T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİ DEĞİŞKENLİ ŞARTLI FIBONACCI VE LUCAS HİBRİNOMİYALLERİ

Tezi Hazırlayan
Zeynep KUMTAS

Tez Danışmanı
Dr. Öğr. Üyesi Sure KÖME

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Ağustos 2022
NEVŞEHİR

T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİ DEĞİŞKENLİ ŞARTLI FIBONACCI VE LUCAS HİBRİNOMİYALLERİ

Tezi Hazırlayan
Zeynep KUMTAS

Tez Danışmanı
Dr. Öğr. Üyesi Sure KÖME

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Ağustos 2022
NEVŞEHİR

Dr. Öğr. Üyesi Sure KÖME danışmanlığında **Zeynep KUMTAS** tarafından hazırlanan **“İki Değişkenli Şartlı Fibonacci ve Lucas Hibrinomiyalleri”** başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

…/…/2022

JÜRİ

Başkan : ………………………….

Üye : ………………………….

Üye : ………………………….

ONAY

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun …. / …. /…… tarih ve ………… sayılı kararı ile onaylanmıştır.

…. /…. /….

Prof. Dr. Şahlan ÖZTÜRK

Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİM SAYFASI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada yer alan bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu ve bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Zeynep KUMTAS

TEŞEKKÜR

Bu tezin çalışma aşamasında bana yol gösteren, destek ve emeklerini esirgemeyen, beni yüreklendiren, öğrencisi olmaktan her zaman gurur duyacağım sayın danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Sure KÖME ’ye,

Yüksek lisans eğitimim boyunca bilgileriyle ışık tutan Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Matematik Bölüm hocalarıma,

Hayatımın en önemli kararlarında beni destekleyen yanımda olan değerli annem, babam ve kardeşlerime,

Teknik ve idari yardımlarından dolayı Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Rektörlüğü’ne, Fen Edebiyat Fakültesi Dekanlığı’na ve Matematik Bölüm Başkanlığı’na sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

İKİ DEĞİŞKENLİ ŞARTLI FIBONACCI VE LUCAS HİBRİNOMİYALLERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Zeynep KUMTAS

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ağustos 2022

ÖZET

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır.

İlk bölümde, konu ile ilgili literatür taraması yapılmış olup temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

İkinci bölümde, iki değişkenli şartlı Fibonacci hibrinomiyalinin tanımı, Binet formülü, üreteç fonksiyonu ve bazı önemli özdeşlikleri incelenmiştir.

Üçüncü bölümde, öncelikle genelleştirilmiş iki değişkenli şartlı Lucas polinomu tanımlanmıştır ve bu polinomun Binet formülü ve üreteç fonksiyonu elde edilmiştir. Daha sonra, iki değişkenli şartlı Lucas hibrinomiyali tanımlanmıştır. Ayrıca, bu hibrinomiyalin Binet formülü, üreteç fonksiyonu ve Catalan, Cassini özdeşlikleri incelenmiştir.

Dördüncü bölümde ise tezde yapılan çalışmaların literatüre katkısı ile ilgili sonuç bölümü verilmiştir.

Anahtar Kelimeler:* *Fibonacci polinomu, Lucas polinomu, İki değişkenli şartlı Fibonacci hibrinomiyali, İki değişkenli şartlı Lucas hibrinomiyali, Binet formülü, Üreteç fonksiyonu, Catalan özdeşliği, Cassini özdeşliği.

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Sure KÖME

Sayfa Adedi: 47

BIVARIATE CONDITIONAL FIBONACCI AND LUCAS HYBRINOMIALS

(M. Sc. Thesis)

Zeynep KUMTAS

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
August 2022

ABSTRACT

This thesis consists of five chapters.

In the first chapter, the literature review, basic definitions and theorems are given.

In the second chapter, the definition of bivariate conditional Fibonacci hybrinomial, Binet formula, generating function and some important identities are examined.

In the third chapter, firstly, the generalized bivariate conditional Lucas polynomial is defined and the Binet formula and generating function of this polynomial is obtained. Later, the bivariate conditional Lucas hybrinomial is defined. Also, The Binet formula, generating function and some important identities of this polynomial is investigated.

In the fourth chapter, the conclusions section, which is regarding to the contribution of the thesis to the literature, is given.

Keywords: Fibonacci polynomial, Lucas polynomial, Bivariate conditional Fibonacci hybrinomial, Bivariate conditional Lucas hybrinomial, Binet formula, Generating function, Catalan ’s identity, Cassini ‘s identity.

Thesis supervisor: Assist. Prof. Dr. Sure KÖME

Page Number: 47

İÇİNDEKİLER

TABLOLAR LİSTESİ

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}^+$	Sayma sayıları kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\boldsymbol{Z}$	Hibrit sayısı
$\boldsymbol{F_n}$	Fibonacci sayı dizisi
$\boldsymbol{L_n}$	Lucas sayı dizisi
$\boldsymbol{FH_n}$	Fibonacci hibrit polinomu
$\boldsymbol{LH_n}$	Lucas hibrit polinomu
$\boldsymbol{B_n(x,y)}$	İki değişkenli Şartlı Fibonacci sayı dizisi
$\boldsymbol{L_n(x,y)}$	İki değişkenli Şartlı Lucas sayı dizisi
$\boldsymbol{BH_n(x,y)}$	İki değişkenli Şartlı Fibonacci hibrit sayı dizisi
$\boldsymbol{LH_n(x,y)}$	İki değişkenli Şartlı Lucas hibrit sayı dizisi
$\lfloor \boldsymbol{n} \rfloor$	Tam değer fonksiyonu

BÖLÜM 1

1.1. Giriş

Her türlü bilimin doğrudan ya da dolaylı olarak bağlantılı olduğu matematik gün geçtikçe insanlığın ilerlemesi ve teknolojik kazanımların elde edilmesinde artan bir öneme sahip olmaktadır. Matematik alanında yapılan çalışmalar günden güne artmakta ve matematiğin alt anabilim dallarında yapılan çalışmalar dikkate alındığında matematik bilimi adeta kendi içerisinde de disipliner bir hale gelişmiş durumdadır.

Literatürde var olan karmaşık sayılar, hiperbolik sayılar ve dual sayılar iyi bilinen iki boyutlu sayı sistemleridir. Hibrit sayılar ise reel, kompleks, dual ve hiperbolik sayıların birlikte düşünülerek oluşturulduğu bir sayı sistemidir. Özellikle son yıllarda birçok araştırmacı bu sayıların geometrik ve fiziksel uygulamalarıyla uğraşmaktadır. Bu sayı sistemi ile ilgili temel tanımlar ilerleyen bölümlerde ele alınacaktır.

Her türlü ilerlemenin temel aldığı ve dayanak olarak kullandığı bazı temel doğrular vardır. Fibonacci ve Lucas sayıları ise bu temel doğrulardan biridir. Fibonacci ve Lucas sayıları geçmişte olduğu gibi günümüzde de matematikçiler ve alana ilgi duyanlar tarafından yoğun bir şekilde çalışılmakta ve matematiğin diğer alanları ile ilişkilendirilmektedir.

İtalyan matematikçi Leonardo Fibonacci, Arap sayı sistemine ünlü kitabı "Liber Abaci de yer vererek, bu sayı sisteminin Avrupa'ya girmesinde büyük rol oynamıştır. Fibonacci 'nin kitabındaki bir tavşan probleminin çözümünden elde edilen sayıların özellikleri şu şekilde fark edilmiştir.

Problem; Ergin bir tavşan çiftinin her ay yeni bir yavru çifti verdikleri ve yeni doğan çiftin bir ay zarfında tam erginliğe eriştikleri varsayımıyla, yavru olan bir tavşan çiftinden başlayıp bir yılda (12 ayda) çiftlerin sayısı ne olur?

Çözümü aşağıdaki tablodaki şekilde bulmuştur.

Tablo 1.1. Tavşan problemi çözümü

Aylar	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Tavşan çiftlerinin sayısı	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Fibonacci sayı dizisi, ardışık iki Fibonacci sayısından büyüğünün küçüğüne oranının sonsuzda aldığı değer (altın oran), ardışık iki Fibonacci sayısının çarpımı vb. hesaplamalar günlük hayatta karşılaşılan birçok olayda ve bilimsel gerçeklerde ortaya çıkmaktadır.

Dünyanın ekvator çevresinin çapının hesaplanması, çiçekler, yaprakların büyümesi ve yapıları, ağaçlar, arıların üremesi, ayçiçeği, müzik, örümcek ağı ve ideal insan vücudu gibi birçok olayın meydana gelmesinde bu özel sayı dizisinden bahsedilmektedir.

1.2.Amaç ve Kapsam

Bu tez çalışmasındaki amaç iki değişkenli şartlı Fibonacci ve Lucas hibrinomiyallerinin nasıl elde edildiğini incelemektir. Daha sonra bu hibrinomiyallerin üreteç fonksiyonları ve Binet formülleri verilecektir. Ayrıca Catalan, Cassini gibi bazı önemli özdeşlikleri de ele alınacaktır.

1.3.Kaynak Araştırması

Literatürde bu zamana kadar Fibonacci ve Lucas sayıları hakkında birçok uygulama ve genellemeye yer verilmiştir. Bu bölümde tez içerisinde kullanılan çalışmalar hakkında bilgiler verilecektir.

Fibonacci, "Liber Abaci" kitabındaki bir tavşan probleminin çözümünden elde edilen sayıların özellikleri ve tavşan problemi üzerinde durularak uygulamalara yer verilmiştir [1].

Horadam, "A generalized Fibonacci sequence" adlı çalışmasında genelleştirilmiş Fibonacci dizisini ve bazı önemli özdeşliklerini tanımlamıştır [2].

Bicknell and Hoggart, “Roots of Fibonacci polynomials” adlı çalışmasında Pascal üçgeni yardımıyla Fibonacci polinomu tanımına yer vermiştir [3].

Koshy, “Fibonacci and Lucas Numbers with Applications” adlı kitabında Fibonacci ve Lucas sayılarının bazı önemli uygulamalarını ele almıştır [4].

Falcon ve Plaza, “On the Fibonacci k −numbers” çalışmalarında k −Fibonacci dizisinin tanımını vermiş ve pek çok önemli özdeşliğini elde etmişlerdir [5].

Falcon ve Plaza, “The k −Fibonacci sequence and the Pascal 2-triangle” isimli çalışmalarında k −Fibonacci dizisini $\{F_{k,n}\}_{n=0}^{\infty}$ şeklinde tanımlamışlardır. Ayrıca bu dizi için pek çok önemli özdeşlikleri de sunmuşladır [6].

Edson ve Yayenie, “A New Generalization of Fibonacci Sequence & Extended Binet's Formula” isimli çalışmada iki periyotlu Fibonacci dizisi olarak adlandırılan Fibonacci sayılarının önemli bir genelleştirilmesini sunmuşlardır [7].

Nalli and Haukkanen, “On generalized Fibonacci and Lucas polynomials” adlı çalışmalarında Catalan ve Byrd genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas polinomunun tanımına yer vermişlerdir [8].

Koshy, “Fibonacci and Lucas numbers with applications, Volume 2” çalışmasında Fibonacci ve Lucas sayılarının bazı özdeşlikleri ve bazı önemli uygulamalarını elde etmiştir [9].

Yayenie, “A note on generalized Fibonacci sequences” isimli çalışmada modifiye edilmiş genelleştirilmiş Fibonacci dizisini tanımlamış ve bu dizi ile ilgili önemli özdeşlikleri ispatlamıştır [10].

Falcon, “Generalized Fibonacci Sequences Generated from a k–Fibonacci Sequence” adlı çalışmada k −Fibonacci ve k −Lucas dizilerine yer vermiştir [11].

Bilgici, “Two generalizations of Lucas sequence” adlı çalışmasında modifiye edilmiş Lucas dizisinin tanımının yanında üreteç fonksiyonunu, Binet formülünü elde edip genelleştirilmiş Fibonacci dizisi ile ilişkilerine yer vermiştir [12].

Bilgici, "New generalizations of Fibonacci and Lucas sequences" adlı çalışmasında Fibonacci ve Lucas dizilerinin yeni bir genelleştirilmesini sunmuştur [13].

Özdemir, "Introduction to hybrid numbers" adlı çalışmasında değişmeli olmayan yeni bir sayı sistemi olan hibrit sayısı tanımına yer vermiştir. Bu sayı kümesinin bazı cebirsel ve geometrik özelliklerini bazı sınıflandırmalarla sunmuştur. Ayrıca hibrit bir sayının köklerini tür ve karakterine göre incelemiştir [14].

Szynal-Liana, "The Horadam hybrid numbers" adlı çalışmasında Horadam hibrit sayısı tanımını sunmuştur. Ayrıca bu sayıların Binet formülü, üreteç fonksiyonu ve bazı önemli özdeşliklerini elde etmiştir [15].

Szynal-Liana and Włoch, "The Fibonacci hybrid numbers" adlı çalışmalarında Fibonacci hibrit sayısını tanımlamış, Binet formülünü ve bazı önemli özellikleri elde etmiştir [16].

Köme and Kirik, "On The Generalized Fibonacci and Lucas 2^k-ions" adlı çalışmalarında modifiye edilmiş genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas 2^k- ionlarının tanımlarına yer vermiş, Binet formülü ve bazı önemli özdeşlikleri incelemişlerdir [17].

Verma and Bala, "On Properties of Generalized Bi-Variate Bi-Periodic Fibonacci Polynomials" adlı çalışmalarında genelleştirilmiş iki değişkenli iki periyotlu Fibonacci tanımına yer vermişlerdir [18].

Szynal-Liana and Włoch, "Introduction to Fibonacci and Lucas hybrinomials" isimli çalışmalarında genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas hibrit sayılarının tanımına ve bazı önemli özdeşliklerine değinmişlerdir [19].

Kızılateş, "A new generalization of Fibonacci hybrid and Lucas hybrid numbers" adlı çalışmasında Fibonacci ve Lucas hibrit sayılarının tanımlarına ve bazı önemli özdeşliklerine yer vermiştir [20].

Köme ve Gün, “Bi-periodic Fibonacci and Lucas 2^k-ions with q −integer components” adlı çalışmada iki periyotlu Fibonacci ve Lucas 2^k-ionlarını q parametresine bağlı olarak incelemişler [21].

1.4.Temel Kavramlar

Tanım 1.4.1: Fibonacci ve Lucas sayılarını sırasıyla aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$F(0) = 0,\ F(1) = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n,\ n\epsilon\mathbb{N}_0 \tag{1.1}$$

$$L(0) = 2,\ L(1) = 1, \quad L_{n+2} = L_{n+1} + L_n,\ n\epsilon\mathbb{N}_0 \tag{1.2}$$

Fibonacci ve Lucas dizilerinin üreteç fonksiyonları sırasıyla,

$$\sum_{m=0}^{\infty} F_m\, x^m = \frac{x}{1-x-x^2} \tag{1.3}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} L_m\, x^m = \frac{2-x}{1-x-x^2} \tag{1.4}$$

şeklinde elde etmiştir [4]. Ayrıca Fibonacci ve Lucas dizilerinin Binet formülleri ise sırasıyla,

$$F_m = \frac{\alpha^m - \beta^m}{\alpha-\beta} \tag{1.5}$$

$$L_m = \alpha^m + \beta^m \tag{1.6}$$

şeklindedir. Burada $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ değerleri $x^2 - x - 1 = 0$ karakteristik polinomunun kökleridir. Aynı zamanda α pozitif kökü, matematikte oldukça önemli bir yeri olan “altın oran” dır.

