T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

B-SPLINE KOLLOKASYON YÖNTEMİ İLE GENERALIZED REGULARIZED LONG WAVE (GRLW) DENKLEMİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ

Tezi Hazırlayan
Dilaver ŞAHİN

Tez Danışmanı
Doç. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Nisan 2018
NEVŞEHİR

T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

B-SPLINE KOLLOKASYON YÖNTEMİ İLE GENERALIZED REGULARIZED LONG WAVE (GRLW) DENKLEMİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ

Tezi Hazırlayan
Dilaver ŞAHİN

Tez Danışmanı
Doç. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Nisan 2018
NEVŞEHİR

Doç. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ danışmanlığında **Dilaver ŞAHİN** tarafından hazırlanan **" B-Spline Kollokasyon yöntemi ile Generalized Regularized Long Wave (GRLW) denkleminin Yaklaşık Çözümleri "** başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

27/04/2018

JÜRİ

Başkan	:	Doç. Dr. Ali GELİŞKEN
Üye	:	Doç. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ
Üye	:	Doç. Dr. Yasin YAZLIK

ONAY:

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun..3/5/2018..tarih ve..18-177... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

3/5/2018

Prof.Dr.Şahlan ÖZTÜRK

Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİM SAYFASI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada yer alan bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu ve bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Dilaver ŞAHİN

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim esnasında ve tez konusunun seçimi ile tezin çalışmaları süresince tüm bilgilerini benimle paylaşan, her türlü konuda desteğini benden esirgemeyen, tezimde büyük emeği olan ve gerçek bir dost olarak kazandığım Sayın Hocam Doç. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ' a,

Bu tez çalışmasına başlamama vesile olan ve hiçbir zaman emeklerini ödeyemeyeceğim, maddi ve manevi desteklerini benden esirgemeyen değerli babam Ziya ŞAHİN'E, annem Hatice ŞAHİN'e, eşim Ayşe ŞAHİN'e, teknik desteğinden dolayı kardeşim Recep ŞAHİN'e, ayrıca çocuklarım Yusuf Ziya, Hatice Zümranur ve Ahmet Selim'e,

Desteklerinden dolayı Doç. Dr. Yasin YAZLIK' a,

Teknik ve idari yardımlarından dolayı Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölüm Başkanlığı'na çok teşekkür ederim.

B-SPLINE KOLLOKASYON YÖNTEMİ İLE GENERALIZED REGULARIZED LONG WAVE (GRLW) DENKLEMİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Dilaver ŞAHİN

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Nisan 2018

ÖZET

Bu tez çalışmasında, GRLW (Genelleştirilmiş Düzenli Uzun Dalga) denkleminin yaklaşık çözümleri beşinci (kuintik) dereceden ve yedinci (septik) dereceden B-spline fonksiyonlar kullanılarak Kollokasyon yöntemi ile elde edilmiştir.

Bu tez çalışması beş bölümden oluşacak şekilde hazırlanmıştır. Tezin birinci bölümünde Sonlu Elemanlar Yöntemi, Spline Fonksiyonlar ve B- Spline Fonksiyonlar hakkında detaylı bilgiler verilmiştir.

Tezin ikinci bölümünde Kollokasyon yöntemi ile GRLW denklemi tanıtıldı, bunlar hakkında geniş bir literatür araştırması yapıldı. Tezin üçüncü ve dördüncü bölümü, çalışmanın esas amacına uygun olacak şekilde düzenlenmiştir.

Tezin üçüncü bölümünde GRLW denkleminin kuintik B-spline Kollokasyon sonlu eleman yöntemi ile yaklaşık çözümleri elde edilmiştir.

Tezin dördüncü bölümünde GRLW denkleminin septik B-spline Kollokasyon sonlu eleman yöntemi ile yaklaşık çözümleri bulunmuştur.

Tezin son bölümü olan beşinci bölümde ise elde edilen sonuçlar literatürde bulunan diğer sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Anahtar kelimeler*: GRLW *denklemi, Kollokasyon yöntemi, Sonlu eleman yöntemi, Spline, B-spline, Solitary dalgalar
Tez Danışman: Doç. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ
Sayfa sayısı: 68

NUMERICAL SOLUTIONS OF GENERALIZED REGULARIZED LONG WAVE (GRLW) EQUATION WİTH B-SPLİNE COLLOCATION METHOD

(M. Sc. Thesis)

Dilaver ŞAHİN

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ UNİVERSİTY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLİED SCİENCES

April 2018

ABSTRACT

In this thesis study, numerical solutions of the GRLW (Generalized Regularized Long Wave) equation have been obtained by using fifth (quintic) and seventh (septic) B-spline collocation method.

This thesis consist of five parts. In the first part, the detailed information about finite element method, spline and B-spline functions is given.

In the second part, collocation method and GRLW equation are introduced and also a detailed literature investigation is made. The third and fourth parts of the study are designed according to its main aim.

In the third part, numerical solutions of the GRLW equation with quintic B-spline collocation finite element method have been obtained.

In the fourth part, numerical solutions of the GRLW equation with septic B-spline collocation finite element method have been obtained.

In the fifth part, the last part of the thesis, the obtained results have been compared with other results in the literature.

Keywords: **GRLW *equation, Collocation method, Finite element method, Spline, B-spline, Solitary waves***
Thesis Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ
Page Number: 68

İÇİNDEKİLER

TABLOLAR LİSTESİ

ŞEKİLLER LİSTESİ

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

GRLW	Genelleştirilmis düzenli uzun dalga
GEW	Genelleştirilmiş eşit genişlikli dalga
RLW	Düzenli uzun dalga
GKdV	Genelleştirilmiş Korteweg-de Vries
KdV	Korteweg-de Vries
KdVB	Korteweg-de Vries Burgers'
GNLS	Genelleştirilmiş lineer olmayan Schrödinger
CMKdV	Kompleks modifiye edilmiş Korteweg-de Vries
BST	Boussinesq sistemi tipi
K-S	Kuramoto-Sivashinsky
W	Ağırlık fonksiyonu
$L_m(x)$	Lineer B-spline fonksiyon
U_N	Yaklaşık çözüm
I_1	Kütle
I_2	Momentum
I_3	Enerji
L_2 ve L_∞	Hata normları
$\gg$	Çok daha büyük
$\ll$	Çok daha küçük

1. BÖLÜM

GİRİŞ

Bu bölümde, tezde kullanılacak olan sonlu elemanlar yöntemi ile spline ve B-spline fonksiyonlar hakkında temel bilgiler verilecektir.

1. 1 Sonlu Elemanlar Yöntemi

Sonlu elemanlar kavramı ilk olarak Clough tarafından, 1960 yılında yayımlanan düzlem esnekliğindeki uygulamaları adlı makalesinde dile getirilmiştir [1]. Sonlu elemanlar yöntemi mühendislik ve öncelikle havacılık mühendisliği alanlarındaki değişik problemlerin çözümü için bir ihtiyaç olarak ortaya çıkmıştır. Sonlu elemanlar yöntemi karmaşık fiziksel özelliklere sahip problemleri daha basite indirgemek suretiyle, çözüm bulan bir yöntemdir. Günümüzde bilgisayarlardaki teknolojinin akıl almaz bir şekilde ilerlemesi sonlu elemanlar yönteminin çok hızlı bir şekilde gelişmesine olanak vermiştir. Uygulamalı matematikçiler, fizikçiler, mühendisler ve diğer bilim adamları bu yöntem ile ilgili çok sayıda çalışmalar yapmışlar ve yapmaya da devam etmektedirler [2].

Sonlu elemanlar yöntemlerinin; yapı mühendisliği, havacılık mühendisliği, uzay bilimleri, nükleer enerji mühendisliği, akışkanlar mekaniği, dinamik ve ısı iletim problemleri ve diğer mühendislik alanlarındaki problemlere başarılı bir şekilde uygulanabileceği görülmüştür. Sonlu elemanlar yönteminin diğer yöntemlere göre bazı avantajları aşağıda ifade edilmiştir [3];

- Düzensiz şekildeki yapıları ve diğer yöntemlerle modellenemeyen değişik karmaşık bölgeleri daha kolay bir şekilde modelleyebilmesi.
- Eleman denklemleri ayrı ayrı oluşturulduğundan değişik malzemelerden oluşan yapıları modelleyebilmesi.
- Çok değişik sınır şartlarıyla beraber kullanılabilmesi. Sınır koşullarının değişmesi halinde sonlu eleman modelinin değişmemesi.
- İhtiyaç duyulduğunda elemanların büyüklüklerinin değiştirilebilmesi.
- Sonlu eleman modelinin istenildiği zaman rahat bir şekilde değiştirilebilmesi.
- Bilgisayar programlama diline yatkın olması.

Sonlu elemanlar yönteminin bu avantajlarının yanında çözüm bölgesinin alt bölgelere ayrılması işleminin belirli bir tecrübeyi gerektirmesi, süreklilik şartlarının alt bölgelere uygulanmasında bir takım zorluklarla karşılaşılması ve bilgisayar programında veri girişi sırasında hatalar yapılması gibi dezavantajları da vardır [4].

Sonlu eleman yönteminin herhangi bir probleme uygulanmasında izlenecek temel adımlar aşağıda verilmiştir [5].

- Problemin çözüm bölgesinin ayrıklaştırılması (diskritizasyonu).
- Çözüm bölgesindeki tüm tipik elemanlar için eleman denklemlerinin türetilmesi.
- Verilen problemin denklemlerini elde etmek amacıyla eleman denklemlerinin birleştirilmesi.
- Problemin sınır şartlarının tatbik edilmesi.
- Birleştirilmiş denklemlerin çözümünün yapılması.
- Çözüm sonunda elde edilen sonuçların değerlendirilmesinin yapılması.

Sonlu elemanlar yönteminin integral formulasyonları genellikle varyasyonel ve ağırlıklı kalan yöntemleri olmak üzere iki farklı yoldan bulunabilir.

1. 2 Spline Fonksiyonlar

Yaklaşım yöntemleri temel bilim dallarının birçok alanında ve mühendislikte olduğu gibi matematik alanında da oldukça çok kullanılmaktadır. Genelde iki tip yaklaşım problemlerinden söz edilebiliriz. Birinci tip problemlerde bu yöntemler, eldeki mevcut verileri kullanarak bilinmeyen fonksiyonları yaklaşık olarak bulmak için kullanılır. İkinci tip yaklaşım ise değişik fiziksel problemler için bir operatör denklem tarafından temsil edilen matematiksel modellemelerden oluşur. Bu tarz problemler, özdeğer ve özvektör problemleri, integro-diferansiyel denklemler, adi ve kısmi diferansiyel denklemler için sınır değer problemleri barındırmaktadır. Yukarıda belirtilen iki problem tipinde de, en iyi çözümü elde etmek için iki önemli sorunla karşılaşmak mümkündür;

1) Yaklaşım koşullarını yerine getirecek uygun fonksiyonların sınıfını seçmek

2) Yaklaşımın etkili olması için iyi bir yöntem seçmek.

Bu yaklaşım yöntemlerinden polinom yaklaşımları önemli bir yere sahiptir. Ancak polinom yaklaşımı her zaman istenilen hassasiyette bir sonuç elde etmemize imkan vermeyebilir. Genellikle köşeleri keskin olan, yüksek mertebeden türevlerde hızlı değişim gösteren fonksiyonlara ve bazı düzgün fonksiyonlara bile yüksek dereceden polinomlar ile arzulanan hassasiyette bir yaklaşım yapmak mümkün olmayabilir. Nokta sayısı arttıkça yaklaşımda kullanılacak olan polinomun derecesi de artacaktır. Bu durum ise yapılacak bazı hesaplamalarda hatalara sebep olacaktır. Kaldı ki istenilen fonksiyonun belirli bir aralığının değişik kademelerinde farklı özelliklere sahip olacağından fonksiyona tek bir eğri ile yaklaşmak hatalı sonuçlar verebilir. Bu nedenlerden dolayı arka arkaya gelen iki veri arasından yüksek dereceden olmayan birinci, ikinci, üçüncü veya arzulanan dereceden polinom fonksiyonlar ile yaklaşımların yapıldığı spline interpolasyon yöntemini kullanmak daha uygundur.

Yukarıda ki ifadelerden de anlaşılacağı üzere spline interpolasyon yaklaşımı gerçekte parçalı polinom yaklaşımıdır. Yani spline fonksiyonlar, veri aralıklarını değişik sonlu sayıda alt aralıklara bölerek, birbirini örtmeyen her bir alt aralıkta daha küçük dereceden polinomlarla yaklaşım yapma mantığına dayanmaktadır.

Spline fonksiyonlar ifadesi ilk defa Schoenberg tarafından 1946 yılında gündeme getirilmiştir [6]. 1960'lı yıllara kadar yavaş bir gelişim gösteren spline fonksiyonlara daha sonraki dönemlerde ilgi oldukça artmıştır. Bu ilginin en önemli bir nedeni, bir çok yapısal özelliklere sahip olması, etkili yaklaşım gücü ve bilgisayarlarla yapılan hesaplamalardaki sağladığı kolaylıklardır. Depolanması, işlenmesi ve kullanılması daha kolay olan spline fonksiyonların dijital bilgisayarlardaki gelişmeler ile çok daha önemli hale geldiği görülmüştür [7]. Spline fonksiyonların hesaplamalarda sağladığı kolaylıklardan dolayı; interpolasyon, eğri uydurma, diferansiyel denklemlerin çözümünde, karmaşık geometrik nesnelerin matematiksel modellemesinde, eğri ve yüzey yaklaşımında sıkça kullanıldığı görülür.

Spline fonksiyonların sahip olduğu özellikler aşağıda verilmiştir [4].

- Spline fonksiyonlar smooth (düzgün) fonksiyonlardır,
- Spline fonksiyonların tamamı uygun tabanlara sahip sonlu boyutlu lineer uzaylardır,

- Spline fonksiyonların türevleri ve integralleri alınırsa yine spline fonksiyonlar elde edilir,
- Spline fonksiyonlar bilgisayarlarda işleme, hesaplama ve depolama açısından elverişli fonksiyonlardır,
- Nümerik analizde ve yaklaşım teorisinde spline fonksiyonların kullanılması halinde matrisler ortaya çıkacaktır. Bu matrisler uygun işaretleri ve determinant özellikleri açısından kolay hesaplanabilirler,
- Düşük dereceli spline fonksiyonlar oldukça esnektirler ve polinomlardaki gibi keskin salınımlar sergilemezler,
- Yaklaşım işlemi sonucunda elde edilen işaretler, katsayılar v.b. gibi yapılar polinomların yapıları ile de ilgilidir,
- Spline fonksiyonlar kullanıldığında, kararlılık ve yakınsaklığın incelenmesi daha basit olacaktır,
- Spline fonksiyonlar ve türevlerinin yaklaşık olarak aynı anda hesaplanması mümkündür.
- Yeteri kadar alt bölgelere ayrılmış $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı olan her sürekli fonksiyon, n. dereceden spline fonksiyonu ile iyi bir biçimde temsil edilmesi mümkündür.

1.3 B- Spline Fonksiyonlar

Spline fonksiyonların hesaplanmasıyla lineer yada lineer olmayan sistemler elde edilir ki, bu sistemler arzulanan parametrelerin hesaplanmasına izin vermeyecek şekilde bazen uygun şartlı olmayabilir. Ayrıca Spline yaklaşımları elde etme sürecinde sayısal kararsızlıklarla karşılaşmak mümkündür. Belirli derece ve düzgünlükteki tüm spline fonksiyonlar, aynı derece ve düzgünlükteki B-spline fonksiyonların bir lineer kombinasyonu şeklinde temsil edilebileceğinden, bu tür zorluklar “B- spline” (basis spline) olarak isimlendirilen farklı bir spline fonksiyon sınıfı ile giderilebilir [8]. Bu tür fonksiyonlara B-spline fonksiyon denmesinin sebebi, aynı dereceye sahip bütün spline fonksiyonlar kümesi için bir taban oluşturmasındandır. B- spline fonksiyonlar sayısal hesaplamalar için oldukça kullanışlıdır.

1. 3. 1 Lineer B- Spline fonksiyonlar

$[a, b]$ aralığında düzgün bir parçalanışı a= $x_0 < x_1 < \cdots < x_{N-1} < x_N = b$ olsun. $h = x_{m+1} - x_m$ olmak üzere x_m düğüm noktalarında $L_m(x)$ lineer B- spline fonksiyonlar $m = 0(1)N$ noktaları için;

$$L_m = \frac{1}{h}\begin{cases} (x_{m+1} - x) - 2(x_m - x), & [x_{m-1}, x_m] \\ (x_{m+1} - x), & [x_m, x_{m+1}] \\ 0, & \textit{diğer durumlar} \end{cases} \tag{1.3.1.1}$$

şeklinde tanımlanır [9]. $\{L_0(x), L_1(x), \ldots.., L_N(x)\}$ kümesi $a \leq x \leq b$ aralığında tanımlı fonksiyonlar için bir baz oluşturur. Lineer B- spline fonksiyon ve türevi $[x_{m-1}, x_{m+1}]$ aralığı dışında ki değeri sıfırdır. Şekil 1.1 de görüldüğü üzere her bir L_m B- spline fonksiyonu $[x_{m-1}, x_{m+1}]$ aralığında arda arda gelen iki elemanı örtmekte ve dolayısıyla her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu eleman L_m, L_{m+1} gibi iki lineer B- spline fonksiyonu tarafından örtülmektedir [4]. Bir $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı

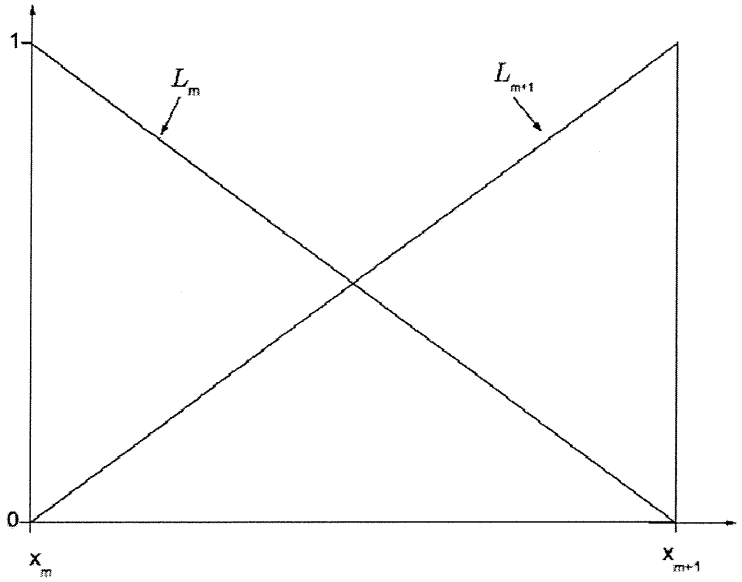
$$h\xi = x - x_m \qquad 0 \leq \xi \leq 1 \tag{1.3.1.2}$$

lokal koordinat dönüşümü yardımıyla $[0, 1]$ aralığına dönüşür. Böylelikle lineer B- spline fonksiyonlar $[0, 1]$ aralığında ξ türünden,

$$L_m = 1 - \xi$$

$$L_{m+1} = \xi \tag{1.3.1.3}$$

şeklinde bulunur.



Şekil 1.1. Lineer B- spline şekil fonksiyonları

1. 3. 2 Kuadratik B- Spline fonksiyonlar

$[a, b]$ aralığının bir düzgün parçalanışı $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N-1} < x_N = b$ olsun. $h = x_{m+1} - x_m$ olmak üzere x_m düğüm noktalarında $Q_m(x)$ kuadratik B- spline fonksiyonlar $m = -1(1)N$ noktaları için;

$$Q_m(x) = \frac{1}{h^2} \begin{cases} (x_{m+2} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^2 + 3(x_m - x)^2, & [x_{m-1}, x_m] \\ (x_{m+2} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^2, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+2} - x)^2, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ 0, & \textit{diğer durumlar} \end{cases} \tag{1.3.2.1}$$

şeklinde tanımlanır [9]. $\{Q_{-1}(x), Q_0(x), \ldots., Q_N(x)\}$ kümesi $a \leq x \leq b$ aralığında tanımlı fonksiyonlar için bir baz oluşturur. Kuadratik B- spline $Q_m(x)$ fonksiyonu ve türevi $[x_{m-1}, x_{m+2}]$ aralığı dışında sıfırdır. Şekil 1.2' de görüldüğü üzere her bir $Q_m(x)$ kuadratik B- spline fonksiyonu bu aralıkta ard arda gelen üç elamanı örtmekte, dolayısıyla her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu eleman Q_{m-1}, Q_m, Q_{m+1} gibi üç kuadratik B- spline fonksiyon tarafından örtülür [4]. $Q_m(x)$ ve birinci mertebeden türevinin düğüm noktalarındaki değerleri aşağıdaki Tablo 1.1' de gösterildi.

Tablo 1.1. $Q_m(x)$ ve $Q'_m(x)$ ' in düğüm noktalarındaki değerleri

x	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}
Q_m	0	1	1	0
hQ'_m	0	2	-2	0

Bir $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı, (1.3.1.2) lokal koordinat dönüşümü yardımıyla $[0, 1]$ aralığına dönüşür. Böylelikle kuadratik B- spline fonksiyonlar $[0, 1]$ aralığında ξ türünden,

$$Q_{m-1} = (1 - \xi)^2,$$

$$Q_m = 1 + 2\xi - 2\xi^2,$$

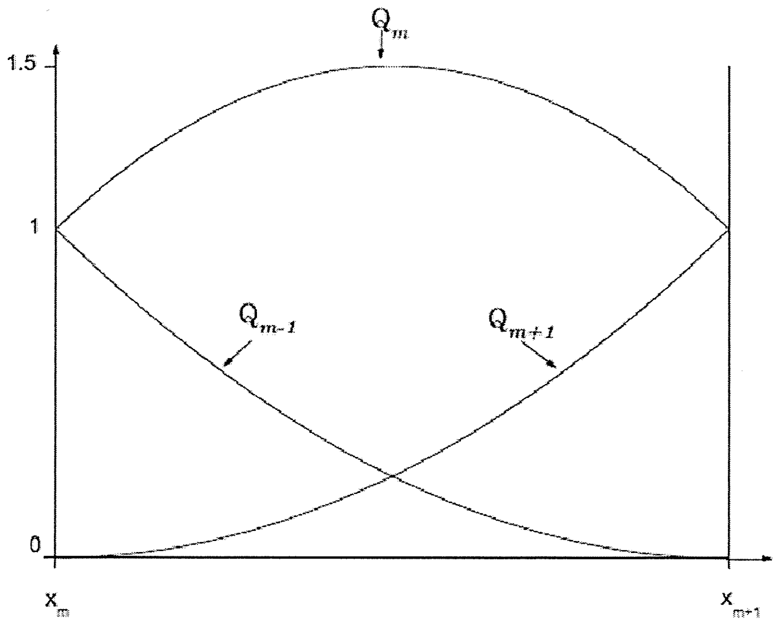
$$Q_m = \xi^2 \tag{1.3.2.2}$$

şeklinde bulunur. (1.3.2.2) kuadratik B-spline fonksiyonlar kullanılarak x_m düğüm noktalarında U_N yaklaşık çözümü ve x' e göre birinci mertebeden türevi δ_m eleman parametreleri cinsinden,

$$U_N(x_m, t) = U_m = \delta_{m-1} + \delta_m ,$$

$$U'_m = \frac{2}{h}(-\delta_{m-1} + \delta_m) \tag{1.3.2.3}$$

biçiminde yazılabilir.



Şekil 1.2. Kuadratik B-spline şekil fonksiyonları

1. 3. 3 Kübik B- Spline fonksiyonlar

$[a,b]$ aralığının bir düzgün parçalanışı $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N-1} < x_N = b$ olsun. $h = x_{m+1} - x_m$ olmak üzere x_m düğüm noktalarında $\emptyset_m(x)$ kübik B- spline fonksiyonlar $m = -1(1)N + 1$ noktaları için;

$$\emptyset_m(x) = \frac{1}{h^3}\begin{cases} (x - x_{m-2})^3, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ h^3 + 3h^2(x - x_{m-1}) + 3h(x - x_{m-1})^2 - 3(x - x_{m-1})^3, & [x_{m-1}, x_m] \\ h^3 + 3h^2(x_{m+1} - x) + 3h(x_{m+1} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^3, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+2} - x)^3, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ 0, & diğer\ durumlar \end{cases} \tag{1.3.3.1}$$

şeklinde ifade edilir [9]. $\{\emptyset_{-1}(x), \emptyset_0(x), \ldots, \emptyset_N(x), \emptyset_{N+1}(x)\}$ kümesi $a \leq x \leq b$ aralığında tanımlı fonksiyonlar için bir baz oluşturur. Kübik B- spline $\emptyset_m(x)$ fonksiyonu ve türevleri $[x_{m-2}, x_{m+2}]$ aralığı dışında sıfırdır. Şekil 1.3'te görüldüğü üzere her bir $\emptyset_m(x)$ kübik B-spline fonksiyonu $[x_{m-2}, x_{m+2}]$ aralığında ard arda gelen dört elamanı örtmekte ve dolayısıyla her bir $[x_m, x_{m+1}]$ aralığındaki sonlu eleman $\emptyset_{m-1}, \emptyset_m, \emptyset_{m+1}, \emptyset_{m+2}$ gibi dört kübik B-spline fonksiyonu tarafından örtülmektedir [4]. $\emptyset_m(x)$ ve ikinci mertebeye kadar olan $\emptyset_m'(x)$ ve $\emptyset_m''(x)$ türevlerinin düğüm noktalardaki değerleri aşağıdaki Tablo 1. 2' de gösterildi.

