T.C

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HARMONİK SAYILAR İÇEREN SERİLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hazırlayan

Hakkı Volkan KIVANÇ

Danışman

Prof. Dr. Necdet BATIR

OCAK-2020

NEVŞEHİR

Prof. Dr. Necdet BATIR danışmanlığında Hakkı Volkan KIVANÇ tarafından hazırlanan "**Harmonik Sayılar İçeren Seriler**" başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

06/01/2020

JÜRİ

Başkan : Prof. Dr. Necdet BATIR ....

Üye : Doç. Dr. Halis BİLGİL ....

Üye : Doç. Dr. Sezer SORGUN ....

ONAY

Bu tezin kabulü Ensitü Yönetim Kurulunun 21.01.2020 tarih ve 5-25 karari ile onaylanmıştır.

21.01.2020

Prof.Dr.Şahlan ÖZTÜRK
Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİM SAYFASI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada yer alan bütün bilgilerin bilimsel etik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu ve bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Hakkı Volkan KIVANÇ

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca, tez konumu belirleyip bu konuda beni eğiten, tüm sabrıyla bana destek veren ve bilgisini esirgemeyen, bana bu yolda her türlü imkanı sağlayan bilgi ve tecrübelerine hayran olduğum saygıdeğer danışman hocam Sayın Prof. Dr. Necdet BATIR‘ a teşekkür ve şükranlarımı sunarım. Öğrenim hayatım boyunca beni destekleyen ve güvenen aileme ve sevgili eşim Pınar KIVANÇ ’ a teşekkür ederim.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

HARMONİK SAYILAR İÇEREN SERİLER

Hakkı Volkan KIVANÇ

Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Necdet BATIR

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde konunun tarihçesi kısa bir şekilde özetlenmiştir. İkinci bölümde tezin ana konularında kullanılan bazı tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde Euler'in çalışmalarından sonra en önemli çalışmalar diyebileceğimiz harmonik sayılar içeren bazı klasik seri örneklerine yer verilmiştir. Dördüncü bölümde son yıllarda bu konuda yapılan bir kaç tane makale incelenmiştir.

ABSTRACT

Master's

SERIES INVOLUING HARMONIC NUMBERS

Hakkı Volkan Kıvanç

Nevşehir Hacı Bektaş Veli Universty

Graduate School of Natural & Applıed Scıences

Supervisor : Prof. Dr. Necdet BATIR

This thesis consists of four chapters. In the first chapter, the history of the subject is summarized briefly. In the second part, some definitions and theorems used in the main subjects of the thesis are given. In the third chapter, after Euler 's works, some examples of classical series containing harmonic numbers which can be considered as the most important studies are given. In the fourth chapter, several articles on this subject have been examined in recent years.

İÇİNDEKİLER

GÖSTERİMLER

ζ: Riemann zeta fonksiyonu

H_n: n. Harmonik sayı

$H_n^{(m)}$: Genelleştirilmiş harmonik sayı

Γ: Gamma fonksiyonu

ψ: Digamma fonksiyonu

$\psi^{(n)}$: Polygamma fonksiyonu

B(x,y): Beta fonksiyonu

pFq: Hipergeometrik seriler

s(n,k): 1. Türden Stirling sayıları

$(x)_n$: Pochhammer sembolü

Li_n: Polilogaritmik fonksiyonlar

γ: Euler-Mascheroni sabiti

ÖZGEÇMİŞ

Hakkı Volkan KIVANÇ 1989 yılında Zonguldak’ ta doğdu. İlk ve orta okulunu Niğde’ de tamamladı. 2009 yılında kazandığı Niğde Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2014yılında mezun oldu.

Adres: Aşağıkayabaşı Mah.Öğretmen Okulu 4. Sok Aybarlar İnci Gülseven Apt. kat:2 No:3

Telefon: 05425143487

e-posta: volkan2689@outlook.com

Bölüm 1

GİRİŞ

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ...$$

toplamını bulma problemi ilk olarak İtalyan matematikçi Pietro Mengoli tarafından 1644 yılında ortaya atılmıştır. Mengoli 1650 yılında *Novae quadraturae arithmetıca* kitabında bu probleme yer vermiştir. Bu problemi çözmek için aralarında Jacop Bernoulli, Johann Bernoulli, Daniel Bernoulli, Leibniz, Stirling ve De Moivre tanınmış matematikçilerin de bulunduğu pek çok matematikçi uğraşmıştır. Problem neredeyse 100 yıl sonra İsviçre'nin Basel kentinde yaşayan Leonard Euler tarafından çok enteresan bir yoldan çözülmüştür. Bu nedenle bu problem günümüz de hala Basel problemi olarak bilinmektedir. Euler enterasan bir yöntemle

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ... = \frac{\pi^2}{6}$$

olduğunu göstermiştir. Bu Euler'in matematik camiasinda tanınmasını sağlayan ilk başarısıdır. Daha sonra Euler bu toplamı genelleştirerek $n > 1$ tamsayısı için

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n} \tag{1.0.1}$$

toplamı üzerinde çalışmalar yapmıştır. Alman matematikçı Riemann bu toplamı kompleks sayılarına taşımış ve $s \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$$

serisini $\zeta(s)$ ile göstererek bu seriler üzerinde ciddi araştırmalar yapmıştır . Bu toplam o zamandan beri Riemann zeta fonksiyonu olarak bilinmektedir. Tekrar Euler'in çalışmalarına dönersek Euler $n \in N$ olmak üzere $s = 2n$ için (1.0.1) de verilen serinin değerini hesaplamış ve

$$\zeta(2n) = \frac{(-1)^{n-1}(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} B_n$$

değerini bulmuştur. Burada B_n ler Bernoulli sayılarıdır. $s > 1$ bir tek tamsayı olduğundan $\zeta(2n+1)$ in değeri hala bilinmemektedir ve bu günümüzde sayılar teorisindeki en büyük açık problemlerden birisidir. Bu konuda bilinen tek sey $\zeta(3)$ ün irrasyonel bir sayı olduğudur. Bu da 1979 yılında Fransız matematikçi R. Apery tarafından ispatlanmıştır [1]. Euler daha sonra konuya farklı bir boyuta taşıyarak (1.0.1) deki toplama harmonik sayıları ilave ederek ilk önce

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{(n+1)^2} = \zeta(3)$$

eşitliğini göstermiştir [10, sf.228]. Bu seri 1775 yılında Klamkin [6] tarafından tekrar keşfedildi ve The American Mathematical Monthly dergisinde bir problem olarak yayınlandı. 1995 yılında Briggs ve arkadaşları tarafından tekrar keşfedildi ve üzerinde çalışmalar yapıldı . 1982 yılında Bruckman [5] tarafından bir kez daha keşfedildi. (1.0.1) formülü aslında Euler [10, sf. 288] tarafından keşfedilen

$$2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{H_k}{k^n} = (n+2)\zeta(n+1) - \sum_{k=1}^{n-2} \zeta(n-k)\zeta(k+1) \tag{1.0.2}$$

formülünün özel bir halidir. Neilsen [18, sf. 229], [16, sf. 198], [17, sf. 47-49] (1.0.2) formülünü ve benzeri formülleri elde etmek için daha genel methodlar geliştirilmiştir. (1.0.2) formülü 1953 yılında Williams [20] tarafından tekrar keşfedilmiştir. 1979 yılında Sitaramachandrara ve Siva Rama Sarma [13] tarafından 1983 yılında Georghiou ve Philippou [11] tarafından tekrar ispatlanmıştır. Şunu da eklemekte fayda vardır ki $m, n \in N(n \geq 2)$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j^m}$$

tipindeki seriler Goldbach'ın 1742 yılında Euler'e [10] yazdığı bir mektupta dile getirilmiştir [12, 6]. İki matematikçi 1742 ve 1743 yıllarında bu tür serilerle ilgili bir çok yazışma yapmışlardır. Euler bu tipte bir çok seriyi başarılı bir şekilde hesaplamayı başarmıştır ancak (1.0.1) ve (1.0.2) serilerinden bu yazışmalarda bahsedilmemiştir. Sonraki yıllarda (1.0.2) tipindeki seriler bir çok matematikçinin ilgisini çekmiş ve bu konuda bir çok çalışmalar yapılmıştır [8,2,28,26,23] . Günümüzde (1.0.2) tipindeki seriler Euler Toplamları olarak bilinmektedir.Günümüzde de bu tür serilerin çeşitli versiyonları yoğun bir şekilde çalışılmaktadır. Örneğin Borwein ve arkadaşları [6] n=1,2... m=2,3... için

$$S_h(n,m) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{k})^n}{(k+1)^m}$$

tipindeki serileri çalıştılar ve n=2 için bu toplamların tam değerlerini hesaplamışlardır.

Bu tezimizde Euler toplamlarından esinlenerek yapılan harmonik sayılar içeren serileri ele aldık. Tezimiz dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde konunun tarihcesini özetlemeye çalıştık. İkinci bölümde tezin ana konularında kullandığımız bazı tanımlara yer verdik. Üçüncü bölümde teoremler ve harmonik seri içeren bazı klasik seri örneklerine yer verdik. Ve son olarak 4. bölümde son yıllarda bu konuda yapılan çalışmalardan önemli gördüğümüz birkaç makaleyi inceledik.

Bölüm 2

2. TANIM VE TEMEL TEOREMLER

Tanım 2.1 (Gamma Fonksiyonu) x>0 için gamma fonksiyonu

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty u^{x-1} e^{-u}\, du$$

şeklinde tanımlanır. Gamma fonksiyonunun logaritmik türevine, yani

$$\psi(x) = \frac{d}{dx} \log \Gamma(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

fonksiyonuna digamma fonksiyonu denir.