Tanım 1.4.2: Herhangi bir x değişkeni için $F_n(x)$ Fibonacci polinomu, $F_0(x) = 0$ ve $F_1(x) = 1$ başlangıç şartları olmak üzere,

$$F_n(x) = xF_{n-1}(x) + F_{n-2}(x),\ \ n \geq 2 \tag{1.7}$$

ve $L_n(x)$ Lucas polinomu, $L_0(x) = 2$ ve $L_1(x) = x$ başlangıç şartları olmak üzere,

$$L_n(x) = xL_{n-1}(x) + L_{n-2}(x), \ \ n \geq 2 \tag{1.8}$$

şeklindedir [5]. Burada $x = 1$ için Fibonacci ve Lucas polinomları sırasıyla Fibonacci ve Lucas sayılarını vermektedir. Daha sonra Fibonacci ve Lucas polinomları için Binet formülleri sırasıyla,

$$F_n(x) = \frac{\alpha^n(x) - \beta^n(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \tag{1.9}$$

$$L_n(x) = \alpha^n(x) + \beta^n(x) \tag{1.10}$$

şeklinde elde edilmiştir [4]. Burada $\alpha(x) = \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2+4}\right)$ ve $\beta(x) = \frac{1}{2}\left(x - \sqrt{x^2+4}\right)$ dir.

Tanım 1.4.3: Z hibrit sayılarının bir kümesi $\mathbb{K}$ olsun. Bu durumda Z hibrit sayısı,

$$Z = a + b\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{\varepsilon} + d\boldsymbol{h} \tag{1.11}$$

şeklinde verilmiştir. Burada ise $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ve $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{h}$ operatörleri

$$\boldsymbol{i}^2 = -1, \ \boldsymbol{\varepsilon}^2 = 0, \ \boldsymbol{h}^2 = 1 \tag{1.12}$$

dir [14].

Aşağıdaki tablo Hibrit sayılarının çarpımlarının detaylı halini vermektedir.

Tablo 1.2. Hibrit sayıları çarpım tablosu

.	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{\varepsilon}$	$\boldsymbol{h}$
$\boldsymbol{i}$	-1	$1-\boldsymbol{h}$	$\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{i}$
$\boldsymbol{\varepsilon}$	$\boldsymbol{h}+1$	0	$-\boldsymbol{\varepsilon}$
$\boldsymbol{h}$	$-\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{\varepsilon}$	1

Hibrit sayılarının özel bir türü olan Fibonacci ve Lucas hibrit sayıları sırasıyla aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 1.4.4: n. Fibonacci hibrit sayısı FH_n,

$$FH_n = F_n + \boldsymbol{i}F_{n+1} + \boldsymbol{\varepsilon}F_{n+2} + \boldsymbol{h}F_{n+3} \tag{1.13}$$

şeklinde tanımlanır [15].
$n.$ Lucas hibrit sayısı LH_n,

$$LH_n = L_n + \boldsymbol{i}L_{n+1} + \boldsymbol{\varepsilon}L_{n+2} + \boldsymbol{h}L_{n+3} \tag{1.14}$$

şeklinde tanımlanır [15].

Tanım 1.4.5: $n \geq 0$ için, $F_n(x)$ Fibonacci polinomu ve $L_n(x)$ Lucas polinomu olmak üzere, Fibonacci hibrinomiyali ve Lucas hibrinomiyali sırasıyla aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$FH_n(x) = F_n(x) + \boldsymbol{i}F_{n+1}(x) + \boldsymbol{\varepsilon}F_{n+2}(x) + \boldsymbol{h}F_{n+3}(x) \tag{1.15}$$

$$LH_n(x) = L_n(x) + \boldsymbol{i}F_{n+1}(x) + \boldsymbol{\varepsilon}F_{n+2}(x) + \boldsymbol{h}F_{n+3}(x) \tag{1.16}$$

Teorem 1.4.1:
Herhangi bir x değişkeni için, $FH_0(x) = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{\varepsilon}x + \boldsymbol{h}(x^2 + 1)$ ve $FH_1(x) = 1 + \boldsymbol{i}x + \boldsymbol{\varepsilon}(x^2 + 1) + \boldsymbol{h}$ başlangıç koşulları ile verilen Fibonacci hibrinomiyali;

$$FH_n(x) = xFH_{n-1}(x) + FH_{n-2}(x),\ n \geq 2 \tag{1.17}$$

olarak tanımlanmıştır [19].
Aynı şekilde Lucas hibrinomiyali de elde edilir. Aşağıdaki teorem Lucas hibrinomiyalini ifade eden teoremdir.

Teorem 1.4.2:

Herhangi bir x değişkeni için, $LH_0(x) = 2 + \boldsymbol{i}x + \boldsymbol{\varepsilon}(x^2 + 2) + \boldsymbol{h}(x^3 + 3x)$ ve $LH_1(x) = x + \boldsymbol{i}(x^2 + 2) + \boldsymbol{\varepsilon}(x^3 + 3x) + \boldsymbol{h}(x^4 + 4x^2 + 2)$ başlangıç koşulları ile verilen Lucas hibrinomiyali;

$$LH_n(x) = xLH_{n-1}(x) + LH_{n-2}(x) \tag{1.18}$$

şeklinde tanımlanmıştır [19].

Şimdi Fibonacci ve Lucas hibrinomiyallerinin Binet formüllerini ifade eden teorem verilecektir.

Teorem 1.4.3 (Binet Formülü):
$n \geq 0$ bir tamsayı olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} FH_n(x) = {} & \frac{\alpha^n(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}\left(1 + \boldsymbol{i}\alpha(x) + \boldsymbol{\varepsilon}\alpha^2(x) + \boldsymbol{h}\alpha^3(x)\right) \\ & - \frac{\beta^n(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}\left(1 + \boldsymbol{i}\beta(x) + \boldsymbol{\varepsilon}\beta^2(x) + \boldsymbol{h}\beta^3(x)\right), \end{aligned} \tag{1.19}$$

$$\begin{aligned} LH_n(x) = {} & \alpha^n(x)\left(1 + \boldsymbol{i}\alpha(x) + \boldsymbol{\varepsilon}\alpha^2(x) + \boldsymbol{h}\alpha^3(x)\right) \\ & + \beta^n(x)\left(1 + \boldsymbol{i}\beta(x) + \boldsymbol{\varepsilon}\beta^2(x) + \boldsymbol{h}\beta^3(x)\right) \end{aligned} \tag{1.20}$$

elde edilir.

Aşağıda klasik Fibonacci sayıları için iyi bilinen bazı özdeşlikler verilecektir.

(Catalan Özdeşliği) $\Rightarrow$ $F_{n-r}F_{n+r} - (F_n)^2 = (-1)^{n-r+1}F_r^{\,2}$,
(Cassini Özdeşliği) $\Rightarrow$ $F_{n-1}F_{n+1} - (F_n)^2 = (-1)^n$,
(d'Ocagne Özdeşliği) $\Rightarrow$ $F_mF_{n+1} - F_{m+1}F_n = (-1)^nF_{m-n}$.

Şimdi bu özdeşliklerin Fibonacci ve Lucas hibrinomiyalleri için tanımlanan versiyonları verilecektir. İfadelerin daha basit görünebilmesi için;

$$\Delta(x) = \alpha(x) - \beta(x),$$
$$\hat{\alpha}(x) = 1 + \boldsymbol{i}\alpha(x) + \boldsymbol{\varepsilon}\alpha^2(x) + \boldsymbol{h}\alpha^3(x),$$
$$\hat{\beta}(x) = 1 + \boldsymbol{i}\beta(x) + \boldsymbol{\varepsilon}\beta^2(x) + \boldsymbol{h}\beta^3(x).$$

eşitlikleri kullanılacaktır.

Şimdi (1.19) ve (1.20) den yararlanarak, $\alpha(x).\beta(x) = -1$ ve $\Delta^2(x) = x^2 + 4$ olmak üzere, Fibonacci ve Lucas hibrinomiyallerinin Binet formülleri,

$$FH_n(x) = \frac{\alpha^n(x)}{\Delta(x)}\widehat{\alpha}\,(x) - \frac{\beta^n(x)}{\Delta(x)}\,\hat{\beta}(x)$$

$$LH_n(x) = \alpha^n(x)\hat{\alpha}(x) + \beta^n(x)\hat{\beta}(x)$$

şeklinde sırasıyla yeniden verilebilir [19].

Teorem 1.4.4 (Fibonacci hibrinomiyali için Catalan Özdeşliği):
$n \geq 0$, $r \geq 0$ ve $n \geq r$ olmak üzere;

$$FH_{n-r}(x).FH_{n+r}(x) - (FH_n(x)\,)^2$$
$$= \frac{(-1)^n}{x^2+4}\hat{\alpha}(x)\,\hat{\beta}(x)\left(1 - \left(\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\right)^r\right) + \frac{(-1)^n}{x^2+4}\,\hat{\beta}(x)\hat{\alpha}(x)\left(1 - \left(\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\right)^r\right) \tag{1.21}$$

eşitliği sağlanır. Burada $\alpha(x) = \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2+4}\,\right)$ ve $\beta(x) = \frac{1}{2}\ \left(x - \sqrt{x^2+4}\right)$ dir [19].

Teorem 1.4.5 (Lucas hibrinomiyali için Catalan Özdeşliği):
$n \geq 0$, $r \geq 0$ ve $n \geq r$ olmak üzere;

$$LH_{n-r}(x).LH_{n+r}(x) - \left(LH_n(x)\right)^2$$
$$= (-1)^n\hat{\alpha}(x)\hat{\beta}(x)\left(\left(\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\right)^r - 1\right) + (-1)^n\hat{\beta}(x)\hat{\alpha}(x)\left(\left(\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\right)^r - 1\right) \tag{1.22}$$

eşitliği sağlanır [9].

Sonuç 1.4.1 (Fibonacci ve Lucas hibrinomiyalleri için Cassini özdeşlikleri):

$n \geq 0$ bir tamsayı olmak üzere,

$$FH_{n-1}(x).FH_{n+1}(x) - \left(FH_n(x)\right)^2$$
$$= \frac{(-1)^{n-1}\beta(x)}{\Delta(x)}\hat{\alpha}(x)\hat{\beta}(x) - \frac{(-1)^{n-1}\alpha(x)}{\Delta(x)}\hat{\beta}(x)\hat{\alpha}(x) \tag{1.23}$$

$$LH_{n-1}(x).LH_{n+1}(x) - \left(LH_n(x)\right)^2$$
$$= (-1)^n\hat{\alpha}(x)\hat{\beta}(x)\left(\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} - 1\right) + (-1)^n\hat{\beta}(x)\hat{\alpha}(x)\left(\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} - 1\right) \tag{1.24}$$

özdeşlikleri sağlanır [9].

Teorem 1.4.6 (Fibonacci hibrinomiyali için d'Ocagne Özdeşliği):

$m \geq 0$, $n \geq 0$ ve $m \geq n$ olmak üzere,

$$FH_m(x).FH_{n+1}(x) - FH_{m+1}(x).FH_n(x)$$
$$= \frac{(-1)^n\alpha^{m-n}(x)}{\Delta(x)}\hat{\alpha}(x)\hat{\beta}(x) - \frac{(-1)^n\beta^{m-n}(x)}{\Delta(x)}\hat{\beta}(x)\hat{\alpha}(x) \tag{1.25}$$

özdeşliği sağlanır [19].

Teorem 1.4.7 (Lucas hibrinomiyali için d'Ocagne Özdeşliği):

$m \geq 0$, $n \geq 0$ ve $m \geq n$ olmak üzere,

$$LH_m(x).LH_{n+1}(x) - LH_{m+1}(x).LH_n(x)$$
$$= (-1)^n\beta^{m-n}(x)\Delta(x)\hat{\beta}(x)\hat{\alpha}(x) - (-1)^n\alpha^{m-n}(x)\Delta(x)\hat{\alpha}(x)\hat{\beta}(x) \tag{1.26}$$

özdeşliği sağlanır [19].

Teorem 1.4.8:

$m \geq 0$ ve $n \geq 0$ olmak üzere,

$$FH_m(x).LH_n(x) - LH_m(x).FH_n(x)$$
$$= \frac{2(-1)^n \alpha^{m-n}(x)}{\Delta(x)} \hat{\alpha}(x)\hat{\beta}(x) - \frac{2(-1)^n \beta^{m-n}(x)}{\Delta(x)} \hat{\beta}(x)\hat{\alpha}(x) \tag{1.27}$$

özdeşliği sağlanır [19].

Son olarak Fibonacci ve Lucas hibrinomiyallerinin üreteç fonksiyonlarını ifade eden teoremler aşağıda sırasıyla verilecektir.

Teorem 1.4.9: Fibonacci hibrinomiyalinin üreteç fonksiyonu,

$$G(t) = \frac{\boldsymbol{i}+\boldsymbol{\varepsilon}x+\boldsymbol{h}(x^2+1)+(1+\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{h}.x)t}{1-xt-t^2} \tag{1.28}$$

olarak elde edilir [19].

Teorem 1.4.10: Lucas hibrinomiyalinin üreteç fonksiyonu,

$$g(t) = \frac{LH_0(x)+(LH_1(x)-LH_0(x)x)t}{1-xt-t^2} \tag{1.29}$$

olarak elde edilir. Burada $LH_0(x) = 2 + \boldsymbol{i}x + \boldsymbol{\varepsilon}(x^2+2) + \boldsymbol{h}(x^3+3x)$ ve $LH_1(x) - LH_0(x)x = -x + 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{\varepsilon}x + \boldsymbol{h}(-3x^2+4x+2)$ dir [19].

Tanım 1.4.6: a, b, c ve d sayıları $\mathbb{R} - \{0\}$ a ait herhangi dört sayı olmak üzere, iki değişkenli şartlı Fibonacci polinomu,

$$B_n(x,y) = \begin{cases} axB_{n-1}(x,y) + cyB_{n-2}(x,y) \ , \ n \text{ çift ise} \\ bxB_{n-1}(x,y) + dyB_{n-2}(x,y) \ , \ n \text{ tek ise} \end{cases} \quad n \geq 2 \tag{1.30}$$

$B_0(x,y) = 0$ ve $B_1(x,y) = 1$ başlangıç koşullarıyla tanımlanır [18].

Lemma 1.4.1: Tanım (1.4.6)'da verilen iki değişkenli şartlı Fibonacci polinomu $B_n(x,y)$,

$$B_{2n}(x,y) = (abx^2 + (c+d)y)B_{2n-2}(x,y) - cdy^2 B_{2n-4}(x,y) \tag{1.31}$$

$$B_{2n+1}(x,y) = (abx^2 + (c+d)y)B_{2n-1}(x,y) - cdy^2 B_{2n-3}(x,y) \tag{1.32}$$

özdeşliklerini sağlar [18].

Teorem 1.4.11: İki değişkenli şartlı Fibonacci polinomu $B_n(x,y)$ 'nin üreteç fonksiyonu,

$$\breve{G}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x,y)t^n = \frac{t - axt^2 + cyt^3}{1-(abx^2+(c+d)y)t^2+cdy^2t^4} \tag{1.33}$$

şeklindedir [18].

Teorem 1.4.12: İki değişkenli şartlı Fibonacci polinomu $B_n(x,y)$ 'nin $n.$ terimi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$B_n(x,y) = \frac{(ax)^{1-\xi(n)}}{(abx^2)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}} \left[\frac{\beta_1^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}(\beta_1+(d-c)y)^{n-\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} - \beta_2^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}(\beta_2+(d-c)y)^{n-\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}}{\beta_1 - \beta_2} \right] \tag{1.34}$$

Burada β_1 ve β_2, $\lambda^2 - (abx^2 + (c-d)y)\lambda - abdx^2y = 0$ karakteristik denkleminin kökleridir [18].

BÖLÜM 2

İKİ DEĞİŞKENLİ ŞARTLI FİBONACCİ HİBRİNOMİYALLERİ

Bu bölümde iki değişkenli şartlı Fibonacci hibrinomiyalleri ve bu hibrinomiyallerin Binet formülü, üreteç fonksiyonu ve bazı önemli özdeşlikleri ele alınacaktır. Bu bölümde elde edilen tüm veriler "Generalized Bivariate Conditional Fibonacci and Lucas Hybrinomials" isimli çalışmada verilmiş olup bu makale henüz hakem incelemesindedir [23].

Aşağıdaki tanım iki değişkenli şartlı Fibonacci hibrinomiyallerini ifade etmektedir.

