &+\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(-a^2b^2-3a-3b\right)}{3\,2^{2/3}\sqrt[3]{2a^3b^3+9a^2b+\sqrt{\left(2a^3b^3+9a^2b+9ab^2+27\right)^2-4\left(a^2b^2+3a+3b\right)^3}+9ab^2+27}}\\ &+\frac{ab}{3}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} r_3 &= -\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)\sqrt[3]{2a^3b^3+9a^2b+\sqrt{\left(2a^3b^3+9a^2b+9ab^2+27\right)^2-4\left(a^2b^2+3a+3b\right)^3}+9ab^2+27}}{6\sqrt[3]{2}}\\ &+\frac{\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(-a^2b^2-3a-3b\right)}{3\,2^{2/3}\sqrt[3]{2a^3b^3+9a^2b+\sqrt{\left(2a^3b^3+9a^2b+9ab^2+27\right)^2-4\left(a^2b^2+3a+3b\right)^3}+9ab^2+27}}\\ &+\frac{ab}{3}\end{aligned}$$

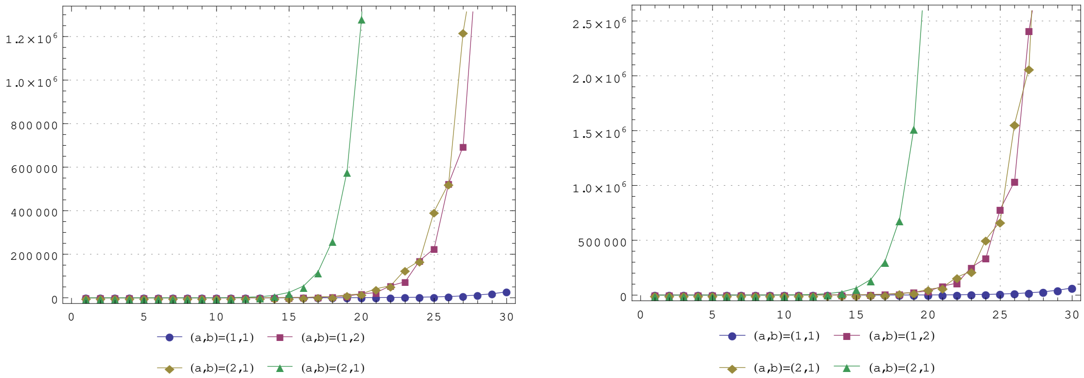
şeklindedir. Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas $2-$sayılarına ait birkaç terim aşağıdaki tablodaki gibidir.

Tablo 2.5. Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas $2-$sayılarının tablo gösterimi

(a,b)	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(2,2)$
f_n	$\{0,1,1,1,2,\ldots\}$	$\{0,1,1,2,3,\ldots\}$	$\{0,1,2,2,5,\ldots\}$	$\{0,1,2,4,9,\ldots\}$
ℓ_n	$\{3,1,1,4,5,\ldots\}$	$\{3,1,2,5,11,\ldots\}$	$\{3,2,2,7,9,\ldots\}$	$\{3,2,4,11,24,\ldots\}$

Ayrıca genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas $2-$sayıları için ilk 30 terime ait grafikler sırasıyla

Şekil 2.4. Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas 2−sayılarının grafik gösterimi



şeklindedir.

BÖLÜM 3

Bu bölümde sonlu fark yöntemleri, $m-$genişletilmiş Fibonacci $p-$sayı ve Lucas $p-$sayı dizilerine uygulanarak $m-$genişletilmiş Fibonacci $p-$fark ve Lucas $p-$fark dizileri elde edilecektir.

3.1. $m-$Genişletilmiş Fibonacci ve Lucas $p-$Fark Dizileri

Sonlu fark yöntemleri $m-$genişletilmiş Fibonacci $p-$sayı $\{F_{p,m,n}\}_{n=0}^{\infty}$ ve $m-$genişletilmiş Lucas $p-$sayı $\{L_{p,m,n}\}_{n=0}^{\infty}$ dizilerine uygulanırsa

$$\Delta_n(F_{p,m,n}) = F_{p,m,n+1} - F_{p,m,n}$$

ve

$$\Delta_n(L_{p,m,n}) = L_{p,m,n+1} - L_{p,m,n}$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde $F_{p,m,n}$ ve $L_{p,m,n}$'in n'ye göre ikinci basamaktan farkı

$$\Delta_n^2(F_{p,m,n}) = \Delta_n(\Delta_n(F_{p,m,n})) = F_{p,m,n+2} - 2F_{p,m,n+1} + F_{p,m,n}$$

ve

$$\Delta_n^2(L_{p,m,n}) = \Delta_n(\Delta_n(L_{p,m,n})) = L_{p,m,n+2} - 2L_{p,m,n+1} + L_{p,m,n}$$

olarak elde edilir. Böyle devam ederek $F_{p,m,n}$ ve $L_{p,m,n}$'in n'ye göre $i.$ basamaktan farkı

$$\Delta_n^{(i)}(F_{p,m}) = F_{p,m}^{(i)} = \{\Delta_n^{(i)}(F_{p,m,n})\} = \{F_{p,m,n}^{(i)}\} = \{F_{p,m,n+1}^{(i-1)} - F_{p,m,n}^{(i-1)}\} \tag{3.4}$$

ve

$$\Delta_n^{(i)}(L_{p,m}) = L_{p,m}^{(i)} = \{\Delta_n^{(i)}(L_{p,m,n})\} = \{L_{p,m,n}^{(i)}\} = \{L_{p,m,n+1}^{(i-1)} - L_{p,m,n}^{(i-1)}\} \tag{3.5}$$

olarak elde edilir. Eğer $i = 0$ ise, $F_{p,m,n}^{(0)} = F_{p,m,n}$ ve $L_{p,m,n}^{(0)} = L_{p,m,n}$ dir. Eğer $i = 1$ ise, $\Delta^1 = \Delta$ olarak elde edilir. Bu bölüm boyunca her iki diziyi aynı anda temsil etmesi için

$$\gamma_{p,m,n} = \begin{cases} F_{p,m,n} & , \gamma_{p,m,0} = 0, \gamma_{p,m,1} = 1, \ldots, \gamma_{p,m,n} = m^{n-1} \\ L_{p,m,n} & , \gamma_{p,m,0} = p+1, \gamma_{p,m,1} = 1, \ldots, \gamma_{p,m,n} = m^n. \end{cases} \tag{3.6}$$

tanımlanacaktır. Böylece $m-$genişletilmiş Fibonacci $p-$fark ve $m-$genişletilmiş Lucas $p-$fark dizilerinin $i.$ basamaktan farkı

$$\gamma_{p,m,n}^{(i)} = \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \binom{i}{j} \gamma_{p,m,n+i-j}. \tag{3.7}$$

olarak hesaplanabilir.

Şimdi $m-$genişletilmiş Fibonacci $p-$fark ve $m-$genişletilmiş Lucas $p-$fark dizilerinin bazı özellikleri verilecektir.

Lemma 3.1.1. $m-$genişletilmiş Fibonacci $p-$fark ve $m-$genişletilmiş Lucas $p-$fark dizilerinin rekürans bağıntısı

$$\gamma_{p,m,n+1}^{(i)} = m\gamma_{p,m,n}^{(i)} + \gamma_{p,m,n-p}^{(i)} \tag{3.8}$$

şeklindedir.

İspat. Lemmanın ispatı i üzerinden tümevarım ile yapılacaktır. İlk olarak $i = 1$ için,

$$\begin{aligned}
\gamma_{p,m,n+1}^{(1)} &= \gamma_{p,m,n+2} - \gamma_{p,m,n+1} \\
&= (m\gamma_{p,m,n+1} + \gamma_{p,m,n-p+1}) - (m\gamma_{p,m,n} + \gamma_{p,m,n-p}) \\
&= m(\gamma_{p,m,n+1} - \gamma_{p,m,n}) + (\gamma_{p,m,n-p+1} - \gamma_{p,m,n-p}) \\
&= m\gamma_{p,m,n}^{(1)} + \gamma_{p,m,n-p}^{(1)}
\end{aligned}$$

elde edilir ki iddia doğrudur. Şimdi $1 \leq i \leq N$ tamsayısı için (3.8) eşitliği sağlansın. Denklemin i için doğru olduğu kabul edilirse $\gamma_{p,m,n+1}^{(i)} = m\gamma_{p,m,n}^{(i)} + \gamma_{p,m,n-p}^{(i)}$ şeklindedir. Bu takdirde,

$$\begin{aligned}
\gamma_{p,m,n+1}^{(N+1)} &= \gamma_{p,m,n+2}^{(N)} - \gamma_{p,m,n+1}^{(N)} \\
&= \left(m\gamma_{p,m,n+1}^{(N)} + \gamma_{p,m,n-p+1}^{(N)}\right) - \left(m\gamma_{p,m,n}^{(N)} + \gamma_{p,m,n-p}^{(N)}\right) \\
&= m\left(\gamma_{p,m,n+1}^{(N)} - \gamma_{p,m,n}^{(N)}\right) + \left(\gamma_{p,m,n-p+1}^{(N)} - \gamma_{p,m,n-p}^{(N)}\right) \\
&= m\gamma_{p,m,n}^{(N)} + \gamma_{p,m,n-p}^{(N)}
\end{aligned}$$

olup $i \geq 1$ için ispat tamamlanmış olur. $\square$

Teorem 3.1.1. $n \geq 2p$ için, $m-$genişletilmiş Fibonacci $p-$fark dizisi

$$F_{p,m,n}^{(i)} = F_{p,m,n-p+1}F_{p,m,p}^{(i)} + \sum_{j=0}^{p-1} F_{p,m,n-p+j}F_{p,m,j}^{(i)} \tag{3.9}$$

eşitliğini sağlar.

İspat. Teoremin ispatı n üzerinden tümevarım yöntemi ile yapılacaktır. $n = 2p$ için,

$$\begin{aligned}
F_{p,m,2p}^{(i)} &= mF_{p,m,2p-1}^{(i)} + F_{p,m,p-1}^{(i)} \\
&= m\left[mF_{p,m,2p-2}^{(i)} + F_{p,m,p-2}^{(i)}\right] + F_{p,m,p-1}^{(i)} \\
&= m^2F_{p,m,2p-2}^{(i)} + F_{p,m,p-1}^{(i)} + mF_{p,m,p-2}^{(i)} \\
&= m^3F_{p,m,2p-3}^{(i)} + F_{p,m,p-1}^{(i)} + mF_{p,m,p-2}^{(i)} + m^2F_{p,m,p-3}^{(i)} \\
&\vdots \\
&= m^pF_{p,m,p}^{(i)} + F_{p,m,p-1}^{(i)} + mF_{p,m,p-2}^{(i)} + \cdots + m^{p-2}F_{p,m,1}^{(i)} + m^{p-1}F_{p,m,0}^{(i)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} F^{(i)}_{p,m,2p} &= F_{p,m,p+1}F^{(i)}_{p,m,p} + F_{p,m,1}F^{(i)}_{p,m,p-1} + F_{p,m,2}F^{(i)}_{p,m,p-2} \\ &\quad + \cdots + F_{p,m,p-2}F^{(i)}_{p,m,2} + F_{p,m,p-1}F^{(i)}_{p,m,1} + F_{p,m,p}F^{(i)}_{p,m,0} \end{aligned}$$

yazılır ki $n = 2p$ için doğrudur. Şimdi $2p + 1 \leq n \leq N$ olacak şekilde N tamsayısı için doğru olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} F^{(i)}_{p,m,n+1} &= mF^{(i)}_{p,m,n} + F^{(i)}_{p,m,n-p} \\ &= m\left[F_{p,m,n-p+1}F^{(i)}_{p,m,p} + F_{p,m,n-2p+1}F^{(i)}_{p,m,p-1} + \cdots + F_{p,m,n-p}F^{(i)}_{p,m,0}\right] \\ &\quad +F_{p,m,n-2p+1}F^{(i)}_{p,m,p} + F_{p,m,n-3p+1}F^{(i)}_{p,m,p-1} + \cdots + F_{p,m,n-2p}F^{(i)}_{p,m,0} \\ &= (mF_{p,m,n-p+1} + F_{p,m,n-2p+1})F^{(i)}_{p,m,p} \\ &\quad +(mF_{p,m,n-2p+1} + F_{p,m,n-3p+1})F^{(i)}_{p,m,p-1} + \cdots + \\ &\quad +(mF_{p,m,n-p} + F_{p,m,n-2p})F^{(i)}_{p,m,0} \\ &= F_{p,m,n-p+2}F^{(i)}_{p,m,p} + \sum_{j=0}^{p-1} F_{p,m,n+1-p-j}F^{(i)}_{p,m,j}, \end{aligned}$$

elde edilir ki teorem ispatlanmış olur. □

Teorem 3.1.2. $i \geq 1, n \geq p+1$ ve $\gamma^{(i)}_{p,m,0} = \gamma^{(i-1)}_{p,m,1} - \gamma^{(i-1)}_{p,m,1-p}$ başlangıç şartları ile birlikte, $m-$genişletilmiş Fibonacci ve Lucas $p-$fark dizileri

$$\gamma^{(i)}_{p,m,n} = (m-1)\gamma^{(i-1)}_{p,m,n} + \gamma^{(i-1)}_{p,m,n-p} \tag{3.10}$$

eşitliğini sağlar.

