T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİR ÇİZGENİN EKSANTRİK ÇİZGESİ VE YAPISAL ÖZELLİKLERİ

Tezi Hazırlayan
Esma ELYEMANİ

Tez Danışmanı
Prof. Dr. Sezer SORGUN

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Eylül 2023

NEVŞEHİR

Bir Çizgenin Eksantrik Çizgesi ve Yapısal Özellikleri " başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

…/…/20..

JÜRİ

Başkan : Prof. Dr. Halis BİLGİL

Üye : Prof. Dr. Sezer SORGUN

Üye : Doç. Dr. Hatice TOPCU

ONAY:

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun………………….tarih ve……………..
sayılı kararı ile onaylanmıştır.

…/…/20..

Doç. Dr. Cemal ÇARBOĞA
Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİM SAYFASI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada yer alan bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu ve bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Esma ELYEMANİ

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim ve tez çalışmam süresince yolculuğum boyunca sağladığınız destek ve değerli rehberliği için, unutulmaz bir deneyim ve yol göstericiliği için Prof. Dr. Sezer SORGUN a içtenlikle teşekkür etmek istiyorum.

Her zaman tam anlamıyla bir arkadaşım olduğunu hissettiğim, eğitim hayatım boyunca akademik ve manevi olarak bana destek olan hocam Doç. Dr. Hatice TOPCU' ya;

Bütün hayatım sürecimdeki başarımın arkasındaki en büyük destekçilerden biri olan anneme içtenlikle teşekkür etmek istiyorum. Kararlı moral desteği ve sürekli teşvikleri sayesinde zorlukların üstesinden gelip mükemmeliyeti hedeflememde bana güç verdiniz. Sizin sayenizde bugün burada başarılı bir şekilde bitirdiğim yüksek lisansımı kutluyorum.

Ayrıca, eşime (Mohammed HAMO) ve çocuklarıma (Farah, Abdulrrahman, Ömer) içten teşekkürlerimi sunmak istiyorum. Sizlerin koşulsuz sevgisi, anlayışınız ve sürekli destekleriniz, bu yoğun ve meşakkatli süreçte beni motive eden en önemli etkenlerden biriydi. Sizlerin fedakârlıkları ve anlayışınız sayesinde akademik hedeflerimi gerçekleştirme yolunda güvenle ve kararlılıkla ilerleyebildim.

Son olarak, bu eseri hayatı boyunca ilim aşığı olan ve şimdi beni burada görmeyi hayal eden rahmetli babam Abdüllatif el-Yemani'nin ruhuna ithaf ediyorum.

BİR ÇİZGENİN EKSANTRİK ÇİZGESİ VE YAPISAL ÖZELLİKLERİ
(Yüksek Lisans Tezi)

Esma ELYEMANİ

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Eylül 2023

ÖZET

Eksantriklik, graf teorisinde bir noktanın (düğümün) çizgenin diğer düğümlerinden ne kadar uzak olduğunu ölçen önemli bir kavramdır. Eksantriklik, çizgenin çapı ve yarıçapı gibi diğer çizge özelliklerini hesaplamak için kullanılabilir. Ayrıca, eksantriklik temelli çizge ölçümleri ve polinomlar, moleküler çizge teorisi, kimyasal ağlar, iletişim teorisi ve kaynama olgusu gibi çeşitli alanlarda yaygın bir şekilde kullanılmıştır

Bu tez çalışmasında, eksantrik çizge özellikleri, uç çizge örnekleri ve özellikle ağaç çizge örnekleri incelenmektedir. İkinci bölümde, çizge ile ilgili temel tanımlar ve kavramlar derlenmektedir. Üçüncü bölümde, eksantrik çizge konusunda literatür bilgisi sunulmaktadır; bazı uç çizge örneklerine göre eksantrik çizge analiz edilmekte, benzersiz eksantrik nokta çizge örnekleri ve çapı maksimal çizge örnekleri incelenmektedir. Ayrıca, 1985 yılında Akiyama' nın teorisindeki eksiklik düzeltilmiş olup bir çizgenin eksantrik çizgesinin, bu çizgenin tümleyenine eşit olma koşulunu vererek ve ağaç çizgeler ile ilgili bazı teorileri ve sonuçlar geliştirilmiştir.

Eksantriklik temelli çizgelerin inceliklerini açığa çıkararak ve yeni uygulamaları keşfederek, bu çalışma çizge teorisi alanına ve çeşitli disiplinler arası alanlara önemli bir katkı sunmaktadır.

Anahtar kelimeler : Çizge , Eksantrik Çizge, Ağaç

Tez Danışman : Prof. Dr. Sezer SORGUN
Sayfa Adeti : 38

ECCENTRIC GRAPH OF A GRAPH AND ITS STRUCTURAL PROPERTIES

(Master Thesis)

Esma ELYEMANI

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

September 2023

ABSTRACT

Eccentricity plays a crucial role in graph theory as it quantifies the distance of a vertex from other vertices within a graph. This concept not only helps determine the diameter and radius of a graph but also enables the computation of various other graph properties. Its significance extends beyond the realm of graph theory, with extensive applications in diverse fields such as molecular graph theory, chemical networks, communication theory, and boiling phenomena.

This thesis delves into exploring the properties of eccentric graphs, with a particular focus on those associated with extremal graphs and trees. The second chapter presents a compilation of fundamental definitions and graph-related concepts. Moving on to the third chapter, we review existing literature on eccentric graphs, examining cases for some extreme graphs and investigating unique eccentric point graphs and diameter maximal graphs. Furthermore, we address a deficiency in Akiyama's theory from 1985, where we provide necessary and sufficient conditions for the eccentric graph to be equal to the complement of the original graph. Building upon this, we develop new theories and present results concerning eccentric graphs of trees.

By shedding light on the intricacies of eccentricity-based graph measurements and exploring novel applications, this study contributes valuable insights to the field of graph theory and its various interdisciplinary connections.

Keywords: Graph , Eccentric Graph, Tree, Unique Eccentric Point Graph.

Thesis Supervisor: Prof. Dr. Sezer SORGUN
Number of Pages: 38

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER LİSTESİ

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$G = (V, E)$	Nokta kümesi V, kenar kümesi E olan bir G çizgesi
$a \sim b$	a ve b noktalarının birbirine komşu olması
$N(a)$	a noktasına komşu olan noktaların kümesi
$d(a)$	a noktasının derecesi
$ecc(a)$	a noktasının dışmerkezliği
$\bar{G}$	G çizgenin tümleyeni
$\Delta(G)$	G çizgenin maksimum derecesi
$\delta(G)$	G çizgenin minimum derecesi
$diam(G)$	G çizgenin çapı
$r(G)$	G çizgenin yarıçapı
$c(G)$	G çizgenin merkezi
$L(G)$	G çizgenin çizgi çizgesi
$A(G)$	G çizgenin komşuluk matrisi
$d_G(u, v)$	G'de u, v noktalarının arasında mesafe
$G \dot{\cup} H$	G ve H çizgelerinin ayrık birleşimi
$G + H$	G ve H birleşimi
$G \times H$	G ve H kartezyen çarpımı
P_n	n noktalı yol çizge
C_n	n noktalı döngü çizge
K_n	n noktalı tam çizge
$S_{1,n}$	n+1 noktalı yıldız çizge
$G_{m,n}$	İki parçalı çizge
$ecc(G)$	G'nın eksantrik çizgesi
$\tau(G)$	G çizgesinin karmaşıklığı

BÖLÜM 1
GİRİŞ

Çizge teorisi, nesneler arasındaki ilişkileri temsil eden matematiksel yapılar olan çizgeleri inceleyen bir matematik dalıdır. Çizgeler, bilgisayar bilimi, sosyal bilimler, ekonomi ve mühendislik dahil olmak üzere çok çeşitli uygulamalarda kullanılmaktadır.

Çizge teorisinde, çizgeler bir dizi, nokta (düğüm olarak da bilinir) ve bu noktaları birleştiren bir dizi, kenar olarak temsil edilir. Çizge teorisinin önemi, karmaşık sistemleri ve nesneler arasındaki ilişkileri modelleme ve analiz etme yeteneğinden gelir. Çizge teorisinin uygulamaları arasında bilgisayar ağları, ulaşım planlaması, sosyal ağ analizi ve DNA dizilimi gibi konular yer alır.

Çizgeler üzerindeki işlemler, çizgeleri işlemek ve analiz etmek için kullanılan farklı teknikleri ve yöntemleri ifade eder. En kısa yolu bulma, bağlantıyı kontrol etme ve döngüleri belirleme gibi çizgelere uygulanabilecek çeşitli işlemler vardır. Çizgeler üzerindeki işlemlerin önemi, çeşitli uygulamalar için kullanılabilecek çizgenin topolojisi ve yapısı ile ilgili yararlı bilgiler sağlama yeteneklerinden kaynaklanmaktadır.

Çizgelerdeki en önemli uygulamalardan biri en kısa yolu bulmaktır. Bu işlem, bir çizgedeki iki nokta arasındaki minimum mesafenin belirlenmesini içerir. En kısa yol algoritmaları, iki konum arasındaki en kısa yolu bulmanın gerekli olduğu GPS navigasyon sistemleri gibi uygulamalarda yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu algoritmalar ayrıca bilgisayar ağlarında minimum gecikme veya gecikme ile yolu bulmak için kullanılır.

Çizgelerdeki bir diğer önemli işlem, bağlantılı olup olmadığını kontrol etmektir. Bu işlem, sosyal ağ analizi gibi uygulamalar için gerekli olan bir çizgenin bağlı olup olmadığını belirler. Sosyal ağlar, bireylerin noktalar olarak; aralarındaki ilişkilerin kenarlar olarak temsil edildiği çizgeler olarak ifade edilebilir. Sosyal ağlarda bağlantı olup olmadığını kontrol etmek, toplulukları ve etkili kişileri belirlemeye yardımcı olur.

Bir döngü, aynı noktadan başlayan ve biten bir noktalar ve kenarlar dizisidir. Döngüler, yinelenen modellerin tanımlanmasının önemli olduğu optimizasyon ve çizgeleme gibi uygulamalar için gereklidir.

Örneğin, bir üretim tesisindeki işleri planlarken, operasyon çizelgesindeki döngüleri belirlemek, verimliliği ve üretkenliği artırmaya yardımcı olabilir.

Çizgelerdeki en güçlü işlemlerden biri de çizge renklendirmedir. Çizge renklendirme, bir çizgenin noktalarına, komşu iki nokta aynı renge sahip olmayacak şekilde renkler atamayı içerir. Çizge renklendirme, kablosuz iletişim sistemlerinde frekans tahsisi ve üniversitelerde ders çizelgeleme gibi çeşitli uygulamalarda kullanılmaktadır. Çizge renklendirme algoritmaları, görüntülerin çizgeler olarak temsil edildiği ve nokta renklerinin piksel değerlerini temsil ettiği görüntü işleme ve bilgisayarla görme uygulamalarında da kullanılır.

Çizgeler üzerindeki işlemlerin önemi, çizgenin topolojisi ve yapısı ile ilgili yararlı bilgiler sağlama yeteneklerinden gelir. Çizgeler üzerindeki işlemler kalıpları belirlemek, sistemleri optimize etmek ve tahminlerde bulunmak için kullanılabilir. Bu işlemler, bilgisayar ağları, sosyal ağ analizi, görüntü işleme ve zamanlama dahil olmak üzere çeşitli uygulamalar için gereklidir.