Tanım 2.1: x ve y herhangi iki değişken, a, b, c ve d sayıları $\mathbb{R}-\{0\}$ a ait herhangi dört sayı olmak üzere, iki değişkenli şartlı Fibonacci hibrinomiyali,

$$BH_n(x,y) = B_n(x,y) + \boldsymbol{i}B_{n+1}(x,y) + \boldsymbol{\varepsilon}B_{n+2}(x,y) + \boldsymbol{h}B_{n+3}(x,y), \qquad n \in \mathbb{N}_0 \qquad (2.1)$$

$BH_0(x) = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{\varepsilon}ax + \boldsymbol{h}(abx^2 + dy)$ ve $BH_1(x,y) = 1 + \boldsymbol{i}ax + \boldsymbol{\varepsilon}(abx^2 + dy) + \boldsymbol{h}(a^2bx^3 + adxy + cyax)$ başlangıç koşullarıyla tanımlanır [23].

Bu tanımda verilen iki değişkenli şartlı Fibonacci hibrinomiyallerinin, a, b, c ve d 'nin farklı değerleri için özel durumları aşağıdaki tablodan görülmektedir.

Tablo 2.1. İki değişkenli şartlı Fibonacci hibrinomiyallerinin a, b, c ve d 'nin farklı değerleri için özel durumları

$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{c}$	$\boldsymbol{d}$	***İki Değişkenli Şartlı Fibonacci Hibrinomiyalleri***
1	1	1	1	İki Değişkenli Fibonacci Hibrinomiyalleri
a	b	1	1	İki Değişkenli İki Periyotlu Fibonacci Hibrinomiyalleri [22]
2	2	1	1	İki Değişkenli Pell Hibrinomiyalleri
1	1	2	2	İki Değişkenli Jacobsthal Hibrinomiyalleri
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Lemma 2.1: (2.1) bağıntısı ile tanımlanan iki değişkenli şartlı Fibonacci hibrinomiyali $BH_n(x,y)$,

$$BH_{2n}(x,y) = (abx^2 + (c+d)y)BH_{2n-2}(x,y) - cdy^2 BH_{2n-4}(x,y),\ \ n \geq 2 \qquad (2.2)$$
$$BH_{2n+1}(x,y) = (abx^2 + (c+d)y)BH_{2n-1}(x,y) - cdy^2 BH_{2n-3}(x,y),\ n \geq 2 \qquad (2.3)$$

özdeşliklerini sağlar [23].

İspat: (2.1) bağıntısı ve (1.30) tanımı kullanılarak ispat tamamlanır. Gerçekten de,

$$BH_{2n}(x,y) = B_{2n}(x,y) + \boldsymbol{i}B_{2n+1}(x,y) + \boldsymbol{\varepsilon}B_{2n+2}(x,y) + \boldsymbol{h}B_{2n+3}(x,y)$$

$$= \big(axB_{2n-1}(x,y) + cyB_{2n-2}(x,y)\big) + \boldsymbol{i}\big(bxB_{2n}(x,y) + dyB_{2n-1}(x,y)\big)$$
$$+\boldsymbol{\varepsilon}\big(axB_{2n+1}(x,y) + cyB_{2n}(x,y)\big) + \boldsymbol{h}\big(bxB_{2n+2}(x,y) + dyB_{2n+1}(x,y)\big)$$

$$= \big[ax\big(bxB_{2n-2}(x,y) + dyB_{2n-3}(x,y)\big) + cyB_{2n-2}(x,y)\big]$$
$$+\boldsymbol{i}\big[bx\big(axB_{2n-1}(x,y) + cyB_{2n-2}(x,y)\big) + dyB_{2n-1}(x,y)\big]$$
$$+\boldsymbol{\varepsilon}\big[ax\big(bxB_{2n}(x,y) + dyB_{2n-1}(x,y)\big) + cyB_{2n}(x,y)\big]$$
$$+\boldsymbol{h}\big[bx\big(axB_{2n+1}(x,y) + cyB_{2n}(x,y)\big) + dyB_{2n+1}(x,y)\big]$$

$$= \big[(abx^2 + cy)B_{2n-2}(x,y) + dy\big(axB_{2n-3}(x,y)\big)\big]$$
$$+\boldsymbol{i}\big[(abx^2 + dy)B_{2n-1}(x,y) + cy\big(bxB_{2n-2}(x,y)\big)\big]$$
$$+\boldsymbol{\varepsilon}\big[(abx^2 + cy)B_{2n}(x,y) + dy\big(axB_{2n-1}(x,y)\big)\big]$$
$$+\boldsymbol{h}\big[(abx^2 + dy)B_{2n+1}(x,y) + cy\big(bxB_{2n}(x,y)\big)\big]$$

$$= \big[(abx^2 + cy)(x,y)B_{2n-2} + dy\big(B_{2n-2}(x,y) - cyB_{2n-4}(x,y)\big)\big]$$
$$+\boldsymbol{i}\big[(abx^2 + dy)B_{2n-1}(x,y) + cy\big(B_{2n-1}(x,y) - dyB_{2n-3}(x,y)\big)\big]$$
$$+\boldsymbol{\varepsilon}\big[(abx^2 + cy)B_{2n}(x,y) + dy\big(B_{2n}(x,y) - cyB_{2n-2}(x,y)\big)\big]$$

$$+\boldsymbol{h}\left[(abx^2+dy)B_{2n+1}(x,y)+cy\left(B_{2n+1}(x,y)-dyB_{2n-1}(x,y)\right)\right]$$

$$=[(abx^2+(c+d)y)B_{2n-2}(x,y)-cdy^2B_{2n-4}(x,y)]$$

$$+\boldsymbol{i}[(abx^2+(c+d)y)B_{2n-1}(x,y)-cdy^2B_{2n-3}(x,y)]$$

$$+\boldsymbol{\varepsilon}[(abx^2+(c+d)y)B_{2n}(x,y)-cdy^2B_{2n-2}(x,y)]$$

$$+\boldsymbol{h}[(abx^2+(c+d)y)B_{2n+1}(x,y)-cdy^2B_{2n-1}(x,y)]$$

$$=[(abx^2+(c+d)y)][B_{2n-2}(x,y)+\boldsymbol{i}B_{2n-1}(x,y)+\boldsymbol{\varepsilon}B_{2n}(x,y)+\boldsymbol{h}B_{2n+1}(x,y)]$$
$$-cdy^2[B_{2n-4}(x,y)+\boldsymbol{i}B_{2n-3}(x,y)+\boldsymbol{\varepsilon}B_{2n-2}(x,y)+\boldsymbol{h}B_{2n-1}(x,y)]$$

$$BH_{2n}(x,y)=(abx^2+(c+d)y)BH_{2n-2}(x,y)-\ cdy^2BH_{2n-4}(x,y)$$

elde edilir. Benzer şekilde (2.3) bağıntısı da ispatlanabilir.

$$BH_{2n+1}(x,y)=B_{2n+1}(x,y)+\boldsymbol{i}B_{2n+2}(x,y)+\boldsymbol{\varepsilon}B_{2n+3}(x,y)+\boldsymbol{h}B_{2n+4}(x,y)$$

$$=\left(bxB_{2n}(x,y)+dyB_{2n-1}(x,y)\right)+\boldsymbol{i}\left(axB_{2n+1}(x,y)+cyB_{2n}(x,y)\right)$$

$$+\boldsymbol{\varepsilon}\left(bxB_{2n+2}(x,y)+dyB_{2n+1}(x,y)\right)+\boldsymbol{h}\left(axB_{2n+3}(x,y)+cyB_{2n+2}(x,y)\right)$$

$$=\left[bx\left(axB_{2n-1}(x,y)+cyB_{2n-2}(x,y)\right)+dyB_{2n-1}(x,y)\right]$$

$$+\boldsymbol{i}\left[ax\left(bxB_{2n}(x,y)+dyB_{2n-1}(x,y)\right)+cyB_{2n}(x,y)\right]$$

$$+\boldsymbol{\varepsilon}\left[bx\left(axB_{2n+1}(x,y)+cyB_{2n}(x,y)\right)+dyB_{2n+1}(x,y)\right]$$

$$+\boldsymbol{h}\left[ax\left(bxB_{2n+2}(x,y)+dyB_{2n+1}(x,y)\right)+cyB_{2n+2}(x,y)\right]$$

$$=\left[(abx^2+dy)B_{2n-1}(x,y)+cy\left(bxB_{2n-2}(x,y)\right)\right]$$

$$+\boldsymbol{i}\left[(abx^2+cy)B_{2n}(x,y)+dy\left(axB_{2n-1}(x,y)\right)\right]$$

$$+\boldsymbol{\varepsilon}\left[(abx^2+dy)B_{2n+1}(x,y)+cy\left(bxB_{2n}(x,y)\right)\right]$$

$$+\boldsymbol{h}\left[(abx^2+cy)B_{2n+2}(x,y)+dy\left(axB_{2n+1}(x,y)\right)\right]$$

$$= \left[(abx^2 + dy)(x,y)B_{2n-1} + cy\left(B_{2n-1}(x,y) - dyB_{2n-3}(x,y)\right)\right]$$

$$+\boldsymbol{i}\left[(abx^2 + cy)B_{2n}(x,y) + dy\left(B_{2n}(x,y) - cyB_{2n-2}(x,y)\right)\right]$$

$$+\boldsymbol{\varepsilon}\left[(abx^2 + dy)B_{2n+1}(x,y) + cy\left(B_{2n+1}(x,y) - dyB_{2n-1}(x,y)\right)\right]$$

$$+\boldsymbol{h}\left[(abx^2 + cy)B_{2n+2}(x,y) + dy\left(B_{2n+2}(x,y) - cyB_{2n}(x,y)\right)\right]$$

$$= [(abx^2 + (c+d)y)B_{2n-1}(x,y) - cdy^2B_{2n-3}(x,y)]$$

$$+\boldsymbol{i}[(abx^2 + (c+d)y)B_{2n}(x,y) - cdy^2B_{2n-2}(x,y)]$$

$$+\boldsymbol{\varepsilon}[(abx^2 + (c+d)y)B_{2n+1}(x,y) - cdy^2B_{2n-1}(x,y)]$$

$$+\boldsymbol{h}[(abx^2 + (c+d)y)B_{2n+2}(x,y) - cdy^2B_{2n}(x,y)]$$

$$=[(abx^2 + (c+d)y)][B_{2n-1}(x,y) + \boldsymbol{i}B_{2n}(x,y) + \boldsymbol{\varepsilon}B_{2n+1}(x,y) + \boldsymbol{h}B_{2n+2}(x,y)]$$
$$-cdy^2[B_{2n-3}(x,y) + \boldsymbol{i}B_{2n-2}(x,y) + \boldsymbol{\varepsilon}B_{2n-1}(x,y) + \boldsymbol{h}B_{2n}(x,y)]$$

$$BH_{2n+1}(x,y) = (abx^2 + (c+d)y)BH_{2n-1}(x,y) - cdy^2BH_{2n-3}(x,y)$$

elde edilir. İspat tamamlanmıştır. ■

Aşağıdaki teorem, iki değişkenli şartlı Fibonacci hibrinomiyali $BH_n(x,y)$ ‘nin Binet formülünü ifade etmektedir.

Teorem 2.1: İki değişkenli şartlı Fibonacci hibrinomiyali $BH_n(x,y)$ ‘nin Binet formülü aşağıdaki gibidir.

$$BH_n(x,y) = \frac{\hat{\alpha}_{\xi(n)}\beta_1^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}(\beta_1+(d-c)y)^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+\xi(n)} - \hat{\gamma}_{\xi(n)}\beta_2^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}(\beta_2+(d-c)y)^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+\xi(n)}}{(abx^2)^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}(\beta_1-\beta_2)} \quad . \tag{2.4}$$

şeklindedir.

Burada β_1 ve β_2 değerleri, $\lambda^2 - (abx^2 + (c-d)y)\lambda - abdx^2y = 0$ karakteristik denkleminin kökleridir. Ayrıca $\hat{\alpha}_{\xi(n)}$ ve $\hat{\gamma}_{\xi(\mathrm{n})}$ ifadeleri,

$$\hat{\alpha}_{\xi(n)} = ax^{\xi(n+1)} + \boldsymbol{i}\frac{(ax)^{\xi(n)}(\beta_1)^{\xi(n)}}{(abx^2)^{\xi(n)}}(\beta_1 + (d-c)y)^{\xi(n+1)} + \boldsymbol{\varepsilon}\frac{(ax)^{\xi(n+1)}\beta_1}{(abx^2)}(\beta_1 + (d-c)y)$$
$$+\boldsymbol{h}\frac{(ax)^{\xi(n)}(\beta_1)^{\xi(n)+1}}{(abx^2)^{\xi(n+1)}}(\beta_1 + (d-c)y)^{\xi(n+1)+1} \qquad (2.5)$$

$$\hat{\gamma}_{\xi(\mathrm{n})} = ax^{\xi(\mathrm{n}+1)} + \boldsymbol{i}\frac{(ax)^{\xi(\mathrm{n})}(\beta_2)^{\xi(\mathrm{n})}}{(abx^2)^{\xi(\mathrm{n})}}(\beta_2 + (d-c)y)^{\xi(\mathrm{n}+1)} + \boldsymbol{\varepsilon}\frac{(ax)^{\xi(\mathrm{n}+1)}.\beta_2}{(abx^2)}(\beta_2 + (d-c)y)$$
$$+\boldsymbol{h}\frac{(ax)^{\xi(\mathrm{n})}(\beta_2)^{\xi(\mathrm{n})+1}}{(abx^2)^{\xi(\mathrm{n}+1)}}(\beta_2 + (d-c)y)^{\xi(\mathrm{n}+1)+1} \qquad (2.6)$$

şeklindedir [23].

İspat: Denklem (1.30)'de verilen iki değişkenli şartlı Fibonacci polinomunun Binet formülünde n 'in çift ve tek olması durumları ayrı ayrı incelenecektir.