İspat. $m-$genişletilmiş Fibonacci ve Lucas $p-$fark dizilerinin tanımından

$$\gamma^{(i-1)}_{p,m,n-1} = \sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j\binom{i-1}{j}\gamma_{p,m,n+i-j-2}$$

ve

$$\gamma^{(i-1)}_{p,m,n} = \sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j\binom{i-1}{j}\gamma_{p,m,n+i-j-1}$$

elde edilir. Bu eşitlikler kullanılarak

$$(m-1)\gamma^{(i-1)}_{p,m,n} + \gamma^{(i-1)}_{p,m,n-p}$$

$$
\begin{aligned}
&= (m-1)\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j\binom{i-1}{j}\gamma_{p,m,n+i-j-1} \\
&\quad +\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j\binom{i-1}{j}\gamma_{p,m,n-p+i-j-1} \\
&= \sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j\binom{i-1}{j}\left(m\gamma_{p,m,n+i-j-1}-\gamma_{p,m,n+i-j-1}+\gamma_{p,m,n-p+i-j-1}\right) \\
&= \sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j\binom{i-1}{j}\left(m\gamma_{p,m,n+i-j-1}+\gamma_{p,m,n-p+i-j-1}\right) \\
&\quad -\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j\binom{i-1}{j}\left(\gamma_{p,m,n+i-j-1}\right) \\
&= \sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j\binom{i-1}{j}\gamma_{p,m,n+i-j}-\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j\binom{i-1}{j}\gamma_{p,m,n+i-j-1} \\
&= \gamma_{p,m,n+i}+\sum_{j=1}^{i-1}(-1)^j\binom{i-1}{j}\gamma_{p,m,n+i-j}-\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j\binom{i-1}{j}\gamma_{p,m,n+i-j-1} \\
&= \gamma_{p,m,n+i}+\sum_{j=1}^{i-1}(-1)^j\left[\binom{i-1}{j}+\binom{i-1}{j-1}\right]\gamma_{p,m,n+i-j}-(-1)^{i-1}\gamma_{p,m,n} \\
&= \gamma_{p,m,n+i}+\sum_{j=1}^{i-1}(-1)^j\binom{i}{j}\gamma_{p,m,n+i-j}+(-1)^i\gamma_{p,m,n} \\
&= \sum_{j=0}^{i}(-1)^j\binom{i}{j}\gamma_{p,m,n+i-j} \\
&= \gamma^{(i)}_{p,m,n}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Teorem 3.1.3. $m-$genişletilmiş Fibonacci ve Lucas $p-$fark dizilerinin toplamı

$$\sum_{j=0}^{n}\gamma^{(i)}_{p,m,j}=\gamma^{(i-1)}_{p,m,n+1}-\gamma^{(i-1)}_{p,m,0}. \tag{3.11}$$

şeklindedir.

İspat. Denklem (3.8) kullanılarak

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n}\gamma_{p,m,j}^{(i)} &= \gamma_{p,m,0}^{(i)}+\sum_{j=1}^{n}\gamma_{p,m,j}^{(i)} \\
&= \gamma_{p,m,0}^{(i)}+\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{n}(\gamma_{p,m,j+1}^{(i)}-\gamma_{p,m,j-p}^{(i)}) \\
&= \gamma_{p,m,0}^{(i)}+\frac{1}{m}\left(\left(\gamma_{p,m,2}^{(i)}-\gamma_{p,m,1-p}^{(i)}\right)+\left(\gamma_{p,m,3}^{(i)}-\gamma_{p,m,2-p}^{(i)}\right)+\cdots\right. \\
&\quad \left.+\left(\gamma_{p,m,n+1}^{(i)}-\gamma_{p,m,n-p}^{(i)}\right)\right) \\
&= \gamma_{p,m,0}^{(i)}+\frac{1}{m}\left(\left(\gamma_{p,m,3}^{(i-1)}-\gamma_{p,m,2}^{(i-1)}-\gamma_{p,m,2-p}^{(i-1)}+\gamma_{p,m,1-p}^{(i-1)}\right)+\cdots\right. \\
&\quad \left.+\left(\gamma_{p,m,n+2}^{(i-1)}-\gamma_{p,m,n+1}^{(i-1)}-\gamma_{p,m,n-p+1}^{(i-1)}+\gamma_{p,m,n-p}^{(i-1)}\right)\right) \\
&= \gamma_{p,m,0}^{(i)}+\frac{1}{m}\left(\gamma_{p,m,n+2}^{(i-1)}-\gamma_{p,m,n+1-p}^{(i-1)}-\gamma_{p,m,2}^{(i-1)}+\gamma_{p,m,1-p}^{(i-1)}\right) \\
&= \gamma_{p,m,1}^{(i-1)}-\gamma_{p,m,0}^{(i-1)}+\gamma_{p,m,n+1}^{(i-1)}-\gamma_{p,m,1}^{(i-1)} \\
&= \gamma_{p,m,n+1}^{(i-1)}-\gamma_{p,m,0}^{(i-1)}
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur. □

Teorem 3.1.4. $m-$genişletilmiş Fibonacci ve Lucas $p-$fark dizilerinin üreteç fonksiyonu

$$\gamma^{(i)}(x)=\frac{\gamma_{p,m,0}^{(i)}+\sum_{j=1}^{p}\left(\gamma_{p,m,j}^{(i)}-m\gamma_{p,m,j-1}^{(i)}\right)x^{j}}{1-mx-x^{p+1}} \tag{3.12}$$

şeklindedir.

İspat. $\gamma^{(i)}(x)$, $m-$genişletilmiş Fibonacci ve Lucas $p-$fark dizilerinin üreteç fonksiyonu olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\gamma^{(i)}(x) &= \gamma_{p,m,0}^{(i)}+\gamma_{p,m,1}^{(i)}x+\gamma_{p,m,2}^{(i)}x^{2}+\cdots+\gamma_{p,m,p}^{(i)}x^{p}+\gamma_{p,m,p+1}^{(i)}x^{p+1}+\cdots \\
m\gamma^{(i)}(x)x &= m\gamma_{p,m,0}^{(i)}x+m\gamma_{p,m,1}^{(i)}x^{2}+m\gamma_{p,m,2}^{(i)}x^{3}+\cdots+m\gamma_{p,m,p}^{(i)}x^{p+1} \\
&\quad +m\gamma_{p,m,p+1}^{(i)}x^{p+2}+\cdots \\
\gamma^{(i)}(x)x^{p+1} &= \gamma_{p,m,0}^{(i)}x^{p+1}+\gamma_{p,m,1}^{(i)}x^{p+2}+\gamma_{p,m,2}^{(i)}x^{p+3}+\cdots+\gamma_{p,m,p}^{(i)}x^{2p+1} \\
&\quad +\gamma_{p,m,p+1}^{(i)}x^{2p+2}+\cdots
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bulunan bu eşitliklerden

$$\begin{aligned}
\left(1-mx-x^{p+1}\right)\gamma^{(i)}(x) &= \gamma_{p,m,0}^{(i)}+\left(\gamma_{p,m,1}^{(i)}-m\gamma_{p,m,0}^{(i)}\right)x+\cdots \\
&\quad +\left(\gamma_{p,m,p}^{(i)}-m\gamma_{p,m,p-1}^{(i)}\right)x^{p} \\
&= \gamma_{p,m,0}^{(i)}+\sum_{j=1}^{p}\left(\gamma_{p,m,j}^{(i)}-m\gamma_{p,m,j-1}^{(i)}\right)x^{j} \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Böylece $m-$genişletilmiş Fibonacci ve Lucas $p-$fark dizilerinin üreteç fonksiyonu

$$\gamma^{(i)}(x) = \frac{\gamma^{(i)}_{p,m,0} + \sum_{j=1}^{p} \left(\gamma^{(i)}_{p,m,j} - m\gamma^{(i)}_{p,m,j-1}\right) x^j}{1 - mx - x^{p+1}}$$

olarak bulunur. □

Şimdi verilecek olan teorem $m-$genişletilmiş Fibonacci $p-$fark dizileri ile $m-$genişletilmiş Lucasi $p-$fark dizileri arasındaki ilişkiyi göstermektedir.

Teorem 3.1.5. $m-$genişletilmiş Fibonacci $p-$fark ve $m-$genişletilmiş Lucas $p-$fark dizileri arasında

$$L^{(i)}_{p,m,n} = F^{(i)}_{p,m,n+1} + pF^{(i)}_{p,m,n-p} \tag{3.14}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Bu teoremin ispatı Tuğlu ve ark. [25] tarafından tanımlanan $m-$genişletilmiş Fibonacci ve Lucas $p-$sayıları arasındaki

$$L_{p,m,n} = F_{p,m,n+1} + pF_{p,m,n-p} \tag{3.15}$$

eşitlik kullanılarak yapılacaktır. Denklem (3.7) kullanılarak

$$\begin{aligned} F^{(i)}_{p,m,n+1} + pF^{(i)}_{p,m,n-p} &= \sum_{j=0}^{i}(-1)^j \binom{i}{j} F_{p,m,n+1+i-j} + p\sum_{j=0}^{i}(-1)^j \binom{i}{j} F_{p,m,n-p+i-j} \\ &= \sum_{j=0}^{i}(-1)^j \binom{i}{j} \left[F_{p,m,n+1+i-j} + pF_{p,m,-p+i-j}\right] \\ &= \sum_{j=0}^{i}(-1)^j \binom{i}{j} L_{p,m,n+i-j} \\ &= L^{(i)}_{p,m,n} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur. □

3.2. $m-$Genişletilmiş Fibonacci $p-$Fark Newton İnterpolasyonu

$(x_j, F_{p,m,j}), j = 0, 1, 2, \ldots, n$ ve $x_j < x_{j+1}$ şartını sağlayan $(n+1)$ nokta verilsin. $h_j = x_{j+1} - x_j$ olsun. Bu durumda $m-$genişletilmiş Fibonacci ve Lucas $p-$Newton interpolasyonu

$$\begin{aligned} P_n(m,x) &= F_{p,m,0} + F^{(1)}_{p,m,0}\frac{x-x_0}{h_0} + \frac{F^{(2)}_{p,m,0}}{2!}\frac{x-x_0}{h_0}\frac{x-x_1}{h_1} \\ &\quad + \frac{F^{3)}_{p,m,0}}{3!}\frac{x-x_0}{h_0}\frac{x-x_1}{h_1}\frac{x-x_2}{h_2} + \cdots, \end{aligned} \tag{3.16}$$

veya daha genel formda

$$P_n(m,x) = F_{p,m,0} + \sum_{i=1}^{n} \frac{F^{(i)}_{p,m,0}}{i!} \prod_{j=0}^{i-1} \frac{x-x_j}{h_j}, \tag{3.17}$$

yazılabilir. Eğer yukardaki formülde $x_j = j$ alınırsa daha genel bir formül

$$P_n(m,x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{F^{(i)}_{p,m,0}}{i!} \prod_{j=0}^{i-1} (x-j). \tag{3.18}$$

olarak elde edilir. Eğer $\forall j = \overline{0,n}$ için $x_{j+1} - x_j = h$ alınırsa, interpolasyon hatası

$$\varepsilon = \frac{F^{(n+1)}_{p,m,0}}{(n+1)!} \frac{1}{h^{n+1}} \prod_{j=0}^{n} (x-x_j). \tag{3.19}$$

şeklinde hesap edilir.

3.3. Bazı Özel p ve m Değerleri İçin $m-$Genişletilmiş Fibonacci $p-$Newton İnterpolasyonu Uygulamaları

Şimdi $(x_j, F_{p,m,j}), j = 0,1,2,3$ olsun. Bu durumda $m-$genişletilmiş Fibonacci $p-$Newton interpolasyon polinomu

$$\begin{aligned} P_4(m,x) &= F_{p,m,0} + \frac{F^{(1)}_{p,m,0}}{1!}(x-x_0) \\ &\quad + \frac{F^{(2)}_{p,m,0}}{2!}(x-x_0)(x-x_1) + \frac{F^{(3)}_{p,m,0}}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\ &\quad + \frac{F^{(4)}_{p,m,0}}{4!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \\ &= x + \frac{1}{2}(2(m-1)-m)(x-1)x \\ &\quad + \frac{1}{6}\left(m^2 + 3(m-1)^2 - 3m(m-1)\right)(x-2)(x-1)x \\ &\quad + \frac{1}{24}\left(-m^3 + 4m^2(m-1)\right. \\ &\quad \left. + 4(m-1)^3 - 6m(m-1)^2\right)(x-3)(x-2)(x-1)x \end{aligned}$$

şeklindedir. Aşağıdaki tablo interpolasyon polinomlarını ve m'nin farklı değerleri için hata miktarlarını göstermektedir.

Tablo 3.6. m'nin bazı özel değerleri için $P_4(m,x)$ interpolasyon değerleri

m	$P_4(m,x)$	ε
3	$\frac{1}{24}\left(5x^4 - 18x^3 + 31x^2 + 6x\right)$	$\frac{11}{120}\max\lvert(x-4)(x-3)(x-2)(x-1)x\rvert = 0.0325937$
4	$\frac{1}{6}\left(5x^4 - 23x^3 + 40x^2 - 16x\right)$	$\frac{61}{120}\max\lvert(x-4)(x-3)(x-2)(x-1)x\rvert = 0.180747$
5	$\frac{1}{24}\left(51x^4 - 254x^3 + 441x^2 - 214x\right)$	$\frac{41}{24}\max\lvert(x-4)(x-3)(x-2)(x-1)x\rvert = 0.607427$
6	$\frac{1}{6}\left(26x^4 - 135x^3 + 235x^2 - 120x\right)$	$\frac{521}{120}\max\lvert(x-4)(x-3)(x-2)(x-1)x\rvert = 1.54375$
7	$\frac{1}{24}\left(185x^4 - 986x^3 + 1723x^2 - 898x\right)$	$\frac{1111}{120}\max\lvert(x-4)(x-3)(x-2)(x-1)x\rvert = 3.29196$

Özel olarak $p = 1$ and $m = 3$ için [37]'deki sonuçlar elde edilir. Bundan farklı olarak $p = 10$ ve $m = 5$ için aşağıdaki interpolasyon tablosu verilebilir.

