T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇOKLU TOPOLOJİK UZAYLARDA YARI AYIRMA AKSİYOMLARI

Tezi Hazırlayan
Elif TÜRE

Tez Danışmanı
Dr. Öğr. Üyesi Samed ÖZKAN

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Eylül 2023
NEVŞEHİR

T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇOKLU TOPOLOJİK UZAYLARDA YARI AYIRMA AKSİYOMLARI

Tezi Hazırlayan
Elif TÜRE

Tez Danışmanı
Dr. Öğr. Üyesi Samed ÖZKAN

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Eylül 2023

Dr. Öğr. Üyesi Samed ÖZKAN danışmanlığında **Elif TÜRE** tarafından hazırlanan **"Çoklu Topolojik Uzaylarda Yarı Ayırma Aksiyomları"** adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

14/09/2023

JÜRİ :

Başkan : Prof. Dr. Ayhan ERCİYES

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Hayrullah ÖZİMAMOĞLU

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Samed ÖZKAN

ONAY :

Bu tezin kabülü Enstitü Yönetim Kurulunun .... tarih ve .... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

.... / .... / 20....

Doç. Dr. Cemal ÇARBOĞA

Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİM SAYFASI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada yer alan bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu ve bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Elif TÜRE

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim ve tez çalışmam süresince tüm bilgilerini benimle paylaşmaktan kaçınmayan, her türlü konuda desteğini benden esirgemeyen ve tezimde büyük emeği olan, aynı zamanda kişilik olarak da bana çok şey katan Sayın Hocam Dr. Öğr. Üyesi Samed ÖZKAN'a teşekkür ederim.

Maddi ve manevi olarak her zaman desteklerini hissettiğim, göstermiş oldukları sabır ve anlayıştan dolayı başta eşim Fatih TÜRE ve oğlum Onuralp TÜRE'ye teşekkür ederim.

Elif TÜRE

Eylül 2023, NEVŞEHİR

ÇOKLU TOPOLOJİK UZAYLARDA YARI AYIRMA AKSİYOMLARI

(Yüksek Lisans Tezi)

Elif TÜRE

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Eylül 2023

ÖZET

Bu tez çalışmasının temel amacı çoklu topolojik uzaylarda yarı çoklu açık ve yarı çoklu kapalı küme kavramlarını tanımlamak, bu kavramlar yardımıyla yarı çoklu ayırma aksiyomlarını karakterize etmek ve bazı özelliklerini inceleyerek çeşitli teorem ve örneklerle aralarındaki ilişkileri araştırmaktır.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm olan giriş bölümünde literatür taraması yapılarak konunun kısa tarihçesi ve önemi üzerinde durulmuştur.

İkinci ve üçüncü bölümde, tez çalışmasında kullanılacak olan çoklu küme kavramı, temel topolojik kavramlar ve bunlarla ilgili çeşitli özellikler verilmiştir. Ayrıca çoklu topolojik uzaylardan bahsedilerek çoklu süreklilik, çoklu homeomorfizm gibi kavramlar ve çoklu ayırma aksiyomları ifade edilmiştir.

Dördüncü bölümde, ilk olarak çoklu topolojik uzaylarda yarı çoklu açık küme kavramı tanımlanmış ve bazı önemli özellikler ispatlanmıştır. Daha sonra yarı çoklu süreklilik tanımları verilerek yarı çoklu ayırma aksiyomları karakterize edilmiştir. Ayrıca aralarındaki ilişkiler gösterilmiştir.

Son bölümde ise sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: *Çoklu küme, Çoklu topolojik uzay, Yarı çoklu açık küme, Yarı çoklu süreklilik, Çoklu yarı ayırma aksiyomları.*

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Samed ÖZKAN

Sayfa Adeti: 53

SEMI SEPARATION AXIOMS ON MULTISET TOPOLOGICAL SPACES

(M.Sc. Thesis)

Elif TÜRE

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

September 2023

ABSTRACT

The main purpose of this thesis is to define the concept of semi-open multiset in multiset topological spaces, to characterize the multiset semi-separation axioms with the help of these concepts, to examine some of their properties, and to investigate the relationships between them with various theorems and examples.

This thesis consists of five chapters.

In the first chapter, the short history and importance of the subject are emphasized by a literature review.

In the second and third chapters, the concept of multiset and the basic topological concepts that will be used in the thesis are given, as are various properties related to them. In addition, multiset topological spaces, multiset continuity, multiset homeomorphism, and multiset separation axioms are mentioned.

In the fourth chapter, firstly, the concept of semi-open multiset in multiset topological spaces are defined and some important properties are proved. Moreover, multiset semi-continuity definitions are given, and multiset semi-separation axioms are characterized. In addition, relationships among them are shown.

In the last section, conclusions and recommendations for future work are given.

Keywords: *Multiset, Multiset topological space, Semi-open multiset, Multiset semi-continuity, Multiset semi-separation axioms.*

Thesis Supervisor: Assist. Prof. Dr. Samed ÖZKAN
Number of Pages: 53

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY SAYFASI i
TEZ BİLDİRİM SAYFASI ii
TEŞEKKÜR iii
ÖZET iv
ABSTRACT v
İÇİNDEKİLER vi
ŞEKİLLER LİSTESİ viii
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ ix

1. BÖLÜM

GİRİŞ 1

2. BÖLÜM

TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER 5
2.1. Topolojik Uzaylar ve Temel Topolojik Kavramlar 5
2.1.1. Süreklilik ve Yarı Süreklilik 10
2.1.2. Ayırma Aksiyomları 13
2.2. Çoklu Kümeler 15
2.2.1. Çoklu Kümelerde Fonksiyonlar 19

3. BÖLÜM

ÇOKLU TOPOLOJİK UZAYLAR 22
3.1. Çoklu Topolojik Uzaylar 22
3.2. Çoklu Bazlar ve Çoklu Altbazlar 23
3.3. Çoklu Kapalı Kümeler 25
3.4. Çoklu Kümelerde İç, Kapanış ve Yığılma Noktaları 26
3.5. Çoklu Topolojik Uzaylarda Süreklilik ve Çoklu Homeomorfizm . . . 28
3.6. Çoklu Ayırma Aksiyomları 29

4. BÖLÜM

ÇOKLU TOPOLOJİK UZAYLARDA YARI AYIRMA AKSİYOMLARI 33

4.1. Yarı Çoklu Açık Kümeler 33

4.2. Yarı Çoklu Süreklilik 37

4.3. Yarı Çoklu T_0 ve Yarı Çoklu T_1 Uzayları 38

4.4. Yarı Çoklu Hausdorff Uzaylar 42

4.5. Yarı Çoklu Regüler ve Yarı Çoklu Normal Uzaylar 44

5. BÖLÜM

SONUÇ VE ÖNERİLER 48

5.1. Sonuç 48

5.2. Öneriler 49

KAYNAKLAR 50

ÖZGEÇMİŞ 53

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.1. Sabit, sürekli, so-i-sürekli ($i = 1, 2, 3$) fonksiyonlar arasındaki ilişkiler 12

Şekil 4.1. m-sürekli ve sm_t-sürekli ($t = 1, 2, 3$) m-fonksiyonlar arasındaki ilişkiler 38

Şekil 4.2. m-T_i ve sm-T_i ($i = 0, 1, 2$) uzaylar arasındaki ilişkiler 44

Şekil 4.3. m-regüler ve sm_t-regüler ($t = 1, 2, 3$) uzaylar arasındaki ilişkiler 45

Şekil 4.4. m-normal ve sm_t-normal ($t = 1, 2, 3$) uzaylar arasındaki ilişkiler 46

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

M	Çoklu küme
k_i/x_i	k_i tekrar sayısına sahip x_i elemanı
$mint(A)$	A kümesinin çoklu içi
$mcl(A)$	A kümesinin çoklu kapanışı
A''	A kümesinin çoklu yığılma noktaları
C_M	Tekrar sayısı fonksiyonu
$\in^{k_i}$	k_i tekrar sayısına sahip elemanıdır
$\sqsubseteq$	Çoklu alt küme
$\sqcup$	Çoklu birleşim
$\sqcap$	Çoklu kesişim
$\oplus$	Çoklu kümelerde toplama işlemi
$\ominus$	Çoklu kümelerde fark işlemi
$\|M\|$	Çoklu kümenin eleman sayısı
$[X]^w$	Elemanları w dan fazla tekrar etmeyen çoklu kümeler sınıfı
$[X]^\infty$	Elemanları sonsuz tekrar edebilen çoklu kümeler sınıfı
$PW(M)$	Çoklu tam kuvvet kümesi
$PF(M)$	Çoklu dolgun kuvvet kümesi
$P(M)$	Çoklu kuvvet kümesi
$P^*(M)$	Çoklu kuvvet kümesinin destek kümesi
$Dom\mathcal{R}$	Çoklu küme bağıntısının tanım kümesi
$Ran\mathcal{R}$	Çoklu küme bağıntısının değer kümesi
(M,τ)	Çoklu topolojik uzay
m-açık	Çoklu açık küme
sm-açık	Yarı çoklu açık küme
S_τ	Yarı çoklu açık kümelerin sınıfı
K_{S_τ}	Yarı çoklu kapalı kümelerin sınıfı
sm-T_i	Yarı çoklu T_i aksiyomu

1. BÖLÜM

GİRİŞ

Klasik küme teorisinde küme kavramı farklı nesnelerin iyi tanımlanmış bir sınıfıdır. Klasik kümede herhangi bir nesnenin tekrarına izin verilmez. Herhangi bir nesnenin tekrarına izin verilen kümeler çoklu küme (multiset) olarak bilinir [2, 3]. Matematikte çoklu küme, elemanların tekrarının önemli olduğu nesneler topluluğudur ve klasik bir kümenin genelleştirilmesidir diyebiliriz.

Bir çoklu küme, her biri belirli bir çoklukla ele alınan bir elemanlar sınıfı olarak tanımlanmıştı. Matematiksel olarak bir çoklu küme $\{k_1/x_1, k_2/x_2, ..., k_n/x_n\}$ şeklinde ifade edilir. Burada $i = 1, ..., n$ için x_i ler elemanlar, k_i ler ilgili elemanın kümedeki tekrar sayısıdır ve her biri birer pozitif tamsayıdır. Örnek olarak, $\{a, b, c, d\}$ kümesi klasik bir küme iken $\{a, a, a, b, b, c, c, c, c, d\}$ kümesi çoklu bir küme olur. Bu çoklu küme kısaca $\{3/a, 2/b, 4/c, 1/d\}$ şeklinde gösterilir.

Çoklu kümelerin ihtiyaç duyulduğu bir çok durumla karşılaşabiliriz. Örneğin, bir şirkette çalışanların yaşlarını veya maaş ayrıntılarını toplarken, tekrarlar içeren girişleri ele almamız gerekebilir. Bunun gibi, verilerin tekrarlı dağılımının önemli olduğu durumlarda klasik kümeler yetersiz kalmaktadır.

Çoklu kümeler, matematik ve bilgisayar biliminin bir çok alanında ihtiyaç duyulduğu için çok önemli yapılardır. Günlük hayatta bilgisayar bilimleri, tıp, bankacılık, mühendislik, bilgi depolama ve veri analizi gibi birçok alanda kullanılabilmektedir. Çoklu küme teorisinin karar verme (decision-making) alanındaki bir uygulaması [28] de görülebilir.

Birkaç somut örnek vermek gerkirse, sıfırdan büyük tamsayıların asal çarpanlara ayrılarak gösterimi, elemanları asal olan bir çoklu küme olarak ifade edilebilir.

Yine fiziksel dünyada muazzam tekrarların olduğunu görebiliriz. Pek çok hidrojen atomu, pek çok DNA zinciri vb. vardır. Benzer olarak, aynı değere ve yıla sahip madeni paralar, elektronlar veya kum taneleri bariz şekilde ayrı olmalarına rağmen tekrarlı ifade edilmesi gerektiği durumlarda çoklu kümelerden yararlanırız [11, 15]. Bunlara benzer şekilde çoklu küme örneklerini çoğaltabiliriz.

Çoklu küme teorisi, ilk olarak Cerf ve diğerleri [3] tarafından 1971 yılında ortaya konulmuştur. Peterson [24] ve Yager [27] seçme operatörü ve bulanık çoklu kümeler gibi birçok sonuç ortaya koyarak çoklu küme teorisinin ilerlemesinde katkı sağlamışlardır. Jena ve diğerleri [16] de konu üzerinde çalışmaları sürdürmüşlerdir.

Manjunath ve John [21] çoklu kümeler üzerindeki bağıntılar konusunda ilk çalışma yapanlardır. 2009 yılında Girish ve John [13] çoklu küme bağıntısı ve fonksiyonunu tanımlamışlardır. Ayrıca çoklu küme bağıntıları yardımıyla çoklu kümeler üzerinde topoloji ve bazı topolojik yapıların tanımlarını vermişlerdir [14]. Ardından çoklu kümelerde baz, altbaz ve sürekli fonksiyon kavramları ile birlikte çoklu kümelerin kapanış, iç ve limit noktalarını tanımlamış ve var olan bazı teoremleri çoklu kümeler özelinde ispatlamışlardır [15].

Genel topolojide iyi bilinen, açık ve kapalı kümelerle ifade edilen tüm özellikler yarı-açık ve yarı-kapalı küme kavramları yardımıyla genelleştirilerek, yeni özellikler elde edilebilir. Bu özelliklerin birer topolojik özellik olup olmadığı uzun yıllar boyunca araştırma konusu olmuştur.

Bir küme üzerindeki bir topoloji yapısı, bir kümenin açık alt kümeleri tarafından belirlenir. Elde edilen bu açık kümeler kullanılarak bir topolojik uzayda yarı-açık küme kavramı ortaya atılmıştır.

$\mathbb{R}$ reel sayılar üzerindeki standart topoloji τ olmak üzere $a < b$ olacak şekildeki $a, b \in \mathbb{R}$ için $(a, b]$ ve $[a, b)$ aralıkları yarı-açık olarak bilinir. Bir açık küme ile o kümenin kapanışı arasında kalan bütün kümeler yarı-açık küme olarak adlandırılmıştır. Tümleyeni açık olan kümeye ise kapalı küme denilmektedir.

Yine kapalı kümeler kullanılarak yarı-kapalı küme kavramı geliştirilmiştir. Bir kapalı küme ile o kümenin içi arasında kalan bütün kümeler de yarı-kapalı küme olarak adlandırılmıştır.

Topolojik uzaylarda yarı-açık küme kavramı ilk olarak 1963 yılında Levine [17] tarafından ortaya atıldı. Levine yarı-açık küme kavramını, bir açık küme ile bu kümenin kapanışı arasında kalan kümeler olarak tanımlamıştır. Ayrıca genel topolojideki klasik süreklilik kavramını yarı-açık kümeler kullanılarak genelleştirmiş ve yarı-süreklilik kavramını tanımlamıştır. Levine bir fonksiyonun yarı-sürekli olabilmesi için değer kümesindeki her açık kümenin ters görüntüsünün tanım kümesinde yarı-açık küme olması gerektiğini ifade etmiştir. Crossley ve Hildebrand [4–7] yarı-kapanış, yarı-kapalı kümeler, yarı-süreklilik ve yarı-topolojik özellikler konuları ile ilgili çalışmalarıyla Levine'in çalışmasını ilk kez referans gösteren matematikçiler olmuşlardır.

İyi bilinen ayırma aksiyomlarından T_0, T_1, Hausdorffluk, regülerlik, normallik aksiyomları ve kompaktlık kavramı tanımlarındaki açık kümeler yerine yarı-açık kümeler kullanılarak yarı-T_0, yarı-T_0, yarı-Hausdorff [18], s-regüler [19], s-normal [20] ve yarı-kompaktlık [8] kavramları tanımlanmıştır. Bu yeni kavramların eski kavramlardan daha zayıf olduğu gösterilmiştir. Sonraki yıllarda Dorsett, kapalı kümeler yerine yarı-kapalı kümeleri kullanarak 1982 yılında s-regülerlikten daha kuvvetli bir kavram olan yarı-regülerlik (semi-regular) [9] ve 1985 yılında ise s-normallikten daha kuvvetli bir kavram olan yarı-normallik (semi-normal) [10] kavramlarını tanımlamıştır.

Bu tez çalışmasının temel amacı çoklu topolojik uzaylar üzerindeki çalışmaları daha ileriye taşımaktır. Bunun için, ilk olarak çoklu küme kavramı, temel topolojik kavramlar ve bunlarla ilgili çeşitli özellikler, teoremler ve örnekler verilecektir. Çoklu topolojik uzaylardan bahsedilerek çoklu süreklilik, çoklu homeomorfizm gibi kavramlar ve çoklu ayırma aksiyomları ifade edilecektir.

Ardından çoklu topolojik uzaylarda yarı çoklu açık (sm-açık) ve yarı çoklu kapalı küme (sm-kapalı) kavramları tanımlanacak ve bazı önemli özellikler ispatlanacaktır. Yarı çoklu süreklilik (sm_t-sürekli, $t = 1, 2, 3$) tanımları verilerek yarı çoklu ayırma aksiyomları (sm-T_i ($i = 0, 1, 2$), sm_t-regüler, sm_t-normal, sm_t-T_3, sm_t-T_4 ($t = 1, 2, 3$)) karakterize edilecektir. Ayrıca aralarındaki çeşitli ilişkiler gösterilerek kalıtsallık özellikleri incelenecektir.

2. BÖLÜM

TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

Bu bölümde topolojik uzaylar, temel topolojik kavramlar, çoklu küme kavramı ve bunlarla ilgili çeşitli özellikler, teoremler ve örnekler verilmiştir.

2.1. Topolojik Uzaylar ve Temel Topolojik Kavramlar

Tanım 2.1.1. ([22]) X boştan farklı bir küme ve τ da X in alt kümelerinin bir sınıfı olsun.

1. $\emptyset, X \in \tau$ dur.
2. $G_{k_1}, G_{k_2}, ..., G_{k_n} \in \tau$ ise $\bigcap_{i=1}^{n} G_{k_i} \in \tau$ dur, yani τ sınıfı sonlu kesişimlere göre kapalıdır.
3. Her $i \in I$ için $G_{k_i} \in \tau$ ise $\bigcup_{i \in I} G_{k_i} \in \tau$ dur, yani τ sınıfı keyfi birleşimlere göre kapalıdır.