Tablo 1.2. $\emptyset_m(x), \emptyset_m'(x)$ ve $\emptyset_m''(x)$ ' in düğüm noktalarındaki değerleri

x	x_{m-2}	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}
$\emptyset_m$	0	1	4	1	0
$h\emptyset_m'$	0	3	0	-3	0
$h^2\emptyset_m''$	0	6	-12	6	0

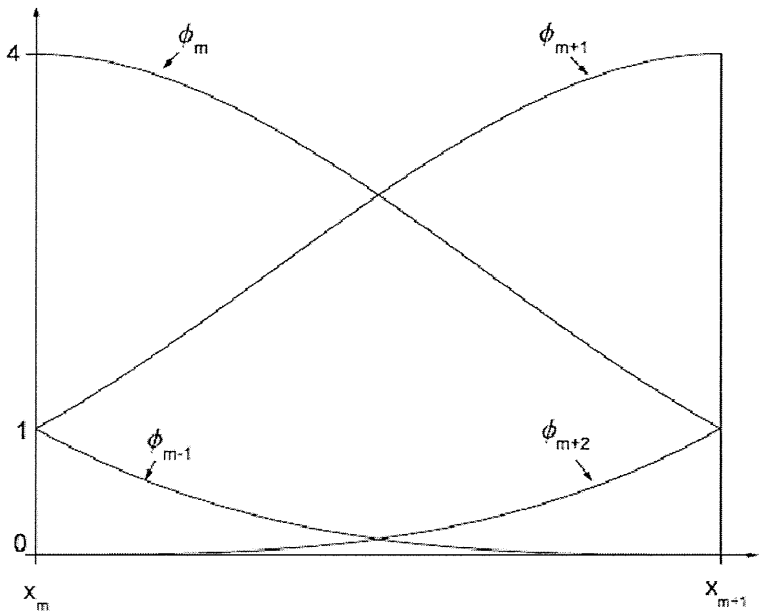
Bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elaman (1.3.1.2) lokal koordinat dönüşümü vasıtasıyla $[0,1]$ aralığına dönüşecektir. Böylelikle bir $[x_m, x_{m+1}]$ aralığını örten $\emptyset_{m-1}, \emptyset_m, \emptyset_{m+1}, \emptyset_{m+2}$ kübik B- spline fonksiyonlar $[0,1]$ aralığında ξ türünden,

$$\emptyset_{m-1} = (1-\ \xi)^3,$$
$$\emptyset_m = 1 + 3(1-\xi) + 3(1-\xi)^2 - 3(1-\xi)^3,$$
$$\emptyset_{m+1} = 1 + 3\xi + 3\xi^2 - 3\xi^3,$$
$$\emptyset_{m+2} = \xi^3 \qquad (1.3.3.2)$$

şeklinde bulunur. (1.3.3.2) kübik B- spline fonksiyonlar kullanılarak x_m düğüm noktasında U_N yaklaşık çözümü ve $x'e$ göre ikinci mertebeye kadar olan türevleri δ_m eleman parametreleri cinsinden,

$$U_N(x_m, t) = U_m = \delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1},$$
$$U_m' = \frac{3}{h}(-\delta_{m-1} + \delta_{m+1}),$$
$$U_m'' = \frac{6}{h^2}(\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1}) \qquad (1.3.3.3)$$

biçiminde yazılabilir.



Şekil 1.3. Kübik B-spline şekil fonksiyonları

1. 3. 4 Kuartik B- Spline fonksiyonlar

$[a, b]$ aralığının bir düzgün parçalanışı $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N-1} < x_N = b$ olsun. $h = x_{m+1} - x_m$ olmak üzere x_m düğüm noktalarında $\emptyset_m(x)$ kuartik B- spline fonksiyonlar $m = -2(1)N + 1$ noktaları için;

$$
\emptyset_m(x) = \frac{1}{h^4}\begin{cases}
(x - x_{m-2})^4, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\
(x - x_{m-2})^4 - 5(x - x_{m-1})^4, & [x_{m-1}, x_m] \\
(x - x_{m-2})^4 - 5(x - x_{m-1})^4 + 10(x - x_m)^4, & [x_m, x_{m+1}] \\
(x_{m+3} - x)^4 - 5(x_{m+2} - x)^4, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\
(x_{m+3} - x)^4, & [x_{m+2}, x_{m+3}] \\
0, & diğer\ durumlar
\end{cases}
\tag{1.3.4.1}
$$

şeklinde tanımlanır [9]. $\{\emptyset_{-2}(x), \emptyset_{-1}(x) \ldots, \emptyset_N(x), \emptyset_{N+1}(x)\}$ kümesi $a \leq x \leq b$ aralığında tanımlı fonksiyonlar için bir baz oluşturur. Kuartik B- spline $\emptyset_m(x)$ fonksiyonu ve türevleri $[x_{m-2}, x_{m+3}]$ aralığı dışında sıfırdır. Şekil 1. 4' de görüldüğü üzere her bir $\emptyset_m(x)$ kuartik B- spline fonksiyonu $[x_{m-2}, x_{m+2}]$ aralığında ard arda gelen beş elamanı örtmekte ve dolayısıyla her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu eleman $\emptyset_{m-2}, \emptyset_{m-1}, \emptyset_m, \emptyset_{m+1}, \emptyset_{m+2}$ gibi beş kuartik B- spline fonksiyonu tarafından örtülmektedir [4]. $\emptyset_m(x)$ ve üçüncü mertebeye kadar olan $\emptyset'_m(x), \emptyset''_m(x)$ *ve* $\emptyset'''_m(x)$ türevlerinin düğüm noktalardaki değerleri aşağıdaki Tablo 1.3' te gösterildi.

Tablo 1.3. $\emptyset_m(x), \emptyset'_m(x), \emptyset''_m(x)$ ve $\emptyset'''_m(x)$ ' in düğüm noktalarındaki değerleri

x	x_{m-2}	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}	x_{m+3}
$\emptyset_m$	0	1	11	11	1	0
$h\emptyset'_m$	0	4	12	-12	-4	0
$h^2\emptyset''_m$	0	12	-12	-12	12	0
$h^3\emptyset'''_m$	0	24	-72	72	-24	0

Bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elaman (1.3.1.2) lokal koordinat dönüşümü yardımıyla $[0,1]$ aralığına dönüşür. Böylelikle bir $[x_m, x_{m+1}]$ aralığını örten $\emptyset_{m-2}, \emptyset_{m-1}, \emptyset_m, \emptyset_{m+1}, \emptyset_{m+2}$ kuartik B- spline fonksiyonlar $[0,1]$ aralığında ξ türünden,

$$
\begin{aligned}
\emptyset_{m-2} &= 1 - 4\xi + 6\xi^2 - 4\xi^3 + \xi^4, \\
\emptyset_{m-1} &= 11 - 12\xi - 6\xi^2 + 12\xi^3 - \xi^4, \\
\emptyset_m &= 11 + 12\xi - 6\xi^2 - 12\xi^3 + \xi^4 \\
\emptyset_{m+1} &= 1 + 4\xi + 6\xi^2 + 4\xi^3 - \xi^4, \\
\emptyset_{m+2} &= \xi^4
\end{aligned}
\tag{1.3.4.2}
$$

şeklinde bulunur. (1.3.4.2) kuartik B- spline fonksiyonlar kullanılarak x_m düğüm noktasında U_N yaklaşık çözümü ve x' e göre üçüncü mertebeye kadar olan türevleri δ_m eleman parametreleri cinsinden,

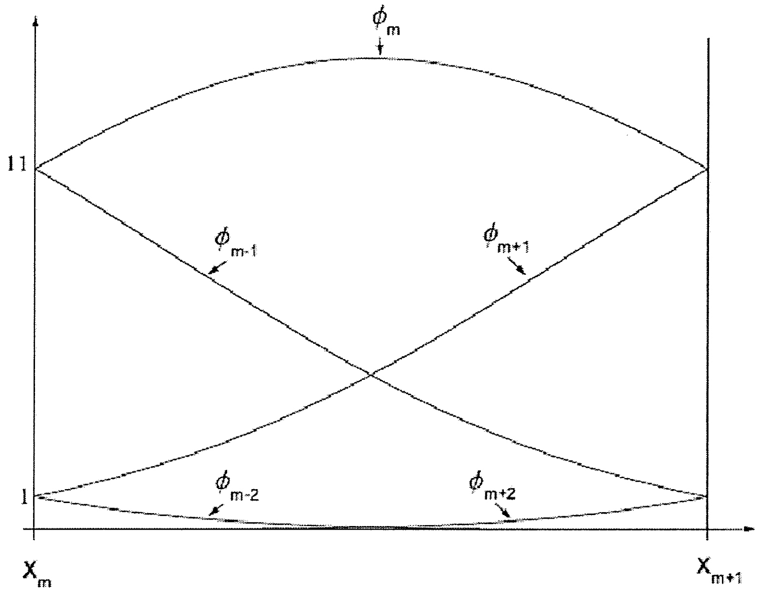
$$U_N(x_m, t) \ = U_m = \delta_{m-2} + 11\delta_{m-1} + 11\delta_m + \delta_{m+1},$$

$$U_m' \ = \frac{4}{h}(-\delta_{m-2} - 3\delta_{m-1} + 3\delta_m + \delta_{m+1}),$$

$$U_m'' \ = \frac{1}{h^2}(\delta_{m-2} - \delta_{m-1} - \delta_m + \delta_{m+1}),$$

$$U_m''' = \frac{24}{h^3}(-\delta_{m-2} + 3\delta_{m-1} - 3\delta_m + \delta_{m+1}) \qquad (1.3.4.3)$$

biçiminde yazılabilir.



Şekil 1.4. Kuartik B- spline şekil fonksiyonları

1. 3. 5 Kuintik B- Spline fonksiyonlar

$[a, b]$ aralığının bir düzgün parçalanışı $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N-1} < x_N = b$ olsun. $h = x_{m+1} - x_m$ olmak üzere x_m düğüm noktalarında $\emptyset_m(x)$ kuintik B- spline fonksiyonlar $m = -2(1)N + 2$ noktaları için;

$$
\emptyset_m(x)=\frac{1}{h^5}\begin{cases}(x-x_{m-3})^5, & [x_{m-3},x_{m-2}]\\ (x-x_{m-3})^5-6(x-x_{m-2})^5, & [x_{m-2},x_{m-1}]\\ (x-x_{m-3})^5-6(x-x_{m-2})^5+15(x-x_{m-1})^5, & [x_{m-1},x_m]\\ (x-x_{m-3})^5-6(x-x_{m-2})^5+15(x-x_{m-1})^5+20(x-x_m)^5, & [x_m,x_{m+1}]\\ (x-x_{m-3})^5-6(x-x_{m-2})^5+15(x-x_{m-1})^5 & \\ -20(x-x_m)^5+\ 15(x-x_{m+1})^5, & [x_{m+1},x_{m+2}]\\ (x-x_{m-3})^5-6(x-x_{m-2})^5+15(x-x_{m-1})^5-20(x-x_m)^5 & \\ +15(x-x_{m+1})^5-6(x-x_{m+2})^5, & [x_{m+2},x_{m+3}]\\ 0, & diğer\ durumlar\end{cases}
\tag{1.3.5.1}
$$

şeklinde tanımlanır [9]. $\{\emptyset_{-2}(x),\emptyset_{-1}(x),\dots,\emptyset_N(x),\emptyset_{N+1}(x),\emptyset_{N+2}(x)\}$ kümesi $a\le x\le b$ aralığında tanımlı fonksiyonlar için bir baz oluşturur. Kuintik B- spline $\emptyset_m(x)$ fonksiyonu ve türevleri $[x_{m-3},x_{m+3}]$ aralığı dışında sıfırdır. Şekil 1. 5' te görüldüğü üzere her bir $\emptyset_m(x)$ kuintik B- spline fonksiyonu $[x_{m-3},x_{m+3}]$ aralığında ard arda gelen altı elamanı örtmekte ve dolayısıyla her bir $[x_m,x_{m+1}]$ sonlu eleman $\emptyset_{m-2},\emptyset_{m-1},\emptyset_m,\emptyset_{m+1},\emptyset_{m+2},\emptyset_{m+3}$ gibi altı kuintik B- spline fonksiyonu tarafından örtülmektedir [4]. $\emptyset_m(x)$ ve dördüncü mertebeye kadar olan $\emptyset_m'(x)$, $\emptyset_m''(x)$, $\emptyset_m'''(x)$ ve $\emptyset_m^{(iv)}(x)$ türevlerinin düğüm noktalardaki değerleri aşağıdaki Tablo 1. 4' de gösterildi.

Tablo 1.4. $\emptyset_m(x),\emptyset_m'(x),\emptyset_m''(x),\emptyset_m'''(x)$ ve $\emptyset_m^{(iv)}(x)$ 'in düğüm noktalarındaki değerleri

x	x_{m-3}	x_{m-2}	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}	x_{m+3}
$\emptyset_m$	0	1	26	66	26	1	0
$h\emptyset_m'$	0	5	50	0	-50	-5	0
$h^2\emptyset_m''$	0	20	40	-120	40	20	0
$h^3\emptyset_m'''$	0	60	-120	0	120	-60	0
$h^4\emptyset_m^{(iv)}$	0	120	-480	720	-480	120	0

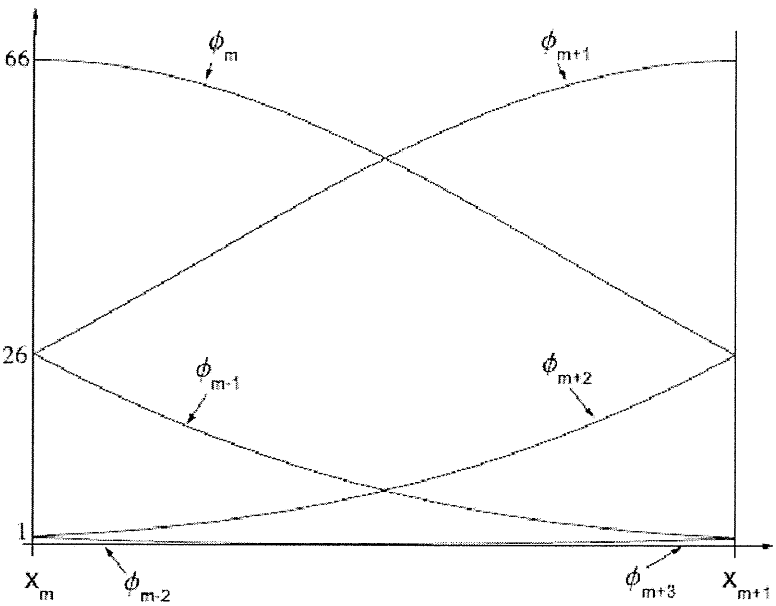
Bir $[x_m,x_{m+1}]$ sonlu elaman (1.3.1.2) lokal koordinat dönüşümü yardımıyla $[0,1]$ aralığına dönüşecektir. Böylelikle kuintik B-spline fonksiyonlar $[0,1]$ aralığında ξ türünden,

$$\emptyset_{m-2} = 1 - 5\xi + 10\xi^2 - 10\xi^3 + 5\xi^4 - \xi^5,$$
$$\emptyset_{m-1} = 26 - 50\xi + 20\xi^2 + 20\xi^3 - 20\xi^4 + 5\xi^5,$$
$$\emptyset_m = 66 - 60\xi^2 + 30\xi^4 - 10\xi^5,$$
$$\emptyset_{m+1} = 26 + 50\xi + 20\xi^2 - 20\xi^3 - 20\xi^4 + 10\xi^5,$$
$$\emptyset_{m+2} = 1 + 5\xi + 10\xi^2 + 10\xi^3 + 5\xi^4 - 5\xi^5,$$
$$\emptyset_{m+3} = \xi^5 \qquad (1.3.5.2)$$

şeklinde bulunur. (1.3.5.2) kuintik B- spline fonksiyonlar kullanılarak x_m düğüm noktasında U_N yaklaşık çözümü ve x'e göre dördüncü mertebeye kadar olan türevleri δ_m eleman parametreleri cinsinden,

$$U_N(x_m, t) = U_m = \delta_{m-2} + 26\delta_{m-1} + 66\delta_m + 26\delta_{m+1} + \delta_{m+2},$$
$$U'_m = \frac{5}{h}(-\delta_{m-2} - 10\delta_{m-1} + 10\delta_{m+1} + \delta_{m+2}),$$
$$U''_m = \frac{20}{h^2}(\delta_{m-2} + 2\delta_{m-1} - 6\delta_m + 2\delta_{m+1} + \delta_{m+2}),$$
$$U'''_m = \frac{60}{h^3}(-\delta_{m-2} + 2\delta_{m-1} - 2\delta_{m+1} + \delta_{m+2}),$$
$$U^{(iv)}_m = \frac{120}{h^4}(\delta_{m-2} - 4\delta_{m-1} + 6\delta_m - 4\delta_{m+1} + \delta_{m+2}) \qquad (1.3.5.3)$$

şeklinde yazılabilir.



Şekil 1.5. Kuintik B- spline şekil fonksiyonları

1. 3. 6 Sektik B- Spline fonksiyonlar

$[a, b]$ aralığının bir düzgün parçalanışı $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N-1} < x_N = b$ olsun. $h = x_{m+1} - x_m$ olmak üzere x_m düğüm noktalarında $\emptyset_m(x)$ sektik B- spline fonksiyonlar $m = -3(1)N + 2$ noktaları için;

$$\emptyset_m(x) = \frac{1}{h^6}\begin{cases} (x - x_{m-3})^6, & [x_{m-3}, x_{m-2}] \\ (x - x_{m-3})^6 - 7(x - x_{m-2})^6 & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ (x - x_{m-3})^6 - 7(x - x_{m-2})^6 + 21(x - x_{m-1})^6, & [x_{m-1}, x_m] \\ (x - x_{m-3})^6 - 7(x - x_{m-2})^6 + 21(x - x_{m-1})^6 - 35(x - x_m)^6 & [x_m, x_{m+1}] \\ (x - x_{m+4})^6 - 7(x - x_{m+3})^6 + 21(x - x_{m+2})^6, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ (x - x_{m+4})^6 - 7(x - x_{m+3})^6, & [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ (x - x_{m+4})^6, & [x_{m+3}, x_{m+4}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \tag{1.3.6.1}$$

şeklinde tanımlanır [9]. $\{\emptyset_{-3}(x), \emptyset_{-2}(x), \ldots, \emptyset_N(x), \emptyset_{N+1}(x), \emptyset_{N+2}(x)\}$ kümesi $a \leq x \leq b$ aralığında tanımlı fonksiyonlar için bir baz oluşturur. Sektik B- spline $\emptyset_m(x)$ fonksiyonu ve türevleri $[x_{m-3}, x_{m+4}]$ aralığı dışında sıfırdır. Şekil 1. 6' da görüldüğü üzere her bir $\emptyset_m(x)$ sektik B-spline fonksiyonu $[x_{m-3}, x_{m+4}]$ aralığında ard arda gelen yedi elamanı örtmekte ve dolayısıyla her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu eleman $\emptyset_{m-3}, \emptyset_{m-2}, \emptyset_{m-1}, \emptyset_m, \emptyset_{m+1}, \emptyset_{m+2}$ ve $\emptyset_{m+3}$ gibi yedi sektik B-spline fonksiyonu tarafından örtülmektedir [4]. $\emptyset_m(x)$ ve beşinci mertebeye kadar olan $\emptyset'_m(x)$, $\emptyset''_{\mathrm{m}}(\mathrm{x})$, $\emptyset'''_m(x)$, $\emptyset_m^{(iv)}(x)$ ve $\emptyset_m^{(v)}(x)$ türevlerinin düğüm noktalardaki değerleri aşağıdaki Tablo 1. 5' te gösterildi. Bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elaman (1.3.1.2) lokal koordinat dönüşümü yardımıyla $[0, 1]$ aralığına dönüşür.

Tablo 1.5. $\emptyset_m(x), \emptyset'_m(x), \emptyset''_m(x), \emptyset'''_m(x), \emptyset_m^{(iv)}(x)$ ve $\emptyset_m^{(v)}(x)$ 'in düğüm noktalarındaki değerleri

x	x_{m-3}	x_{m-2}	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}	x_{m+3}	x_{m+4}
$\emptyset_m$	0	1	57	302	302	57	1	0
$h\emptyset'_m$	0	6	150	240	-240	-150	-6	0
$h^2\emptyset''_m$	0	30	270	-300	-300	270	30	0
$h^3\emptyset'''_m$	0	120	120	-960	960	-120	-120	0
$h^4\emptyset_m^{(iv)}$	0	360	-1080	720	720	-1080	360	0
$h^5\emptyset_m^{(v)}$	0	720	-3600	7200	7200	3600	-720	0

Böylelikle sektik B- spline fonksiyonlar $[0,1]$ aralığında ξ türünden,

$$\emptyset_{m-3} = 1 - 6\xi + 15\xi^2 - 20\xi^3 + 15\xi^4 - 6\xi^5 + \xi^6,$$

$$\emptyset_{m-2} = 57 - 150\xi + 135\xi^2 - 20\xi^3 - 45\xi^4 + 30\xi^5 - 6\xi^6,$$

$$\emptyset_{m-1} = 302 + 240\xi - 150\xi^2 + 160\xi^3 + 30\xi^4 - 60\xi^5 + 15\xi^6,$$

$$\emptyset_m = 302 + 240\xi - 150\xi^2 - 160\xi^3 + 30\xi^4 + 60\xi^5 - 20\xi^6,$$

$$\emptyset_{m+1} = 57 + 150\xi + 135\xi^2 + 20\xi^3 - 45\xi^4 - 30\xi^5 + 15\xi^6,$$

$$\emptyset_{m+2} = 1 + 6\xi + 15\xi^2 + 20\xi^3 + 15\xi^4 + 6\xi^5 - 6\xi^6,$$

$$\emptyset_{m+3} = \xi^6 \tag{1.3.6.2}$$

şeklinde bulunur. (1.3.6.2) sektik B- spline fonksiyonlar kullanılarak x_m düğüm noktasında U_N yaklaşık çözümü ve $x'e$ göre beşinci mertebeye kadar olan türevleri δ_m eleman parametreleri cinsinden,

$$U_N(x_m, t) = U_m = \delta_{m-3} + 57\delta_{m-2} + 302\delta_{m-1} + 302\delta_m + 57\delta_{m+1} + \delta_{m+2},$$

$$U'_m = \frac{6}{h}(-\delta_{m-3} - 25\delta_{m-2} - 40\delta_{m-1} + 40\delta_m + 25\delta_{m+1} + \delta_{m+2}),$$

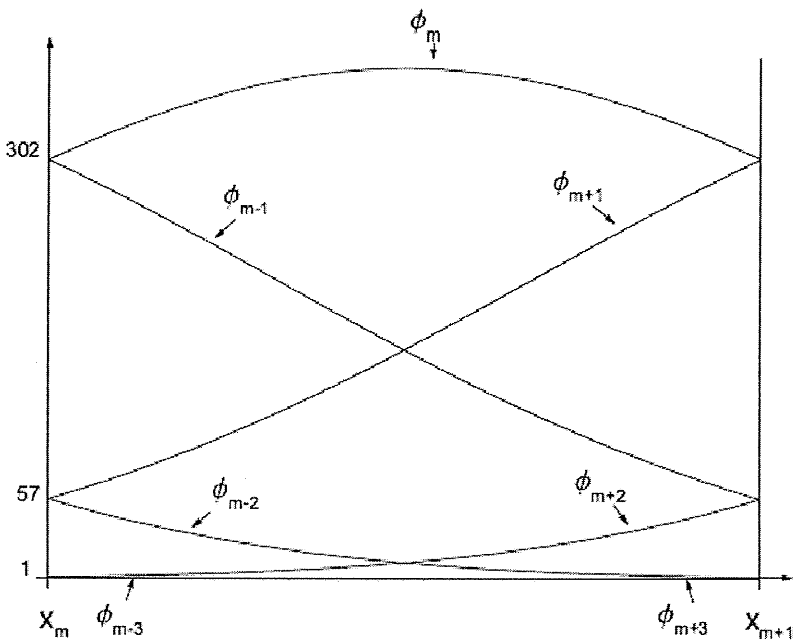
$$U''_m = \frac{30}{h^2}(\delta_{m-3} + 9\delta_{m-2} - 10\delta_{m-1} - 10\delta_m + 9\delta_{m+1} + \delta_{m+2}),$$

$$U_m''' = \frac{120}{h^3}(-\delta_{m-3} - \delta_{m-2} + 8\delta_{m-1} - 8\delta_m + \delta_{m+1} + \delta_{m+2}),$$

$$U_m^{(iv)} = \frac{360}{h^4}(\delta_{m-3} - 3\delta_{m-2} + 2\delta_{m-1} + 2\delta_m - 3\delta_{m+1} + \delta_{m+2})$$

$$U_m^{(v)} = \frac{720}{h^5}(-\delta_{m-3} + 5\delta_{m-2} - 10\delta_{m-1} + 10\delta_m - 5\delta_{m+1} + \delta_{m+2}) \qquad (1.3.6.3)$$

biçiminde ifade edilebilir.