Sonuç olarak, çizge teorisi ve çizgeler üzerindeki işlemler, karmaşık sistemleri ve nesneler arasındaki ilişkileri modellemek ve analiz etmek için gereklidir. Çizgeler üzerindeki işlemler, çeşitli uygulamalar için kullanılabilecek çizgenin topolojisi ve yapısı ile ilgili yararlı bilgiler sağlar. Çizgeler üzerinde işlemler için yeni algoritmaların ve tekniklerin geliştirilmesi, birçok alanda ilerleme sağlamaya devam ederek çizge teorisini önemli bir araştırma ve çalışma alanı haline getirir.

Bu tezde, bir çizgenin noktaları arasındaki mesafe ile noktanın eksantrikliği arasında ilişkiyi açıklayacak biçimde ifade edilen yeni bir çizge işlemi olan çizgenin eksantrik çizgesi olarak adlandırılan yapılar incelenecektir.

Bir çizgedeki bir noktanın eksantrikliği, o düğümden başlayan en kısa yollar arasında en uzun olanıdır ve ağ analizinde temel bir kavramdır. Eksantrik çizgeleri inceleyerek, araştırmacılar karmaşık sistemler hakkında fikir edinebilir ve varlıklar arasındaki ilişkileri ve bağlantıları daha iyi anlayabilirler.

Eksantrik çizgelerin bazı önemli uygulamaları, sosyal ağların, ulaşım sistemlerinin ve iletişim ağlarının analizini de içerebilir. Örneğin, sosyal ağlarda, bir düğümün eksantrikliği, ağ içindeki etkisini gösterebilirken, ulaşım sistemlerinde, bir düğümün eksantrikliği, o konumun bir ulaşım merkezi olarak önemini gösterebilir.

İletişim ağlarında, bir düğümün eksantrikliği, merkezliğini ve genel ağ performansı üzerindeki potansiyel etkisini gösterebilir.

Bu nedenle, eksantrik çizgelerin özelliklerini anlayan araştırmacılar, ağ analizi için daha verimli algoritmalar geliştirebilir, daha iyi ağ mimarileri tasarlayabilir ve ağ verilerine dayalı olarak daha bilinçli kararlar alabilir.

Akiyama ve ark. (1985), eksantrik çizgeler üzerinde ilk çalışma yapan bilim insanlarıdır. Böylece, eksantrik çizge tanımı ilk olarak Akiyama ve ark. (1985) tarafından yapılmıştır. İlgili çalışmalarında döngüler ve standart çizgeler gibi belirli çizge sınıflarının eksantrik çizgelerini incelemişlerdir. Örneğin, eksantrik çizgenin tam çizge olması için gerek koşullar ile birlikte herhangi bir çizgenin eksantrik çizgesinin tümleyen çizgesine izomorf olması için gerek ve yeter koşullar verilmiştir.

Eksantrik çizgelerle ilgili literatürde nadir çalışmalar yer almaktadır. Ghosh ve Pal (2017) ekstrem çizgelerden yol çizge ve döngü çizgenin eksantrik çizgeleri üzerine çalışma yapmışlardır. Siriam ve ark. (2014) her bir noktanın bir tek eksantrik noktası olan çizgenin eksantrik çizgelerinin bazı özelliklerini incelemişlerdir.

Akiyama ve ark. (1985), verilen bir G grafının eksantik çizgesi ile G nin tümleyen çizgesine izomorf olması için gerek koşulları belirtmiştir. Ancak verilen gerek koşullardan birisi eksiktir. Bu noktada bu tezin motivasyonunu da oluşturan bu probleme daha geniş bir koşulla düzeltme yapılmış ve ispatlanmıştır. Ayrıca bu tez çalışmasında ağaçlar için karakterizasyonlar da yapılmıştır. Bazı ekstrem çizgelerden yararlanarak elde edilen çizgelerin eksantrik çizgeleri ile ilgili de sonuçlar yer almaktadır.

Yukarıda bahsedilen tartışmalar kapsamında bu tez 3 bölümden oluşacaktır. 2. Bölümde çizge teorinin temel kavram ve sonuçları literatürden yararlanılarak verilmiştir. 3.

Bölüm ise bahsi geçen teoremin düzeltilmesi ve ayrıca ağaçlar için karakterizasyonlar içerir.

BÖLÜM 2
ÖNBİLGİLER

Bu bölümde verilen çizge kuramı ile ilgili temel tanım ve bilgiler literatürde çok iyi bilinen kavramlar olup tüm tanımlar (Chartrand ve Zhang, 2012; Distel, 2005; Dharwadker ve Pirzada, 2011) kaynaklarından alınmıştır.

2.1. Çizge Teoride Bazı Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1. Bir nokta veya düğüm (vertex), bir çizgenin temel birimidir. Bir diyagramda bir nokta veya daire ile temsil edilir.

Tanım 2.1.2. Kenar (edge), iki noktayı birleştiren bir çizgidir. Bağladığı noktalar arasındaki bir ilişkiyi (bağlantı veya bağımlılık gibi) temsil eder.

Tanım 2.1.3. Çizge (graph), noktalar ve kenarlardan oluşan bir koleksiyondur. $G = (V, E)$ ile gösterilir, burada $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ noktalar kümesi ve $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ kenarlar kümesidir.

Tanım 2.1.4. Bir noktanın ($v \in V$) derecesi, ona gelen kenarların sayısıdır. Başka bir deyişle, o noktaya bağlanan kenarların sayısıdır ve $d(v)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.5. İki nokta bir kenarla bağlıysa, iki noktanın komşu olduğu söylenir. Yani**,** $G = (V, E)$ çizgenin keyfi iki noktası $v_1, v_2 \in V$ olmak üzere bu iki nokta arasında bir kenar var ise bu noktalara birbirine komşudur denir ve $v_1 \sim v_2$ ile gösterilir. Ayrıca $G = (V, E)$ çizgesinde herhangi bir $v_1 \in V$ noktasının komşuluk kümesi
$N(v_1) = \{v \in V : v_1 \sim v\}$
biçiminde tanımlanır.

Tanım 2.1.6. Bir çizgenin mertebesi, çizgedeki nokta sayısını ifade eder ve $|V| = n$ sembolü ile gösterilir. Çizgedeki toplam kenar sayısını ifade eden ve $|E| = m$ sembolü ile gösterilen çizgenin boyutudur.

Tanım 2.1.7. $G = (V, E)$ çizgesinde $v_1 \in V$ noktası için $d(v_1) = 0$ ise v_1'e izole nokta denir. $d(v_1) = 1$ ise v_1 noktasına sarkıt nokta (pendant vertex), bu noktaya bağlanan kenara ise sarkıt kenar (pendant edge) denir.

Tanım 2.1.8. Bir çizgenin maksimum derecesi ve minimum derecesi, noktaları arasındaki sırasıyla en yüksek ve en düşük derece değerlerini ifade eder. Bu değerler sırasıyla $\Delta\,(G)$ ve $\delta(G)$ ile gösterilir. Tüm noktalarının derecelerinin oluşturduğu artmayan diziye, çizgenin derece dizisi denir.

Tanım 2.1.9. İki nokta arasında birden fazla kenar var ise bu kenarlara katlı kenar (multiple edge) denir. Aynı nokta üzerinde başlayıp biten bir kenara ise ilmek (loop) denir**.** Katlı kenar ve ilmek içermeyen yönsüz bir çizgeye basit (simple) çizge denir.

Örnek 2.1.10. Aşağıdaki verilen G basit çizgesi 6 noktalı $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ve 7 kenarlı $E = \{\{1,5\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,6\}, \{6,2\}, \{2,4\}, \{3,4\}\}$ bir çizgedir.

$|E| = m = 7$,

$|V| = n = 6$,

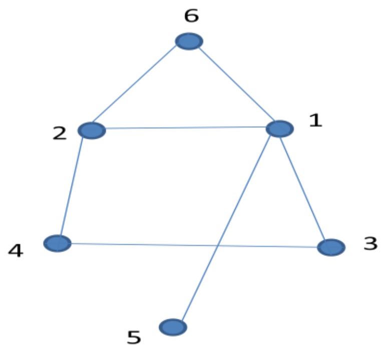
$\Delta\,(G) = 4$,

$\delta\,(G) = 1$,

$d(5) = 1$ olduğundan 5 sarkıt noktadır**,**

$N(1) = \{2,3,5,6\}$

(1, 2, 2, 2, 3, 4) G' nin derece dizisidir.



Şekil 2.1. Basit çizge örneği

Tanım 2.1.11. Bir $G = (V, E)$ çizgesinde, keyfi $v_i, v_j \in V$ noktaları arasındaki en kısa yolun uzunluğu bu iki nokta arasındaki uzaklık (distance) olarak tanımlanır. $d(v_i, v_j)$ veya $d_G(v_i, v_j)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.12. Bir $G = (V, E)$ çizgenin çapı (diameter),

$diam(G) = maks_{v_i, v_j \in V}\{d_G(v_i, v_j)\}$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 2.1.13. $ecc(v)$ ile gösterilen bir G çizgesindeki bir v noktasının eksantrikliği (the eccentric of vertex v), v noktasından en uzak noktasına olan mesafedir. Yani,

$ecc(v) = maks_{u \in V}\{d_G(u, v)\}$

dir.

Tanım 2.1.14. Bir $G = (V, E)$ çizgenin yarıçapı (radius)

$r(G) = min_{u \in V}\{|ecc(u)|\}$

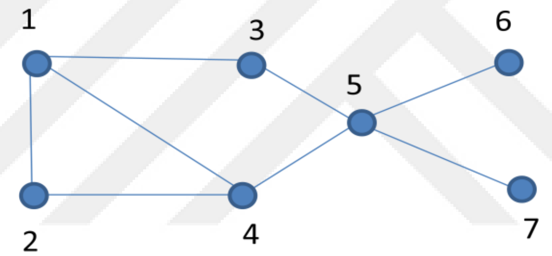
biçiminde tanımlanır.

Tanım 2.1.15. Bir çizgenin merkez noktası, minimum eksantrikliğe sahip bir noktasıdır.

Tanım 2.1.16. Bir G çizgesinde $ecc(u) = r(G)$ olan u noktasına merkez nokta denir ve bütün merkez noktalarının kümesi $c(G)$ ile gösterilir. Yani, $c(G) = \{u \in V: ecc(u) =$

$r(G)\}$ biçiminde tanımlanır. $ecc(u) = diam(G)$ ise u noktası G'nin çevre noktası (peripheral vertex) olarak bilinir. G'nin tüm çevresel noktalarının kümesi $P(G)$ ile gösterilir.

Örnek 2.1.17. Aşağıdaki verilen 7 noktalı bir çizgede:
$dist(1,7) = d_G(1,7) = 3$, $dist(1,5) = 2$, $dist(2,3) = 2$
$diam(G) = 3$,
$ecc(1) = ecc(2) = ecc(6) = ecc(7) = 3$,
$ecc(4) = ecc(3) = ecc(5) = 2$,
$r(G) = 2$,
$c(G) = \{3,4,5\}$,
dir.