Tanım 2.2 (Pochhammer Sembolü)$s \in \mathbb{C}$ için Pochhammer sembolü $(s)_n (n \in \mathbb{N})$ ile gösterilir ve

$$(s)_n = s(s+1)(s+2)...(s+n-1)$$

şeklinde tanımlanır.

$$n = 0 \quad \text{ise} \quad (s)_0 = 1$$

olarak alınır. Pochhammer sembolü gamma fonksiyonu yardımıyla

$$(s)_n = \frac{\Gamma(s+n)}{\Gamma(s)}$$

şeklinde de tanımlanabilir.

Tanım 2.3 (Hipergeometrik Seri) $a_i \in \mathbb{C}, \quad b_i \neq 0 \quad \text{ve} \quad (b_i \in \mathbb{C}\ )$ için bir hipergeometrik seri

$$_pF_q(a_1, ..., a_p; b_1, ..., b_q : x)$$

ile gösterilir ve

$$ {}_pF_q(a_1,...,a_p;b_1,...,b_q:x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_n(a_2)_n...(a_p)_n}{(b_1)_n(b_2)_n...(b_q)_n}\frac{x^n}{n!} $$

şeklinde tanımlanır.

Lemma 2.1 [27, sf. 282]

$$ {}_2F_1(a,b;c:1)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)},\ Re(c-a-b)>0 $$

dır. Burada Γ gamma foksiyonudur.

Tanım 2.4 (Birinci türden Stirling sayılar) Birinci türden Stirling sayıları $s(n,k)$ ile gösterilir ve $(x)_n$ nin üretici fonksiyonu olarak tanımlanır. Yani

$$ (x)_n=\sum_{k=0}^{n}s(n,k)x^k $$

dır.

Lemma 2.2 (Parseval Eşitliği) [3, sf.94] H bir Hilbert uzay ve (e_α) $(\alpha\in I)$ H nın bir ortanormal bazı olsun. O zaman $\forall x\in$H için

$$ \|x\|^2=\sum_{\alpha\in I}|<x,e_\alpha>|^2 $$

dır.

Lemma 2.3 [15, sf.346] z negatif ve sıfır olmayan herhangi kompleks sayı olsun. O zaman

$$ \frac{1}{\Gamma(z)}=ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n} $$

dır. Burada γ Euler sabitidir.

Tanım 2.5 (Euler-Mascheroni Sabiti) γ ile gösterilir ve

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}-\log n\right] = 0,57721...$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.6 n.harmonik sayı H_n ile gösterilir ve

$$H_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

şeklinde tanımlanır. m. mertebeden genelleştirilmiş harmonik sayılar $H_n^{(m)}$ ile gösterilir ve $H_0^{(m)}$ ve $n \geq 1$ için $H_n^{(m)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^m}$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.7 (Genelleştirilmiş Binom Katsayısı) $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ olmak üzere genelleştirilmiş binom katsayısı

$$\binom{\lambda}{\mu} = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\lambda-\mu+1)}, \ \binom{\lambda}{0} = 1$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.8 [21,(1.2)] $n \in \mathbb{N}$ için

$$H_n = \gamma + \psi(n+1) = \int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x}dx$$

dir. Burada ψ digamma fonksiyonudur.

Tanım 2.9 (Beta Fonksiyonu) $s > 0$ ve $t > 0$ için beta fonksiyonu

$$B(s,t) = \int_0^1 u^{s-1}(1-u)^{t-1}\,du$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.10 $|z| < 1$ için Polylogaritmik fonksiyon Li_n ile gösterilir ve

$$Li_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k^n}$$

şeklinde tanımlanır.

Lemma 2.4 [7. sf. 302] Gamma ve Beta fonksiyonlari arasında söyle bir ilişki mevcuttur

$$B(s,t) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}, \; s > 0, t > 0.$$

Lemma 2.5 $x \in \mathbb{R}$ $|x| < 1$ şeklinde verilsin. O zaman

$$\textbf{a)} \sum_{n=1}^{\infty} H_n x^n = -\frac{\log(1-x)}{1-x} \tag{2.0.1}$$

$$\textbf{b)} \sum_{n=1}^{\infty} H_n^2 x^n = \frac{\log^2(1-x) + Li_2(x)}{1-x} \tag{2.0.2}$$

$$\textbf{c)} \sum_{n=1}^{\infty} H_n^{(2)} x^n = \frac{Li_2(x)}{1-x} \tag{2.0.3}$$

dır.

İspat a) $|x| < 1$ için

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n x^n$$

diyelim. O zaman $H_{n+1} = H_n + \frac{1}{n+1}$ olduğundan

$$\begin{aligned} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} H_{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[H_n + \frac{1}{n+1} \right] x^{n+1} \\ &= x \sum_{n=0}^{\infty} H_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = x f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x f(x) - \log(1-x) \end{aligned}$$

ve buradan da

$$f(x) = -\frac{\log(1-x)}{1-x}$$

elde edilir.

b) $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n^2 x^n$ diyelim. O zaman

$$\begin{aligned} g(x) = \quad & \sum_{n=1}^{\infty} H_n^2 x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(H_n + \frac{1}{n+1} \right)^2 x^{n+1} \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} H_n^2 x^{n+1} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n}{n+1} x^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{n^2} \end{aligned}$$

$$= xg(x) + Li_2(x) + 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n}{n+1} x^{n+1} \tag{2.0.4}$$

elde edilir. (2.01) eşitliğinin her iki tarafını $[0, x]$ aralığında integealini alırsak

$$\int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} H_n t^n dt = -\int_0^x \frac{\log(1-t)}{1-t} dt$$

olur. Sol tarafta seri ve integralin sırasını değiştirip sağ tarafın $\frac{1}{2}\log^2(1-x)$ olduğunu dikkate alırsak

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n+1} x^{n+1} = \frac{1}{2}\log^2(1-x)$$

elde edilir. Bu değeri (2.0.4) de yerine yazarsak

$$(1-x)g(x) = Li_2(x) + \log^2(1-x)$$

ve buradan b) elde edilir.

$$\textbf{c)} \quad h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n^{(2)} x^n$$

diyelim. O zaman $H_{n+1}^{(2)} = H_n^{(2)} + \frac{1}{(n+1)^2}$ olduğundan

$$\begin{aligned} h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n^{(2)} x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} H_{n+1}^{(2)} x^{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(H_n^{(2)} + \frac{1}{(n+1)^2} \right) x^{n+1} \\ &= x \sum_{n=1}^{\infty} H_n^{(2)} x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} = xh(x) + Li_2(x) \end{aligned}$$

veya

$$h(x) = \frac{Li_2(x)}{1-x}$$

elde edilir.

Bölüm 3

HARMONİK SAYILAR İÇEREN SERİLERLE İLGİLİ KLASİK SONUÇLAR

Bu bölümde harmonik sayıları içeren serilerin tekrar keşfedilmesine vesile olan bazı klasik çalışmaları ele alacağız.

Lemma 3.1 [6] [23, ,Teorem 7.71]
$|z-1|<1$ için

$$\psi(z) = -\gamma - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \zeta(n+1)(z-1)^n$$

dır. Burada ψ digamma fonksiyonudur.

Lemma 3.2 [6] $s>0$ ve $m=0,1,2...$ için

$$\int_0^1 u^s \log^{m-1} u du = \frac{(-1)^{m-1}(m-1)!}{(s+1)^m}$$

dır.

İspat. $s,t>0$ için $n,m \in \mathbb{N}$ için

$$B(s+1,t+1) = \int_0^{\infty} u^s (1-u)^t \, du$$

bağıntısının her iki tarafının s'ye göre m. türevi alırsak

$$\frac{\partial^m B(s+1,t+1)}{\partial s^m} = \int_0^1 u^s \log^m u (1-u)^t \, du$$

elde edilir. Burada t=0 alırsak

$$\frac{\partial^m B(s+1,1)}{\partial s^m} = \int_0^1 u^s \log^m u \, du$$

olur. Lemma 2.4 den dolayı

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^m}{\partial s^m} B(s+1,1) &= \frac{\partial^m}{\partial s^m} \frac{\Gamma(s+1)\Gamma(1)}{\Gamma(s+1+1)} \\
&= \frac{\partial^m}{\partial s^m} \frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(s+2)} = \frac{\partial^m}{\partial s^m} \frac{\Gamma(s+1)}{(s+1)\Gamma(s+1)} \\
&= \frac{\partial^m}{\partial s^m} \frac{1}{s+1} = \frac{(-1)^{m-1}(m-1)!}{(s+1)^m}
\end{aligned}$$

olur.

Lemma 3.3 $|t| < 1$ için

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

fonksiyonunu alalım. O zaman

$$\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} \int_0^1 \log^{m-1} t f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(n+1)^m}$$

dır.

İspat.

$$\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} \int_0^1 \log^{m-1} t f(t) dt = \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} \int_0^1 \log^{m-1} t \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n dt$$

dır. Burada seri ve integralin sırasını yer değiştirirsek

$$\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} \int_0^1 \log^{m-1} t f(t) dt = \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^1 t^n \log^{m-1} t dt$$

elde edilir. Burada integralde Lemma 3.2 yi kullanırsak

$$\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\int_0^1 \log^{m-1} t f(t)dt = \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(-1)^{m-1}(m-1)!}{(n+1)^m}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(n+1)^m}$$

olur.
$n = 1, 2, 3, ...$ ve $m = 2, 3, 4, ...$ için

$$\sigma_h(n,m) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^m} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j^n}$$

tanımlayalım.