Şekil 1.6. Sektik B-spline şekil fonksiyonları

1. 3. 7 Septik B- Spline fonksiyonlar

$[a,b]$ aralığının bir düzgün parçalanışı $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N-1} < x_N = b$ olsun. $h = x_{m+1} - x_m$ olmak üzere x_m düğüm noktalarında $\emptyset_m(x)$ septik B- spline fonksiyonlar $m = -3(1)N + 3$ noktaları için;

$$\emptyset_m(x) = \frac{1}{h^7}\begin{cases} (x - x_{m-4})^7, & [x_{m-4}, x_{m-3}] \\ (x - x_{m-4})^7 - 8(x - x_{m-3})^7, & [x_{m-3}, x_{m-2}] \\ (x - x_{m-4})^7 - 8(x - x_{m-3})^7 + 28(x - x_{m-2})^7, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ (x - x_{m-4})^7 - 8(x - x_{m-3})^7 + 28(x - x_{m-2})^7 - 56(x - x_{m-1})^7, & [x_{m-1}, x_m] \\ (x_{m+4} - x)^7 - 8(x_{m+3} - x)^7 + 28(x_{m+2} - x)^7 - 56(x_{m+1} - x)^7, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+4} - x)^7 - 8(x_{m+3} - x)^7 + 28(x_{m+2} - x)^7, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ (x_{m+4} - x)^7 - 8(x_{m+3} - x)^7, & [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ (x_{m+4} - x)^7, & [x_{m+3}, x_{m+4}] \\ 0, & \textit{diğer durumlar} \end{cases}$$

(1.3.7.1)

şeklinde tanımlanır [9]. $\{\emptyset_{-3}(x), \emptyset_{-2}(x), \dots, \emptyset_{N+1}(x), \emptyset_{N+2}(x), \emptyset_{N+3}(x)\}$ kümesi $a \leq x \leq b$ aralığında tanımlı fonksiyonlar için bir baz oluşturur. Septik B- spline $\emptyset_m(x)$ fonksiyonu ve türevleri $[x_{m-4}, x_{m+4}]$ aralığı dışında sıfırdır. Şekil 1.7'de görüldüğü üzere her bir $\emptyset_m(x)$ septik B- spline fonksiyonu $[x_{m-4}, x_{m+4}]$ aralığında ard arda gelen sekiz elamanı örtmekte ve dolayısıyla her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu eleman $\emptyset_{m-3}, \emptyset_{m-2}, \emptyset_{m-1}, \emptyset_m, \emptyset_{m+1}, \emptyset_{m+2}, \emptyset_{m+3}$ ve $\emptyset_{m+4}$ gibi sekiz septik B- spline fonksiyonu tarafından örtülmektedir [4]. $\emptyset_m(x)$ ve altıncı mertebeye kadar olan $\emptyset'_m(x)$, $\emptyset''_m(x), \emptyset'''_m(x)$, $\emptyset^{(iv)}_m(x)$, $\emptyset^{(v)}_m(x)$ve $\emptyset^{(vi)}_m(x)$ türevlerinin düğüm noktalardaki değerleri Tablo 1. 6' da gösterildi.

Tablo 1.6. $\emptyset_m(x), \emptyset'_m(x), \emptyset''_m(x), \emptyset'''_m(x), \emptyset^{(iv)}_m(x), \emptyset^{(v)}_m(x)$ ve $\emptyset^{(vi)}_m(x)$ ' in düğüm noktalarındaki değerleri

x	x_{m-4}	x_{m-3}	x_{m-2}	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}	x_{m+3}	x_{m+4}
$\emptyset_m$	0	1	120	1191	2416	1191	120	1	0
$h\emptyset'_m$	0	-7	-392	-1715	0	1715	392	7	0
$h^2\emptyset''_m$	0	42	1008	630	-3360	630	1008	42	0
$h^3\emptyset'''_m$	0	-210	-1680	3990	0	-3990	1680	210	0
$h^4\emptyset^{(iv)}_m$	0	840	0	-7560	13440	-7560	0	840	0
$h^5\emptyset^{(v)}_m$	0	-2520	10080	-12600	0	12600	-10080	2520	0
$h^6\emptyset^{(vi)}_m$	0	5040	-30240	75600	-100800	75600	-30240	5040	0

Bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elaman (1.3.1.2) lokal koordinat dönüşümü yardımıyla $[0,1]$ aralığına dönüşür. Böylelikle septik B- spline fonksiyonlar $[0,1]$ aralığında ξ türünden,

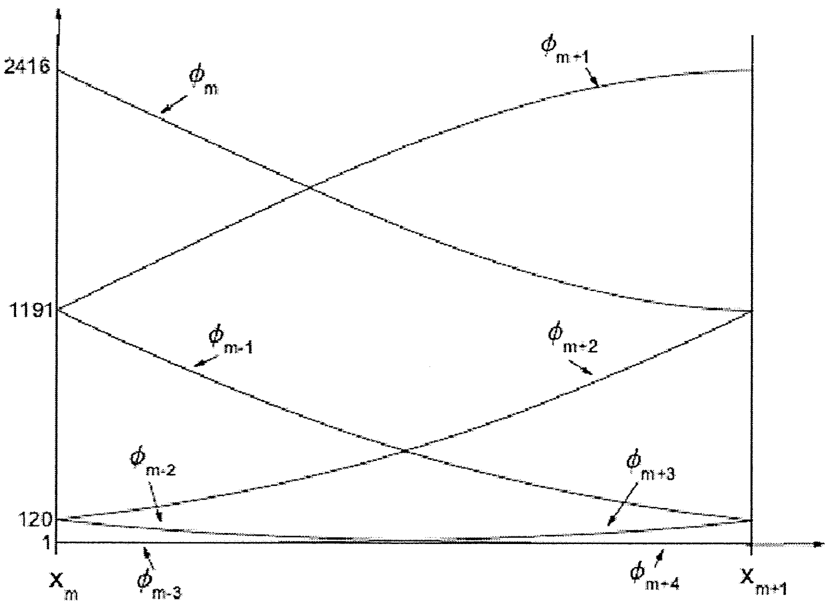
$$\emptyset_{m-3} = 1 - 7\xi + 21\xi^2 - 35\xi^3 + 35\xi^4 - 21\xi^5 + 7\xi^6 - \xi^7$$
$$\emptyset_{m-2} = 120 - 392\xi + 504\xi^2 - 280\xi^3 + 84\xi^5 - 42\xi^6 + 7\xi^7,$$
$$\emptyset_{m-1} = 1191 - 1715\xi + 315\xi^2 + 665\xi^3 - 315\xi^4 - 105\xi^5 + 105\xi^6 - 21\xi^7,$$
$$\emptyset_m \;= 2416 - 1680\xi^2 + 560\xi^4 - 140\xi^6 + 35\xi^7,$$
$$\emptyset_{m+1} = 1191 + 1715\xi + 315\xi^2 - 665\xi^3 - 315\xi^4 + 105\xi^5 + 105\xi^6 - 35\xi^7,$$

$$\emptyset_{m+2} = 120 + 392\xi + 504\xi^2 + 280\xi^3 - 84\xi^5 - 42\xi^6 + 21\xi^7,$$
$$\emptyset_{m+3} = 1 + 7\xi + 21\xi^2 + 35\xi^3 + 35\xi^4 + 21\xi^5 + 7\xi^6 - \xi^7$$
$$\emptyset_{m+4} = \xi^7 \tag{1.3.7.2}$$

şeklinde bulunur. (1.3.7.2) septik B- spline fonksiyonlar kullanılarak x_m düğüm noktasında U_N yaklaşık çözümü ve x' e göre altıncı mertebeye kadar olan türevleri δ_m eleman parametreleri cinsinden,

$$U_N(x_m, t) = \delta_{m-3} + 120\delta_{m-2} + 1191\delta_{m-1} + 2416\delta_m + 1191\delta_{m+1} + 120\delta_{m+2} + \delta_{m+3},$$
$$U'_m = \frac{7}{h}(-\delta_{m-3} - 56\delta_{m-2} - 245\delta_{m-1} + 245\delta_{m+1} + 56\delta_{m+2} + \delta_{m+3}),$$
$$U''_m = \frac{42}{h^2}(\delta_{m-3} + 24\delta_{m-2} + 15\delta_{m-1} - 80\delta_m + 15\delta_{m+1} + 24\delta_{m+2} + \delta_{m+3}),$$
$$U'''_m = \frac{210}{h^3}(-\delta_{m-3} - 8\delta_{m-2} + 19\delta_{m-1} - 19\delta_{m+1} + 8\delta_{m+2} + \delta_{m+3}),$$
$$U^{(iv)}_m = \frac{840}{h^4}(\delta_{m-3} - 9\delta_{m-1} + 16\delta_m - 9\delta_{m+1} + \delta_{m+3})$$
$$U^{(v)}_m = \frac{2520}{h^5}(-\delta_{m-3} + 4\delta_{m-2} - 5\delta_{m-1} + 5\delta_{m+1} - 4\delta_{m+2} + \delta_{m+3})$$
$$U^{(vi)}_m = \frac{5040}{h^6}(\delta_{m-3} - 6\delta_{m-2} + 15\delta_{m-1} - 20\delta_m + 15\delta_{m+1} - 6\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) \tag{1.3.7.3}$$

biçiminde gösterilir.



Şekil 1.7. Septik B-spline şekil fonksiyonları

2. BÖLÜM

2.1 Kollokasyon yöntemi

Bir diferansiyel denklemin tam çözümü ile yaklaşık çözümü arasındaki farkın, sıfırdan farklı bir ağırlık fonksiyonu ile çarpılıp toplamlarının en küçük yapılması işlemi ağırlıklı kalan yaklaşımı olarak adlandırılır ve bu yaklaşıma dayanan metotlara ise ağırlıklı kalan metodları denir. Her denklemin ağırlıklı integral formu oluşturulabileceğinden dolayı her denkleme tatbik edilebilir. Ağırlıklı kalan yöntemlerini ifade etmek için Ω bölgesinde

$$A(u) = f \,, \tag{2.1.1}$$

operatör denklemini ele alalım. Burada A lineer yada lineer olmayan operatör ve f bağımsız değişkenin bir fonksiyonu olarak tanımlanırsa, buradaki u çözümüne, bir yaklaşım olarak

$$u_N = \sum_{j=1}^{N} c_j\,\phi_j + \phi_0 \,, \tag{2.1.2}$$

kullanılır ve (2.1.1) denkleminde (2.1.2) ile verilen u_N yaklaşık çözümü yerine yazıldığında $f_N = A(u_N)$ fonksiyonu elde edilir. Bu fonksiyon büyük olasılıkla f' ye eşit değildir. $A(u_N)$ ile f fonksiyonu arasındaki farka

$$R = A(u) - f = A\left(\sum_{j=1}^{N} c_j\,\phi_j + \phi_0\right) - f \neq 0 \tag{2.1.3}$$

yaklaşımın kalanı denir. Burada R kalan fonksiyonu c_j parametrelerine bağlı olduğu kadar konuma da bağlıdır ve ağırlıklı kalan yöntemlerinde c_j parametreleri

$$\int_{\Omega} \psi_i(x,y) R(x,y,c_j)\, dx\, dy = 0 \qquad (i = 0,1,2,\dots.N) \tag{2.1.4}$$

ağırlıklı kalan integralindeki R kalanı sıfır olacak biçimde seçilir. Buradaki Ω iki boyutlu bir bölge ve ψ_i'ler ise ağırlıklı kalan fonksiyonları olup (2.1.4) integralinin hesaplanmasıyla elde edilen denklemlerin çözülebilmesi için seçilen ψ_i ağırlıklı kalan fonksiyonlar kümesinin lineer bağımsız olması gerekir. Ağırlıklı kalanlar yönteminde ağırlık fonksiyonunun seçimine bağlı olarak yöntemler farklı isimle adlandırılır. Bu yöntemler Galerkin, Petrov-Galerkin, Kollokasyon ve Subdomain şeklinde sıralanabilir.

Bu tez çalışmasında kullanacağımız ağırlıklı kalan yöntemlerinden biri olan Kollokasyon yönteminde Ω bölgesinden seçilen N adet $X^i \equiv (x^i, y^i)$ kollokasyon noktasında kalanın sıfır olması istenir ki yani kalan

$$R(x^i, y^i, c_j) = 0, \qquad (i = 0, 1, 2, \dots, N) \tag{2.1.5}$$

şeklinde olmalıdır. X^i kollokasyon noktalarının denklem sistemi iyi şartlı olacak biçimde seçilmesi çok önemlidir. Burada $\psi_i = \delta(X - X^i)$ alınır ve (2.1.4) denkleminde yerine yazılacak olursa

$$\int_\Omega \delta(X - X^i) R(X, c_j)\, dx\, dy = 0 \tag{2.1.6}$$

veya

$$R(X^i, c_j) = 0, \tag{2.1.7}$$

elde edilir. Buradaki $\delta(x)$, Dirac delta fonksiyonu olup aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\int_\Omega f(x)\delta(x - \xi)\, dx\, dy = f(\xi) \tag{2.1.8}$$

B-spline fonksiyonlara dayanan kollokasyon sonlu elemanlar yöntemi, daha önceleri farklı türden doğrusal olmayan problemlerin yaklaşık çözümlerini elde etmek için kullanılmıştır. Mesela Kawahara denklemi septik B-spline kollokasyon [24], Burgers, KdV Burgers, kompleks modifiye edilmiş KdV, genelleştirilmiş doğrusal olmayan Schrödinger (GNLS) ve genelleştirilmiş Rosenau-RLW denklemleri ise kuintik B-spline kollokasyon yöntemiyle sayısal olarak çözülmüştür [25–28]. Yine Genelleştirilmiş Burgers–Fisher ve genelleştirilmiş Burgers–Huxley denklemleri ise kübik B-spline kollokasyon algoritması yardımıyla çözülmüştür [29]. D. Irk, kübik ve kuintik B-spline kollokasyon yöntemiyla GNLS denkleminin, CMKdV denkleminin ve BST denklem sisteminin çözümlerini bulmuştur [30]. Saka, RLW ve K-S denklemlerinin, sayısal çözümlerini kuadratik, kübik ve kuintik B-spline fonksiyonlar kullanarak kollokasyon yöntemi ile elde edilmiştir [31].

2.2 GRLW Denklemi

Düzenli uzun dalga (RLW) denklemine dayanan genelleştirilmiş düzenli uzun dalga (GRLW) denklemi, genelleştirilmiş eşit genişlikli dalga (GEW) denklemi ve genelleştirilmiş Korteweg-de Vries (GKdV) denklemi ile ilişkilidir. Bu tür denklemler $(p+1)$. dereceden doğrusal olmayan dalga denklemleri olup, nabız atışına benzeyen solitary dalga çözümlere sahiptirler [10].

GKdV denklemi,

$$U_t+\varepsilon U^p U_x+\mu U_{xxt}=0\ ; \tag{2.2.1}$$

GEW denklemi,

$$U_t+\varepsilon U^p U_x-\mu U_{xxt}=0\ ; \tag{2.2.2}$$

GRLW denklemi,

$$U_t+U_x+p(p+1)U^p U_x-\mu U_{xxt}=0 \tag{2.2.3}$$

şeklindedir. Fiziksel sınır şartları $x \to \pm\infty$ iken $U \to 0$ dır. Burada alt indis t ve x sırasıyla zaman ve boyutsal türevi ifade ederler ki, ε ve p pozitif tamsayı olup, μ pozitif bir sabit sayıdır.

Bu tez çalışmasında, beşinci ve yedinci dereceden B-spline fonksiyonlar kullanılarak kollokasyon yöntemi ile yaklaşık çözümlerini araştırdığımız GRLW denkleminin; solitary dalga çözümlerinin bazı analitik ve sayısal çözüm teknikleri ile bulunduğu bilinmektedir. GRLW denkleminin hem kararlı hem kararsız solitary dalga çözümleri Bona ve arkadaşları tarafından elde edilmiştir [11]. Ramos ise ardışık dalgaların oluşumu üzerindeki başlangıç şartı ile birlikte GRLW denkleminin solitary dalga çözümünü elde edebilmek için yaklaşık yarı lineerleştirme algoritmasını kullanmıştır [12]. El-Danaf ve arkadaşları, Kaya, Guo ve arkadaşları; GRLW denkleminin sayısal davranışlarını incelemek amacı ile sırasıyla sonlu fark yaklaşımını, Adomian ayrışım yöntemini, elamansız kp-Ritz yöntemini uygulamışlardır [13–15]. Hamdi ve arkadaşları, GRLW denklemi ve onun daha basit alternatif modeli olan GEW denklemi için yeni bir tam çözüm yöntemi sunmuşlardır [16]. Sonlu fark, He'nin değişimli tekrarlama, Meshfree, Petrov-Galerkin sonlu elemanlar, elemansız olma yaklaşımına ve $2N$, mertebeden yoğunlaştırılmış, sonlu fark algoritmalarına dayanan sayısal yöntemler GRLW denkleminin çözümü için tanıtılmıştır [17–22]. Üstel B-spline sonlu elemanlara dayanan kollokasyon algoritmasını kullanmak suretiyle GRLW denkleminin sayısal sonuçları Mohammadi tarafından bulunmuştur [23].

Bu çalışmada ele aldığımız GRLW denkleminin yapısı incelendiğinde, $(p+1)$. dereceden lineer olmayan terimlere sahip olduğunu görürüz. Bu denklemin şayet varsa analitik çözümlerini bulmak en iyi tercih olacaktır. Ancak ele aldığımız dalga denkleminin doğrusal olmayan terimlerinden dolayı bu ve buna benzer denklemlerin genelde analitik çözümlerini elde etmek oldukça zordur. O zaman bu aşamada, yaklaşık analitik çözüm teknikleri devreye girecektir. Şayet bu da mümkün olmazsa, analitik olarak çözümü zor veya mümkün olmayan problemlerin çözülebilmesi için uygun ve en iyi yaklaşım tekniği olan sayısal çözüm teknikleri kaçınılmaz olur. Literatürde yapılan çalışmalar ve benzer yapıdaki doğrusal olmayan denklemlere uygulanan yöntemlerle elde edilen sayısal veriler incelenirse, sonlu elemanlar yönteminin doğru ve etkili bir sayısal algoritma olduğu görülecektir [32]. Bu nedenle, bu tez çalışmasında GRLW dalga denkleminin yaklaşık çözümlerini bulabilmek için, beşinci ve yedinci dereceden B-spline kollokasyon sonlu eleman yöntemleri kullanılmıştır. Bu tez çalışması [32] ve [33] referansları baz alınarak hazırlanmıştır.

3. BÖLÜM

GRLW DENKLEMİNİN KUİNTİK B-SPLİNE KOLLOKASYON SONLU ELEMAN YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

GRLW denklemi,

$$U_t+U_x+p(p+1)U^pU_x-\mu U_{xxt}=0 \tag{3.1}$$

şeklindedir. Fiziksel sınır şartları $x\rightarrow\pm\infty$ iken $U\rightarrow 0$ dır. Burada alt indis t ve x sırasıyla zaman ve boyutsal türevi ifade ederler, ε ve p pozitif tamsayı olup, μ ise pozitif bir sabit sayıdır.

Sınır ve başlangıç koşulları,

$$\begin{aligned} &U(a,t)=0, && U_x(a,t)=0,\\ &U(b,t)=0, && U_x(b,t)=0,\\ &U(x,0)=f(x), && a\le x\le b, \end{aligned} \tag{3.2}$$

biçiminde ele alınacaktır.

Çözüm bölgesini kısıtlanmış $[a,b]$ sonlu aralığında düşünecek olursak, aralık uzunluğu $h=\frac{b-a}{N}=(x_{m+1}-x_m)$ ve $a=x_0<x_1<\ldots<x_N=b$ olmak üzere, $[a,b]$ aralığı x_m düğüm noktaları vasıtasıyla N tane eşit aralığa parçalanır. $\{\emptyset_{-2}(x),\emptyset_{-1}(x),\ldots,\emptyset_N(x),\emptyset_{N+1}(x),\emptyset_{N+2}(x)\}$ kuintik B-spline fonksiyonları, $[a,\ b]$ aralığında tanımlanmış fonksiyonlar için bir baz oluşturur. Kuintik B-spline fonksiyonları x_m düğüm noktalarında,

$$\emptyset_m(x)=\frac{1}{h^5}\begin{cases}(x-x_{m-3})^5, & [x_{m-3},x_{m-2}]\\ (x-x_{m-3})^5-6(x-x_{m-2})^5, & [x_{m-2},x_{m-1}]\\ (x-x_{m-3})^5-6(x-x_{m-2})^5+15(x-x_{m-1})^5, & [x_{m-1},x_m]\\ (x-x_{m-3})^5-6(x-x_{m-2})^5+15(x-x_{m-1})^5+20(x-x_m)^5, & [x_m,x_{m+1}]\\ (x-x_{m-3})^5-6(x-x_{m-2})^5+15(x-x_{m-1})^5 & \\ -20(x-x_m)^5+\ 15(x-x_{m+1})^5, & [x_{m+1},x_{m+2}]\\ (x-x_{m-3})^5-6(x-x_{m-2})^5+15(x-x_{m-1})^5-20(x-x_m)^5 & \\ +15(x-x_{m+1})^5-6(x-x_{m+2})^5, & [x_{m+2},x_{m+3}]\\ 0, & \textit{diğer durumlar}\end{cases} \tag{3.3}$$

biçiminde verilmiştir [9]. $\emptyset_m$ kuintik B-spline fonksiyonların her biri sonlu ardışık altı tane alt aralığı örtecektir. Bundan dolayı altı adet B-spline fonksiyonu her bir

$[x_m, x_{m+1}]$ sonlu alt aralığını örter. $U_N(x,t)$ yaklaşımı, kuintik B-spline şekil fonksiyonları türünden yazılacak olursa,

$$U_N(x,t) = \sum_{m=-2}^{N+2} \emptyset_m(x)\delta_m(t) \tag{3.4}$$

Yaklaşım fonksiyonu bulunur. GRLW denkleminin kuintik B-spline kollokasyon şartları ve sınır koşulları kullanılarak, yukarıda verilen zamana bağlı bilinmeyen $\delta_m(t)$ parametreleri tespit edilecektir. (3.4) de belirtilen yaklaşım fonksiyonunda (3.3) ile verilen kuintik B-spline fonsiyonlar kullanılmak suretiyle, U_m yaklaşım fonksiyonu ve U_m 'in x'e göre ikinci mertebeye kadar olan türevleri, x_m düğüm noktasında δ_m bilinmeyen parametreleri cinsinden aşağıdaki gibi bulunur [33]:

$$\begin{aligned} U_N(x_m,t) = U_m &= \delta_{m-2} + 26\delta_{m-1} + 66\delta_m + 26\delta_{m+1} + \delta_{m+2}, \\ U'_m &= \frac{5}{h}(-\delta_{m-2} - 10\delta_{m-1} + 10\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \\ U''_m &= \frac{20}{h^2}(\delta_{m-2} + 2\delta_{m-1} - 6\delta_m + 2\delta_{m+1} + \delta_{m+2}). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Buradan U değişimi $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı üzerinde

$$U = \sum_{m=-2}^{N+2} \emptyset_m\delta_m . \tag{3.6}$$

şeklinde yeniden ifade edilebilir. (3.1) de verilen GRLW denkleminde, (3.5) de bulunan U_m ve U_m ' in x'e göre türevleri uygun yerlere yazılacak olursa,

$$\begin{aligned} &(\dot{\delta}_{m-2} + 26\dot{\delta}_{m-1} + 66\dot{\delta}_m + 26\dot{\delta}_{m+1} + \dot{\delta}_{m+2}) \\ &+\frac{5}{h}(-\delta_{m-2} - 10\delta_{m-1} + 10\delta_{m+1} + \delta_{m+2}) \\ &+p(p+1)Z_m(\delta_{m-2} + 26\delta_{m-1} + 66\delta_m + 26\delta_{m+1} + \delta_{m+2}) \\ &-\frac{20\mu}{h^2}(\dot{\delta}_{m-2} + 2\dot{\delta}_{m-1} + 6\dot{\delta}_m + 2\dot{\delta}_{m+1} + \dot{\delta}_{m+2}) = 0 \end{aligned} \tag{3.7}$$

şeklinde çözüm yaklaşımının genel biçimi bulunur. Burada Z_m lineer olmayan terimi;

$$Z_m \cong [U_m^n]^p = \left(\delta_{m-2}^n + 26\delta_{m-1}^n + 66\delta_m^n + 26\delta_{m+1}^n + \delta^n{}_{m+2}\right)^p$$

dir. (3.7) ile verilen denklemde "." zamana bağlı türevi belirtir. (3.7) de verilen kollokasyon denkleminde konuma göre bilinmeyen parametreler δ_m ve zamana göre türevleri olan $\dot{\delta}_m$ ifadelerine,

$$\delta_m = \frac{1}{2}(\delta_m^n + \delta_m^{n+1}), \qquad \dot{\delta}_m = \frac{\delta_m^{n+1} - \delta_m^n}{\Delta t} \tag{3.8}$$

(3.8) de verilen Crank-Nicolson ve klasik ileri sonlu fark yaklaşımı sırasıyla uygulanırsa, δ_i^{n+1} ve δ_i^n parametrelerine göre ardışık iki zaman adımı olan n ve $n+1$ arasındaki yineleme bağıntısı,

$$\begin{aligned} &\gamma_1\delta_{m-2}^{n+1} + \gamma_2\delta_{m-1}^{n+1} + \gamma_3\delta_m^{n+1} + \gamma_4\delta_{m+1}^{n+1} + \gamma_5\delta_{m+2}^{n+1} \\ &= \gamma_6\delta_{m-2}^n + \gamma_7\delta_{m-1}^n + \gamma_8\delta_m^n + \gamma_9\delta_{m+1}^n + \gamma_{10}\delta_{m+2}^n \end{aligned} \tag{3.9}$$

şeklinde bulunur. Yukarıdaki γ katsayıları,

$$\begin{aligned} &\gamma_1 = (1 - K + EZ_m - M), \qquad \gamma_2 = (26 - 10K + 26EZ_m - 2M), \\ &\gamma_3 = (66 + 66EZ_m + 6M), \qquad \gamma_4 = (26 + 10K + 26EZ_m - 2M), \\ &\gamma_5 = (1 + K + EZ_m - M), \qquad \gamma_6 = (1 + K - EZ_m - M), \\ &\gamma_7 = (26 + 10K - 26EZ_m - 2M), \qquad \gamma_8 = (66 - 66EZ_m + 6M), \\ &\gamma_9 = (26 - 10K - 26EZ_m - 2M), \qquad \gamma_{10} = (1 - K - EZ_m - M), \\ &m = 0,1,\dots,N, \quad K = \frac{5\Delta t}{2h}, \quad E = \frac{P(P+1)\Delta t}{2}, \quad M = \frac{20\mu}{h^2} \end{aligned} \tag{3.10}$$

biçimindedir.