Tablo 3.7. $p = 10$, $m = 5$ için $P_n(m, x)$ interpolasyon tablosu

x_j	$F_{p,m,j}$	$\Delta F_{p,m,j}$	$\Delta^2 F_{p,m,j}$	$\Delta^3 F_{p,m,j}$	$\Delta^4 F_{p,m,j}$
0	0				
		1			
1	1		3		
		4		13	
2	5		16		51
		20		64	
3	25		80		
		100			
4	125				

Bu durumda $p = 10$ ve $m = 5$ için elde edilen interpolasyon polinomu

$$P_4(5, x) = 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{3}{2!}x(x-1) + \frac{13}{3!}x(x-1)(x-2) + \frac{51}{4!}x(x-1)(x-2)(x-3).$$

şeklindedir. Tablodan da görüldüğü gibi, herhangi p ve m değeri için elde edilen polinomun katsayıları interpolasyon tablosunun ilk köşegenindeki sayılardır.

BÖLÜM 4

4.1. Elemanları İki Periyotlu Fibonacci ve Lucas Sayıları Olan $r-$Circulant Matrislerin Spektral Normlarının Hesaplanması

Bu bölümde elemanları iki periyotlu Fibonacci ve Lucas sayıları olan $r-$circulant matrislerin spektral normları hesaplanacaktır. İlk olarak spektral normların hesaplanmasında kullanılacak olan aşağıdaki teoremler verilecektir.

Teorem 4.1.1 ([53]). q_n, $n.$ iki periyotlu Fibonacci sayısı ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(k+1)} q_k^2 = \left(\frac{1}{a}\right) q_n q_{n+1} \tag{4.5}$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 4.1.2 ([39]). l_n, $n.$ iki periyotlu Lucas sayısı ve $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{m} \left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(k)} l_k^2 = \left(\frac{1}{a}\right) l_{m+1} l_m - 2 \tag{4.6}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. (1.52) eşitliğinden iki periyotlu Lucas dizisinin Binet formülü kullanılarak

$$l_k = \begin{cases} \frac{1}{(ab)^{\frac{k}{2}}} \left(\alpha^k + \beta^k\right), & k \text{ çift ise} \\ \frac{a}{(ab)^{\frac{k+1}{2}}} \left(\alpha^k + \beta^k\right), & k \text{ tek ise} \end{cases} \tag{4.7}$$

ve

$$l_k^2 = \begin{cases} \left(\frac{\alpha^2}{ab}\right)^k + \left(\frac{\beta^2}{ab}\right)^k + 2(-1)^k, & k \text{ çift ise} \\ \left(\frac{a}{b}\right) \left[\left(\frac{\alpha^2}{ab}\right)^k + \left(\frac{\beta^2}{ab}\right)^k + 2(-1)^k\right], & k \text{ tek ise} \end{cases} \tag{4.8}$$

elde edilir. (4.8) eşitliğindeki ifadeler $k \geq 1$ için tek bir denklemde aşağıdaki gibi

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(k)} l_k^2 = \left(\frac{\alpha^2}{ab}\right)^k + \left(\frac{\beta^2}{ab}\right)^k + 2(-1)^k \tag{4.9}$$

yazılır. $ab(\alpha+1) = \alpha^2$, $ab(\beta+1) = \beta^2$, $\beta(\alpha+1) = -\alpha$ ve $\alpha(\beta+1) = -\beta$ eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(k)} l_k^2 &= \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\alpha^2}{ab}\right)^k + \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\beta^2}{ab}\right)^k + \sum_{k=1}^{m} 2(-1)^k \\ &= \frac{\left(\frac{\alpha^2}{ab}\right)^{m+1} - \left(\frac{\alpha^2}{ab}\right)}{\left(\frac{\alpha^2}{ab}\right) - 1} + \frac{\left(\frac{\beta^2}{ab}\right)^{m+1} - \left(\frac{\beta^2}{ab}\right)}{\left(\frac{\beta^2}{ab}\right) - 1} + (-1)^m - 1 \\ &= \frac{\left(\frac{\alpha^2}{ab}\right)\left(\left(\frac{\alpha^2}{ab}\right)^m - 1\right)}{\alpha} + \frac{\left(\frac{\beta^2}{ab}\right)\left(\left(\frac{\beta^2}{ab}\right)^m - 1\right)}{\beta} + (-1)^m - 1 \qquad (4.10) \\ &= \frac{1}{(ab)^{m+1}} \left[\alpha^{2m+1} + \beta^{2m+1}\right] + (-1)^m - 2. \end{aligned}$$

elde edilir. Lemma (1.4.3)'ten

$$\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(k)} l_k^2=\left(\frac{1}{a}\right) l_{m+1}l_m-2 \tag{4.11}$$

elde edilir. □

Aşağıdaki teorem elemanları iki periyotlu Fibonacci sayıları olan $r-$circulant matrisin spektral normunun alt ve üst sınırlarını verir.

Teorem 4.1.3 ([39])**.** $r\in\mathbb{C}$ ve

$$\begin{aligned} Q &= C_r\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} q_0, \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(2)}{2}} q_1, \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(3)}{2}} q_2, \ldots, \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} q_{n-1}\right) \\ &= \begin{bmatrix} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} q_0 & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(2)}{2}} q_1 & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(3)}{2}} q_2 & \cdots & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} q_{n-1} \\ r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} q_{n-1} & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} q_0 & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(2)}{2}} q_1 & \cdots & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-1)}{2}} q_{n-2} \\ r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-1)}{2}} q_{n-2} & r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} q_{n-1} & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} q_0 & \cdots & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-2)}{2}} q_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(2)}{2}} q_1 & r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(3)}{2}} q_2 & r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(4)}{2}} q_3 & \cdots & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} q_0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.12}$$

bir $r-$circulant matris olsun. Q matrisinin spektral normu için aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır.

(i) <u>Eğer $|r|\geq 1$ ise</u>

$$\sqrt{\frac{q_n q_{n-1}}{a}}\leq ||Q||_2\leq |r|\frac{q_n q_{n-1}}{a}, \tag{4.13}$$

(ii) <u>Eğer $|r|<1$ ise</u>

$$|r|\sqrt{\frac{q_n q_{n-1}}{a}}\leq ||Q||_2\leq \sqrt{(n-1)\frac{q_n q_{n-1}}{a}}. \tag{4.14}$$

İspat. Q matrisinin Frobenious normu

$$||Q||_F^2=\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(k+1)} q_k^2+\sum_{k=1}^{n-1}k|r|^2\left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(k+1)} q_k^2 \tag{4.15}$$

şeklindedir. Burada $|r|$'ye göre iki durum söz konusudur.

(i) <u>Eğer $|r|\geq 1$ ise</u>, Teorem (4.1.1)'den

$$
\begin{aligned}
||Q||_F^2 &\geq \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(k+1)} q_k^2+\sum_{k=1}^{n-1} k\left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(k+1)} q_k^2 \\
&= n\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(k+1)} q_k^2 \\
&= n\left(\frac{q_n q_{n-1}}{a}\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan

$$
\frac{1}{\sqrt{n}}||Q||_F \geq \sqrt{\frac{q_n q_{n-1}}{a}} \tag{4.16}
$$

yazılabilir. Ayrıca Denklem (1.73)'ten aşağıdaki eşitsizlik

$$
||Q||_2 \geq \sqrt{\frac{q_n q_{n-1}}{a}} \tag{4.17}
$$

elde edilir. Şimdi $|r| \geq 1$ için Q matrisinin spektral normunun üst sınırını elde etmek için $Q = B \circ C$ olacak şekilde B ve C matrisleri sırasıyla

$$
B = \begin{bmatrix}
r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} q_0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\
r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} q_{n-1} & r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} q_0 & 1 & \dots & 1 \\
r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-1)}{2}} q_{n-2} & r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} q_{n-1} & r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} q_0 & \dots & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(2)}{2}} q_1 & r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(3)}{2}} q_2 & r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(4)}{2}} q_3 & \dots & r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} q_0
\end{bmatrix} \tag{4.18}
$$

ve

$$
C = \begin{bmatrix}
\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} q_0 & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(2)}{2}} q_1 & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(3)}{2}} q_2 & \dots & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} q_{n-1} \\
1 & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} q_0 & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(2)}{2}} q_1 & \dots & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-1)}{2}} q_{n-2} \\
1 & 1 & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} q_0 & \dots & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-2)}{2}} q_{n-3} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
1 & 1 & 1 & \dots & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} q_0
\end{bmatrix} \tag{4.19}
$$

şeklinde tanımlansın. Denklem (1.71) ve (1.72)'den

$$
r_1(B) = \max_{1\leq i\leq n}\sqrt{\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|^2} = \sqrt{|r|^2\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(k+1)} q_k^2} = |r|\sqrt{\frac{q_n q_{n-1}}{a}},
$$

$$
c_1(C) = \max_{1\leq j\leq n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|c_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(k+1)} q_k^2} = \sqrt{\frac{q_n q_{n-1}}{a}}.
$$

eşitlikleri elde edilir. Öte yandan Lemma 1.4.7'den

$$||Q||_2 \leq r_1(B)c_1(C) = |r|\frac{q_n q_{n-1}}{a} \tag{4.20}$$

elde edilir. Böylece Q matrisinin $|r| \geq 1$ için spektral normunun alt ve üst sınırları

$$\sqrt{\frac{q_n q_{n-1}}{a}} \leq ||Q||_2 \leq |r|\frac{q_n q_{n-1}}{a} \tag{4.21}$$

şeklindedir.

(ii) Eğer $|r| < 1$ ise, Denklem (4.15)'ten

$$\begin{aligned} ||Q||_F^2 &\geq \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)|r|^2\left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(k+1)} q_k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k|r|^2\left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(k+1)} q_k^2 \\ &= n|r|^2\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(k+1)} q_k^2 \\ &= n|r|^2\left(\frac{q_n q_{n-1}}{a}\right) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan

$$\frac{1}{\sqrt{n}}||Q||_F \geq |r|\sqrt{\frac{q_n q_{n-1}}{a}} \tag{4.22}$$

elde edilir. Böylece Denklem (1.73)'den

$$||Q||_2 \geq |r|\sqrt{\frac{q_n q_{n-1}}{a}} \tag{4.23}$$

bulunur. Şimdi $|r| < 1$ için Q matrisinin spektral normunun üst sınırını elde etmek için $Q = D \circ E$ olacak şekilde D ve E matrisleri

$$D = \begin{bmatrix} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} q_0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ r & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} q_0 & 1 & \dots & 1 \\ r & r & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} q_0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r & r & r & \dots & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} q_0 \end{bmatrix} \tag{4.24}$$

ve

$$E = \begin{bmatrix} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} q_0 & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(2)}{2}} q_1 & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(3)}{2}} q_2 & \dots & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} q_{n-1} \\ \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} q_{n-1} & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} q_0 & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(2)}{2}} q_1 & \dots & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-1)}{2}} q_{n-2} \\ \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-1)}{2}} q_{n-2} & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} q_{n-1} & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} q_0 & \dots & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-2)}{2}} q_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(2)}{2}} q_1 & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(3)}{2}} q_2 & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(4)}{2}} q_3 & \dots & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} q_0 \end{bmatrix} \tag{4.25}$$

tanımlansın. Denklem (1.71) ve (1.72)'den

$$r_1(D) = \max_{1\le i\le n}\sqrt{\sum_{j=1}^{n}|d_{ij}|^2} = \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} q_0^2 + (n-1)} = \sqrt{n-1},$$

$$c_1(E) = \max_{1\le j\le n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|e_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(k+1)} q_k^2} = \sqrt{\frac{q_n q_{n-1}}{a}}.$$

elde edilir. Öte yandan Lemma 1.4.7'dan

$$||Q||_2 \le r_1(D)c_1(E) = \sqrt{(n-1)\frac{q_n q_{n-1}}{a}} \tag{4.26}$$

elde edilir. Böylece, $|r| < 1$ için Q matrisinin spektral normunun alt ve üst sınırları

$$|r|\sqrt{\frac{q_n q_{n-1}}{a}} \le ||Q||_2 \le \sqrt{(n-1)\frac{q_n q_{n-1}}{a}} \tag{4.27}$$

şeklindedir. □

Sonuç 4.1.1. Teorem 4.1.3'te elde edilen sonuçlar a ve b'nin özel değerleri için literatürdeki bazı sayı dizilerine indirgenebilir. Örneğin,

- $a = b = k$ için elemanları $k-$Fibonacci sayıları olan $r-$circulant matrisin norm sınırları [20]

  Eğer $|r| \ge 1$ ise

  $$\sqrt{\frac{F_{k,n}F_{k,n-1}}{k}} \le ||Q||_2 \le |r|\frac{F_{k,n}F_{k,n-1}}{k}, \tag{4.28}$$

  Eğer $|r| < 1$ ise

  $$|r|\sqrt{\frac{F_{k,n}F_{k,n-1}}{k}} \le ||Q||_2 \le \sqrt{(n-1)\frac{F_{k,n}F_{k,n-1}}{k}}, \tag{4.29}$$

- $a = b = 2$ için elemanları Pell sayıları olan $r-$circulant matrisin norm sınırları [54]

  Eğer $|r| \ge 1$ ise

  $$\sqrt{\frac{P_n P_{n-1}}{2}} \le ||Q||_2 \le |r|\frac{P_n P_{n-1}}{2}, \tag{4.30}$$

  Eğer $|r| < 1$ ise

  $$|r|\sqrt{\frac{P_n P_{n-1}}{2}} \le ||Q||_2 \le \sqrt{(n-1)\frac{P_n P_{n-1}}{2}}, \tag{4.31}$$

- $a = b = 1$ için elemanları Fibonacci sayıları olan $r-$circulant matrisin norm sınırları [19]

  Eğer $|r| \geq 1$ ise

$$\sqrt{F_n F_{n-1}} \leq ||Q||_2 \leq |r| F_n F_{n-1}, \tag{4.32}$$

  Eğer $|r| < 1$ ise

$$|r|\sqrt{F_n F_{n-1}} \leq ||Q||_2 \leq \sqrt{(n-1) F_n F_{n-1}} \tag{4.33}$$

olarak elde edilir.

Aşağıdaki teorem elemanları iki periyotlu Lucas sayıları olan $r-$circulant matrisin spektral normunun alt ve üst sınırlarını verir.