Teorem 3.1 **[6]** m=2,3,4...için

$$2\sigma_h(1,m) = m\zeta(m+1) - \sum_{k=1}^{m-2} \zeta(m-k)\zeta(k+1)$$

dır. Burada ζ Riemann zeta fonksiyonudur.

İspat Lemma 2.5 ten dolayı

$$\sum_{n=1}^{\infty} H_n t^n = -\frac{\log(1-t)}{1-t}, \ |t| < 1$$

dır. Bu nedenle Lemma 3.3 te $a_n = H_n$ alırsak

$$\frac{(-1)^m}{(m-1)!}\int_0^1 \log^{m-1} t \frac{\log(1-t)}{1-t} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{(n+1)^m} = \sigma_h(1,m)$$

elde ederiz. Böylece

$$\sigma_h(1,m) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{(n+1)^m} = \frac{(-1)^m}{(m-1)!}\int_0^1 \frac{\log^{m-1} t \log(1-t)}{1-t} dt$$

elde edilir. Buradakı integrale kısmı integrasyon uygularsak

$$\sigma_h(1,m) = \frac{(-1)^m}{2(m-2)!}\int_0^1 \frac{\log^{m-2} t \log^2(1-t)}{t} dt$$

olur.

$$\log^2(1-t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(1-t)^{x-1}\bigg|_{x=1} \text{ ve } \frac{\partial^{m-2}}{\partial y^{m-2}}t^{y-1}\bigg|_{y=0} = \frac{\log^{m-2} t}{t}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\sigma_h(1,m) &= \frac{(-1)^m}{2(m-2)!}\int_0^1 \frac{\partial^{m-2}}{\partial y^{m-2}}t^{y-1}\bigg|_{y=0}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(1-t)^{x-1}\bigg|_{x=1}dt \\
&= \frac{(-1)^m}{2(m-2)!}\frac{\partial^{m-2}}{\partial y^{m-2}}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^1 t^{y-1}(1-t)^{x-1}\bigg|_{x=1}dt\right]_{y=0} \\
&= \frac{(-1)^m}{2(m-2)!}\frac{\partial^{m-2}}{\partial y^{m-2}}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}B(x,y)\bigg|_{x=1}\right]_{y=0}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$B_1(y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}B(x,y)\bigg|_{x=1}$$

dersek

$$\sigma_h(1,m) = \frac{(-1)^m}{2(m-2)!}B_1^{(m-2)}(0) \tag{3.0.1}$$

elde edilir. Lemma 2.4 ten dolayı

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x^2}B(x,y) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \\
&= B(x,y)[(\psi(x)-\psi(x+y))^2+\psi'(x)-\psi'(x+y)]
\end{aligned}$$

olduğundan

$$B_1(y) = B(1,y)[(\psi(1)-\psi(1+y))^2+\psi'(1)-\psi'(1+y)]$$

olur. Burada ψ digamma fonksiyonudur. $\psi(1)=-\gamma$ ve $\psi'(1)=\zeta(2)$ olduğundan

$$B_1(y) = \frac{1}{y}[(-\gamma-\psi(y+1))^2+\zeta(2)-\psi'(y+1)]$$

elde edilir. Lemma 3.1 den dolayı

$$-\gamma-\psi(y+1) = \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\zeta(m+1)y^m$$

ve

$$\zeta(2)-\psi'(y+1)=\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}(m+1)\zeta(m+2)y^m$$

olduğundan (3.0.1) eşitliğinini her iki tarafını $(-1)^m y^{m-2}$ ile çarpıp $m=2$ den itibaren iki tarafı toplarsak

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=2}^{\infty}(-1)^m\Gamma_n(1,m)y^{m-2}=\sum_{m=2}^{\infty}(-1)^m\frac{(-1)^m}{(m-2)!}B_1^{m-2}(0)y^{m-2}\\
&=\sum_{m=2}^{\infty}\frac{B_1^{(m-2)}(0)}{(m-2)!}y^{m-2}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{B_1^{(m)}(0)}{m!}y^m=B_1(y)\\
&=\frac{1}{y}[(-\gamma-\psi(y+1))^2+\zeta(2)-\psi'(y+1)]\\
&=\frac{1}{y}\left(\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\zeta(m+1)y^m)\right)^2+\frac{1}{y}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}(m+1)\zeta(m+2)y^m
\end{aligned}$$

elde edilir. Seriler için Cachy çarpımından dolayı

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\zeta(m+1)y^m\right)^2=\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\sum_{k=1}^{m-1}\zeta(k+1)\zeta(m-k+1)y^m$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=2}^{\infty}(-1)^m\sigma_h(1,m)y^{m-2}=\frac{1}{y}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\sum_{k=1}^{\infty}\zeta(k+1)\zeta(m-k+1)y^m\\
&+\frac{1}{y}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}(m+1)\zeta(m+2)y^m\\
&=\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\left[\sum_{k=1}^{m-1}\zeta(k+1)\zeta(m-k+1)-(m-1)\zeta(m+2)\right]y^{m-1}
\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=2}^{\infty}(-1)^m(2\sigma_h(1,m))y^{m-2}\\
&=\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\left[\sum_{k=1}^{m-1}\zeta(k+1)\zeta(m-k+1)-(m+1)\zeta(m+1)\right]y^{m-1}
\end{aligned}$$

sonucunu buluruz. Karşılıklı olarak y^{m-2} nın katsayılarını eşitlersek istenilen sonuç hemen elde edilir. Böylece Teorem 3.1 in ispatını bitirmiş olduk.

$n = 1, 2, 3...$ ve $m = 2, 3...$için

$$S_h(n,m) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 + \frac{1}{2} + ...\frac{1}{k})^n}{(k+1)^m}$$

tanımlayalım. O zaman aşağıdaki teorem geçerlidir.

Teorem 3.2 $m = 2, 3, 4...$ için

$$S_h(2,m) = \frac{m(m+1)}{3}\zeta(m+2) + \zeta(2)\zeta(m) - \frac{m}{2}\sum_{k=0}^{m-2}\zeta(m-k)\zeta(k+2)$$
$$+\frac{1}{3}\sum_{k=2}^{m-2}\zeta(m-k)\sum_{j=1}^{k-1}\zeta(j+1)\zeta(k+1-j) + \sigma_h(2,m)$$

dır.

İspat Lemma 2.5 den dolayı

$$\sum_{n=1}^{\infty} H_n^2 t^n = \frac{\log^2(1-t) + Li_2(t)}{1-t}$$

dır. Lemma 3.3 te $a_n = H_n^2$ alırsak

$$S_h(2,m) = \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\int_0^1 \frac{\log^{m-1} t[\log^2(1-t) + Li_2(t)]}{1-t}dt$$
$$= \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\int_0^1 \frac{\log^{m-1} t\log^2(1-t)}{1-t}dt + \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\int_0^1 \frac{\log^{m-1} tLi_2(t)}{1-t}dt \qquad (3.0.2)$$

elde edilir. Kısmı integrasyonla

$$\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\int_0^1 \frac{\log^{m-1} t\log^2(1-t)}{1-t}dt = \frac{(-1)^{m-1}}{3(m-2)!}\int_0^1 \frac{\log^{(m-2)} t\log^3(1-t)}{t}dt \quad (3.0.3)$$

elde ederiz. Lemma 3.3 te $a_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2}$ alıp lemma 2.5 i kullanırsak

$$\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\int_0^1 \frac{\log^{m-1} tLi_2(t)}{1-t}dt = \sigma_h(2,m) \qquad (3.0.4)$$

elde ederiz. (3.0.4) te bulduğumuz değerleri yerine yazarsak

$$S_h(2,m) = \frac{(-1)^{m-1}}{3(m-2)!}\int_0^1 \frac{\log^{(m-2)} t \log^3(1-t)}{t} dt + \sigma_h(2,m)$$
$$= \frac{(-1)^{m-1}}{3(m-2)!}\frac{\partial^{m-2}}{\partial y^{m-2}}\left[\frac{\partial^3}{\partial x^3}\int_0^1 t^{y-1}(1-t)^{x-1}dt\Big|_{x=1}\right]_{y=0}$$
$$= \frac{(-1)^{m-1}}{3(m-2)!}\frac{\partial^{m-2}}{\partial y^{m-2}}\left[\frac{\partial^3}{\partial x^3}B(x,y)\Big|_{x=1}\right]_{y=0}$$

buluruz.

$$B_2(y) = \frac{\partial^3}{\partial x^3}B(x,y)\Big|_{x=1}$$

tanımlarsak

$$S_h(2,m) = \frac{(-1)^{m-1}}{3(m-2)!}B_2^{(m-1)}(0) + \sigma_h(2,m)$$

elde edilir.