(3.9) da verilen denklem sistemi $N + 1$ tane lineer denklemden meydana gelir, fakat bu ifadede $(\delta_{-2}, \delta_{-1}, \dots, \delta_{N+1}, \delta_{N+2})^T$ parametrelerinden gelen $N + 5$ tane bilinmeyen vardır. Bu sisteme ait tek çözümü bulabilmek için dört tane daha ek şarta ihtiyaç duyulur ki bu şartlar (3.2) de verilen sınır koşulları vasıtasıyla bulunur. Denklem sistemine sınır koşullarının basit bir biçiminde dahil edilmesi şeklinde ifade edilen bu adımın benzeri, aşağıda verilen iterasyonu başlatmak için d^0 başlangıç değerinin tespit edilmesi aşamasında belirtilmiştir. Bundan sonra (3.9) ile verilen cebirsel denklem sisteminden δ_{-2}, δ_{-1} ve $\delta_{N+1}, \delta_{N+2}$ parametreleri, eliminize edilir. Yapılan bu işlemlerin ardından $d^n = (\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_N)^T$ olmak üzere, aşağıdaki $N+1$ tane bilinmeyenli matris form bulunur:

$$C\mathrm{d}^{\mathrm{n}+1} = D\mathrm{d}^{\mathrm{n}}. \tag{3.11}$$

C ve D matrisleri, $(N+1) \times (N+1)$ boyutlu beş sütun elemanlı penta-diagonal matris olarak adlandırılan matrisler olup, verilen matris denklemi aşağıdaki alt bölüm 3.1'de belirtildiği üzere Fortran programında Thomas algoritması (penta-diagonal algoritma) kullanılmak suretiyle çözülmüştür. Bu aşamada çözümün iyileştirilmesi için, lineer olmayan terim Z_m deki eleman parametresine,

$$(\delta_m^*)^{n+1} = \delta_m^n + \frac{1}{2}(\delta_m^{n+1} - \delta_m^n)$$

yukarıda verilen iç iterasyon her bir zaman adımında üç veya dört defa uygulanmıştır.

Başlangıç iterasyonu

Tekrarlama bağıntısının verildiği (3.9) daki iterasyonun başlatılabilmesi için, d^0 başlangıç değerinin hesaplanması gerekir. Bundan dolayı aşağıda (3.12) ile verilen başlangıç şartları kullanılmalıdır. Sayısalçözümün başlangıç şartı aşağıdaki biçimdedir.

$$U_N(x,0) = \sum_{m=-2}^{N+2} \emptyset_m(x)\delta_m^0(t)$$

Başlangıç şartı ve sınır noktalarındaki türevleri,

$$\begin{aligned} &U_N\,(x,0) = U\,(x_m,0); \quad m = 0,1,2,\dots,N \\ &(U_N)_x(a,0) = 0, \quad (U_N)_{xx}(a,0) = 0, \\ &(U_N)_x(b,0) = 0, \quad (U_N)_{xx}(b,0) = 0 \end{aligned} \tag{3.12}$$

şeklindedir. Başlangıç şartı, δ_m parametreleri türünden,

$$\delta_{-2} + 26\delta_{-1} + 66\delta_0 + 26\delta_1 + \delta_2 = U\,(x_0,0)$$

$$\delta_{-1} + 26\delta_0 + 66\delta_1 + 26\delta_2 + \delta_3 = U\,(x_1, 0)$$

$$\delta_0 + 26\delta_1 + 66\delta_2 + 26\delta_3 + \delta_4 = U\,(x_2, 0)$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\begin{aligned} &\delta_{N-4} + 26\delta_{N-3} + 66\delta_{N-2} + 26\delta_{N-1} + \delta_N = U\,(x_{N-2}, 0), \\ &\delta_{N-3} + 26\delta_{N-2} + 66\delta_{N-1} + 26\delta_1 + \delta_{N+1} = U\,(x_{N-1}, 0), \\ &\delta_{N-2} + 26\delta_{N-1} + 66\delta_N + 26\delta_{N+1} + \delta_{N+2} = U\,(x_N, 0) \end{aligned} \tag{3.13}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bulunan bu denklem sistemi $N+1$ tane lineer denklem ile $(\delta_{-2}, \delta_{-1}, \dots, \delta_{N+1}, \delta_{N+2})^T$ parametrelerinden meydana gelen $N+5$ tane bilinmeyenden oluşur. Bu sistemin tek çözümünün bulunabilmesi için dört tane daha ek şart gereklidir. Bundan dolayı başlangıç şartının (3.12)' de verilen sınır noktalarındaki türevleri kullanılmalıdır. Türevli olan sınır koşulları δ_m parametreleri türünden aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} &-\delta_{-2} - 10\delta_{-1} + 10\delta_1 + \delta_2 = 0, \\ &\delta_{-2} + 2\delta_{-1} - 6\delta_0 + 2\delta_1 + \delta_2 = 0, \\ &-\delta_{N-2} - 10\delta_{N-1} + 10\delta_{N+1} + \delta_{N+2} = 0, \\ &\delta_{N-2} + 2\delta_{N-1} - 6\delta_N + 2\delta_{N+1} + \delta_{N+2} = 0. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Bu denklemlerden $(\delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_{N+1}, \delta_{N+2})$ parametreleri hesaplanırsa;

$$\begin{aligned} &\delta_{-2} = \frac{1}{2}(15\delta_0 - 10\delta_1 - 3\delta_2), \\ &\delta_{-1} = -\frac{3}{4}\delta_0 + \frac{3}{2}\delta_1 + \frac{1}{4}\delta_2, \\ &\delta_{N+1} = -\frac{3}{4}\delta_N + \frac{3}{2}\delta_{N-1} + \frac{1}{4}\delta_{N-2} \\ &\delta_{N+2} = \frac{1}{2}(15\delta_N - 10\delta_{N-1} - 3\delta_{N-2}). \end{aligned} \tag{3.15}$$

şeklinde bulunur.

Elde edilen bu değerler (3.13) ile verilen denklemde kullanılmak suretiyle, $(\delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_{N+1}, \delta_{N+2})$ parametreleri yok edilir. Dolayısıyla d^0 başlangıç değerine göre $Td^0 = v$. matris denklemi elde edilir:

Burada,

$$T = \begin{bmatrix} 54 & 60 & 6 & & & & & & \\ 25.25 & 67.5 & 26.25 & 1 & & & & & \\ 1 & 26 & 66 & 26 & 1 & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & 1 & 26 & 66 & 26 & 1 & \\ & & & & 1 & 26.25 & 67.5 & 25.25 & \\ & & & & & 6 & 60 & 54 & \end{bmatrix},$$

$d^0 = (\delta_0, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{N-2}, \delta_{N-1}, \delta_N)^T,$

$v = (U(x_0, 0), U(x_1, 0), \dots, U(x_{N-1}, 0), U(x_N, 0))^T.$

Matris denklemindeki d^0 başlangıç değeri, Thomas algoritması ile çözülerek bulunur. d^0 'ın bulunmasıyla birlikte, $n=0$ için (3.11) ile verilen matris sisteminin sağ tarafı belirlendikten sonra, Thomas algoritması ile matrisin sol tarafi elde edilir. Buradan da istenilen zaman adımında bir önceki parametreden elde edilen değerler kullanılarak, GRLW denkleminin yaklaşık çözümleri bulunur.

3.1 Thomas algoritması ile penta-diagonal matris sisteminin çözümü

Penta-diagonal sistem aşağıdaki biçimde ifade edilebilir:

$$a_i\delta_{i-2} + b_i\delta_{i-1} + c_i\delta_i + d_i\delta_{i+1} + e_i\delta_{i+2} = f_i, \qquad i = 0,1,2,\dots,N$$

Burada parametreler,

$$\alpha_0 = 0, \qquad \beta_0 = c_0, \quad \mu_0 = \frac{d_0}{\beta_0}, \quad \zeta_0 = \frac{e_0}{\beta_0}, \quad \lambda_0 = \frac{f_0}{\beta_0},$$

$$\alpha_1 = b_0, \qquad \beta_1 = c_1 - \alpha_1\mu_0, \quad \mu_1 = \frac{d_1 - \alpha_1\zeta_0}{\beta_0}, \quad \zeta_1 = \frac{e_1}{\beta_1}, \quad \lambda_1 = \frac{f_1 - \alpha_1\lambda_0}{\beta_1},$$

şeklinde seçilir. Ardından aşağıda verilen parametreler elde edilir:

$$\alpha_i = b_{i-1} - a_{i-2}\mu_{i-2}, \qquad \beta_i = c_i - \alpha_i\mu_{i-1} - a_{i-2}\zeta_{i-2}, \qquad \mu_i = \frac{d_i - \alpha_i\zeta_{i-1}}{\beta_i},$$

$$\zeta_i = \frac{e_i}{\beta_i}, \qquad \lambda_i = \frac{f_i - \alpha_i\lambda_{i-1} - a_{i-2}\lambda_{i-2}}{\beta_i}, \qquad i = 2,3,\dots,N.$$

Yukarıdaki iki aşamadan sonra δ_m parametreleriyle çözüm,

$$\delta_N = \lambda_N, \quad \delta_{N-1} = \lambda_{N-1} - \mu_{N-1}\delta_N,$$

$$\delta_i = \lambda_i - \zeta_i\delta_{i+2} - \mu_i\delta_{i+1}, \quad i = 0,1,\dots,N-3,N-2.$$

biçiminde elde edilir.

3.2 Lineer kararlılık analizi

Sayısal yöntemin lineer kararlılığını incelemek amacıyla Von-Neumann tekniği uygulanacaktır. GRLW denkleminde bulunan, lineer olmayan U^pU_x terimindeki U^p teriminin bölgesel olarak sabit olduğu kabul edilecek olursa, sunulan sayısal yöntemlerdeki aşamalar tatbik edilerek aşağıdaki biçimde tekrarlama bağıntısı bulunur.

$$\begin{aligned}&\alpha_1\delta_{m-2}^{n+1} + \alpha_2\delta_{m-1}^{n+1} + \alpha_3\delta_m^{n+1} + \alpha_4\delta_{m+1}^{n+1} + \alpha_5\delta_{m+2}^{n+1}\\ &= \alpha_5\delta_{m-2}^{n} + \alpha_4\delta_{m-1}^{n} + \alpha_3\delta_m^{n} + \alpha_2\delta_{m+1}^{n} + \alpha_1\delta_{m+2}^{n}\end{aligned} \tag{3.16}$$

Burada,

$$\alpha_1 = (1 - K - KEZ_m - M), \quad \alpha_2 = (26 - 10K - 10KEZ_m - 2M), \quad \alpha_3 = (66 + 6M)$$

$$\alpha_4 = (26 + 10K + 10KEZ_m - 2M), \qquad \alpha_5 = (1 + K + KEZ_m - M),$$

$$m = 0,1,\dots,N, \quad K = \frac{5\Delta t}{2h}, \qquad E = \frac{P(P+1)\Delta t}{2}, \qquad M = \frac{20\mu}{h^2}.$$

Ardından h eleman büyüklüğü ve k mod numarası olarak alındığında, (3.16) ile verilen denklem de $\delta_m^n = \xi^n e^{imkh}$ $(i = \sqrt{-1})$ şeklinde verilen Fourier terimi uygun yerlere yazılırsa,

$$\begin{aligned}&\alpha_1\xi^{n+1}e^{i(m-2)kh} + \alpha_2\xi^{n+1}e^{i(m-1)kh} + \alpha_3\xi^{n+1}e^{i(m)kh} + \alpha_4\xi^{n+1}e^{i(m+1)kh}\\ &+\alpha_5\xi^{n+1}e^{i(m+2)kh} =\\ &\alpha_5\xi^{n}e^{i(m-2)kh} + \alpha_4\xi^{n}e^{i(m-1)kh} + \alpha_3\xi^{n}e^{i(m)kh} + \alpha_2\xi^{n}e^{i(m+1)kh}\\ &+\alpha_1\xi^{n}e^{i(m+2)kh}\ .\end{aligned} \tag{3.17}$$

eşitliği bulunur.

$e^{ikh} = \cos(kh) + i\sin(kh)$ Euler formülü, (3.17) ile verilen denklem de kullanılarak gerekli olan bütün işlemler yapıldığında büyüme faktörü olan ξ,

$\xi = \dfrac{a - ib}{a + ib}$ şeklinde bulunur.

Burada,

$a = \alpha_3 + (\alpha_4 + \alpha_2)\cos[hk] + (\alpha_5 + \alpha_1)\cos[2hk],$

$b = (\alpha_4 - \alpha_2)\sin[hk] + (\alpha_5 - \alpha_1)\sin[2hk].$

olup, buradan $|\xi|$ nin değeri 1 olarak bulunur, dolayısıyla lineerleştirilmiş algoritma şartsız kararlıdır.

3.3 Sayısal hesaplamalar

Burada sayısal algoritma tek solitary dalganın davranışı, iki solitary dalganın girişimi ve ardışık dalganın oluşumunu kapsayan üç örneğin üzerinde çalışılmıştır. Sayısal yöntemin doğruluğunu ve etkinliğini göstermek için L_2 ve L_∞ hata normları, hesap edilmiştir. Bundan dolayı aşağıda verilen norm eşitlikleri ve (3.18) ile verilen GRLW denkleminin tam çözümü kullanılacaktır:

$$L_2 = \|U^{tam} - U_N\|_2 \simeq \sqrt{h.\sum_{j=0}^{N}\left|U_j^{tam} - (U_N)_j\right|^2},$$

$$L_\infty = \|U^{tam} - U_N\|_\infty \simeq \max_j\left|U_j^{tam} - (U_N)_j\right|.$$

GRLW dekleminin tam çözümü,

$$U(x,t) = \sqrt[p]{\frac{c(p+2)}{2p}\sec h^2\left[\frac{p}{2}\sqrt{\frac{c}{\mu(c+1)}}(x - (c+1)t - x_0)\right]} \tag{3.18}$$

şeklindedir [20, 34]. Burada $\sqrt[p]{\frac{c(p+2)}{2p}}$ dalganın genliği, $c+1$ pozitif x yönünde hareket eden dalganın hızı ve x_0 keyfi bir sabit olup, sayısal yöntemin kütle, momentum ve enerji ile ilgili özelliklerini koruduğunu göstermek amacı ile,

$$I_1 = \int_a^b U\,dx,\ I_2 = \int_a^b [U^2 + \mu(U_x)^2]\,dx,\ I_3 = \int_a^b [U^4 - \mu(U_x)^2]\,dx \tag{3.19}$$

parametrelerindeki değişim hesaplanmıştır.

3.3.1 Tek solitary dalganın davranışı

Birinci örnek, (3.18) ile verilen denklem de $t = 0$ alınması ile bulunan başlangıç şartı kullanılarak elde edilmiştir. Daha önceden yapılan çalışmalar [20, 23, 34, 36, 37, 38, 39] referans alınmış olup bu çalışmalarla uyumlu olması için $0 \leq x \leq 100$ aralığında $\mu = 1$, $x_0 = 40$ parametreleri ve p, c, konum adımı h, zaman adımı Δt parametrelerinin farklı değerlerinin alınması, mümkün olduğunca muntazam ve kıyaslanabilir sayısal sonuçlar elde etmemizi sağlayacaktır. Uygulamalar $t = 20$ anına kadar çalıştırılmıştır.

İlk olarak, $p = 2, 3, 4, 6, 8, 10$; $c = 0.1, 0.3$; $h = 0.2, 0.1$; $\Delta t = 0.01$ parametreleri alınmıştır. Bu parametrelere göre elde edilen korunum sabitleri ve hata normlarının değerleri Tablo 3.1 ve Tablo 3.2'te gösterilmiştir. Bu tablolardan görüldüğü gibi I_1, I_2, I_3 korunum sabitlerinin elde edilme süresince başlangıç değerlerine göre değişim oranı %0.03 den daha küçük olduğu görülmektedir. L_2 ve L_∞ hata normları oldukça küçük olarak bulunmuş olup, L_∞ hata normu L_2 normundan daima küçük kalmaktadır.

Tablo 3.1. $p = 2, 3, 4$; $c = 0.1, 0.3$, $h = 0.2$, $\Delta t = 0.01$ ve $x \in [0, 100]$ için hesaplanan tek solitary dalganın korunum sabitleri ve hata norm değerleri

p=2	I_1		I_2		I_3		$L_2 \times 10^4$		$L_\infty \times 10^4$	
t	c=0.1	c=0.3	c=0.1	c=0.3	c=0.1	c=0.3	c=0.1	c=0.3	c=0.1	c=0.3
0	3.29490	3.58195	0.68342	1.34507	0.02412	0.15372	0.000	0.000	0.000	0.000
5	3.29492	3.58195	0.68342	1.34507	0.02412	0.15372	0.040	0.095	0.029	0.051
10	3.29493	3.58195	0.68342	1.34507	0.02412	0.15372	0.075	0.159	0.035	0.076
15	3.29494	3.58195	0.68342	1.34506	0.02412	0.15372	0.101	0.207	0.036	0.095
20	3.29493	3.58195	0.68342	1.34506	0.02412	0.15372	0.120	0.376	0.066	0.175

p=3	I_1		I_2		I_3		$L_2 \times 10^4$		$L_\infty \times 10^4$	
t	c=0.1	c=0.3	c=0.1	c=0.3	c=0.1	c=0.3	c=0.1	c=0.3	c=0.1	c=0.3
0	4.06256	3.67753	1.13387	1.56573	0.09289	0.22683	0.000	0.000	0.000	0.000
5	4.06258	3.67753	1.13387	1.56573	0.09289	0.22683	0.048	0.217	0.032	0.121
10	4.06260	3.67753	1.13387	1.56573	0.09289	0.22684	0.088	0.400	0.038	0.203
15	4.06261	3.67753	1.13387	1.56573	0.09289	0.22684	0.116	0.581	0.039	0.284
20	4.06260	3.67753	1.13386	1.56572	0.09289	0.22684	0.137	0.918	0.073	0.438

p=4	I_1		I_2		I_3		$L_2 \times 10^4$		$L_\infty \times 10^4$	
t	c=0.1	c=0.3	c=0.1	c=0.3	c=0.1	c=0.3	c=0.1	c=0.3	c=0.1	c=0.3
0	4.55093	3.75921	1.49159	1.72999	0.18389	0.28940	0.000	0.000	0.000	0.000
5	4.55095	3.75921	1.49159	1.72999	0.18389	0.28941	0.059	0.402	0.034	0.231
10	4.55097	3.75921	1.49159	1.72998	0.18389	0.28941	0.106	0.803	0.041	0.421
15	4.55098	3.75921	1.49159	1.72998	0.18389	0.28941	0.142	1.235	0.042	0.627
20	4.55097	3.75921	1.49159	1.72998	0.18389	0.28941	0.176	1.868	0.078	0.915

Tablo 3.2. $p=6, 8, 10$; $c=0.1, 0.3$, $h=0.1$, $\Delta t = 0.01$ ve $x \in [0, 100]$ için hesaplanan tek solitary dalganın korunum sabitleri ve hata norm değerleri

p=6	I_1		I_2		I_3		$L_2 \times 10^4$		$L_\infty \times 10^4$	
t	c=0.1	c=0.3	c=0.1	c=0.3	c=0.1	c=0.3	c=0.1	c=0.3	c=0.1	c=0.3
0	5.12921	3.86622	1.98857	1.94334	0.36740	0.37760	0.000	0.000	0.000	0.000
5	5.12924	3.86622	1.98857	1.94334	0.36740	0.37760	0.236	0.752	0.092	0.402
10	5.12926	3.86622	1.98857	1.94334	0.36740	0.37760	0.458	1.554	0.179	0.823
15	5.12927	3.86622	1.98857	1.94333	0.36740	0.37760	0.661	2.429	0.259	1.282
20	5.12926	3.86622	1.98857	1.94333	0.36740	0.37760	0.848	3.390	0.333	1.785
p=8	I_1		I_2		I_3		$L_2 \times 10^4$		$L_\infty \times 10^4$	
t	c=0.1	c=0.3	c=0.1	c=0.3	c=0.1	c=0.3	c=0.1	c=0.3	c=0.1	c=0.3
0	5.45779	3.92982	2.30588	2.07217	0.51946	0.43167	0.000	0.000	0.000	0.000
5	5.45781	3.92982	2.30589	2.07217	0.51946	0.43167	0.268	1.204	0.108	0.690
10	5.45783	3.92981	2.30589	2.07216	0.51946	0.43168	0.499	3.012	0.200	1.699
15	5.45785	3.92981	2.30589	2.07214	0.51946	0.43170	0.686	5.690	0.273	3.184
20	5.45784	3.92980	2.30589	2.07212	0.51946	0.43172	0.822	9.520	0.322	5.296
p=10	I_1		I_2		I_3		$L_2 \times 10^4$		$L_\infty \times 10^4$	
t	c=0.1	c=0.3	c=0.1	c=0.3	c=0.1	c=0.3	c=0.1	c=0.3	c=0.1	c=0.3
0	5.66906	3.97136	2.52266	2.15744	0.63820	0.46614	0.000	0.000	0.000	0.000
5	5.66908	3.97134	2.52266	2.15742	0.63819	0.46615	0.297	2.271	0.124	1.380
10	5.66910	3.97133	2.52266	2.15737	0.63819	0.46620	0.536	7.775	0.220	4.595
15	5.66912	3.97131	2.52267	2.15729	0.63819	0.46629	0.700	19.017	0.280	11.082
20	5.66911	3.97129	2.52267	2.15714	0.63819	0.46643	0.764	39.763	0.288	22.983

İkinci durumda ise, farklı hız, konum ve zaman adımlarında hata normlarının büyüklüğü araştırılmış ve bu amaçla, $p=2, 3, 4, 6, 8, 10$; $c=0.03, 0.1, 0.3$; $h=0.1, 0.2$; $\Delta t = 0.01,\ 0.025,\ 0.1$ parametreleri seçilmiştir. L_2 ve L_∞ hata normlarının yaklaşık sonuçları, Tablo 3.3 ve Tablo 3.4'te gösterilmiştir. Tablolar da hata normlarının yeterince küçük olduğu ölçülmüş ve L_∞ hata normunun L_2 hata normundan daima küçük kaldığı görülmüştür. Şayet $c = 0.1$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.025$ parametreleri alınırsa program boyunca L_2 ve L_∞ hata normları 1.5×10^{-3} ve 0.8×10^{-3} den daha küçük kalacaktır.

Tablo 3.5'de elde edilen korunum sabitlerinin ve hata normlarının sonuçları ile daha önceki çalışmalarda bulunan sonuçların karşılaştırılması yapılmış olup bu tabloya göre I_1, I_2, I_3 korunum sabitlerinin daha önceden hesaplanan değerleri ile neredeyse aynı olduğu görülür. Ayrıca bu tablodan, hata norm değerlerinin daha önce hesaplanan sonuçlardan daha küçük olduğu anlaşılmaktadır ki; yukarıdaki iki sonuç bize yöntemin doğruluğunu gösterir.