$\underline{\boldsymbol{n\ = 2k\ (çift)\ olmas\imath\ durumu}}$:

$k \in \mathbb{N}_0$ için,

$$BH_{2k}(x,y) = B_{2k}(x,y) + \boldsymbol{i}B_{2k+1}(x,y) + \boldsymbol{\varepsilon}B_{2k+2}(x,y) + \boldsymbol{h}B_{2k+3}(x,y)$$

$$= \frac{(ax)^{1-\xi(2k)}}{(abx^2)^{\left\lfloor\frac{2k}{2}\right\rfloor}}\left[\frac{\beta_1^{\left\lfloor\frac{2k}{2}\right\rfloor}(\beta_1+(d-c)y)^{2k-\left\lfloor\frac{2k}{2}\right\rfloor}-\beta_2^{\left\lfloor\frac{2k}{2}\right\rfloor}(\beta_2+(d-c)y)^{2k-\left\lfloor\frac{2k}{2}\right\rfloor}}{\beta_1-\beta_2}\right]$$

$$+\boldsymbol{i}\frac{(ax)^{1-\xi(2k+1)}}{(abx^2)^{\left\lfloor\frac{2k+1}{2}\right\rfloor}}\left[\frac{\beta_1^{\left\lfloor\frac{2k+1}{2}\right\rfloor}(\beta_1+(d-c)y)^{2k+1-\left\lfloor\frac{2k+1}{2}\right\rfloor}-\beta_2^{\left\lfloor\frac{2k+1}{2}\right\rfloor}(\beta_2+(d-c)y)^{2k+1-\left\lfloor\frac{2k+1}{2}\right\rfloor}}{\beta_1-\beta_2}\right]$$

$$+\boldsymbol{\varepsilon}\frac{(ax)^{1-\xi(2k+2)}}{(abx^2)^{\left\lfloor\frac{2k+2}{2}\right\rfloor}}\left[\frac{\beta_1^{\left\lfloor\frac{2k+2}{2}\right\rfloor}(\beta_1+(d-c)y)^{2k+2-\left\lfloor\frac{2k+2}{2}\right\rfloor}-\beta_2^{\left\lfloor\frac{2k+2}{2}\right\rfloor}(\beta_2+(d-c)y)^{2k+2-\left\lfloor\frac{2k+2}{2}\right\rfloor}}{\beta_1-\beta_2}\right]$$

$$+\boldsymbol{h}\frac{(ax)^{1-\xi(2k+3)}}{(abx^2)^{\left\lfloor\frac{2k+3}{2}\right\rfloor}}\left[\frac{\beta_1^{\left\lfloor\frac{2k+3}{2}\right\rfloor}(\beta_1+(d-c)y)^{2k+3-\left\lfloor\frac{2k+3}{2}\right\rfloor}-\beta_2^{\left\lfloor\frac{2k+3}{2}\right\rfloor}(\beta_2+(d-c)y)^{2k+3-\left\lfloor\frac{2k+3}{2}\right\rfloor}}{\beta_1-\beta_2}\right]$$

$$BH_{2k}(x,y) = \frac{ax}{(abx^2)^k}\left[\frac{\beta_1{}^k(\beta_1+(d-c)y)^k-\beta_2{}^k(\beta_2+(d-c)y)^k}{\beta_1-\beta_2}\right]$$

$$+\boldsymbol{i}\frac{1}{(abx^2)^k}\left[\frac{\beta_1{}^k(\beta_1+(d-c)y)^{k+1}-\beta_2{}^k(\beta_2+(d-c)y)^{k+1}}{\beta_1-\beta_2}\right]$$

$$+\boldsymbol{\varepsilon}\frac{ax}{(abx^2)^{k+1}}\left[\frac{{\beta_1}^{k+1}(\beta_1+(d-c)y)^{k+1}-{\beta_2}^{k+1}(\beta_2+(d-c)y)^{k+1}}{\beta_1-\beta_2}\right]$$

$$+\boldsymbol{h}\frac{1}{(abx^2)^{k+1}}\left[\frac{{\beta_1}^{k+1}(\beta_1+(d-c)y)^{k+2}-{\beta_2}^{k+1}(\beta_2+(d-c)y)^{k+2}}{\beta_1-\beta_2}\right]$$

$$BH_{2k}(x,y)=\frac{{\beta_1}^k(\beta_1+(d-c)y)^k}{(abx^2)^k(\beta_1-\beta_2)}\Big[ax+\boldsymbol{i}(\beta_1+(d-c)y)+\boldsymbol{\varepsilon}\frac{ax}{abx^2}\beta_1(\beta_1+(d-c)y)+$$
$$\boldsymbol{h}\frac{1}{abx^2}\beta_1(\beta_1+(d-c)y)\Big]$$

$$-\frac{{\beta_2}^k(\beta_2+(d-c)y)^k}{(abx^2)^k(\beta_1-\beta_2)}\Big[ax+\boldsymbol{i}(\beta_2+(d-c)y)+\boldsymbol{\varepsilon}\frac{ax}{abx^2}\beta_2(\beta_2+(d-c)y)+$$
$$\boldsymbol{h}\frac{1}{abx^2}\beta_2(\beta_2+(d-c)y)\Big]$$

Burada $\hat{\alpha}_0$ ve $\hat{\gamma}_0$ ifadeleri aşağıdaki gibi seçilirse,

$$\hat{\alpha}_0=ax+\boldsymbol{i}(\beta_1+(d-c)y)+\boldsymbol{\varepsilon}\frac{ax}{abx^2}\beta_1(\beta_1+(d-c)y)+\boldsymbol{h}\frac{1}{abx^2}\beta_1(\beta_1+(d-c)y)$$

$$\hat{\gamma}_0=ax+\boldsymbol{i}(\beta_2+(d-c)y)+\boldsymbol{\varepsilon}\frac{ax}{abx^2}\beta_2(\beta_2+(d-c)y)+\boldsymbol{h}\frac{1}{abx^2}\beta_2(\beta_2+(d-c)y)$$

olur. Buradan sonuç olarak

$$BH_{2k}(x,y)=\frac{\hat{\alpha}_0{\beta_1}^k(\beta_1+(d-c)y)^k-\hat{\gamma}_0{\beta_2}^k(\beta_2+(d-c)y)^k}{(abx^2)^k(\beta_1-\beta_2)} \qquad (2.7)$$

elde edilir. Benzer şekilde $BH_{2k+1}(x,y)$ ifadesi de elde edilmelidir.

$\underline{\boldsymbol{n=2k+1}\ (\boldsymbol{tek})\ \boldsymbol{olması\ durumu}}$:

$k\in\mathbb{N}_0$ için,

$$BH_{2k+1}(x,y)=B_{2k+1}(x,y)+\boldsymbol{i}B_{2k+2}(x,y)+\boldsymbol{\varepsilon}B_{2k+3}(x,y)+\boldsymbol{h}B_{2k+4}(x,y)$$

$$=\frac{(ax)^{1-\xi(2k+1)}}{(abx^2)^{\left\lfloor\frac{2k+1}{2}\right\rfloor}}\left[\frac{\beta_1^{\left\lfloor\frac{2k+1}{2}\right\rfloor}(\beta_1+(d-c)y)^{2k+1-\left\lfloor\frac{2k+1}{2}\right\rfloor}-\beta_2^{\left\lfloor\frac{2k+1}{2}\right\rfloor}(\beta_2+(d-c)y)^{2k+1-\left\lfloor\frac{2k+1}{2}\right\rfloor}}{\beta_1-\beta_2}\right]$$

$$+\boldsymbol{i}\frac{(ax)^{1-\xi(2k+2)}}{(abx^2)^{\left\lfloor\frac{2k+2}{2}\right\rfloor}}\left[\frac{\beta_1^{\left\lfloor\frac{2k+2}{2}\right\rfloor}(\beta_1+(d-c)y)^{2k+2-\left\lfloor\frac{2k+2}{2}\right\rfloor}-\beta_2^{\left\lfloor\frac{2k+2}{2}\right\rfloor}(\beta_2+(d-c)y)^{2k+2-\left\lfloor\frac{2k+2}{2}\right\rfloor}}{\beta_1-\beta_2}\right]$$

$$+\boldsymbol{\varepsilon}\frac{(ax)^{1-\xi(2k+3)}}{(abx^2)^{\left\lfloor\frac{2k+3}{2}\right\rfloor}}\left[\frac{\beta_1^{\left\lfloor\frac{2k+3}{2}\right\rfloor}(\beta_1+(d-c)y)^{2k+3-\left\lfloor\frac{2k+3}{2}\right\rfloor}-\beta_2^{\left\lfloor\frac{2k+3}{2}\right\rfloor}(\beta_2+(d-c)y)^{2k+3-\left\lfloor\frac{2k+3}{2}\right\rfloor}}{\beta_1-\beta_2}\right]$$

$$+\boldsymbol{h}\frac{(ax)^{1-\xi(2k+4)}}{(abx^2)^{\left\lfloor\frac{2k+4}{2}\right\rfloor}}\left[\frac{\beta_1^{\left\lfloor\frac{2k+4}{2}\right\rfloor}(\beta_1+(d-c)y)^{2k+4-\left\lfloor\frac{2k+4}{2}\right\rfloor}-\beta_2^{\left\lfloor\frac{2k+4}{2}\right\rfloor}(\beta_2+(d-c)y)^{2k+4-\left\lfloor\frac{2k+4}{2}\right\rfloor}}{\beta_1-\beta_2}\right]$$

$$BH_{2k+1}(x,y)=\frac{1}{(abx^2)^k}\left[\frac{{\beta_1}^k(\beta_1+(d-c)y)^{k+1}-{\beta_2}^k(\beta_2+(d-c)y)^{k+1}}{\beta_1-\beta_2}\right]$$

$$+\boldsymbol{i}\frac{ax}{(abx^2)^{k+1}}\left[\frac{{\beta_1}^{k+1}(\beta_1+(d-c)y)^{k+1}-{\beta_2}^{k+1}(\beta_2+(d-c)y)^{k+2}}{\beta_1-\beta_2}\right]$$

$$+\boldsymbol{\varepsilon}\frac{1}{(abx^2)^{k+1}}\left[\frac{{\beta_1}^{k+1}(\beta_1+(d-c)y)^{k+2}-{\beta_2}^{k+1}(\beta_2+(d-c)y)^{k+2}}{\beta_1-\beta_2}\right]$$

$$+\boldsymbol{h}\frac{ax}{(abx^2)^{k+2}}\left[\frac{{\beta_1}^{k+2}(\beta_1+(d-c)y)^{k+2}-{\beta_2}^{k+2}(\beta_2+(d-c)y)^{k+2}}{\beta_1-\beta_2}\right]$$

$$BH_{2k+1}(x,y)=\frac{{\beta_1}^k(\beta_1+(d-c)y)^{k+1}}{(abx^2)^k(\beta_1-\beta_2)}\Big[1+\boldsymbol{i}\frac{ax}{abx^2}\beta_1+\boldsymbol{\varepsilon}\frac{1}{abx^2}\beta_1(\beta_1+(d-c)y)+ \boldsymbol{h}\frac{ax}{(abx^2)^2}{\beta_1}^2(\beta_1+(d-c)y)\Big]$$

$$-\frac{{\beta_2}^k(\beta_2+(d-c)y)^{k+1}}{(abx^2)^k(\beta_1-\beta_2)}\Big[1+\boldsymbol{i}\frac{ax}{abx^2}\beta_2+\boldsymbol{\varepsilon}\frac{1}{abx^2}\beta_2(\beta_2+(d-c)y)+ \boldsymbol{h}\frac{ax}{(abx^2)^2}{\beta_2}^2(\beta_2+(d-c)y)\Big]$$

Burada $\hat{\alpha}_1$ ve $\hat{\gamma}_1$ ifadeleri aşağıdaki gibi seçilirse,

$$\hat{\alpha}_1=1+\boldsymbol{i}\frac{ax}{abx^2}\beta_1+\boldsymbol{\varepsilon}\frac{1}{abx^2}\beta_1(\beta_1+(d-c)y)+\boldsymbol{h}\frac{ax}{(abx^2)^2}{\beta_1}^2(\beta_1+(d-c)y)$$

$$\hat{\gamma}_1=1+\boldsymbol{i}\frac{ax}{abx^2}\beta_2+\boldsymbol{\varepsilon}\frac{1}{abx^2}\beta_2(\beta_2+(d-c)y)+\boldsymbol{h}\frac{ax}{(abx^2)^2}{\beta_2}^2(\beta_2+(d-c)y)$$

olur. Buradan,

$$BH_{2k+1}(x,y) = \frac{\hat{\alpha}_1 {\beta_1}^k(\beta_1+(d-c)y)^{k+1} - \hat{\gamma}_1 {\beta_2}^k(\beta_2+(d-c)y)^{k+1}}{(abx^2)^k(\beta_{1-}\beta_2)}$$

(2.8)

elde edilir. Sonuç olarak elde edilen Denklem (2.7) ve Denklem (2.8) ‘deki eşitlikler tek bir eşitlik ile ifade edilmek istenirse, $\hat{\alpha}_{\xi(n)}$ ve $\hat{\gamma}_{\xi(n)}$

$$\hat{\alpha}_{\xi(n)} = ax^{\xi(n+1)} + \boldsymbol{i}\frac{(ax)^{\xi(n)}}{(abx^2)^{\xi(n)}}\ {\beta_1}^{\xi(n)}(\theta_1 + (d-c)y)^{\xi(n+1)}$$

$$+\boldsymbol{\varepsilon}\frac{(ax)^{\xi(n+1)}}{(abx^2)}\beta_1(\beta_1 + (d-c)y) + \boldsymbol{h}\frac{(ax)^{\xi(n)}}{(abx^2)^{\xi(n)+1}}{\beta_1}^{\xi(n)+1}(\beta_1 + (d-c)y)^{\xi(n+1)+1}$$

$$\hat{\gamma}_{\xi(n)} = ax^{\xi(n+1)} + \boldsymbol{i}\frac{(ax)^{\xi(n)}}{(abx^2)^{\xi(n)}}\ {\beta_2}^{\xi(n)}(\beta_1 + (d-c)y)^{\xi(n+1)}$$

$$+\boldsymbol{\varepsilon}\frac{(ax)^{\xi(n+1)}}{(abx^2)}\beta_2(\beta_2 + (d-c)y) + \boldsymbol{h}\frac{(ax)^{\xi(n)}}{(abx^2)^{\xi(n)+1}}{\beta_2}^{\xi(n)+1}(\beta_2 + (d-c)y)^{\xi(n+1)+1}$$

olmak üzere,

$$BH_n(x,y) = \frac{\hat{\alpha}_{\xi(n)}{\beta_1}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}(\beta_1 + (d-c)y)^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+\xi(n)} - \hat{\gamma}_{\xi(n)}{\beta_2}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}(\beta_2 + (d-c)y)^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+\xi(n)}}{(abx^2)^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}(\beta_{1-}\beta_2)}$$

olarak elde edilir ki bu da ispatı tamamlar. ■

Aşağıdaki teorem, iki değişkenli şartlı Fibonacci hibrinomiyali $BH_n(x,y)$ ‘nin üreteç fonksiyonunu ifade etmektedir.

Teorem 2.2: İki değişkenli şartlı Fibonacci hibrinomiyali $BH_n(x,y)$ ‘nin üreteç fonksiyonu,

$$G(t) = \sum_{n=0}^{\infty} BH_n(x,y)t^n \tag{2.9}$$

$$= \frac{BH_0(x,y)+BH_1(x,y)t+\left[BH_2(x,y)-\left(abx^2+(c+d)y\right)BH_0(x,y)\right]t^2+\left[BH_3(x,y)-\left(abx^2+(c+d)y\right)BH_1(x,y)\right]t^3}{1-(abx^2+(c+d)y)t^2+cdy^2t^4}$$

şeklindedir [23].

İspat: $G_0(t)=\sum_{n=0}^{\infty}BH_{2n}(x,y)t^{2n}$ ve $G_1(t)=\sum_{n=0}^{\infty}BH_{2n+1}(x,y)t^{2n+1}$ olarak tanımlanırsa $G(t)=G_0(t)+G_1(t)$ yazılabilir. Öncelikle $G_0(t)=\sum_{n=0}^{\infty}BH_{2n}(x,y)t^{2n}$ bağıntısı incelenecektir.

$$G_0(t)=\sum_{n=0}^{\infty}BH_{2n}(x,y)t^{2n}=BH_0(x,y)t^0+BH_2(x,y)t^2+\sum_{n=2}^{\infty}BH_{2n}(x,y)t^{2n}$$

$$\begin{aligned}G_0(t)&=BH_0(x,y)+BH_2(x,y)t^2\\&\quad+\sum_{n=2}^{\infty}[(abx^2+(c+d)y)BH_{2n-2}(x,y)-cdy^2BH_{2n-4}(x,y)]\,t^{2n}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}G_0(t)&=BH_0(x,y)+BH_2(x,y)t^2\\&\quad+(abx^2+(c+d)y)t^2\sum_{n=2}^{\infty}BH_{2n-2}(x,y)\,t^{2n-2}\\&\quad-cdy^2t^4\sum_{n=2}^{\infty}BH_{2n-4}(x,y)t^{2n-4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}G_0(t)&=BH_0(x,y)+BH_2(x,y)t^2\\&\quad+(abx^2+(c+d)y)t^2[\sum_{n=2}^{\infty}BH_{2n-2}\,(x,y)t^{2n-2}+BH_0(x,y)t^0-BH_0(x,y)t^0]\\&\quad-cdy^2t^4G_0(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}G_0(t)&=BH_0(x,y)+BH_2(x,y)t^2+(abx^2+(c+d)y)t^2G_0(t)\\&\quad-(abx^2+(c+d)y)t^2BH_0(x,y)-cdy^2t^4G_0(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&G_0(t)[1-(abx^2+(c+d)y)t^2+cdy^2t^4]\\&\quad=BH_0(x,y)+\big(BH_2(x,y)-(abx^2+(c+d)y)BH_0(x,y)\big)t^2\end{aligned}$$

$$G_0(t)=\frac{BH_0(x,y)+\big(BH_2(x,y)-(abx^2+(c+d)y)BH_0(x,y)\big)t^2}{1-(abx^2+(c+d)y)t^2+cdy^2t^4}$$

elde edilir. Benzer şekilde $G_1(t)=\sum_{n=0}^{\infty}BH_{2n+1}(x,y)t^{2n+1}$bağıntısı da incelenmelidir.