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3}B(x,y) = \frac{\partial^3}{\partial x^3}\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = B(x,y)\Big\{(\psi(x)-\psi(x+y))^3$$
$$+ 3(\psi(x)\psi(x+y))(\psi'(x)-\psi'(x+y)) + (\psi''(x)-\psi''(x+y))\Big\}$$

olduğundan

$$B_1(y) = (-\gamma - \psi(y+1)B_1(y) + \frac{2}{y}(-\gamma-\psi(y+1))$$
$$\cdot(\zeta(2)-\psi'(y+1)) + (-2\zeta(3)-\psi''(y+1))$$

olur. Lemma 3.1 den dolayı

$$-\psi''(y+1) = \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m(m+1)(m+2)\zeta(m+3)y^m$$

dir. Böylece

$$\sum_{m=2}^{\infty}(-1)^{m-1}3[S_n(2,m)-\sigma_h(2,m)]y^{m-2} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{B_2^{(m)}(0)}{m!}y^m = B_2(y)$$
$$= (-\gamma-\psi(y+1))B_1(y) + \frac{2}{y}(-\gamma-\psi(y+1))(\zeta(2)-\psi'(y+1)) + (-2\zeta(3)-\psi''(y+1))$$
$$= \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m 2\sum_{k=1}^{m}\zeta(k+1)\sigma_h(1,m-k+z)y^m + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m(m+1)(m+2)\zeta(m+3)y^{m-1}$$

olur. y^{m-2} nın katsayılarını karşılıklı olarak birbirine eşitlersek istediğimiz sonuç elde edilir.

k=1,2,3,... için

$$\sigma(n,k)=\sum_{m=1}^{k-1}\frac{s(n,k-m)}{n!}\frac{s(n,m)}{n!}$$

tanımlayalım. Burada, $\sigma(n,k)$ birinci türden Stirling sayılarıdır.

Teorem 3.3 [19] $\zeta(3)$ ve $\zeta(4)$ için aşagıdaki seri temsiller geçerlidir.

$$\zeta(3)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{(n+1)^2} \qquad \text{ve} \qquad \zeta(4)=\frac{4}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{(n+1)^2}$$

dır.

Teorem 3.4 [19]

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|1-e^{i\theta}|d\theta=0,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^2|1-e^{i\theta}|d\theta=\frac{1}{2}\zeta(2),$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^3|1-e^{i\theta}|d\theta=-\frac{3}{2}\zeta(3),$$

ve son olarak

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^4|1-e^{i\theta}|d\theta\\&=3\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\right)^2-\frac{3}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2}\right)\\&=\frac{57}{8}\zeta(4)\end{aligned}$$

eşitlikleri geçerlidir.

Teorem 3.3 ve 3.4 ün İspatı

α bir reel sayı olsun. $(1-z)^{-\alpha}$ nın $z=0$ noktasındakı Taylor serisini açarsak

$$(1-z)^{-\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n}{n!}z^n,|z|<1$$

elde edilir. Burada $(\alpha)_n=\alpha(\alpha+1)...(\alpha+n-1)$ Pochammer semboludur. $0\leq r<1$ olmak üzere $z=re^{i\theta}$ alırsak Parseval eşitliğinden dolayı

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|1-re^{i\theta}|^{-2\alpha}d\theta=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(\alpha)_n}{n!}\right)r^{2n} \tag{3.0.5}$$

elde edilir. Sol taraftaki integralin yakınsaklığını garanti etmek için $\alpha<\frac{1}{2}$ alalım. (3.0.5) eşitliğinin her iki tarafının $r\to 1^-$ için limitini alırsak

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|1-e^{i\theta}|^{-2\alpha}d\theta=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(\alpha)_n}{n!}\right),\alpha<\frac{1}{2} \tag{3.0.6}$$

elde ederiz. $|1-e^{i\theta}|=2\sin\frac{\theta}{2}$ olduğundan

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}|1-e^{i\theta}|^{-2\alpha}d\theta&=2^{-2\alpha}\int_0^{2\pi}\sin^{-2\alpha}\frac{\theta}{2}d\theta\\&=2^{-2\alpha+1}\int_0^{\pi/2}\sin^{-2\alpha}\theta d\theta=\frac{2^{-2\alpha+1}\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{1}{2}-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)}\end{aligned}$$

buluruz. Böylece $\alpha<\frac{1}{2}$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(\alpha)_n}{n!}\right)^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|1-e^{i\theta}|^{-2\alpha}d\theta=\frac{2^{-2\alpha}\Gamma\big(\frac{1}{2}-\alpha\big)}{\pi\ \Gamma(1-\alpha)} \tag{3.0.7}$$

elde edilir. Buradaki üç öğenin her biri $\alpha=0$ noktasında analitik olduğundan her birinin $\alpha=0$ noktasındaki Taylor serisi geçerlidir. Ayrıca

$$|1-e^{i\theta}|^{-2\alpha}=\exp(-2\alpha\log|1-e^{i\theta}|)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n2^n\alpha^n}{n!}\Big(\log|1-e^{i\theta}|\Big)^n,\theta\neq 0$$

olduğundan iki tarafın $[0, 2\pi]$ üzerinde integralini alırsak

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |1-e^{i\theta}|^{-2\alpha} d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^n(1-e^{i\theta}) d\theta\right)\alpha^n \tag{3.0.8}$$

elde ederiz. Şimdi (3.0.7) teki son ögeyi ele alalım

$$f(t) = \frac{2^{-2z}\Gamma(\frac{1}{2}-z)}{\pi\Gamma(1-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{3.0.9}$$

diyelim $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ olduğundan $a_0 = 1$ dır. Önce buradaki a_n katsayılarının aşağıdaki rekürans bağıntısını sağladığını gösterelim : $a_1 = 0$ ve $n \geq 1$ için

$$(n+1)a_{n+1} = 2\sum_{k=1}^{n} a_{n-k}(2^k-1)\zeta(k+1). \tag{3.0.10}$$

$\mathbf{Re}(s) > 1$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^s} = (1-2^{-s})\zeta(s) \tag{3.0.11}$$

olduğu biliniyor.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{n+1}\right] = 2\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}\right]$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = 2\log 2 \tag{3.0.12}$$

dır. Yine $z = 0$ noktasındaki Taylar serilerini açarsak

$$\begin{aligned}\frac{1}{n+\frac{1}{2}-z} - \frac{1}{n+1-z} &= \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(n+\frac{1}{2})^{k+1}} - \frac{1}{(n+1)^{k+1}}\right]z^n \\ &= \frac{1}{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{n+1} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{2^{k+1}}{(2n+1)^{k+1}} - \frac{1}{(n+1)^{k+1}}\right]z^k\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{n+\frac{1}{2}-z}-\frac{1}{n+1-z}\right]\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{n+\frac{1}{2}}-\frac{1}{n+1}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{2^{k+1}}{(2n+1)^{k+1}}-\frac{1}{(n+1)^{k+1}}\right]z^k\right\}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{n+\frac{1}{2}}-\frac{1}{n+1}\right]+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{2^{k+1}}{(2n+1)^{k+1}}-\frac{1}{(n+1)^{k+1}}\right]z^k
\end{aligned}$$

Buradaki toplamların sıralarını yer değiştirip (3.0.12) i kullanırsak

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{n+\frac{1}{2}-z}-\frac{1}{n+1-z}\right]&=2\log 2+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{2^{k+1}}{(2n+1)^{k+1}}-\frac{1}{(n+1)^{k+1}}\right]z^k\\
&=2\log 2+\sum_{k=1}^{\infty}\left[2^{k+1}\left(1-\frac{1}{2^{k+1}}\zeta(k+1)\right)-\zeta(k+1)\right]z^k \quad \text{(3.0.11 den dolayı)}\\
&=2\log 2+2\sum_{k=1}^{\infty}(2^k-1)\zeta(k+1)z^k \qquad (3.0.13)
\end{aligned}$$

elde edilir. Teorem 2.3 den dolayı

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=ze^{-\gamma t}\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{z}{n})e^{-\frac{z}{n}}$$

dır. Her iki tarafın logaritmik türevini alırsak

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=\gamma-\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{z+n}\right]$$

elde dilir. Burada z yerine $a-z$ alırsak

$$\frac{\Gamma'(a-z)}{\Gamma(a-z)}=\gamma-\frac{1}{a-z}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{n+a-z}\right] \qquad (3.0.14)$$

bulunur. (3.0.9) ten de

$$\begin{aligned}\frac{f'(z)}{f(z)} &= -2\log 2 + \frac{\Gamma'(1-z)}{\Gamma(1-z)} - \frac{\Gamma'(\frac{1}{2}-z)}{\Gamma(\frac{1}{2}-z)} \\ &= -2\log 2 + \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{n+\frac{1}{2}-z} - \frac{1}{n+1-z}\right] \\ &= 2\sum_{k=1}^{\infty}(2^k-1)\zeta(k+1)z^k \text{ (3.0.14 den dolayı)}\end{aligned}$$

elde ederiz. Buradan da

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}z^n = f'(z) &= \frac{f'(z)}{f(z)}.f(z) \\ &= 2\Big(\sum_{k=1}^{\infty}(2^k-1)\zeta(k+1)z^k\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n\Big) \\ &= 2\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n}a_{n-k}(z^k-1)\zeta(k+1)\Big)z^n \qquad (3.0.15)\end{aligned}$$

elde edilir. (3.0.15) eşitliğinin her iki tarafında z^n nın katsayılarını eşitlersek (3.0.10) elde edilir. Şimdi tekrar (3.0.7) bağıntısına dönelim. Tanım 2.4 ten dolayı

$$(\alpha)_n = \sum_{k=1}^{\infty}s(n,k)\alpha^k \qquad (3.0.16)$$

dır. Burada $s(n,k)$ birinci türden stirling sayılarıdır. Bu bağıntı yardımıyla

$$\frac{s(n,1)}{n!} = 1 \text{ ve } \frac{s(n,2)}{n!} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \frac{H_n}{n}$$

olduğu kolayca gösterilebilir. Yine (3.10) bağıntısını elde ederken izlediğimiz yolu izleyerek $s(n,k)$ nın