Ayrıca tek solitary dalganın farklı zamanlarda ve farklı p değerlerindeki davranışı Şekil 3.1'de çizilmiş buna göre artan p değerine bağlı olarak dalganın genliği dalganın yüksekliği ile doğru orantılı olduğundan, dalganın yüksekliği de artmaktadır. $t = 0$ dan $t = 20$ zamanına kadar çizilen dalga hareketleri incelendiğinde, dalganın sağa doğru genlik, hız ve şeklinde herhangi bir bozulma oluşmadan ilerlediği görülmektedir ki, bu dalgalar solitary dalgalardır.

Tablo 3.3. $p = 2, 3, 4$; $t = 20$ ve $x \in [0, 100]$ için hesaplanan tek solitary dalganın farklı konum ve zaman adımındaki hata norm değerleri

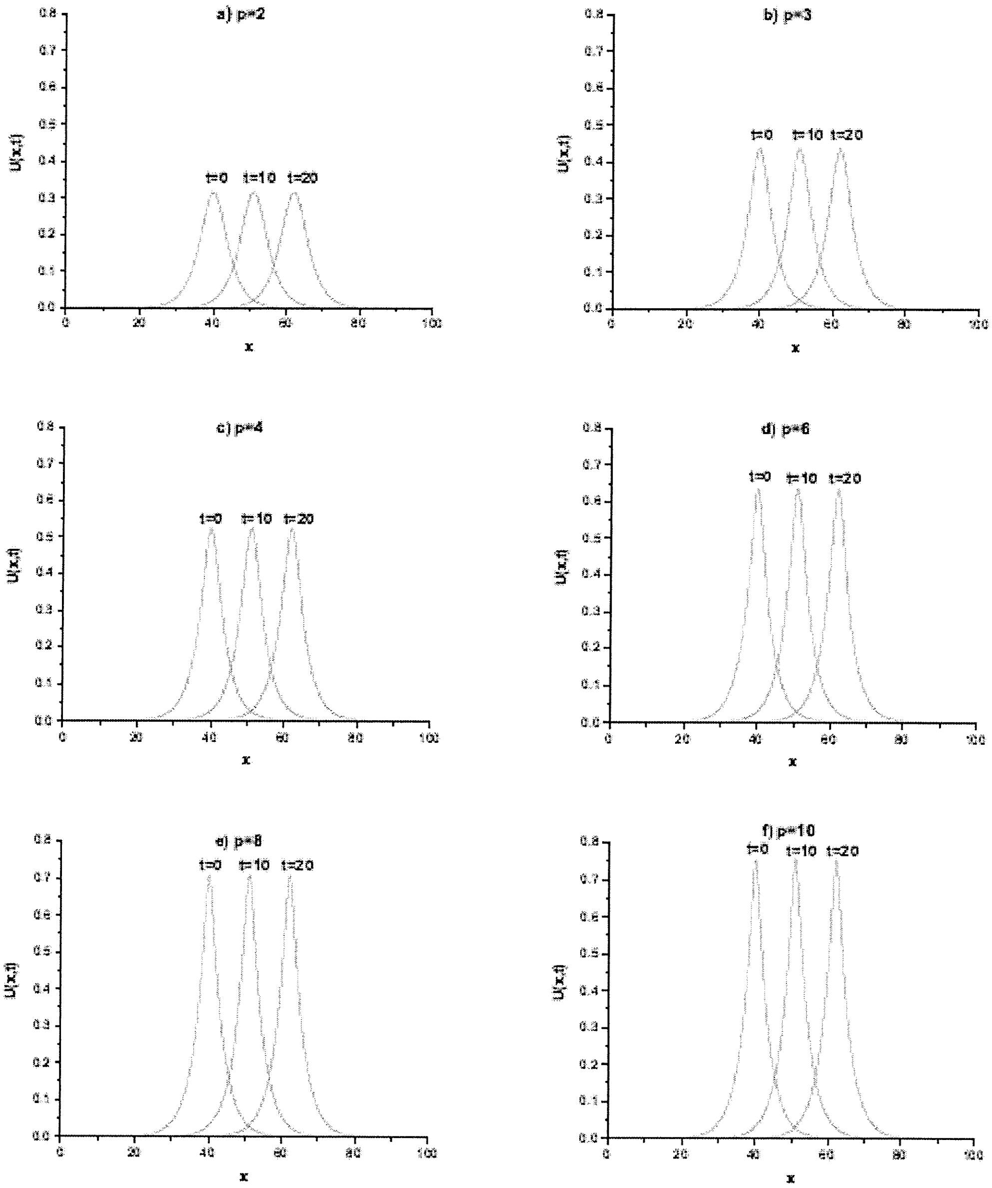
			p=2			p=3			p=4		
		c	0.03	0.1	0.3	0.03	0.1	0.3	0.03	0.1	0.3
		gen.	0.17	0.31	0.54	0.29	0.43	0.62	0.38	0.52	0.68
	h	Δt									
	0.1	0.010	1.002	0.044	0.119	1.343	0.062	0.157	1.585	0.073	0.195
	0.2	0.010	0.889	0.012	0.037	1.192	0.013	0.091	1.407	0.017	0.186
	0.1	0.025	1.002	0.064	0.328	1.343	0.109	0.593	1.585	0.158	0.988
$L_2 \times 10^3$	0.2	0.025	0.889	0.025	0.248	1.192	0.055	0.530	1.407	0.101	0.981
	0.1	0.100	1.004	0.488	4.323	1.353	1.035	8.561	1.611	1.795	16.850
	0.2	0.100	0.891	0.452	4.244	1.201	0.986	8.499	1.430	1.741	16.842
	0.1	0.010	0.403	0.014	0.051	0.541	0.022	0.072	0.638	0.027	0.095
	0.2	0.010	0.403	0.006	0.017	0.541	0.007	0.043	0.638	0.007	0.091
	0.1	0.025	0.403	0.023	0.143	0.541	0.042	0.277	0.638	0.064	0.482
$L_\infty \times 10^3$	0.2	0.025	0.403	0.009	0.105	0.541	0.022	0.245	0.638	0.042	0.475
	0.1	0.100	0.403	0.199	1.894	0.541	0.433	4.016	0.638	0.766	8.235
	0.2	0.100	0.403	0.185	1.854	0.541	0.414	3.984	0.638	0.744	8.213

Tablo 3.4. $p=6,8,10$; $t=20$ ve $x \in [0,100]$ için hesaplanan tek solitary dalganın farklı konum ve zaman adımındaki hata norm değerleri

			p=6			p=8			p=10		
		c	0.03	0.1	0.3	0.03	0.1	0.3	0.03	0.1	0.3
		gen.	0.52	0.63	0.76	0.60	0.70	0.81	0.66	0.75	0.84
	h	Δt									
$L_2 \times 10^3$	0.1	0.010	1.900	0.084	0.339	2.094	0.082	0.952	2.225	0.076	3.976
	0.2	0.010	1.686	0.049	0.699	1.858	0.158	2.887	1.974	0.521	13.291
	0.1	0.025	1.901	0.296	2.954	2.095	0.590	12.175	2.228	1.461	57.247
	0.2	0.025	1.686	0.268	3.316	1.859	0.679	14.108	1.976	1.926	66.443
$L_\infty \times 10^3$	0.1	0.010	0.765	0.033	0.178	0.843	0.032	0.529	0.896	0.028	2.298
	0.2	0.010	0.765	0.021	0.366	0.843	0.074	1.591	0.896	0.257	7.601
	0.1	0.025	0.765	0.128	1.563	0.843	0.274	6.802	0.896	0.724	33.005
	0.2	0.025	0.765	0.119	1.750	0.843	0.317	7.808	0.896	0.954	38.021

Tablo 3.5. $p = 2, 3, 4$ ve $x \in [0, 100]$ için hesaplanan tek solitary dalganın sayısal sonuçlarının karşılaştırılması

	Yöntemler	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	I_1	I_2	I_3
$p=2$	CBSC-CN [34]	16.3900	9.2400	4.4420	3.2990	1.4130
$c=1$	CBSC+PA-CN [34]	20.3000	11.2000	4.4400	3.2960	1.4110
$h=0.2$	CBSC [38]	9.3019	5.4371	4.4428	3.2998	1.4142
$\Delta t=0.025$	MFC [39]	3.9140	2.0190	4.4428	3.2997	1.4141
$t=10$	QBSPG [20]	3.0053	1.6874	4.4428	3.2998	1.4141
	QBSC [37]	2.4155	1.0797	4.4431	3.3003	1.4146
	EBSC [23]	2.3909	1.0647	4.4428	3.2998	1.4142
	QBSC	2.5893	1.3518	4.4428	3.2997	1.4143
$p=3$	QBSPG [20] t=5	0.0409	0.0238	3.6775	1.5657	0.2268
$c=0.3$	t=10	0.0719	0.0377	3.6775	1.5657	0.2268
$h=0.1$	QBSC t=5	0.0393	0.0182	3.6776	1.5657	0.2268
$\Delta t=0.01$	t=10	0.0787	0.0365	3.6776	1.5657	0.2268
$p=4$	QBSPG [20] t=5	0.0542	0.0382	3.7592	1.7299	0.2894
$c=0.3$	t=10	0.1225	0.0662	3.7592	1.7299	0.2894
$h=0.1$	QBSC t=5	0.0497	0.0244	3.7592	1.7300	0.2894
$\Delta t=0.01$	t=10	0.0987	0.0483	3.7592	1.7300	0.2894



Şekil 3.1. $p = 2, 3, 4, 6, 8, 10,\ c = 0.1,\ x_0 = 40, x \in [0, 100]$ için tek solitary dalganın $t = 0, 10, 20$'deki davranışı

3.3.2 İki solitary dalganın girişimi

Bu bölümde genlikleri sırasıyla iki ve bir olan aynı doğrultuda hareket eden iki pozitif solitary dalganın girişimi,

$$U(x,0) = \sum_{i=1}^{2} \sqrt[p]{\frac{c_i(p+2)}{2p} \sec h^2 \left[\frac{p}{2} \sqrt{\frac{c_i}{\mu(c_i+1)}} (x - x_i) \right]} \tag{3.20}$$

başlangıç şartı kullanılarak incelenmiştir.

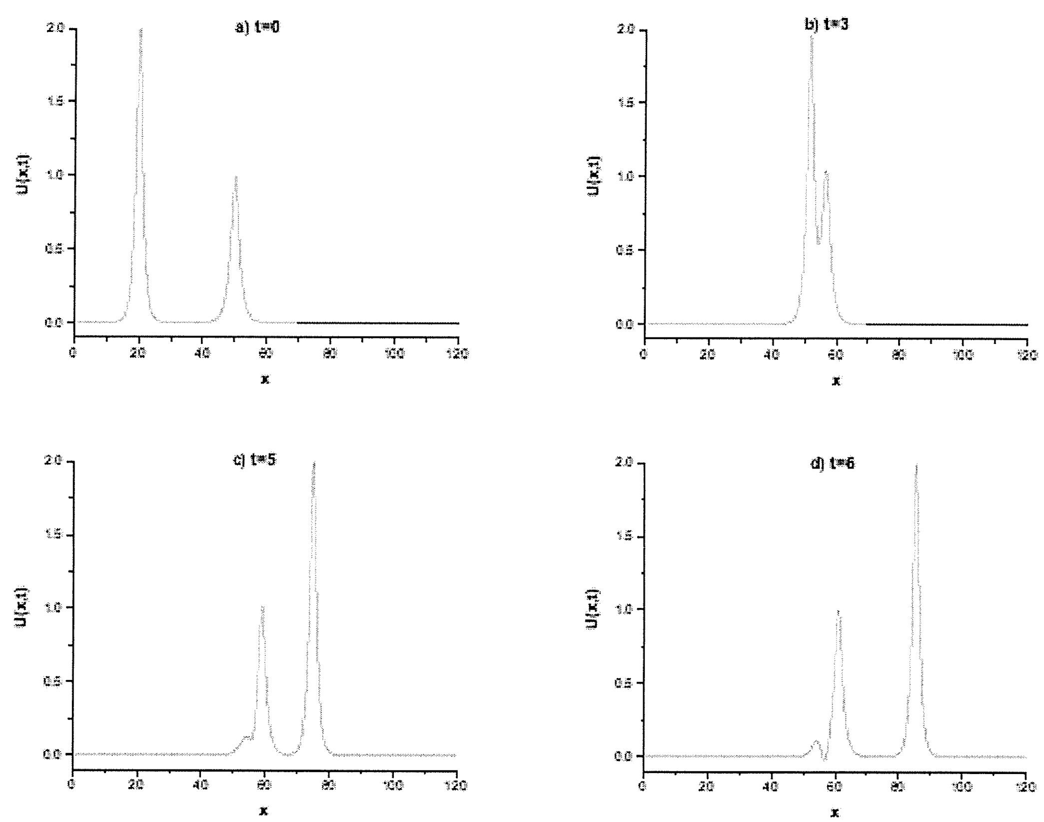
Sayısal hesaplamalar için üç farklı parametre kümesi göz önüne alınmıştır. İlk olarak $0 \leq x \leq 250$ aralığında $p = 2$, $c_1 = 4$, $c_2 = 1$, $x_1 = 25$, $x_2 = 55$, $h = 0.2$, $\Delta t = 0.025$ ve $\mu = 1$ seçilmiştir. İkinci olarak $0 \leq x \leq 120$ aralığında $p = 3$, $c_1 = 48/5$, $c_2 = 6/5$, $x_1 = 20$, $x_2 = 50$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.01$ ve $\mu = 1$ alınmıştır. Son olarak $0 \leq x \leq 200$ aralığında $p = 4$, $c_1 = 64/3$, $c_2 = 4/3$, $x_1 = 20$, $x_2 = 80$, $h = 0.125$, $\Delta t = 0.01$ ve $\mu = 1$ kullanılmıştır. Elde edilen sonuçlar Tablo 3.6 ve Tablo 3.7'de sunulmuştur. Bu tablolardan da anlaşılacağı üzere, korunum sabitlerinin başlangıca göre değişimleri, oldukça küçük kalmış ve sonuçlar Roshan'ın [20] elde ettiği sonuçlarla uyumlu olduğu görülmüştür. Ayrıca iki solitary dalganın farklı zaman adımlarındaki hareketi Şekil 3.2 ve Şekil 3.3'de verilmiştir. Verilen bu şekillerde görüldüğü gibi, başlangıçta küçük genliğe sahip dalga, aynı yönde ilerleyen büyük genliğe sahip dalganın ilerisinde olup zamanla büyük genlikli dalga küçük genlikli dalgayı yakalar ve çarpışırlar. Ardından bu dalgalar ayrılarak büyük genlikli dalganın öne geçmesiyle yollarına devam ederler. Sonuç olarak, bu dalgaların aynı yönde ilerlerken çarpışması sonucunda dalgaların şekil, hız ve büyüklük gibi durumları hiç etkilenmez ya da çok az etkilenir, bundan dolayı bu iki dalga solitondur.

Tablo 3.6. $p = 2$, genlikleri = 2, 1, $h = 0.2$, $\Delta t = 0.025$ ve $x \in [0, 250]$ için iki solitary dalganın girişimine ait korunum sabitleri

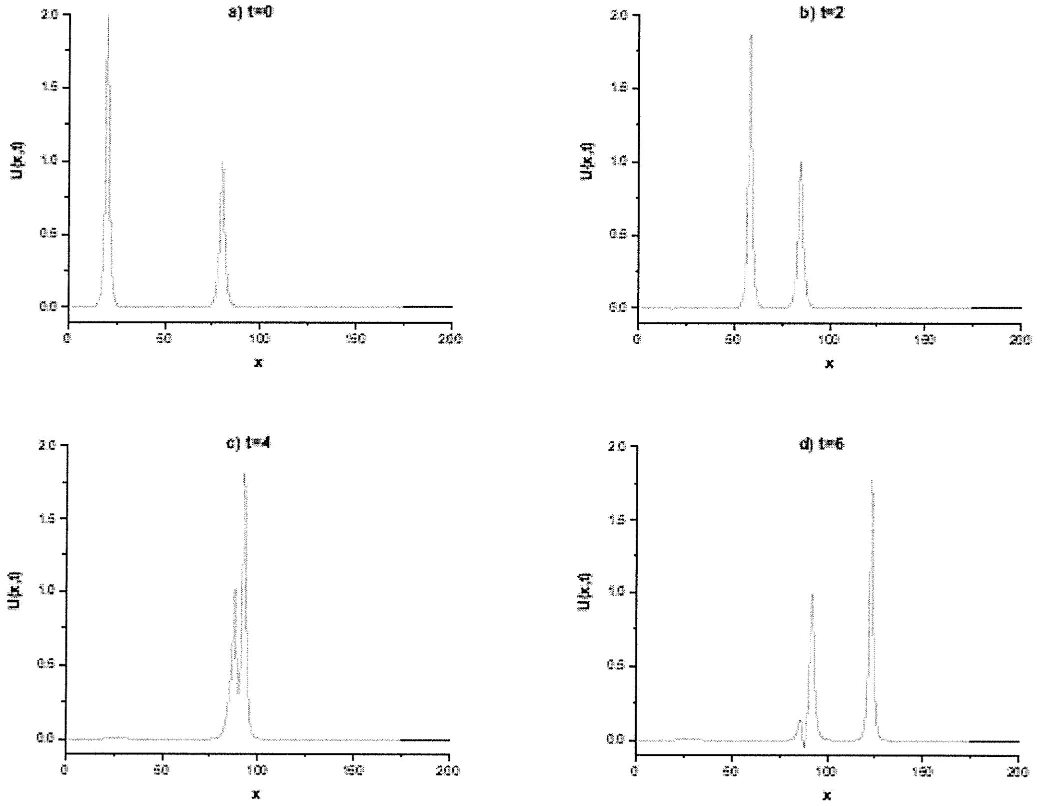
	I_1		I_2		I_3	
t	QBSC	QBSPG [20]	QBSC	QBSPG [20]	QBSC	QBSPG [20]
0	11.4676	11.4677	14.6292	14.6286	22.8803	22.8788
4	11.4676	11.4677	14.6277	14.6292	22.8818	22.8811
8	11.4668	11.4677	14.1399	14.6229	23.3695	22.8798
12	11.4676	11.4677	14.6803	14.6299	22.8292	22.8803
16	11.4676	11.4677	14.6442	14.6295	22.8653	22.8805
20	11.4676	11.4677	14.6309	14.6299	22.8786	22.8806

Tablo 3.7. $p = 3, 4$ ve genlikleri = 2, 1 için iki solitary dalganın girişimine ait korunum sabitleri

Zaman		0	1	2	3	4	5	6
	I_1	9.6907	9.6894	9.6881	9.6851	9.6860	9.6848	9.6835
p=3	I_2	12.9443	12.9433	12.9391	12.3044	12.9704	13.0539	13.0028
	I_3	17.0186	17.0197	17.0239	17.6586	16.9926	16.9091	16.9601
	I_1	8.8342	8.6650	8.5662	8.4965	8.4529	8.4089	8.3702
p=4	I_2	12.1708	11.9332	11.7919	11.6913	11.4644	11.7254	11.5990
	I_3	14.0294	14.2670	14.4083	14.5090	14.7358	14.4748	14.6012



Şekil 3.2. $p = 3$ için iki solitary dalganın a) $t = 0$, b) $t = 3$, c) $t = 5$, d) $t = 6$'daki hareketi



Şekil 3.3. p = 4 için iki solitary dalganın a) t = 0, b) t = 2, c) t = 4, d) t = 6'daki hareketi

3.3.3 Ardışık dalgaların oluşumu

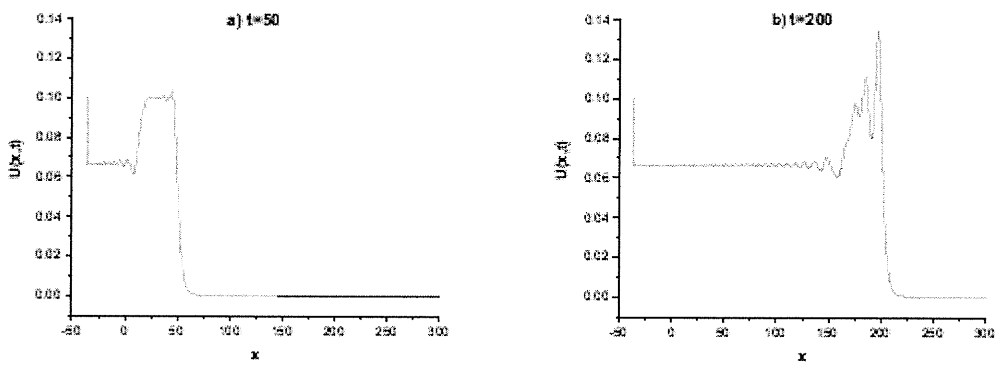
Burada, ardışık dalgaların oluşumu aşağıdaki başlangıç şartı ile birlikte araştırılmıştır:

$$U(x,0) = \frac{1}{2}U_0\left[1 - \tanh\left(\frac{x - x_c}{d}\right)\right]. \tag{3.21}$$

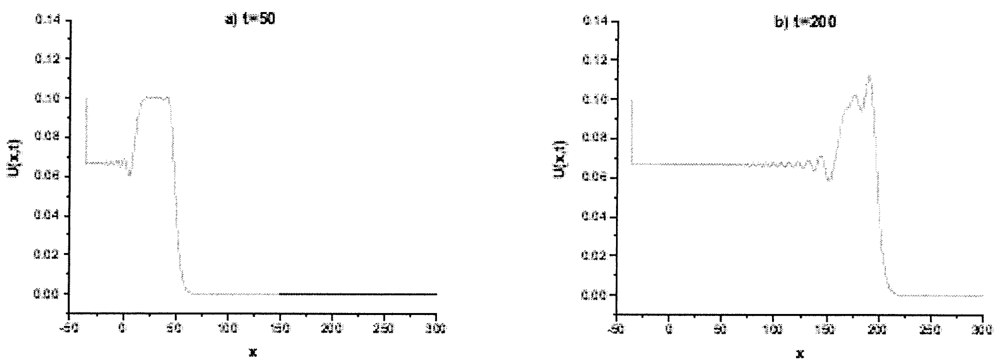
Denge seviyesinin üstünde bulunan suyun yükseltisini başlangıç şartının $t = 0$ anı belirler. Burada d durgun ve derin su arasındaki eğimi, x_C de su seviyesindeki değişimi gösterir. [35, 40, 41] referansları ile verilen çalışmalarla uygunluk göstermesi için $-36 \leq x \leq 300$ aralığında $U_0 = 0.1$, $\mu = 1/6$, $x_C = 0$, $d = 5$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.1$, parametreleri alınmıştır. Elde edilen sonuçlar Tablo 3.8'de gösterilmiştir. Tablodan görüldüğü üzere korunum sabitlerinin değişimi istenen seviyededir. Ardışık dalgaların oluşumu Şekil 3.4, Şekil 3.5 ve Şekil 3.6'da verilmiştir. Şekillerden de görüldüğü gibi, seçilen bu başlangıç değerine göre uzun bir süre solitary dalgalarda çok az dalgalanmalar oluştuğu görülür. İlerleyen zaman adımlarında solitary dalganın ani bir sıçrama hareketi ile genliği büyür ve daha sonra dalgayavaş yavaş sönmeye başlar.

Tablo 3.8. $U_0 = 0.1$, $x_0 = 0$, $d = 5$, $\mu = 1/6$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.1$ ve $x \in [-36, 300]$ için ardışık dalgaların oluşumuna ait korunum sabitleri

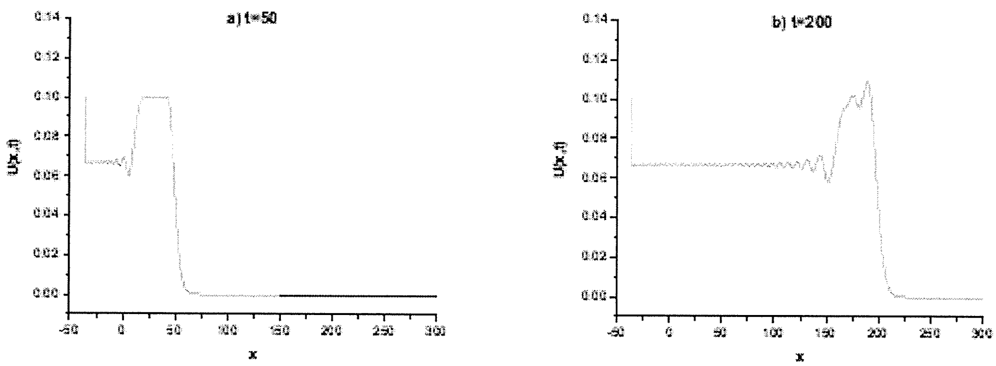
Zaman	I_1			I_2			I_3		
↓	p=2	p=3	p=4	p=2	p=3	p=4	p=2	p=3	p=4
0	3.6049	3.6049	3.6049	0.3372	0.3372	0.3372	0.0014	0.0014	0.0014
50	7.0244	6.9980	6.9954	0.5694	0.5668	0.5665	0.0041	0.0041	0.0041
100	10.3873	10.3343	10.3290	0.7946	0.7893	0.7888	0.0051	0.0051	0.0051
150	13.7503	13.6706	13.6626	1.0198	1.0119	1.0110	0.0061	0.0061	0.0061
200	17.1133	17.0069	16.9961	1.2450	1.2344	1.2333	0.0071	0.0071	0.0071



Şekil 3.4. p = 2 için a) t = 50, b) t = 200 değerlerindeki ardışık dalgaların oluşumu



Şekil 3.5. $p = 3$ için a) $t = 50$, b) $t = 200$ değerlerindeki ardışık dalgaların oluşumu



Şekil 3.6. $p = 4$ için a) $t = 50$, b) $t = 200$ değerlerindeki ardışık dalgaların oluşumu

4. BÖLÜM

GRLW DENKLEMİNİN SEPTİK B-SPLİNE KOLLOKASYON SONLU ELEMAN YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

GRLW denklemi,

$$U_t+U_x+p(p+1)U^pU_x-\mu U_{xxt}=0 \tag{4.1}$$

şeklindedir. Fiziksel sınır şartları $x \to \pm\infty$ iken $U \to 0$ dır. Burada alt indis t ve x sırasıyla zaman ve boyutsal türevi ifade ederler ki, ε ve p pozitif tamsayı olup, μ pozitif bir sabit sayıdır.