Eğer yukarıdaki şartlar sağlanıyorsa τ sınıfına X üzerinde bir *topoloji* ve (X, τ) ikilisine de bir *topolojik uzay* denir.

Örnek 2.1.1. $X = \{a, b, c, d, e\}$ olmak üzere aşağıdaki sınıflar verilsin.

$$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, c\}, \{a, b, d\}, \{a, b, c, d\}\}$$

$$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$$

X kümesi üzerinde τ_1 sınıfı bir topolojidir, ancak τ_2 sınıfı bir topoloji değildir. Çünkü $\{a, b\}, \{b, c\} \in \tau_2$ olmasına rağmen $\{a, b\} \cup \{b, c\} = \{a, b, c\} \notin \tau_2$ dir.

Tanım 2.1.2. ([22]) Bir (X, τ) topolojik uzayında X in elemanlarına *topolojik uzayın noktaları* ve τ nun elemanlarına da *açık kümeler* denir.

Tanım 2.1.3. Bir (X, τ) topolojik uzayında bir $A \subseteq X$ alt kümesi verilsin. A^c kümesi açık ise A ya *kapalı küme* denir. Kapalı kümelerin sınıfı K_τ ile ifade edilir.

Örnek 2.1.2. $X = \{a, b, c, d, e\}$ kümesi üzerinde

$$\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$$

topolojisi verilsin. Açık kümelerin sınıfı τ topolojisidir. Kapalı kümelerin sınıfı ise $K_\tau = \{X, \emptyset, \{b, c, d, e\}, \{a, b, e\}, \{b, e\}, \{a\}\}$ olur.

Örnek 2.1.3. ([22]) X boştan farklı bir küme olsun.

1. $\tau = P(X)$ kuvvet kümesi X kümesi üzerinde bir topolojidir. Bu topopojiye X üzerindeki *ayrık topoloji* veya *diskre topoloji* denir.

2. $\tau = \{X, \emptyset\}$ sınıfı X üzerinde bir topoloji olup bu topolojiye X üzerindeki *ayrık olmayan topoloji* veya *indiskre topoloji* denir.

Örnek 2.1.4. $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesindeki açık aralıklar ve bunların keyfi birleşimlerinden oluşan $\mathcal{U} = \{G \subseteq \mathbb{R} : (x - \epsilon, x + \epsilon) \subseteq G, \epsilon > 0\}$ sınıfı $\mathbb{R}$ üzerinde bir topoloji belirtir, bu topolojiye $\mathbb{R}$ nin standart (alışılmış) topolojisi denir.

Tanım 2.1.4. ([22]) $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinde bir $G \subseteq \mathbb{R}$ alt kümesi verilsin. Eğer her $x \in G$ için $(x - \epsilon_x, x + \epsilon_x) \subseteq G$ olacak şekilde bir $\epsilon_x > 0$ sayısı mevcutsa G kümesine $\mathbb{R}$ de bir *açık küme* denir.

Tanım 2.1.5. ([22]) (X, τ) bir topolojik uzay, $A \subseteq X$ ve $a \in A$ olsun. Eğer $a \in G_a \subseteq A$ olacak şekilde bir $G_a \in \tau$ açık kümesi varsa A kümesine a nın bir *komşuluğu* denir. Eğer A açık bir küme ise A ya bir *açık komşuluk* denir.

Örnek 2.1.5. $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi, $\mathcal{U}$ standart topolojisi ile verilsin. Buna göre $[-1, 0]$ kapalı aralığı $-\dfrac{1}{2}$ nin bir komşuluğudur. Fakat -1 in bir komşuluğu değildir.

Tanım 2.1.6. ([22]) (X, τ) bir topolojik uzay ve $\mathfrak{B}$ da X in açık alt kümelerinin bir sınıfı olsun.

1. $\mathfrak{B}$ sınıfının bir $\mathfrak{B}'$ alt sınıfı için $\bigcup\limits_{B_i \in \mathfrak{B}' \subseteq \mathfrak{B}} B_i \in \tau$ ise, yani τ daki her bir G açık kümesi $\mathfrak{B}$ nin bir alt sınıfı üzerinden birleşim olarak yazılabiliyorsa, $\mathfrak{B}$ sınıfına τ topolojisi için bir *baz* denir.

2. Diğer bir ifadeyle, $\mathfrak{B}$ sınıfı τ topolojisi için bir *baz* dır ancak ve ancak her $G \in \tau$ ve her $x \in G$ için $x \in B_x \subseteq G$ olacak şekilde bir $B_x \in \mathfrak{B}$ vardır.

Örnek 2.1.6. 1. $\mathfrak{B} = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R} \text{ ve } a < b\}$ sınıfı $\mathbb{R}$ nin alışılmış topolojisi için bir bazdır.

2. $X \neq \emptyset$ bir küme olmak üzere $\mathfrak{B} = \{\{x\} : x \in X\}$ sınıfı X üzerindeki ayrık topoloji için bir bazdır. Ayrık bir uzayda X in her alt kümesi açık olup bir $A \subseteq X$ için $A = \bigcup\limits_{a \in A} \{a\}$ dır. Böylece her açık küme $\mathfrak{B}$ nin elemanlarının birleşimi olarak yazılabilir.

Tanım 2.1.7. ([22]) (X, τ) bir topolojik uzay ve X in açık alt kümelerinin bir sınıfı $\mathcal{A}$ olsun.

1. $\mathcal{A}$ sınıfındaki kümelerin sonlu arakesitlerinden elde edilen $\mathfrak{B}$ sınıfı τ için bir baz ise $\mathcal{A}$ sınıfına τ için bir *alt baz* denir.

2. Diğer bir ifadeyle, $\mathcal{A}$ sınıfı τ için bir *alt baz* dır ancak ve ancak τ daki her açık küme, $\mathcal{A}$ daki kümelerin sonlu arakesitlerinin keyfi birleşimi olarak yazılabilir.

Örnek 2.1.7. $\mathcal{A} = \{(-\infty, b) : b \in \mathbb{R}\} \cup \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$ sınıfı $\mathbb{R}$ nin alışılmış topolojisi için bir alt bazdır. Çünkü, $\mathbb{R}$ deki tüm açık aralıkların sınıfı alışılmış topoloji için bir baz olup her (a,b) açık aralığı $(a,b) = (-\infty, b) \cap (a, \infty)$ biçiminde yazılabilir.

Tanım 2.1.8. ([22]) (X, τ) bir topolojik uzay, $A \subseteq X$ ve $a \in A$ olsun. Eğer $a \in G \subseteq A$ olacak şekilde bir $G \in \tau$ açık kümesi varsa, yani A kümesi a nın bir komşuluğu ise a elemanına A nın bir *iç noktası* denir. A nın tüm iç noktalarının kümesine A nın *içi* denir ve $int(A)$ ile gösterilir.

Teorem 2.1.1. ([22]) (X, τ) bir topolojik uzay ve $A, B \subseteq X$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler sağlanır:

1. $int(A) \subseteq A$ dır.

2. $int(A)$ açıktır.

3. $int(A)$ açıktır ancak ve ancak $int(A) = A$ dır.

4. $int((int(A)) = int(A)$ dır.

5. $int(A)$, A nın kapsadığı en geniş açık kümedir.

6. $A \subseteq B$ ise $int(A) \subseteq int(B)$ dir.

Tanım 2.1.9. ([22]) (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. A kümesini kapsayan en küçük kapalı kümeye A nın *kapanışı* denir ve $cl(A)$ şeklinde gösterilir.

Teorem 2.1.2. ([22]) (X, τ) bir topolojik uzay ve $A, B \subseteq X$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler sağlanır:

1. $A \subseteq cl(A)$ dır.

2. $cl(A)$ kapalıdır.

3. A kapalıdır ancak ve ancak $cl(A) = A$ dır.

4. $cl(cl(A)) = cl(A)$ dır.

5. $cl(A)$, A yı kapsayan en küçük kapalı kümedir.

6. $A \subseteq B$ ise $cl(A) \subseteq cl(B)$ dir.

Tanım 2.1.10. ([22]) (X, τ) topolojik uzayı verilsin. $A \subseteq X$ ve $x \in X$ olsun. Eğer x in her G açık komşuluğu için $(G \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$ ise x noktasına A nın bir *yığılma noktası* denir ve A nın tüm yığılma noktalarının kümesi A' ile gösterilir.

Teorem 2.1.3. ([22]) (X, τ) bir topolojik uzay ve $A, B \subseteq X$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler sağlanır:

1. $A \subseteq B$ ise $A' \subseteq B'$ dır.

2. A kapalıdır ancak ve ancak $A' \subseteq A$ dır.

3. $A \cup A'$ kapalıdır.

4. $cl(A) = A \cup A'$ dır.

Topolojik uzaylarda bir açık küme ile o kümenin kapanışı arasında kalan bütün kümeler yarı-açık küme olarak adlandırılmıştır. Yine kapalı kümeler kullanılarak yarı-kapalı küme kavramı geliştirilmiştir. Bir kapalı küme ile o kümenin içi arasında kalan bütün kümeler de yarı-kapalı küme olarak adlandırılmıştır.

Tanım 2.1.11. ([17]) (X, τ) topolojik uzay olmak üzere bir $A \subseteq X$ alt kümesi verilsin. Eğer $U \subseteq A \subseteq cl(U)$ olacak şekilde bir $U \in \tau$ açık kümesi varsa A kümesine bir *yarı-açık küme* denir.

Bir (X, τ) topolojik uzayındaki tüm yarı-açık kümelerin sınıfı SO_τ ile gösterilir.

Not 2.1.1. Bir (X, τ) topolojik uzayında her açık küme yarı-açıktır.

Teorem 2.1.4. ([17]) (X, τ) topolojik uzayında bir $A \subseteq X$ alt kümesi yarı-açıktır ancak ve ancak $A \subseteq cl(int(A))$ dır.

Teorem 2.1.5. ([17]) (X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere $A \subseteq X$ yarı-açık bir küme ve $U \in \tau$ açık bir küme ise $A \cap U \subseteq X$ alt kümesi de yarı-açıktır.

Tanım 2.1.12. ([5]) (X, τ) topolojik uzay olmak üzere bir $B \subseteq X$ alt kümesi verilsin. Eğer B nin tümleyeni yarı-açık bir küme ise B kümesine bir *yarı-kapalı küme* denir.

Bir (X, τ) topolojik uzayındaki tüm yarı-kapalı kümelerin sınıfı SC_τ ile gösterilir.

Teorem 2.1.6. ([5]) (X, τ) bir topolojik uzay olsun. $B \subseteq X$ yarı-kapalı kümesi verildiğinde $int(F) \subseteq B \subseteq F$ olacak şekilde bir F kapalı kümesi vardır.

Not 2.1.2. Bir (X, τ) topolojik uzayında her kapalı küme yarı-kapalıdır.

Teorem 2.1.7. ([5]) (X, τ) topolojik uzayında bir $B \subseteq X$ alt kümesi yarı-kapalıdır ancak ve ancak $int(cl(B)) \subseteq B$ dir.

2.1.1. Süreklilik ve Yarı Süreklilik

Tanım 2.1.13. ([22]) (X,τ) ve (Y,σ) topolojik uzaylar, $f\colon X\to Y$ bir fonksiyon ve $x_0\in X$ için $y_0=f(x_0)$ olsun. Eğer y_0 ın her $V\in\sigma$ açık komşuluğu için $f(U)\subseteq V$ olacak şekilde x_0 ın bir $U\in\tau$ açık komşuluğu varsa f ye x_0 noktasında *süreklidir* denir. Eğer f fonksiyonu X in her noktasında sürekli ise bu fonksiyona X üzerinde *sürekli fonksiyon* denir.

Teorem 2.1.8. ([22]) (X,τ) ve (Y,σ) topolojik uzaylar olmak üzere bir $f\colon X\to Y$ fonksiyonu verilsin. Aşağıdaki ifadeler denktir:

1. f fonksiyonu süreklidir.
2. Y deki her açık kümenin ters görüntüsü X de açıktır.
3. Y deki her kapalı kümenin ters görüntüsü X de kapalıdır.
4. $\beta\subseteq\sigma$ sınıfı σ topolojisi için bir baz olmak üzere her bir $B\in\beta$ için $f^{-1}(B)\in\tau$ dur.
5. Her $B\subseteq Y$ için $f^{-1}(int(B))\subseteq int(f^{-1}(B))$ dır.
6. Her $A\subseteq X$ için $f(cl(A))\subseteq cl(f(A))$ dır.
7. Her $B\subseteq Y$ için $cl(f^{-1}(B))\subseteq f^{-1}(cl(B))$ dır.

Tanım 2.1.14. ([22]) (X,τ) ve (Y,σ) topolojik uzaylar olmak üzere bir $f\colon X\to Y$ fonksiyonu verilsin.

1. X deki her $U\in\tau$ açık kümesi için $f(U)$ görüntü kümesi Y de açık ise f ye bir *açık fonksiyon* denir.
2. X deki her $K\in K_\tau$ kapalı kümesi için $f(K)$ görüntü kümesi Y de kapalı ise f ye bir *kapalı fonksiyon* denir.

Teorem 2.1.9. ([22]) (X,τ) ve (Y,σ) topolojik uzaylar olmak üzere bir $f\colon X\to Y$ fonksiyonu verilsin.

1. f fonksiyonu birebir ve örten olmak üzere f açıktır ancak ve ancak f kapalıdır.

2. f açıktır ancak ve ancak her $A \subseteq X$ için $f(int(A)) \subseteq int(f(A))$ dır.

3. Birebir ve örten f fonksiyonu sürekli ve açıktır ancak ve ancak her $A \subseteq X$ için $f(int(A)) = int(f(A))$ dır.

4. f kapalıdır ancak ve ancak her $A \subseteq X$ için $cl(f(A)) \subseteq f(cl(A))$ dır.

5. f fonksiyonu sürekli ve kapalıdır ancak ve ancak her $A \subseteq X$ için $cl(f(A)) = f(cl(A))$ dır.

Tanım 2.1.15. ([22]) (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olsun ve $f\colon X \to Y$ fonksiyonu verilsin. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa f fonksiyonuna bir *homeomorfizm* denir.

1. f fonksiyonu birebir ve örtendir.

2. f fonksiyonu süreklidir.

3. f fonksiyonunun tersi $f^{-1}\colon Y \to X$ süreklidir veya f fonksiyonu açıktır veya f fonksiyonu kapalıdır.

Tanım 2.1.16. ([22]) Eğer (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzayları arasında bir homeomorfizm mevcutsa bu uzaylara *homeomorf uzaylar* veya *topolojik eşyapılı uzaylar* denir. Homeomorfizmler altında korunan özelliklere ise *topolojik özellik* adı verilir. Homeomorf olan topolojik uzaylar aynı topolojik özelliklere sahiptir.

Topolojik uzaylarda yarı-sürekli fonksiyonlar aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

Tanım 2.1.17. ([25]) (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar, $f\colon X \to Y$ bir fonksiyon ve $x \in X$ olsun.

1. Eğer $f(x)$ in her $V \in \sigma$ açık komşuluğu için $f(A) \subseteq V$ olacak şekilde x in bir A yarı-açık komşuluğu varsa f ye x noktasında *so*-1-*süreklidir* denir.

2. Eğer $f(x)$ in her B yarı-açık komşuluğu için $f(A) \subseteq B$ olacak şekilde x in bir A yarı-açık komşuluğu varsa f ye x noktasında *so*-2-*süreklidir* denir.

3. Eğer $f(x)$ in her B yarı-açık komşuluğu için $f(U) \subseteq B$ olacak şekilde x in bir $U \in \tau$ açık komşuluğu varsa f ye x noktasında so-3-*süreklidir* denir.

Tanım 2.1.18. ([25]) (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere $f \colon X \to Y$ fonksiyonu verilsin. Eğer f fonksiyonu $i = 1, 2, 3$ için her $x \in X$ noktasında so-i-sürekli ise f ye so-i-*süreklidir* denir.

Levine [17] so-1-sürekli fonksiyonları yarı-sürekli (semi-continuous) fonksiyonlar olarak, Crossley ve Hildebrand [6] ise so-2-sürekli fonksiyonları kararsız (irresolute) fonksiyonlar olarak adlandırmıştır.

Teorem 2.1.10. ([12]) (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere $f \colon X \to Y$ fonksiyonu verilsin.

1. Eğer her $V \in \sigma$ açık kümesi için $f^{-1}(V)$ yarı-açık ise f fonksiyonu so-1-süreklidir.
2. Eğer her B yarı-açık kümesi için $f^{-1}(B)$ yarı-açık ise f fonksiyonu so-2-süreklidir.
3. Eğer her B yarı-açık kümesi için $f^{-1}(B) \in \tau$ ise f fonksiyonu so-3-süreklidir.

Sabit, sürekli ve so-i-sürekli ($i = 1, 2, 3$) fonksiyon kavramları arasındaki ilişkiler aşağıdaki diyagramda verilmiştir [26]:

$$\begin{tikzcd}
 & & so\text{-}2\text{-sürekli} \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\text{sabit} \arrow[r, Rightarrow] & so\text{-}3\text{-sürekli} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & so\text{-}1\text{-sürekli} \\
 & & \text{sürekli} \arrow[ur, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

Şekil 2.1. Sabit, sürekli, so-i-sürekli ($i = 1, 2, 3$) fonksiyonlar arasındaki ilişkiler

2.1.2. Ayırma Aksiyomları

Tanım 2.1.19. ([22]) (X, τ) topolojik uzayı verilsin.

1. Farklı her bir $x, y \in X$ nokta çifti için birini içerip diğerini içermeyen bir $G \subseteq X$ açık kümesi bulunabiliyorsa (X, τ) ya T_0 uzayı denir.

2. Farklı her bir $x, y \in X$ nokta çifti için $x \in G$, $y \notin G$ ve $y \in H$, $x \notin H$ olacak şekilde $G, H \subseteq X$ açık kümeleri bulunabiliyorsa (X, τ) ya T_1 uzayı denir.

3. Farklı her bir $x, y \in X$ nokta çifti için $x \in G$, $y \in H$ ve $G \cap H = \emptyset$ olacak şekilde $G, H \subseteq X$ açık kümeleri bulunabiliyorsa (X, τ) ya T_2 uzayı veya Hausdorff uzay denir.