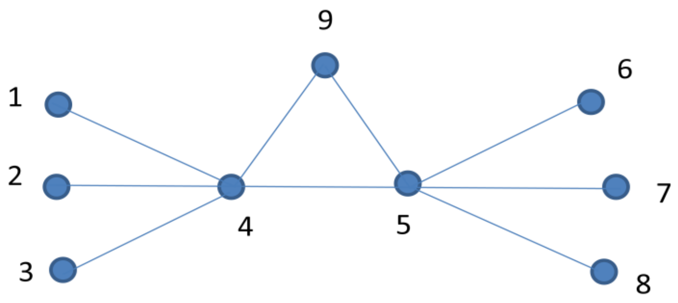


Şekil 2.2. Çapı 3 yarıçapı 2 olan çizge örneği

Tanım 2.1.18. Yürüyüş (walk), bir çizgede birbirine bağlanan noktalar ve kenarlar dizisidir, gezi (trail) ise hiçbir kenarın tekrarlanmadığı bir yürüyüştür. Yol (path), hiçbir noktasının tekrarlanmadığı bir yoldur, bu da her noktasının yalnızca bir kez ziyaret edildiği anlamına gelir. Bir döngü (cycle), aynı noktasında başlayan ve biten bir gezi iken, devre (circuit), tekrarlanan en az bir kenarı içeren bir döngüdür.

Örnek 2.1.19. Aşağıdaki şekilde verilen G çizgesinde 5-uzunluklu bir yürüyüş; 1, {1, 4}, 4, {4, 5}, 5, {5, 7}, 7, {7, 5}, 5, {5, 9}, 9 olur. G basit graf olduğundan kısaca $1-4-5-7-5-9$ biçiminde de yazılabilir. Bu yürüyüş, kenar tekrarlandığı için bir gezi değildir, 5 noktasından iki kez geçildigi için bir yol değildir. Başlangıç ve bitiş noktaları farklı oldugundan kapalı yürüyüş değildir. Dolayısıyla devir ya da döngü degildir. $4-9$

$-5-4$ yürüyüşü ise 3-uzunluklu bir döngüdür, 2 – 4 – 5 – 7 yürüyüşü ise 3-uzunluklu bir yoldur.



Şekil 2.3. Yol, yürüyüş, döngü örneği

Tanım 2.1.20. Klik (clique), yönsüz bir çizgenin noktalarının bir alt kümesidir, öyle ki klikteki her iki farklı nokta komşudur. Yani, bir çizgenin bir kliği, indirgenmiş tam çizgedir.

Tanım 2.1.21. Co-klik (co-clique) bir çizgenin noktalarının bir alt kümesi S dir, öyle ki S' deki hiçbir iki nokta komşu değildir. Çizgedeki bir co-klik, tümleyen çizgesindeki bir kliktir.

Tanım 2.1.22. Herhangi bir kenarın çıkarılması çizgenin bağlantısını kesiyorsa, bir çizgenin minimum bağlantılı (minimally connected) olduğu söylenir. Açıkçası, minimum düzeyde bağlantılı bir çizgenin döngüsü yoktur.

Tanım 2.1.23. *G, n* noktalı m kenarlı ve k bileşenli bir çizge olmak üzere *G*' nin rankı ve sıfırlığı sırasıyla $r = n - k$ ve $\mu = m - n + k$ ile gösterilir. Açıktır ki bağlantılı bir çizgenin rankı n-1 ve sıfırlık sayısı da $m - n + 1$ dir. Ayrıca bir grafın sıfırlık sayısı siklomatik sayısı veya 1. Betti sayısı olarak da bilinir.

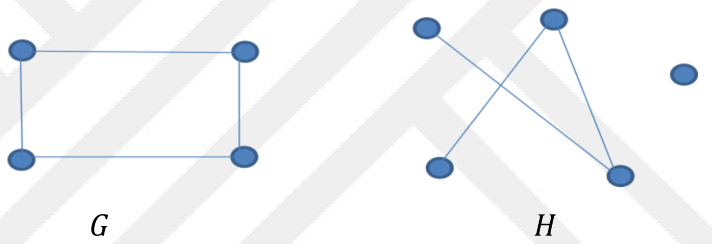
Tanım 2.1.24: G bağlantılı bir çizge olsun. Bir $v \in G$ noktası için $G - v$ (G' den v noktasını silme) bağlantısız bir çizge oluyorsa $v \in G$ noktasına G'nin kesik noktası (cut vertex) denir. Bir çizgeden kesilmiş bir noktayı kaldırmak, onu iki veya daha fazla çizgeye böler.

2.2. Bazı Özel Çizgeler

Tanım 2.2.1. $G = (V, E)$ çizgesi için $V = \emptyset$ ise G' ye boş çizge; $|V| = 1$ ise G' ye aşikâr çizge ve $E = \emptyset$ ise G' ye null çizge denir.

Tanım 2.2.2. Herhangi iki noktası arasında en az bir yol bulunabilen bir çizgeye bağlantılı çizge (connected graph) denir, yoksa bağlantısızdır (disconnected graph).

Örnek 2.2.3. Aşağıdaki verilen çizgeler, G çizge bağlantılı ama H çizge bağlantısızdır.

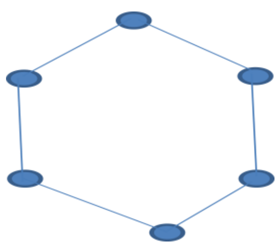


Şekil 2.4. Bağlantılı ve bağlantısız çizge örnekleri

Tanım 2.2.4. Döngüsüz (acyclic) çizge, herhangi bir döngüsü olmayan bir çizgedir.

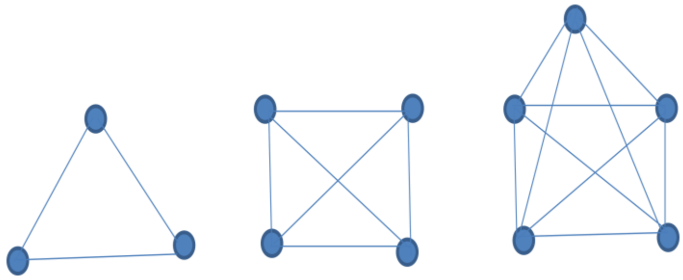
Tanım 2.2.5. $G = (V,\ E)$ çizgesinde, $\forall\, v \in V$ için $d(v) = d$ ise G' ye d −düzgün (d −regular) çizge denir.

Örnek 2.2.6. Şekil 2.5. de verilen G çizgesi 6 noktalı ve her noktanın derecesi 2 olan bir çizgedir. Bu durumda G 2-düzgün bir çizgedir.



Şekil 2.5. 2- düzgün çizge örneği

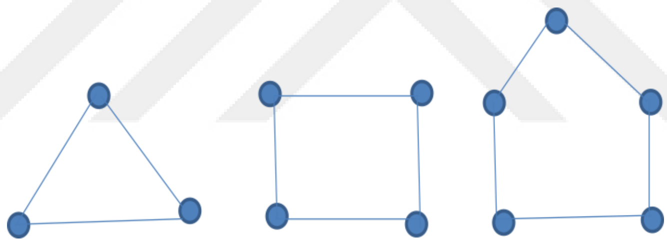
Tanım 2.2.7. Bir G çizgesinde, herhangi iki nokta arasında mutlaka bir kenar var ise bu çizgeye tam çizge (complete graph) denir. n noktalı bir tam çizge K_n ile gösterilir. Tam çizgesinde her bir noktanın derecesi ise $(n-1)$ dir.



K_3 K_4 K_5

Şekil 2.6. Tam çizge örnekleri

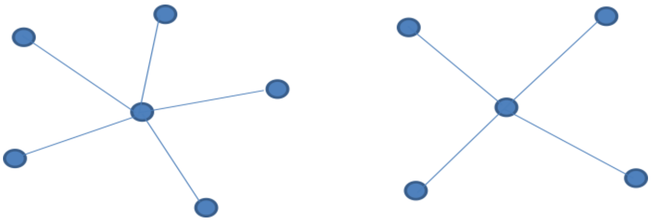
Tanım 2.2.8. Bir G çizgesinde, tek bir döngüden veya kapalı bir nokta zincirinden oluşan n noktalı bir döngü çizgesi (cycle) ifade eder ve C_n ile gösterilir. Döngü çizgesindeki noktaların sayısı, kenarların sayısına eşittir ve her noktanın derecesi 2'dir.



C_3 C_4 C_5

Şekil 2.7. Döngü çizge örnekleri

Tanım 2.2.9. $(n + 1)$ noktalı bir G çizgesinde bir noktanın derecesi n, diğer noktaların derecesi 1 ise, bu çizgeye yıldız çizge (star graph) denir. Yıldız çizgeler $S_{1,n}$ ile gösterilir.

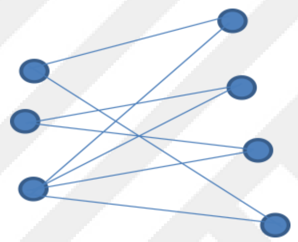


$S_{1,5}$ $S_{1,4}$

Şekil 2.8. Yıldız çizge örnekleri

Tanım 2.2.10. Bir G çizgesinin noktalar kümesi A ve B gibi iki kümeye ayrılıyor ve A kümesine ait noktalar birbiriyle bir kenar ile bağlanmıyorsa ve aynı şekilde B' ye ait noktalar da bir kenar ile birbirine bağlı değilse bu çizgeye iki parçalı çizge (bipartite graph) denir. A' ya ait noktaların sayısı m ve B' ye ait noktaların sayısı n ise; iki parçalı çizge $G_{m,n}$ ile gösterilir.

Örnek 2.2.11. Aşağıdaki verilen G çizgesinde $A = \{1,2,3\}$, $B = \{4,5,6,7\}$ iki nokta grupu vardir ve şekilde gibi birbiriyle kenarlar vardır ise G iki parçalı çizgedir ve $G_{3,4}$ ile gösterebilir:

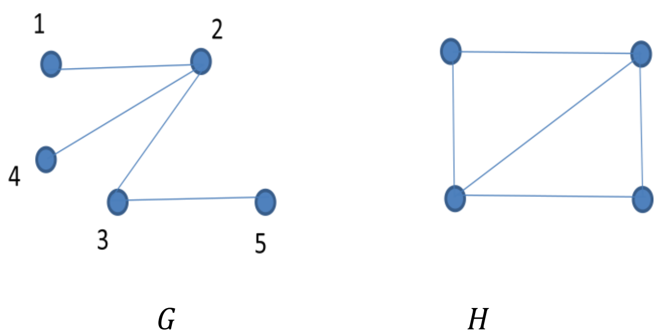


$G_{3,4}$

Şekil 2.9. Çift parçalı çizge örneği

Tanım 2.2.12. Ağaç döngüsüz bağlantılı bir çizgedir.

Örnek 2.2.13. Aşağıdaki verilen G ve H çizgeleri açıktır ama H çizgesi ağaç değildir**.**



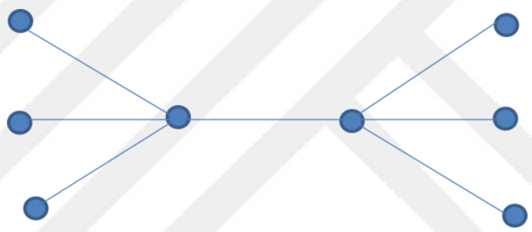
Şekil 2.10. Ağaç çizge ve ağaç olmayan çizge örneği

Tanım 2.2.14. Yönsüz bir ağaçta, derecesi bir olan noktaya yaprak veya uç nokta (leaf) denir.