Sınır ve başlangıç şartları,

$$\begin{aligned} &U(a,t)=0, \quad U_x(a,t)=0, \quad U_{xxx}(a,t)=0,\\ &U(b,t)=0, \quad U_x(b,t)=0, \quad U_{xxx}(b,t)=0,\\ &U(x,0)=f(x), \quad a\le x\le b, \end{aligned} \tag{4.2}$$

şeklinde alınacaktır.

Sonlu $[a,b]$ aralığına sınırlandırılmış çözüm bölgesini ele alacak olursak aralık uzunluğu $h=\frac{b-a}{N}=(x_{m+1}-x_m)$ ve $a=x_0<x_1<\ldots<x_N=b$ olmak üzere, $[a,b]$ aralığı x_m düğüm noktaları aracılıyla N tane eşit aralığa parçalanır. $\emptyset_m(x)$ septik B-spline fonksiyonları $m=-3,-2,\ldots,N+3$ olmak üzere x_m düğüm noktalarında aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır [9].

$$\emptyset_m(x)=\frac{1}{h^7}\begin{cases} (x-x_{m-4})^7, & [x_{m-4},x_{m-3}]\\ (x-x_{m-4})^7-8(x-x_{m-3})^7, & [x_{m-3},x_{m-2}]\\ (x-x_{m-4})^7-8(x-x_{m-3})^7+28(x-x_{m-2})^7, & [x_{m-2},x_{m-1}]\\ (x-x_{m-4})^7-8(x-x_{m-3})^7+28(x-x_{m-2})^7-56(x-x_{m-1})^7, & [x_{m-1},x_m]\\ (x_{m+4}-x)^7-8(x_{m+3}-x)^7+28(x_{m+2}-x)^7-56(x_{m+1}-x)^7, & [x_m,x_{m+1}]\\ (x_{m+4}-x)^7-8(x_{m+3}-x)^7+28(x_{m+2}-x)^7, & [x_{m+1},x_{m+2}]\\ (x_{m+4}-x)^7-8(x_{m+3}-x)^7, & [x_{m+2},x_{m+3}]\\ (x_{m+4}-x)^7, & [x_{m+3},x_{m+4}]\\ 0. & \text{diğer durumlar} \end{cases} \tag{4.3}$$

$\{\emptyset_{-3}(x),\emptyset_{-2}(x),\ldots,\emptyset_{N+2}(x),\emptyset_{N+3}(x)\}$ septik B-spline fonksiyonları, $[a,\ b]$ aralığındaki fonksiyonlar için bir baz oluşturur. $\emptyset_m$ septik B-spline fonksiyonların her biri sonlu ardışık sekiz tane alt aralığı örtecektir. Bundan dolayı sekiz adet B-spline fonksiyonu her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu alt aralığını örter. $U_N(x,t)$ yaklaşımı septik B-spline şekil fonksiyonları türünden yazılırsa,

$$U_N(x,t) = \sum_{m=-3}^{N+3} \emptyset_m(x)\delta_m(t) \tag{4.4}$$

yaklaşım fonksiyonu elde edilir. Yukarıdaki $\delta_m(t)$, zamana bağlı bilinmeyen parametreleri GRLW denkleminin septik B-spline kollokasyon şartları ve sınır koşulları kullanılarak belirlenecektir. (4.4) ile verilen yaklaşım çözümünde (4.3) ile verilen B-spline fonsiyonlar kullanılırsa, U_m yaklaşım fonksiyonu ve U_m'in x'e göre U'_m, U''_m türevleri, x_m düğüm noktasında δ_m bilinmeyen parametreleri türünden,

$$\begin{aligned}
Um &= \delta_{m-3}+120\delta_{m-2}+1191\delta_{m-1}+2416\delta_m + 1191\delta_{m+1} +120\delta_{m+2} + \delta_{m+3},\\
U'_m &= \frac{7}{h}(-\delta_{m-3} -56\delta_{m-2}-245\delta_{m-1} + 245\delta_{m+1} +56\delta_{m+2} + \delta_{m+3}),\\
U''_m &= \frac{42}{h^2}(\delta_{m-3} +24\delta_{m-2}+15\delta_{m-1} - 80\delta_m + 15\delta_{m+1} + 24\delta_{m+2} +\delta_{m+3}).
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Şeklinde bulunur [33]. Böylelikle U değişimi sonlu $[x_m, x_{m+1}]$ elemanı üzerinde aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$U = \sum_{m=-3}^{N+3} \emptyset_m\delta_m \, . \tag{4.6}$$

(4.1) ile verilen GRLW denkleminde, (4.5) de bulunan U_m , U'_m ve U''_m yerine yazılırsa düğüm noktalarıyla birlikte kollokasyon şartını oluşacaktır. Buna göre;
Klasik lineerleştirme tekniği için,

$$\begin{aligned}
&(\dot{\delta}_{m-3} +120\dot{\delta}_{m-2}+1191\dot{\delta}_{m-1}+2416\dot{\delta}_m + 1191\dot{\delta}_{m+1} +120\dot{\delta}_{m+2}+\dot{\delta}_{m+3})\\
&+\frac{7}{h}(-\delta_{m-3} -56\delta_{m-2}-245\delta_{m-1} + 245\delta_{m+1} +56\delta_{m+2} + \delta_{m+3})\\
&+\frac{7p(p+1)Z_m}{h}(-\delta_{m-3} -56\delta_{m-2}-245\delta_{m-1} + 245\delta_{m+1} +56\delta_{m+2} + \delta_{m+3})\\
&-\frac{42\mu}{h^2}(\dot{\delta}_{m-3} +24\dot{\delta}_{m-2}+15\dot{\delta}_{m-1}-80\dot{\delta}_m + 15\dot{\delta}_{m+1} +24\dot{\delta}_{m+2}+\dot{\delta}_{m+3}) = 0
\end{aligned} \tag{4.7}$$

biçiminde birleştirilmiş adi diferansiyel denklemlerin bir kümesi bulunur. Burada lineer olmayan Z_m terimi;

$$Z_m \cong [U_m^n]^p = \begin{pmatrix} \delta_{m-3}^n + 120\delta_{m-2}^n + 1191\delta_{m-1}^n + 2416\delta_m^n + 1191\delta_{m+1}^n \\ +120\delta_{m+2}^n + \delta_{m+3}^n \end{pmatrix}^p$$

dir. (4.7) ile verilen denklemde "$\cdot$" zamana bağlı türevi ifade eder. (4.7) ile verilen genel çözüm denkleminde konuma göre bilinmeyen parametreler δ_m ve zamana göre türevleri olan $\dot{\delta}_m$ parametrelerine,

$$\delta_m = \frac{1}{2}(\delta_m^n + \delta_m^{n+1}), \qquad \dot{\delta}_m = \frac{\delta_m^{n+1} - \delta_m^n}{\Delta t} \tag{4.8}$$

(4.8) de verilen Crank-Nicolson ve klasik ileri sonlu fark yaklaşımı uygulanırsa buradan klasik lineerleştirme tekniği için δ_i^{n+1} ve δ_i^n bilinmeyen zaman parametrelerine göre, n ve $n+1$ ardışık zaman adımı arasındaki tekrarlama bağıntısı,

$$\gamma_1\delta_{m-3}^{n+1} + \gamma_2\delta_{m-2}^{n+1} + \gamma_3\delta_{m-1}^{n+1} + \gamma_4\delta_m^{n+1} + \gamma_5\delta_{m+1}^{n+1} + \gamma_6\delta_{m+2}^{n+1} + \gamma_7\delta_{m+3}^{n+1}$$

$$= \gamma_7\delta_{m-3}^n + \gamma_6\delta_{m-2}^n + \gamma_5\delta_{m-1}^n + \gamma_4\delta_m^n + \gamma_3\delta_{m+1}^n + \gamma_2\delta_{m+2}^n + \gamma_1\delta_{m+3}^n \tag{4.9}$$

şeklinde bulunur. Buradaki γ katsayıları,

$$\gamma_1 = (1 - E - p(p+1)EZ_m - M), \qquad \gamma_2 = (120 - 56E - 56p(p+1)EZ_m - 24M),$$

$$\gamma_3 = (1191 - 245E - 245p(p+1)EZ_m - 15M), \qquad \gamma_4 = (2416 + 80M),$$

$$\gamma_5 = (1191 + 245E + 245p(p+1)EZ_m - 15M),$$

$$\gamma_6 = (120 + 56E + 56p(p+1)EZ_m - 24M), \qquad \gamma_7 = (1 + E + p(p+1)EZ_m - M),$$

$$m = 0,1,\ldots,N, \quad E = \frac{7}{2h}\Delta t, \quad M = \frac{42\mu}{h^2}. \tag{4.10}$$

biçimindedir.

(4.10) da verilen cebirsel denklem sistemi $N+1$ tane lineer denklemden meydana gelir, ancak burada $(\delta_{-3}, \delta_{-2}, \delta_{-1}, \ldots, \delta_{N+1}, \delta_{N+2}, \delta_{N+3})^T$ parametrelerinden gelen $N+7$ tane bilinmeyen olup, bu sisteme ait tek çözümü bulmak için altı tane ek şarta ihtiyaç duyulur ki bu ek şartlar (4.2) de verilen sınır koşulları aracılığıyla bulunur. Cebirsel denklem sistemine sınır koşullarının dahil edilmesi şeklinde ifade edilen bu adımın benzeri, aşağıda verilen iterasyonu başlatmak için d^0 ın tespit edilmesi aşamasında verilmiştir. Bu işlemlerden sonra (4.9) ile verilen cebirsel denklem sisteminden $\delta_{-3}, \delta_{-2}, \delta_{-1}$ ve $\delta_{N+1}, \delta_{N+2,} \delta_{N+3}$ parametreleri eliminize edilir. Buradan $d^n = (\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_N)^T$ olmak üzere, $N + 1$ tane bilinmeyenli cebirsel denklem sistemi elde edilir:

$$C\mathrm{d}^{\mathrm{n}+1} = D\mathrm{d}^{\mathrm{n}}. \tag{4.11}$$

C ve D matrisleri, $(N + 1) \times (N + 1)$ boyutlu yedi sütun elemanlı septa-diagonal matris olarak adlandırılan matrislerdir. (4.11) ile verilen matris denklemi aşağıda alt bölüm 4.1'de belirtildiği üzere Fortran programında Thomas algoritması (septa-diagonal algoritma) kullanılmak suretiyle çözülmüştür. Bu adımda Z_m deki eleman parametresine aşağıda verilen iç iterasyon her bir zaman adımında üç veya dört defa tatbik edilerek çözüm iyileştirilmiştir.

$$(\delta_m^*)^{n+1} = \delta_m^n + \frac{1}{2}(\delta_m^{n+1} - \delta_m^n)$$

Başlangıç iterasyonu

Tekrarlama bağıntısının verildiği (4.9) da, d^0 değerinin bulunmasıyla iterasyon başlatılırsa başlangıç parametreleri türünden yaklaşım fonksiyonu;

$$U_N(x,0) = \sum_{m=-2}^{N+2} \emptyset_m(x)\delta_m^0(t).$$

biçiminde olacaktır. Aşağıda belirtilen başlangıç şartı ve sınır noktalarındaki türevler, yukarıdaki yaklaşımda verilen δ_m^0 parametrelerini bulmak için kullanılacaktır.

$$U_N(x,0) = U(x_m,0); \quad m = 0,1,2,\dots,N$$

$$(U_N)_x(a,0) = 0, \quad (U_N)_{xx}(a,0) = 0, \quad (U_N)_{xxx}(a,0) = 0, \tag{4.12}$$

$$(U_N)_x(b,0) = 0, \quad (U_N)_{xx}(b,0) = 0, \quad (U_N)_{xxx}(b,0) = 0.$$

Başlangıç şartı δ_m parametreleri türünden,

$$\delta_{-3}+120\delta_{-2}+1191\delta_{-1}+2416\delta_0 + 1191\delta_1 +120\delta_2 + \delta_3 = U(x_0,0),$$

$$\delta_{-2}+120\delta_{-1}+1191\delta_0+2416\delta_1 + 1191\delta_2 +120\delta_3 + \delta_4 = U(x_1,0)$$

δ_{-1}+120δ_0+1191δ_1+2416δ_2 + 1191δ_3 +120δ_4 + δ_5 = $U\,(x_2, 0)$

δ_0+120δ_1+1191δ_2+2416δ_3 + 1191δ_4 +120δ_5 + δ_6 = $U\,(x_3, 0)$

. . . .

. . . .

$$\delta_{N-6}+120\delta_{N-5}+1191\delta_{N-4}+2416\delta_{N-3}+1191\delta_{N-2}+120\delta_{N-1}+\delta_N=U\,(x_{N-3},0),$$
$$\delta_{N-5}+120\delta_{N-4}+1191\delta_{N-3}+2416\delta_{N-2}+1191\delta_{N-1}+120\delta_{N}+\delta_{N+1}=U\,(x_{N-2},0),$$
$$\delta_{N-4}+120\delta_{N-3}+1191\delta_{N-2}+2416\delta_{N-1}+1191\delta_{N}+120\delta_{N+1}+\delta_{N+2}=U\,(x_{N-1},0),$$
$$\delta_{N-3}+120\delta_{N-2}+1191\delta_{N-1}+2416\delta_{N}+1191\delta_{N+1}+120\delta_{N+2}+\delta_{N+3}=U\,(x_{N},0)$$

(4.13)

olarak elde edilir. Bu denklem sistemi, $(\delta_{-3},\delta_{-2},\delta_{-1},\dots,\delta_{N+1},\delta_{N+2},\delta_{N+3})^T$ parametrelerinden gelen $N+7$ tane bilinmeyenden ve $N+1$ tane lineer denklemden oluşur. Dolayısıyla sistemin tek çözümünün bulunabilmesi için altı tane daha ek şarta ihtiyaç duyulur. O halde başlangıç şartının (4.12) ile verilen sınır noktalarındaki türevleri kullanılacak olursa , δ_m parametreleri türünden türevli sınır koşulları,

$$-\delta_{-3}-56\delta_{-2}-245\delta_{-1}+245\delta_1+56\delta_2+\delta_3=0,$$
$$\delta_{-3}+24\delta_{-2}+15\delta_{-1}-80\delta_0+15\delta_1+24\delta_2+\delta_3=0,$$
$$-\delta_{-3}-8\delta_{-2}+19\delta_{-1}-19\delta_1+8\delta_2+\delta_3=0,$$
$$-\delta_{N-3}-56\delta_{N-2}-245\delta_{N-1}+245\delta_{N+1}+56\delta_{N+2}+\delta_{N+3}=0, \qquad (4.14)$$
$$\delta_{N-3}+24\delta_{N-2}+15\delta_{N-1}-80\delta_N+15\delta_{N+1}+24\delta_{N+2}+\delta_{N+3}=0,$$
$$-\delta_{N-3}-8\delta_{N-2}+19\delta_{N-1}-19\delta_{N+1}+8\delta_{N+2}+\delta_{N+3}=0$$

şeklinde bulunur. Bu denklemlerden $(\delta_{-3},\delta_{-2},\delta_{-1},\delta_{N+1},\delta_{N+2},\delta_{N+3})$ parametreleri hesaplanırsa aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\delta_{-3}=\frac{1}{3}(-280\delta_0+105\delta_1+16\delta_2+10\delta_3),$$
$$\delta_{-2}=\frac{220}{27}\delta_0-\frac{55}{18}\delta_1-\frac{35}{9}\delta_2-\frac{11}{54}\delta_3,$$
$$\delta_{-1}=-\frac{40}{27}\delta_0+\frac{14}{9}\delta_1+\frac{8}{9}\delta+\frac{1}{27}\delta_3,$$
$$\delta_{N+1}=-\frac{40}{27}\delta_N+\frac{14}{9}\delta_{N-1}+\frac{8}{9}\delta_{N-2}+\frac{1}{27}\delta_{N-3}, \qquad (4.15)$$

$$\delta_{N+2} = \frac{220}{27}\delta_N - \frac{55}{18}\delta_{N-1} - \frac{35}{9}\delta_{N-2} - \frac{11}{54}\delta_{N-3},$$

$$\delta_{N+3} = \frac{1}{3}(-280\delta_N + 105\delta_{N-1} + 16\delta_{N-2} + 10\delta_{N-3})$$

Bulunan bu değerler (4.13) ile verilen denklem de uygun yerlerde kullanılırsa, denklem (4.13) dan $(\delta_{-3}, \delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_{N+1}, \delta_{N+2}, \delta_{N+3})$ parametreleri yok edilir. Bu adımlardan sonra d^0 başlangıç değerinin $Td^0 = v.$ matris formu bulunur.
Burada,

$$T = \begin{bmatrix}
1536 & 2712 & 768 & 24 & & & & & & \\
\frac{82731}{81} & \frac{210568.5}{81} & \frac{104796}{81} & \frac{10063.5}{81} & 1 & & & & & \\
\frac{9600}{81} & \frac{96597}{81} & \frac{195768}{81} & \frac{96474}{81} & 120 & 1 & & & & \\
 & & \ddots & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & \\
 & & & 1 & 120 & 1191 & 2416 & 1191 & 120 & 1 \\
 & & & & 1 & 120 & \frac{96474}{81} & \frac{195768}{81} & \frac{96597}{81} & \frac{9600}{81} \\
 & & & & & 1 & \frac{10063.5}{81} & \frac{104796}{81} & \frac{210568.5}{81} & \frac{82731}{81} \\
 & & & & & & 24 & 768 & 2712 & 1536
\end{bmatrix},$$

$$d^0 = (\delta_{-3}, \delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_{N+1}, \delta_{N+2}, \delta_{N+3})^T,$$
$$v = (U(x_0, 0), U(x_1, 0), \ldots, U(x_{N-1}, 0), U(x_N, 0))^T.$$

Yukarıda verilen matris denkleminden d^0 başlangıç değeri, Thomas algoritması ile elde edilir.

d^0 'ın bulunmasının ardından $n = 0$ için (4.11) de verilen matris sisteminin sağ tarafı oluşturulduktan sonra, Thomas algoritması ile matrisin sol tarafı bulunur. Böylelikle istenilen zaman adımında bir önceki parametreden elde edilen ifadelerin kullanılması (iterasyon yapılması) GRLW denkleminin yaklaşık çözümlerini bulmamızı sağlar.

4.1 Thomas algoritması ile septa-diagonal matris sisteminin çözümü

Septa-diagonal matris sisteminin Thomas algoritması ile çözümü, Zaki [42] tarafından açıklandığı gibi ve Fortran programında dizayn edildiği biçimiyle aşağıda verilen adımlarla bulunabilir:

Septa-diagonal sistem aşğıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$a_i\delta_{i-3} + b_i\delta_{i-2} + c_i\delta_{i-1} + d_i\delta_i + e_i\delta_{i+1} + f_i\delta_{i+2} + g_i\delta_{i+3} = h_i, \qquad i = 0,1,2,\dots,N$$

Burada,

$$a_0 = b_0 = c_0 = a_1 = b_1 = g_{N-2} = g_{N-1} = f_{N-1} = g_N = f_N = e_N = 0.$$

İlk olarak, parametreler aşağıdaki şekilde seçilir:

$$\alpha_0 = b_0, \quad \beta_0 = c_0, \quad \mu_0 = d_0, \quad \zeta_0 = \frac{e_0}{\mu_0}, \quad \lambda_0 = \frac{f_0}{\mu_0}, \quad \eta_0 = \frac{g_0}{\mu_0}, \quad \gamma_0 = \frac{h_0}{\mu_0},$$

$$\alpha_1 = b_1, \quad \beta_1 = c_1, \quad \mu_1 = d_1 - \beta_1\zeta_0, \quad \zeta_1 = \frac{e_1 - \beta_1\lambda_0}{\mu_1}, \quad \lambda_1 = \frac{f_1 - \beta_1\gamma_0}{\mu_1},$$

$$\eta_1 = \frac{g_1}{\mu_1}, \quad \gamma_1 = \frac{h_1 - \beta_1\lambda_0}{\mu_1},$$

ve

$$\alpha_2 = b_2, \quad \beta_2 = c_2 - \alpha_2\zeta_0, \quad \mu_2 = d_2 - \lambda_0\alpha_2 - \beta_2\zeta_1, \quad \zeta_2 = \frac{e_2 - \eta_0\alpha_2 - \beta_2\lambda_1}{\mu_2},$$

$$\lambda_2 = \frac{f_2 - \beta_2\eta_1}{\mu_2}, \quad \eta_2 = \frac{g_2}{\mu_2}, \quad \gamma_2 = \frac{h_2 - \alpha_2\gamma_0 - \beta_2\gamma_1}{\mu_2}.$$

İkinci olarak, aşağıda verilen parametreler elde edilir:

$$\alpha_i = b_i - a_i\zeta_{i-3}, \; \beta_i = c_i - a_i\lambda_{i-3} - \alpha_i\zeta_{i-2}, \; \mu_i = d_i - a_i\eta_{i-3} - \lambda_{i-2}\alpha_i - \beta_i\zeta_{i-1},$$

$$\zeta_1 = \frac{e_i - \eta_{i-2}\alpha_i - \beta_i\lambda_{i-1}}{\mu_i}, \quad \lambda_i = \frac{f_i - \beta_i\eta_{i-1} - a_{i-2}\lambda_{i-2}}{\mu_i}, \quad \eta_i = \frac{g_i}{\mu_i},$$

$$\gamma_i = \frac{h_i - \beta_i\gamma_{i-1} - \alpha_i\gamma_{i-2} - a_i\gamma_{i-3}}{\mu_i}, \qquad i = 3,4,\dots,N.$$

Bu iki aşamadan sonra çözüm,

$$\delta_i = \gamma_i - \zeta_i\delta_{i+1} - \lambda_i\delta_{i+2} - \eta_i\delta_{i+3}, \qquad i = 0,1,\dots,N-4,N-3,$$

$$\delta_{N-2} = \gamma_{N-2} - \lambda_{N-2}\delta_N - \eta_{N-2}\delta_{N-1}, \quad \delta_{N-1} = \gamma_{N-1} - \eta_{N-1}\delta_N, \qquad \delta_N = \gamma_N.$$

şeklinde bulunur.

4.2 Lineer kararlılık analizi

Von-Neumann kararlılık analizi, sayısal yöntemin lineer olarak kararlı olup-olmadığını belirlemek için uygulanacaktır. GRLW denkleminde bulunan lineer olmayan $U^p U_x$ terimindeki U^p teriminin bölgesel olarak sabit olduğu kabul edilir, k mod numarası ve h eleman büyüklüğü olarak alınırsa, $\delta_m^n = \xi^n e^{imkh}$ $(i = \sqrt{-1})$ ile verilen Fourier teriminin, (4.10) ile verilen denklem de tatbik edilmesiyle;

$$
\begin{aligned}
&\gamma_1 \xi^{n+1} e^{i(m-3)kh} + \gamma_2 \xi^{n+1} e^{i(m-2)kh} + \gamma_3 \xi^{n+1} e^{i(m-1)kh} + \gamma_4 \xi^{n+1} e^{imkh} \\
&+\gamma_5 \xi^{n+1} e^{i(m+1)kh} + \gamma_6 \xi^{n+1} e^{i(m+2)kh} + \gamma_7 \xi^{n+1} e^{i(m+3)kh} = \\
&\gamma_7 \xi^{n} e^{i(m-3)kh} + \gamma_6 \xi^{n} e^{i(m-2)kh} + \gamma_5 \xi^{n} e^{i(m-1)kh} + \gamma_4 \xi^{n} e^{imkh} \\
&+\gamma_3 \xi^{n} e^{i(m+1)kh} + \gamma_2 \xi^{n} e^{i(m+2)kh} + \gamma_1 \xi^{n} e^{i(m+3)kh}
\end{aligned} \tag{4.16}
$$

eşitliği bulunur.