Örnek 2.1.8. $X = \{1, 2\}$ kümesi verilsin. $\tau = \{\emptyset, X, \{1\}\}$ topolojisine göre (X, τ) bir T_0 uzayıdır. $2 \in G$ ve $1 \notin G$ olacak şekilde $G \in \tau$ bulunmadığından (X, τ) uzayı T_1 değildir.

Örnek 2.1.9. Birden fazla elemanı olan bir X kümesi üzerindeki ayrık olmayan topolojide X in her noktasının tek açık komşuluğu kendisi olduğundan (X, τ) uzayı T_0 değildir.

Örnek 2.1.10. Birden fazla elemanı bulunan bir X kümesi üzerindeki $\tau = P(X)$ ayrık topoloji ile bir Hausdorff uzayıdır. Çünkü farklı x ve y noktaları için $\{x\}$ ve $\{y\}$ kümeleri istenilen ayrık açık kümelerdir.

Teorem 2.1.11. ([22]) (X, τ) topolojik uzayı verilsin.

1. (X, τ) uzayı T_0 dır ancak ve ancak farklı $x, y \in X$ nokta çifti için $cl(\{x\}) \neq cl(\{y\})$ dir.

2. (X, τ) uzayı T_1 dir ancak ve ancak her tek nokta kümesi kapalıdır.

3. (X, τ) uzayı T_2 dir ancak ve ancak $\Delta X = \{(x, x) \colon x \in X\}$ diyagonal kümesi $X \times X$ de kapalıdır.

4. (X, τ) uzayı T_2 ise T_1, T_1 ise T_0 dır.

Teorem 2.1.12. ([22]) Bir T_i, $i = 0, 1, 2$ uzayının her alt uzayı da T_i, $i = 0, 1, 2$ uzayıdır.

Teorem 2.1.13. ([22]) Bir topolojik uzayın T_i, $i = 0, 1, 2$ olma özelliği bir topolojik özelliktir.

Tanım 2.1.20. ([22]) (X, τ) topolojik uzayı verilsin.

1. Her $K \subseteq X$ kapalı alt kümesi ve $x \notin K$ olacak şekildeki her $x \in X$ için $x \in G$, $K \subseteq H$ ve $G \cap H = \emptyset$ olacak şekilde G ve H açık kümeleri mevcutsa (X, τ) ya *regüler uzay* denir.

2. (X, τ) uzayı hem regüler hem de T_1 uzayı ise (X, τ) ya T_3 uzayı denir.

3. Her ayrık $K, T \subseteq X$ kapalı alt kümeleri için $K \subseteq G$, $T \subseteq H$ ve $G \cap H = \emptyset$ olacak şekilde G ve H açık kümeleri mevcutsa (X, τ) ya *normal uzay* denir.

4. (X, τ) uzayı hem normal hem de T_1 uzayı ise (X, τ) ya T_4 uzayı denir.

Örnek 2.1.11. $X = \{a, b, c\}$ kümesi üzerindeki $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}\}$ topolojisi ile regüler uzaydır, fakat T_1 olmadığından T_3 uzayı değildir.

Örnek 2.1.12. $X = \{1, 2, 3\}$ kümesi üzerindeki $\tau = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ topolojisi ile normal uzaydır, fakat regüler uzay değildir. Normaldir, çünkü bu topolojik uzayda ayrık kapalı kümeler sadece $\emptyset$ ve X olup, kendilerinin açık komşuluklarıdır. Regüler değildir, çünkü $\{2, 3\}$ kapalı bir küme ve $1 \notin \{2, 3\}$ olduğu halde 1 ile $\{2, 3\}$ kümelerinin ayrık açık komşulukları bulunamaz. Ayrıca $3 \in G$ ve $1 \notin G$ olacak şekilde $G \in \tau$ bulunmadığından (X, τ) uzayı T_1 değildir, dolayısıyla T_4 uzayı da değildir.

Teorem 2.1.14. ([22]) Aşağıdaki ifadeler sağlanır:

1. Bir topolojik uzayda her açık küme kapalı ise bu uzay regülerdir (normaldir).

2. Ayrık bir topolojik uzay (1) den dolayı regülerdir (normaldir).

3. Regüler bir topolojik uzayın bir alt uzayı da regülerdir.

4. Normal olan topolojik bir uzayın kapalı bir alt uzayı da normaldir.

5. Regüler veya normal olma özellikleri birer topolojik özelliktir.

6. $T_4 \implies T_3 \implies T_2 \implies T_1$ dir.

2.2. Çoklu Kümeler

Tanım 2.2.1. ([14]) Herhangi bir X kümesinden alınan bir M *çoklu kümesi (multiset)* $C_M : X \to \mathbb{N}$ fonksiyonu ile temsil edilir. $X = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$ olmak üzere M çoklu kümesi $M = \{k_1/x_1, k_2/x_2, ..., k_n/x_n\}$ şeklinde gösterilir. Burada $i = 1, ..., n$ için k_i, x_i elemanının tekrar sayısıdır ve $x_i \in^{k_i} M$ şeklinde gösterilir. $C_M(x)$, M çoklu kümesinin elamanı olmayan değerler için sıfır olarak yazılır. Yani $x \notin X$ ise $C_M(x) = 0$ dır.

Tanım 2.2.2. Her $x \in X$ için $C_M(x) = 0$ ya da $C_M(x) = 1$ ise M çoklu kümesi alışılmış (klasik) bir kümedir. Bu bağlamda çoklu kümeler klasik kümelerin bir genellemesidir diyebiliriz.

Örnek 2.2.1. $X = \{a, b, c, d, e\}$ kümesinden alınan $M = \{a, a, b, b, b, c, d\}$ çoklu kümesi $M = \{2/a, 3/b, 1/c, 1/d\}$ biçiminde ifade edilir. Burada $C_M(a) = 2$, $C_M(b) = 3$, $C_M(c) = 1$, $C_M(d) = 1$ ve $C_M(e) = 0$ dır.

Tanım 2.2.3. ([14]) M_1 ve M_2, X kümesinden alınan iki çoklu küme olmak üzere, her $x \in X$ için

1. $C_{M_1}(x) = C_{M_2}(x)$ ise $M_1 = M_2$ dir.

2. $C_{M_1}(x) \leqslant C_{M_2}(x)$ ise $M_1 \sqsubseteq M_2$ dir.

3. $C_A(x) = \max\{C_{M_1}(x), C_{M_2}(x)\}$ ise $A = M_1 \sqcup M_2$ dir.

4. $C_B(x) = \min\{C_{M_1}(x), C_{M_2}(x)\}$ ise $B = M_1 \sqcap M_2$ dir.

5. $C_T(x) = C_{M_1}(x) + C_{M_2}(x)$ ise $T = M_1 \oplus M_2$ dir. $M_1 \oplus M_2$, M_1 ve M_2 çoklu kümelerinin toplamıdır.

6. $C_F(x) = \max\{C_{M_1}(x) - C_{M_2}(x), 0\}$ ise $F = M_1 \ominus M_2$ dir. $M_1 \ominus M_2$, M_1 ve M_2 çoklu kümelerinin farkıdır.

Örnek 2.2.2. $X = \{a,b,c\}$ kümesinden alınan $M_1 = \{3/a, 2/b, 5/c\}$ ve $M_2 = \{1/a, 1/b, 2/c\}$ çoklu kümeleri verilsin. Buna göre,

1. $C_{M_2}(a) \leqslant C_{M_1}(a)$, $C_{M_2}(b) \leqslant C_{M_1}(b)$ ve $C_{M_2}(c) \leqslant C_{M_1}(c)$ olduğundan $M_2 \sqsubseteq M_1$ dir.

2. $C_{M_1 \sqcup M_2}(a) = \max\{C_{M_1}(a), C_{M_2}(a)\} = 3$,
   $C_{M_1 \sqcup M_2}(b) = \max\{C_{M_1}(b), C_{M_2}(b)\} = 2$ ve
   $C_{M_1 \sqcup M_2}(c) = \max\{C_{M_1}(c), C_{M_2}(c)\} = 5$ olduğundan
   $M_1 \sqcup M_2 = \{3/a, 2/b, 5/c\} = M_1$ dir.

3. $C_{M_1 \sqcap M_2}(a) = \min\{C_{M_1}(a), C_{M_2}(a)\} = 1$,
   $C_{M_1 \sqcap M_2}(b) = \min\{C_{M_1}(b), C_{M_2}(b)\} = 1$ ve
   $C_{M_1 \sqcap M_2}(c) = \min\{C_{M_1}(c), C_{M_2}(c)\} = 2$ olduğundan
   $M_1 \sqcap M_2 = \{1/a, 1/b, 2/c\} = M_2$ dir.

4. $M_1 \oplus M_2 = \{4/a, 3/b, 7/c\}$ dir.

5. $M_1 \ominus M_2 = \{2/a, 1/b, 3/c\}$ dir.

Tanım 2.2.4. ([14]) X bir küme olmak üzere $M^* = \{x \in X : C_M(x) > 0\}$ şeklinde tanımlanan kümeye M çoklu kümesinin *destek kümesi* denir. M^* destek kümesi, X in bir alt kümesi olup alışılmış bir kümedir.

Tanım 2.2.5. ([15]) Her $x \in X$ için $C_M(x) = 0$ ise $M = \{\ \} = \emptyset$ kümesi çoklu boş kümedir.

Tanım 2.2.6. ([15]) Bir M çoklu kümesinin eleman sayısı $|M|$ ile gösterilir. $|M| = \sum\limits_{x \in X} C_M(x)$ dir.

Örnek 2.2.3. $X = \{a,b,c\}$ kümesinden alınan bir $M = \{5/a, 3/b, 0/c\}$ çoklu kümesi verilsin. Burada destek kümesi $M^* = \{a,b\}$ ve M çoklu kümesinin eleman sayısı $|M| = \sum\limits_{x \in X} = C_M(a) + C_M(b) + C_M(c) = 5 + 3 + 0 = 8$ dir.

Tanım 2.2.7. ([14]) X kümesi çoklu kümenin inşa edildiği elemanların kümesi olmak üzere, $[X]^w$ çoklu küme uzayı, elemanlarının hiçbiri w dan fazla tekrar etmeyen ve elemanları X de yer alan tüm çoklu kümelerin sınıfıdır. $[X]^\infty$ ise

X üzerinde tanımlı bütün çoklu kümelerin uzayıdır ve bu çoklu kümelerin elemanlarının tekrar sayısı sınırsızdır.

$X = \{x_1, x_2, x_3, ...x_k\}$ için

$[X]^w = \{\{m_i/x_i\} \mid i = 1, 2, ..., k; m_i \in \{0, 1, 2, ..., w\}\}$ dır.

Örnek 2.2.4. $X = \{a, b\}$ için

$$[X]^3 = \{\{3/a, 3/b\}, \{3/a, 2/b\}, \{3/a, 1/b\}, \{3/a\}, \{2/a, 3/b\}, \{2/a, 2/b\}, \{2/a, 1/b\},$$
$$\{2/a\}, \{1/a, 3/b\}, \{1/a, 2/b\}, \{1/a, 1/b\}, \{1/a\}, \{3/b\}, \{2/b\}, \{1/b\}\}$$

olur.

Tanım 2.2.8. ([14]) X bir küme ve $[X]^w$ de elemanları X de olan çoklu kümelerin sınıfı olsun. Herhangi bir $M \in [X]^w$ çoklu kümesinin tümleyeni M^c, her $x \in X$ için $C_{M^c}(x) = m - C_M(x)$ şeklinde tanımlıdır ve yine $[X]^w$ uzayının elemanı olur.

Örnek 2.2.5. $M = \{2/a, 1/b, 2/c\} \in [X]^3$ için $M^c = \{1/a, 2/b, 1/c\}$ dir.

Tanım 2.2.9. ([14]) M_2, M_1 çoklu kümesinin bir çoklu alt kümesi olsun.

1. Her $x \in M_2$ için $C_{M_2}(x) = C_{M_1}(x)$ ise M_2 ye M_1 in *çoklu tam alt kümesi* denir.

2. Bazı $x \in M_2$ için $C_{M_2}(x) = C_{M_1}(x)$ ise M_2 ye M_1 in *çoklu kısmi alt kümesi* denir.

3. $M_1^* = M_2^*$ ve $x \in M_2^*$ için $C_{M_2}(x) \leqslant C_{M_1}(x)$ ise M_2 ye M_1 in *çoklu dolgun alt kümesi* denir.

Örnek 2.2.6. $M = \{1/a, 2/b, 5/c\}$ çoklu kümesi verilsin.

1. $\{1/a, 2/b\}$ çoklu alt kümesi M nin çoklu tam ve çoklu kısmi tam alt kümesidir. Fakat çoklu dolgun alt kümesi değildir.

2. $\{1/a, 2/b, 3/c\}$ çoklu alt kümesi M nin çoklu kısmi ve çoklu dolgun alt kümesidir. Fakat çoklu tam alt kümesi değildir.

3. $\{1/a, 1/b\}$ çoklu alt kümesi M nin çoklu kısmi alt kümesidir. Fakat ne çoklu tam ne de çoklu dolgun alt kümesidir.

Tanım 2.2.10. ([14]) $M \in [X]^w$ çoklu kümesi verilsin.

1. M nin çoklu tam kuvvet kümesi $PW(M)$ şeklinde gösterilir ve M nin bütün çoklu tam alt kümelerinin kümesidir. $PW(M)$ nin eleman sayısı 2^n dir. Burada n, M^* destek kümesinin eleman sayısıdır.

2. M nin çoklu dolgun kuvvet kümesi $PF(M)$ şeklinde gösterilir ve M nin bütün çoklu dolgun alt kümelerinin kümesidir.

Örnek 2.2.7. $M = \{2/a, 3/b, 1/c\}$ çoklu kümesi verilsin.

1. M nin çoklu tam kuvvet kümesi $PW(M) = \{\emptyset, M, \{2/a\}, \{3/b\}, \{1/c\}, \{2/a, 3/b\}, \{2/a, 1/c\}, \{3/b, 1/c\}\}$ dir.

2. M nin çoklu dolgun kuvvet kümesi $PF(M) = \{M, \{2/a, 2/b, 1/c\}, \{2/a, 1/b, 1/c\}, \{1/a, 3/b, 1/c\}, \{1/a, 2/b, 1/c\}, \{1/a, 1/b, 1/c\}\}$ dir.

Tanım 2.2.11. ([14]) $M \in [X]^w$ çoklu kümesi verilsin. M nin çoklu kuvvet kümesi $P(M)$ şeklinde gösterilir ve M nin bütün alt kümelerinin kümesidir, yani $N \in P(M)$ dir ancak ve ancak $N \subseteq M$ dir. Eğer $N = \emptyset$ ise $N \in^1 P(M)$ dir. Eğer $N \neq \emptyset$ ise $N \in^k P(M)$ dir, burada $k = \prod_z \binom{|[M]_z|}{|[N]_z|}$, z N nin farklı elemanları, $|[M]_z| = m$ ancak ve ancak $z \in^w M$ ve $|[N]_z| = n$ ancak ve ancak $z \in^n N$ dir. Buna göre,

$$\binom{|[M]_z|}{|[N]_z|} = \binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

yazılabilir.

Tanım 2.2.12. ([15]) Bir çoklu kümenin kuvvet kümesi, çoklu kuvvet kümesinin destek kümesi olarak tanımlanır ve $P^*(M)$ şeklinde gösterilir.

Teorem 2.2.1. ([14]) $M = \{m_1/x_1, m_2/x_2, m_3/x_3, ..., m_n/x_n\}$ çoklu kümesi ve $P(M)$ çoklu kuvvet kümesi verilsin. $P(M)$ nin destek kümesi olan $P^*(M)$ ise M çoklu kümesinin kuvvet kümesidir ve $P^*(M)$ nin eleman sayısı

$$|P^*(M)| = \prod_{i=1}^{n}(1+m_i)$$

dir.

Örnek 2.2.8. $M = \{2/a, 3/b\}$ çoklu kümesi verilsin.

1. M nin çoklu kuvvet kümesi
   $P(M) = \{M, \emptyset, \{2/a, 2/b\}/3, \{2/a, 1/b\}/3, \{1/a, 3/b\}/2, \{1/a, 2/b\}/6,$
   $\{1/a, 1/b\}/6, \{2/a\}/1, \{1/a\}/2, \{3/b\}/1, \{2/b\}/3, \{1/b\}/3\}$ dür.
2. M nin kuvvet kümesi veya $P(M)$ nin destek kümesi
   $P^*(M) = \{M, \emptyset, \{2/a, 2/b\}, \{2/a, 1/b\}, \{1/a, 3/b\}, \{1/a, 2/b\}, \{1/a, 1/b\},$
   $\{2/a\}, \{1/a\}, \{3/b\}, \{2/b\}, \{1/b\}\}$ dir.

2.2.1. Çoklu Kümelerde Fonksiyonlar

Tanım 2.2.13. ([14]) M_1 ve M_2, X kümesinden alınan iki çoklu küme olsun. M_1 ve M_2 çoklu kümelerinin kartezyen çarpımı

$$M_1 \times M_2 = \{(m/x, n/y)/mn : x \in^m M_1, y \in^n M_2\}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 2.2.9. $M_1 = \{2/x, 3/y\}$ ve $M_2 = \{4/z\}$ çoklu kümelerinin kartezyen çarpımı $M_1 \times M_2 = \{(2/x, 4/z)/8, (3/y, 4/z)/12\}$ dir.

Teorem 2.2.2. ([14]) Boştan farklı M_1 ve M_2 çoklu kümeleri verildiğinde $C_{M_1 \times M_2}[(x, y)] = C_{M_1}(x).C_{M_2}(y)$ ve $\mid M_1 \times M_2 \mid = \mid M_1 \mid \times \mid M_2 \mid$ dir.

Tanım 2.2.14. ([14]) $M \times M$ kümesinin bir çoklu alt kümesi $\mathcal{R}$ olsun. $\mathcal{R}$ nin her $(m/x, n/y)$ elemanı $C_1(x, y).C_2(x, y)$ tekrar sayısına sahip ise $\mathcal{R}$ ye M üzerinde bir *çoklu küme bağıntısı* denir ve bu bağıntı $m/x \ \mathcal{R} \ n/y$ şeklinde gösterilir. Burada $C_1(x, y)$ ve $C_2(x, y)$, $(m/x, n/y)$ elemanındaki sırasıyla x ve y nin tekrar sayısını göstermektedir ve $C_1(x, y) = m$, $C_2(x, y) = n$ dir.