Şekil 2.10'da G bir ağaçtir ve 1, 5, 4 noktaları yapraklardır ama 2 ve 3 noktası yapraklar değildir.

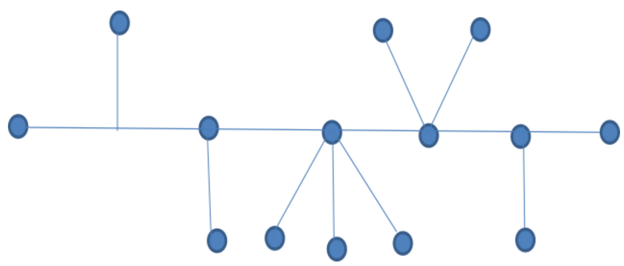
Teorem 2.2.15. (Chartrand ve ark., 2012**)** En az bir kenarlı olan her ağacın en az iki yaprağı vardır.

Tanım 2.2.16. Uç noktalar olmayan tam olarak iki nokta içeren bir ağaca (zorunlu olarak komşu olan) çift yıldız denir.



Şekil 2.11. Çift yıldız örneği

Tanım 2.2.17. Tırtıl (caterpillar), uç noktalarının çıkarılması tırtılın omurgası adı verilen bir yol oluşturan 3. veya daha fazla mertebeden bir ağaçtır.



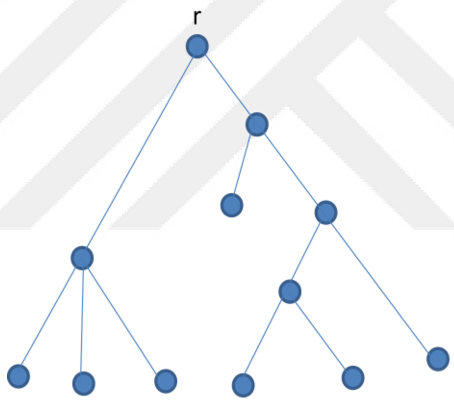
Şekil 2.12. Tırtıl örneği

Sonuç olarak her yol ve yıldız (mertebesi en az 3) ve her çift yıldız bir tırtıldır (caterpillar).

Tanım 2.2.18. T , G 'nin bir alt çizgesi ve T, G' nin tüm noktalarını içeriyorsa, ağacın bağlantılı bir G çizgesinin *kapsadığı ağacı* (spanning tree) olduğu söylenir**.**

Tanım 2.2.19. Bir G çizgesinin karmaşıklığı (complexty) $\tau(G)$, G' nin farklı kapsandığı ağaçlarının sayısıdır.

Tanım 2.2.20. Köklü bir ağaç (rooted tree), bir noktasının kök olarak belirlendiği bir ağaçtır. Köklü bir ağacın kenarlarına, kökten uzağa veya köke doğru doğal bir yönlendirme atanabilir. Bu durumda yapı yönlendirilmiş köklü bir ağaç olur.



Şekil 2.13. Köklü ağaç örneği

Tanım 2.2.21. Köklü bir ağaçta, v noktası derinliği (depth) veya seviyesi (level), kökten uzaklığıdır., yani kökten v 'ye giden tek yolun uzunluğu. Böylece, kökün derinliği 0'dır.

Tanım 2.2.22. Köklü bir ağacın yüksekliği (height), kökten (veya ağaçtaki en büyük derinlikten) en uzun yolun uzunluğudur.

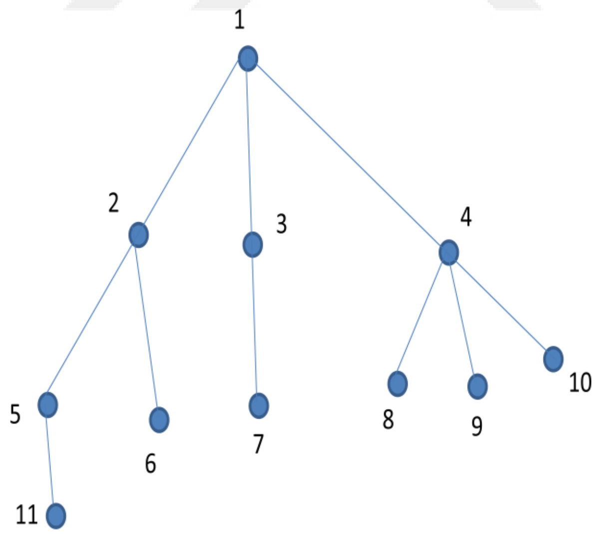
Tanım 2.2.23. Eğer v noktası, kökten w' ye giden yolda w noktasından hemen önce geliyorsa, v, w' nin ebeveynidir (parent) ve w, v' nin çocuğudur (child). Ebeveyni aynı olan noktalara kardeş (sibling) denir.

Tanım 2.2.24. v, kökten w' ye giden tek yol üzerindeyse, w noktasına v noktasının alt öğesi denir (descendant) (ve v, w' noktasının atası (ancestor) olarak adlandırılır). Ek olarak, $w \neq v$ ise, o zaman w, v' nin uygun bir soyundan (proper) gelir (ve v, w' nin uygun bir atasıdır).

Tanım 2.2.25. Köklü bir ağaçtaki yaprak , çocuğu olmayan herhangi bir köşedir. Köklü bir ağaçtaki iç noktası (internal vertex), en az bir çocuk içeren noktadır. Ağaç trivial olmadığı sürece (yani tek bir noktası) kök içseldir.

Örnek 2.2.26. Aşağıdaki verilen bir köklü ağaçtir. Bu ağacın yüksekliği 3'tür. Ayrıca,

• 1, 2, 3, 4 ve 5 iç noktalardır;
• 6, 7, 8, 9, 10 ve 11 noktaları yapraklardır;
• 8, 9 ve 10 noktaları kardeştir;
• 2 noktası 11'nin atasıdır; ve
• 11, 2' nın soyundandır.



Şekil 2.14. Köklü ağacının bileşenlerine örnek

Teorem 2.2.27. (Chartrand ve Zhang, 2012) Aşikâr olmayan her ağacın en az iki uç noktası vardır.

Teorem 2.2.28 (Dharwadker ve ark, 2011) T, n noktalı bir çizge olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir:

(i) T bir ağaçtır.

(ii) T döngü içermez ve $n - 1$ kenarı vardır.

(iii) T bağlantılıdır ve $n - 1$ kenarı vardır.

(iv) T bağlantılıdır ve her kenar bir kesme kenarıdır (cut edge).

(v) T 'nin herhangi iki noktası arasında tam olarak tek bir yol vardır.

(vi) T döngü içermez ve herhangi bir yeni kenar e için, $T + e$ çizgesinin tam olarak bir döngüsü vardır.

(vii) T minimum düzeyde bağlantılıdır (minimally connected).

Teorem 2.2.29. (Dharwadker ve ark., 2011) $[d_i]_1^n$ dizisi pozitif tam sayıların dizisi bir ağacın derece dizisidir ancak ve ancak

(i) Tüm i'ler için$1 \leq i \leq n$ için $d_i \geq 1$;

(ii) $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2$

dir.

Teorem 2.2.30. (Dharwadker ve ark., 2011) T, k kenarlı bir ağaç olsun. G, minimum derecesi $\delta\,(G) \geq k$ olan bir çizgeyse, G, bir alt çizge olarak T' yi içerir. Alternatif olarak G, bir alt çizge olarak en fazla $\delta\,(G) + 1$ olan her mertebe ağacını içerir.

Teorem 2.2.31. (Dharwadker ve ark., 2011) Her ağacın ya bir ya da iki merkezi vardır.

Sonuç 2.2.32 (Dharwadker ve ark., 2011).

(i.) P_n yolunun bir asılı noktasından diğer tüm noktalara olan mesafelerin toplamı

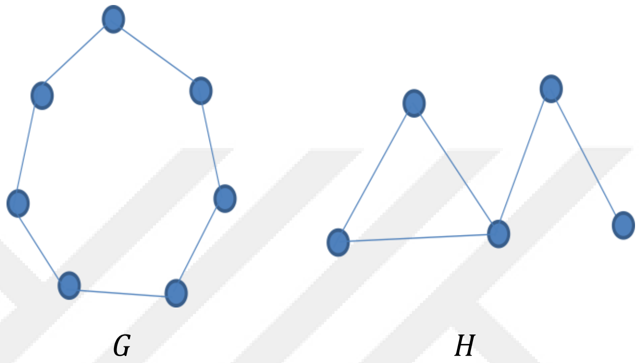
$\sum_{i=0}^{n-1} i = \binom{n}{2}$

dır.

(ii.) n noktalı basit, etiketli çizgelerin sayısı $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ dir.

Tanım 2.2.33. Bir çizge, öz-merkezli veya r -eş merkezlidir (veya kısaca r −eşdeğerdir) denir eğer $V(G)$' de tüm v noktaları için $eec(v) = r(G) = diam(G)$ ise.

Örnek 2.2.34. Aşağıdaki verilen iki çizge G ve H , G çizgesinde her hangi nokta v için $eec(v) = r(G) = diam(G) = 3$ dolaysıyla G öz merkezlidir. Fakat H çizgenin noktaları farklı eksantrik sahiptir ise H öz merkezli değildir.



Şekil 2.15. Öz merkezli ve öz merkezli olmayan çizge örnekleri

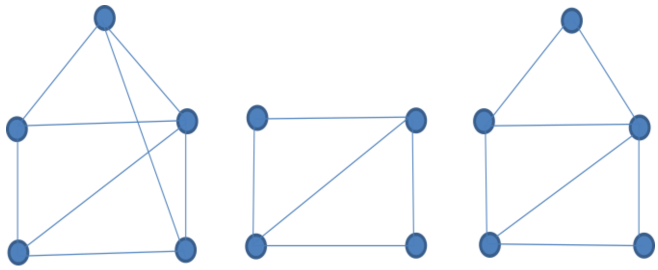
2.3. Çizge İşlemleri

Tanım 2.3.1. $G = (V, E)$ çizgesi için $V_0 \subseteq V$ ve $E_0 \subseteq E$ olmak üzere, $S = (V_0, E_0)$ çizgesine G'nin bir alt çizge denir ve $S \subseteq G$ ile gösterilir.

Tanım 2.3.2. $S = (V_0, E_0)$ çizgesi $G = (V, E)$ çizgesinin bir alt çizgesi ve $V_0 = V, E_0 = E$ ise S ve G çizgelerine eş çizgeler denir.

Tanım 2.3.3. G çizgesinin noktalarından bazılarının ve bu noktalara değen tüm kenarların silinmesiyle elde edilen alt çizgesi G' nin nokta indirgenmiş alt çizgesi denir. Bazı kenarlarının (uç noktaları sabit bırakılarak) silinmesiyle elde edilen alt çizgeye ise G'nin kenar indirgenmiş alt çizgesi denir. Nokta-indirgenmiş alt çizgeye kısaca indirgenmiş alt çizge de denir.

Örnek 2.3.4. Aşagıdaki şekilde verilen H_1 çizgesi G çizgesinden 1 noktasının silinmesiyle elde edilen indirgenmiş alt çizgedir. H_2 çizgesi ise G çizgesinden $\{1,4\}$ kenarının silinmesiyle elde edilen kenar indirgenmiş alt çizgedir.