Teorem 4.1.4 ([39]). $r \in \mathbb{C}$ ve

$$\begin{aligned} L &= C_r\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(0)}{2}} l_0, \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} l_1, \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(2)}{2}} l_2, \ldots, \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-1)}{2}} l_{n-1}\right) \\ &= \begin{bmatrix} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(0)}{2}} l_0 & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} l_1 & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(2)}{2}} l_2 & \ldots & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-1)}{2}} l_{n-1} \\ r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-1)}{2}} l_{n-1} & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(0)}{2}} l_0 & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} l_1 & \ldots & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-2)}{2}} l_{n-2} \\ r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-2)}{2}} l_{n-2} & r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-1)}{2}} l_{n-1} & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(0)}{2}} l_0 & \ldots & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-3)}{2}} l_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} l_1 & r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(2)}{2}} l_2 & r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(3)}{2}} l_3 & \ldots & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(0)}{2}} l_0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.34}$$

bir $r-$circulant matris olsun. L matrisinin spektral normu için aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır.

(i) Eğer $|r| \geq 1$ ise,

$$\sqrt{\frac{l_n l_{n-1}}{a} + 2} \leq ||L||_2 \leq \sqrt{1 + |r|^2\left(\frac{l_n l_{n-1}}{a} - 2\right)}\sqrt{\frac{l_n l_{n-1}}{a} + 2} \tag{4.35}$$

(ii) Eğer $|r| < 1$ ise,

$$|r|\sqrt{\frac{l_n l_{n-1}}{a} + 2} \leq ||L||_2 \leq \sqrt{n\left(\frac{l_n l_{n-1}}{a} + 2\right)}. \tag{4.36}$$

İspat. L matrisinin Frobenious normu

$$||L||_F^2 = \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(k)} l_k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k|r|^2\left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(k)} l_k^2 \tag{4.37}$$

şeklindedir. Burada $|r|$'ye göre iki durum söz konusudur.

(i) Eğer $|r| \geq 1$ ise Teorem (4.1.2)'den

$$\begin{aligned} ||L||_F^2 &\geq \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(k)} l_k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k \left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(k)} l_k^2 \\ &= n\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(k)} l_k^2 \\ &= n\left(\frac{l_n l_{n-1}}{a} + 2\right) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Buradan

$$\frac{1}{\sqrt{n}}||L||_F \geq \sqrt{\frac{l_n l_{n-1}}{a} + 2}. \tag{4.38}$$

yazılabilir. Ayrıca Denklem (1.73)'den aşağıdaki eşitsizlik

$$||L||_2 \geq \sqrt{\frac{l_n l_{n-1}}{a} + 2}. \tag{4.39}$$

elde edilir. Şimdi $|r| \geq 1$ için L matrisinin spektral normunun üst sınırını elde etmek için $L = F \circ H$ olacak şekilde

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-1)}{2}} l_{n-1} & 1 & 1 & \dots & 1 \\ r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-2)}{2}} l_{n-2} & r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-1)}{2}} l_{n-1} & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} l_1 & r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(2)}{2}} l_2 & r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(3)}{2}} l_3 & \dots & 1 \end{bmatrix} \tag{4.40}$$

ve

$$H = \begin{bmatrix} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(0)}{2}} l_0 & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} l_1 & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(2)}{2}} l_2 & \dots & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-1)}{2}} l_{n-1} \\ 1 & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(0)}{2}} l_0 & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} l_1 & \dots & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-2)}{2}} l_{n-2} \\ 1 & 1 & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(0)}{2}} l_0 & \dots & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-3)}{2}} l_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(0)}{2}} l_0 \end{bmatrix} \tag{4.41}$$

matrisleri tanımlansın. Denklem (1.71) ve (1.72)'den

$$r_1(F) = \max_{1\leq i\leq n}\sqrt{\sum_{j=1}^{n}|f_{ij}|^2} = \sqrt{1+|r|^2\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(k)} l_k^2} = \sqrt{1+|r|^2\left(\frac{l_n l_{n-1}}{a} - 2\right)},$$

$$c_1(H) = \max_{1\leq j\leq n} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |h_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(k)} l_k^2} = \sqrt{\frac{l_n l_{n-1}}{a} + 2}$$

elde edilir. Öte yandan Lemma 1.4.7'den

$$||L||_2 \leq r_1(F)c_1(H) = \sqrt{1 + |r|^2 \left(\frac{l_n l_{n-1}}{a} - 2\right)} \sqrt{\frac{l_n l_{n-1}}{a} + 2} \tag{4.42}$$

elde edilir. Böylece L matrisinin $|r| \geq 1$ için spektral normunun alt ve üst sınırları

$$\sqrt{\frac{l_n l_{n-1}}{a} + 2} \leq ||L||_2 \leq \sqrt{1 + |r|^2 \left(\frac{l_n l_{n-1}}{a} - 2\right)} \sqrt{\frac{l_n l_{n-1}}{a} + 2} \tag{4.43}$$

şeklindedir.

(ii) Eğer $|r| < 1$ ise, Denklem (4.37)'den

$$\begin{aligned} ||L||_F^2 &\geq \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)|r|^2 \left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(k)} l_k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k|r|^2 \left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(k)} l_k^2 \\ &= n|r|^2 \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(k)} l_k^2 \\ &= n|r|^2 \left(\frac{l_n l_{n-1}}{a} + 2\right) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan

$$\frac{1}{\sqrt{n}} ||L||_F \geq |r| \sqrt{\frac{l_n l_{n-1}}{a} + 2}. \tag{4.44}$$

elde edilir. Böylece Denklem (1.73)'den

$$||L||_2 \geq |r| \sqrt{\frac{l_n l_{n-1}}{a} + 2}. \tag{4.45}$$

olarak bulunur. Şimdi $|r| < 1$ için L matrisinin spektral normunun üst sınırını elde etmek için $L = G \circ K$ olacak şekilde G ve K matrisleri

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ r & 1 & 1 & \dots & 1 \\ r & r & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r & r & r & \dots & 1 \end{bmatrix} \tag{4.46}$$

ve

$$K=\begin{bmatrix} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(0)}{2}}l_0 & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}}l_1 & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(2)}{2}}l_2 & \dots & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-1)}{2}}l_{n-1} \\ \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-1)}{2}}l_{n-1} & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(0)}{2}}l_0 & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}}l_1 & \dots & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-2)}{2}}l_{n-2} \\ \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-2)}{2}}l_{n-2} & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-1)}{2}}l_{n-1} & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(0)}{2}}l_0 & \dots & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-3)}{2}}l_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}}l_1 & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(2)}{2}}l_2 & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(3)}{2}}l_3 & \dots & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(0)}{2}}l_0 \end{bmatrix} \tag{4.47}$$

tanımlansın. Denklem (1.71) ve (1.72) kullanılarak

$$r_1(G) \;=\; \max_{1\le i\le n}\sqrt{\sum_{j=1}^{n}|g_{ij}|^2}=\sqrt{n},$$

$$c_1(K) \;=\; \max_{1\le j\le n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|k_{ij}|^2}=\sqrt{\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(k)}l_k^2}=\sqrt{\frac{l_nl_{n-1}}{a}+2}$$

elde edilir. Öte yandan Lemma 1.4.7 kullanılarak

$$||L||_2\le r_1(G)c_1(K)=\sqrt{n\left(\frac{l_nl_{n-1}}{a}+2\right)} \tag{4.48}$$

bulunur. Böylece, $|r|<1$ için L matrisinin spektral normunun alt ve üst sınırları

$$|r|\sqrt{\frac{l_nl_{n-1}}{a}+2}\le ||L||_2\le\sqrt{n\left(\frac{l_nl_{n-1}}{a}+2\right)} \tag{4.49}$$

şeklindedir. □

Sonuç 4.1.2. Teorem 4.1.4'te elde edilen sonuçlar a ve b'nin özel değerleri için literatürdeki bazı sayı dizilerine indirgenebilir. Örneğin,

- $a=b=k$ için elemanları $k-$Lucas sayıları olan $r-$circulant matrisin norm sınırları

  Eğer $|r|\ge 1$ ise,

$$\sqrt{\frac{L_{k,n}L_{k,n-1}}{k}+2}\le ||L||_2\le\sqrt{1+|r|^2\left(\frac{L_{k,n}L_{k,n-1}}{k}-2\right)}\sqrt{\frac{L_{k,n}L_{k,n-1}}{k}+2} \tag{4.50}$$

  Eğer $|r|<1$ ise,

$$|r|\sqrt{\frac{L_{k,n}L_{k,n-1}}{k}+2}\le ||L||_2\le\sqrt{n\left(\frac{L_{k,n}L_{k,n-1}}{k}+2\right)} \tag{4.51}$$

- $a = b = 2$ için elemanları Pell-Lucas sayıları olan $r-$circulant matrisin norm sınırları

  Eğer $|r| \geq 1$ ise,

$$\sqrt{\frac{Q_n Q_{n-1}}{2} + 2} \leq ||L||_2 \leq \sqrt{1 + |r|^2 \left(\frac{Q_n Q_{n-1}}{2} - 2\right)} \sqrt{\frac{Q_n Q_{n-1}}{2} + 2} \tag{4.52}$$

  Eğer $|r| < 1$ ise,

$$|r| \sqrt{\frac{Q_n Q_{n-1}}{2} + 2} \leq ||L||_2 \leq \sqrt{n \left(\frac{Q_n Q_{n-1}}{2} + 2\right)} \tag{4.53}$$

- $a = b = 1$ için elemanları Lucas sayıları olan $r-$circulant matrisin norm sınırları

  Eğer $|r| \geq 1$ ise,

$$\sqrt{L_n L_{n-1} + 2} \leq ||L||_2 \leq \sqrt{1 + |r|^2 (L_n L_{n-1} - 2)} \sqrt{L_n L_{n-1} + 2} \tag{4.54}$$

  Eğer $|r| < 1$ ise,

$$|r| \sqrt{L_n L_{n-1} + 2} \leq ||L||_2 \leq \sqrt{n (L_n L_{n-1} + 2)} \tag{4.55}$$

olarak elde edilir.

Sonuç 4.1.3 ([39]). $r \in \mathbb{C}$, $Q = C_r\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} q_0, \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(2)}{2}} q_1, \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(3)}{2}} q_2, \ldots, \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} q_{n-1}\right)$ ve $L = C_r\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(0)}{2}} l_0, \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} l_1, \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(2)}{2}} l_2, \ldots, \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-1)}{2}} l_{n-1}\right)$ elemanları iki periyotlu Fibonacci ve Lucas sayılarından oluşan iki $r-$circulant matris olmak üzere,

(i) Eğer $|r| \geq 1$ ise

$$||Q \circ L||_2 \leq |r| \frac{q_n q_{n-1}}{a} \sqrt{1 + |r|^2 \left(\frac{l_n l_{n-1}}{a} - 2\right)} \sqrt{\frac{l_n l_{n-1}}{a} + 2}, \tag{4.56}$$

(ii) Eğer $|r| < 1$ ise

$$||Q \circ L||_2 \leq \sqrt{n(n-1) \frac{q_n q_{n-1}}{a} \left(\frac{l_n l_{n-1}}{a} + 2\right)} \tag{4.57}$$

olarak elde edilir.

Sonuç 4.1.4 ([39]). $r \in \mathbb{C}$, $Q = C_r\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} q_0, \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(2)}{2}} q_1, \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(3)}{2}} q_2, \ldots, \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} q_{n-1}\right)$ ve $L = C_r\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(0)}{2}} l_0, \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} l_1, \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(2)}{2}} l_2, \ldots, \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-1)}{2}} l_{n-1}\right)$ elemanları iki periyotlu Fibonacci ve Lucas sayılarından oluşan iki $r-$circulant matris olmak üzere,

(i) Eğer $|r| \geq 1$ ise

$$||Q \otimes L||_2 \geq \sqrt{\frac{q_n q_{n-1}}{a}\left(\frac{l_n l_{n-1}}{a}+2\right)} \tag{4.58}$$

ve

$$||Q \otimes L||_2 \leq |r|\frac{q_n q_{n-1}}{a}\sqrt{1+|r|^2\left(\frac{l_n l_{n-1}}{a}-2\right)}\sqrt{\frac{l_n l_{n-1}}{a}+2}, \tag{4.59}$$

(ii) Eğer $|r| < 1$ ise

$$||Q \otimes L||_2 \geq |r|^2\sqrt{\frac{q_n q_{n-1}}{a}\left(\frac{l_n l_{n-1}}{a}+2\right)} \tag{4.60}$$

ve

$$||Q \otimes L||_2 \leq \sqrt{n(n-1)\frac{q_n q_{n-1}}{a}\left(\frac{l_n l_{n-1}}{a}+2\right)}. \tag{4.61}$$

elde edilir.

BÖLÜM 5

Bu bölümde elemanları iki periyotlu Fibonacci ve Lucas sayıları olan $r-$circulant matrislerin determinantları ve tersleri hesaplanacaktır.

5.1. Elemanları İki Periyotlu Fibonacci Sayıları Olan $r-$Circulant Matrislerin Determinant ve Terslerinin Hesaplanması

İlk olarak Tanım 1.4.22 ile verilen C_r $r-$circulant matrisinin elemanları iki periyotlu Fibonacci dizisinin ardışık terimleri olan Q_n $r-$circulant matrisi aşağıdaki gibi tanımlanacaktır.

Tanım 5.1.1. q_n, $n.$ iki periyotlu Fibonacci sayısı olsun. $(n \times n)$ tipinde

$$\mathcal{Q}_n = \begin{bmatrix} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(2)}{2}} q_1 & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(3)}{2}} q_2 & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(4)}{2}} q_3 & \cdots & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}} q_n \\ r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}} q_n & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(2)}{2}} q_1 & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(3)}{2}} q_2 & \cdots & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} q_{n-1} \\ r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} q_{n-1} & r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}} q_n & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(2)}{2}} q_1 & \cdots & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-1)}{2}} q_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(3)}{2}} q_2 & r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(4)}{2}} q_3 & r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(5)}{2}} q_4 & \cdots & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(2)}{2}} q_1 \end{bmatrix} \tag{5.6}$$

tanımlı matrise iki periyotlu Fibonacci sayıları ile tanımlı $r-$circulant matris denir.