Tanım 2.2.15. ([14]) M üzerinde tanımlı bir $\mathcal{R}$ çoklu küme bağıntısının tanım ve değer kümeleri aşağıdaki gibi tanımlanır:

$Dom\mathcal{R} = \{x \in^r M : \exists y \in^s M$ öyle ki $r/x\ \mathcal{R}\ s/y\}$ ve

$C_{Dom\mathcal{R}}(x) = sup\{C_1(x,y) : x \in^\tau M\}$ dir.

$Ran\mathcal{R} = \{y \in^s M : \exists x \in^r M$ öyle ki $r/x\ \mathcal{R}\ s/y\}$ ve

$C_{Ran\mathcal{R}}(x) = sup\{C_2(x,y) : x \in^\tau M\}$ dir.

Örnek 2.2.10. $M = \{7/x, 10/y, 14/z\}$ çoklu kümesi üzerinde tanımlı $\mathcal{R} = \{(1/x, 3/y)/3, (4/x, 2/x)/8, (6/x, 10/z)/60, (7/y, 5/x)/35, (10/y, 12/z)/120, (6/z, 6/z)/36, (11/z, 9/y)/99, (13/z, 4/x)/52\}$ çoklu küme bağıntısı verilsin. Burada $Dom\mathcal{R} = \{6/x, 10/y, 13/z\}$ ve $Ran\mathcal{R} = \{5/x, 9/y, 12/z\}$ dir.

Tanım 2.2.16. ([14]) $\mathcal{R}$ çoklu küme bağıntısının tersi

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(n/y, m/x)/mn : (m/x, n/y) \in^{mn} \mathcal{R}\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.17. ([13]) $C_1(x,y)$ tekrar sayısına sahip $(m/x, n/y) \in f$ olacak şekilde her $m/x \in Domf$ elemanını yalnız bir $n/y \in Ranf$ elemanına eşleyen f çoklu küme bağıntısına *çoklu küme fonksiyonu (m-fonksiyon)* denir.

Örnek 2.2.11. $M_1 = \{7/x, 5/y\}$ ve $M_2 = \{2/a, 6/b\}$ iki çoklu küme olmak üzere, M_1 den M_2 ye bir çoklu küme fonksiyonu $f = \{(7/x, 2/a)/7, (5/y, 6/b)/5\}$ şeklinde yazılabilir.

Tanım 2.2.18. ([13]) f bir çoklu küme fonksiyonu olsun.

1. $Domf$ kümesindeki farklı iki elemanın f altındaki görüntüsünün de farklı olması ve her $(x,y) \in f$ için $C_1(x,y) \leqslant C_2(x,y)$ şartının sağlanması durumunda f çoklu küme fonksiyonuna *birebir m-fonksiyon* denir.

2. $Ranf$ kümesi *co-$Domf$* kümesine eşit olması ve her $(x,y) \in f$ için $C_1(x,y) \geqslant C_2(x,y)$ şartının sağlanması durumunda f çoklu küme fonksiyonuna *örten m-fonksiyon* denir.

3. f çoklu küme fonksiyonu hem birebir hem örten ve her $(x,y) \in f$ için $C_1(x,y) = C_2(x,y)$ şartını sağlıyor ise f çoklu küme fonksiyonuna *birebir ve örten m-fonksiyon* denir.

Örnek 2.2.12.

1. $f_1\colon \{5/a\} \to \{10/x\}$ olmak üzere $f = \{(5/a, 10/x)/5\}$ şeklinde tanımlı f_1 m-fonksiyonu birebirdir.

2. $f_2\colon \{10/a\} \to \{5/x\}$ olmak üzere $f = \{(10/a, 5/x)/10\}$ şeklinde tanımlı f_2 m-fonksiyonu örtendir.

3. $f_3\colon \{5/a, 4/b\} \to \{4/x, 5/y\}$ olmak üzere $f = \{(5/a, 5/y)/5, (4/b, 4/x)/4\}$ şeklinde tanımlı f_3 m-fonksiyonu birebir ve örtendir.

Tanım 2.2.19. ([13]) $f\colon M \to N$ çoklu küme fonksiyonu verilsin. Eğer f^{-1} ile gösterilen ters çoklu küme bağıntısı yine bir m-fonksiyon oluyorsa $f^{-1}\colon N \to M$ çoklu küme bağıntısına f nin *ters çoklu küme fonksiyonu (ters m-fonksiyon)* denir.

Teorem 2.2.3. ([13]) $f\colon M \to N$ çoklu küme fonksiyonu verilsin.

1. $f^{-1}\colon N \to M$ bir m-fonksiyondur ancak ve ancak f birebir ve örtendir.

2. $f^{-1}\colon N \to M$ bir m-fonksiyon ise f^{-1} de birebir ve örtendir.

Teorem 2.2.4. ([13]) $f\colon M \to N$ bir çoklu küme fonksiyonu olmak üzere M nin boştan farklı M_1 ve M_2 alt kümeleri verilsin. Buna göre aşağıdaki ifadeler sağlanır:

1. $M_1 \sqsubseteq M_2$ ise $f(M_1) \sqsubseteq f(M_2)$ dir.

2. $f(M_1 \sqcup M_2) = f(M_1) \sqcup f(M_2)$ dir.

3. $f(M_1 \sqcap M_2) \sqsubseteq f(M_1) \sqcap f(M_2)$ dir.

4. $f(M_1 \oplus M_2) = f(M_1) \oplus f(M_2)$ dir.

5. $f(M_1 \ominus M_2) \sqsubseteq f(M_1) \ominus f(M_2)$ dir.

3. BÖLÜM

ÇOKLU TOPOLOJİK UZAYLAR

Bu bölümde çoklu topolojik uzaylardan bahsedilerek, çoklu baz-altbaz, çoklu süreklilik, çoklu homeomorfizm gibi kavramlar ve çoklu ayırma aksiyomları ifade edilmiştir.

3.1. Çoklu Topolojik Uzaylar

Tanım 3.1.1. ([14]) X boştan farklı bir küme, $M \in [X]^w$ ve $\tau \subseteq P^*(M)$ olsun. τ aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa M nin çoklu küme topolojisi olarak adlandırılır.

1. M çoklu kümesi ve $\emptyset$, τ dadır.
2. τ nun keyfi sayıdaki alt kümelerinin çoklu birleşimleri τ dadır.
3. τ nun sonlu sayıdaki alt kümelerinin çoklu kesişimleri τ dadır.

Matematiksel olarak (X, τ) çoklu topolojik uzayı, $M \in [X]^w$ çoklu kümesi ve M üzerinde $\tau \subseteq P^*(M)$ çoklu topolojik uzayından oluşan sıralı bir çifttir. τ sınıfı elemanları çoklu küme olan alışılmış bir kümedir. Çoklu küme topolojisi, kısaca m-topoloji olarak ifade edilir.

Klasik topoloji, kümelerin kümesi olarak tanımlanırken m-topoloji ise çoklu kümelerin kümesi olarak tanımlanır. Üstelik klasik topolojide τ, kuvvet kümesinin bir alt sınıfıdır, ancak τ m-topolojisi çoklu kuvvet kümesinin destek kümesinin bir alt sınıfıdır.

M çoklu kümesi üzerinde tanımlanan τ m-topoloji, *çoklu açık (m-açık) küme* denilen M nin çoklu alt kümelerinin bir sınıfıdır. Burada $\emptyset$ ve M nin ikisi de m-açıktır. Ayrıca m-açık kümelerin keyfi çoklu birleşimleri ve sonlu çoklu kesişimleri de m-açıktır.

Örnek 3.1.1. ([14]) $[X]^w$ da herhangi bir M çoklu kümesi verilsin.

1. M nin çoklu kuvvet kümesinin destek kümesi olan $P^*(M)$ sınıfı, M üzerinde bir m-topoloji olup, bu topolojiye *ayrık m-topoloji* veya *diskre m-topoloji* denir.

2. Sadece M ve $\emptyset$ den oluşan sınıf da M üzerinde bir m-topoloji olup, *ayrık olmayan m-topoloji* veya *indiskre m-topoloji* olarak adlandırılır.

3. M nin çoklu tam kuvvet kümesi olan $PW(M)$ sınıfı M üzerinde bir m-topolojidir.

4. M nin çoklu dolgun kuvvet kümesi olan $PF(M)$ sınıfı M üzerinde bir m-topoloji değildir. Çünkü $\emptyset$, $PF(M)$ ye ait değildir. $PF(M) \cup \{\emptyset\}$ sınıfı ise M üzerinde bir m-topoloji olur.

5. M nin çoklu kısmi alt kümelerinin bir τ sınıfı m-topoloji değildir. Örneğin, $M = \{2/x, 4/y\}$ çoklu kümesi verilsin. $A = \{2/x, 3/y\}$ ve $B = \{1/x, 4/y\}$ M nin çoklu kısmi alt kümeleridir. $A \sqcap B = \{1/x, 3/y\}$, M nin çoklu kısmi alt kümesi olmadığından τ sonlu çoklu kesişim altında kapalı değildir.

3.2. Çoklu Bazlar ve Çoklu Altbazlar

Tanım 3.2.1. ([14]) M bir çoklu küme olsun. $[X]^w$ de M üzerindeki bir m-topolojisi için *çoklu baz (m-baz)*, aşağıdaki şartları sağlayan, M nin çoklu alt kümelerinin bir $\mathfrak{B}$ sınıfıdır.

1. Her $x \in^m M$ ve bazı $m > 0$ için, m/x i içeren en az bir $B \in \mathfrak{B}$ m-baz elemanı vardır. Yani, M nin ayırt edilemeyen her elemanı için, $\mathfrak{B}$ de, M dekiyle aynı çokluğa sahip en az bir m-baz elemanı vardır.

2. Eğer m/x, M ve N m-baz elemanlarının kesişimine ait ise m/x i içeren en az bir B m-baz elemanı vardır öyle ki her $y \neq x$ için $C_B(x) = C_{M \sqcap N}(x)$ ve $C_B(y) \leqslant C_{M \sqcap N}(y)$ olmak üzere $B \sqsubseteq M \sqcap N$ dir.

Not 3.2.1. ([14]) Eğer bir $\mathfrak{B}$ sınıfı, çoklu bazın koşullarını sağlıyorsa, $\mathfrak{B}$ tarafından üretilen m-topoloji şu şekilde tanımlanır:

Her bir $x \in^k U$ için, $x \in^k B$ ve her $y \neq x$ için $C_B(y) \leqslant C_U(y)$ olacak şekilde en az bir $B \in \mathfrak{B}$ m-baz elemanı varsa, M nin bir U çoklu alt kümesi M de m-açıktır, yani U, τ m-topolojisinin bir elemanıdır.

Burada her bir m-baz elemanının aynı zamanda τ m-topolojisinin de elemanı olduğuna dikkat edelim.

Teorem 3.2.1. ([15]) Bir $\mathfrak{B}$ m-bazı tarafından üretilen τ sınıfı $[X]^w$ de M üzerinde bir m-topolojidir.

Teorem 3.2.2. ([15]) M, $[X]^w$ de bir çoklu küme ve $\mathfrak{B}$, M üzerindeki bir m-topoloji için bir m-baz olsun. Buna göre τ sınıfı, $\mathfrak{B}$ m-bazının elemanlarının tüm çoklu birleşimlerinin sınıfına eşittir.

Tanım 3.2.2. ([15]) τ ve τ', $[X]^w$ da verilen bir M çoklu kümesi üzerinde iki m-topoloji olsun. Eğer $\tau \subseteq \tau'$ ise τ', τ dan *incedir* veya τ, τ' dan *kabadır* denir. $\tau \subseteq \tau'$ veya $\tau' \subseteq \tau$ oluyorsa τ ile τ' *karşılaştırılabilir* denir.

Teorem 3.2.3. ([15]) $\mathfrak{B}$ ve $\mathfrak{B}'$, $[X]^w$ de M üzerindeki sırasıyla τ ve τ' m-topolojileri için m-bazlar olsun. Buna göre aşağıdaki ifadeler denktir:

1. τ', τ dan incedir.

2. Her $x \in^m M$ ve m/x elemanını içeren her $B \in \mathfrak{B}$ m-baz elemanı için $C_{B'}(x) \leqslant C_B(x)$ olacak şekilde m/x elemanını içeren bir $B' \in \mathfrak{B}'$ m-baz elemanı mevcuttur.

Not 3.2.2. ([15]) $\{\{m/x\} : x \in^m M\}$sınıfı, $PW(M)$ m-topolojisi için bir m-bazdır. Genel topolojide, $\{\{x\} : x \in X\}$ topolojisi, ayrık topoloji için bir bazdır, ancak çoklu topolojilerde, $\{\{m/x\} : x \in^m M\}$ sınıfı ayrık m-topoloji için bir m-baz değildir.

Tanım 3.2.3. ([15]) M çoklu kümesi üzerinde verilen τ m-topolojisinin bir alt sınıfı $\mathcal{A}$ olsun. Eğer $\mathcal{A}$ nin elemanlarının tüm sonlu çoklu kesişimlerinin sınıfı τ için bir m-baz oluyorsa, $\mathcal{A}$ alt sınıfına *alt çoklu baz (alt m-baz)* denir.

$\mathcal{A}$ alt m-bazı tarafından üretilen m-topoloji şu şekilde tanımlanır:

$\mathcal{A}$ nin elemanlarının tüm sonlu çoklu kesişimlerinin çoklu birleşimlerinin sınıfı τ m-topolojisini verir.

Teorem 3.2.4. ([15]) (M, τ) bir m-topolojik uzay ve $\mathcal{A}$, M nin alt kümelerinin bir sınıfı olsun. Buna göre, $\mathcal{A}$ alt sınıfı τ yu üretir ancak ve ancak $\mathcal{A}$, τ için bir alt m-bazdır.

Tanım 3.2.4. ([15]) (M, τ) bir m-topolojik uzay ve N, M nin bir çoklu alt kümesi olsun. $\tau_N = \{U' = N \sqcap U \colon U' \in \tau\}$ sınıfı N üzerinde bir m-topoloji olup, τ m-topolojisinin alt m-topolojisi olarak adlandırılır. (N, τ_N), (M, τ) nin bir alt uzayıdır ve N nin m-açık kümeleri, M nin tüm m-açık kümelerinin N ile çoklu kesişimlerinden oluşur.

Örnek 3.2.1. $M = \{2/a, 3/b, 1/c, 4/d\}$ çoklu kümesi verilsin.
$\tau = \{\emptyset, M, \{1/a\}, \{2/a, 1/b\}, \{1/a, 2/d\}, \{1/a, 1/c\}, \{2/a, 1/b, 2/d\}, \{2/a, 1/b, 1/c\}, \{1/a, 1/c, 2/d\}, \{2/a, 1/b, 1/c, 2/d\}\}$ sınıfı M üzerinde bir m-topolojidir.
$N = \{1/a, 1/b, 3/d\} \sqsubset M$ çoklu alt kümesi verildiğinde
$\tau_N = \{\emptyset, N, \{1/a\}, \{1/a, 1/b\}, \{1/a, 2/d\}, \{1/a, 1/b, 2/d\}\}$ sınıfı da N üzerinde bir m-topolojidir ve (N, τ_N), (M, τ) nun alt uzayı olur.

3.3. Çoklu Kapalı Kümeler

Tanım 3.3.1. ([15]) $[X]^w$ de bir (M, τ) m-topolojik uzayı verilsin. M nin bir N çoklu alt kümesi için $M \ominus N$ m-açık küme ise N ye *çoklu kapalı (m-kapalı) küme* adı verilir.

Örnek 3.3.1. Ayrık m-topolojide her çoklu küme hem m-açık hem de m-kapalı kümedir.

Tanım 3.3.2. ([15]) (M, τ) bir m-topolojik uzay olmak üzere aşağıdaki ifadeler sağlanır:

1. M çoklu kümesi ve $\emptyset$ m-kapalı kümelerdir.

2. m-kapalı kümelerin keyfi çoklu birleşimleri de m-kapalıdır.

3. m-kapalı kümelerin sonlu çoklu birleşimleri de m-kapalıdır.

Teorem 3.3.1. ([15]) N, $[X]^w$ de bir (M,τ) m-topolojik uzayının bir alt uzayı olsun.

1. Bir A çoklu kümesi N de m-kapalıdır ancak ve ancak A, M nin m-kapalı kümelerinin N ile kesişimine eşittir.

2. Bir A çoklu kümesi N de m-kapalı ve N çoklu kümesi de M de m-kapalı ise, o zaman A çoklu kümesi M de m-kapalı olur.

3.4. Çoklu Kümelerde İç, Kapanış ve Yığılma Noktaları

Tanım 3.4.1. ([15]) $[X]^w$ de bir (M,τ) m-topolojik uzayı verilsin. $A \sqsubseteq M$ olsun. A nın içerdiği tüm m-açık kümelerin çoklu birleşimine A nın *çoklu içi* denir ve $mint(A)$ olarak gösterilir.

$$mint(A) = \sqcup\{G \sqsubseteq M : G \ m\text{-açık küme ve } G \sqsubseteq A\} \text{ ve}$$

$$C_{mint(A)}(x) = \max\{C_G(x) : G \sqsubseteq A\} \text{ dır.}$$

Tanım 3.4.2. ([15]) $[X]^w$ de bir (M,τ) m-topolojik uzayı verilsin. $B \sqsubseteq M$ olsun. B yi içeren tüm m-kapalı kümelerin çoklu kesişimine B nin *çoklu kapanışı* denir ve $mcl(A)$ olarak gösterilir.

$$mcl(A) = \sqcap\{K \sqsubseteq M : K \ m\text{-kapalı küme ve } A \sqsubseteq K\} \text{ ve}$$

$$C_{mcl(B)}(x) = \min\{C_K(x) : B \sqsubseteq K\} \text{ dır.}$$

Tanım 3.4.3. ([15]) (M,τ) m-topolojik uzayı verilsin. $x \in M$ ve $N \sqsubseteq M$ olsun. τ da $x \in^k V$ ve her $y \neq x$ için $C_V(y) \leqslant C_N(y)$ olacak şekilde bir V m-açık kümesi varsa, N ye $\{k/x\}$ in bir *çoklu komşuluğu (m-komşuluğu)* denir. Yani M deki $\{k/x\}$ in bir m-komşuluğu, $\{k/x\}$ i içeren herhangi bir m-açık küme anlamına gelir. Ayrıca burada $\{k/x\}$ e N nin bir *çoklu iç noktası* denir.