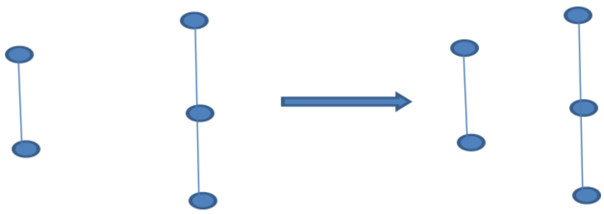


G H_1 H_2

Şekil 2.16. İndirgenmiş alt çizge örnekleri

Tanım 2.3.5. $G = (V, E)$ bir çizge olmak üzere G den bir nokta (kenar) silme $G - v$ $(G - e)$ sırasıyla notasyonu ile gösterilir.

Tanım 2.3.6. İki ayrık noktalı G ve H çizgeleri için, nokta kümesi $V(G) \cup V(H)$ ve kenar kümesi $E(G) \cup E(H)$ olan (bağlantısız) çizgeye G ve H' nin ayrık birleşimi (disjoint union) denir ve $G \cup H$ ile gösterilir.

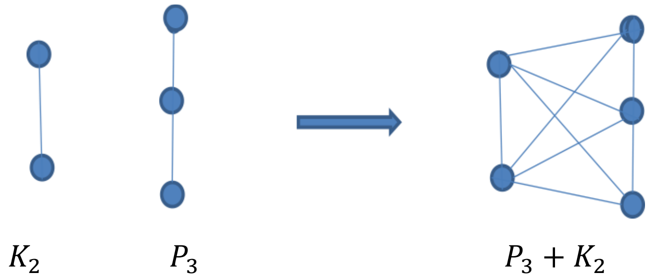


K_2 P_3 $P_3 \cup K_2$

Şekil 2.17. İki çizge için ayrık birleşimi örneği

Tanım 2.3.7. $G + H$ birleşimi (join) $G \cup H$ 'den oluşur ve tüm kenarlar G 'nin noktaları ile H'nin noktalarına komşudur.

Örnek 2.3.8. Aşağıdaki iki çizge P_3, K_2 ve onların birleşimi $P_3 + K_2$ gösrerilir:



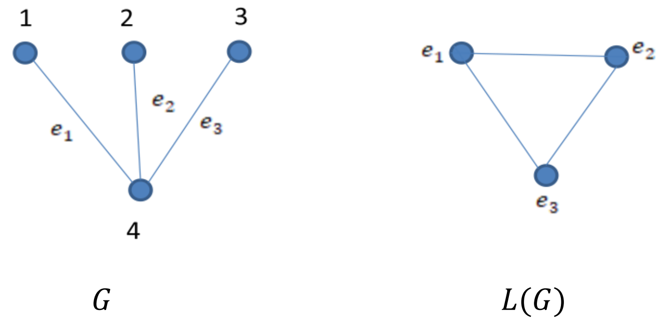
Şekil 2.18. İki çizgenin birleşimi örneği

Tanım 2.3.9. İki G ve H çizge için, $G \times H$ kartezyen çarpımı $V(G \times H) = V(G) \times V(H)$ noktalar kümesine sahip; $(u\,,v)$, $(\,x, y) \in (G \times H)$ olmak üzere "$(u\,,v)$~$(\,x, y)$ ancak ve ancak ya $u = x$ ve $vy \in E(H)$ ya da $v = y$ ve $ux \in E(G)$" koşulunu sağlayan çizgedir.

Örnek 2.3.10. Aşağıdaki iki çizge P_3 ve K_2 olmak üzere kartezyen çarpımı çizgesi $P_3 \times K_2$ gösterilir:

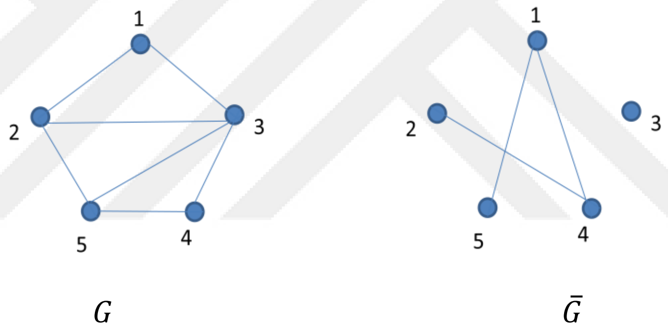
Şekil 2.19. İki çizgenin kartezyen çarpım örneği

Tanım 2.3.11. Basit bir G çizgesinin $L(G)$ çizgi çizgesi (line graph), çizgenin her bir kenarıyla bir noktası ilişkilendirerek ve G nin karşılık gelen kenarları ortak bir noktasına sahipse iki noktayi bir kenara bağlayarak elde edilen çizgedir.



Şekil 2.20. Çizge ve çizgi çizgesi örneği

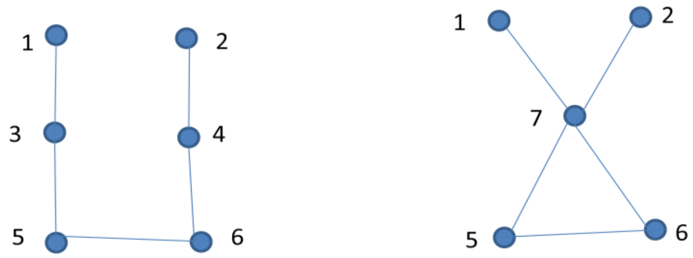
Tanım 2.3.12. Bir G çizgesinin tümleyeni (complement), aynı nokta kümesine sahip ancak kenar kümesi G de olmayan kenarlardan oluşan G^c ya da $\bar{G}$ çizgesidir.



Şekil 2.21. Çizge ve çizgenin tümleyeni örneği

Tanım 2.3.13. G çizgesinde bir çift v_1 ve v_2 noktalarını alalım. Eğer v_1 noktasına veya v_2 noktasına veya her ikisine komşu olan her kenar v de komşu olacak biçimde bu iki nokta yeni bir v noktasıyla yer değiştirirse daralmış veya kaynaşmış (contraction, fusion) noktalar denir.

Örnek 2.3.14. Aşağıda verilen G çizgesi 6 noktalı bir çizgedir**.** 3 ve 4 noktalarını başka bir noktayla (7) değiştirdik, çizge Hdeki gibi 5 noktalı oldu. Burada 3 ve 4 noktaların kaynaşmış hale geldiğini söyleyebiliriz.



G H

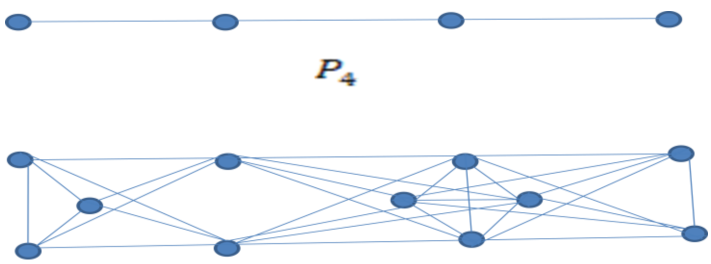
Şekil 2.22. Kaynaşmış (contraction,fusion) nokta

Tanım 2.3.15. (Haemers, 2019) Karma bir genişleme çizgesi (mixed extension graph), orijinal bir çizgenin her noktasının bir klik (clique) veya bir co-klik (co-clique) ile değiştirilmesiyle elde edilen bir çizge türüdür. Spesifik olarak, yönsüz bir G çizgesi ve noktası kümesinin V_1 ve V_2 olarak iki alt kümeye bölünmesi verildiğinde, G'deki her nokta için yeni bir nokta yaratılarak ve ardından bu noktaları şuna göre birleştirerek karma bir genişleme çizgesi $H(V,E)$ elde edilir. iki kural:

(1) iki $v_1$ve v_2 noktasının her ikisi de V_1'e aitse veya her ikisi de V_2'ye aitse ve G'de komşuysa, o zaman bunlar H'de bir kenarla bağlanır;

(2) iki v_1 ve v_2 noktası, bölümdeki farklı kümelere aitse ve G'de komşu değilse, o zaman H' de bir kenarla bağlanırlar. $ME_G(\pm p_1, \pm p_2, \dots)$ bir karışık bir genişleme çizgesini gösterir.

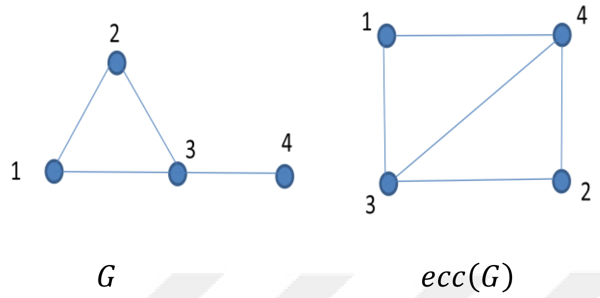
Şekil 2.23'de P_4 ve onun karma bir genişleme çizgesi gösterilir:



$ME(+3, -2, +4, +2)$

Şekil 2.23. P_4 ve onun karma bir genişleme çizgesi

Tanım 2.3.16. (Akiyama ve ark., 1985) Bir G çizgesinin eksantrik çizgesi (eccentric graph) $ecc(G) = \left(V\left(ecc(G)\right), E\left(ecc(G)\right)\right)$ ile gösterilir. Burada $V\left(ecc(G)\right)$ nokta kümesi $V(G)$ ile aynıdır ve "$uv \in E(ecc(G)) \Leftrightarrow d_G(u,v) = \min\left(ecc(u), ecc(v)\right)$".



Şekil 2.24. Bir çizgenin eksantrik çizgesi örneği

Tanım 2.3.17. (Sriram ve ark., 2014) G çizgesi verilsin. $u, v \in V$ herhangi iki nokta için $d(u,v) = ecc(u)$ ise v noktasına u noktasının eksantrik noktası denir. Benzer olarak $d(u,v) = ecc(v)$ ise u noktası v noktasının eksantrik noktasıdır denir. Bir u noktasının eksantrik noktaların kümesi $\varepsilon_G(u)$ ile gösterilir.

Tanım 2.3.18. (Sriram ve ark., 2014) Bir G çizgesinde her $u \in V(G)$ noktası için $|\varepsilon_G(u)| = 1$ ise çizgeye tek eksantrik nokta (unique eccentric point $(u.e.p)$) çizgesi denir

Tanım 2.3.19. (Sriram ve ark., 2014) Bir G çizgesi için her $e \in E(\bar{G})$ için

$diam(G + e) < diam(G)$

ise G çizgesine maksimum çap çizgesi (diameter maximal graph) denir.

Tanım 2.3.20. (Akiyama ve ark., 1985) Yarıçap kritik çizge (radius critical), herhangi $v \in V(G)$ için $r(G - v) < r(G)$ olan çizgedir.

BÖLÜM 3

BİR ÇİZGENİN EKSANTRİK ÇİZGESİ

Bu bölümde eksantrik çizgelerle ilgili bazı sonuçlardan ve çizgenin tümleyeni ile çizgenin kendisi arasındaki ilişkiden bahsedeceğiz ve ayrıca bazı ekstrem çizgeler için eksantrik çizgeleri sunacağız**.**

3.1 Eksantrik Çizge ile İlgili Bazı Sonuçlar

Yardımcı Teorem 3.1.1. (Akiyama ve ark., 1985) G, $n \geq 1$ noktalı bir graf olmak üzere $rad(G) > \ 2$ ise
$ecc(G + K_n) = ecc(G) + K_n$
dir.