Şimdi, bu matrisin determinant değerini iki periyotlu Fibonacci sayıları ile karakterize eden aşağıdaki teorem verilecektir.

Teorem 5.1.1 ([43])**.** $n \geq 3, r \neq \frac{q_1}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} q_{n+1}}$ ve q_n, $n.$ iki periyotlu Fibonacci sayısı olsun. $\mathcal{Q}_n = C_r\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(2)}{2}} q_1, \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(3)}{2}} q_2, \ldots, \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}} q_n\right)$ elemanları iki periyotlu Fibonacci sayıları olan bir $r-$circulant matris olmak üzere Q_n matrisinin determinantı

$$\begin{aligned} \det \mathcal{Q}_n &= \left(q_1^2 - r\sqrt{\frac{b}{a}} q_2 \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-1)}{2}} q_n\right)\left(q_1 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} q_{n+1}\right)^{n-2} \\ &\quad + r\sum_{k=1}^{n-2}\left[\left(q_1\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-k)}{2}} q_{n-k+1} - \sqrt{\frac{b}{a}} q_2 \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-k-1)}{2}} q_{n-k}\right)\right. \\ &\quad \left. \times \left(r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-1)}{2}} q_n - \sqrt{\frac{b}{a}} q_0\right)^k \left(q_1 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} q_{n+1}\right)^{n-k-2}\right] \end{aligned} \tag{5.7}$$

şeklindedir [43].

İspat. $n = 3$ için $\mathcal{Q}_3 = q_1^3 + r\left(\sqrt{\frac{b}{a}} q_2\right)^3 + r^2 q_3^3 - 3r\sqrt{\frac{b}{a}} q_1 q_2 q_3$ olup (5.7) ifadesinin doğruluğu kolayca görülür. Şimdi $n > 3$ için (5.7) ifadesinin doğruluğunu göstermek için aşağıda verilen

$$\mathcal{P}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -r\sqrt{\frac{b}{a}}\frac{q_2}{q_1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -r & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\sqrt{ab} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\sqrt{ab} & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & -\sqrt{ab} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{ab} & -1 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.8}$$

ve

$$\mathcal{R}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-1)}{2}} q_n - \sqrt{\frac{b}{a}}q_0}{q_1 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} q_{n+1}}\right)^{n-2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-1)}{2}} q_n - \sqrt{\frac{b}{a}}q_0}{q_1 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} q_{n+1}}\right)^{n-3} & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \left(\frac{r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-1)}{2}} q_n - \sqrt{\frac{b}{a}}q_0}{q_1 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} q_{n+1}}\right)^{n-4} & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \left(\frac{r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-1)}{2}} q_n - \sqrt{\frac{b}{a}}q_0}{q_1 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} q_{n+1}}\right) & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.9}$$

matrisleri tanımlansın. (5.6), (5.8) ve (5.9) matrisleri kullanılarak

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_n &= \mathcal{P}_n\mathcal{Q}_n\mathcal{R}_n \\ &= \begin{pmatrix} q_1 & g_n' & \beta_n & \beta_{n-1} & \beta_{n-2} & \cdots & \beta_5 & \beta_4 & \beta_3 \\ 0 & g_n & q_1 - \frac{r\sqrt{\frac{b}{a}}q_2\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}}q_n}{q_1} & \gamma_n & \gamma_{n-1} & \cdots & \gamma_6 & \gamma_5 & \gamma_4 \\ & & \sigma_n & \theta_n & & & & & \\ & & & \sigma_n & \theta_n & & & & \\ & & & & \sigma_n & \ddots & & & \\ & & & & & \ddots & \theta_n & & \\ & & & & & & \sigma_n & \theta_n & \\ & & & & & & & \sigma_n & \theta_n \\ & & & & & & & & \sigma_n \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{5.10}$$

olacak şekilde bir üst üçgensel matris elde edilir. Burada

$$g_n' = \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(k-1)}{2}} q_k \left(\frac{r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-1)}{2}} q_n - \sqrt{\frac{b}{a}}q_0}{q_1 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} q_{n+1}}\right)^{n-k}, \tag{5.11}$$

$$
\begin{aligned}
g_n &= q_1 - \frac{r\sqrt{\frac{b}{a}}q_2\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-1)}{2}}q_n}{q_1} \\
&\quad + r\sum_{k=1}^{n-2}\left(\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-k)}{2}}q_{n-k+1} - \frac{\sqrt{\frac{b}{a}}q_2\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-k+1)}{2}}q_{n-k}}{q_1}\right)\right. \\
&\quad \left.\times\left(\frac{r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-1)}{2}}q_n - \sqrt{\frac{b}{a}}q_0}{q_1 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}}q_{n+1}}\right)^k\right),
\end{aligned} \tag{5.12}
$$

$$
\gamma_m = r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(m-1)}{2}}q_m - \frac{r\sqrt{\frac{b}{a}}q_2\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(m-2)}{2}}q_{m-1}}{q_1}, \quad m = 4,5,\ldots,n, \tag{5.13}
$$

$$
\beta_s = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(s-1)}{2}}q_s, \quad s = 3,4,\ldots,n, \tag{5.14}
$$

$$
\sigma_n = \sqrt{\frac{b}{a}}q_0 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}}q_n \tag{5.15}
$$

ve

$$
\theta_n = q_1 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}}q_{n+1} \tag{5.16}
$$

şeklindedir. Öte yandan (5.8) ve (5.9) matrislerinin determinantları sırasıyla

$$
\det \mathcal{P}_n = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \tag{5.17}
$$

ve

$$
\det \mathcal{R}_n = \begin{cases} \left(\frac{r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-1)}{2}}q_n - \sqrt{\frac{b}{a}}q_0}{q_1 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}}q_{n+1}}\right)^{n-2}, & n-1 \equiv 1,2 (\mathrm{mod}\ 4) \\ -\left(\frac{r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-1)}{2}}q_n - \sqrt{\frac{b}{a}}q_0}{q_1 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}}q_{n+1}}\right)^{n-2}, & n-1 \equiv 0,3 (\mathrm{mod}\ 4). \end{cases} \tag{5.18}
$$

olduğu kolayca görülür. Buradan, $n > 3$ için

$$
\det \mathcal{P}_n \det \mathcal{R}_n = (-1)^n \left(\frac{r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-1)}{2}}q_n - \sqrt{\frac{b}{a}}q_0}{q_1 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}}q_{n+1}}\right)^{n-2}. \tag{5.19}
$$

$\mathcal{S}_n$ üst üçgensel bir matris olduğundan

$$
\begin{aligned}
\det \mathcal{S}_n &= q_1 g_n \left[\left(\sqrt{\frac{b}{a}}q_0 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}} q_n\right)\right]^{n-2} \\
&= (-1)^{n-2} q_1 g_n \left[\left(r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}} q_n - \sqrt{\frac{b}{a}}q_0\right)\right]^{n-2}.
\end{aligned}
$$

elde edilir. $\mathcal{S}_n = \mathcal{P}_n \mathcal{Q}_n \mathcal{R}_n$ eşitliğinin her iki tarafının determinantı alınırsa

$$
\begin{aligned}
\det \mathcal{P}_n \det \mathcal{Q}_n \det \mathcal{R}_n &= (-1)^{n-2} q_1 g_n \left[\left(r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}} q_n - \sqrt{\frac{b}{a}}q_0\right)\right]^{n-2} \\
&= (-1)^n \left(\frac{r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}} q_n - \sqrt{\frac{b}{a}}q_0}{q_1 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} q_{n+1}}\right)^{n-2} \det \mathcal{Q}_n \qquad (5.20)
\end{aligned}
$$

elde edilir. $q_1 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} q_{n+1} \neq 0$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
\det \mathcal{Q}_n &= q_1 g_n \left(q_1 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} q_{n+1}\right)^{n-2} \\
&= \left(q_1^2 - r\sqrt{\frac{b}{a}}q_2 \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-1)}{2}} q_n\right)\left(q_1 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} q_{n+1}\right)^{n-2} \\
&\quad + r\sum_{k=1}^{n-2}\left[\left(q_1\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-k)}{2}} q_{n-k+1} - \sqrt{\frac{b}{a}}q_2\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-k-1)}{2}} q_{n-k}\right)\right. \\
&\quad \left.\times\left(r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-1)}{2}} q_n - \sqrt{\frac{b}{a}}q_0\right)^k \left(q_1 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} q_{n+1}\right)^{n-k-2}\right].
\end{aligned}
$$

elde edilir. □

Sonuç 5.1.1. (5.7) eşitliğinde a, b ve r'ye uygun değerler verildiği zaman literatürde yer alan diğer özel sayı dizileri ile ilgili circulant matrislerin determinantları elde edilir [22].

Lemma 5.1.1 ([43])**.** $\mathcal{A}$ elemanları

$$
a_{ij} = \begin{cases}
q_1 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} q_{n+1}, & j = i+1 \\
\sqrt{\frac{b}{a}}q_0 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}} q_n, & i = j \\
0, & \text{diğer durumlarda}
\end{cases} \qquad (5.21)
$$

şeklinde $(n-2)\times(n-2)$ tipinde bir matris ve $r \neq \frac{\sqrt{\frac{b}{a}}q_0}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-1)}{2}} q_n}$ olsun. Bu durumda, $\mathcal{A}$

matrisinin tersi $\mathcal{A}^{-1}=\left(a_{ij}^{'}\right)$,

$$a_{ij}^{'}=\begin{cases}\dfrac{\left(-\left(q_1-r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}}q_{n+1}\right)\right)^{j-i}}{\left(\sqrt{\frac{b}{a}}q_0-r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-1)}{2}}q_n\right)^{j-i+1}}, & j\geq i\\ 0, & \text{diğer durumlarda}\end{cases} \tag{5.22}$$

şeklindedir.

Teorem 5.1.2 ([43]). $\mathcal{Q}_n=C_r\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(2)}{2}}q_1,\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(3)}{2}}q_2,\ldots,\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}}q_n\right)$ elemanları iki periyotlu Fibonacci sayıları olan bir $r-$circulant matris olsun. Bu durumda $n\geq 3$, $r\neq 0, r\neq \frac{\sqrt{\frac{b}{a}}q_0}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-1)}{2}}q_n}$ ve $r\neq \frac{q_1}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}}q_{n+1}}$ olmak üzere $\mathcal{Q}_n$ matrisinin tersi

$$\mathcal{Q}_n^{-1}=C_r\left(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n\right), \tag{5.23}$$

şeklindedir. Burada

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \frac{1}{g_n}-v\left(\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{\frac{b}{a}}q_0-r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}}q_n}-\frac{q_1-r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}}q_{n+1}}{\left(\sqrt{\frac{b}{a}}q_0-r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}}q_n\right)^2}\right)\\ &\quad+\frac{r\left(q_1\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}}q_n-\sqrt{\frac{b}{a}}q_2\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}}q_{n-1}\right)}{q_1g_n\left(\sqrt{\frac{b}{a}}q_0-r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}}q_n\right)},\end{aligned}$$

$$\omega_2 = -\frac{v}{\sqrt{\frac{b}{a}}q_0-r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}}q_n}-\frac{\sqrt{\frac{b}{a}}q_2}{q_1g_n},$$

$$\begin{aligned}\omega_3 &= (-1)^{n-1}\frac{v\left(q_1-r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}}q_{n+1}\right)^{n-3}}{r\left(\sqrt{\frac{b}{a}}q_0-r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}}q_n\right)^{n-2}}\\ &\quad+\frac{1}{q_1g_n}\sum_{k=1}^{n-3}(-1)^{n-k}\left(q_1\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-k)}{2}}q_{n-k+1}-\sqrt{\frac{b}{a}}q_2\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-k+1)}{2}}q_{n-k}\right)\\ &\quad\times\frac{\left(q_1-r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}}q_{n+1}\right)^{n-k-3}}{\left(\sqrt{\frac{b}{a}}q_0-r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}}q_n\right)^{n-k-2}},\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\omega_4 &= (-1)^n \frac{v\left(q_1 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} q_{n+1}\right)^{n-4}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}q_2 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}} q_{n+2}\right)}{r\left(\sqrt{\frac{b}{a}}q_0 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}} q_n\right)^{n-2}} \\
&\quad + \frac{\left(q_1\sqrt{\frac{b}{a}}q_4 - \sqrt{\frac{b}{a}}q_2q_3\right)\sqrt{ab}}{q_1g_n\left(\sqrt{\frac{b}{a}}q_0 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}} q_n\right)} + \frac{\left(\sqrt{\frac{b}{a}}q_2 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}} q_{n+2}\right)}{q_1g_n} \\
&\quad \times \sum_{k=2}^{n-3}\left[(-1)^{k-1}\left(q_1\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(k+4)}{2}} q_{k+3} - \sqrt{\frac{b}{a}}q_2\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(k+3)}{2}} q_{k+2}\right)\right. \\
&\quad \left. \times \frac{\left(q_1 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} q_{n+1}\right)^{k-2}}{\left(\sqrt{\frac{b}{a}}q_0 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}} q_n\right)^{k}}\right],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\omega_j &= (-1)^{n-j}\frac{v}{r}\left(\frac{\left(\sqrt{\frac{b}{a}}q_2 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}} q_{n+2}\right)\left(q_1 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} q_{n+1}\right)^{n-j}}{\left(\sqrt{\frac{b}{a}}q_0 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}} q_n\right)^{n-j+2}}\right. \\
&\quad \left. - \frac{\left(q_1 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} q_{n+1}\right)^{n-j+2}}{\left(\sqrt{\frac{b}{a}}q_0 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}} q_n\right)^{n-j+3}}\right) \\
&\quad + \frac{1}{q_1g_n}\left[\sum_{k=1}^{n-j}(-1)^{n-j+k+1}\left(q_1\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-k)}{2}} q_{n-k+1} - \sqrt{\frac{b}{a}}q_2\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-k+1)}{2}} q_{n-k}\right)\right. \\
&\quad \times \left(\frac{\left(\sqrt{\frac{b}{a}}q_2 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}} q_{n+2}\right)\left(q_1 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} q_{n+1}\right)^{n-j-k}}{\left(\sqrt{\frac{b}{a}}q_0 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}} q_n\right)^{n-j-k+2}}\right. \\
&\quad \left. - \frac{\left(q_1 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} q_{n+1}\right)^{n-j-k+2}}{\left(\sqrt{\frac{b}{a}}q_0 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}} q_n\right)^{n-j-k+3}}\right) \\
&\quad + \left(q_1\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(j+1)}{2}} q_j - \sqrt{\frac{b}{a}}q_2\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(j)}{2}} q_{j-1}\right) \times \left(\frac{\sqrt{\frac{b}{a}}q_0\sqrt{ab} - q_1 + r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} q_{n-1}}{\left(\sqrt{\frac{b}{a}}q_0 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}} q_n\right)^{2}}\right)
\end{aligned}
$$