$e^{ikh} = \cos(kh) + i\sin(kh)$ Euler formülünün (4.16) ile verilen denklem kullanılmasıyla büyüme faktörü olan ξ aşağıdaki şekilde bulunur:

$$\xi = \frac{a - ib}{a + ib}$$

Burada,

$$a = \gamma_4 + (\gamma_5 + \gamma_3)\cos[hk] + (\gamma_6 + \gamma_2)\cos[2hk] + (\gamma_7 + \gamma_1)\cos[3hk],$$

$$b = (\gamma_5 - \gamma_3)\ \sin[hk] + (\gamma_6 - \gamma_2)\sin[2hk] + (\gamma_7 - \gamma_1)\sin[3hk]\,.$$

olmak üzere $|\xi|$ nin değeri 1 olur. O halde lineerleştirilmiş algoritma şartsız kararlıdır.

4.3 Sayısal hesaplamalar

Bu kısımda sayısal algoritma, başlangıç şartının farklı değerlerden seçilmesiyle oluşan tek solitary dalganın davranışı, iki solitary dalga arasındaki girişim ve Maxwellian başlangıç koşulunu içeren üç örneğe uygulanmıştır. Daha önceki çalışmalarda bulunan sonuçlarla yeni bulunan sayısal sonuçları karşılaştırabilmek ve sayısal algoritmanın doğruluğunu göstermek için L_2 ve L_∞ hata normları aşağıdaki ifadelerden yararlanılarak bulunmuştur.

$$L_2 = \|U^{tam} - U_N\|_2 \simeq \sqrt{h.\sum_{j=0}^{N} \left|U_j^{tam} - (U_N)_j\right|^2}\ ,$$

$$L_\infty = \|U^{tam} - U_N\|_\infty \simeq \max_j \left|U_j^{tam} - (U_N)_j\right|.$$

GRLW dekleminin tam çözümü,

$$U(x,t) = \sqrt[p]{\frac{c(p+2)}{2p}\sec h^2\left[\frac{p}{2}\sqrt{\frac{c}{\mu(c+1)}}(x-(c+1)t-x_0)\right]} \tag{4.17}$$

biçiminde verilmiştir [34]. Burada dalganın genliği $\sqrt[p]{\frac{c(p+2)}{2p}}$, pozitif x yönünde ilerleyen dalganın sabit hızı $c+1$ ve x_0 keyfi bir sabit olup sayısal yöntemin kütle, momentum ve enerjisi ile ilgili özelliklerini koruduğunu belirtmek amacı ile,

$$I_1 = \int_a^b U\,dx,\ I_2 = \int_a^b [U^2 + \mu U_x^2]\,dx,\ I_3 = \int_a^b [U^4 - \mu U_x^2]\,dx \tag{4.18}$$

olarak verilen korunum sabitlerindeki değişim araştırılmıştır.

4.3.1 Tek solitary dalganın davranışı

Buradaki örnek için korunum sabitleri ve hata normları, klasik lineerleştirme tekniği uygulanarak bulunmuştur. Başlangıç şartı olarak kullanılacak fonksiyon (4.17) ile verilen denklemde $t = 0$ alınması ile bulunmuştur. Bulunan yaklaşık değerler, daha önce yapılan çalışmalarla [20, 34, 38] karşılaştırılmıştır. $\mu = 1$, $x_0 = 40$ ve $x \in [0, 100]$ nin aynı değerleri; p, c, h, Δt ve genlikleri' nin farklı değerleri alınarak altı farklı parametre kümesi oluşturulmuştur. Deneyler $t = 10$ veya $t = 20$ anına kadar çalıştırılmıştır.

İlk olarak, $p = 2$, $c = 1$, $h = 0.2$ ve $\Delta t = 0.025$ parametre değerleri alınmıştır. Alınan bu parmetrelere göre solitary dalganın genliği 1 olarak hesaplanmıştır. Sayısal yöntem $t = 10$ zamanına kadar çalıştırılmış ve bulunan değerler Tablo 4.1'de verilmiştir. Bu tablodan, klasik lineerleştirme tekniği için hesaplanan korunum sabitlerinin $t = 10$ zamanına kadar neredeyse değişmeden kaldığı, ayrıca L_2 ve L_∞ hata normlarının değerlerinin beklenildiği kadar küçük kaldığı sonucu çıkarılabilir.

Tablo 4.1. $p = 2$, gen.= 1, $h = 0.2$, $\Delta t = 0.025$ ve $x \in [0, 100]$ için hesaplanan tek solitary dalganın korunum sabitleri ve hata norm değerleri

t	0	2	4	6	8	10
I_1	4.4428661	4.4428661	4.4428661	4.4428661	4.4428661	4.4428661
I_2	3.2998227	3.2998227	3.2998227	3.2998227	3.2998227	3.2998227
I_3	1.4142046	1.4142046	1.4142045	1.4142045	1.4142045	1.4142045
$L_2 \times 10^3$	0.00000000	0.60716949	1.14063868	1.64433340	2.63246332	2.63246332
$L_\infty \times 10^3$	0.00000000	0.36598695	0.63405702	0.88886854	1.39306406	1.39306406

İkinci olarak, $p = 2$, $c = 0.3$, $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ için solitary dalganın genliği 0.54772 büyüklüğüne sahiptir. Sayısal veriler $t = 0$ dan $t = 20$ zamanına kadar çalıştırılmış ve bulunan değerler Tablo 4.2'de verilmiştir. Bu tabloya göre klasik lineerleştirme tekniği uygulanarak hesaplanan korunum sabitleri, zaman ilerledikçe neredeyse aynı kalmaktadır.

Tablo 4.2. $p = 2$, gen.= 0.54772, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.01$ ve $x \in [0, 100]$ için hesaplanan tek solitary dalganın korunum sabitleri ve hata norm değerleri

t	0	4	8	12	16	20
I_1	3.5820205	3.5820205	3.5820205	3.5820206	3.5820205	3.5820204
I_2	1.3450941	1.3450941	1.3450941	1.3450941	1.3450941	1.3450941
I_3	0.1537283	0.1537283	0.1537283	0.1537283	0.1537283	0.1537283
$L_2 \times 10^4$	0.00000000	0.23672179	0.47619933	0.71790890	0.96089487	1.20462362
$L_\infty \times 10^4$	0.00000000	0.09872538	0.20175604	0.30567565	0.40978331	0.51392349

Üçüncü olarak $p = 3$, $c = 6/5$, $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.025$ parametre değerleri için, solitary dalganın genliği 1 olarak elde edilmiştir. Uygulamalar $t = 10$ zamanına kadar yapılmış, bu parametreler için korunum sabitleri ve hata normaları Tablo 4.3'de verilmiştir. Bu tablodan da görüldüğü üzere korunum sabitleri için klasik lineerleştirme tekniği ile elde edilen sonuçlar daha iyidir. Bu dalganın hareketi Şekil 4.1'de verilmiştir. Bu şekilden, dalganın zaman ilerledikçe beklenildiği gibi sağa doğru sabit hız ve neredeyse değişmeyen genlikle hareket ettiği anlaşılabilir. Bu durumun ise solitary dalga tanımına uyduğu görülmektedir.

Tablo 4.3. $p = 3$, gen.= 1, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.025$ ve $x \in [0, 100]$ için hesaplanan tek solitary dalganın korunum sabitleri ve hata norm değerleri

t	0	2	4	6	8	10
I_1	3.7971850	3.7971850	3.7971850	3.7971850	3.7971850	3.7971850
I_2	2.8812522	2.8812522	2.8812522	2.8812522	2.8812522	2.8812522
I_3	0.9729661	0.9730958	0.9731319	0.9731417	0.9731447	0.9731457
$L_2 \times 10^3$	0.00000000	1.90329843	3.69133655	5.45488983	7.21419106	8.97298352
$L_\infty \times 10^3$	0.00000000	1.16955458	2.17410995	3.17420400	4.17483173	5.17598210

Dördüncü olarak, $p=3$, $c=0.3$, $h=0.1$ ve $\Delta t=0.01$ parametreleri alındığında dalganın genliği 0.6 olarak bulunmuş, hesaplamalar $t = 10$ anına kadar yapılmıştır. Elde edilen veriler Tablo 4.4'te listelenmiştir. Tablo 4.4'den, klasik lineerleştime tekniği ile bulunan hareket sabitleri, elde edilme süresince neredeyse aynı kalmaktadır. Ayıca hata norm değerleri ise beklendiği gibi yeterince küçük olarak bulunmuştur.

Tablo 4.4. $p=3$, gen.$=0.6$, $h=0.1$, $\Delta t=0.01$ ve $x \in [0, 100]$ için hesaplanan tek solitary dalganın korunum sabitleri ve hata norm değerleri

t	0	2	4	6	8	10
I_1	3.6776069	3.6776069	3.6776069	3.6776069	3.6776070	3.6776070
I_2	1.5657604	1.5657604	1.5657604	1.5657604	1.5657604	1.5657604
I_3	0.2268462	0.2268462	0.2268462	0.2268462	0.2268462	0.2268462
$L_2 \times 10^4$	0.00000000	0.17328588	0.34661331	0.52006829	0.69360491	0.86713653
$L_\infty \times 10^4$	0.00000000	0.08009713	0.15772492	0.23706868	0.31711953	0.39714589

Beşinci olarak, $p=4$, $c=4/3$, $h=0.1$ ve $\Delta t=0.025$ olarak alınırsa solitary dalganın genliği 1 olarak hesaplanmış, bu parametrelere göre deneyler $t=10$ anına kadar çalıştırılmıştır. Bulunan veriler Tablo 4.5'te sunulmuştur. Tablodan anlaşılacağı üzere I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitlerinin başlangıç durumuna göre değişim oranı %0.004 ve daha küçük bulunmuş ve L_2 ve L_∞ hata normları ise, elde edilme süresince 0.34×10^{-2} den daha küçük olmaktadır. Şekil 4.2'de elde edilen sayısal verilerin bir dalga hareketi meydana getirdiği ve bu dalgaların ilerleyen zamanlarda büyüklüklerini koruyarak sabit hızda ilerleyen solitary dalgalar olduğu görülür.

Tablo 4.5. $p=4$, gen.$=1$, $h=0.1$, $\Delta t=0.025$ ve $x \in [0, 100]$ için hesaplanan tek solitary dalganın korunum sabitleri ve hata norm değerleri

t	0	2	4	6	8	10
I_1	3.4687090	3.4687090	3.4687090	3.4687090	3.4687090	3.4687090
I_2	2.6716961	2.6716961	2.6716961	2.6716961	2.6716961	2.6716961
I_3	0.7291997	0.7292453	0.7292551	0.7292575	0.7292582	0.7292584
$L_2 \times 10^3$	0.00000000	0.68380580	1.35202774	2.01856221	2.68509298	3.35174007
$L_\infty \times 10^3$	0.00000000	0.43263300	0.83440039	1.24065060	1.64702738	2.04973389

Son olarak, $p=4$, $c=0.3$, $h=0.1$ ve $\Delta t=0.01$ parametreleri için dalganın genliği 0.6 büyüklüğüne sahip olur. Uygulamalar t = 10 anına kadar çalıştırılmış ve sonuçlar Tablo 4.6'da gösterilmiştir. Önceki parametrelerde olduğu gibi, klasik lineerleştirme tekniği ile hesaplanan korunum sabitlerinin hemen hemen değişmeden kaldığı anlaşılmaktadır. L_2 ve L_∞ hata normları ise sırasıyla hesaplama süresince, 0.13×10^{-3} ve 0.63×10^{-4} den daha küçük bulunmuştur.

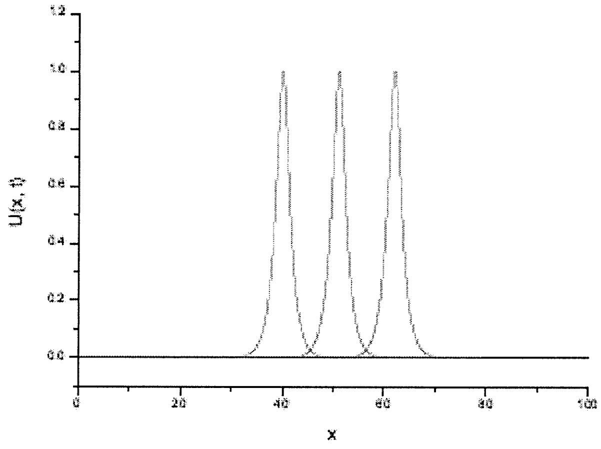
Tablo 4.6. $p=4$, gen.= 0.6, $h=0.1$, $\Delta t=0.01$ ve $x \in [0, 100]$ için hesaplanan tek solitary dalganın korunum sabitleri ve hata norm değerleri

t	0	2	4	6	8	10
I_1	3.7592865	3.7592865	3.7592865	3.7592865	3.7592865	3.7592865
I_2	1.7300238	1.7300238	1.7300238	1.7300238	1.7300238	1.7300238
I_3	0.2894189	0.2894191	0.2894192	0.2894192	0.2894192	0.2894192
$L_2 \times 10^4$	0.00000000	0.25417530	0.50867400	0.76378746	1.01967310	1.27628477
$L_\infty \times 10^4$	0.00000000	0.13193138	0.25511505	0.37848569	0.50227119	0.62645346

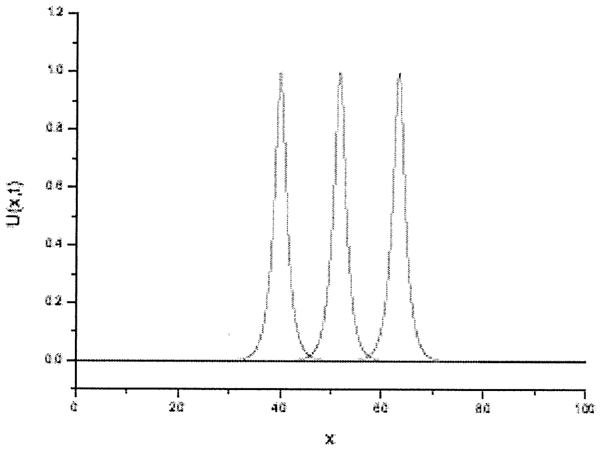
Tablo 4.7'de korunum sabitleri ve hata normları t = 10 anında farklı çalışmalardan hesaplanan verilerle kıyaslanmıştır. Elde edilen verilere göre korunum sabitleri diğer çalışmalara oldukça yakındır. L_2 ve L_∞ normlarının büyüklükleri sırasıyla 2.64×10^{-3} ve 1.40×10^{-3} den daha küçük bulunmuş ve diğer çalışmalardan daha küçük olduğu saptanmıştır.

Tablo 4.7. $p = 2, 3, 4$; $t = 10$ ve $x \in [0, 100]$ için hesaplanan tek solitary dalganın sayısal sonuçlarının karşılaştırılması

	p	2	3	4
		$gen. = 1, h = 0.2, \Delta t = 0.025$	$gen. = 0.6, h = 0.1, \Delta t = 0.01$	$gen. = 0.6, h = 0.1, \Delta t = 0.01$
I_1	CBSC+PA-CN [34]	4.44000000		
	CBSC-CN [34]	4.44200000		
	CBSC [38]	4.44288000		
	QBSPG [20]	4.44288000	3.67755000	3.75923000
	SBSC	4.44286610	3.67760700	3.75928650
I_2	CBSC+PA-CN [34]	3.29600000		
	CBSC-CN [34]	3.29900000		
	CBSC [38]	3.29983000		
	QBSPG [20]	3.29981000	1.56574000	1.72999000
	SBSC	3.29982270	1.56576040	1.73002380
I_3	CBSC+PA-CN [34]	1.41100000		
	CBSC-CN [34]	1.41300000		
	CBSC [38]	1.41420000		
	QBSPG [20]	1.41416000	0.22683700	0.28940600
	SBSC	1.41420450	0.22684620	0.28941920
$L_2 \times 10^3$	CBSC+PA-CN [34]	20.30000000		
	CBSC-CN [34]	16.39000000		
	CBSC [38]	9.30196000		
	QBSPG [20]	3.00533000	0.07197600	0.12253900
	SBSC	2.63246332	0.08671365	0.12762847
$L_\infty \times 10^3$	CBSC+PA-CN [34]	11.20000000		
	CBSC-CN [34]	9.24000000		
	CBSC [38]	5.43718000		
	QBSPG [20]	1.68749000	0.03772280	0.06620700
	SBSC	1.39306406	0.03971458	0.06264534



Şekil 4.1. $p = 3$, genliği $= 1$, $x_0 = 40$, $x \in [0, 100]$ için tek solitary dalganın $t = 0,5,10$ 'daki davranışı



Şekil 4.2. $p = 4$, genliği $= 1$, $x_0 = 40$, $x \in [0, 100]$ için tek solitary dalganın $t = 0,5,10$ 'daki davranışı

4.3.2 İki solitary dalganın girişimi

Burada, yönleri aynı olan pozitif sırasıyla 2 ve 1 genliklerine sahip iki solitary dalga arasındaki girişim,

$$U(x,0)=\sum_{i=1}^{2}\sqrt[p]{\frac{c_i(p+2)}{2p}\operatorname{sec}h^2\left[\frac{p}{2}\sqrt{\frac{c_i}{\mu(c_i+1)}}(x-x_i)\right]} \tag{4.19}$$

yukarıda verilen (4.19) kullanılarak araştırılmıştır. Buradaki $i = 1, 2$ ile c_i ve x_i keyfi sabitler olup yaklaşık hesaplamaların yapılabilmesi için üç farklı parametre kümesi düşünülmüştür.

İlk küme için, $x \in [0, 250]$ aralığında $p = 2$, $c_1 = 4$, $c_2 = 1$, $x_1 = 25$, $x_2 = 55$, $h = 0.2$, $\Delta t = 0.025$ ve $\mu = 1$ parametreleri alınmıştır. $t = 0$ dan $t = 20$ zamanına kadar sayısal yöntem uygulanmış I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitlerinin sonuçları Tablo 4.8'de verilmiştir. Bu tablodan elde edilen verilerin Roshan'ın bulduğu değerlere [20] yakın olduğu, I_1, I_2 ve I_3 'ün başlangıç hesabına göre değişimleri, sırasıyla %0.00002, %0.00004 ve %0.5 den daha küçüktür sonucuna varılabilir.

İkinci küme için $x \in [0, 120]$ aralığında $p = 3$, $c_1 = 48/5$, $c_2 = 6/5$, $x_1 = 20$, $x_2 = 50$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.01$ ve $\mu = 1$ değerleri seçilmiştir. Veriler $t = 6$ anına kadar çalıştırılmış, elde edilen korunum sabitlerinin değerleri, Tablo 4.9'da sunulmuştur. Tablo 4.9'dan, korunum sabitlerindeki değişim oranı, klasik lineerleştirme tekniği için daha küçük bulunduğu ve bu oranın Roshan'ın elde ettiği sonuçlara [20] daha yakın olduğu anlaşılır. İki solitary dalganın farklı zamanlardaki hareketi Şekil 4.3'te çizilmiştir. Şekil 4.3'e bakıldığında başlangıç sırasında genliği büyük olan dalga, genliği küçük olan dalganın solundadır. İlerleyen sürelerde genliği büyük olan dalga, küçük olan dalgayı yakalar ve $t = 3$ gibi büyük dalga küçük dalganın üzerine biner. $t = 5$ anında dalgalar ayrılmaya başlar $t = 6$ 'da ise dalgalar bariz olarak ayrılır. Bu iki dalga başlangıç şekil, hız ve büyüklüklerini bozmadan büyük genlikli dalga önde, küçük genlikli dalga arkada yollarına devam ederler. Neticede, iki solitary dalga aynı yönde giderken girişim oluşur ve çarpışmanın ardından başlangıç hallerine geri dönerek uzun mesafe yol alabileceklerinden dolayı bu dalgalar solitondur.

Üçüncü küme için $x \in [0, 200]$ aralığında $p = 4$, $c_1 = 64/3$, $c_2 = 4/3$, $x_1 = 20$, $x_2 = 80$, $h = 0.125$, $\Delta t = 0.01$ ve $\mu = 1$ parametreleri kullanılmıştır. Sayısal uygulamalar $t = 6$ anına kadar hesaplanmış ve korunum sabitlerinin sayısal verileri Tablo 4.10'da belirtilmiştir. Bu sabitlere ait değerlerin Roshan'ın [20] elde ettiği sonuçlarla uyumlu olduğu ve korunum sabitlerinin başlangıç hesabına göre değişimi oldukça küçüktür. Ayrıca sayısal algoritma yapılarak hesaplanan iki solitary dalganın hareketi Şekil 4.4'te çizilmiştir. $t = 0$ konumunda küçük genlikli dalga büyük genlikli dalganın sağındadır ve zaman ilerledikçe geride kalan dalga öndeki dalgayı yakalar ardından girişim başlar ve bu iki dalga ayrılarak, ilk hallerini korumak suretiyle yollarına devam ederler. Bundan dolayı solitary dalgalar solitonlardır.

Tablo 4.8. $p = 2$, gen.= 2.1, $h = 0.2$, $\Delta t = 0.025$ ve $x \in [0, 250]$ için iki solitary dalganın girişimine ait korunum sabitleri

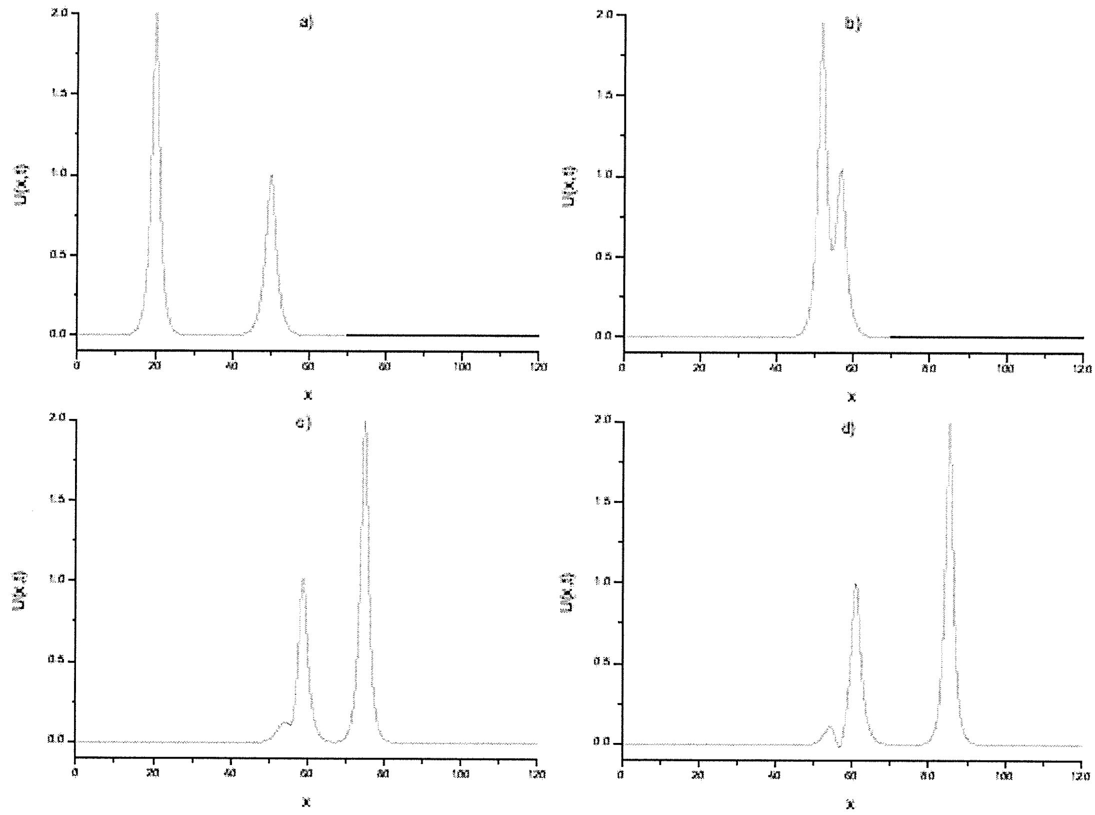
	t	0	4	8	12	16	20
I_1	Klasik	11.4676542	11.4676542	11.4676542	11.4676542	11.4676541	11.4676541
	QBSPG [20]	11.4677000	11.4677000	11.4677000	11.4677000	11.4677000	11.4677000
I_2	Klasik	14.6292089	14.6292088	14.6292088	14.6292087	14.6292087	14.6292086
	QBSPG [20]	14.6286000	14.6292000	14.6229000	14.6299000	14.6295000	14.6299000
I_3	Klasik	22.8803575	22.8803204	22.8759840	22.8803706	22.8803978	22.8803901
	QBSPG [20]	22.8788000	22.8811000	22.8798000	22.8803000	22.8805000	22.8806000

Tablo 4.9. $p = 3$, gen.= 2.1, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.01$ ve $x \in [0, 120]$ için iki solitary dalganın girişimine ait korunum sabitleri