$$\begin{aligned}G_1(t)=\sum_{n=0}^{\infty}BH_{2n+1}(x,y)t^{2n+1}&=BH_1(x,y)t^1+BH_3(x,y)t^3\\&\quad+\sum_{n=2}^{\infty}BH_{2n+1}(x,y)t^{2n+1}\end{aligned}$$

$$G_1(t) = BH_1(x,y)t + BH_3(x,y)t^3 + \sum_{n=2}^{\infty}[(abx^2 + (c+d)y)BH_{2n-1}(x,y) - cdy^2 BH_{2n-3}(x,y)]\, t^{2n+1}$$

$$G_1(t) = BH_1(x,y)t + BH_3(x,y)t^3 + (abx^2 + (c+d)y)t^2 \sum_{n=2}^{\infty} BH_{2n-1}(x,y)\, t^{2n-1} - cdy^2 t^4 \sum_{n=2}^{\infty} BH_{2n-3}(x,y)t^{2n-3}$$

$$G_1(t) = BH_1(x,y)t + BH_3(x,y)t^3 + (abx^2 + (c+d)y)t^2 [\sum_{n=2}^{\infty} BH_{2n-1}(x,y)\, t^{2n-1} + BH_1(x,y)t^1 - BH_1(x,y)t^1] - cdy^2 t^4 G_1(t)$$

$$G_1(t) = BH_1(x,y)t + BH_3(x,y)t^3 + (abx^2 + (c+d)y)t^2 G_1(t) - (abx^2 + (c+d)y)t^3 BH_1(x,y) - cdy^2 t^4 G_1(t)$$

$$G_1(t)[1 - (abx^2 + (c+d)y)t^2 + cdy^2 t^4] = BH_1(x,y)t + \big(BH_3(x,y) - (abx^2 + (c+d)y)BH_1(x,y)\big)t^3$$

$$G_1(t) = \frac{BH_1(x,y)t + \big(BH_3(x,y) - (abx^2 + (c+d)y)BH_1(x,y)\big)t^3}{1 - (abx^2 + (c+d)y)t^2 + cdy^2 t^4}$$

elde edilir. $G(t) = G_0(t) + G_1(t)$ toplamı kullanılırsa,

$$G(t) = \frac{1}{1 - (abx^2 + (c+d)y)t^2 + cdy^2 t^4}\Big[BH_0(x,y) + BH_1(x,y)t + \big(BH_2(x,y) - (abx^2 + (c+d)y)BH_0(x,y)\big)t^2 + \big(BH_3(x,y) - (abx^2 + (c+d)y)BH_1(x,y)\big)t^3\Big]$$

elde edilir. ■

Aşağıdaki teorem, iki değişkenli şartlı Fibonacci hibrinomiyali $BH_n(x,y)$ için Catalan özdeşliğini ifade etmektedir.

Teorem 2.3: $n \geq 0$, $r \geq 0$ ve $n \geq r$ olmak üzere,

$$BH_{2(n+r)+\xi(i)}(x,y).BH_{2(n-r)+\xi(i)}(x,y)-\left(BH_{2n+\xi(i)}(x,y)\right)^2$$

$$=\frac{1}{(abx^2)^{2n}(\beta_1-\beta_2)^2}\left[\hat{\alpha}_{\xi(i)}\hat{\gamma}_{\xi(i)}{\beta_1}^n{\beta_2}^n(\beta_1+(d-c)y)^{n+\xi(i)}(\beta_2+(d-c)y)^{n+\xi(i)}.\left[1-\left(\frac{\beta_1(\beta_1+(d-c)y)}{\beta_2(\beta_2+(d-c)y)}\right)^r\right]\right]$$

$$+\frac{1}{(abx^2)^{2n}(\beta_1-\beta_2)^2}\left[\hat{\gamma}_{\xi(i)}\hat{\alpha}_{\xi(i)}{\beta_2}^n{\beta_1}^n(\beta_2+(d-c)y)^{n+\xi(i)}(\beta_1+(d-c)y)^{n+\xi(i)}\left[1-\left(\frac{\beta_2(\beta_2+(d-c)y)}{\beta_2(\beta_2+(d-c)y)}\right)^r\right]\right]$$

(2.10)

bağıntısı sağlanır [23].

İspat: Bu teoremi ispatlamak için iki farklı durum incelenecektir.

i = 0 olması durumu:

$$BH_{2(n+r)}(x,y)=\frac{\hat{\alpha}_0{\beta_1}^{(n+r)}(\beta_1+(d-c)y)^{(n+r)}-\hat{\gamma}_0{\beta_2}^{(n+r)}(\beta_2+(d-c)y)^{(n+r)}}{(abx^2)^{n+r}(\beta_1-\beta_2)} \quad (2.11)$$

$$BH_{2(n-r)}(x,y)=\frac{\hat{\alpha}_0{\beta_1}^{(n-r)}(\beta_1+(d-c)y)^{(n-r)}-\hat{\gamma}_0{\beta_2}^{(n-r)}(\beta_2+(d-c)y)^{(n-r)}}{(abx^2)^{n-r}(\beta_1-\beta_2)} \quad (2.12)$$

$$BH_{2n}(x,y)=\frac{\hat{\alpha}_0{\beta_1}^n(\beta_1+(d-c)y)^n-\hat{\gamma}_0{\beta_2}^n(\beta_2+(d-c)y)^n}{(abx^2)^n(\beta_1-\beta_2)} \quad (2.13)$$

elde edilir. (2.11), (2.12) ve (2.13) bağıntıları kullanılarak aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$BH_{2(n+r)}(x,y).BH_{2(n-r)}(x,y)-(BH_{2n}(x,y))^2$$

$$=\frac{1}{(abx^2)^{2n}(\beta_1-\beta_2)^2}\left[\hat{\alpha}_0\hat{\gamma}_0{\beta_1}^n{\beta_2}^n(\beta_1+(d-c)y)^n(\beta_2+(d-c)y)^n\left[1-\left(\frac{\beta_1(\beta_1+(d-c)y)}{\beta_2(\beta_2+(d-c)y)}\right)^r\right]\right]$$

$$+\frac{1}{(abx^2)^{2n}(\beta_1-\beta_2)^2}\left[\hat{\gamma}_0\hat{\alpha}_0{\beta_2}^n{\beta_1}^n(\beta_2+(d-c)y)^n(\beta_1+(d-c)y)^n\left[1-\left(\frac{\beta_2(\beta_2+(d-c)y)}{\beta_1(\beta_1+(d-c)y)}\right)^r\right]\right]$$

$\underline{\boldsymbol{i = 1}\ \boldsymbol{olması\ durumu}}$:

$$BH_{2(n+r)+1}(x,y) = \frac{\hat{\alpha}_1 {\beta_1}^{(n+r)}(\beta_1+(d-c)y)^{(n+r)+1} - \hat{\gamma}_1 {\beta_2}^{(n+r)}(\beta_2+(d-c)y)^{(n+r)+1}}{(abx^2)^{n+r}(\beta_1-\beta_2)} \tag{2.14}$$

$$BH_{2(n-r)-1}(x,y) = \frac{\hat{\alpha}_1 {\beta_1}^{(n-r)}(\beta_1+(d-c)y)^{(n-r)+1} - \hat{\gamma}_1 {\beta_2}^{(n-r)}(\beta_2+(d-c)y)^{(n-r)+1}}{(abx^2)^{n-r}(\beta_1-\beta_2)} \tag{2.15}$$

$$BH_{2n+1}(x,y) = \frac{\hat{\alpha}_1 {\beta_1}^{n}(\beta_1+(d-c)y)^{n+1} - \hat{\gamma}_1 {\beta_2}^{n}(\beta_2+(d-c)y)^{n+1}}{(abx^2)^{n}(\beta_1-\beta_2)} \tag{2.16}$$

elde edilir. (2.14), (2.15) ve (2.16) bağıntıları kullanılarak aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$BH_{2(n+r)+1}(x,y).BH_{2(n-r)+1}(x,y) - (BH_{2n+1}(x,y))^2$$

$$= \frac{1}{(abx^2)^{2n}(\beta_1-\beta_2)^2}\left[\hat{\alpha}_1\hat{\gamma}_1{\beta_1}^n{\beta_2}^n(\beta_1+(d-c)y)^{n+1}(\beta_2+(d-c)y)^{n+1}\left[1-\left(\frac{\beta_1(\beta_1+(d-c)y)}{\beta_2(\beta_2+(d-c)y)}\right)^r\right]\right]$$

$$+\frac{1}{(abx^2)^{2n}(\beta_1-\beta_2)^2}\left[\hat{\gamma}_1\hat{\alpha}_1{\beta_2}^n{\beta_1}^n(\beta_2+(d-c)y)^{n+1}(\beta_1+(d-c)y)^{n+1}\left[1-\left(\frac{\beta_2(\beta_2+(d-c)y)}{\beta_1(\beta_1+(d-c)y)}\right)^r\right]\right]$$

Sonuç olarak elde edilen bu iki bağıntı tek bir formülle ifade edilirse,

$$BH_{2(n+r)+\xi(i)}(x,y).BH_{2(n-r)+\xi(i)}(x,y)\ \left(BH_{2n+\xi(i)}(x,y)\right)^2$$

$$= \frac{1}{(abx^2)^{2n}(\beta_1-\beta_2)^2}\left[\hat{\alpha}_{\xi(i)}\hat{\gamma}_{\xi(i)}{\beta_1}^n{\beta_2}^n(\beta_1+(d-c)y)^{n+\xi(i)}(\beta_2+(d-c)y)^{n+\xi(i)}.\left[1-\left(\frac{\beta_1(\beta_1+(d-c)y)}{\beta_2(\beta_2+(d-c)y)}\right)^r\right]\right]$$

$$+\frac{1}{(abx^2)^{2n}(\beta_1-\beta_2)^2}\left[\hat{\gamma}_{\xi(i)}\hat{\alpha}_{\xi(i)}{\beta_2}^n{\beta_1}^n(\beta_2+(d-c)y)^{n+\xi(i)}(\beta_1+(d-c)y)^{n+\xi(i)}\left[1-\left(\frac{\beta_2(\beta_2+(d-c)y)}{\beta_2(\beta_2+(d-c)y)}\right)^r\right]\right]$$

bulunur. ■

Sonuç 2.1 (Cassini Özdeşliği):

$n \geq 0$ olsun. O halde,

$$BH_{2(n+1)+\xi(i)}(x,y).BH_{2(n-1)+\xi(i)}(x,y)\ \left(BH_{2n+\xi(i)}(x,y)\right)^2$$

$$=\frac{1}{(abx^2)^{2n}(\beta_1-\beta_2)^2}\left[\hat{\alpha}_{\xi(i)}\hat{\gamma}_{\xi(i)}{\beta_1}^n{\beta_2}^n(\beta_1+(d-c)y)^{n+\xi(i)}(\beta_2+(d-c)y)^{n+\xi(i)}.\left[1-\left(\frac{\beta_1(\beta_1+(d-c)y)}{\beta_2(\beta_2+(d-c)y)}\right)\right]\right]$$

$$+\frac{1}{(abx^2)^{2n}(\beta_1-\beta_2)^2}\left[\hat{\gamma}_{\xi(i)}\hat{\alpha}_{\xi(i)}{\beta_2}^n{\beta_1}^n(\beta_2+(d-c)y)^{n+\xi(i)}(\beta_1+(d-c)y)^{n+\xi(i)}\left[1-\left(\frac{\beta_2(\beta_2+(d-c)y)}{\beta_2(\beta_2+(d-c)y)}\right)\right]\right]$$

elde edilir [23].

İspat: Catalan özdeşliğinde $r=1$ alınırsa bu özdeşlik sağlandığı kolaylıkla görülür. ■

BÖLÜM 3

İKİ DEĞİŞKENLİ ŞARTLI LUCAS HİBRİNOMİYALLERİ

Bu bölümde iki değişkenli şartlı Lucas hibrinomiyalleri ve bu hibrinomiyallerin Binet formülü, üreteç fonksiyonu ve bazı önemli özdeşlikleri ele alınacaktır. Fakat bu hibrinomiyalleri tanımlayabilmek için öncelikle iki değişkenli şartlı Lucas polinomlarını tanımlamak gerekmektedir. Bu bölümde elde edilen tüm veriler "Generalized Bivariate Conditional Fibonacci and Lucas Hybrinomials" isimli çalışmada verilmiş olup bu makale henüz hakem incelemesindedir [23].

Bu bölümde asıl incelecek olan iki değişkenli şartlı Lucas hibrinomiyalleri tanımına geçmeden önce iki değişkenli şartlı Lucas polinomları hakkında bilgi verilmelidir.

3.1. İki Değişkenli Şartlı Lucas Polinomları

İlk olarak iki değişkenli şartlı Lucas polinomunun tanımı verilecektir.

Tanım 3.1.1: a, b, c ve d sayıları $\mathbb{R}-\{0\}$ a ait herhangi dört sayı olmak üzere, iki değişkenli şartlı Lucas polinomu,

$$L_n(x,y)=\begin{cases} bxL_{n-1}(x,y)+dyL_{n-2}(x,y) & ,n\ çift\ ise \\ axL_{n-1}(x,y)+cyL_{n-2}(x,y) & ,n\ tek\ ise \end{cases} \qquad n\geq 2 \tag{3.1}$$

$L_0(x,y)=2,\ \ L_1(x,y)=ax$ başlangıç koşullarıyla tanımlanır [23].

Lemma 3.1.1: (3.1) bağıntısında tanımlanan iki değişkenli şartlı Lucas polinomu $L_n(x,y)$,

$$L_{2n}(x,y)=(abx^2+(c+d)y)L_{2n-2}(x,y)-cdy^2L_{2n-4}(x,y) \tag{3.2}$$

$$L_{2n+1}(x,y)=(abx^2+(c+d)y)L_{2n-1}(x,y)-cdy^2L_{2n-3}(x,y) \tag{3.3}$$

özdeşliklerini sağlar [23].

İspat: Tanım 3.1.1 'den,

$$L_{2n}(x,y) = bxL_{2n-1}(x,y) + dyL_{2n-2}(x,y)$$

$$= bx\big(axL_{2n-2}(x,y) + cyL_{2n-3}(x,y)\big) + dyL_{2n-2}(x,y)$$

$$= (abx^2 + dy)L_{2n-2}(x,y) + cy\big(bxL_{2n-3}(x,y)\big)$$

$$= (abx^2 + dy)L_{2n-2}(x,y) + cy\big(L_{2n-2}(x,y) - dyL_{2n-4}(x,y)\big)$$

$$= (abx^2 + (c+d)y)L_{2n-2}(x,y) - cdy^2L_{2n-4}(x,y)$$

elde edilir. Benzer şekilde yukarıdaki işlem adımları takip edilirse (3.3) eşitliğinin sağlandığı görülebilir. Gerçekten de,

$$L_{2n+1}(x,y) = axL_{2n}(x,y) + cyL_{2n-1}(x,y)$$

$$= ax\big(bxL_{2n-1}(x,y) + dyL_{2n-2}(x,y)\big) + cyL_{2n-1}(x,y)$$

$$= (abx^2 + cy)L_{2n-1}(x,y) + dy\big(axL_{2n-2}(x,y)\big)$$

$$= (abx^2 + cy)L_{2n-1}(x,y) + dy\big(L_{2n-1}(x,y) - cyL_{2n-3}(x,y)\big)$$

$$= (abx^2 + (c+d)y)L_{2n-1}(x,y) - cdy^2L_{2n-3}(x,y)$$

olur ki ispat tamamlanır. ■

Aşağıdaki teorem, iki değişkenli şartlı Lucas polinomu $L_n(x,y)$ 'nin üreteç fonksiyonunu ifade etmektedir.

Teorem 3.1.1: İki değişkenli şartlı Lucas polinomu $L_n(x,y)$ 'nin üreteç fonksiyonu,

$$E(t) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x,y)t^n = \frac{2+axt-(abx^2+2cy)t^2+adxyt^3}{1-(abx^2+(c+d)y)t^2+cdy^2t^4} \tag{3.4}$$

şeklindedir [23].