$$+\frac{q_1\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(j)}{2}}q_{j-1}-\sqrt{\frac{b}{a}}q_2\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(j-1)}{2}}q_{j-2}}{\sqrt{\frac{b}{a}}q_0-r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}}q_n}\Bigg],\quad j=5,6,\ldots,n-1,$$

$$\begin{aligned}
\omega_n &= \frac{v}{r}\left(\frac{\sqrt{\frac{b}{a}}q_2-r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}}q_{n+2}}{\left(\sqrt{\frac{b}{a}}q_0-r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}}q_n\right)^2}-\frac{\left(q_1-r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}}q_{n+1}\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{b}{a}}q_0-r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}}q_n\right)^3}\right)\\
&\quad+\frac{1}{q_1g_n}\left[\left(q_1\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}}q_n-\sqrt{\frac{b}{a}}q_2\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}}q_{n-1}\right)\right.\\
&\quad\times\left(\frac{\sqrt{\frac{b}{a}}q_0\sqrt{ab}-q_1+r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}}q_{n-1}}{\left(\sqrt{\frac{b}{a}}q_0-r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}}q_n\right)^2}\right)\\
&\quad\left.+\frac{q_1\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}}q_{n-1}-\sqrt{\frac{b}{a}}q_2\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-1)}{2}}q_{n-2}}{\sqrt{\frac{b}{a}}q_0-r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}}q_n}\right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_n &= q_1-\frac{r\sqrt{\frac{b}{a}}q_2\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-1)}{2}}q_n}{q_1}\\
&\quad+r\sum_{k=1}^{n-2}\left(\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-k)}{2}}q_{n-k+1}-\frac{\sqrt{\frac{b}{a}}q_2\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-k+1)}{2}}q_{n-k}}{q_1}\right)\right.\\
&\quad\quad\left.\times\left(\frac{r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-1)}{2}}q_n-\sqrt{\frac{b}{a}}q_0}{q_1-r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}}q_{n+1}}\right)^k\right),
\end{aligned}$$

ve

$$v=\frac{q_1g_n-q_1^2+r\sqrt{\frac{b}{a}}q_2\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}}q_n}{q_1g_n}.$$

İspat. $\mathcal{U}_n$, aşağıda verilen

$$\mathcal{U}_n=\begin{pmatrix}1 & -\frac{g_n^{'}}{q_1} & u_{13} & u_{14} & u_{15} & \dots & u_{1,n-1} & u_{1n}\\ 0 & 1 & -\frac{q_1}{g_n}+\frac{r\sqrt{\frac{b}{a}}q_2\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}}q_n}{q_1g_n} & \frac{\zeta_n}{q_1g_n} & \frac{\zeta_{n-1}}{q_1g_n} & \dots & \frac{\zeta_5}{q_1g_n} & \frac{\zeta_4}{q_1g_n}\\ & 0 & 1 & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & & \\ & & & 0 & 1 & & & 0\\ & & & & & \ddots & & \\ 0 & & & & & \ddots & 1 & \\ & & & & & & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{5.24}$$

bir matris, burada

$$\zeta_m=-rq_1\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(m+1)}{2}}q_m+r\sqrt{\frac{b}{a}}q_2\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(m)}{2}}q_{m-1},\quad m=4,5,\dots,n,$$

$$u_{13}=-\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}}q_n}{q_1}+\frac{g_n^{'}}{q_1g_n}\left(q_1-\frac{r\sqrt{\frac{b}{a}}q_2\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}}q_n}{q_1}\right),$$

$$\begin{aligned}u_{1j} &= -\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-j+2)}{2}}q_{n-j+3}}{q_1}\\ &\quad+\frac{g_n^{'}}{q_1g_n}\left(r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-j+3)}{2}}q_{n-j+4}-\frac{r\sqrt{\frac{b}{a}}q_2\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-j+2)}{2}}q_{n-j+3}}{q_1}\right),\quad j=4,5,\dots,n,\end{aligned}$$

$$g_n^{'}=\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(k+1)}{2}}q_k\left(\frac{r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}}q_n-\sqrt{\frac{b}{a}}q_0}{q_1-r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}}q_{n+1}}\right)^{n-k},$$

$$\begin{aligned}g_n &= q_1-\frac{r\sqrt{\frac{b}{a}}q_2\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-1)}{2}}q_n}{q_1}\\ &\quad+r\sum_{k=1}^{n-2}\left(\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-k)}{2}}q_{n-k+1}-\frac{\sqrt{\frac{b}{a}}q_2\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-k+1)}{2}}q_{n-k}}{q_1}\right)\right.\\ &\qquad\left.\times\left(\frac{r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-1)}{2}}q_n-\sqrt{\frac{b}{a}}q_0}{q_1-r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}}q_{n+1}}\right)^k\right)\end{aligned}$$

ve $\mathcal{H} = \text{diag}(q_1, g_n)$ olsun. O zaman (5.6), (5.8), (5.9), (5.21) ve (5.24) matrislerinden

$\mathcal{P}_n \mathcal{Q}_n \mathcal{R}_n \mathcal{U}_n = \mathcal{H} \oplus \mathcal{A}$,

olduğu görülür. Burada $\oplus$ operatörü iki matrisin direkt toplamıdır. $\mathcal{T}_n = \mathcal{R}_n \mathcal{U}_n$ alınırsa

$\mathcal{Q}_n^{-1} = \mathcal{T}_n \left(\mathcal{H}^{-1} \oplus \mathcal{A}^{-1} \right) \mathcal{P}_n$

yazılabilir. Şimdi $\mathcal{Q}_n^{-1} = circ_r(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ olsun. $\mathcal{T}_n$ matrisinin son satırı

$$\left(0, 1, 1 - \frac{q_1}{g_n} + \frac{r\sqrt{\frac{b}{a}} q_2 \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}} q_n}{q_1 g_n}, \frac{\zeta_n}{q_1 g_n}, \frac{\zeta_{n-1}}{q_1 g_n}, \ldots, \frac{\zeta_5}{q_1 g_n}, \frac{\zeta_4}{q_1 g_n} \right)$$

şeklinde olacağından Lemma 5.1.1'den $\mathcal{Q}_n^{-1}$ matrisinin son satırının elemanları

$$r\omega_2 = -\frac{rv}{\sqrt{\frac{b}{a}} q_0 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}} q_n} - \frac{r\sqrt{\frac{b}{a}} q_2}{q_1 g_n},$$

$$\begin{aligned} r\omega_3 &= (-1)^{n-1} \frac{v\left(q_1 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} q_{n+1} \right)^{n-3}}{\left(\sqrt{\frac{b}{a}} q_0 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}} q_n \right)^{n-2}} \\ &\quad + \frac{r}{q_1 g_n} \sum_{k=1}^{n-3} (-1)^{n-k} \left(q_1 \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-k)}{2}} q_{n-k+1} - \sqrt{\frac{b}{a}} q_2 \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-k+1)}{2}} q_{n-k} \right) \\ &\quad \times \frac{\left(q_1 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} q_{n+1} \right)^{n-k-3}}{\left(\sqrt{\frac{b}{a}} q_0 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}} q_n \right)^{n-k-2}}, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
r\omega_4 &= (-1)^n \frac{v\left(q_1 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} q_{n+1}\right)^{n-4}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}q_2 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}} q_{n+2}\right)}{\left(\sqrt{\frac{b}{a}}q_0 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}} q_n\right)^{n-2}} \\
&\quad + \frac{r\left(q_1\sqrt{\frac{b}{a}}q_4 - \sqrt{\frac{b}{a}}q_2 q_3\right)\sqrt{ab}}{q_1 g_n\left(\sqrt{\frac{b}{a}}q_0 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}} q_n\right)} + \frac{\left(\sqrt{\frac{b}{a}}q_2 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}} q_{n+2}\right)}{q_1 g_n} \\
&\quad \times \sum_{k=2}^{n-3}\left[(-1)^{k-1}\left(q_1\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(k+4)}{2}} q_{k+3} - \sqrt{\frac{b}{a}}q_2\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(k+3)}{2}} q_{k+2}\right)\right. \\
&\quad \left. \times \frac{\left(q_1 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} q_{n+1}\right)^{k-2}}{\left(\sqrt{\frac{b}{a}}q_0 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}} q_n\right)^{k}}\right],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r\omega_j &= (-1)^{n-j} v\left(\frac{\left(\sqrt{\frac{b}{a}}q_2 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}} q_{n+2}\right)\left(q_1 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} q_{n+1}\right)^{n-j}}{\left(\sqrt{\frac{b}{a}}q_0 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}} q_n\right)^{n-j+2}}\right. \\
&\quad \left. - \frac{\left(q_1 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} q_{n+1}\right)^{n-j+2}}{\left(\sqrt{\frac{b}{a}}q_0 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}} q_n\right)^{n-j+3}}\right) \\
&\quad + \frac{r}{q_1 g_n}\left[\sum_{k=1}^{n-j}(-1)^{n-j+k+1}\left(q_1\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-k)}{2}} q_{n-k+1} - \sqrt{\frac{b}{a}}q_2\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-k+1)}{2}} q_{n-k}\right)\right. \\
&\quad \times \left(\frac{\left(\sqrt{\frac{b}{a}}q_2 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}} q_{n+2}\right)\left(q_1 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} q_{n+1}\right)^{n-j-k}}{\left(\sqrt{\frac{b}{a}}q_0 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}} q_n\right)^{n-j-k+2}}\right. \\
&\quad \left. - \frac{\left(q_1 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} q_{n+1}\right)^{n-j-k+2}}{\left(\sqrt{\frac{b}{a}}q_0 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}} q_n\right)^{n-j-k+3}}\right) \\
&\quad + \left(q_1\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(j+1)}{2}} q_j - \sqrt{\frac{b}{a}}q_2\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(j)}{2}} q_{j-1}\right) \times \left(\frac{\sqrt{\frac{b}{a}}q_0\sqrt{ab} - q_1 + r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} q_{n-1}}{\left(\sqrt{\frac{b}{a}}q_0 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}} q_n\right)^{2}}\right)
\end{aligned}
$$

$$+\frac{q_1\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(j)}{2}}q_{j-1}-\sqrt{\frac{b}{a}}q_2\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(j-1)}{2}}q_{j-2}}{\sqrt{\frac{b}{a}}q_0-r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}}q_n}\Bigg],\quad j=5,6,\ldots,n-1,$$

$$\begin{aligned}
r\omega_n &= v\left(\frac{\sqrt{\frac{b}{a}}q_2-r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}}q_{n+2}}{\left(\sqrt{\frac{b}{a}}q_0-r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}}q_n\right)^2}-\frac{\left(q_1-r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}}q_{n+1}\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{b}{a}}q_0-r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}}q_n\right)^3}\right)\\
&\quad+\frac{r}{q_1g_n}\left[\left(q_1\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}}q_n-\sqrt{\frac{b}{a}}q_2\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}}q_{n-1}\right)\right.\\
&\quad\times\left(\frac{\sqrt{\frac{b}{a}}q_0\sqrt{ab}-q_1+r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}}q_{n-1}}{\left(\sqrt{\frac{b}{a}}q_0-r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}}q_n\right)^2}\right)\\
&\quad\left.+\frac{q_1\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}}q_{n-1}-\sqrt{\frac{b}{a}}q_2\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-1)}{2}}q_{n-2}}{\sqrt{\frac{b}{a}}q_0-r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}}q_n}\right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \frac{1}{g_n}-v\left(\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{\frac{b}{a}}q_0-r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}}q_n}-\frac{q_1-r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}}q_{n+1}}{\left(\sqrt{\frac{b}{a}}q_0-r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}}q_n\right)^2}\right)\\
&\quad+\frac{r\left(q_1\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}}q_n-\sqrt{\frac{b}{a}}q_2\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}}q_{n-1}\right)}{q_1g_n\left(\sqrt{\frac{b}{a}}q_0-r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}}q_n\right)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_n &= q_1-\frac{r\sqrt{\frac{b}{a}}q_2\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-1)}{2}}q_n}{q_1}\\
&\quad+r\sum_{k=1}^{n-2}\left(\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-k)}{2}}q_{n-k+1}-\frac{\sqrt{\frac{b}{a}}q_2\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-k+1)}{2}}q_{n-k}}{q_1}\right)\right.\\
&\quad\left.\times\left(\frac{r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-1)}{2}}q_n-\sqrt{\frac{b}{a}}q_0}{q_1-r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}}q_{n+1}}\right)^k\right),
\end{aligned}$$

ve

$$v=\frac{q_1g_n-q_1^2+r\sqrt{\frac{b}{a}}q_2\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}}q_n}{q_1g_n}$$

şeklindedir. □

Sonuç 5.1.2. (5.23) eşitliğinde a, b ve r'ye uygun değerler verildiği zaman literatürde yer alan diğer özel sayı dizileri ile ilgili circulant matrislerin tersleri elde edilir [22].