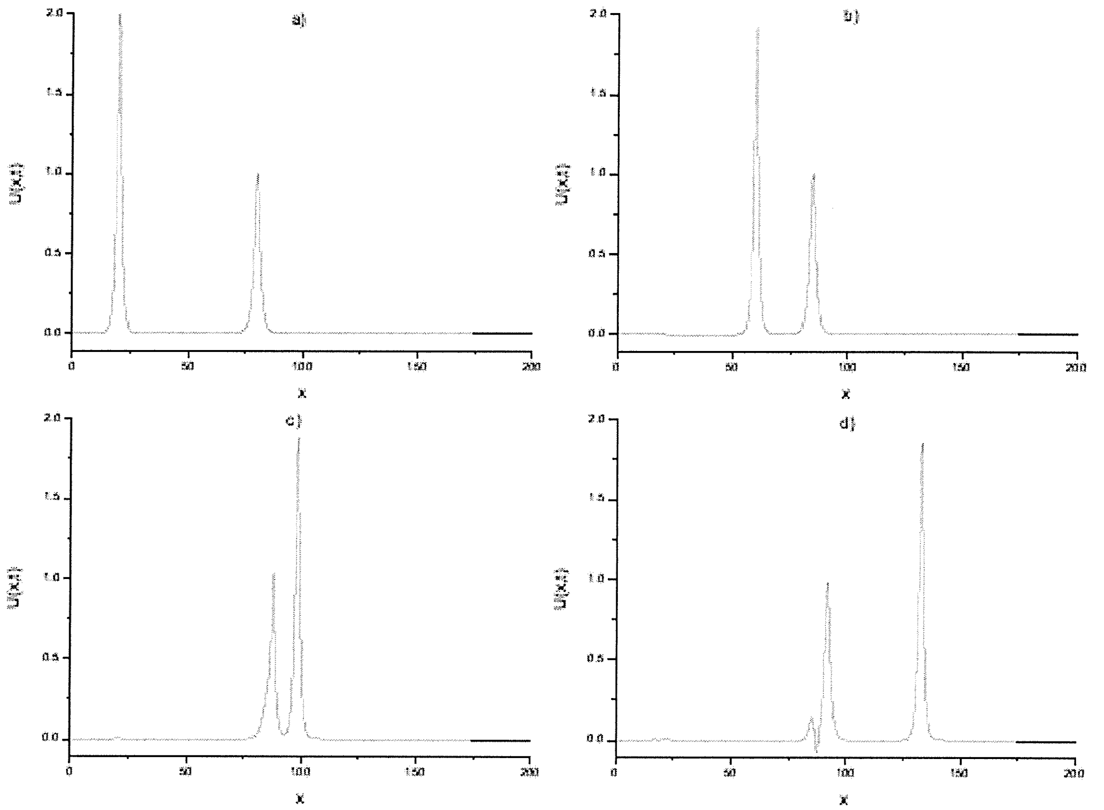
	t	0	1	2	3	4	5	6
I_1	Klasik	9.6907772	9.6907774	9.6907776	9.6907778	9.6907778	9.6907780	9.6907782
	QBSPG [20]	9.6907500	9.6907400	9.6907400	9.6907400	9.6907400	9.6907400	9.6907400
I_2	Klasik	12.9443914	12.9443919	12.9443925	12.9443930	12.9443932	12.9443937	12.9443943
	QBSPG [20]	12.9444000	12.9459000	12.9452000	12.9379000	12.9453000	12.9457000	12.9454000
I_3	Klasik	17.0186758	17.0236820	17.0256746	17.9687428	16.9816963	16.9181837	16.9520240
	QBSPG [20]	17.0184000	16.9819000	16.9835000	17.0591000	16.9261000	16.8781000	16.9113000

Tablo 4.10. $p=4$, gen.= 2.1, $h=0.125$, $\Delta t=0.01$ ve $x \in [0, 200]$ için iki solitary dalganın girişimine ait korunum sabitleri

	t	0	1	2	3	4	5	6
I_1	Klasik	8.8342728	8.8342136	8.8341602	8.8341068	8.8340534	8.8340001	8.8339467
	QBSPG [20]	8.8342700	8.8342700	8.8420400	8.8420500	8.8420900	8.8342100	8.8343400
I_2	Klasik	12.1708877	12.1707034	12.1705372	12.1703713	12.1702053	12.1700395	12.1698737
	QBSPG [20]	12.1697000	12.3179000	12.3700000	12.4530000	12.5703000	12.6304000	12.6103000
I_3	Klasik	14.0294238	14.4197656	14.4134423	14.3841812	14.3516241	14.3210739	14.2929015
	QBSPG [20]	14.0302000	13.8420000	13.9607000	14.0887000	13.9805000	14.2357000	14.6974000



Şekil 4.3. p = 3 için iki solitary dalganın a) t = 0, b) t = 3, c) t = 5, d) t = 6'daki hareketi



Şekil 4.4. p = 4 için iki solitary dalganın a) t = 0, b) t = 2, c) t = 4, d) t = 6'daki hareketi

4.3.3 Maxwellian başlangıç koşulu

Bu bölümde GRLW denklemi aşağıdaki Maxwellian başlangıç şartı ile ele alınmıştır.

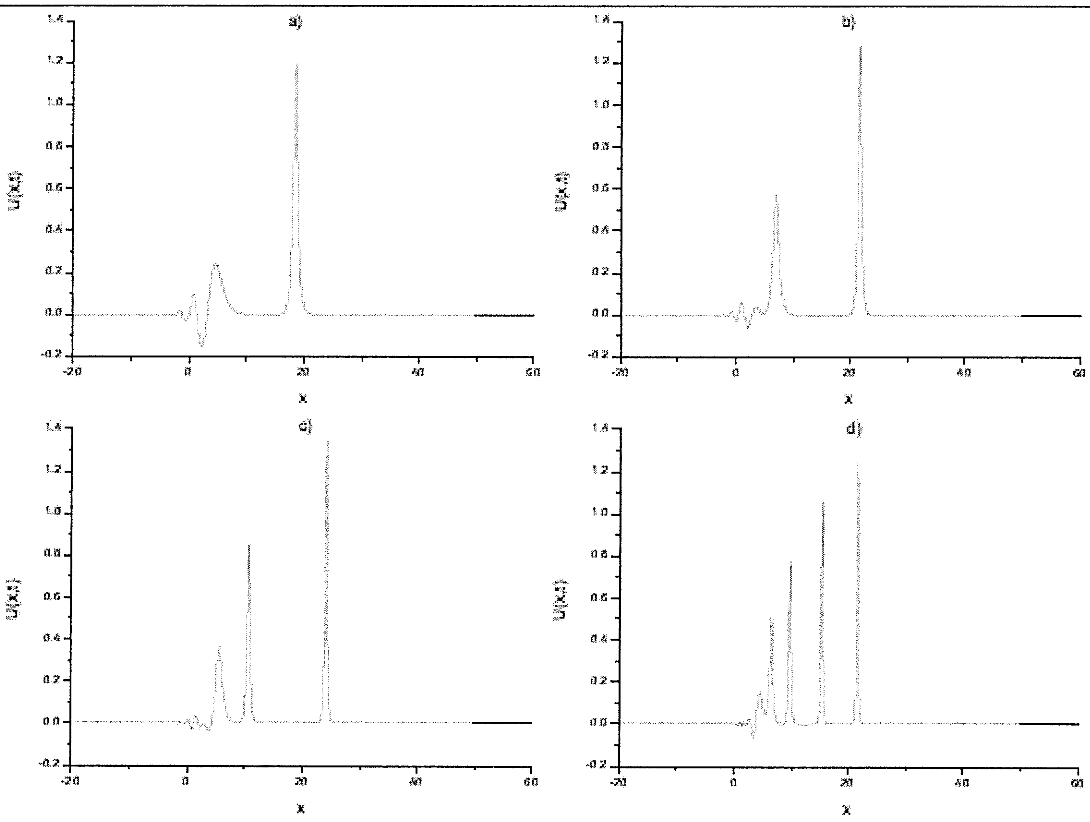
$$U\,(x,0) = Exp(-x^2), \quad -20 \leq x \leq 60. \tag{4.20}$$

O halde çözümün tepkisi μ değerine bağlı olarak değişeceğinden dolayı $\mu = 0.1$, $\mu = 0.025$, $\mu = 0.05$, $\mu = 0.01$ ve $p = 2, 3, 4$ parametrelerine bağlı olarak dalganın oluşumu araştırılmıştır. Deneyler $t = 6$ anına kadar test edilmiş ve yukarıda verilen μ değerleri için bulunan sonuçlar Tablo 4.11'de gösterilmiştir. $I_1 \times 10^2$, I_2 ve I_3 sayılarının elde edilme süresince değişimi, sırasıyla $p=2$ için 0.0001, 0.1 ve 0.1; $p=3$ için 0.0005, 0.2 ve 0.2; $p=4$ için 0.2, 0.3 ve 0.3 olarak hesaplanmıştır.

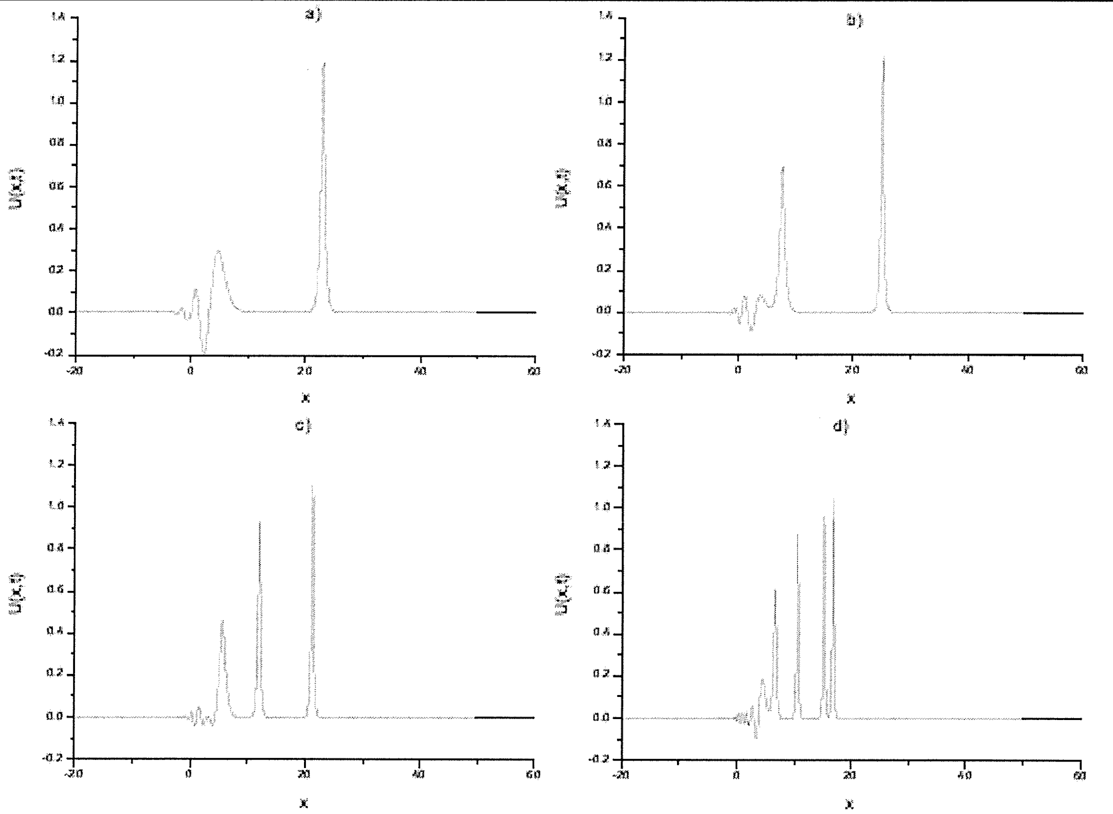
Maxwellian başlangıç koşuluna göre solitary dalgaların oluşumu Şekil 4.5 ve Şekil 4.6'da gösterilmiştir. Çizilen bu şekillerden $\mu = 0.1$ değeri için yalnız bir kararlı dalga ve bir kaç tane küçük belli belirsiz dalga oluştuğu, $\mu = 0.05$ olduğunda iki tane kararlı dalganın oluştuğu, $\mu = 0.025$ ve $\mu = 0.01$ için ise sırasıyla üç ve dört tane kararlı bunların yanında da tamamen belli olmayan bir kaç tane daha dalganın oluştuğu görülür. Sonuç olarak; μ sayısal değeri küçüldükçe oluşacak olan kararlı dalga sayısı artacaktır, diyebiliriz.

Tablo 4.11. $h = 0.1$, $\Delta t = 0.01$ ve $x \in [-20, 60]$ için maxwellian başlangıç koşuluna ait korunum sabitleri

μ	t	$p=2$			$p=3$			$p=4$		
		I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
	0	1.772453	1.378645	0.760895	1.772453	1.378645	0.760895	1.772453	1.378645	0.760895
	2	1.772453	1.472878	0.666662	1.772452	1.548191	0.591349	1.772110	1.591837	0.547703
0.1	4	1.772453	1.472838	0.666702	1.772451	1.546329	0.593211	1.771702	1.588948	0.550592
	6	1.772453	1.472598	0.666942	1.772449	1.545540	0.594000	1.771297	1.587779	0.551761
QBSPG [20]	6	1.772450	1.380900	0.761900	1.772450	1.384330	0.599080	1.772450	1.389450	0.449163
	0	1.772453	1.315979	0.823561	1.772453	1.315979	0.823561	1.772453	1.315979	0.823561
	2	1.772453	1.457911	0.681630	1.772376	1.514843	0.624697	1.753662	1.535874	0.603666
0.05	4	1.772453	1.456986	0.682554	1.772272	1.514131	0.625409	1.741625	1.528679	0.610862
	6	1.772453	1.455748	0.683792	1.772168	1.513035	0.626505	1.733910	1.523490	0.616050
QBSPG [20]	6	1.772390	1.319510	0.825686	1.772480	1.323940	0.624720	1.772120	1.451680	0.489711
	0	1.772453	1.284646	0.854894	1.772453	1.284646	0.854894	1.772453	1.284646	0.854894
	2	1.772454	1.446475	0.693065	1.768943	1.502469	0.637071	1.693029	1.482414	0.657126
0.025	4	1.772452	1.450770	0.688770	1.764956	1.501801	0.637740	1.682425	1.476250	0.663290
	6	1.772451	1.450891	0.688649	1.761477	1.498994	0.640546	1.674869	1.468703	0.670837
QBSPG [20]	6	1.772380	1.290110	0.854909	1.772350	1.308060	0.635790	1.772490	1.296260	0.479621
	0	1.772453	1.265847	0.873693	1.772453	1.265847	0.873693	1.772453	1.265847	0.873693
	2	1.772512	1.438944	0.700596	1.720433	1.456451	0.683090	1.651315	1.437490	0.702051
0.01	4	1.772403	1.443961	0.695579	1.706008	1.450265	0.689276	1.644999	1.439995	0.699545
	6	1.772190	1.443723	0.695817	1.700567	1.451593	0.687947	1.633634	1.431710	0.707830
QBSPG [20]	6	1.772490	1.283150	0.892359	1.772450	1.276270	0.632880	1.756480	1.405770	0.381194



Şekil 4.5. $p = 3$, $t = 6$; a) $\mu = 0.1$, b) $\mu = 0.05$, c) $\mu = 0.025$, d) $\mu = 0.01$ değerleri ve maxwellian başlangıç şartı için dalgaların oluşumu



Şekil 4.6. $p = 4$, $t = 6$; a) $\mu = 0.1$, b) $\mu = 0.05$, c) $\mu = 0.025$, d) $\mu = 0.01$ değerleri ve maxwellian başlangıç şartı için dalgaların oluşumu

5. BÖLÜM

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, beşinci dereceden ve yedinci dereceden B-spline fonksiyonlar kullanılarak Kollokasyon yöntemi ile GRLW denkleminin yaklaşık çözümleri elde edilmiştir. Lineerleştirilmiş algoritmaların şartsız kararlı olduğu Von-Neumaan tekniği kullanılarak gösterilmiştir. Yaklaşık çözüm yöntemleri, başlangıç şartının farklı seçimleri ile oluşturulan tek solitary dalganın davranışı, iki solitary dalganın girişimi, ardışık dalgaların oluşumu ve Maxwellian başlangıç koşulu ile dalga oluşumunu içeren örneklere uygulanmıştır. Yaklaşık çözüm yöntemlerinin etkinliğini göstermek için, L_2 ve L_∞ hata normları ile dalganın kütle, momentum ve enerjisine karşılık gelen ve I_1, I_2 ve I_3 ile gösterilen korunum sabitleri elde edilmiştir. Elde edilen hata norm değerlerinin yeterince küçük ve daha önceden bulunan sayısal sonuçlardan daha iyi olduğu görülmüştür. Ayrıca, korunum sabitlerinin programın çalışması boyunca hemen hemen sabit kaldığı ve referans alınan çalışmalarla uyumlu olduğu da görülmüştür. Ayrıca elde edilen sonuçlara ait grafikler çizilmiştir. Sonuç olarak yöntemimizin GRLW denkleminin solitary dalga çözümlerini elde etmede daha etkili ve daha başarılı olduğunu söyleyebiliriz.

KAYNAKLAR

1. Clough, R.W., “The finite element in plane stress analysis”, *Proc.2nd A.S.C.E.Conf.on Elektronic Computation*, Pittsburg, Pa., 345-378, 1960.
2. Davies, A. J., “The Finite Element Method: A First Approach” , *Oxfoerd Universty Press*, Oxsford, 1986.
3. Logan, D. L., “*A First Course in the Finite Element Method (Fourth Edition)* ” , Thomson, 2007.
4. Karakoç, S.B.G., “Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Modifiye edilmiş Eşit Genişlikli Dalga Denkleminin Sayısal Çözümleri” , *İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, DoktoraTezi, s. 11-29 , Malatya, 2011.
5. Reddy, J.N., “An introduction to nonlinear Finite Element Analysis” , *Oxford University Press Inc.*, New York, 2004.
6. Walkley, M. A., “A Numerical Method for Extended Boussinesg Shallow-water Wave Equations” , *The University of Leeds School of Computer Studies*, 1999.
7. Geyikli, T., “Finite Element Studies of Modified KdV Equations” , *Ph. D.Thesis, University College of North Wales,* Bangor, Gwynedd (UK), 1994.
8. Keskin, P., “RLW Denkleminin Trigonometrik B-Spline Çözümleri ” , *Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü,* Doktora Tezi , s. 11 , Eskişehir, 2016.
9. Prenter, P. M., “Splines and variational methods”, J. Wiley, New York, 1975.
10. Raslan, K. R., “Collocation method using cubic B-spline for the generalised equal width equation”, *Int. J. Simulation and Process Modelling*, 2, 37-44, 2006.
11. Bona, J. L., McKinney, W. R., Restrepo, J. M., “Stable and unstable solitary-wave solutions of the generalized regularized long-wave equation”, *Journal of Nonlinear Science*, 10, 603-638, 2000.
12. Ramos, J. I., “Solitary wave interactions of the GRLW equation”, *Chaos, Solitons &Fractals*, 33, 479-491, 2007.

13. EL-Danaf, T. S., Raslan, K. R., Ali, K. K., "New numerical treatment for the generalized regularized long wave equation based on finite difference scheme", *International Journal of Soft Computing and Engineering*, 4 (4), 16-24, 2014.

14. Kaya, D., "A numerical simulation of solitary-wave solutions of the generalized regularized long-wave equation", *Applied Mathematics and Computation*, 149, 833-841, 2004.

15. Guo, P. F., Zhang, L. W., Liew, K. M., "Numerical analysis of generalized regularized long wave equation using the element-free kp-Ritz method", *Applied Mathematics and Computation*, 240, 91-101, 2014.

16. Hamdi, S., Enright, W. H., Schiesser, W. E., Gottlieb, J. J., "Exact solutions and invariants of motion for general types of regularized long wave equations", *Mathematics and Computers in Simulation*, 65, 535-545, 2004.

17. Zhang, L., "A finite difference scheme for generalized regularized long-wave equation", *Applied Mathematics and Computation*, 168, 962-972, 2005.

18. Soliman, A. A., "Numerical simulation of the generalized regularized long wave equation by He's variational iteration method", *Mathematics and Computers in Simulation,* 70, 119-124, 2005.

19. Mokhtari, R., Mohammadi, M., "Numerical solution of GRLW equation using Sinccollocation method", *Computer Physics Communications*, 181, 1266-1274, 2010.

20. Roshan, T., "A Petrov-Galerkin method for solving the generalized regularized long wave (GRLW) equation", *Computers and Mathematics with Applications*, 63, 943-956, 2012.

21. Huang, D. M., Zhang, L. W., "Element-free approximation of generalized regularizedlong wave equation", *Mathematical Problems in Engineering*, 2014, 1-10, 2014.

22. Hammad, D. A., El-Azab, M. S., "A 2N order compact finite difference method for solving the generalized regularized long wave (GRLW) equation", *Applied Mathematics and Computation*, 253, 248-261, 2015.

23. Mohammadi, R., "Exponential B-spline collocation method for numerical solution of the generalized regularized long wave equation", *Chinese Physics B*, 24, 1-14, 2015.

24. Karakoc,, S. B. G., Zeybek, H., Ak, T., "Numerical solutions of the Kawahara equation by the septik B-spline collocation method", *Statistics Optimization and Information Computing,* 2 (3), 211-221, 2014.

25. Zaki, S. I., "A kuintik B-spline finite elements scheme for the KdVB equation", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 188 (1), 121-134, 2000.

26. Ismail, M. S., "Numerical solution of complex modified Korteweg-de Vries equation by collocation method", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation,* 14, 749-759, 2009.

27. Irk, D., Dağ, İ., "Kuintik B-spline collocation method for the generalized nonlinear Schrödinger equation", *Journal of the Franklin Institute*, 348, 378-392, 2011.

28. Mittal, R. C., Jain, R. K., "Numerical solution of General Rosenau-RLW Equation using Kuintik B-splines Collocation Method", *Communications in Numerical Analysis*, 2012,1-16, 2012.

29. Mittal, R. C., Tripathi, A., "Numerical solutions of generalized Burgers–Fisher and generalized Burgers–Huxley equations using collocation of cubic B-splines", *International Journal of Computer Mathematics*, 93, 1053-1077, 2015.

30. Irk, D., "Bazı kısmi türevli diferensiyel denklem sistemlerinin B-spline sonlu elemanlar çözümleri", *Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Doktora Tezi, s.1-148, Eskişehir, 2007.

31. Saka, B., "RLW ve K-S denklemlerinin B-spline kolokeyşin metodları ile çözümleri", *Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Doktora Tezi, s.1-107, Eskişehir, 2002.

32. Karakoç S.B.G., Zeybek H. " Solitary-wave solutions of the GRLW equation using septik B-spline collocation method ", *Applied Mathematics and Computation*, 289, 159-171, 2016

33. Zeybek H. "GEW ve GRLW Denklemlerinin Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Sayısal Çözümleri ", *Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü,* Doktora Tezi, s. 83-119, Nevşehir, 2016

34. Gardner, L. R. T., Gardner, G. A., Ayoub, F. A., Amein, N. K., "Approximations of solitary waves of the MRLW equation by B-spline finite element", *Arabian Journal for Science and Engineering*, 22, 183–193, 1997.

35. Peregrine, D. H., "Calculations of the development of an undular bore", *Journal of Fluid Mechanics*, 25 (2), 321-330, 1966.

36. Dağ, İ., Saka, B., Irk, D., "Galerkin method for the numerical solution of the RLW equation using kuintik B-splines", *Journal of Computational and Applied Mathematics*,

190, 532-547, 2006.

37. Karakoc¸, S. B. G., Yağmurlu, N. M., Uçar, Y., "Numerical approximation to a solution of the modified regularized long wave equation using kuintik B-splines", *Boundary Value Problems*, 2013 (27), 1-17, 2013.

38. Khalifa, A. K., Raslan, K. R., Alzubaidi, H. M., "A collocation method with cubic Bsplines for solving the MRLW equation", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 212 (2), 406-418, 2008.

39. Ali, A., "Mesh Free Collocation Method for Numerical Solution of Initial-boundary Value Problems using Radial Basis Functions", Ph. D. thesis, Ghulam Ishaq Khan Institute of Engineering Sciences and Technology, Pakistan, 2009.

40. Esen, A., Kutluay, S., "Application of a lumped Galerkin method to the regularized long wave equation", *Applied Mathematics and Computation*, 174, 833-845, 2006.

41. Mei, L., Chen, Y., "Numerical solutions of RLW equation using Galerkin method with extrapolation techniques", *Computer Physics Communications*, 183, 1609-1616, 2012.

42. Zaki, S. I., "Solitary waves of the Korteweg-de Vries Burgers' equation", *Comput. Phys.Commun.*, 126, 207-218, 2000.

ÖZGEÇMİŞ

17.03.1975 tarihinde Kayseri'de doğdu. İlk ve orta öğrenimini Kayseri'de, tamamladı. 1993 yılında Selçuk Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümü'nde lisans eğitimine başladı ve 1997 yılında mezun oldu. Mezun olduğu yıl, Milli Eğitim Bakanlığınca ataması yapılarak Kayseri'de matematik öğretmeni olarak göreve başladı. 1997-2014 yılları arasında Kayseri'de farklı devlet okullarında matematik öğretmeni olarak görev yaptı. 2014 yılında Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans eğitimine başladı. Halen Kayseri Kocasinan Furkan Doğan Anadolu İmam Hatip Lisesinde matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır. Evli ve üç çocuk babasıdır.

Adres:	Kocasinan Furkan Doğan Anadolu İmam Hatip Lisesi
	Zümrüt mahallesi Kadir Has caddesi No:78 Kocasinan-KAYSERİ
Telefon:	0 505 488 45 47
e-posta :	dilaversah@gmail.com