Teorem 3.1.2. (Akiyama ve ark., 1985) $G = (V, E)$ n noktalı bağlantılı bir çizge olsun. Bu durumda $ecc(G) = K_n$ olması için gerek ve yeter koşul her $v \in V(G)$ için ya $ecc(v) = 1$ veya $ecc(N(v)) = 1$ dir.

Teorem 3.1.3. (Akiyama ve ark., 1985) Eğer G, $2n$ noktalı bir çizge ise $ecc(G) = pK_2$ dir ancak ve ancak G yarıçap kritiktir.

Teorem 3.1.4. (Akiyama ve ark., 1985) $rad(G) = 1$ ise $ecc(G) = G$ dir ancak ve ancak $< V - S_1 >_G$ ise öz tümleyeni (self -coplementary). Burada
$S_1 = \{x\text{:} \ \ ecc(x) = 1\}$
dir.

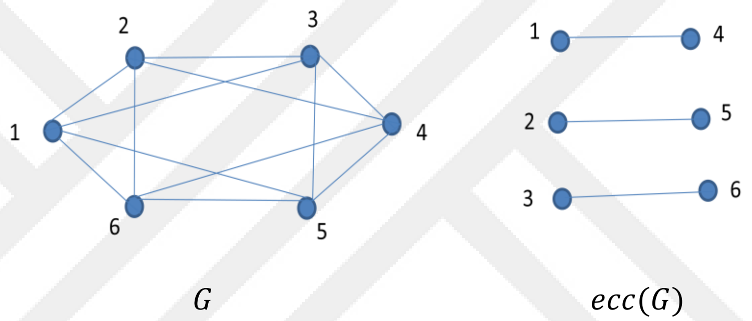
Yardımcı Teorem 3.1.5.

i) (Buckley ve Harary, 1990) $2n$ $(n \geq 1)$ noktadaki öz merkezli bir u.e.p çizgenin eksantrik çizgesi, K_2' nin n kopyasının birleşimidir.

ii) (Parthasarathy ve Nandakumar, 1983) Her u.e.p çizgesi G için $|P(G)|$ çevre noktalarının sayısı çifttir.

Teorem 3.1.6. (Srirama ve ark., 2014) $2n$ $(n \geq 1)$ noktalı çapı 2 olan bir G çizgesi u.e.p çizgesi ise, $ecc(G)$ eksantrik çizgesi K_2' nin *n* kopyasının birleşimidir.

Örnek 3.1.7. Şekil 3.1 'de verilen G çizgesinde her noktanın eksantrikliği 2 dir, böylece $diam(G) = r(G) = 2$ olur ve bu nedenle G çizgesi öz merkezlidir. $1 \leq i \leq 3$ için v_i ve v_{i+3} noktaları birbirlerinin eksantrik noktalarıdır ve dolayısıyla her noktanın tek bir eksantrik noktası vardır, böylece G bir u.e.p çizgedir. Şekil 3.1 (G) 'daki G' nin eksantrik çizgesi, Şekil 3.1 $(eec(G))$' de gösterilmektedir ve $ecc(G)$, K_2' nin üç kopyasının birleşimidir.



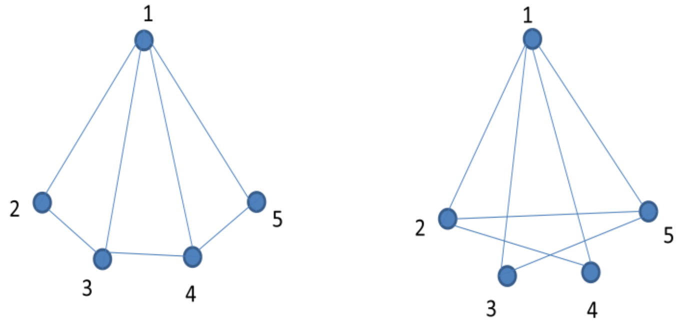
Şekil 3.1. u.e.p çizge G ve onun eksantrik $ecc(G)$ çizgesi

Teorem 3.1.8. (Srirama ve ark., 2014)

i) Bağlantısız çaplı bir maksimal çizgenin eksantrik çizgesi bir tam iki parçalı çizgedir.

ii) Tek çaplı bağlantılı çap maksimal çizgenin eksantrik çizgesi bir çift yıldızdır.

Teorem 3.1.9. (Srirama ve ark., 2014) Çapı üç olan bir u.e.p çizgenin eksantrik çizgesi, ya K_2 kopyalarının birleşimidir ya da bir çift yıldızdır

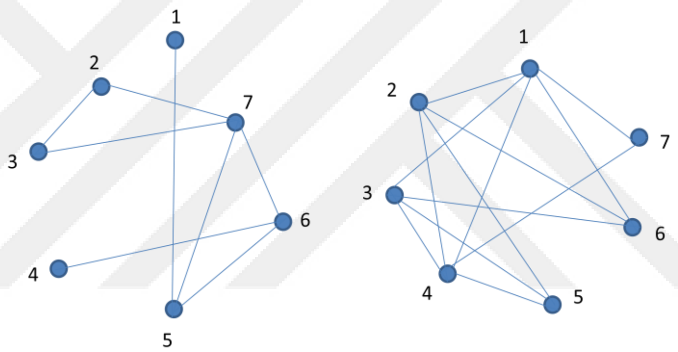


Şekil 3.2. Teorem 3.1.4' ün örneği

Teorem 3.1.10. (Akiyama ve ark., 1985). G mertebesi n olan bir çizge ve derece dizisi $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$ olsun. Eğer $rad(G) > 1$ ve $G = ecc(G)$ ise $d_i + d_{n-i+1} \leq n - 1$ dir.

Teorem 3.1.11. (Akiyama ve ark., 1985) Bir G çizgesi için $ecc(G) \cong \bar{G}$ dir ancak ve ancak $S_i = \{u \in V : ecc(u) = i\}$ olmak üzere $i = 1, 4, 5, 6, \ldots$ için $S_i = \emptyset$ ve S_3 de ortak komşuluğa sahip herhangi iki nokta yoktur.

Teorem 3.1.11. Akiyama ve ark. (1985) tarafından elde edilmiş bir sonuçtur. Fakat $ecc(G) \cong \bar{G}$ olması için gerek koşul yetersiz ve eksiktir. Aşağıdaki örnekle bunu görmek mümkündür.



G $ecc(G) \cong \bar{G}$

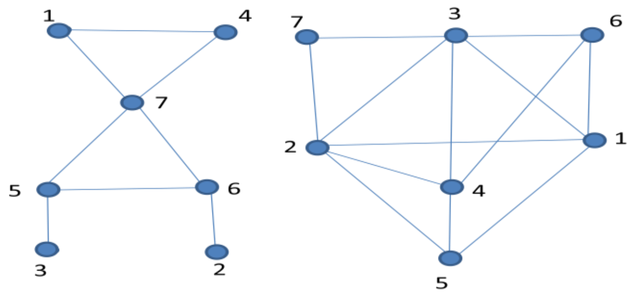
Şekil 3.3. $G,\ ecc(G) \cong \bar{G}$

Görüldüğü gibi 2 ve 3 noktaları çapsal noktalar ve ortak komşuluğu vardır. Ancak buna rağmen $ecc(G) \cong \bar{G}$ dir. Böylece teoremde yer alan gerek koşulu düzelterek yeniden ispat verelim.

Teorem 3.1.12. $G = (V, E)$ çapı d olan bir çizge olsun. $ecc(G)$, G'nin tümleyeni ile izomorf olması için gerek ve yeter koşul, $i = 1, 4, 5, \ldots$ için $S_i = \emptyset$ ve herhangi bir $u, v \in S_3$ için $d(u, v) \neq 2$ dir. Burada $S_i = \{u \in V : ecc(u) = i\}$ dir.

İspat. $ecc(G)$'nin G'nin tümleyeni ile izomorf olsun Teorem 3.1.11' dan $i = 1, 4, 5, \ldots$ için $S_i = \emptyset$ olduğunu biliyoruz. Şimdi, herhangi bir $u, v \in S_3$ için $d(u, v) \neq 2$ olduğunu kanıtlayalım. $d_G(u, v) = 2$ olacak biçimde S_3 içinde u ve v noktalarını düşünelim. $d_G(u, v) = 2 \neq 3 = ecc(u) = ecc(v)$ olduğundan $ecc(G)$' nin tanımından u ve v noktaları $ecc(G)$ de komşu olamaz. Böylece hem G hem de $ecc(G)$ de u ve v noktaları komşu değildir. Ancak, bu durum $ecc(G)$'nin G'nin tümleyeni ile izomorf olduğu varsayımına çelişki oluşturur. Dolayısıyla, herhangi bir $u, v \in S_3$ için $d(u, v) \neq 2$ olduğu sonucuna varırız.

Tersine, u ve v noktaları S_3 kümesinde olsun. $d_G(u, v) \neq 2$ olduğu için $d_G(u, v)$= 1 ya da $d_G(u, v)$= 3 dür. Eğer $d_G(u, v)$= 1 ise bu durumda u ve v noktaları $ecc(G)$'de komşu değildir. Yani, G çizgesinde $u \sim v$ ise $ecc(G)$ çizgesinde $u \nsim v$ dir. $d_G(u, v) =$ 3 ise bu durumda da u ve v ; $ecc(G)$'de komşudur. Dolayısıyla G çizgesinde $u \sim v$ olması için gerek ve yeter koşul $ecc(G)$ çizgesinde $u \nsim v$. olmasıdır. Şimdi, $u \in S_2$ ve $v \in S_3$ olsun. $d_G(u, v) = 2 = ecc(u)$ olduğundan, bu durum $ecc(G)$'de $u \sim v$ olduğu sonucunu verir. Son olarak, $u, v \in S_2$ durumunu ele alalım. Bu durumda, $S_i = \emptyset$ için $i = 1, 4, 5, \ldots$ olduğundan, $u \sim v$ G' deyse $ecc(G)$ de $u \nsim v$ olur. Sonuç olarak her bir durum için u ve v noktalarının komşudur ancak ve ancak bu noktalar $ecc(G)$ çizgesinde komşu değildir. Böylece $ecc(G) \cong \bar{G}$ olduğu görülür.



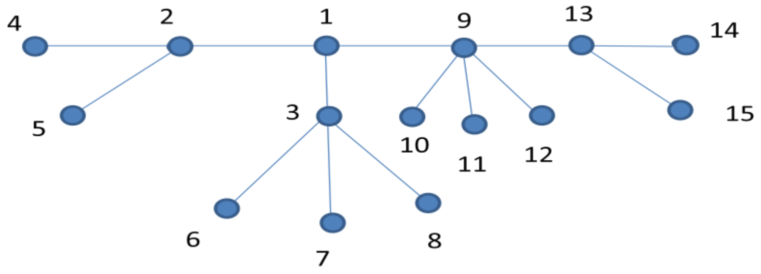
G $\qquad$ $ecc(G) = \bar{G}$

Şekil 3.4. Teorem 3.1.11 Tersine örneği

Yardımcı Teorem 3.1.13. (Dharwadker ve Pirzada, 2011**)** Her ağacın bir ya da iki merkez noktası vardır.

Yardımcı Teorem 3.1.14. Eğer T çapı d ve iki merkez noktası olan bir ağaç ise $ecc(T)$, P_4'ün bir co-klik genişlemesine izomorftur.