İspat: İlk olarak $E_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} L_{2n}(x,y)t^{2n}$ ve $E_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} L_{2n+1}(x,y)t^{2n+1}$ olarak tanımlanırsa $E(t) = E_0(t) + E_1(t)$ yazılabilir. Öncelikle $E_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} L_{2n}(x,y)t^{2n}$ bağıntısı incelenecektir.

$$E_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} L_{2n}(x,y)t^{2n}$$

$$= L_0(x,y)t^0 + L_2(x,y)t^2 + \sum_{n=2}^{\infty} L_{2n}(x,y)\, t^{2n}$$

$$= L_0(x,y)t^0 + L_2(x,y)t^2$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty}[(abx^2 + (c+d)y)L_{2n-2}(x,y) - cdy^2 L_{2n-4}(x,y)]\, t^{2n}$$

$$E_0(t) = 2 + (abx^2 + 2dy)t^2$$

$$+(abx^2 + (c+d)y)t^2 \sum_{n=2}^{\infty} L_{2n-2}(x,y)\, t^{2n-2}$$

$$-cdy^2 t^4 \sum_{n=2}^{\infty} L_{2n-4}(x,y)t^{2n-4}$$

$$E_0(t) = 2 + (abx^2 + 2dy)t^2$$

$$+(abx^2 + (c+d)y)t^2 [\sum_{n=2}^{\infty} L_{2n-2}(x,y)\, t^{2n-2} + L_0(x,y)t^0 - L_0(x,y)t^0]$$

$$-cdy^2 t^4 E_0(t)$$

$$E_0(t) = 2 + (abx^2 + 2dy)t^2 + (abx^2 + (c+d)y)t^2[E_0(t) - 2] - cdy^2 t^4 E_0(t)$$

$$E_0(t)[1 - (abx^2 + (c+d)y)t^2 + cdy^2 t^4] = 2 - (abx^2 + 2cy)t^2$$

$$E_0(t) = \frac{2-(abx^2+2cy)t^2}{1-(abx^2+(c+d)y)t^2+cdy^2t^4} \tag{3.5}$$

elde edilir. Benzer şekilde $E_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} L_{2n+1} t^{2n+1}$ bağıntısı da incelenmelidir.

$$E_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} L_{2n+1}(x,y)t^{2n+1}$$

$$= L_1(x,y)t^1 + L_3(x,y)t^3 + \sum_{n=2}^{\infty} L_{2n+1}(x,y)t^{2n+1}$$

$$= L_1(x,y)t^1 + L_3(x,y)t^3$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty}[(abx^2 + (c+d)y)L_{2n-1}(x,y) - cdy^2 L_{2n-3}(x,y)]\, t^{2n+1}$$

$$E_1(t) = axt + (a^2bx^3 + 2adxy + acxy)t^3$$
$$+(abx^2 + (c+d)y)t^2 \sum_{n=2}^{\infty} L_{2n-1}(x,y)\, t^{2n-1}$$
$$-cdy^2t^4 \sum_{n=2}^{\infty} L_{2n-3}(x,y)t^{2n-3}$$

$$E_1(t) = axt + (a^2bx^3 + 2adxy + acxy)t^3$$
$$+(abx^2 + (c+d)y)t^2\left[\sum_{n=2}^{\infty} L_{2n-1}(x,y)\, t^{2n-1} + L_1(x,y)t^1 - L_1(x,y)t^1\right]$$
$$-cdy^2t^4E_1(t)$$

$$E_1(t) = axt + (a^2bx^3 + 2adxy + acxy)t^3 + (abx^2 + (c+d)y)t^2[E_1(t) - axt]$$
$$-cdy^2t^4E_1(t)$$

$$E_1(t)[1 - (abx^2 + (c+d)y)t^2 + cdy^2t^4] = axt + adxyt^3$$

$$E_1(t) = \frac{axt + adxyt^3}{1 - (abx^2 + (c+d)y)t^2 + cdy^2t^4} \tag{3.6}$$

elde edilir. (3.5) ve (3.6) eşitlikleri $E(t) = E_0(t) + E_1(t)$ ifadesinde yerine yazılırsa,

$$E(t) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x,y)t^n = \frac{2 + axt - (abx^2 + 2cy)t^2 + adxyt^3}{1 - (abx^2 + (c+d)y)t^2 + cdy^2t^4}$$

elde edilir. İspat tamamlanmıştır. ■

Aşağıdaki teorem, iki değişkenli şartlı Lucas polinomu $L_n(x,y)$ ‘nin Binet formülünü ifade etmektedir.

Teorem 3.1.2: İki değişkenli şartlı Lucas polinomu $L_n(x,y)$ ‘nin n. terimi,

$$L_n(x,y) = \frac{(-ax)^{\xi(n)}}{\beta_1 - \beta_2}\Big[\big(\xi(n+1)\beta_1 + (-1)^{\xi(n+1)}\beta_2 + (-1)^{\xi(n+1)}(2)^{\xi(n)}dy + \xi(n+1)cy\big)(\beta_2 + dy)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$
$$-\big(\xi(n+1)\beta_2 + (-1)^{\xi(n+1)}\beta_1 + (-1)^{\xi(n+1)}(2)^{\xi(n)}dy + \xi(n+1)cy\big)(\beta_1 + dy)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\Big] \tag{3.7}$$

şeklindedir. Burada β_1 ve β_2, $\lambda^2-(abx^2+(c-d)y)\lambda-abdx^2y=0$ karakteristik denkleminin kökleridir [23].

İspat: İlk olarak β_1 ve β_2 kökleri için sağlanan özdeşlikler verilsin.

- $\beta_1+\beta_2=abx^2+(c-d)y$
- $\beta_1\beta_2=-abdx^2y$
- $(\beta_1+dy)(\beta_2+dy)=cdy^2$
- $(\beta_1+dy)(abx^2)=\beta_1(\beta_1+(d-c)y\ )$
- $(\beta_2+dy)(abx^2)=\beta_2(\beta_2+(d-c)y\ )$

Burada $\beta_1(x,y)=\beta_1$ ve $\beta_2(x,y)=\beta_2$ dir.

$E_0(t)=\sum_{n=0}^{\infty}L_{2n}(x,y)t^{2n}$ ve $E_1(t)=\sum_{n=0}^{\infty}L_{2n+1}(x,y)t^{2n+1}$ olarak tanımlanırsa $E(t)=E_0(t)+E_1(t)$ yazılabildiği bilinmektedir.

$$\frac{AZ-B}{Z^2-C}=\sum_{n=0}^{\infty}BC^{-n-1}Z^{2n}-\sum_{n=0}^{\infty}AC^{-n-1}Z^{2n+1}$$

Maclaurin seri açılımından hem $E_0(t)$ hem de $E_1(t)$ eşitlikleri aşağıdaki gibi yeniden düzenlenebilir. İlk olarak $E_0(t)$ ele alınsın.

$$E_0(t)=\frac{1}{cdy^2(\beta_1-\beta_2)}\left[\frac{2cdy^2-(abx^2+2cy)(\beta_1+dy)}{t^2-\left(\frac{\beta_1+dy}{cdy^2}\right)}-\frac{2cdy^2-(abx^2+2cy)(\beta_2+dy)}{t^2-\left(\frac{\beta_2+dy}{cdy^2}\right)}\right]$$

$$E_0(t)=\frac{1}{cdy^2(\beta_1-\beta_2)}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left((abx^2+2cy)(\beta_1+dy)-2cdy^2\ \right)\left(\frac{\beta_1+dy}{cdy^2}\right)^{-n-1}\right]t^{2n}$$
$$-\frac{1}{cdy^2(\beta_1-\beta_2)}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left((abx^2+2cy)(\beta_2+dy)-2cdy^2\right)\left(\frac{\beta_2+dy}{cdy^2}\right)^{-n-1}\right]t^{2n}$$

$$E_0(t)=\frac{1}{cdy^2(\beta_1-\beta_2)}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left((abx^2+2cy)(\beta_1+dy)-2cdy^2\right)(\beta_2+dy)^{n+1}\right]t^{2n}$$

$$-\frac{1}{cdy^2(\beta_1-\beta_2)}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left((abx^2+2cy)(\beta_2+dy)-2cdy^2\right)(\beta_1+dy)^{n+1}\right]t^{2n}$$

$$E_0(t)=\frac{cdy^2}{cdy^2(\beta_1-\beta_2)}\sum_{n=0}^{\infty}[(abx^2-2\beta_2+2cy-2dy)(\beta_2+dy)^n]\,t^{2n}$$
$$-\frac{cdy^2}{cdy^2(\beta_1-\beta_2)}\sum_{n=0}^{\infty}[(abx^2-2\beta_1+2cy-2dy)(\beta_1+dy)^n]\,t^{2n}$$

$$E_0(t)=\frac{1}{(\beta_1-\beta_2)}\sum_{n=0}^{\infty}[(abx^2-2\beta_2+2cy-2dy)(\beta_2+dy)^n]\,t^{2n}$$
$$-\frac{1}{(\beta_1-\beta_2)}\sum_{n=0}^{\infty}[(abx^2-2\beta_1+2cy-2dy)(\beta_1+dy)^n]\,t^{2n}$$

$$E_0(t)=\frac{1}{(\beta_1-\beta_2)}\sum_{n=0}^{\infty}[(\beta_1-\beta_2-(d-c)y)(\beta_2+dy)^n]\,t^{2n}$$
$$-\frac{1}{(\beta_1-\beta_2)}\sum_{n=0}^{\infty}[(\beta_2-\beta_1-(d-c)y)(\beta_1+dy)^n]\,t^{2n}$$

elde edilir. $E_0(t)$ ‘ye benzer şekilde $E_1(t)$ eşitliği de aşağıdaki gibi yeniden düzenlenirse

$$E_1(t)=\frac{1}{cdy^2(\beta_1-\beta_2)}\left[\frac{(adxy(\beta_1+dy)+adcxy^2)t}{\left(t^2-\left(\frac{\beta_1+dy}{cdy^2}\right)\right)}-\frac{(adxy(\beta_2+dy)+adcxy^2)t}{\left(t^2-\left(\frac{\beta_2+dy}{cdy^2}\right)\right)}\right]$$

$$E_1(t)=\frac{1}{cdy^2(\beta_1-\beta_2)}\sum_{n=0}^{\infty}[(-adxy(\beta_1+dy)+adcxy^2)(\beta_2+dy)^{n+1}]\,t^{2n+1}$$
$$+\frac{1}{cdy^2(\beta_1-\beta_2)}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(adxy(\beta_2+dy)+adcxy^2)(\beta_1+dy)^{n+1}\right]t^{2n+1}$$

$$E_1(t)=\frac{-1}{(\beta_1-\beta_2)}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(adxy+ax(\beta_2+dy)\right)(\beta_2+dy)^n\right]t^{2n+1}$$
$$+\frac{1}{(\beta_1-\beta_2)}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(adxy+ax(\beta_1+dy)\right)(\beta_1+dy)^n\right]t^{2n+1}$$

$$E_1(t)=\frac{-ax}{(\beta_1-\beta_2)}\sum_{n=0}^{\infty}[(dy+\beta_2+dy)(\beta_2+dy)^n-(dy+\beta_1+dy)(\beta_1+dy)^n]\,t^{2n+1}$$

$$E_1(t)=\frac{-ax}{(\beta_1-\beta_2)}\sum_{n=0}^{\infty}[(\beta_2+2dy)(\beta_2+dy)^n-(\beta_1+2dy)(\beta_1+dy)^n]\,t^{2n+1}$$

elde edilir. $E(t) = E_0(t) + E_1(t)$ olduğuna göre;

$$E(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ax)^{\xi(n)}}{(\beta_1 - \beta_2)} [\left(\xi(n+1)\beta_1 + (-1)^{\xi(n+1)}\beta_2 + (-1)^{\xi(n+1)}(2)^{\xi(n)}dy + \xi(n+1)cy\right)(\beta_2 + dy)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}$$
$$-\left(\xi(n+1)\beta_2 + (-1)^{\xi(n+1)}\beta_1 + (-1)^{\xi(n+1)}(2)^{\xi(n)}dy + \xi(n+1)cy\right)(\beta_1 + dy)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}]$$

dir. Sonuç olarak,

$$L_n(x,y) = \frac{(-ax)^{\xi(n)}}{(\beta_1 - \beta_2)} [\left(\xi(n+1)\beta_1 + (-1)^{\xi(n+1)}\beta_2 + (-1)^{\xi(n+1)}(2)^{\xi(n)}dy + \xi(n+1)cy\right)(\beta_2 + dy)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}$$
$$-\left(\xi(n+1)\beta_2 + (-1)^{\xi(n+1)}\beta_1 + (-1)^{\xi(n+1)}(2)^{\xi(n)}dy + \xi(n+1)cy\right)(\beta_1 + dy)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}]$$

şeklinde elde edilir. ■

3.2. İki Değişkenli Şartlı Lucas Hibrinomiyalleri

Bu alt bölümde iki değişkenli şartlı Lucas hibrinomiyallerinin tanımı, Binet formülü, üreteç fonksiyonu ve bazı önemli özdeşlikleri sunulacaktır. İlk olarak, iki değişkenli şartlı Lucas hibrinomiyalinin tanımı verilecektir.

Tanım 3.2.1: x ve y herhangi iki değişken, a, b, c ve d sayıları $\mathbb{R} - \{0\}$ a ait herhangi dört sayı olmak üzere, iki değişkenli şartlı Lucas hibrinomiyali,

$$LH_n(x,y) = L_n(x,y) + \boldsymbol{i}L_{n+1}(x,y) + \boldsymbol{\varepsilon}L_{n+2}(x,y) + \boldsymbol{h}L_{n+3}(x,y)\,, \quad n \geq 0 \tag{3.8}$$

$LH_0(x) = 2 + \boldsymbol{i}(ax) + \boldsymbol{\varepsilon}(abx^2 + 2dy) + \boldsymbol{h}(a^2bx^3 + 2adxy + acxy)$ ve
$LH_1(x,y) = ax + \boldsymbol{i}(abx^2 + 2dy) + \boldsymbol{\varepsilon}(a^2bx^3 + 2adxy + acxy) + \boldsymbol{h}(a^2b^2x^4 + 2bcdx^2y + abcx^2y + abdx^2y + 2d^2y^2)$ başlangıç koşullarıyla tanımlanır [23].

Bu tanımda verilen iki değişkenli şartlı Lucas hibrinomiyallerinin, a, b, c ve d 'nin farklı değerleri için özel durumları aşağıdaki tablodan görülmektedir.