5.2. Elemanları İki Periyotlu Lucas Sayıları Olan $r-$Circulant Matrislerin Determinant ve Terslerinin Hesaplanması

İlk olarak Tanım 1.4.22 ile verilen C_r $r-$circulant matrisinin elemanları iki periyotlu Lucas dizisinin ardışık terimleri olan $\mathcal{L}_n$ $r-$circulant matrisi aşağıdaki gibi tanımlanacaktır.

Tanım 5.2.1 ([43])**.** l_n, $n.$ iki periyotlu Lucas sayısı olsun. $(n \times n)$ tipinde

$$\mathcal{L}_n = \begin{bmatrix} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} l_1 & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(2)}{2}} l_2 & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(3)}{2}} l_3 & \dots & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} l_n \\ r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} l_n & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} l_1 & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(2)}{2}} l_2 & \dots & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-1)}{2}} l_{n-1} \\ r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-1)}{2}} l_{n-1} & r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} l_n & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} l_1 & \dots & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-2)}{2}} l_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(2)}{2}} l_2 & r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(3)}{2}} l_3 & r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(4)}{2}} l_4 & \dots & \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} l_1 \end{bmatrix} \tag{5.25}$$

tanımlı matrise iki periyotlu Lucas sayıları ile tanımlı $r-$circulant matris denir. Şimdi, bu matrisin determinant değerini iki periyotlu Fibonacci sayıları ile karakterize eden aşağıdaki teorem verilecektir.

Teorem 5.2.1 ([43])**.** $n \geq 3, r \neq \dfrac{\sqrt{\frac{b}{a}} l_1}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}} l_{n+1}}$ ve l_n, $n.$ iki periyotlu Lucas sayısı olsun. $\mathcal{L}_n = C_r\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} l_1, \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(2)}{2}} l_2, \dots, \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} l_n\right)$ elemanları iki periyotlu Lucas sayıları olan bir $r-$circulant matris olmak üzere Q_n matrisinin determinantı

$$\begin{aligned} \det \mathcal{L}_n \;=\; & \left(\left(\frac{b}{a}\right) l_1^2 - r l_2 \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} l_n\right)\left(\sqrt{\frac{b}{a}} l_1 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}} l_{n+1}\right)^{n-2} \\ & + r\sum_{k=1}^{n-2}\left[\left(\sqrt{\frac{b}{a}} l_1 \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-k+1)}{2}} l_{n-k+1} - l_2\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-k)}{2}} l_{n-k}\right)\right. \\ & \left. \times \left(r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} l_n - l_0\right)^k \left(\sqrt{\frac{b}{a}} l_1 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}} l_{n+1}\right)^{n-k-2}\right] \end{aligned} \tag{5.26}$$

şeklindedir.

İspat. $\mathcal{V}_n$ ve $\mathcal{G}_n$ matrisleri

$$\mathcal{V}_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ -r\frac{l_2}{\sqrt{\frac{b}{a}}l_1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1\\ -r & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\sqrt{ab}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\sqrt{ab} & -1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 1 & -\sqrt{ab} & \dots & 0 & 0\\ 0 & 1 & -\sqrt{ab} & -1 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.27}$$

ve

$$\mathcal{G}_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & \left(\frac{r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}}l_n-l_0}{\sqrt{\frac{b}{a}}l_1-r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}}l_{n+1}}\right)^{n-2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & \left(\frac{r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}}l_n-l_0}{\sqrt{\frac{b}{a}}l_1-r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}}l_{n+1}}\right)^{n-3} & 0 & 0 & \dots & 0 & 1\\ 0 & \left(\frac{r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}}l_n-l_0}{\sqrt{\frac{b}{a}}l_1-r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}}l_{n+1}}\right)^{n-4} & 0 & 0 & \dots & 1 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & \left(\frac{r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}}l_n-l_0}{\sqrt{\frac{b}{a}}l_1-r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}}l_{n+1}}\right) & 0 & 1 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.28}$$

şeklinde tanımlanrsa Teorem (5.1.1)'in ispatına benzer şekilde ispat yapılabilir. □

Sonuç 5.2.1. (5.26) eşitliğinde a, b ve r'ye uygun değerler verildiği zaman literatürde yer alan diğer özel sayı dizileri ile ilgili circulant matrislerin determinantları elde edilir [22].

Lemma 5.2.1 ([43])**.** $\mathcal{B}=(b_{ij})$ elemanları

$$b_{ij}=\begin{cases} \sqrt{\frac{b}{a}}l_1-r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}}l_{n+1}, & j=i+1\\ l_0-r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}}l_n, & i=j\\ 0, & \text{diğer durumda} \end{cases} \tag{5.29}$$

şeklinde $(n-2)\times(n-2)$ tipinde bir matris ve $r\neq\frac{l_0}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}}l_n}$ olsun. Bu durumda, $\mathcal{B}$ matrisinin tersi $\mathcal{B}^{-1}=\left(b'_{ij}\right)$

$$b'_{ij}=\begin{cases} \frac{\left(-\left(\sqrt{\frac{b}{a}}l_1-r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}}l_{n+1}\right)\right)^{j-i}}{\left(l_0-r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}}l_n\right)^{j-i+1}}, & j\geq i\\ 0, & \text{diğer durumda} \end{cases}. \tag{5.30}$$

şeklindedir.

Aşağıdaki teoremde elemanları iki periyotlu Lucas sayıları olan $\mathcal{L}_n$ $r-$circulant matrisinin tersi verilecektir.

Teorem 5.2.2 ([43]). $\mathcal{L}_n = circ_r\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(1)}{2}} l_1, \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(2)}{2}} l_2, \ldots, \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} l_n\right)$ elemanları iki periyotlu Lucas sayıları olan bir $r-$circulant matris olsun. Bu durumda $n \geq 3, r \neq 0, r \neq \frac{l_0}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} l_n}$ ve $\frac{\sqrt{\frac{b}{a}} l_1}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}} l_{n+1}}$ olmak üzere $\mathcal{L}_n$ matrisinin tersi

$$\mathcal{L}_n^{-1} = circ_r\left(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n\right), \tag{5.31}$$

şeklindedir. Burada

$$\begin{aligned}
\psi_1 \quad &= \quad \frac{1}{\varphi_n} - \kappa\left(\frac{\sqrt{ab}}{l_0 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} l_n} - \frac{\sqrt{\frac{b}{a}} l_1 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}} l_{n+1}}{\left(l_0 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} l_n\right)^2}\right) \\
&\quad + \frac{r\left(\sqrt{\frac{b}{a}} l_1 \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} l_n - l_2\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-1)}{2}} l_{n-1}\right)}{\sqrt{\frac{b}{a}} l_1 \varphi_n \left(l_0 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} l_n\right)},
\end{aligned}$$

$$\psi_2 = -\frac{\kappa}{l_0 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} l_n} - \frac{l_2}{\sqrt{\frac{b}{a}} l_1 \varphi_n},$$

$$\begin{aligned}
\psi_3 \quad &= \quad (-1)^{n-1} \frac{\kappa\left(\sqrt{\frac{b}{a}} l_1 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}} l_{n+1}\right)^{n-3}}{r\left(l_0 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} l_n\right)^{n-2}} \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{\frac{b}{a}} l_1 \varphi_n} \sum_{k=1}^{n-3} (-1)^{n-k} \left(\sqrt{\frac{b}{a}} l_1 \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-k+1)}{2}} l_{n-k+1} - l_2 \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-k)}{2}} l_{n-k}\right) \\
&\quad \times \frac{\left(\sqrt{\frac{b}{a}} l_1 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}} l_{n+1}\right)^{n-k-3}}{\left(l_0 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} l_n\right)^{n-k-2}},
\end{aligned}$$

$$\psi_4 = (-1)^n \frac{\kappa\left(\sqrt{\frac{b}{a}}l_1 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}} l_{n+1}\right)^{n-4}\left(l_2 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+2)}{2}} l_{n+2}\right)}{r\left(l_0 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} l_n\right)^{n-2}}$$

$$+\frac{\left(\sqrt{\frac{b}{a}}l_1 l_4 - l_2\sqrt{\frac{b}{a}}l_3\right)\sqrt{ab}}{\sqrt{\frac{b}{a}}l_1\varphi_n\left(l_0 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} l_n\right)} + \frac{\left(l_2 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+2)}{2}} l_{n+2}\right)}{\sqrt{\frac{b}{a}}l_1\varphi_n}$$

$$\times\sum_{k=2}^{n-3}\left[(-1)^{k-1}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}l_1\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(k+3)}{2}} l_{k+3} - l_2\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(k+2)}{2}} l_{k+2}\right)\right.$$

$$\left.\times\frac{\left(\sqrt{\frac{b}{a}}l_1 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}} l_{n+1}\right)^{k-2}}{\left(l_0 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} l_n\right)^k}\right],$$

$$\psi_j = (-1)^{n-j}\frac{\kappa}{r}\left(\frac{\left(l_2 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+2)}{2}} l_{n+2}\right)\left(\sqrt{\frac{b}{a}}l_1 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}} l_{n+1}\right)^{n-j}}{\left(l_0 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} l_n\right)^{n-j+2}}\right.$$

$$\left.-\frac{\left(\sqrt{\frac{b}{a}}l_1 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}} l_{n+1}\right)^{n-j+2}}{\left(l_0 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} l_n\right)^{n-j+3}}\right)$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\frac{b}{a}}l_1\varphi_n}\left[\sum_{k=1}^{n-j}(-1)^{n-j+k+1}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}l_1\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-k+1)}{2}} l_{n-k+1} - l_2\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-k)}{2}} l_{n-k}\right)\right.$$

$$\times\left(\frac{\left(l_2 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+2)}{2}} l_{n+2}\right)\left(\sqrt{\frac{b}{a}}l_1 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}} l_{n+1}\right)^{n-j-k}}{\left(l_0 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} l_n\right)^{n-j-k+2}}\right.$$

$$\left.-\frac{\left(\sqrt{\frac{b}{a}}l_1 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}} l_{n+1}\right)^{n-j-k+2}}{\left(l_0 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} l_n\right)^{n-j-k+3}}\right)$$

$$+\left(\sqrt{\frac{b}{a}}l_1\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(j)}{2}} l_j - l_2\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(j-1)}{2}} l_{j-1}\right)\left(\frac{l_0\sqrt{ab} - \sqrt{\frac{b}{a}}l_1 + r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-1)}{2}} l_{n-1}}{\left(l_0 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} l_n\right)^2}\right)$$

$$+\frac{\sqrt{\frac{b}{a}}l_1\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(j-1)}{2}}l_{j-1}-l_2\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(j-2)}{2}}l_{j-2}}{l_0-r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}}l_n}\Bigg],\quad j=5,6,\ldots,n-1,$$

$$\begin{aligned}\psi_n &= \frac{v}{r}\left(\frac{l_2-r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+2)}{2}}l_{n+2}}{\left(l_0-r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}}l_n\right)^2}-\frac{\left(\sqrt{\frac{b}{a}}l_1-r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}}l_{n+1}\right)^2}{\left(l_0-r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}}l_n\right)^3}\right)\\
&\quad+\frac{1}{\sqrt{\frac{b}{a}}l_1 g_n}\left[\left(\sqrt{\frac{b}{a}}l_1\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}}l_n-l_2\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-1)}{2}}l_{n-1}\right)\right.\\
&\quad\times\left(\frac{l_0\sqrt{ab}-\sqrt{\frac{b}{a}}l_1+r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-1)}{2}}l_{n-1}}{\left(l_0-r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}}l_n\right)^2}\right)\\
&\quad\left.+\frac{\sqrt{\frac{b}{a}}l_1\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-1)}{2}}l_{n-1}-l_2\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-2)}{2}}l_{n-2}}{l_0-r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}}l_n}\right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_n &= \sqrt{\frac{b}{a}}l_1-\frac{rl_2\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}}l_n}{\sqrt{\frac{b}{a}}l_1}\\
&\quad+r\sum_{k=1}^{n-2}\left(\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-k+1)}{2}}l_{n-k+1}-\frac{l_2\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-k)}{2}}l_{n-k}}{\sqrt{\frac{b}{a}}l_1}\right)\right.\\
&\qquad\left.\times\left(\frac{r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}}l_n-l_0}{\sqrt{\frac{b}{a}}l_1-r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}}l_{n+1}}\right)^k\right),\end{aligned}$$

ve

$$\kappa=\frac{\sqrt{\frac{b}{a}}l_1\varphi_n-\left(\frac{b}{a}\right)l_1^2+rl_2\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}}l_n}{\sqrt{\frac{b}{a}}l_1\varphi_n}.$$