$$(k-1)s(n,k) = \sum_{m=1}^{k-1}s(n,k-m)A(n,m) \qquad (3.0.17)$$

rekürans bağıntısını sağladığı gösterilebilir. Burada

$$A(1,0) = 1, A(1,m) = 0$$

ve $m \geq 1$ için

$$A(n,m) = (-1)^{m+1} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^m}, n \geq 2$$

dır. (3.0.17) bağıntısını kullanarak

$$\frac{s(n,3)}{n!} = \frac{1}{2n}\Big\{ [\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}]^2 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} \Big\} \tag{3.0.18}$$

$$\frac{s(n,4)}{n!} = \frac{1}{6n}\Big\{ [\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}]^3 - 2[\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}][\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2}] + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^3} \Big\} \tag{3.0.19}$$

olduğu görülür. (3.0.16) dan dolayı

$$\begin{aligned} \frac{(\alpha)_n^2}{n!} &= \frac{1}{(n!)^2}\Big(\sum_{k=1}^{n} s(n,k)\alpha^k \Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} s(n,k)\alpha^k \Big) \\ &= \frac{1}{(n!)^2} \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\sum_{j=1}^{k} s(n,j)s(n,k-j) \Big)\alpha^k \ \big(s(n,m) = 0 \ k \geq n+1\big) \end{aligned}$$

elde edilir. Daha önce tanımladığımız

$$\sigma(n,k) = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{s(n,j)s(n,k-j)}{(n!)^2} \tag{3.0.20}$$

tanımını kullanırsak

$$\left(\frac{(\alpha)_n}{n!} \right)^2 = \sum_{k=2}^{\infty} \sigma(n,k)\alpha^k, n \geq 1 \tag{3.0.21}$$

yazabiliriz. Çünkü $\sigma(n,0) = 0$ dır. (3.0.21) ün her iki tarafını n üzerinden toplarsak

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(\alpha)_n}{n!} \right)^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=2}^{\infty} \sigma(n,k)\alpha^k \Big) \\ & \sum_{k=2}^{\infty} \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \sigma(n,k) \Big)\alpha^k \end{aligned}$$

elde edilir. $k \geq n+1$ için $s(n,k) = 0$ olduğundan (3.0.19) dan $n \geq \frac{k}{2}$ elde edilir. Böylece

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(\alpha)_n}{n!} \right)^2 = \sum_{k=2}^{\infty} \Big(\sum_{n \geq \frac{k}{2}} \sigma(n,k) \Big)\alpha^k + 1 \tag{3.0.22}$$

elde edilir. yine (3.0.20) bağıntısından

$$\sigma(n,2) = \frac{s(n,1)^2}{(n!)^2} = \frac{1}{n^2} \tag{3.0.23}$$

$$\sigma(n,3) = \frac{2s(n,1)s(n,2)}{(n!)^2} = \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} \tag{3.0.24}$$

$$\sigma(n,4) = \frac{2s(n,3)}{n!}.\frac{s(n,1)}{n!} = \frac{1}{n^2}\left(2(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k})^2 - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2}\right) \tag{3.0.25}$$

elde edilir. Böylece (3.0.7), (3.0.8), (3.0.9) ve (3.0.21) dan şu sonucu elde ederiz.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\alpha^n = 1 + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\sum_{n\geq\frac{k}{2}}\sigma(n,k)\right)\alpha^k$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{n!}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^n|1-e^{i\theta}|d\theta\right)\alpha^n \tag{3.0.26}$$

Birinci eşitlikte α^2, α^3 ve α^4 ün katsayılarını eşitlersek

$$a_2 = \sum_{n=1}^{\infty}\sigma(n,2), \tag{3.0.27}$$

$$a_3 = \sum_{n\geq\frac{3}{2}}\sigma(n,3) = \sum_{n=2}^{\infty}\sigma(n,3), \tag{3.0.28}$$

$$a_4 = \sum_{n=2}^{\infty}\sigma(n,4) \tag{3.0.29}$$

ve (3.0.10) rekürans bağıntısından

$$a_2 = \zeta(2), a_3 = 2\zeta(3) \text{ ve } a_4 = \frac{19}{4}\zeta(4) \tag{3.0.30}$$

elde edilir. (3.0.23), (3.0.24), (3.0.25) ve (3.0.30) bağıntılarını (3.0.27), (3.0.28) ve (3.0.29) te kullanırsak sırayla

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \zeta(2), \sum_{n=2}^{\infty}\frac{H_{n-1}}{n^2} = \zeta(3)$$

ve

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2H_{n-1}^2-H_{n-1}^{(2)}}{n^2}=\frac{19}{4}\zeta(4)$$

elde edilir. Bu da Teorem 3.3 ün ispatını bitirir. Teorem 3.4 ispatı (3.0.9) bağıntısında $a_1 = 0$ elde edilir. (3.0.24) eşitliğinde 1. ve son terimde $n = 1, 2, 3, 4$ için α^n in katsayılarını eşitliyip (3.0.28) deki değerler kullanırsak istenilen sonuç elde edilir.

Teorem 3.5 $|x| \leq 1$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{H_{k-1}}{k^2}x^{k-1}=\frac{1}{2x}\int_0^x\frac{\log^2(1-t)}{t}dt \tag{3.0.31}$$

dır.

İspat

Lemma (2.5) den dolayı

$$\sum_{k=1}^{\infty}H_{k-1}x^{k-1}=-\frac{\log(1-x)}{1-x}$$

dır. Bu eşitliğin her iki tarafının $[0,x]$ üzerinde integral alırsak

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{H_{k-1}}{k}x^{k}=\frac{1}{2}\log^2(1-x)$$

elde edilir. Burada x yerine t alıp her iki tarafını t ye böldükten sonra $[0,x]$ üzerinde integral alırsak

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{H_{k-1}}{k^2}x^{k-1}=\frac{1}{2x}\int_0^x\frac{\log^2(1-t)}{t}dt$$

elde edilir. Şimdi (3.0.31) formülünün x in bazı değerlerine göre verdiği sonuçları inceleyelim.

1.Durum. x=1 olsun. O zaman (3.0.31) dan

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{H_{k-1}}{k^2}=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\log^2(1-t)}{t}dt$$

elde edilir. Sağ taraftaki integralin değerinin $2\zeta(3)$' e eşit olduğu biliniyor. Bu nedenle

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{H_{k-1}}{k^2}=\zeta(3)$$

elde edilir.

2.Durum. $x=\frac{1}{2}$ olsun. [18, sf. 310] dan

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\log^2(1-t)}{t}dt = -\log^3 2 - 2\log 2 Li_2(1/2) - 2Li_3(1/2) + 2Li_3(1)$$

olduğunu biliyoruz. [18, sf. 283] ve [18, sf. 296] dan

$$Li_2(1/2) = \frac{1}{12}\pi^2 - \frac{1}{2}\log^2 \tag{3.0.32}$$

ve

$$Li_3(1/2) = \frac{7}{8}\zeta(3) - \frac{1}{12}\pi^2 \log 2 + \frac{1}{6}\log^3 2 \tag{3.0.33}$$

ve $Li_3(1) = \zeta(3)$ olduğundan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{H_{k-1}}{2^{k-1}k^2} = \frac{1}{4}\zeta(3) - \frac{1}{3}\log^3 2$$

elde edilir.

3. Durum. $x=1$ olsun. (3.31) de $x=-u$ alırsak

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{H_{k-1}}{k^2} = -\frac{1}{2u}\int_0^{-u} \frac{\log^2(1-t)}{t}dt$$

elde edilir. Basit bir değişken değiştirme ile

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{H_{k-1}}{k^2} = -\frac{1}{2u}\int_0^{u} \frac{\log^2(1+t)}{t}dt$$

elde edilir. [18, sf. 310] dan dolayı

$$\int_0^{u} \frac{\log^2(1+t)}{t}dt = -\frac{2}{3}\log^3 2 - 2\log 2 Li_2(1/2) - 2Li_3(1/2) + 2Li_3(1)$$

ve $Li_3(1) = \zeta(3)$ olduğundan (3.0.32) ve (3.0.33) yardımıyla

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{H_{k-1}}{k^2} = -\frac{1}{8}\zeta(3)$$

elde edilir.

Teorem 3.6 [9, sf. 127] $|x| \leq 1$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{H_{k-1}}{k^3} x^k = \frac{1}{2} \log x \int_0^x \frac{\log^2(1-t)}{t} dt - \frac{1}{2} \int_0^x \frac{\log t \log^2(1-t)}{t} dt \tag{3.0.34}$$

dır.

İspat (3.0.31) in her iki tarafının $[0,x]$ üzerinde integralini alırsak

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{H_{k-1}}{k^3} x^k = \frac{1}{2} \int_0^x \frac{du}{u} \int_0^u \frac{\log^2(1-t)}{t} dt \tag{3.0.35}$$

elde edilir. Bu integralde kısmı integrasyon yöntemini uygularsak istenilen sonuç elde edilir. (3.0.34) eşitliğinde x in bazı durumlarını için aşağıdaki sonuçları buluruz.

1. Durum . x=1 olsun. O zaman

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{H_{k-1}}{k^3} = -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\log t \log^2(1-t)}{t} dt$$

elde edilir. Sağ taraftaki integralin değeri biliniyor ve [18, sf. 310] dan dolayı $-\frac{1}{2}\zeta(4)$ e eşittir. Bu nedenle

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{H_{k-1}}{k^3} = \frac{1}{4}\zeta(4)$$

dır.