Tanım 3.4.4. ([15]) $[X]^w$ da (M,τ) m-topolojik uzayı verilsin. $A \sqsubseteq M$ ve $\{k/x\} \in M$ olsun. $\{k/x\}$ in her m-komşuluğunun A ile çoklu kesişiminde k/x den farklı, sıfır çokluğa sahip olmayan en az bir nokta varsa k/x e A çoklu kümesinin bir *çoklu yığılma noktası* denir. A nın tüm çoklu yığılma noktalarının çoklu kümesi A'' ile gösterilir.

Teorem 3.4.1. ([15]) N, $[X]^w$ de bir (M,τ) m-topolojik uzayının bir alt uzayı olsun. $A \sqsubseteq N$ çoklu kümesi verilsin. $mcl(A)$, A çoklu kümesinin M deki çoklu kapanışını göstermek üzere, A nın N deki çoklu kapanışı $mcl(A) \sqcap N$ olur.

Örnek 3.4.1. $M = \{2/a, 3/b, 1/c\}$ çoklu kümesi üzerinde $\tau = \{\emptyset, M, \{2/a\}, \{3/b\}, \{2/a, 3/b\}\{2/a, 1/c\}\}$ çoklu topolojisi verilsin. Burada m-kapalı kümeler $K_\tau = \{M, \emptyset, \{3/b, 1/c\}, \{2/a, 1/c\}, \{1/c\}, \{3/b\}\}$ şeklindedir. $A = \{2/a, 2/b, 1/c\}$ ve $B = \{1/a, 1/c\}$ çoklu kümeleri verildiğinde $mint(A) = mcl(B) = \{2/a, 1/c\}$ olur.

Örnek 3.4.2. $[X]^w$ da $\tau = P^*(X)$ ayrık m-topoloji verilsin. Bir $A \sqsubseteq X$ için $A'' = \emptyset$ dir. Çünkü her $x \in X$ için $\{k/x\}$ çoklu kümesi k/x in açık bir m-komşuluğudur.

Teorem 3.4.2. ([15]) (M,τ) m-topolojik uzayı verilsin. $A \sqsubseteq M$ olsun. A'', A nın tüm çoklu yığılma noktalarının çoklu kümesi olmak üzere,

$$C_{mcl(A)}(x) = \max\{C_A(x), C_{A''}(x)\}$$

dir.

Not 3.4.1. ([15]) Bir m-topolojik uzayın bir alt kümesi m-kapalıdır ancak ve ancak tüm çoklu yığılma noktalarını içerir.

Teorem 3.4.3. ([15]) (M,τ) m-topolojik uzayı verilsin. $A, B \sqsubseteq M$ olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır:

1. $C_A(x) \leqslant C_B(x)$ ise $C_{A''}(x) \leqslant C_{B''}(x)$ dir.

2. $C_A(x) \leqslant C_B(x)$ ise $C_{mint(A)}(x) \leqslant C_{mint(B)}(x)$ dir.

3. $C_A(x) \leqslant C_B(x)$ ise $C_{mcl(A)}(x) \leqslant C_{mcl(B)}(x)$ dir.

4. $C_{mint(A\sqcap B)}(x) = \min\{C_{mint(A)}(x), C_{mint(B)}(x)\}$ dir.

5. $C_{mcl(A\sqcup B)}(x) = \max\{C_{mcl(A)}(x), C_{mcl(B)}(x)\}$ dir.

3.5. Çoklu Topolojik Uzaylarda Süreklilik ve Çoklu Homeomorfizm

Tanım 3.5.1. ([15]) (M,τ) ve (N,τ') iki m-topolojik uzay olsun. N nin her bir V m-açık çoklu alt kümesi için $f^{-1}(V)$ çoklu kümesi M nin m-açık çoklu alt kümesi oluyorsa $f\colon M \to N$ ye *çoklu sürekli (m-sürekli) çoklu fonksiyon* denir. Burada $f^{-1}(V)$, bazı n ler için $f(m/x) \in^n V$ olacak şekilde M deki bütün m/x noktalarının kümesidir.

Örnek 3.5.1. $M = \{4/a, 3/b, 3/c, 2/d\}$ ve $N = \{6/x, 4/y, 5/z, 3/w\}$ çoklu kümeleri verilsin. $\tau = \{\emptyset, M, \{4/a\}, \{4/a, 3/b\}, \{4/a, 3/b, 3/c\}\}$ ve $\tau' = \{\emptyset, M, \{6/x\}, \{4/y\}, \{6/x, 4/y\}, \{4/y, 5/z, 3/w\}\}$ sırasıyla M ve N üzerinde iki m-topoloji olsun. $f\colon M \to N$ ve $g\colon M \to N$ çoklu küme fonksiyonları aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$f = \{(4/a, 4/y)/4, (3/b, 5/z)/3, (3/c, 3/w)/3, (2/d, 5/z)/2\}$$

$$g = \{(4/a, 6/x)/4, (3/b, 6/x)/3, (3/c, 5/z)/3, (2/d, 3/w)/2\}$$

f çoklu küme fonksiyonu m-süreklidir. Çünkü, N üzerindeki τ' m-topolojisinin her elemanının ters görüntüsü M üzerindeki τ m-topolojisinin bir elemanıdır. Ancak g çoklu küme fonksiyonu m-sürekli değildir. Çünkü, $\{4/y, 5/z, 3/w\} \in \tau'$ için $g^{-1}(\{4/y, 5/z, 3/w\}) = \{3/c, 2/d\} \notin \tau$ dur.

Teorem 3.5.1. ([15]) (M,τ), (N,τ') ve (P,τ'') m-topolojik uzayları verilsin. $f\colon M \to N$ ve $g\colon N \to P$ çoklu küme fonksiyonları m-sürekli ise, bunların bileşkesi olan $g \circ f\colon M \to P$ çoklu küme fonksiyonu da m-süreklidir.

Tanım 3.5.2. (M,τ) ve (N,τ') m-topolojik uzaylar olmak üzere bir $f\colon M \to N$ m-fonksiyonu verilsin.

1. M nin her bir U m-açık çoklu alt kümesi için $f(U)$ çoklu görüntü kümesi N nin m-açık çoklu alt kümesi oluyorsa f ye bir *çoklu açık (m-açık) fonksiyon* denir.

2. M nin her bir K m-kapalı çoklu alt kümesi için $f(K)$ çoklu görüntü kümesi N nin m-kapalı çoklu alt kümesi oluyorsa f ye bir *çoklu kapalı (m-kapalı) fonksiyon* denir.

Tanım 3.5.3. (M,τ) ve (N,τ') m-topolojik uzaylar olsun ve $f\colon M \to N$ m-fonksiyonu verilsin. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa f ye bir *çoklu homeomorfizm (m-homeomorfizm)* denir.

1. f m-fonksiyonu birebir ve örtendir.
2. f m-fonksiyonu m-süreklidir.
3. f m-fonksiyonunun tersi $f^{-1}\colon N \to M$ m-süreklidir veya f m-açık veya f m-kapalı fonksiyondur.

Tanım 3.5.4. (M,τ) ve (N,τ') m-topolojik uzayları arasında bir m-homeomorfizm mevcutsa bu uzaylara *çoklu homeomorf (m-homeomorf) uzaylar* veya *m-topolojik eşyapılı uzaylar* denir. m-homeomorfizmler altında korunan özelliklere ise *m-topolojik özellik* adı verilir.

3.6. Çoklu Ayırma Aksiyomları

Tanım 3.6.1. ([11]) $C_M\colon X \to \mathbb{N}$ verildiğinde $C_M(x) = k$ ve her $x' \in \{x\}^c$ için $C_M(x') = 0$ olacak şekildeki M çoklu kümesine çoklu tam tek nokta kümesi denir ve $M = \{k/x\}$ ile gösterilir. Ayrıca $0 < m \leqslant k$ için $N = \{m/x\}$ çoklu kümesine de çoklu tek nokta kümesi adı verilir.

Örnek 3.6.1. $M = \{2/a, 3/b, 1/c\}$ çoklu kümesi verilsin. Buna göre $\{2/a\}$, $\{3/b\}$ ve $\{1/c\}$ kümeleri çoklu tam tek nokta kümelerdir. Çoklu tek nokta kümeler ise $\{2/a\}$, $\{1/a\}$, $\{3/b\}$, $\{2/b\}$, $\{1/b\}$ ve $\{1/c\}$ dir.

Tanım 3.6.2. ([11]) (M,τ) bir çoklu topolojik uzay olsun. $x_1 \neq x_2$ olmak üzere her $\{k_1/x_1\}$, $\{k_2/x_2\}$ çoklu tek nokta kümeleri için birini içerip diğerini içermeyen en az bir çoklu açık küme varsa, yani $\{k_1/x_1\} \sqsubseteq U$, $\{k_2/x_2\} \not\sqsubseteq U$ veya $\{k_1/x_1\} \not\sqsubseteq V$, $\{k_2/x_2\} \sqsubseteq V$ olacak şekilde U, V çoklu açık kümeleri mevcutsa (M,τ) uzayına çoklu T_0 (m-T_0) uzayı denir.

Teorem 3.6.1. ([11]) Çoklu T_0 uzayı olma özelliği kalıtsal bir özelliktir.

Örnek 3.6.2. ([11]) $M = \{2/a, 3/b, 1/c\}$ çoklu kümesi verilsin ve $\tau = \{\emptyset, M, \{2/a\}, \{3/b\}, \{2/a, 3/b\}, \{2/a, 1/c\}\}$ olsun. (M, τ) çoklu T_0 uzayıdır. $N = \{1/a, 2/b\} \sqsubseteq M$ verilsin. O zaman $\tau_N = \{\emptyset, N, \{1/a\}, \{2/b\}$ dir ve (N, τ_N) alt uzayı da çoklu T_0 olur.

Teorem 3.6.2. ([11]) (M, τ_1) bir çoklu T_0 uzayı ve $\tau_1 \leqslant \tau_2$ ise (M, τ_2) de bir çoklu T_0 uzayıdır.

Tanım 3.6.3. ([11]) (M, τ) bir çoklu topolojik uzay olsun. $x_1 \neq x_2$ olmak üzere her $\{k_1/x_1\}$, $\{k_2/x_2\}$ çoklu tek nokta kümeleri için her birinin diğerini içermeyen m-açık bir m-komşuluğu varsa, yani $\{k_1/x_1\} \sqsubseteq U$, $\{k_2/x_2\} \not\sqsubseteq U$ ve $\{k_1/x_1\} \not\sqsubseteq V$, $\{k_2/x_2\} \sqsubseteq V$ olacak şekilde U, V çoklu açık kümeleri mevcutsa (M, τ) uzayına çoklu T_1 (m-T_1) uzayı denir.

Teorem 3.6.3. ([11]) Her çoklu T_1 uzayı çoklu T_0 uzayıdır.

Not 3.6.1. Theorem 3.6.3 ün tersi genelde doğru değildir.

Örnek 3.6.3. ([11]) Örnek 3.6.2 de verilen (M, τ) çoklu topolojik uzayı çoklu T_0 uzayıdır, fakat çoklu T_1 uzayı değildir. Çünkü her bir $\{2/a\}, \{1/c\} \sqsubseteq M$ için $a \neq c$ dir ve $1/c$ yi içeren tüm çoklu açık kümeler $2/a$ yı da içerir.

Teorem 3.6.4. ([11]) Çoklu T_1 uzayı olma özelliği kalıtsal bir özelliktir.

Not 3.6.2. ([11]) Her $(M, P^*(M))$ ayrık m-topolojik uzayı çoklu T_1 uzayıdır. Fakat M sonlu çoklu kümesi için (M, τ) çoklu T_1 uzayı ise τ ayrık m-topoloji olmak zorunda değildir.

Örnek 3.6.4. ([11]) $M = \{2/a, 3/b, 1/c\}$ çoklu kümesi verilsin ve $\tau = \{\emptyset, M, \{2/a\}, \{3/b\}, \{1/c\}, \{2/a, 3/b\}, \{2/a, 1/c\}, \{3/b, 1/c\}\}$ olsun. (M, τ) uzayı çoklu T_1 dir. Fakat ayrık m-topoloji değildir.

Teorem 3.6.5. ([11]) (M, τ_1) bir çoklu T_1 uzayı ve $\tau_1 \leqslant \tau_2$ ise (M, τ_2) de bir çoklu T_1 uzayıdır.

Tanım 3.6.4. ([11]) (M, τ) bir çoklu topolojik uzay olsun. $x_1 \neq x_2$ olmak üzere her $\{k_1/x_1\}$, $\{k_2/x_2\}$ çoklu tek nokta kümelerinin ayrık çoklu açık m-komşulukları varsa, yani $\{k_1/x_1\} \sqsubseteq U$, $\{k_2/x_2\} \sqsubseteq V$ ve $U \sqcap V = \emptyset$ olacak şekilde U, V çoklu açık kümeleri mevcutsa (M, τ) uzayına çoklu T_2 (m-T_2) veya çoklu Hausdorff (m-Hausdorff) uzayı denir.

Örnek 3.6.5. ([11])

1. Her $(M, P^*(M))$ ayrık m-topolojik uzayı çoklu T_2 uzayıdır.
2. En az iki farklı çoklu tek noktaya sahip her $(M, P^*(M))$ ayrık olmayan m-topolojik uzayı çoklu T_2 uzayı değildir.

Teorem 3.6.6. ([11])

1. Çoklu T_2 uzayı olma özelliği kalıtsal bir özelliktir.
2. (M, τ_1) bir çoklu T_2 uzayı ve $\tau_1 \leqslant \tau_2$ ise (M, τ_2) de bir çoklu T_2 uzayıdır.
3. Her çoklu T_2 uzayı çoklu T_1 uzayıdır.

Tanım 3.6.5. ([11]) (M, τ) bir çoklu topolojik uzay olsun. Her çoklu kapalı F kümesi ve $\{k/x\} \not\sqsubseteq F$ olmak üzere her $\{k/x\}$ tek nokta çoklu kümesi için $F \sqsubseteq U$, $\{k/x\} \sqsubseteq V$ ve $U \sqcap V = \emptyset$ olacak şekilde U, V çoklu açık kümeleri mevcutsa (M, τ) uzayına çoklu regüler (m-regüler) uzay denir.

Tanım 3.6.6. ([11]) (M, τ) bir çoklu topolojik uzay olmak üzere, eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa (M, τ) uzayına çoklu T_3 (m-T_3) uzayı denir.

1. (M, τ) uzayı m-regülerdir.
2. (M, τ) uzayı m-T_1 dir.

Örnek 3.6.6. ([11]) Her $(M, P^*(M))$ ayrık m-topolojik uzayı çoklu T_3 uzayıdır.

Teorem 3.6.7. ([11]) m-regüler (m-T_3) uzay olma özelliği kalıtsaldır, yani bir m-regüler uzayının her alt uzayı da m-regüler (m-T_3) uzayıdır.

Teorem 3.6.8. ([11]) Her m-T_3 uzayı m-regülerdir, fakat tersi genelde doğru değildir.

Örnek 3.6.7. ([11]) $M = \{2/a, 3/b, 1/c\}$ çoklu kümesi verilsin ve $\tau = \{\emptyset, M, \{3/b\}, \{2/a, 1/c\}\}$ olsun. O zaman $K_\tau = \{\emptyset, M, \{2/a, 1/c\}, \{3/b\}\}$ olur. Buna göre, (M, τ) uzayı m-regülerdir, fakat m-T_1 olmadığından m-T_3 uzayı değildir.

Tanım 3.6.7. ([11]) (M, τ) bir çoklu topolojik uzay olsun. $F_1 \sqcap F_2 = \emptyset$ olacak şekilde her çoklu kapalı F_1, F_2 kümeleri için $F_1 \sqsubseteq U$, $F_2 \sqsubseteq V$ ve $U \sqcap V = \emptyset$ olacak şekilde U, V çoklu açık kümeleri mevcutsa (M, τ) uzayına çoklu normal (m-normal) uzay denir.

Tanım 3.6.8. ([11]) (M, τ) bir çoklu topolojik uzay olmak üzere, eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa (M, τ) uzayına çoklu T_4 (m-T_4) uzayı denir.

1. (M, τ) uzayı m-normaldir.
2. (M, τ) uzayı m-T_1 dir.

Teorem 3.6.9. Her m-T_4 uzayı m-normaldir, fakat tersi genelde doğru değildir.

Teorem 3.6.10. ([11]) Bir m-normal (m-T_4) uzayının her kapalı alt uzayı da m-normal (m-T_3) uzayıdır.

4. BÖLÜM

ÇOKLU TOPOLOJİK UZAYLARDA YARI AYIRMA AKSİYOMLARI

Bu bölümde ilk olarak çoklu topolojik uzaylarda yarı çoklu açık ve yarı çoklu kapalı küme kavramları tanımlanmış ve bazı önemli özellikler ispatlanmıştır. Ardından yarı çoklu süreklilik tanımları verilerek yarı çoklu ayırma aksiyomları karakterize edilmiştir. Ayrıca aralarındaki çeşitli ilişkiler gösterilerek kalıtsallık özellikleri incelenmiştir.

4.1. Yarı Çoklu Açık Kümeler

Tanım 4.1.1. $M \in [X]^w$ ve $\tau \subseteq P^*(M)$ olmak üzere (M, τ) m-topolojik uzay olsun. Bir $A \sqsubseteq M$ çoklu alt kümesi verilsin. Eğer $G \sqsubseteq A \sqsubseteq mcl(G)$ olacak şekilde bir G çoklu açık (m-açık) kümesi varsa A çoklu alt kümesine bir *yarı çoklu açık (sm-açık) küme* denir. Bir (M, τ) m-topolojik uzayındaki tüm yarı çoklu açık kümelerin sınıfı S_τ ile gösterilir.