İspat. Teoremin ispatı, $\mathcal{M}_n$ aşağıda verilen

$$\mathcal{M}_n = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\varphi_n'}{\sqrt{\frac{b}{a}}l_1} & \mu_{13} & \mu_{14} & \mu_{15} & \cdots & \mu_{1,n-1} & \mu_{1n} \\ 0 & 1 & -\frac{\sqrt{\frac{b}{a}}l_1}{\varphi_n} + \frac{rl_2\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}}l_n}{\sqrt{\frac{b}{a}}l_1\varphi_n} & \frac{\lambda_n}{\sqrt{\frac{b}{a}}l_1\varphi_n} & \frac{\lambda_{n-1}}{\sqrt{\frac{b}{a}}l_1\varphi_n} & \cdots & \frac{\lambda_5}{\sqrt{\frac{b}{a}}l_1\varphi_n} & \frac{\lambda_4}{\sqrt{\frac{b}{a}}l_1\varphi_n} \\ & 0 & 1 & & & & & 0 \\ & & 0 & 1 & & & & \\ & & & 0 & 1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & \ddots & 1 & \\ & & & & & & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

bir matris, burada

$$\lambda_m = -r\sqrt{\frac{b}{a}}l_1\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(m)}{2}} l_m + rl_2\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(m-1)}{2}} l_{m-1}, \quad m = 4, 5, \ldots, n,$$

$$\mu_{13} = -\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} l_n}{\sqrt{\frac{b}{a}}l_1} + \frac{\varphi_n'}{\sqrt{\frac{b}{a}}l_1\varphi_n}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}l_1 - \frac{rl_2\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} l_n}{\sqrt{\frac{b}{a}}l_1}\right),$$

$$\begin{aligned} \mu_{1j} \quad &= \quad -\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-j+3)}{2}} l_{n-j+3}}{\sqrt{\frac{b}{a}}l_1} \\ &\quad +\frac{\varphi_n'}{\sqrt{\frac{b}{a}}l_1\varphi_n}\left(r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-j+4)}{2}} l_{n-j+4} - \frac{rl_2\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-j+3)}{2}} l_{n-j+3}}{\sqrt{\frac{b}{a}}l_1}\right), j = 4, \ldots, n, \end{aligned}$$

$$\varphi_n' = \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(k)}{2}} l_k\left(\frac{r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} l_n - l_0}{\sqrt{\frac{b}{a}}l_1 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}} l_{n+1}}\right)^{n-k}, \tag{5.32}$$

$$\begin{aligned} \varphi_n \quad &= \quad \sqrt{\frac{b}{a}}l_1 - \frac{rl_2\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} l_n}{\sqrt{\frac{b}{a}}l_1} + r\sum_{k=1}^{n-2}\left(\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-k+1)}{2}} l_{n-k+1} - \frac{l_2\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n-k)}{2}} l_{n-k}}{\sqrt{\frac{b}{a}}l_1}\right)\right. \\ &\quad \left.\times\left(\frac{r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n)}{2}} l_n - l_0}{\sqrt{\frac{b}{a}}l_1 - r\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(n+1)}{2}} l_{n+1}}\right)^k\right), \end{aligned}$$

ve $\mathcal{K} = \text{diag}(l_1, \varphi_n)$ şeklinde tanımlanır ve (5.25), (5.27), (5.28) matrisleri dikkate alınırsa Teorem (5.1.2)'nin ispatına benzer şekilde ispat yapılabilir. □

Sonuç 5.2.2. (5.31) eşitliğinde a, b ve r'ye uygun değerler verildiği zaman literatürde yer alan diğer özel sayı dizileri ile ilgili circulant matrislerin tersleri elde edilir [22].

BÖLÜM 6

6.1. Sonuç ve Öneriler

Bu tez çalışmasında ilk olarak genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas $p-$sayı dizileri tanımlanarak bu sayı dizilerinin Binet formülleri, üreteç fonksiyonları ve Binom toplamları hesaplanmıştır. Daha sonra, elde edilen yeni dizilerin özel halleri olan $m-$genişletilmiş Fibonacci ve Lucas $p-$sayıları kullanılarak $m-$genişletilmiş Fibonacci ve Lucas $p-$fark dizileri elde edilmiş bu fark dizileri arasındaki bazı bağıntılar bulunmuştur. Ardından, elemanları iki periyotlu Fibonacci ve Lucas sayıları olan $r-$circulant matrislerin spektral normlarının alt ve üst sınırları, tersleri ve determinantları hesaplanmıştır. Ayrıca tez içerisinde yapılan çalışmalar neticesinde [39], [42] ve [43] numaralı yayınlar yapılmıştır.

Buradan yola çıkarak, elemanları genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas $p-$sayılarının özel halleri olan Toeplitz, Hankel ve benzeri matrislerin de spektral normları, tersleri ve determinantları da incelenebilir.

KAYNAKÇA

1. Fibonacci, L., “Liber Abaci”, 1202.

2. Stakhov, A., “The golden section in the measurement theory”, *Computers & Mathematics with Applications*, 17 (4-6), 613–638, 1989.

3. Koshy, T., “Fibonacci and Lucas numbers with applications”, *Wiley*, 2001.

4. Stakhov, A., “The golden section and modern harmony mathematics”, *Applications of Fibonacci numbers*, 7, 393–399, 1998.

5. Stakhov, A., Rozin, B., “The golden shofar”, *Chaos, Solitons & Fractals*, 26 (3), 677–684, 2005.

6. Horadam, A., “Basic properties of a certain generalized sequence of numbers”, *The Fibonacci Quarterly*, 3 (3), 161–176, 1965.

7. Horadam, A., “Applications of modified Pell numbers to representations”, *Ulam Quarterly*, 3 (1), 34–53, 1994.

8. Solak, S., “On the norms of circulant matrices with the Fibonacci and Lucas numbers”, *Applied Mathematics and Computation*, 160 (1), 125–132, 2005.

9. Yang, S.-l., “On the LU factorization of the Vandermonde matrix”, *Discrete applied mathematics*, 146 (1), 102–105, 2005.

10. Stakhov, A., Rozin, B., “Theory of Binet formulas for Fibonacci and Lucas $p-$numbers”, *Chaos, Solitons & Fractals*, 27 (5), 1162–1177, 2006.

11. Stakhov, A., Rozin, B., “The continuous functions for the Fibonacci and Lucas $p-$numbers”, *Chaos, Solitons & Fractals*, 28 (4), 1014–1025, 2006.

12. Falcon, S., Plaza, A., “On the Fibonacci $k-$numbers”, *Chaos, Solitons & Fractals*, 32 (5), 1615–1624, 2007.

13. Kocer, E. G., Tuglu, N., “The Binet Formulas for the Pell and Pell-Lucas $p-$Numbers”, *Ars Combinatoria*, 85, 3–17, 2007.

14. Kilic, E., “The Binet formula, sums and representations of generalized Fibonacci $p-$numbers”, *European Journal of combinatorics*, 29 (3), 701–711, 2008.

15. Kocer, E. G., Tuglu, N., Stakhov, A., “On the $m-$extension of the Fibonacci and Lucas $p-$numbers”, *Chaos, Solitons & Fractals*, 40 (4), 1890–1906, 2009.

16. Edson, M., Yayenie, O., “A New Generalization of Fibonacci Sequence & Extended Binet’s Formula”, *Integers*, 9 (6), 639–654, 2009.

17. Tasci, D., Firengiz, M. C., “Incomplete Fibonacci and Lucas $p-$numbers”, *Mathematical and Computer Modelling*, 52 (9), 1763–1770, 2010.

18. Cooper, C., “An identity for period k second order linear recurrence systems”, *Congr. Numer*, 200, 95–106, 2010.

19. Shen, S., Cen, J., “On the bounds for the norms of $r-$circulant matrices with the Fibonacci and Lucas numbers”, *Applied Mathematics and Computation*, 216 (10), 2891–2897, 2010.

20. Shen, S., Cen, J., “On the spectral norms of $r-$circulant matrices with the $k-$Fibonacci and $k-$Lucas numbers”, *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, 5 (12), 569–578, 2010.

21. Uslu, K., Taskara, N., Kose, H., “The Generalized $k-$Fibonacci and $k-$Lucas Numbers.”, *Ars Comb.*, 99, 25–32, 2011.

22. Shen, S.-Q., Cen, J.-M., Hao, Y., “On the determinants and inverses of circulant matrices with Fibonacci and Lucas numbers”, *Applied Mathematics and Computation*, 217 (23), 9790–9797, 2011.

23. Falcon, S., “On the $k-$Lucas numbers”, *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, 6 (21), 1039–1050, 2011.

24. Yayenie, O., “A note on generalized Fibonacci sequences”, *Applied Mathematics and Computation*, 217 (12), 5603–5611, 2011.

25. Tuglu, N., Kocer, E. G., Stakhov, A., “Bivariate Fibonacci like $p-$polynomials”, *Applied Mathematics and Computation*, 217 (24), 10239–10246, 2011.

26. Moya-Cessa, H., Soto-Eguibar, F., “Inverse of the Vandermonde and Vandermonde confluent matrices”, *arXiv preprint arXiv:1211.1566*, 2012.

27. Yazlik, Y., Taskara, N., “Spectral norm, Eigenvalues and Determinant of Circulant Matrix involving the Generalized $k-$Horadam numbers”, *Ars Combinatoria*, 104, 505–512, 2012.

28. Alp, M., Irmak, N., Szalay, L., “Two-periodic ternary recurrences and their Binet-formula”, *Acta Mathematica Universitatis Comenianae*, 81 (2), 227–232, 2012.

29. Yazlik, Y., Taskara, N., “A note on generalized $k-$Horadam sequence”, *Computers & Mathematics with Applications*, 63 (1), 36–41, 2012.

30. Yazlik, Y., Taskara, N., “On the norms of an $r-$circulant matrix with the generalized $k-$Horadam numbers”, *Journal of Inequalities and applications*, 2013 (1), 394, 2013.

31. Yazlik, Y., Taskara, N., “On the inverse of circulant matrix via generalized $k-$Horadam numbers”, *Applied Mathematics and Computation*, 223, 191–196, 2013.

32. Bahsi, M., Solak, S., “On the norms of $r-$circulant matrices with the hyper-Fibonacci and Lucas numbers”, *J. Math. Inequal*, 8 (4), 693–705, 2014.

33. Bilgici, G., “Two generalizations of Lucas sequence”, *Applied Mathematics and Computation*, 245, 526–538, 2014.

34. Bahsi, M., “On the norms of circulant matrices with the generalized Fibonacci and Lucas numbers”, *TWMS J. Pure Appl. Math.*, 6 (1), 84–92, 2015.

35. Ramırez, J. L., Sirvent, V. F., “A $q-$Analogue of the Bi-Periodic Fibonacci Sequence”, *Journal of Integer Sequences*, 19 (2), 3, 2016.

36. Kızılateş, C., Tuglu, N., “On the bounds for the spectral norms of geometric circulant matrices”, *Journal of Inequalities and Applications*, 2016 (1), 312, 2016.

37. Falcon, S., “The $k-$Fibonacci difference sequences”, *Chaos, Solitons & Fractals*, 87, 153–157, 2016.

38. Bahsi, M., “On the norms of $r-$circulant matrices with the hyperharmonic numbers”, *J. Math. Inequal*, 10 (2), 445–458, 2016.

39. Köme, C., Yazlik, Y., “On the spectral norms of $r-$circulant matrices with the biperiodic Fibonacci and Lucas numbers”, *Journal of inequalities and applications*, 2017 (1), 192, 2017.

40. Yang, J., Zhang, Z., “Some identities of the generalized Fibonacci and Lucas sequences”, *Applied Mathematics and Computation*, 339, 451–458, 2018.

41. Tan, E., “A $q-$Analog of the Bi-Periodic Lucas Sequence”, *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 Math. Stat.*, 67 (2), 220–228, 2018.

42. Yazlık, Y., Köme, C., Madhusudanan, V., “A new generalization of Fibonacci and Lucas $p-$numbers.”, *Journal of Computational Analysis & Applications*, 25 (4), 657–669, 2018.

43. Cahit, K., Yazlik, Y., “On the determinants and inverses of $r-$circulant matrices with biperiodic Fibonacci and Lucas numbers”, *Flomat*, 32 (10), 2018.

44. Coskun, A., Taskara, N., “A note on the bi-periodic Fibonacci and Lucas matrix sequences”, *Applied Mathematics and Computation*, 320, 400–406, 2018.

45. Vajda, S., Fibonacci and Lucas numbers, and the golden section: theory and applications, Courier Corporation, 1989.

46. Horadam, A., “Pell identities”, *Fibonacci Quart*, 9 (3), 245–252, 1971.

47. Halici, S., Daşdemir, A., “On some relationships among Pell, Pell-Lucas and modified Pell sequences”, *Fen Bilimleri Dergisi*, 1 (1), 141–145, 2010.

48. Horadam, A., “Jacobsthal representation numbers”, *Significance*, 2, 2–8, 1996.

49. http://mathonline.wikidot.com/vandermonde matrices.

50. Davis, P. J., “Circulant Matrices”, *John Wiley&Sons, New York*.

51. Horn, R. A., Johnson, C. R., Topics in matrix analysis, Cambridge UP, New York, 1991.

52. Mathias, R., “The spectral norm of a nonnegative matrix”, *Linear Algebra and its Applications*, 139, 269–284, 1990.

53. Yayenie, O., “New Identities for Generalized Fibonacci Sequences and New Generalization of Lucas Sequences.”, *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, 36 (5), 2012.

54. Türkmen, R., Gökbaş, H., “On the spectral norm of $r-$circulant matrices with the Pell and Pell-Lucas numbers”, *Journal of Inequalities and Applications*, 2016 (1), 65, 2016.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Cahit KÖME
Yabancı Dili : İngilizce
Çalıştığı Kurum : Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi
: Bilgi İşlem Daire Başkanlığı (2012 – $\cdots$)
E-Posta Adresi : cahitkome@gmail.com

Eğitim Durumu

Lisans : Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi Matematik Bölümü (2011)
Yüksek Lisans : Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi Matematik Bölümü (2013)

Yayınlar & Katıldığı Sempozyumlar

1. **Cahit KÖME and Yasin YAZLIK**, ”On the determinants and inverses of $r-$circulant matrices with biperiodic Fibonacci and Lucas numbers”, Filomat, Vol 32(10), 2018 (SCI-Expanded).

2. **Cahit KÖME and Yasin YAZLIK**, “On the spectral norms of $r-$circulant matrices with the biperiodic Fibonacci and Lucas numbers”, Journal of Inequalities and Applications, 2017.1:192, 2017 (SCI – Expanded).

3. **Yasin YAZLIK, Cahit KÖME and Vinay MADHUSUDANAN**, ”A new generalization of Fibonacci and Lucas $p-$numbers”, Journal of Computational Analysis & Applications, 25(4), 657–669 2018.

4. **Cahit KÖME and Yasin YAZLIK**, “On the $m-$extension of Fibonacci and Lucas $p-$difference sequences”, 1st International Symposium of Silk Road Academic Studies (ISSASS 2017), pp:379, Nevşehir.