2. Durum. $x = -1$ olsun. O zaman (3.0.35) den dolayı

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{H_{k-1}}{k^3} = \frac{1}{2} \int_0^{-1} \frac{du}{u} \int_0^u \frac{\log^2(1-t)}{t} dt$$

elde edilir. Basit bir değişken değiştirmeyle ve kısmı integrasyon yaparak

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{H_{k-1}}{k^3} = -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\log s \log^2(1+s)}{s} ds$$

elde ederiz. Bu integralde tekrar kısmı integrasyon uygularsak

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{H_{k-1}}{k^3} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\log^2 s \log(1+s)}{1+s} ds \tag{3.0.36}$$

elde ederiz. Bu integralde $s = t - 1$ ve $t = \frac{1}{u}$ değişken değiştirme işlemlerini art arda uygularsak

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\log^2 s \log(1+s)}{1+s} ds \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\log^2(1-u)\log u}{u} du + \int_{-1/2}^1 \frac{\log^2 u \log(1-u)}{u} du - \frac{1}{2}\int_{-1/2}^1 \frac{\log^3 u}{u} du \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{1/2} \frac{\log^2 u \log(1-u)}{1-u} du + \int_{1/2}^1 \frac{\log^2 u \log(1-u)}{u} du + \frac{1}{8}\log^4 2
\end{aligned}$$

elde edilir. [18, sf. 310, (12)] ve [18, sf. 310, (10)] dan dolayı

$$\int_0^{1/2} \frac{\log^2 \log(1-u)}{1-u} du = -\frac{1}{4}\zeta(4) - \frac{1}{4}\log^4 2$$

ve

$$\begin{aligned}
&\int_{1/2}^1 \frac{\log^2 s \log(1+s)}{1+s} ds \\
&= -2Li_4(1/2) - 2\zeta(4) - \frac{7}{4}\log 2\zeta(3) + \frac{1}{12}\pi^2 \log 2 - \frac{1}{12}\log^4 2
\end{aligned}$$

dır. Böylece bu değerleri (3.0.36) da yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\log^2 s \log(1+s)}{1+s} ds \\
&= \frac{1}{8}\zeta(4) + \frac{1}{8}\log^4 2 + 2Li_4(1/2) - 2\zeta(4) + \frac{7}{4}\zeta(3)\log 2 + \frac{\pi^2}{12}\log 2 - \frac{1}{12}\log^4 2 \\
&= 2Li_4(1/2) - \frac{15}{8}\zeta(4) + \frac{1}{24}\log^4 2 + \frac{\pi^2}{12}\log 2 + \frac{7}{4}\zeta(3)\log 2
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu değeri (3.0.35) da yerine yazarsak

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{H_{k-1}}{k^3} = 2Li_4(1/2) - \frac{15}{8}\zeta(4) + \frac{1}{24}\log^4 2 + \frac{\pi^2}{12}\log 2 + \frac{7}{4}\zeta(3)\log 2$$

elde edilir.

Bölüm 4

4. HARMONİK SAYILAR İÇEREN SERİLERİLERLE İLGİLİ YENİ ÇALIŞMALAR

Lemma 4. 1 [24, Lemma 2] $n \in \mathbb{N}$ olsun. O zaman aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

$$(a)\ I_n = \int_0^1 x^{n-1} \log(1-x)dx = -\frac{H_n}{n},$$

$$(b)\ J_n = \int_0^1 x^{n-1} \log^2(1-x)dx = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{H_k}{k} = \frac{H_n^2}{n} + \frac{H_n^{(2)}}{n}.$$

İspat Kısmı integrasyon uygulayarak

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 x^{n-1} \log(1-x)dx \\ &= (x-1)x^{n-1}\log(1-x)\Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 x^{n-1}dx + (n-1)I_{n-1} - (n-1)I_n \\ &= -\frac{1}{n} + (n-1)I_{n-1} - (n-1)I_n \end{aligned}$$

ve buradan $k = 1, 2, ...$ için

$$kI_k - (k-1)I_{k-1} = -\frac{1}{k}$$

elde edilir. Her iki tarafı $k = 2$ den n'ye kadar toplar ve $\int_0^1 \log(1-x)dx = -1$

olduğunu dikkate alırsak

$$I_n = \int\limits_0^1 x^{n-1} \log(1-x)dx = -\frac{H_n}{n}$$

elde edilir. Böylece (a) ispatlanır. (b) yı ispatlamak için (a) daki gibi kısmı integrasyon uygularsak

$$\begin{aligned} J_n &= \int\limits_0^1 x^{n-1} \log^2(1-x)dx \\ &= (x-1)x^{n-1}\log^2(1-x)\Big|_{x=0}^{x=1} - 2\int\limits_0^1 x^{n-1}\log(1-x)dx + (n-1)J_{n-1} - (n-1)J_n \\ &= 2\frac{H_n}{n} + (n-1)J_{n-1} - (n-1)J_n \end{aligned}$$

veya $k = 1, 2, 3, ...$ için

$$kJ_k - (k-1)J_{k-1} = \frac{2H_k}{k}$$

elde edilir. Her iki tarafı $k = 2$ den $k = n$ ye kadar toplayıp $\int\limits_0^1 \log^2(1-x)dx = 2$ olduğunu dikkate alırsak

$$J_n = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{H_k}{k}$$

elde edilir. [2] den dolayı $\sum_{k=1}^{n}\frac{H_k}{k} = \frac{H_n^2 + H_n^{(2)}}{2}$ olduğundan

$$J_n = \frac{H_n^2 + H_n^{(2)}}{2}$$

elde edilir.

Lemma 4.2 [24, Lemma 3]

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{n^3} = 3\zeta(2)\zeta(3) - \frac{9}{2}\zeta(5)$$

eşitliği geçerlidir.

ispat

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\left(\zeta(2)-1-\frac{1}{2^2}-...-\frac{1}{n^2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n^3(n+k)^2}$$

eşitliğinden başlayalım

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n^3(n+k)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3(n+k)^2}$$

olduğu dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}2S&=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n^3(n+k)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3(n+k)^2}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^3+n^3}{k^3n^3(n+k)^2}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k+n)^3-3kn(k+n)}{k^3n^3(n+k)^2}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2n^3}+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3n^2}-3\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2n^2(n+k)}\\&=2\zeta(2)\zeta(3)-3\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2n^2(n+k)}\end{aligned}$$

veya

$$S=\zeta(2)\zeta(3)-\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2n^2(n+k)}$$

elde edilir.

$$\frac{1}{n^2k^2(n+k)}=\frac{1}{k^2n^3}-\frac{1}{n^4}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{(n+k)}\right)$$

olduğundan

$$\begin{aligned}S&=\zeta(2)\zeta(3)-\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^2n^3}-\frac{1}{n^4}(\frac{1}{k}-\frac{1}{(n+k)})\right)\\&=\zeta(2)\zeta(3)-\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\\&+\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{k}-\frac{1}{n+k})\end{aligned}$$

ve $\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{k}-\frac{1}{n+k})=H_n$ olduğundan

$$S=\zeta(2)\zeta(3)-\frac{3}{2}\zeta(2)\zeta(3)+\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^4}$$

elde edilir. Teorem 3.1 den dolayı

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^4}=3\zeta(5)-\zeta(2)\zeta(3)$$

olduğundan

$$\begin{aligned}S&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\left(\zeta(2)-H_n^{(2)}\right)=\zeta(2)\zeta(3)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{n^3}\\&=\frac{9}{2}\zeta(5)-2\zeta(2)\zeta(3)\end{aligned}$$

ve böylece

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{n^3}=3\zeta(2)\zeta(3)-\frac{9}{2}\zeta(5)$$

elde edilir.

Teorem 4.1 [24, Teorem 1]

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^2}{n^3}=\frac{7}{2}\zeta(5)-\zeta(2)\zeta(3)$$

dır.

İspatLemma 4.1 (b) den dolayı

$$\int_0^1\frac{x^{n-1}}{n^2}\log^2(1-x)dx=\frac{H_n^2}{n^3}+\frac{H_n^{(2)}}{n^3}$$

dır. Her iki tarafı $n=1$ den ∞ a kadar toplarsak

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\frac{x^{n-1}}{n^2}\log^2(1-x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{H_n^2}{n^3}+\frac{H_n^{(2)}}{n^3}\right)$$

veya

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{H_n^2}{n^3}+\frac{H_n^{(2)}}{n^3}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\frac{x^{n-1}}{n^2}\log^2(1-x)dx \tag{4.0.1}$$

elde edilir. Lemma 2.5 den dolayı

$$\frac{1}{2}\log^2(1-x)=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}t^nH_ndt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}H_n$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{n^3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{n^3}&=2\int_0^1\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{k+n}}{k^2(n+1)}H_ndx\\&=2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\frac{x^{k+n}}{k^2(n+1)}dxH_n\end{aligned}$$

$$=2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{k^2(n+1)(k+n+1)} \tag{4.0.2}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2(k+n+1)}&=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^2(n+1)}-\frac{1}{(n+1)^2}(\frac{1}{k}-\frac{1}{n+k+1})\right)\\&=\frac{\zeta(2)}{n+1}-\frac{1}{(n+1)^2}\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{k}-\frac{1}{n+k+1})\\&=\frac{\zeta(2)}{n+1}-\frac{H_{n+1}}{(n+1)^2}\end{aligned} \tag{4.0.3}$$

elde edilir. (3.0.39) da (3.0.38) i kullanırsak

$$\begin{aligned}
2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{H_n}{k^2(n+1)(k+n+1)} &= 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n+1}\left(\frac{\zeta(2)}{n+1}-\frac{H_{n+1}}{(n+1)^2}\right)\\
&= 2\zeta(2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{(n+1)^2}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_nH_{n+1}}{(n+1)^3}\\
&= 2\zeta(2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{n+1}-\frac{1}{n+1}}{(n+1)^2}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(H_{n+1}-\frac{1}{n+1}\right)H_{n+1}}{(n+1)^3}\\
&= 2\zeta(2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{n+1}}{(n+1)^2}-2\zeta(2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^3}\\
&-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{n+1}^2}{(n+1)^3}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{n+1}}{(n+1)^4}\\
&= 2\zeta(2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^2}-2\zeta(2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^2}{n^3}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^4}\\
&= 6\zeta(5)-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^2}{n^3} \qquad (4.0.4)
\end{aligned}$$

elde ederiz. Burada Teorem 3.1 den dolayı $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^2}=2\zeta(3)$ ve $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^4}=3\zeta(5)-\zeta(2)\zeta(3)$ bağlantılarını kullandık. (3.0.40), (3.0.38) ve (3.0.37) i birleştirirsek

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^2}{n^3}=2\zeta(5)-\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{n^3}$$

ve Lemma (4.2) den dolayı

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^2}{n^3}=\frac{7}{2}\zeta(5)-\zeta(2)\zeta(3)$$

elde edilir.