Tablo 3.1. İki değişkenli şartlı Lucas hibrinomiyallerinin a, b, c ve d 'nin farklı değerleri için özel durumları

a	***b***	***c***	***d***	***İki Değişkenli Şartlı Lucas Hibrinomiyalleri***
1	1	1	1	İki Değişkenli Lucas Hibrinomiyalleri
a	b	1	1	İki Değişkenli İki Periyotlu Lucas Hibrinomiyalleri
2	2	1	1	İki Değişkenli Pell Lucas Hibrinomiyalleri
1	1	2	2	İki Değişkenli Jacobsthal Lucas Hibrinomiyalleri
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Lemma 3.2.1 [23]: (3.8) bağıntısı ile tanımlanan iki değişkenli şartlı Lucas hibrinomiyali $LH_n(x,y)$, aşağıdaki özdeşlikleri sağlar.

$$LH_{2n}(x,y) = (abx^2 + (c+d)y)LH_{2n-2}(x,y) - cdy^2 LH_{2n-4}(x,y) \tag{3.9}$$

$$LH_{2n+1}(x,y) = (abx^2 + (c+d)y)LH_{2n-1}(x,y) - cdy^2 LH_{2n-3}(x,y). \tag{3.10}$$

İspat: (3.8) bağıntısı ve (3.1) tanımı kullanılarak ispat sağlanır. İlk olarak (3.9) bağıntısı incelenecektir.

$$\begin{aligned}
LH_{2n}(x,y) &= L_{2n}(x,y) + \boldsymbol{i}L_{2n+1}(x,y) + \boldsymbol{\varepsilon}L_{2n+2}(x,y) + \boldsymbol{h}L_{2n+3}(x,y) \\
&= bxL_{2n-1}(x,y) + dyL_{2n-2}(x,y) + \boldsymbol{i}\big(axL_{2n}(x,y) + cyL_{2n-1}(x,y)\big) \\
&\quad +\boldsymbol{\varepsilon}\big(bxL_{2n+1}(x,y) + dyL_{2n}(x,y)\big) \\
&\quad +\boldsymbol{h}\big(axL_{2n+2}(x,y) + cyL_{2n+1}(x,y)\big) \\
&= \big[bx\big(axL_{2n-2}(x,y)\big) + cyL_{2n-3}(x,y) + dyL_{2n-2}(x,y)\big] \\
&\quad +\boldsymbol{i}\big[ax\big(bxL_{2n-1}(x,y) + dyL_{2n-2}(x,y)\big) + cyL_{2n-1}(x,y)\big] \\
&\quad +\boldsymbol{\varepsilon}\big[bx\big(axL_{2n}(x,y) + cyL_{2n-1}(x,y)\big) + dyL_{2n}(x,y)\big] \\
&\quad +\boldsymbol{h}\big[ax\big(bxL_{2n+1}(x,y) + dyL_{2n}(x,y)\big) + cyL_{2n+1}(x,y)\big] \\
&= \big[(abx^2 + dy)L_{2n-2}(x,y) + cy\big(bxL_{2n-3}(x,y)\big)\big] \\
&\quad +\boldsymbol{i}\big[(abx^2 + cy)L_{2n-1}(x,y) + dy\big(axL_{2n-2}(x,y)\big)\big] \\
&\quad +\boldsymbol{\varepsilon}\big[(abx^2 + dy)L_{2n}(x,y) + cy\big(bxL_{2n-1}(x,y)\big)\big]
\end{aligned}$$

$$+\boldsymbol{h}\big[(abx^2+cy)L_{2n+1}(x,y)+dy\big(axL_{2n}(x,y)\big)\big]$$

$$=\big[(abx^2+dy)L_{2n-2}(x,y)+cy\big(L_{2n-2}(x,y)-dyL_{2n-4}(x,y)\big)\big]$$
$$+\boldsymbol{i}\big[(abx^2+cy)L_{2n-1}(x,y)+dy\big(L_{2n-1}(x,y)-cyL_{2n-3}(x,y)\big)\big]$$
$$+\boldsymbol{\varepsilon}\big[(abx^2+dy)L_{2n}(x,y)+cy\big(L_{2n}(x,y)-dyL_{2n-2}(x,y)\big)\big]$$
$$+\boldsymbol{h}\big[(abx^2+cy)L_{2n+1}(x,y)+dy\big(L_{2n+1}(x,y)-cyL_{2n-1}(x,y)\big)\big]$$

$$=[(abx^2+(c+d)y)L_{2n-2}(x,y)-cdy^2L_{2n-4}(x,y)]$$
$$+\boldsymbol{i}[(abx^2+(c+d)y)L_{2n-1}(x,y)-cdy^2L_{2n-3}(x,y)]$$
$$+\boldsymbol{\varepsilon}[(abx^2+(c+d)y)L_{2n}(x,y)-cdy^2L_{2n-2}(x,y)]$$
$$+\boldsymbol{h}[(abx^2+(c+d)y)L_{2n+1}(x,y)-cdy^2L_{2n-1}(x,y)]$$

$$=(abx^2+(c+d)y)\big(L_{2n-2}(x,y)+\boldsymbol{i}L_{2n-1}(x,y)+\boldsymbol{\varepsilon}L_{2n}(x,y)+\boldsymbol{h}L_{2n+1}(x,y)\big)$$
$$-cdy^2[L_{2n-4}(x,y)+\boldsymbol{i}L_{2n-3}(x,y)+\boldsymbol{\varepsilon}L_{2n-2}(x,y)+\boldsymbol{h}L_{2n-1}(x,y)]$$

$$LH_{2n}(x,y)=(abx^2+(c+d)y)LH_{2n-2}(x,y)-\ cdy^2LH_{2n-4}(x,y)$$

elde edilir. Benzer şekilde (3.10) bağıntısı da ispatlanabilir.

$$LH_{2n+1}(x,y)=L_{2n+1}(x,y)+\boldsymbol{i}L_{2n+2}(x,y)+\boldsymbol{\varepsilon}L_{2n+3}(x,y)+\boldsymbol{h}L_{2n+4}(x,y)$$
$$=axL_{2n}(x,y)+cyL_{2n-1}(x,y)+\boldsymbol{i}\big(bxL_{2n+1}(x,y)+dyL_{2n}(x,y)\big)$$
$$+\boldsymbol{\varepsilon}\big(axL_{2n+2}(x,y)+cyL_{2n+1}(x,y)\big)$$
$$+\boldsymbol{h}\big(bxL_{2n+3}(x,y)+dyL_{2n+2}(x,y)\big)$$

$$=\big[ax\big(bxL_{2n-1}(x,y)\big)+dyL_{2n-2}(x,y)+cyL_{2n-1}(x,y)\big]$$
$$+\boldsymbol{i}\big[bx\big(axL_{2n}(x,y)+cyL_{2n-1}(x,y)\big)+dyL_{2n}(x,y)\big]$$
$$+\boldsymbol{\varepsilon}\big[ax\big(bxL_{2n+1}(x,y)+dyL_{2n}(x,y)\big)+cyL_{2n+1}(x,y)\big]$$
$$+\boldsymbol{h}\big[bx\big(axL_{2n+2}(x,y)+cyL_{2n+1}(x,y)\big)+dyL_{2n+2}(x,y)\big]$$

$$=\big[(abx^2+cy)L_{2n-1}(x,y)+dy\big(axL_{2n-2}(x,y)\big)\big]$$
$$+\boldsymbol{i}\big[(abx^2+dy)L_{2n}(x,y)+cy\big(bxL_{2n-1}(x,y)\big)\big]$$
$$+\boldsymbol{\varepsilon}\big[(abx^2+cy)L_{2n+1}(x,y)+dy\big(axL_{2n}(x,y)\big)\big]$$
$$+\boldsymbol{h}\big[(abx^2+dy)L_{2n+2}(x,y)+cy\big(bxL_{2n+1}(x,y)\big)\big]$$

$$= \left[(abx^2 + cy)L_{2n-1}(x,y) + dy\big(L_{2n-1}(x,y) - cyL_{2n-3}(x,y)\big)\right]$$
$$+\boldsymbol{i}\left[(abx^2 + dy)L_{2n}(x,y) + cy\big(L_{2n}(x,y) - dyL_{2n-2}(x,y)\big)\right]$$
$$+\boldsymbol{\varepsilon}\left[(abx^2 + cy)L_{2n+1}(x,y) + dy\big(L_{2n+1}(x,y) - cyL_{2n-1}(x,y)\big)\right]$$
$$+\boldsymbol{h}\left[(abx^2 + dy)L_{2n+2}(x,y) + cy\big(L_{2n+2}(x,y) - dyL_{2n}(x,y)\big)\right]$$

$$= [(abx^2 + (c+d)y)L_{2n-1}(x,y) - cdy^2L_{2n-3}(x,y)]$$
$$+\boldsymbol{i}[(abx^2 + (c+d)y)L_{2n}(x,y) - cdy^2L_{2n-2}(x,y)]$$
$$+\boldsymbol{\varepsilon}[(abx^2 + (c+d)y)L_{2n+1}(x,y) - cdy^2L_{2n-1}(x,y)]$$
$$+\boldsymbol{h}[(abx^2 + (c+d)y)L_{2n+2}(x,y) - cdy^2L_{2n}(x,y)]$$

$$= (abx^2 + (c+d)y)\big(L_{2n-1}(x,y) + \boldsymbol{i}L_{2n}(x,y) + \boldsymbol{\varepsilon}L_{2n+1}(x,y) + \boldsymbol{h}L_{2n+2}(x,y)\big)$$
$$-cdy^2[L_{2n-3}(x,y) + \boldsymbol{i}L_{2n-2}(x,y) + \boldsymbol{\varepsilon}L_{2n-1}(x,y) + \boldsymbol{h}L_{2n}(x,y)]$$

$$LH_{2n+1}(x,y) = (abx^2 + (c+d)y)LH_{2n-1}(x,y) - cdy^2LH_{2n-3}(x,y)$$

elde edilir. İspat tamamlanır. ■

Aşağıdaki teorem, iki değişkenli şartlı Lucas hibrinomiyali $LH_n(x,y)$ ‘nin Binet formülünü ifade etmektedir.

Teorem 3.2.1: İki değişkenli şartlı Lucas hibrinomiyali $LH_n(x,y)$ ‘nin Binet formülü

$$LH_n(x,y) = \frac{\widehat{\omega}_{\xi(n)}(\beta_2+dy)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} - \widehat{\sigma}_{\xi(n)}(\beta_1+dy)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{\beta_1-\beta_2} \quad (3.11)$$

şeklindedir. Burada β_1 ve β_2 değerleri, $\lambda^2 - (abx^2 + (c-d)y)\lambda - abdx^2y = 0$ karakteristik denkleminin kökleridir. Ayrıca $\widehat{\omega}_{\xi(n)}$ ve $\widehat{\sigma}_{\xi(n)}$ ifadeleri,

$$\widehat{\omega}_{\xi(n)} = (-ax)^{\xi(n)}\big(\xi(n+1)\beta_1 + (-1)^{\xi(n+1)}\beta_2 + (-1)^{\xi(n+1)}(2)^{\xi(n)}dy + \xi(n+1)cy\big)$$
$$+\boldsymbol{i}(-ax)^{\xi(n+1)}\big(\xi(n)\beta_1 + (-1)^{\xi(n)}\beta_2 + (-1)^{\xi(n)}(2)^{\xi(n+1)}dy + \xi(n)cy\big)(\beta_2+dy)^{\xi(n)}$$
$$+\boldsymbol{\varepsilon}(-ax)^{\xi(n)}\big(\xi(n+1)\beta_1 + (-1)^{\xi(n+1)}\beta_2 + (-1)^{\xi(n+1)}(2)^{\xi(n)}dy + \xi(n+1)cy\big)(\beta_2+dy)$$
$$+\boldsymbol{h}(-ax)^{\xi(n+1)}\big(\xi(n)\beta_1 + (-1)^{\xi(n)}\beta_2 + (-1)^{\xi(n)}(2)^{\xi(n+1)}dy + \xi(n)cy\big)(\beta_2+dy)^{\xi(n)+1} \quad \textbf{(3.12)}$$

$$\hat{o}_{\xi(n)} = (-ax)^{\xi(n)}\big(\xi(n+1)\beta_2 + (-1)^{\xi(n+1)}\beta_1 + (-1)^{\xi(n+1)}(2)^{\xi(n)}dy + \xi(n+1)cy\big)$$
$$+\boldsymbol{i}(-ax)^{\xi(n+1)}\big(\xi(n)\beta_2 + (-1)^{\xi(n)}\beta_1 + (-1)^{\xi(n)}(2)^{\xi(n+1)}dy + \xi(n)cy\big)(\beta_1+dy)^{\xi(n)}$$
$$+\boldsymbol{\varepsilon}(-ax)^{\xi(n)}\big(\xi(n+1)\beta_2 + (-1)^{\xi(n+1)}\beta_1 + (-1)^{\xi(n+1)}(2)^{\xi(n)}dy + \xi(n+1)cy\big)(\beta_1+dy)$$
$$+\boldsymbol{h}(-ax)^{\xi(n+1)}\big(\xi(n)\beta_2 + (-1)^{\xi(n)}\beta_1 + (-1)^{\xi(n)}(2)^{\xi(n+1)}dy + \xi(n)cy\big)(\beta_1+dy)^{\xi(n)+1} \quad \textbf{(3.13)}$$

şeklindedir [23].

İspat:

Eşitlik (3.7) ‘deki Binet formülü

$$L_n(x,y) = \frac{(-ax)^{\xi(n)}}{\beta_1-\beta_2}\Big[\big(\xi(n+1)\beta_1 + (-1)^{\xi(n+1)}\beta_2 + (-1)^{\xi(n+1)}(2)^{\xi(n)}dy + \xi(n+1)cy\big)(\beta_2+cy)^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}$$
$$-\big(\xi(n+1)\beta_2 + (-1)^{\xi(n+1)}\beta_1 + (-1)^{\xi(n+1)}(2)^{\xi(n)}dy + \xi(n+1)cy\big)(\beta_1+cy)^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\Big]$$

şeklindedir. (3.8) bağıntısınında

$$LH_n(x,y) = L_n(x,y) + \boldsymbol{i}L_{n+1}(x,y) + \boldsymbol{\varepsilon}L_{n+2}(x,y) + \boldsymbol{h}L_{n+3}(x,y)$$

şeklinde olduğu açıktır. Bu bağıntıda n ‘in çift ve tek olması durumları ayrı ayrı incelenecektir.

<u>***$n = 2k$ (çift) olması durumu***</u>:

$k \in \mathbb{N}_o$ için,

$$LH_{2k}(x,y) = L_{2k}(x,y) + \boldsymbol{i}L_{2k+1}(x,y) + \boldsymbol{\varepsilon}L_{2k+2}(x,y) + \boldsymbol{h}L_{2k+3}(x,y)$$
$$= \frac{1}{(\beta_1-\beta_2)}[(\beta_1-\beta_2-dy+cy)(\beta_2+dy)^k - (\beta_2-\beta_1-dy+cy)(\beta_1+dy)^k]$$
$$+\boldsymbol{i}\frac{(-ax)}{(\beta_1-\beta_2)}[(\beta_2+2dy)(\beta_2+dy)^k - (\beta_1+2dy)(\beta_1+dy)^k]$$
$$+\boldsymbol{\varepsilon}\frac{1}{(\beta_1-\beta_2)}[(\beta_1-\beta_2-dy+cy)(\beta_2+dy)^{k+1} - (\beta_2-\beta_1-dy+cy)(\beta_1+dy)^{k+1}]$$
$$+\boldsymbol{h}\frac{(-ax)}{(\beta_1-\beta_2)}[(\beta_2+2dy)(\beta_2+dy)^{k+1} - (\beta_1+2dy)(\beta_1+dy)^{k+1}]$$

$$LH_{2k}(x,y) = \frac{(\beta_2+dy)^k}{(\beta_1-\beta_2)}[(\beta_1-\beta_2-dy+cy)+\boldsymbol{i}(-ax)(\beta_2+2dy)$$

$$+\boldsymbol{\varepsilon}(\beta_1-\beta_2-dy+cy)(\beta_2+dy)+\boldsymbol{h}(-ax)(\beta_2+2dy)(\beta_2+dy)]$$

$$-\frac{(\beta_1+dy)^k}{(\beta_1-\beta_2)}[(\beta_2-\beta_1-dy+cy)+\boldsymbol{i}(-ax)(\beta_1+2dy)$$

$$+\boldsymbol{\varepsilon}(\beta_2-\beta_1-dy+cy)(\beta_1+dy)+\boldsymbol{h}(-ax)(\beta_1+2dy)(\beta_1+dy)]$$

Burada $\widehat{\omega}_0$ ve $\widehat{\sigma}_0$ ifadeleri aşağıdaki gibi seçilirse,

$$\widehat{\omega}_0 = \left(\beta_1-\beta_2-dy+cy\right)+\boldsymbol{i}(-ax)\left(\beta_2+2dy\right)$$

$$+\boldsymbol{\varepsilon}(\beta_1-\beta_2-dy+cy)(\beta_2+dy)+\boldsymbol{h}(-ax)(\beta_2+2dy)(\beta_2+dy)$$

$$\widehat{\sigma}_0 = \left(\beta_2-\beta_1-dy+cy\right)+\boldsymbol{i}(-ax)\left(\beta_1+2dy\right)$$

$$+\boldsymbol{\varepsilon}(\beta_2-\beta_1-dy+cy)(\beta_1+dy)+\boldsymbol{h}(-ax)(\beta_1+2dy)(\beta_1+dy)$$

olur. Buradan sonuç olarak

$$LH_{2k}(x,y) = \frac{\widehat{\omega}_0(\beta_2+dy)^k-\widehat{\sigma}_0(\beta_1+dy)^k}{\beta_1-\beta_2} \tag{3.14}$$

elde edilir. Benzer şekilde $LH_{2k+1}(x,y)$ ifadesi de elde edilmelidir.