İspat. T, çapı d ve yarıçapı r olan bir ağaç olsun. T'nin c_1 ve c_2 olmak üzere iki merkez noktası olduğunu varsayalım. T içindeki c_1 ve c_2'yi birleştiren köprüyü c_1c_2 olarak düşunelim.
T 'nin noktalar kümesinin c_1c_2 küprüsüne göre parçalanışı $V_1 = \{v \in V : v'\text{den } c_1 \text{ noktasına } c_1c_2 \text{ kenarını geçmeyen bir yol vardır}\}$ ve $V_2 = \{v \in V : v'\text{den } c_2 \text{ noktasına } c_1c_2 \text{ kenarını geçmeyen bir yol vardır}\}$ kümeleri olsun. Açıkça hiçbir nokta hem V_1'e hem de V_2'ye ait değildir. $T_{c_1} = \{x \in V_1 : d_T(x, c_1) < r\}$ ve $T_{c_2} = \{x \in V_2 : d_T(x, c_2) < r\}$ olarak tanımlanan kümelerdeki noktalar dışındakiler V_1 ve V_2'de olan çapsal noktalardır. $x \in V_1$ ve $y \in V_2$ için $d_T(x,y) = d = ecc(x) = ecc(y)$ olduğundan, eksantrik çizgenin tanımına göre $ecc(T)$ çizgesinde $x \sim y$ dir. Dolayısıyla, $ecc(T)$, indirgenmiş alt çizge olarak iki parçalı tam çizge içerir. O halde, U_1 ve U_2 sırasıyla V_1 ve V_2'nin çapsal noktalarının kümesi olmak üzere, $K_{|U_1|,|U_2|}$ çizgesi, $ecc(T)$'nin bir indirgenmiş alt çizgesidir. Ayrıca, $x \in T_{c_1}$ ve $y \in U_2$ için $ecc(T)$ çizgesinde $x \sim y$ dır. Gerçekten, $d_T(x,y) = ecc(x)$.
Benzer şekilde, $x \in T_{c_2}$ ve $y \in U_1$ için de $ecc(T)$ çizgesinde $x \sim y$ elde ederiz. Dolayısıyla, $p_1 = |T_{c_1}|$, $p_2 = |U_2|$, $p_3 = |U_1|$ ve $p_4 = |T_{c_2}|$ olmak üzere $ecc(T)$, P_4 ün $(-p_1, -p_2, -p_3, -p_4)$ tipinde co-klik genişlemesine izomorf olur.
Örnek 3.1.15. T Şekil 3.5' de verilen çapı 5 ve yarıçapı 3 olan bir ağaçtır. Buna göre $C(T) = \{1,9\}$; $S_5 = \{4,5,6,7,8,14,15\} = \{4,5,6,7,8\} \cup \{14,15\}$; $T_1 = \{1, 2, 3\}$ ve $T_9 = \{9,10,11,12,13\}$ kümeleri Yardımcı Teorem 3.1.14. ispatında verilen kümelerdir. Dolayısıyla $ecc(T) \cong ME_{P_4}[-3,-2,-5,-5]$.



Şekil 3.5. 15 noktalı bir T ağacı

Yardımcı Teorem 3.1.16. T yalnız bir merkez noktası olan bir ağaç olsun. $ecc(T)$ çizgesi 2-öz merkezli bir çizgedir ancak ve ancak T ağacında x, y ve z çapsal yapraklar ve x, y ve z nin her bir çift arasındaki mesafesi ağacın çapına eşit olmak üzere bir (x, y, z) üçlüsü vardır.

İspat. İlk olarak, T ağacını kökü c merkez noktası olacak biçimde çapı d ve yarıçapı r olan bir köklü ağaç olarak düşünelim. Kabul edelim ki $ecc(T)$ 2-özmerkezli bir çizge olsun. Bu, $x, y \in ecc(T)$ için her iki nokta arasında $d_{ecc(T)}(x, y) = 2$ olduğu anlamına gelir. T içinde x, y, z noktaları arasında çapsal yapraklar ve bu noktaların her çifti arasındaki mesafenin T'nin çapına eşit olan (x, y, z) üçlüsü bulunmadığını varsayalım. T ağaç olduğundan en az iki çapsal yaprak çifti içerir. x ve y' yi çapsal yaprak çifti olarak alalım. Şimdi, c'den x'e giden P ve c'den y'ye giden Q yollarını düşünelim. $x \neq u$ ve $y \neq w$ olmak üzere, P ve Q yollarında aynı seviyede bulunan noktalar u ve w olsun. Bu durumda, $d_T\,(u, c) = d_T\,(w, c) = k < r$ olur. Çünkü $d_T\,(u\,, w) = d_T\,(u\,, c) + d_T\,(w, c) = k + k < k + r = ecc(u)$ dir ve böylece $ecc(T)$ çizgesinde $u \nsim w$ elde ederiz. Dikkat edilirse $d_T(u, y) = ecc(u)$ ve $d_T(x, w) = ecc(w)$ dir ve buradan $u \sim y$ ve $x \sim w$ elde edilir. Kabulümüzden dolayı T ağacında x ve y noktalarından başka bu noktalara mesafesi d olacak biçimde başka bir çapsal nokta olmadığından, u ve v noktaları ortak bir komşuluğa sahip değildir. Bu durumda $ecc(T)$ çizgesinde $u - y - x - w$ yolu vardır ve böylece $ecc(T)$ çizgesinde $d(u, w) = 3$ olur. Fakat bu ise $ecc(T)$ nin 2- öz merkezli çizge olmasına bir çelişki oluşturur. Bu nedenle, x, y, z noktaları arasında T'nin çapına eşit olan mesafenin olduğu en az bir (x, y, z) üçlüsü mutlaka bulunmalıdır.

Tersine, x, y ve z noktaları her bir nokta çifti arasındaki mesafenin T'nin çapına eşit olduğu çapsal yapraklar olsun.

Durum 1: P yolu üzerinde kök c'den x'e uzanan $x \neq u$ ve $x \neq v$ noktalarını düşünelim. Bu durumda $ecc(T)$ çizgesinde $u, v \sim y$ ve $u, v \sim y$ olduğu için $d_{ecc(T)}(u, v) = 2$ elde edilir.

Durum 2: P yolu üzerinde kök c'den x'e uzanan $x \neq u$ ve Q yolu üzeinde kök c'den y'e uzanan $y \neq v$ noktalarını düşünelim. Eğer u ve v aynı seviyede ise (yani, $ecc(u) = ecc(v)$), o zaman $d(u, c) = d(v, c) = k < r$ olduğundan $u \nsim v$ $ecc(T)$'de geçerlidir ve bu, u ve v'nin $ecc(T)$ içinde ortak bir komşusu olan z noktası olduğunu gösterir, yani $ecc(T)$ çizgesinde $u \sim z$ ve $v \sim z$ ve böylece $d_{ecc(T)}(u, v) = 2$ dir. Genelliği bozmadan u ve v'nin farklı seviyelerde olduğunu (yani, $ecc(u) \neq ecc(v)$) varsayalım. $k_1 = d(u, c) < d(v, c) = k_2$ olsun. Bu durumda $d(u, v) = k_1 + k_2$ olur, ancak $ecc(u) = k_1 + r$ ve $ecc(v) = k_2 + r$ olduğundan u ve v noktaları ecc(T) çizgesinde komşu olamaz. Yukarıdaki argümanlarla benzer şekilde, u ve v 'nin ortak bir komşusu z noktası olduğu için $d_{ecc(T)}(u, v) = 2$ dir.

Durum 3: x çapsal noktaya göre (c hariç) ortak ataya sahip u ve v noktalarını alalım. Bu durumda u ve v'nin $ecc(T)$'de komşu olmadığı açıktır, yani $ecc(T)$'de $u \nsim v$. Ek olarak, u ve v ortak bir ataya sahip olduklarından, ayrıca $ecc(T)$'de en az iki ortak komşuya (y ve z) sahiptir. Ayrıca, her iki nokta da ilgili atalarına komşu değildir. Bu nedenle, $ecc(T)$ çizgesinde $d(u, v) = 2$ elde edilir.

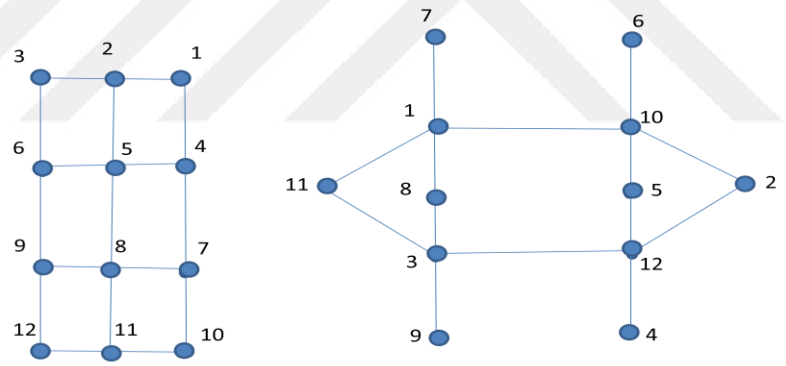
Durum 4: u ve v ortak atası olmayan herhangi iki nokta olsun. x, y ve z noktalarının her birine göre. x, y ve z çapsal yapraklar olduğundan, T' deki c kökünden x, y ve z' ye giden yollar ikili olarak ayrıktır. Bu nedenle, u ve v'nin $ecc(T)$' de x, y ve z' nin her birine komşu olduğunu gözlemlemek kolaydır. Böylece, 2 uzunluğunda bir yol olduğu için $ecc(T)$ çizgesinde $d(u, v) = 2$ dir.

Böylece, her bir u noktası için $ecc(T)$ çizgesinde $ecc(u) = 2$ olduğunu göstermiş olduk. Yani, $ecc(T)$ çizgesi 2-öz merkezli bir çizgedir.

Teorem 3.1.17. Herhangi bir ağaç için $ecc(T)$'nin çapı en fazla 3'tür.

İspat. Yardımcı Teorem 3.1.14'e dayanarak, $ecc(T)$' nin P_4'ün co-klik genişlemesine izomorf olduğu göz önüne alınırsa $çap(ecc(T)) = 3$. Bu sonuç Yardımcı Teorem 3.1.16 ile birleştirilirse $ecc(T)$'nin çapı en fazla 3 olabileceği sonucu doğrudan elde edilir.

Not 3.1.18. Teorem 3.1.17, sadece ağaçlar için geçerlidir. Genel çizgeler için, eksantrik çizgelerin çapı 3'ten büyük olabilir. Örneğin, G çizgesi 3×4 ızgara çizge (grid graph) olmak üzere G için $diam(ecc(G)) = 5$ dir. (Şekil 3.6)



Şekil 3.6. Izgara çizge ve onun eksantrik çizgesi

Not 3.1.19. Herhangi bir u ve v noktası için $d_{ecc(G)}(u, v) \leq çap(G)$ olduğundan $ecc(G)$' nin çapının, G 'nin çapından büyük olamayacağı açıktır.