Teorem 4.1.1. Bir (M, τ) m-topolojik uzayında her çoklu açık küme yarı çoklu açıktır. Yani,

$$m\text{-açık küme} \implies sm\text{-açık küme}$$

İspat: Kabul edelim ki $A \sqsubseteq M$ çoklu alt kümesi m-açık olsun. $G \sqsubseteq A \sqsubseteq mcl(G)$ olacak şekildeki G m-açık kümesi A nın kendisi seçilebildiğinden A çoklu kümesi sm-açık olur.

Not 4.1.1. Teorem 4.1.1 in tersi genelde doğru değildir.

Örnek 4.1.1. $M = \{2/a, 3/b, 1/c\}$ çoklu kümesi üzerinde
$\tau = \{\emptyset, M, \{1/a, 2/b\}, \{2/a, 1/c\}, \{1/a\}, \{2/a, 2/b, 1/c\}\}$ m-topolojisi verilsin.

$S_\tau = \{\emptyset, M, \{1/a, 2/b\}, \{2/a, 1/c\}, \{1/a\}, \{2/a, 2/b, 1/c\}, \{2/a, 1/b, 1/c\},$
$\{1/a, 3/b, 1/c\}, \{1/a, 2/b, 1/c\}, \{1/a, 1/b, 1/c\}, \{1/a, 1/b\}, \{1/a, 3/b\}, \{1/a, 1/c\}\}$
olur. Burada $\{1/a, 1/b\}$ çoklu kümesi sm-açık olmasına rağmen m-açık değildir.

Teorem 4.1.2. Bir (M, τ) m-topolojik uzayında bir $A \sqsubseteq M$ çoklu alt kümesi yarı çoklu açıktır ancak ve ancak $A \sqsubseteq mcl(mint(A))$ dır.

İspat: Kabul edelim ki $A \sqsubseteq M$ çoklu alt kümesi sm-açık olsun. Bu durumda $G \sqsubseteq A \sqsubseteq mcl(G)$ olacak şekilde bir G m-açık kümesi vardır. $G \sqsubseteq mint(A)$ ve $mcl(G) \sqsubseteq mcl(mint(A))$ bulunur. Buradan $A \sqsubseteq mcl(G) \sqsubseteq mcl(mint(A))$ elde edilir.

Diğer yandan $A \sqsubseteq mcl(mint(A))$ olsun. $mint(A) \sqsubseteq A \sqsubseteq mcl(mint(A))$ ve $mint(A)$ m-açık olduğundan A çoklu kümesi sm-açıktır.

Teorem 4.1.3. (M, τ) bir m-topolojik uzay olmak üzere $A \sqsubseteq M$ sm-açık bir küme ve $U \sqsubseteq M$ m-açık bir küme ise $A \sqcap U$ kümesi sm-açıktır.

İspat: (M, τ) bir m-topolojik uzay, $A \sqsubseteq M$ sm-açık küme ve $U \sqsubseteq M$ m-açık küme olsun. sm-açık küme tanımından $G \sqsubseteq A \sqsubseteq mcl(G)$ olacak şekilde bir G m-açık kümesi vardır. U ile kesişim alındığında $G \sqcap U \sqsubseteq A \sqcap U \sqsubseteq mcl(G) \sqcap U$ bulunur. Burada G ve U kümeleri m-açık olduğundan $G \sqcap U$ m-açıktır. $A \sqcap U \sqsubseteq mcl(G \sqcap U)$ olduğunu göstermeliyiz. $a \in A \sqcap U$ olsun. O zaman $a \in A$ ve $a \in U$ olur. Burada $G \sqsubseteq A$ olduğundan $a \in G$ veya $a \notin G$ durumları mevcuttur.

(i) $a \in G$ ise $a \in U$ olduğundan $a \in G \sqcap U$ dur. Buradan $a \in mcl(G \sqcap U)$ elde edilir.

(ii) $a \notin G$ ise $a \in A \sqsubseteq mcl(G)$ olduğundan $a \in G'$ bulunur. V, a noktasını içeren herhangi bir m-açık küme olmak üzere $a \in U \sqcap V$ ve $a \in G'$ olduğundan $U \sqcap V$ de a dan farklı bir $b \in G$ vardır. Burada $b \in G$ ve $b \in U$ olduğundan $b \in G \sqcap U$ bulunur. Bu durum a yı içeren herhangi bir V m-açığı için doğru olduğundan $a \in (G \sqcap U)'$ bulunur. O halde $a \in mcl(G \sqcap U)$ olur. Buradan $G \sqcap U \sqsubseteq A \sqcap U \sqsubseteq mcl(G \sqcap U)$ elde edilir, yani $A \sqcap U$ kümesi sm-açıktır.

Teorem 4.1.4. (M, τ) bir m-topolojik uzay ve $\{A_i\}_{i\in I}$ sınıfı da (M, τ) çoklu uzayındaki sm-açık kümelerin bir sınıfı olsun. Buna göre $\bigsqcup_{i\in I} A_i$ birleşim kümesi sm-açıktır.

İspat: (M, τ) bir m-topolojik uzay ve $\{A_i\}_{i\in I}$ sm-açık kümelerin sınıfı olsun. Bu durumda her $i \in I$ için $G_i \sqsubseteq A_i \sqsubseteq mcl(G_i)$ olacak şekilde bir G m-açık kümesi vardır. Her $i \in I$ için G_i m-açık olduğundan $\bigsqcup_{i\in I} G_i$ m-açıktır ve burada $\bigsqcup_{i\in I} G_i \sqsubseteq \bigsqcup_{i\in I} A_i$ dir. $\bigsqcup_{i\in I} A_i \sqsubseteq mcl(\bigsqcup_{i\in I} G_i)$ olduğunu göstermeliyiz. $a \in \bigsqcup_{i\in I} A_i$ olsun. $\exists i_0 \in I$ için $a \in A_{i_0}$ olur. $G_{i_0} \sqsubseteq A_{i_0} \sqsubseteq mcl(G_{i_0})$ olduğundan $a \in mcl(G_{i_0})$ ve dolayısıyla $a \in \bigsqcup_{i\in I} mcl(G_i)$ olur. $\bigsqcup_{i\in I} mcl(G_i) \sqsubseteq mcl(\bigsqcup_{i\in I} G_i)$ olduğundan $a \in mcl(\bigsqcup_{i\in I} G_i)$ elde edilir. O halde $\bigsqcup_{i\in I} A_i \sqsubseteq mcl(\bigsqcup_{i\in I} G_i)$ dir ve $\bigsqcup_{i\in I} A_i$ kümesi sm-açıktır.

Tanım 4.1.2. $M \in [X]^w$ ve $\tau \subseteq P^*(M)$ olmak üzere (M, τ) m-topolojik uzay olsun. Bir $B \sqsubseteq M$ çoklu alt kümesinin tümleyeni yarı çoklu açık ise B çoklu alt kümesine bir *yarı çoklu kapalı (sm-kapalı) küme* denir. Bir (M, τ) m-topolojik uzayındaki tüm yarı çoklu kapalı kümelerin sınıfı K_{S_τ} ile gösterilir.

Teorem 4.1.5. (M, τ) bir m-topolojik uzay ve $B \sqsubseteq M$ sm-kapalı bir küme olsun. Bu durumda $mint(K) \sqsubseteq B \sqsubseteq K$ olacak şekilde bir K çoklu kapalı (m-kapalı) kümesi vardır.

İspat: (M, τ) m-topolojik uzayında bir $B \sqsubseteq M$ sm-kapalı kümesi verilsin. B^c sm-açık olduğundan $G \sqsubseteq B^c \sqsubseteq mcl(G)$ olacak şekilde bir G m-açık kümesi vardır. Buradan $mcl(G)^c \sqsubseteq B \sqsubseteq G^c$ bulunur. G^c m-kapalı ve $mint(G^c) = mcl(G)^c$ olduğundan $K = G^c$ alınırsa $mint(K) \sqsubseteq B \sqsubseteq K$ elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.6. Bir (M, τ) m-topolojik uzayında her çoklu kapalı küme yarı çoklu kapalıdır.

İspat: Kabul edelim ki $B \sqsubseteq M$ çoklu alt kümesi m-kapalı olsun. O zaman $mint(K) \sqsubseteq B \sqsubseteq K$ olacak şekildeki K m-kapalı kümesi B nin kendisi seçilebildiğinden B çoklu kümesi sm-kapalı olur.

Not 4.1.2. Teorem 4.1.6 in tersi genelde doğru değildir.

Örnek 4.1.2. $M = \{2/a, 3/b, 1/c\}$ çoklu kümesi üzerinde
$\tau = \{\emptyset, M, \{1/a, 2/b\}, \{2/a, 1/c\}, \{1/a\}, \{2/a, 2/b, 1/c\}\}$ m-topolojisi verilsin.
$K_\tau = \{M, \emptyset, \{1/a, 1/b, 1/c\}, \{3/b\}, \{1/a, 3/b, 1/c\}, \{1/b\}\}$ dir.
$K_{S_\tau} = \{M, \emptyset, \{1/a, 1/b, 1/c\}, \{3/b\}, \{1/a, 3/b, 1/c\}, \{1/b\}, \{2/b\}, \{1/a\}, \{1/a, 1/b\},$
$\{1/a, 2/b\}, \{1/a, 2/b, 1/c\}, \{1/a, 1/c\}, \{1/a, 3/b\}\}$ olur.
Burada $\{1/a, 2/b\}$ çoklu kümesi sm-kapalı olmasına rağmen m-kapalı değildir.

Teorem 4.1.7. Bir (M, τ) m-topolojik uzayında bir $B \sqsubseteq M$ çoklu alt kümesi yarı çoklu kapalıdır ancak ve ancak $mint(mcl(B)) \sqsubseteq B$ dir.

İspat: Kabul edelim ki $B \sqsubseteq M$ çoklu alt kümesi sm-kapalı olsun. O zaman $mint(K) \sqsubseteq B \sqsubseteq K$ olacak şekilde bir K m-kapalı kümesi vardır. $mcl(B) \sqsubseteq K$ ve $mint(mcl(B)) \sqsubseteq mint(K)$ bulunur. Buradan $mint(mcl(B)) \sqsubseteq mint(K) \sqsubseteq B$ elde edilir.

Diğer yandan $mint(mcl(B)) \sqsubseteq B$ olsun. $mint(mcl(A)) \sqsubseteq B \sqsubseteq mcl(B)$ ve $mcl(B)$ m-kapalı olduğundan B çoklu kümesi sm-kapalıdır.

Örnek 4.1.3. $M = \{2/a, 3/b, 1/c\}$ çoklu kümesi üzerinde $\tau = \{\emptyset, M, \{2/a\}, \{3/b\},$
$\{2/a, 3/b\}\{2/a, 1/c\}\}$ m-topolojisi verilsin. Burada m-kapalı kümeler $K_\tau = \{M, \emptyset,$
$\{3/b, 1/c\}, \{2/a, 1/c\}, \{1/c\}, \{3/b\}\}$ şeklindedir.

$$
\begin{aligned}
P^*(M) = \{&\emptyset, \{2/a, 3/b, 1/c\}, \{2/a, 3/b\}, \{2/a, 2/b, 1/c\}, \{2/a, 2/b\},\\
&\{2/a, 1/b, 1/c\}, \{2/a, 1/b\}, \{2/a, 1/c\}, \{2/a\}, \{1/a, 3/b, 1/c\}, \{1/a, 3/b\},\\
&\{1/a, 2/b, 1/c\}, \{1/a, 2/b\}, \{1/a, 1/b, 1/c\}, \{1/a, 1/b\}, \{1/a, 1/c\}, \{1/a\},\\
&\{3/b, 1/c\}, \{3/b\}, \{2/b, 1/c\}, \{2/b\}, \{1/b, 1/c\}, \{1/b\}, \{1/c\}\}
\end{aligned}
$$

çoklu destek kümesi göz önüne alındığında, yarı çoklu açık (sm-açık) kümelerin sınıfı $S_\tau = \{\emptyset, M, \{2/a\}, \{3/b\}, \{2/a, 3/b\}\{2/a, 1/c\}\}$ elde edilir. Burada $S_\tau = \tau$ olduğu görülür. Ayrıca yarı çoklu kapalı (sm-kapalı) kümelerin sınıfı
$K_{S_\tau} = \{M, \emptyset, \{3/b, 1/c\}, \{2/a, 1/c\}, \{1/c\}, \{3/b\}\}$ dir. $K_{S_\tau} = K_\tau$ elde edilir.

Örnek 4.1.4. $M = \{2/a, 3/b, 1/c\}$ çoklu kümesi üzerinde
$\tau = \{\emptyset, M, \{1/a, 2/b\}, \{2/a, 1/c\}, \{1/a\}, \{2/a, 2/b, 1/c\}\}$ m-topolojisi verilsin.

$K_\tau = \{M, \emptyset, \{1/a, 1/b, 1/c\}, \{3/b\}, \{1/a, 3/b, 1/c\}, \{1/b\}\}$ dir.

$S_\tau = \tau \cup \{\{2/a, 1/b, 1/c\}, \{1/a, 3/b, 1/c\}, \{1/a, 2/b, 1/c\}, \{1/a, 1/b, 1/c\}, \{1/a, 1/b, \},$

$\{1/a, 3/b\}, \{1/a, 1/c\}\}$ dir.

$K_{S_\tau} = K_\tau \cup \{\{2/b\}, \{1/a\}, \{1/a, 1/b\}, \{1/a, 2/b\}, \{1/a, 2/b, 1/c\}, \{1/a, 1/c\},$

$\{1/a, 3/b\}\}$ dir.

Teorem 4.1.8. Bir M çoklu kümesi üzerinde τ ve σ m-topolojileri verilsin. Buna göre, $\tau \leqslant \sigma$ ise $S_\tau \leqslant S_\sigma$ dır.

İspat: (M, τ) ve (M, σ) m-topolojik uzayları verilsin. $\tau \leqslant \sigma$ ve $N \in S_\tau$ olsun. O zaman $G \sqsubseteq N \sqsubseteq mcl(G)$ olacak şekilde bir $G \in \tau$ m-açık kümesi vardır. $\tau \leqslant \sigma$ olduğundan $G \in \sigma$ dır. Buradan $N \in S_\sigma$ elde edilir. O halde $S_\tau \leqslant S_\sigma$ dır.

4.2. Yarı Çoklu Süreklilik

Topolojik uzaylarda yarı-açık kümeler yardımıyla elde edilen üç farklı genelleştirilmiş süreklilik çeşidi olduğu gibi çoklu topolojik uzaylarda da benzer şekilde genelleştirilmiş yarı çoklu süreklilik tanımları verilebilir.

Tanım 4.2.1. (M, τ) ve (N, σ) iki m-topolojik uzay olmak üzere $f\colon (M, \tau) \to (N, \sigma)$ m-fonksiyonu verilsin.

1. Eğer her $H \in \sigma$ için $f^{-1}(H) \in S_\tau$ ise, yani her m-açık kümenin ters görüntüsü sm-açık oluyorsa, f m-fonksiyonu sm_1-süreklidir denir.
2. Eğer her $B \in S_\sigma$ için $f^{-1}(B) \in S_\tau$ ise, yani her sm-açık kümenin ters görüntüsü sm-açık oluyorsa, f m-fonksiyonu sm_2-süreklidir denir.
3. Eğer her $B \in S_\sigma$ için $f^{-1}(B) \in \tau$ ise, yani her sm-açık kümenin ters görüntüsü m-açık oluyorsa, f m-fonksiyonu sm_3-süreklidir denir.

Teorem 4.2.1. Aşağıdaki gerektirmeler sağlanır:

1. Her sm_3-sürekli m-fonksiyonu hem m-süreklidir hem de sm_2-süreklidir.
2. Her m-sürekli m-fonksiyonu sm_1-süreklidir.
3. Her sm_2-sürekli m-fonksiyonu sm_1-süreklidir.

İspat: Tanımlar 3.5.1, 4.2.1 ve Teorem 4.1.1 den elde edilir.

Not 4.2.1. Teorem 4.2.1 de verilen ilişkilerin tersleri genelde doğru değildir.

Teorem 4.2.1 de ifade edilen yarı çoklu süreklilik kavramları arasındaki ilişkiler aşağıdaki diyagramda verilmiştir:

$$\begin{tikzcd}
& m\text{-sürekli} \arrow[dr, Rightarrow] & \\
sm_3\text{-sürekli} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & sm_1\text{-sürekli} \\
& sm_2\text{-sürekli} \arrow[ur, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

Şekil 4.1. m-sürekli ve sm_t-sürekli $(t = 1, 2, 3)$ m-fonksiyonlar arasındaki ilişkiler

4.3. Yarı Çoklu T_0 ve Yarı Çoklu T_1 Uzayları

Tanım 4.3.1. (M, τ) bir m-topolojik uzay olsun. $x_1 \neq x_2$ olmak üzere her $\{c_1/x_1\}$, $\{c_2/x_2\}$ çoklu tek nokta kümeleri için birini içerip diğerini içermeyen en az bir yarı çoklu açık küme varsa, yani $\{c_1/x_1\} \sqsubseteq U$, $\{c_2/x_2\} \not\sqsubseteq U$ veya $\{c_1/x_1\} \not\sqsubseteq V$, $\{c_2/x_2\} \sqsubseteq V$ olacak şekilde U, V yarı çoklu açık kümeleri mevcutsa (M, τ) uzayına yarı çoklu T_0 (sm-T_0) uzayı denir.

Örnek 4.3.1. $M = \{2/a, 3/b\}$ çoklu kümesi üzerinde $\tau = \{\emptyset, M, \{1/a\}, \{2/a\}, \{1/a, 3/b\}\}$ m-topolojisi verilsin. Bu uzayda sm-açık kümelerin sınıfı $S_\tau = \{\emptyset, M, \{1/a\}, \{2/a\}, \{1/a, 3/b\}, \{2/a, 2/b\}, \{2/a, 1/b\}\}$ dir. Buna göre, (M, τ) uzayı sm-T_0 uzayıdır.

Teorem 4.3.1. Bir sm-T_0 uzayının her m-açık alt uzayı da sm-T_0 dır.