Teorem 4.2 [25] Eğer k pozitif bir tamsayı, $M(k)=m(1)+m(2)+...+m(k)$ ve $m(k)$ ve $\lim_{k\to\infty}m(k)=0$ şeklinde gerçek sayılar ise aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty}\frac{M(k)}{(k+1)(k+n+1)} =& m(1)\left(\frac{H_n}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{m(k+1)}{j+k+1}\\
=& \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{m(k)}{j+k}
\end{aligned}$$

İspat

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{(j+k)(j+k+1)}=\frac{1}{(k+1)(k+n+1)}$$

teleskopik toplamı gözönüne alındığında

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N}\frac{M(k)}{(k+1)(k+n+1)}&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}\frac{M(k)}{(j+k)(j+k+1)}\\&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{M(k)}{j+k}-\frac{M(k)}{j+k+1}\right)\\&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{M(k)}{j+k}-\frac{M(k+1)-m(k+1)}{j+k+1}\right)\\&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{M(k)}{j+k}-\frac{M(k+1)}{j+k+1}+\frac{m(k+1)}{j+k+1}\right)\\&=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{M(k)}{j+k}-\frac{M(k+1)}{j+k+1}+\frac{m(k+1)}{j+k+1}\right)\end{aligned}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{M(k)}{j+k}-\frac{M(k+1)}{j+k+1}\right)+\sum_{k=1}^{N}\frac{m(k+1)}{j+k+1}\right)\tag{4.0.5}$$

elde ederiz.

$$\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{M(k)}{j+k}-\frac{M(k+1)}{j+k+1}\right)=\frac{M(1)}{j+1}-\frac{M(N+1)}{j+N+1}$$

$$=\frac{m(1)}{j+1}-\frac{M(N+1)}{j+N+1}\tag{4.0.6}$$

olduğundan (3.0.41) eşitliği

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{M(k)}{(k+1)(k+n+1)}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{m(1)}{j+1}-\frac{M(N+1)}{j+N+1}+\sum_{k=1}^{N}\frac{m(k+1)}{j+k+1}\right)$$

$$= m(1)\left(\frac{H_n}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{M(N+1)}{j+N+1} + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{N}\frac{m(k+1)}{j+k+1} \qquad (4.0.7)$$

olur. Stolz-Cesaro teoremi yardımıyla $N \to \infty$ için $\lim_{N\to\infty}\frac{M(N+1)}{j+N+1} = 0$ olur. Böylece

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty}\frac{M(k)}{(k+1)(k+n+1)} &= m(1)\left(\frac{H_n}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{m(k+1)}{j+k+1} \\
&= m(1)\left(\frac{H_n}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{m(k)}{j+k} \\
&= m(1)\left(\frac{H_n}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(-\frac{m(1)}{j+1} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{m(k)}{j+k}\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{m(k)}{j+k}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 4.1 [25, Corollary 1]

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{H_k^{(p)}}{(k+1)(k+n+1)} = \begin{cases} \frac{H_n^2+H_n^{(2)}}{2n}, & p=1 \\ \frac{(-1)^{p-1}}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{H_i}{i^p} + \sum_{i=2}^{p}(-1)^{i-1}\zeta(i)H_n^{(p-i+1)}\right), & p\geq 2 \end{cases}$$

İspat Teorem 4.2' da $m(k) = \frac{1}{k^p}$ ve $M(k) = H_k^{(p)}$ alırsak ispat hemen görülür.

Sonuç 4.2 [25, Corollary 2] n pozitif bir tamsayı olsun. Aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{H_k^2}{(k+1)(k+n+1)} = \frac{H_n^3 + 3\zeta(2)H_n + 3H_nH_n^{(2)} + 2H_n^{(3)}}{3n} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{H_i}{i^2}.$$

İspat Teorem 4.2' da ikinci eşitliği kullanıp $M(k) = H_k^2$ ve $m(k) = H_k^2 - H_{k-1}^2$

alırsak

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{H_k^2}{(k+1)(k+n+1)} &= \left(H_1^2 - H_0^2\right)\left(\frac{H_n}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{H_{k+1}^2 - H_k^2}{j+k+1} \\
&= \frac{H_n}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2H_k + 1/(k+1)}{(k+1)(j+k+1)} \\
&= \frac{H_n}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{H_k}{(k+1)(j+k+1)} \\
&+ \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2(j+k+1)}.
\end{aligned}
$$

Ve Sonuc 4.1 den yararlanılarak $p=1$ durumunda

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{H_k^2}{(k+1)(k+n+1)} &= \frac{H_n}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{H_j^2 + H_j^{(2)}}{j} \\
&+ \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(k+1)^2} - \frac{1}{(k+1)(j+k+1)}\right) \\
&= \frac{H_n}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{H_n^3 + 3H_nH_n^{(2)} + 2H_n^{(3)}}{3n} \\
&+ \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(k+1)^2} - \frac{1}{(k+1)(j+k+1)}\right) \\
&= \frac{H_n}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{H_n^3 + 3H_nH_n^{(2)} + 2H_n^{(3)}}{3n} \\
&+ \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\left(\zeta(2) - 1 + \frac{1}{(j+1)} - \frac{H_j}{j}\right) \\
&= \frac{H_n}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{H_n^3 + 3H_nH_n^{(2)} + 2H_n^{(3)}}{3n} \\
&+ (\zeta(2) - 1)\frac{H_n}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{H_j}{j^2} \\
&= \frac{H_n^3 + 3\zeta(2)H_n + 3H_nH_n^{(2)} + 2H_n^{(3)}}{3n} - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{H_j}{j^2}
\end{aligned}
$$

elde ederiz.

Lemma 4.3 [4]

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

$z = 0$ noktasının bir komşuluğunda analitik bir fonksiyon olsun. O zaman $|z|$ aşağıda verilen seri yakınsak olacak şekilde yeterince küçük olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n H_n z^n + \log(1+z)f(z) = \frac{1}{1+z}\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{z}{z+1})^n H_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$$

Lemma 4.4 [4] $|t| < 1$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n t^n}{2n-1} = \log(1-t) + \big(-1 + \log\sqrt{2} + \frac{1}{4}\log(1-t)\big)\sqrt{t}\log\frac{1-\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}$$
$$+\frac{\sqrt{t}}{2}\left[Li_2\left(\frac{1+\sqrt{t}}{2}\right) - Li_2\left(\frac{1-\sqrt{t}}{2}\right)\right] \tag{4.0.8}$$

ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n(-1)^n t^n}{2n-1} = \log(1+t) + \Big(-2 + \ln 2 + \frac{1}{2}\log(1+t)\Big)\sqrt{t}\arctan\sqrt{t}$$

$$+\frac{\sqrt{-t}}{2}\left[Li_2\left(\frac{1+\sqrt{-t}}{2}\right) - Li_2\left(\frac{1-\sqrt{-t}}{2}\right)\right] \tag{4.0.9}$$

dır.