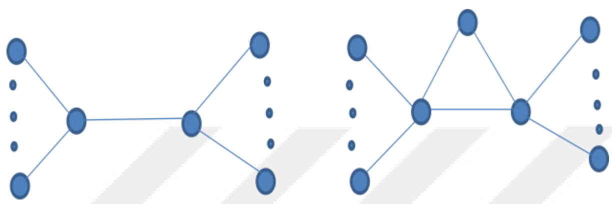
3.2 Bazı Ekstrem Çizgelerin Eksantrik Çizgeleri

Sonuç 3.2.1. (Ghosh ve Pal, 2017) $G \cong P_n$ mertebesi n olan bir yol çizge olsun.

i) $n \leq 3$ olduğunda $ecc(G) \cong K_n$.

ii) $n > 3$ ve çift olduğunda ; $ecc(G) \cong S_{k,k}$; $k = \frac{n-2}{2}$

iii) $n > 3$ ve tek olduğunda , $ecc(G) \cong H$



Şekil 3.7. P_n nin eksantrik çizgeleri

Önerme 3.2.2 (Ghosh ve Pal, 2017) $G \cong C_n$ mertebesi $n \geq 3$ olan bir döngü çizge olsun.

i) $ecc(G) \cong mK_2$,eğer n çift ise $m = \frac{n}{2}$.

ii) $ecc(G) \cong C_n$, eğer n tek.

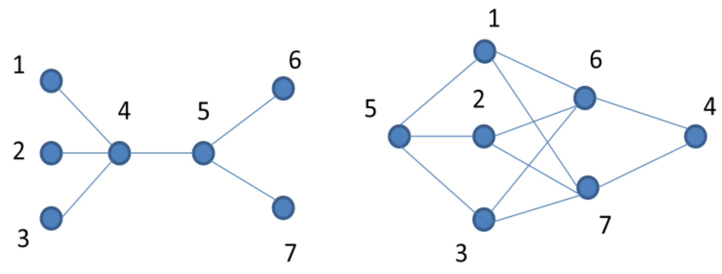
Önerme 3.2.3. (Gayathri ve Kaspar, 2016) $G \cong K_{m,n}$ iki parçalı tam çizge olsun:

(i) $ecc(G) \cong K_{n+1}$; $m = 1$,

(ii) $ecc(G) \cong K_m \cup K_n$; $m > 1$.

Not 3.2.4. (Gayathri ve Kaspar, 2016) Bir S_n yıldız çizgesi için $ecc(G) \cong K_{n+1}$.

Önerme 3.2.5. (Gayathri and Kaspar, 2016) $G_{m,n}$, $m + n + 2$ mertebesinden bir çift yıldız çizge ise, o zaman $ecc(G) \cong K_1 + \overline{K}_m + \overline{K}_n + K_1$.



$G_{m,n}$ $\qquad\qquad$ $ecc(G_{m,n})$

Şekil 3.8. $G_{m,n}$ ve eksantrik çizgesi

Sonuç 3.2.6. G çizgesi $m + n + 2$ mertebeden çift yıldız star olmak üzere G iki merkez noktasına sahip olduğundan Lemma 3.1.14' den G çizgesi P_4 yol çizgesinin $(1, -m, -n, 1)$ ko-klik genişlemesidir. Yani
$ecc(G) \cong K_1 + \overline{K}_m + \overline{K}_n + K_1 \cong ME_{P_4}(1, -m, -n, 1)$
olduğu görülür.

Sonuç 3.2.7. H çizgesi P_n çizgesinin $(\mp p_1, \mp p_2, \dots, \mp p_{n-1}, \mp p_n)$ karışık genişlemesi olmak üzere

$$ecc(H) \cong ME_{ecc(P_n)}(-p_1, -p_2, \dots, -p_n)$$

Sonuç 3.2.8. H herhangi bir çizge olmak üzere

$$ecc(ME_H(\mp p_1, \mp p_2, \dots, \mp p_{n-1}, \mp p_n)) \cong ME_{ecc(H)}(-p_1, -p_2, \dots, -p_n)$$

BÖLÜM 4

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında literatürde çok nadir çalışma yapıldığı görülen eksantrik çizgeler ele alınmıştır. Eksantrik çizge ilk olarak 1985 de Akiyama tarafindan aşağıdaki gibi tanılmıştır:

Herhangi bir G çizgenin eksantrik çizgesi $ecc(G)$, G ile aynı nokta kümesi sahiptir ve $ecc(G)$'deki iki nokta, G'deki mesafeleri birinin eksantrikliğine eşitse komşudur. Herhangi bir çizgenin eksantrik çizgesi, orijinal çizgenin mesafe ve bağlanabilirlik ile ilgili özelliklerini incelemek için yararlı olabilir. Eksantrik çizgelerin incelenmesi ağ analizi, sosyal ağ analizi ve görüntü işleme uygulamaları ile motive olmuştur.

Çizge teorisindeki temel problemlerden biri, iki çizgenin ne zaman izomorfik olduğunu belirlemektir. Bu tez çalışmasında, $ecc(G)$' nin G'nin tümleyenine ne zaman izomorfik olduğunu belirleme problemine odaklanıyoruz. Bu problem Akiyama ve ark. (1985) tarafından incelenmiştir. Burada $ecc(G)$'nin G'nin tümleyenine izomorfik olması için gerekli koşullar verilmiştir. Ancak, eksantrik çizgenin, tümleyenine izomorfik olması için sunulan gerekli koşulların yetersiz olduğu tespit edilmiş ve bu kısım bu tezde düzeltilmiştir. Bu motivasyon kaynağından hareketle bu tez çalışması hazırlanmıştır ve $ecc(G) \cong G$ olması için gerekli koşullar yeniden düzenlenip ispat edilmiştir. İlgili teorem ve düzeltilmiş hali aşağıda verilmiştir:

Teorem. (Akiyama ve ark., 1985). Bir G çizgesi için $ecc(G) \cong \bar{G}$ dir ancak ve ancak $S_i = \{u \in V : ecc(u) = i\}$ olmak üzere $i = 1, 4, 5, 6, \ldots$ için $S_i = \emptyset$ ve S_3 de ortak komşuluğa sahip herhangi iki nokta yoktur.

Teorem. $G = (V, E)$ çapı d olan bir çizge olsun. $ecc(G)$, G'nin tümleyeni ile izomorf olması için gerek ve yeter koşul, $i = 1, 4, 5, \ldots$ için $S_i = \emptyset$ ve herhangi bir $u, v \in S_3$ için $d(u, v) \neq 2$ dir. Burada $S_i = \{u \in V : ecc(u) = i\}$ dir.

Bu çalışmada ayrıca merkez noktalarına göre ağaçlar çalışılmıştır ve ağaçların eksantrik çizgeleri ile ilgili aşağıdaki sonuçlar da tarafımızdan elde edilmiştir.

Yardımcı Teorem. Eğer T çapı d ve iki merkez noktası olan bir ağaç ise $ecc(T)$, P_4'ün bir co-klik genişlemesine izomorftur.

Yardımcı Teorem. T yalnız bir merkez noktası olan bir ağaç olsun. $ecc(T)$ çizgesi 2-öz merkezli bir çizgedir ancak ve ancak T ağacında x, y ve z çapsal yapraklar ve x, y ve z nin her bir çift arasındaki mesafesi ağacın çapına eşit olmak üzere bir (x, y, z) üçlüsü vardır.

Teorem. Herhangi bir ağaç için $ecc(T)$'nin çapı en fazla 3'tür.

Elde edilen sonuçlardan yola çıkarak çizge teoride önemli çalışmalardan birisi olan çizge sınıflandırlamaları ile ilgili aşağıdaki problemler sunulmuştur.

Problem 1. Eksantrik çizgesi ile aynı çapa sahip çizgeleri karakterize ediniz.

Problem 2. Eksantrik çizgesine izomorfik olan çizgeleri sınıflandırınız.

Bu problemlerle ilgili yeterli alt yapı ve yöntem arayışı çalışmaları tarafımızca halen yapılamakta olup yeterli olgunluğa ulaşılamadığı için bu tezde problemlerle ilgili sonuçlar yer almamaktadır. Ancak alanda ilgi çekici problemlerden ve tabiki zor problemlerden biri olduğu düşünüldüğünde tam sınıflandırma yapılmasa bile kısmen çözümlerinin bulunması durumunda da liteatüre oldukça özgün değer katacaktır.

KAYNAKLAR

Akiyama J, Ando K, Avis D (1985) Eccentric Graphs. Discrete Mathematics 56: 1-6.

Ghosh P, Pal A (2017) Prime Cordial labeling on eccentric graph of cycle and path. Advanced Modeling and Optimization 19 (1): 133-139.

Srirama S, Ranganayakulub D, Sarminc N, Venkatd I, Subramaniand KG (2014) On Eccentric Graphs of Unique Eccentric Point Graphs and Diameter Maximal Graphs. Appl. Math. and Comb. Intel. 3 (1) 283-291.

Chartrand G, Zhang P (2012) A First Course In Graph Theory. Dover Publications, INC.Mineola, New York.

Distel R (2005) Graph Theory. Springer-Verlag, New York.

Dharwadker A, Pirzada S (2011) Graph Theory. CreateSpace Ind. Publishing Platform, South Caroline.

Haemers WH (2019) Spectral characterization of mixed extensions of small graphs. 342 (10): 2760-2764.

Buckley F, Harary F (1990) Distance in Graphs. Addison-Wesley, Redwood city CA.

Parthasarathy KR, Nandakumar R (1983) Unique Eccentric Point Graphs. Discrete Math. 46: 69–74.

Gayathri B, Kaspar S (2016) Domination parameters of some particular classes of eccentric graphs. Int. J. of Appl. Engineering Research 11 (1): 584-588.

EK 1
TERİMLER SÖZLÜĞÜ

Çizge	Graph
Nokta, Düğüm	Vertex, Node
Uç noktalar	Endpoints
Kenar	Edge
Komşu,komşuluk	Adjacent, Neighbour
İlmek	Loop
Karışık çizge	Mixed graph
Nokta sayısı	Order
Kenar sayısı	Size
Derece	Degree
İzole nokta	Isolated vertex
Açık/Kapalı yürüyüş	Open/Closed walk
Gezi	Trail
Yol	Path
Döngü	Cycle
Devre	Circuit
Bağlantılı çizge, Bağlantısız Çizge	Connected graph, Disconnected graph
Mesafe	Distance
Dışmerkezlilik	Eccentricity
Çap	Diameter
Yarıçap	Radius
Merkez nokta	Central vertex
Merkez	Center
Özmerkezli çizge	Self-centered graph
Alt çizge	Subgraph

Bileşen	Component
İndirgenmiş alt çizge	Induced subgraph
Klik	Clique
Kesen nokta	Vertex-cut
Birleşim çizgesi	Graph union
Tümleyen	Complement
Ayrık birleşim	Disjoint union
Kartezyen çaprım	Cartesian product
Karma genişleme	Mixed extension
Tam çizge	Complete graph
Boş çizge	Null graph
Aşikar çizge	Trivial graph
Yol çizge	Path graph
Döngü çizge	Cycle graph
Ağaç	Tree
Yaprak	Leaf
Sarkıt	Pendant
Köklü ağaç	Rooted tree
Oğul	Child, Parent
Ata	Ancestor
Yıldız çizge	Star graph
Çift yıldız çizge	Double star graph
Tırtıl ağaç çizge	Caterpillar tree
İki parçalı çizge	Bipartite graph
İki parçalı tam çizge	Complete bipartite graph
Düzgün çizge	Regular graph
Kaynaşmış,kaynama	Contraction, fusion
Basit çizge	Simple graph