İspat: (M,τ) bir sm-T_0 uzayı ve $N \sqsubseteq M$ m-açık alt kümesi verilsin. (N,τ_N) alt uzayının da sm-T_0 olduğunu göstermek için $x_1 \neq x_2$ olacak şekilde $\{c_1/x_1\}$, $\{c_2/x_2\} \sqsubseteq N \sqsubseteq M$ çoklu tek nokta kümeleri verilsin. (M,τ) bir sm-T_0 uzayı olduğundan $\{c_1/x_1\} \sqsubseteq U$, $\{c_2/x_2\} \not\sqsubseteq U$ veya $\{c_1/x_1\} \not\sqsubseteq V$, $\{c_2/x_2\} \sqsubseteq V$ olacak şekilde U, V sm-açık kümeleri mevcuttur. $\{c_1/x_1\} \sqsubseteq U \sqcap N$, $\{c_2/x_2\} \not\sqsubseteq U \sqcap N$ veya $\{c_1/x_1\} \not\sqsubseteq V \sqcap N$, $\{c_2/x_2\} \sqsubseteq V \sqcap N$ elde edilir. N bir m-açık küme olduğundan Teorem 4.1.3 gereği $U \sqcap N, V \sqcap N$ sm-açık kümelerdir. O halde (N,τ_N) uzayı sm-T_0 dır.

Örnek 4.3.2. $M = \{2/a, 3/b, 1/c\}$ çoklu kümesi üzerinde $\tau = \{\emptyset, M, \{1/a, 2/b\}, \{2/a, 1/c\}, \{1/a\}, \{2/a, 2/b, 1/c\}\}$ m-topolojisi verilsin. $S_\tau = \{\emptyset, M, \{1/a, 2/b\}, \{2/a, 1/c\}, \{1/a\}, \{2/a, 2/b, 1/c\}, \{2/a, 1/b, 1/c\}, \{1/a, 3/b, 1/c\}, \{1/a, 2/b, 1/c\}, \{1/a, 1/b, 1/c\}, \{1/a, 1/b, \}, \{1/a, 3/b\}, \{1/a, 1/c\}\}$ olur.
Bir $N = \{1/a, 2/b\}$ m-açık kümesi için $\tau_N = \{\emptyset, N, \{1/a\}\}$ ve $S_{\tau_N} = \{\emptyset, N, \{1/a\}, \{1/a, 1/b\}\}$ olur. Buradan (N,τ_N) alt uzayının da sm-T_0 uzayı olduğu görülür.

Not 4.3.1. sm-T_0 uzayı olma özelliği m-açık olmayan çoklu alt kümeler üzerinde genelde kalıtsal değildir.

Teorem 4.3.2. m-topolojik uzayların sm-T_0 uzayı olma özelliği bir m-topolojik özelliktir.

İspat: (M,τ) ve (N,σ) iki m-topolojik uzay olmak üzere $f\colon (M,\tau) \to (N,\sigma)$ m-homeomorfizmi verilsin. (M,τ) çoklu uzayının sm-T_0 olduğunu kabul edelim. $y_1 \neq y_2$ olmak üzere $\{d_1/y_1\}$, $\{d_2/y_2\} \sqsubseteq N$ çoklu tek nokta kümeleri için f örten olduğundan $f(\{c_1/x_1\}) = \{d_1/y_1\}$ ve $f(\{c_2/x_2\}) = \{d_2/y_2\}$ olacak şekilde $\{c_1/x_1\}$, $\{c_2/x_2\} \sqsubseteq M$ çoklu tek nokta kümeleri vardır ve f birebir olduğundan $x_1 \neq x_2$ dir. (M,τ) uzayı sm-T_0 olduğundan $\{c_1/x_1\} \sqsubseteq U$, $\{c_2/x_2\} \not\sqsubseteq U$ veya $\{c_1/x_1\} \not\sqsubseteq V$, $\{c_2/x_2\} \sqsubseteq V$ olacak şekilde $U, V \sqsubseteq M$ sm-açık kümeleri mevcuttur.

$U \sqsubseteq M$ sm-açık kümesi mevcut ise sm-açık küme tanımından $G \sqsubseteq U \sqsubseteq mcl(G)$ olacak şekilde bir G m-açık kümesi vardır. Buradan $f(G) \sqsubseteq f(U) \sqsubseteq f(mcl(G))$ yazılabilir. f m-sürekli olduğundan $f(mcl(G)) \sqsubseteq mcl(f(G))$ dir. f^{-1} m-sürekli ve

$G \sqsubseteq M$ m-açık olduğundan $f(G) \sqsubseteq N$ de m-açık olur. $f(G) \sqsubseteq f(U) \sqsubseteq mcl(f(G))$ olduğundan $f(U) \sqsubseteq N$ kümesi sm-açık ve $f(\{c_1/x_1\}) = \{d_1/y_1\} \sqsubseteq f(U)$, $f(\{c_2/x_2\}) = \{d_2/y_2\} \not\sqsubseteq f(U)$ elde edilir. $V \sqsubseteq M$ sm-açık kümesinin mevcut olduğu durumda da benzer şekilde $f(V) \sqsubseteq N$ sm-açık kümesi bulunur. O halde (N, σ) uzayı sm-T_0 dır ve dolayısyla sm-T_0 uzayı olma özelliği bir m-topolojik özelliktir.

Teorem 4.3.3. (M, τ) uzayı sm-T_0 ve $\tau \leqslant \sigma$ ise (M, σ) uzayı da sm-T_0 dır.

İspat: Teorem 4.1.8 ve Tanım 4.3.1 den elde edilir.

Not 4.3.2. Her çoklu açık küme bir yarı çoklu açık küme olduğundan her m-T_0 uzayı bir sm-T_0 uzayıdır. Fakat bu ifadenin tersi genelde doğru değildir.

Örnek 4.3.3. $M = \{2/a, 3/b, 1/c\}$ çoklu kümesi üzerinde $\tau = \{\emptyset, M, \{1/a, 2/b\}, \{2/a, 1/c\}, \{1/a\}, \{2/a, 2/b, 1/c\}\}$ m-topolojisi verilsin. $S_\tau = \{\emptyset, M, \{1/a, 2/b\}, \{2/a, 1/c\}, \{1/a\}, \{2/a, 2/b, 1/c\}, \{2/a, 1/b, 1/c\}, \{1/a, 3/b, 1/c\}, \{1/a, 2/b, 1/c\}, \{1/a, 1/b, 1/c\}, \{1/a, 1/b, \}, \{1/a, 3/b\}, \{1/a, 1/c\}\}$ olur. Buna göre, (M, τ) uzayı sm-T_0 dır, fakat m-T_0 değildir. Çünkü, $\{2/a\}, \{1/c\} \sqsubseteq M$ için $\{2/a\} \sqsubseteq U$, $\{1/c\} \not\sqsubseteq U$ ve $\{2/a\} \not\sqsubseteq V$, $\{1/c\} \sqsubseteq V$ olacak şekilde $U, V \in \tau$ m-açık kümeleri bulunamaz.

Tanım 4.3.2. (M, τ) bir m-topolojik uzay olsun. $x_1 \neq x_2$ olmak üzere her $\{c_1/x_1\}$, $\{c_2/x_2\}$ çoklu tek nokta kümeleri için her birinin diğerini içermeyen yarı çoklu açık bir m-komşuluğu varsa, yani $\{c_1/x_1\} \sqsubseteq U$, $\{c_2/x_2\} \not\sqsubseteq U$ ve $\{c_1/x_1\} \not\sqsubseteq V$, $\{c_2/x_2\} \sqsubseteq V$ olacak şekilde U, V yarı çoklu açık kümeleri mevcutsa (M, τ) uzayına yarı çoklu T_1 (sm-T_1) uzayı denir.

Teorem 4.3.4. Bir sm-T_1 uzayının her m-açık alt uzayı da sm-T_1 dir.

İspat: (M, τ) bir sm-T_1 uzayı ve $N \sqsubseteq M$ m-açık alt kümesi verilsin. (N, τ_N) alt uzayının da sm-T_1 olduğunu göstermek için $x_1 \neq x_2$ olacak şekilde $\{c_1/x_1\}$, $\{c_2/x_2\} \sqsubseteq N \sqsubseteq M$ çoklu tek nokta kümeleri verilsin. (M, τ) bir sm-T_1 uzayı olduğundan $\{c_1/x_1\} \sqsubseteq U$, $\{c_2/x_2\} \not\sqsubseteq U$ ve $\{c_1/x_1\} \not\sqsubseteq V$, $\{c_2/x_2\} \sqsubseteq V$ olacak şekilde U, V sm-açık kümeleri mevcuttur. $\{c_1/x_1\} \sqsubseteq U \sqcap N$, $\{c_2/x_2\} \not\sqsubseteq U \sqcap N$ ve

$\{c_1/x_1\} \not\sqsubseteq V \sqcap N$, $\{c_2/x_2\} \sqsubseteq V \sqcap N$ elde edilir. N bir m-açık küme olduğundan Teorem 4.1.3 gereği $U \sqcap N, V \sqcap N$ sm-açık kümelerdir. O halde (N, τ_N) uzayı sm-T_1 dır.

Teorem 4.3.5. m-topolojik uzayların sm-T_1 uzayı olma özelliği bir m-topolojik özelliktir.

İspat: (M,τ) ve (N,σ) iki m-topolojik uzay olmak üzere $f\colon (M,\tau) \to (N,\sigma)$ m-homeomorfizmi verilsin. (M,τ) çoklu uzayının sm-T_1 olduğunu kabul edelim. $y_1 \neq y_2$ olmak üzere $\{d_1/y_1\}$, $\{d_2/y_2\} \sqsubseteq N$ çoklu tek nokta kümeleri için f örten olduğundan $f(\{c_1/x_1\}) = \{d_1/y_1\}$ ve $f(\{c_2/x_2\}) = \{d_2/y_2\}$ olacak şekilde $\{c_1/x_1\}$, $\{c_2/x_2\} \sqsubseteq M$ çoklu tek nokta kümeleri vardır ve f birebir olduğundan $x_1 \neq x_2$ dir. (M,τ) uzayı sm-T_1 olduğundan $\{c_1/x_1\} \sqsubseteq U$, $\{c_2/x_2\} \not\sqsubseteq U$ ve $\{c_1/x_1\} \not\sqsubseteq V$, $\{c_2/x_2\} \sqsubseteq V$ olacak şekilde $U, V \sqsubseteq M$ sm-açık kümeleri mevcuttur.

U ve V sm-açık kümeleri için sm-açık küme tanımından $G \sqsubseteq U \sqsubseteq mcl(G)$ ve $H \sqsubseteq V \sqsubseteq mcl(H)$ olacak şekilde G ve H m-açık kümeleri vardır. Buradan $f(G) \sqsubseteq f(U) \sqsubseteq f(mcl(G))$ ve $f(H) \sqsubseteq f(V) \sqsubseteq f(mcl(H))$ yazılabilir. f m-sürekli olduğundan $f(mcl(G)) \sqsubseteq mcl(f(G))$ ve $f(mcl(H)) \sqsubseteq mcl(f(H))$ dır. f^{-1} m-sürekli ve $G, H \sqsubseteq M$ m-açık olduğundan $f(G), f(H) \sqsubseteq N$ kümeleri de m-açık olur. Buradan $f(G) \sqsubseteq f(U) \sqsubseteq f(mcl(G))$ ve $f(H) \sqsubseteq f(V) \sqsubseteq f(mcl(H))$ olduğundan $f(U), f(V) \sqsubseteq N$ kümeleri sm-açık, $f(\{c_1/x_1\}) = \{d_1/y_1\} \sqsubseteq f(U)$, $f(\{c_2/x_2\}) = \{d_2/y_2\} \not\sqsubseteq f(U)$ ve $f(\{c_1/x_1\}) = \{d_1/y_1\} \not\sqsubseteq f(V)$, $f(\{c_2/x_2\}) = \{d_2/y_2\} \sqsubseteq f(V)$ elde edilir. O halde (N,σ) uzayı sm-T_1 dir ve dolayısyla sm-T_1 uzayı olma özelliği bir m-topolojik özelliktir.

Teorem 4.3.6. (M,τ) uzayı sm-T_1 ve $\tau \leqslant \sigma$ ise (M,σ) uzayı da sm-T_1 dir.

İspat: Teorem 4.1.8 ve Tanım 4.3.2 den elde edilir.

Not 4.3.3. Her çoklu açık küme bir yarı çoklu açık küme olduğundan her m-T_1 uzayı bir sm-T_1 uzayıdır. Fakat bu ifadenin tersi genelde doğru değildir.

Teorem 4.3.7. Her sm-T_1 uzayı sm-T_0 dır.

İspat: Tanım 4.3.1 ve Tanım 4.3.2 den elde edilir.

Not 4.3.4. Teorem 4.3.7 in tersi genelde doğru değildir.

Örnek 4.3.4. $M = \{2/a, 3/b, 1/c\}$ çoklu kümesi üzerinde $\tau = \{\emptyset, M, \{1/a, 2/b\}, \{2/a, 1/c\}, \{1/a\}, \{2/a, 2/b, 1/c\}\}$ m-topolojisi verilsin. $S_\tau = \{\emptyset, M, \{1/a, 2/b\}, \{2/a, 1/c\}, \{1/a\}, \{2/a, 2/b, 1/c\}, \{2/a, 1/b, 1/c\}, \{1/a, 3/b, 1/c\}, \{1/a, 2/b, 1/c\}, \{1/a, 1/b, 1/c\}, \{1/a, 1/b, \}, \{1/a, 3/b\}, \{1/a, 1/c\}\}$ olur. Buna göre, (M, τ) uzayı sm-T_0 dır, fakat sm-T_1 değildir. Çünkü, $\{2/a\}, \{1/c\} \sqsubseteq M$ için $\{2/a\} \sqsubseteq U$, $\{1/c\} \not\sqsubseteq U$ olacak şekilde $U \in S_\tau$ sm-açık kümesi bulunamaz.

4.4. Yarı Çoklu Hausdorff Uzaylar

Tanım 4.4.1. (M, τ) bir m-topolojik uzay olsun. $x_1 \neq x_2$ olmak üzere her $\{c_1/x_1\}$, $\{c_2/x_2\}$ çoklu tek nokta kümelerinin ayrık yarı çoklu açık m-komşulukları varsa, yani $\{c_1/x_1\} \sqsubseteq U$, $\{c_2/x_2\} \sqsubseteq V$ ve $U \sqcap V = \emptyset$ olacak şekilde U, V yarı çoklu açık kümeleri mevcutsa (M, τ) uzayına sm-T_2 (sm-Hausdorff) uzayı denir.

Teorem 4.4.1. Bir sm-Hausdorff uzayının her m-açık alt uzayı da sm-Hausdorff dur.

İspat: (M, τ) bir sm-Hausdorff uzayı ve $N \sqsubseteq M$ m-açık alt kümesi verilsin. (N, τ_N) alt uzayının da sm-Hausdorff olduğunu göstermek için $x_1 \neq x_2$ olacak şekilde $\{c_1/x_1\}$, $\{c_2/x_2\} \sqsubseteq N \sqsubseteq M$ çoklu tek nokta kümeleri verilsin. (M, τ) bir sm-Hausdorff uzayı olduğundan $\{c_1/x_1\} \sqsubseteq U$, $\{c_2/x_2\} \sqsubseteq V$ ve $U \sqcap V = \emptyset$ olacak şekilde U, V sm-açık kümeleri mevcuttur. $\{c_1/x_1\} \sqsubseteq U \sqcap N$, $\{c_2/x_2\} \sqsubseteq V \sqcap N$ ve $(U \sqcap N) \sqcap (V \sqcap N) = (U \sqcap V) \sqcap N = \emptyset \sqcap N = \emptyset$ elde edilir. N bir m-açık küme olduğundan Teorem 4.1.3 gereği $U \sqcap N, V \sqcap N$ sm-açık kümelerdir. O halde (N, τ_N) uzayı sm-Hausdorff olur.

Not 4.4.1. sm-Hausdorff uzayı olma özelliği m-açık olmayan çoklu alt kümeler üzerinde genelde kalıtsal değildir.

Teorem 4.4.2. m-topolojik uzayların sm-Hausdorff uzayı olma özelliği bir m-topolojik özelliktir.

İspat: (M, τ) ve (N, σ) iki m-topolojik uzay olmak üzere $f\colon (M, \tau) \to (N, \sigma)$ m-homeomorfizmi verilsin. (M, τ) çoklu uzayının sm-Hausdorff olduğunu kabul edelim. $y_1 \neq y_2$ olmak üzere $\{d_1/y_1\}$, $\{d_2/y_2\} \sqsubseteq N$ çoklu tek nokta kümeleri için f örten olduğundan $f(\{c_1/x_1\}) = \{d_1/y_1\}$ ve $f(\{c_2/x_2\}) = \{d_2/y_2\}$ olacak şekilde $\{c_1/x_1\}$, $\{c_2/x_2\} \sqsubseteq M$ çoklu tek nokta kümeleri vardır ve f birebir olduğundan $x_1 \neq x_2$ dir. (M, τ) uzayı sm-Hausdorff olduğundan $\{c_1/x_1\} \sqsubseteq U$, $\{c_2/x_2\} \sqsubseteq V$ ve $U \sqcap V = \emptyset$ olacak şekilde $U, V \sqsubseteq M$ sm-açık kümeleri mevcuttur.

U ve V sm-açık kümeleri için sm-açık küme tanımından $G \sqsubseteq U \sqsubseteq mcl(G)$ ve $H \sqsubseteq V \sqsubseteq mcl(H)$ olacak şekilde G ve H m-açık kümeleri vardır. Buradan $f(G) \sqsubseteq f(U) \sqsubseteq f(mcl(G))$ ve $f(H) \sqsubseteq f(V) \sqsubseteq f(mcl(H))$ yazılabilir. f m-sürekli olduğundan $f(mcl(G)) \sqsubseteq mcl(f(G))$ ve $f(mcl(H)) \sqsubseteq mcl(f(H))$ dır. f^{-1} m-sürekli ve $G, H \sqsubseteq M$ m-açık olduğundan $f(G), f(H) \sqsubseteq N$ kümeleri de m-açık olur. Buradan $f(G) \sqsubseteq f(U) \sqsubseteq f(mcl(G))$ ve $f(H) \sqsubseteq f(V) \sqsubseteq f(mcl(H))$ olduğundan $f(U), f(V) \sqsubseteq N$ sm-açıklar ve $f(\{c_1/x_1\}) = \{d_1/y_1\} \sqsubseteq f(U)$, $f(\{c_2/x_2\}) = \{d_2/y_2\} \sqsubseteq f(V)$ elde edilir. $U \sqcap V = \emptyset$ ve f birebir olduğundan $f(U) \sqcap f(V) = f(U \sqcap V) = f(\emptyset) = \emptyset$ bulunur. O halde (N, σ) uzayı sm-Hausdorff dur ve dolayısyla sm-Hausdorff uzayı olma özelliği bir m-topolojik özelliktir.