İspat $-1 \leq t < 1$ olmak üzere

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n \frac{t^n}{1-2n}$$

diyelim. O zaman Lemma (2.5) kullanırsak

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{y(t^2)}{t}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} H_n t^{2n-2}$$

$$= \frac{\log(1-t^2)}{t^2(1-t^2)} = \left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{1-t}\right)\log(1-t^2) \tag{4.0.10}$$

elde edilir. (4.0.10) ten

$$\begin{aligned} \frac{y(t^2)}{t} &= \int_0^t \frac{\log(1-x^2)}{x^2}dx + \int_0^t \frac{\log(1-x^2)}{1-x^2}dx \\ &= A + B \end{aligned} \tag{4.0.11}$$

elde edilir. Kısmi kesirlerine ayırarak

$$\begin{aligned} A &= \int_0^t \frac{\log(1-x^2)}{x^2}dx = \int_0^t \frac{\log(1-x^2)}{x^2}dx \\ &= -\frac{\log(1-t^2)}{t} + \int_0^t \frac{2}{1-x^2}dx = -\frac{\log(1-t^2)}{t} + \log\frac{1-t}{1+t} \end{aligned}$$

ve kısmı kesirlerine ayırarak

$$\begin{aligned} B &= \int_0^t \frac{\log(1-x^2)}{(1-x)(1+x)}dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^t \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)\big(\log(1-x) + \log(1+x)\big)dx \\ &= \frac{1}{2}\Bigg(\int_0^t \frac{\log(1-x)}{1-x}dx + \int_0^t \frac{\log(1+x)}{1+x}dx \\ &+ \int_0^t \frac{\log(1+x)}{1-x}dx + \int_0^t \frac{\log(1-x)}{1+x}dx\Bigg) \\ &= \frac{1}{4}\log^2(1+t) - \frac{1}{4}\log^2(1-t) + \frac{1}{2}\int_{-t}^t \frac{\log(1+x)}{1-x}dx \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi sondaki integrali hesaplayalım. $1-x=u$ değişken değiştirme işlemini yaparsak

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int\limits_{-t}^{t}\frac{\log(1+x)}{(1-x)}dx &= \frac{1}{2}\int\limits_{1-t}^{1+t}\frac{\log(2-u)}{u}du\\ &= \frac{1}{2}\int\limits_{1-t}^{1+t}\Bigg(\log 2+\log\big(1-\frac{u}{2}\big)\Bigg)\frac{du}{u}\\ &= \frac{1}{2}\log 2\log\frac{1+t}{1-t}-\frac{1}{2}\sum_{1}^{n2^n}\int\limits_{1-t}^{1+t}u^{n-1}du\\ &= \log\sqrt{2}\log\frac{1+t}{1-t}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+t)^n-(1-t)^n}{n^2 2^n}\end{aligned}$$

elde edilir. Yine

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+t)^n-(1-t)^n}{n^2 2^n} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\frac{1+t}{2})^n}{n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\frac{1-t}{2})^n}{n^2}\\ &= Li_2\Bigg(\frac{1+t}{2}\Bigg)-Li_2\Bigg(\frac{1-t}{2}\Bigg)\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}B =& \frac{1}{4}\log^2(1+t)-\frac{1}{4}\log^2(1-t)+\log\sqrt{2}\log\frac{1+t}{1-t}\\ &-\frac{1}{2}\Bigg[Li_2\Bigg(\frac{1+t}{2}\Bigg)-Li_2\Bigg(\frac{1-t}{2}\Bigg)\Bigg]\end{aligned}$$

olur.

$$\frac{1}{4}\log^2(1+t)-\frac{1}{4}\log^2(1-t)=-\frac{1}{4}\log(1-t^2)\log\frac{1-t}{1+t}$$

olduğu dikkate alınırsa (4.0.8) in ispatı tamamlanmıs olur. (4.0.9) nın ispatı benzer şekide yapılır.

Teorem 4.3 [4] $|z|<1$ olsun. O zaman $t=\frac{z}{1+z}$ olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}^{-1}H_n(-1)^n 4^n z^n$$

$$=(1-t)\Bigg[\sqrt{t}\log\frac{1-\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}\big(1+\frac{1}{4}\log\frac{1-t}{4}\big)\Bigg]$$

$$-\frac{\sqrt{t}}{2}\left(Li_2(\frac{1+\sqrt{t}}{2}-Li_2(\frac{1-\sqrt{t}}{2})\right)$$

$$=-2z+4z^2-\frac{88}{15}z^3+\frac{160}{21}z^4-\frac{8768}{945}z^5+... \qquad (4.0.12)$$

dur. Bu defa $t=\frac{z}{1-z}$ olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}^{-1}H_n4^nz^n=(1+t)\Big[\big(2+\frac{1}{2}\log\frac{1+t}{4}\big)\sqrt{t}\arctan\sqrt{t}\Big]$$

$$-\frac{\sqrt{-t}}{2}\left(Li_2(\frac{1+\sqrt{t}}{2})-Li_2(\frac{1-\sqrt{t}}{2})\right)$$

$$=2z+4z^2+\frac{88}{15}z^3+\frac{160}{21}z^4+\frac{8768}{945}z^5+... \qquad (4.0.13)$$

dır.

İspati (4.0.5) ün ispatı

$$a_n=\binom{2n}{n}^{-1}(-1)^n4^n$$

diyelim. Bu sayıların üretici fonksiyonu [22, Teorem 3.1] den biliyoruz ve

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}3-1(-1)^n4^nz^n=\frac{1}{1+z}\left[1+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{z}{1+z}}\log\frac{1-\sqrt{\frac{z}{1+z}}}{1+\sqrt{\frac{z}{1+z}}}\right] \qquad (4.0.14)$$

dır. Yine [22, Teorem 3.5] den

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{2n}{n}^{-1}(-1)^k4^k=\frac{1}{1-2n} \qquad (4.0.15)$$

olduğunu biliyoruz. Böylece Lemma 2 'yı kullanırsak

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}^{-1}H_n(-1)^n4^nz^n+\log(1+z)f(z)=\frac{1}{1+z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{z+1}\right)^n\frac{H_n}{1-2n} \qquad (4.0.16)$$

(4.0.9) numaralı denklem $t=\frac{z}{1+z}$ alıp (4.0.7) bağıntısı dikkate alınırsa

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n}^{-1} H_n (-1)^n 4^n z^n \\
&= (1-t)\left[\log(1-t)\left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{t}\log\frac{1-\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}\right) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n}{1-2n} t^n \right]
\end{aligned}
$$

olduğunu görürüz. Lemma 4.4' ün 1.kısmını kullanıp gerekli sadeleştirmeler yapılırsa ispat tamamlanmış olur. (4.0.13) in ispatı, (4.0.12) denkleminde z yerine $-z$ alıp Lemma 4.4 ' ün 2. kısmı kullanırsa basit bir kaç hesaplamadan sonra ispat direk çıkar.

Kaynakça

[1] R. Apery, Irrationalite de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$ Journees Aritmetiques de Luming Asterisque 61, (1979) 11-13.

[2] N. Batir, On some combinatorial identities and harmonic sums, Int. J. Number Theory, 13(7), 2017, 1695-1709.

[3] R. Bhatia, Notes on Functional Analysis, Hindistan Book Ageney, 2009.

[4] K.N. Boyadzhıev, Series transformations formulas of Euler type Hadamard product of series and harmonic number identities, Indian J. Pure and Appl. Math. 42 (2011).

[5] P. S. Bruckman, Problem H-320, Fibonacci Quart, 20(1982), 186-187.

[6] D. Browein, J. M. Borwein, R. Girgensohn, Explicite Evalvation of Euler Sums, Proc. Edinburg Math Soc, 38 (1995), 277-294.

[7] R. C. Buck, Advanced Calculus, McGraw-Hill Kogakusha ltd, 1978.

[8] K. W. Chen, Generalited harmonic number and Euler Sums, Int. J. Number Theory, 13(2) 2017, 513-528.

[9] P. J. De Doelder, On some series containing $\psi(x) - \psi(y)$ and $(\psi(x) - \psi(y))^2$ for certain values of x and y J. Comput. Appl. Math., 37(1991), 125-141.

[10] L. Euler, opera. Ser1, vol.15, B. G. Teubner, Berlin 1927.

[11] L. Euler, Briefwechsel, V.1, Birkhöuser, Basel, 1975.

[12] L. Euler, C. Goldbach, Briefwechsel, 1729-1764, Akademie-Verlag, Berlin, 1965.

[13] C. Georghiou, A. N. Philippou, Harmonik sums and the zeta-function, Fibonacci Quart, 21(1983), 29-36.

[14] M. S. Klamkin, Problem 4564, sols. by J. V Whittaker and the proposer, Amer Math Monthly, 62(1955), 129-130.

[15] J. E. Marsden, Basic Complex Analysis, W. H. Freeman and Company, San frencisco, 1973.

[16] N. Nielsen, Den Eulersche Dilogarithmus und seine Verallgemeinerungen, Nova Acta, Abh. der Kaiserl. Leopoldinisch-Carolinischen Deutschen Akad. der Naturforscher, 90(1909), 121-212.

[17] N. Neilsen, Handbuch der Theorie der Gamma-funktion, Chelsea , New Yorh 1965.

[18] N. Nielsen, Recherches surr des generalisatiıns d'une fonction de Legendre et d'Able, Annali Math, 9(1904), 219-235.

[19] Li-C. Shen, Remarks on some Integrals and $\zeta(n)$, Trans. Amer. Math. Soc, 4(347), 1995, 1391-1399.

[20] R. Sitaramachandrarqo, A. Siva Rama Sarma, Some identities involving the Riemann zeta-function, Indian J.Pure Appl.Math, 10(1979) , 602-607.

[21] A. Sofo, Identities for alternating inverse squared binomial and harmonic sums, Mediterr. J. Math. 13(4) 1407-1418.

[22] R. Sprugnolı, Sum of reciprocals of the central binomial coefficients, Integers 6 (2006).

[23] K. R. Stromberg, An Introduction to Classical Real Analysis, Wadsworth, 1981.

[24] C. I. Valean, A new proof for a classıcal quadratıc harmonıc serıes, Journal of Classical Analysis V.8, Number 2(2016), 155-161.

[25] C . I . Valean, A master theorem of serıes and an evaluatıon of a cubıc harmonıc serıes, Journal of Classical Analysis Volume 10, Number 2(2017), 97-107.

[26] W. Wang, Y. Lyu, Euler sums and Stirling sums, J. Number Theory, (2018).

[27] E. T. Whittaker and G. N. Watson, A Course of Modern Analysis, 4.ed, Combridge Univ Press, 1958

[28] C. Xu, Z. Li, Tornheim type series and nonlinear Euler sums, J . Number Theory, 174(2027), 40-67.