Teorem 4.4.3. (M, τ) uzayı sm-Hausdorff ve $S_\tau \leqslant S_\sigma$ ise (M, σ) uzayı da sm-Hausdorff dur.

İspat: Teorem 4.1.8 ve Tanım 4.4.1 den elde edilir.

Not 4.4.2. Her çoklu açık küme bir yarı çoklu açık küme olduğundan her m-Hausdorff uzayı bir sm-Hausdorff uzayıdır. Fakat bu ifadenin tersi genelde doğru değildir.

Teorem 4.4.4. Her sm-Hausdorff uzayı sm-T_1 dir.

İspat: (M, τ) bir sm-Hausdorff m-topolojik uzay olsun. O zaman $x_1 \neq x_2$ olmak üzere her $\{c_1/x_1\}$, $\{c_2/x_2\}$ çoklu tek nokta kümeleri için $\{c_1/x_1\} \sqsubseteq U$, $\{c_2/x_2\} \sqsubseteq V$ ve $U \sqcap V = \emptyset$ olacak şekilde U, V yarı çoklu açık kümeleri mevcuttur. $\{c_1/x_1\} \sqsubseteq U$, $\{c_2/x_2\} \sqsubseteq V$ ve $U \sqcap V = \emptyset$ olduğundan $\{c_1/x_1\} \not\sqsubseteq V$ ve $\{c_2/x_2\} \not\sqsubseteq U$ olur. O halde (M, τ) uzayı sm-T_1 dir.

Not 4.4.3. Teorem 4.4.4 in tersi genelde doğru değildir.

m-T_0, m-T_1, m-Hausdorff, sm-T_0, sm-T_1 ve sm-Hausdorff aksiyomları arasındaki ilişki aşağıdaki diyagramda verilmiştir:

$$\begin{array}{ccccc}
m\text{-Hausdorff} & \Longrightarrow & m\text{-}T_1 & \Longrightarrow & m\text{-}T_0 \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
sm\text{-Hausdorff} & \Longrightarrow & sm\text{-}T_1 & \Longrightarrow & sm\text{-}T_0
\end{array}$$

Şekil 4.2. m-T_i ve sm-T_i $(i = 0, 1, 2)$ uzaylar arasındaki ilişkiler

4.5. Yarı Çoklu Regüler ve Yarı Çoklu Normal Uzaylar

Çoklu regüler ve çoklu normal uzay kavramları daha önce [11] de tanımlanmıştır. Yarı çoklu açık ve yarı çoklu kapalı kavramları yardımıyla regülerlik ve normallik çoklu topolojik uzaylar için genelleştirildiğinde ise 3 farklı yarı çoklu regüler ve yarı çoklu normal tanımları ortaya çıkmıştır.

Tanım 4.5.1. (M, τ) bir m-topolojik uzay olsun.

1. Her çoklu kapalı F kümesi ve $\{c/x\} \not\sqsubseteq F$ olmak üzere her $\{c/x\}$ tek nokta çoklu kümesi için $F \sqsubseteq U$, $\{c/x\} \sqsubseteq V$ ve $U \sqcap V = \emptyset$ olacak şekilde U, V yarı çoklu açık kümeleri mevcutsa (M, τ) uzayına sm_1-regüler uzay denir.

2. Her yarı çoklu kapalı F kümesi ve $\{c/x\} \not\sqsubseteq F$ olmak üzere her $\{c/x\}$ tek nokta çoklu kümesi için $F \sqsubseteq U$, $\{c/x\} \sqsubseteq V$ ve $U \sqcap V = \emptyset$ olacak şekilde U, V yarı çoklu açık kümeleri mevcutsa (M, τ) uzayına sm_2-regüler uzay denir.

3. Her yarı çoklu kapalı F kümesi ve $\{c/x\} \not\sqsubseteq F$ olmak üzere her $\{c/x\}$ tek nokta çoklu kümesi için $F \sqsubseteq U$, $\{c/x\} \sqsubseteq V$ ve $U \sqcap V = \emptyset$ olacak şekilde U, V çoklu açık kümeleri mevcutsa (M, τ) uzayına sm_3-regüler uzay denir.

Teorem 4.5.1. Aşağıdaki gerektirmeler sağlanır:

1. Her sm_3-regüler uzay hem m-regülerdir hem de sm_2-regülerdir.

2. Her m-regüler uzay sm_1-regülerdir.

3. Her sm_2-regüler uzay sm_1-regülerdir.

İspat: Tanımlar 3.6.5, 4.5.1 ve Teorem 4.5.1 den elde edilir.

Not 4.5.1. Teorem 4.5.1 de verilen ilişkilerin tersleri genelde doğru değildir.

Teorem 4.5.1 de ifade edilen yarı çoklu regülerlik kavramları arasındaki ilişkiler aşağıdaki diyagramda verilmiştir:

$$\begin{tikzcd}
 & m\text{-regüler} \arrow[dr, Rightarrow] & \\
sm_3\text{-regüler} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & sm_1\text{-regüler} \\
 & sm_2\text{-regüler} \arrow[ur, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

Şekil 4.3. m-regüler ve sm_t-regüler $(t = 1, 2, 3)$ uzaylar arasındaki ilişkiler

Tanım 4.5.2. Bir (M, τ) m-topolojik uzayı hem sm-T_1 uzayı hem de sm_t-regüler $(t = 1, 2, 3)$ ise (M, τ) uzayına sm_t-T_3 uzayı denir.

Teorem 4.5.2. $t = 1, 2, 3$ için her sm_t-T_3 uzayı sm_t-regülerdir, fakat tersi genelde doğru değildir.

m-regüler, m-T_3, sm_t-regüler $(t = 1, 2, 3)$, sm_t-T_3 $(t = 1, 2, 3)$ ayırma aksiyomları arasındaki bazı ilişkiler aşağıda verilmiştir:

$$sm_3\text{-}T_3 \Longrightarrow sm_2\text{-}T_3 \Longrightarrow sm_1\text{-}T_3$$

$$sm_3\text{-}T_3 \Longrightarrow m\text{-}T_3 \Longrightarrow m\text{-regüler}$$

$$sm_2\text{-}T_3 \Longrightarrow sm_1\text{-regüler}$$

$t = 1, 2, 3$ için,

$$sm_t\text{-}T_3 \Longrightarrow sm_t\text{-regüler}$$

Tanım 4.5.3. (M, τ) bir m-topolojik uzay olsun.

1. $F_1 \sqcap F_2 = \emptyset$ olacak şekilde her çoklu kapalı F_1, F_2 kümeleri için $F_1 \sqsubseteq U$, $F_2 \sqsubseteq V$ ve $U \sqcap V = \emptyset$ olacak şekilde U, V yarı çoklu açık kümeleri mevcutsa (M, τ) uzayına sm_1-normal uzay denir.

2. $F_1 \sqcap F_2 = \emptyset$ olacak şekilde her yarı çoklu kapalı F_1, F_2 kümeleri için $F_1 \sqsubseteq U$, $F_2 \sqsubseteq V$ ve $U \sqcap V = \emptyset$ olacak şekilde U, V yarı çoklu açık kümeleri mevcutsa (M, τ) uzayına sm_2-normal uzay denir.

3. $F_1 \sqcap F_2 = \emptyset$ olacak şekilde her yarı çoklu kapalı F_1, F_2 kümeleri için $F_1 \sqsubseteq U$, $F_2 \sqsubseteq V$ ve $U \sqcap V = \emptyset$ olacak şekilde U, V çoklu açık kümeleri mevcutsa (M, τ) uzayına sm_3-normal uzay denir.

Teorem 4.5.3.

1. Her m-normal uzay sm_1-normaldir.

2. Her sm_2-normal uzay sm_1-normaldir.

3. Her sm_3-normal uzay hem m-normaldir hem de sm_2-normaldir.

İspat: Tanımlar 3.6.7, 4.5.3 ve Teorem 4.5.3 den elde edilir.

Not 4.5.2. Teorem 4.5.3 de verilen ilişkilerin tersleri genelde doğru değildir.

Teorem 4.5.3 de ifade edilen yarı çoklu normallik kavramları arasındaki ilişkiler aşağıdaki diyagramda verilmiştir:

$$\begin{tikzcd}
 & m\text{-normal} \arrow[dr, Rightarrow] & \\
sm_3\text{-normal} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & sm_1\text{-normal} \\
 & sm_2\text{-normal} \arrow[ur, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

Şekil 4.4. m-normal ve sm_t-normal $(t = 1, 2, 3)$ uzaylar arasındaki ilişkiler

Tanım 4.5.4. Bir (M, τ) m-topolojik uzayı hem sm-T_1 uzayı hem de sm_t-normal $(t = 1, 2, 3)$ ise (M, τ) uzayına sm_t-T_4 uzayı denir.

Teorem 4.5.4. $t = 1, 2, 3$ için her sm_t-T_4 uzayı sm_t-normaldir, fakat tersi genelde doğru değildir.

m-normal, m-T_4, sm_t-normal $(t = 1, 2, 3)$, sm_t-T_4 $(t = 1, 2, 3)$ ayırma aksiyomları arasındaki bazı ilişkiler aşağıda verilmiştir:

$$sm_3\text{-}T_4 \Longrightarrow sm_2\text{-}T_4 \Longrightarrow sm_1\text{-}T_4$$

$$sm_3\text{-}T_4 \Longrightarrow m\text{-}T_4 \Longrightarrow m\text{-normal}$$

$$sm_2\text{-}T_4 \Longrightarrow sm_1\text{-normal}$$

$t = 1, 2, 3$ için,

$$sm_t\text{-}T_4 \Longrightarrow sm_t\text{-normal}$$

5. BÖLÜM

SONUÇ VE ÖNERİLER

5.1. Sonuç

Bu tez çalışmasında, çoklu küme kavramı, temel topolojik kavramlar ve bunlarla ilgili çeşitli özellikler, teoremler ve örnekler verilmiştir. Çoklu topolojik uzaylardan bahsedilerek çoklu süreklilik, çoklu homeomorfizm gibi kavramlar ve çoklu ayırma aksiyomları ifade edilmiştir. Ardından çoklu topolojik uzaylarda yarı çoklu açık ve yarı çoklu kapalı küme kavramları tanımlanmış ve bazı önemli özellikler verilmiştir. Yarı çoklu süreklilik tanımları verilerek yarı çoklu ayırma aksiyomları karakterize edilmiştir. Ayrıca aralarındaki ilişkiler gösterilerek bazı özellikleri incelenmiştir. Elde edilen önemli sonuçlar aşağıda sıralanmıştır.

1. Çoklu topolojik uzaylar için yarı çoklu açık ve yarı çoklu kapalı küme kavramları tanımlanarak çoklu açık ve çoklu kapalı kavramlardan daha zayıf olduğu gösterilmiştir.

2. Topolojik uzaylardaki yarı süreklilik kavramlarına benzer şekilde çoklu topolojik uzaylarda da üç farklı genelleştirilmiş yarı çoklu süreklilik kavramı (sm_t-sürekli, $t = 1, 2, 3$) tanımlanarak ve aralarındaki ilişkiler incelenmiştir.

3. Yarı çoklu ayırma aksiyomları (sm-T_i, $i = 0, 1, 2$) karakterize edilmiştir. Burada $i = 0, 1, 2$ için bir sm-T_i uzayının her çoklu açık alt uzayı da sm-T_i dir. Yani, çoklu ayırma aksiyomları kalıtsal olmasına rağmen, yarı çoklu ayırma aksiyomlarının sadece çoklu açık kümeler üzerinde kalıtsal olduğu elde edilmiştir.

4. Çoklu ayırma aksiyomlarındaki gibi aşağıdaki gerektirmeler sağlanır: sm-T_2 (sm-Hausdorff) $\Longrightarrow$ sm-T_1 $\Longrightarrow$ sm-T_0

5. Her çoklu açık küme bir yarı çoklu açık küme olduğundan $i = 0, 1, 2$ için her m-T_i uzayı bir sm-T_i uzayıdır. Fakat bu ifadenin tersi genelde doğru değildir.

6. Çoklu topolojik uzaylarda tanımlı m-regüler, m-normal, m-T_3 ve m-T_4 uzayların yanında, yarı çoklu açık ve yarı çoklu kapalı küme kavramları ile üçer farklı yarı çoklu regüler, yarı çoklu normal, yarı çoklu T_3 ve yarı-yarı çoklu T_4 aksiyomları (sm_t-regüler, sm_t-normal, sm_t-T_3, sm_t-T_4, $t = 1, 2, 3$) tanımlanmıştır ve aralarındaki ilişkiler gösterilmiştir.

5.2. Öneriler

Çoklu topolojik uzaylar üzerinde aşağıda verilen çalışmalar yapılabilir:

1. Çoklu topolojik uzaylar için kompaktlık, bağlantılılık, yarı-kompaktlık, yarı-bağlantılılık gibi topolojik kavramlar tanımlanabilir. Elde edilen genelleştirilmiş tanımların klasik tanımlarla arasındaki ilişkiler incelenebilir.

2. Yarı çoklu homeomorfizm ve yarı çoklu topolojik özellik kavramları tanımlanarak, elde edilen yarı çoklu ayırma aksiyomlarının birer yarı çoklu topolojik özellik olup olmadıkları araştırılabilir.

3. Elde edilen teorik sonuçların günlük hayattan örnekler üzerine uygulanabilirliği incelenerek pratik uygulama alanları bulunabilir.

4. Çoklu topolojik uzayların kategorisi inşa edilip, bir topolojik kategori olup olmadığı araştırılabilir. Topolojik kategori olduğu elde edilirse, başlangıç kaldırma, bitiş kaldırma ve diskre objeler yardımıyla lokal ve genel ayırma aksiyomları, kapalılık, bağlantılılık, kompaktlık gibi önemli topolojik kavramlar bu kategoride karakterize edilebilir.

KAYNAKLAR

1. Acar, T., "Bazı Zayıf Ayırma Aksiyomları", *Aksaray Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü*, Yüksek Lisans Tezi, Aksaray, 2020.
2. Blizard, W.D., "Multiset theory", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 30 (1), 36–66, 1989.
3. Cerf, V., Fernandez, E., Gostelow, K., Volausky, S., "Formal control and low properties of a model of computation", *Computer Science Department, University of California*, Los Angeles, CA, December, p. 81, 1971.
4. Crossley, S., Hildebrand, S., "Semi-closure", *Texas Journal of Science*, 22 (2-3), 99–112, 1971.
5. Crossley, S., Hildebrand, S., "Semi-closed sets and semi-continuity in topological spaces", *Texas Journal of Science*, 22 (2-3), 123–126, 1971.
6. Crossley, S., Hildebrand, S., "Semi-topological properties", *Fundamenta Mathematicae*, 74 (3), 233–254, 1972.
7. Crossley, S., "A note on semitopological classes", *Proceedings of the American Mathematical Society*, 43 (2), 416–420, 1974.
8. Dorsett, C., "Semi compact R1 and product space", *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 2 (3), 15–19, 1980.
9. Dorsett, C., "Semi-regular spaces", *Soochow Journal of Mathematics*, 8, 45–53, 1982.
10. Dorsett, C., "Semi-normal spaces", *Kyungpook Mathematical Journal*, 25 (2), 173–180, 1985.
11. El-Sheikh, S., Omar, R., Omar, R., Raafat, M., "Separation Axioms on Multiset Topological Space", *Journal of New Theory*, 7, 11–21, 2015.
12. Erciyes, A., Aytekin, A., Şahan, T., "Semi-homotopy and semi-fundamental groups", *Konuralp Journal of Mathematics*, 4 (1), 155–163, 2016.

13. Girish, K.P., John, S.J., "Relations and functions in multiset context", *Information Sciences*, 179, 758–768, 2009.

14. Girish, K.P., John, S.J., "Multiset topologies induced by multiset relations", *Information Sciences*, 188, 298–313, 2012.

15. Girish, K.P., John, S.J., "On Multiset Topologies", *Theory and Applications of Mathematics and Computer Science*, 2 (1), 37–52, 2012.

16. Jena, S.P., Ghosh, S.K., Tripathy, B.K., "On the theory of bags and lists", *Information Sciences*, 132, 241–254, 2001.

17. Levine, N., "Semi-open sets and semi-continuity in topological spaces", *The American Mathematical Monthly*, 70 (1), 36–41, 1963.

18. Maheshwari, S.N., Prasad, R., "Some new separation axioms", *Ann. Soc. Sci. Bruxelles Sér. I*, 89, 395–402, 1975.

19. Maheshwari, S.N., Prasad, R., "On s-regular spaces", *Glasnik Matematicki Series III*, 10 (30), 347–350, 1975.

20. Maheshwari, S.N., Prasad, R., "On s-normal spaces", *Bull. Math. Soc. Sci. Math. R. S. Roumanie*, 22 (70), 27-30, 1975.

21. Manjunath, A.S., John, S.J., "On bag relations", *Bulletin of Kerala Mathematics Association*, 3 (2), 15–22, 2006.

22. Mucuk, O., "Topoloji ve Kategori", *Nobel Yayın Dağıtım*, Ankara, 2010.

23. Nayar, Bhamini M.P., Arya, S.P., "Semi-topological properties", *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 15 (2), 267–272, 1992.

24. Peterson, J., "Computation sequence sets", *Journal of Computer System Science*, 13 (1), 1–24, 1976.

25. Scheers, J. M., "An exploration of semi-open sets in topological spaces", *Stephen F. Austin State University, Faculty of Graduate School*, M.Sc. Thesis, Austin, 2011.

26. Şahan, N., "Yarı Ayırma Aksiyomları Üzerine", *Aksaray Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü*, Yüksek Lisans Tezi, Aksaray, 2019.

27. Yager, R.R., "On the theory of bags", *International Journal General System*, 13, 23–37, 1986.

28. Yang, Y., Tan, X., Meng, C., "The multi-fuzzy soft set and its application in decision making", *Applied Mathematical Modelling*, 37, 4915–4923, 2013.