<u>$\boldsymbol{n\ =2k+1\ (tek)\ olması\ durumu}$:</u>

$k \in \mathbb{N}_o$ için,

$$LH_{2k+1}(x,y) = L_{2k+1}(x,y)+\boldsymbol{i}L_{2k+2}(x,y)+\boldsymbol{\varepsilon}L_{2k+3}(x,y)+\boldsymbol{h}L_{2k+4}(x,y)$$

$$= \frac{(-ax)}{(\beta_1-\beta_2)}[(\beta_2+2dy)(\beta_2+dy)^k-(\beta_1+2dy)(\beta_1+dy)^k]$$

$$+\boldsymbol{i}\frac{1}{(\beta_1-\beta_2)}[(\beta_1-\beta_2-dy+cy)(\beta_2+dy)^{k+1}-(\beta_2-\beta_1-dy+cy)(\beta_1+dy)^{k+1}]$$

$$+\boldsymbol{\varepsilon}\frac{(-ax)}{(\beta_1-\beta_2)}[(\beta_2+2dy)(\beta_2+dy)^{k+1}-(\beta_1+2dy)(\beta_1+dy)^{k+1}]$$

$$+\boldsymbol{h}\frac{1}{(\beta_1-\beta_2)}[(\beta_1-\beta_2-dy+cy)(\beta_2+dy)^{k+2}-(\beta_2-\beta_1-dy+cy)(\beta_1+dy)^{k+2}]$$

$$LH_{2k+1}(x,y)=\frac{(\beta_2+dy)^k}{(\beta_1-\beta_2)}[(-ax)(\beta_2+2dy)+\boldsymbol{i}(\beta_1-\beta_2-dy+cy)(\beta_2+dy)$$

$$+\boldsymbol{\varepsilon}(-ax)(\beta_2+2dy)(\beta_2+dy)+\boldsymbol{h}(\beta_1-\beta_2-dy+cy)(\beta_2+dy)^2]$$

$$-\frac{(\beta_1+dy)^k}{(\beta_1-\beta_2)}[(-ax)(\beta_1+2dy)+\boldsymbol{i}(\beta_2-\beta_1-dy+cy)(\beta_1+dy)$$

$$+\boldsymbol{\varepsilon}(-ax)(\beta_1+2dy)(\beta_1+dy)+\boldsymbol{h}(\beta_2-\beta_1-dy+cy)(\beta_1+dy)^2]$$

Burada $\widehat{\omega}_1$ ve $\widehat{\sigma}_1$ ifadeleri aşağıdaki gibi seçilirse,

$$\widehat{\omega}_1=(-ax)(\beta_2+2dy)+\boldsymbol{i}(\beta_1-\beta_2-dy+cy)(\beta_2+dy)$$

$$+\boldsymbol{\varepsilon}(-ax)(\beta_2+2dy)(\beta_2+dy)+\boldsymbol{h}(\beta_1-\beta_2-dy+cy)(\beta_2+dy)^2$$

$$\widehat{\sigma}_1=(-ax)(\beta_1+2dy)+\boldsymbol{i}(\beta_2-\beta_1-dy+cy)(\beta_1+dy)$$

$$+\boldsymbol{\varepsilon}(-ax)(\beta_1+2dy)(\beta_1+dy)+\boldsymbol{h}(\beta_2-\beta_1-dy+cy)(\beta_1+dy)^2$$

olur. Buradan sonuç olarak

$$LH_{2k+1}(x,y)=\frac{\widehat{\omega}_1(\beta_2+dy)^k-\widehat{\sigma}_1(\beta_1+dy)^k}{\beta_1-\beta_2} \tag{3.15}$$

elde edilir. Sonuç olarak elde edilen (3.14) ve (3.15) özdeşlikleri tek bir özdeşlik ile ifade edilmek istenirse, $\widehat{\omega}_{\xi(n)}$ ve $\widehat{\sigma}_{\xi(n)}$ aşağıdaki şekilde olmak üzere,

$$\widehat{\omega}_{\xi(n)}=(-ax)^{\xi(n)}\big(\xi(n+1)\beta_1+(-1)^{\xi(n+1)}\beta_2+(-1)^{\xi(n+1)}(2)^{\xi(n)}dy+\xi(n+1)cy\big)$$

$$+\boldsymbol{i}(-ax)^{\xi(n+1)}\big(\xi(n)\beta_1+(-1)^{\xi(n)}\beta_2+(-1)^{\xi(n)}(2)^{\xi(n+1)}dy+\xi(n)cy\big)(\beta_2+dy)^{\xi(n)}$$

$$+\boldsymbol{\varepsilon}(-ax)^{\xi(n)}\big(\xi(n+1)\beta_1+(-1)^{\xi(n+1)}\beta_2+(-1)^{\xi(n+1)}(2)^{\xi(n)}dy+\xi(n+1)cy\big)(\beta_2+dy)$$

$$+\boldsymbol{h}(-ax)^{\xi(n+1)}\big(\xi(n)\beta_1+(-1)^{\xi(n)}\beta_2+(-1)^{\xi(n)}(2)^{\xi(n+1)}dy+\xi(n)cy\big)(\beta_2+dy)^{\xi(n)+1}$$

$$\widehat{\sigma}_{\xi(n)}=(-ax)^{\xi(n)}\big(\xi(n+1)\beta_2+(-1)^{\xi(n+1)}\beta_1+(-1)^{\xi(n+1)}(2)^{\xi(n)}dy+\xi(n+1)cy\big)$$

$$+\boldsymbol{i}(-ax)^{\xi(n+1)}\big(\xi(n)\beta_2+(-1)^{\xi(n)}\beta_1+(-1)^{\xi(n)}(2)^{\xi(n+1)}dy+\xi(n)cy\big)(\beta_1+dy)^{\xi(n)}$$

$$+\boldsymbol{\varepsilon}(-ax)^{\xi(n)}\big(\xi(n+1)\beta_2+(-1)^{\xi(n+1)}\beta_1+(-1)^{\xi(n+1)}(2)^{\xi(n)}dy+\xi(n+1)cy\big)(\beta_1+dy)$$

$$+\boldsymbol{h}(-ax)^{\xi(n+1)}\big(\xi(n)\beta_2+(-1)^{\xi(n)}\beta_1+(-1)^{\xi(n)}(2)^{\xi(n+1)}dy+\xi(n)cy\big)(\beta_1+dy)^{\xi(n)+1}$$

$$LH_n(x,y) = \frac{\widehat{\omega}_{\xi(n)}(\beta_2+dy)^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor} - \widehat{\sigma}_{\xi(n)}(\beta_1+dy)^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}}{\beta_1-\beta_2}$$

elde edilir. İspat tamamlanmıştır. ■

Aşağıdaki teorem iki değişkenli şartlı Lucas hibrinomiyali $LH_n(x,y)$ 'nin üreteç fonksiyonunu ifade etmektedir.

Teorem 3.2.2: İki değişkenli şartlı Lucas hibrinomiyali $LH_n(x,y)$ 'nin üreteç fonksiyonu

$$\Omega(t) = \sum_{n=0}^{\infty} LH_n(x,y)t^n \tag{3.16}$$

$$= \frac{LH_0(x,y)+LH_1(x,y)t+\left[LH_2(x,y)-(abx^2+(c+d)y)LH_0(x,y)\right]t^2+\left[LH_3(x,y)-(abx^2+(c+d)y)LH_2(x,y)\right]t^3}{1-(abx^2+(c+d)y)t^2+cdy^2t^4}$$

şeklindedir [23].

İspat: $\Omega_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} LH_{2n}(x,y)t^{2n}$ ve $\Omega_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} LH_{2n+1}(x,y)t^{2n+1}$ olarak tanımlanırsa $\Omega(t) = \Omega_0(t) + \Omega_1(t)$ yazılabilir. Öncelikle $\Omega_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} LH_{2n}(x,y)t^{2n}$ bağıntısı incelenecektir.

$$\Omega_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} LH_{2n}(x,y)t^{2n} = LH_0(x,y)t^0 + LH_2(x,y)t^2 + \sum_{n=2}^{\infty} LH_{2n}(x,y)t^{2n}$$

$$\begin{aligned}\Omega(t) = {} & LH_0(x,y) + LH_2(x,y)t^2 \\ & + \sum_{n=2}^{\infty}[(abx^2+(c+d)y)LH_{2n-2}(x,y) - cdy^2LH_{2n-4}(x,y)]\, t^{2n}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Omega_0(t) = {} & LH_0(x,y) + LH_2(x,y)t^2 \\ & +(abx^2+(c+d)y)t^2 \sum_{n=2}^{\infty} LH_{2n-2}(x,y)\, t^{2n-2} \\ & -cdy^2t^4 \sum_{n=2}^{\infty} LH_{2n-4}(x,y)t^{2n-4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Omega_0(t) = {} & LH_0(x,y) + LH_2(x,y)t^2 \\ & +(abx^2+(c+d)y)t^2\left[\sum_{n=2}^{\infty} LH_{2n-2}\,(x,y)t^{2n-2} + LH_0(x,y)t^0 - LH_0(x,y)t^0\right] \\ & -cdy^2t^4\Omega_0(t)\end{aligned}$$

$$\Omega_0(t) = LH_0(x,y) + LH_2(x,y)t^2 + (abx^2 + (c+d)y)t^2\Omega_0(t)$$
$$-(abx^2 + (c+d)y)t^2 LH_0(x,y) - cdy^2t^4\Omega_0(t)$$

$$\Omega_0(t)[1 - (abx^2 + (c+d)y)t^2 + cdy^2t^4]$$
$$= LH_0(x,y) + \big(LH_2(x,y) - (abx^2 + (c+d)y)LH_0(x,y)\big)t^2$$

$$\Omega_0(t) = \frac{LH_0(x,y) + \big(LH_2(x,y) - (abx^2 + (c+d)y)LH_0(x,y)\big)t^2}{1 - (abx^2 + (c+d)y)t^2 + cdy^2t^4}$$

elde edilir. Benzer şekilde $\Omega_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} LH_{2n+1}(x,y)t^{2n+1}$ bağıntısı da incelenmelidir.

$$\Omega_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} LH_{2n+1}(x,y)t^{2n+1} = LH_1(x,y)t^1 + LH_3(x,y)t^3$$
$$+ \sum_{n=2}^{\infty} LH_{2n+1}(x,y)t^{2n+1}$$

$$\Omega_1(t) = LH_1(x,y)t + LH_3(x,y)t^3$$
$$+ \sum_{n=2}^{\infty} [(abx^2 + (c+d)y)LH_{2n-1}(x,y) - cdy^2 LH_{2n-3}(x,y)]\, t^{2n+1}$$

$$\Omega_1(t) = LH_1(x,y)t + LH_3(x,y)t^3 + (abx^2 + (c+d)y)t^2 \sum_{n=2}^{\infty} LH_{2n-1}(x,y)t^{2n-1}$$
$$-cdy^2t^4 \sum_{n=2}^{\infty} LH_{2n-3}(x,y)t^{2n-3}$$

$$\Omega_1(t) = LH_1(x,y)t + LH_3(x,y)t^3$$
$$+(abx^2 + (c+d)y)t^2\Big[\sum_{n=2}^{\infty} LH_{2n-1}(x,y)\, t^{2n-1} + LH_1(x,y)t^1 - LH_1(x,y)t^1\Big]$$
$$-cdy^2t^4\Omega(t)$$

$$\Omega_1(t) = LH_1(x,y)t + LH_3(x,y)t^3 + (abx^2 + (c+d)y)t^2\Omega_1(t)$$
$$-(abx^2 + (c+d)y)t^3 LH_1(x,y) - cdy^2t^4\Omega_1(t)$$

$$\Omega_1(t)[1 - (abx^2 + (c+d)y)t^2 + cdy^2t^4]$$
$$= LH_1(x,y)t + \big(LH_3(x,y) - (abx^2 + (c+d)y)LH_1(x,y)\big)t^3$$

$$\Omega_1(t) = \frac{LH_1(x,y)t + \big(LH_3(x,y) - (abx^2 + (c+d)y)LH_1(x,y)\big)t^3}{1 - (abx^2 + (c+d)y)t^2 + cdy^2t^4}$$

elde edilir. $\Omega(t) = \Omega_0(t) + \Omega_1(t)$ toplamı kullanılarak,

$$\Omega(t) = \frac{LH_0(x,y)+LH_1(x,y)t+\left[LH_2(x,y)-(abx^2+(c+d)y)LH_0(x,y)\right]t^2+\left[LH_3(x,y)-(abx^2+(c+d)y)LH_2(x,y)\right]t^3}{1-(abx^2+(c+d)y)t^2+cdy^2t^4}$$

elde edilir. ■

Aşağıdaki teorem, iki değişkenli şartlı Lucas hibrinomiyali $LH_n(x,y)$ için Catalan özdeşliğini ifade etmektedir

Teorem 3.2.3: n ve r tamsayılar ve $n \geq r \geq 0$ olmak üzere,

$$LH_{2(n+r)+\xi(i)}(x,y).LH_{2(n-r)+\xi(i)}(x,y) - \left(LH_{2n+\xi(i)}(x,y)\right)^2$$
$$= \frac{\widehat{\omega}_{\xi(i)}\,\widehat{\sigma}_{\xi(i)}(\beta_2+dy)^n(\beta_1+dy)^n\left[1-\left(\frac{\beta_2+dy}{\beta_1+dy}\right)^r\right]+\widehat{\sigma}_{\xi(i)}\widehat{\omega}_{\xi(i)}\,(\beta_1+dy)^n(\beta_2+dy)^n\left[1-\left(\frac{\beta_1+dy}{\beta_2+dy}\right)^r\right]}{(\beta_1-\beta_2)^2} \quad (3.17)$$

bağıntısı sağlanır. Burada $\widehat{\omega}_{\xi(i)}$ ve $\widehat{\sigma}_{\xi(i)}$ değerleri (3.12) ve (3.13) bağıntıları ile tanımlanmaktadır [23].

İspat: Bu teoremi ispatlamak için iki farklı durum incelenecektir.

***$i = 0$ olması durumu*:**

$$LH_{2(n+r)}(x,y) = \frac{\widehat{\omega}_{\xi(2n+2r)}(\beta_2+dy)^{\left\lfloor\frac{2n+2r}{2}\right\rfloor} - \widehat{\sigma}_{\xi(2n+2r)}(\beta_1+dy)^{\left\lfloor\frac{2n+2r}{2}\right\rfloor}}{(\beta_1-\beta_2)}$$
$$= \frac{\widehat{\omega}_0(\beta_2+dy)^{n+r} - \widehat{\sigma}_0(\beta_1+dy)^{n+r}}{(\beta_1-\beta_2)} \quad (3.18)$$

$$LH_{2(n-r)}(x,y) = \frac{\widehat{\omega}_{\xi(2n-2r)}(\beta_2+dy)^{\left\lfloor\frac{2n-2r}{2}\right\rfloor} - \widehat{\sigma}_{\xi(2n-2r)}(\beta_1+dy)^{\left\lfloor\frac{2n-2r}{2}\right\rfloor}}{(\beta_1-\beta_2)}$$
$$= \frac{\widehat{\omega}_0(\beta_2+dy)^{n-r} - \widehat{\sigma}_0(\beta_1+dy)^{n-r}}{(\beta_1-\beta_2)} \quad (3.19)$$

$$LH_{2n}(x,y) = \frac{\widehat{\omega}_{\xi(2n)}(\beta_2+dy)^{\left\lfloor\frac{2n}{2}\right\rfloor} - \widehat{\sigma}_{\xi(2n)}(\beta_1+dy)^{\left\lfloor\frac{2n}{2}\right\rfloor}}{(\beta_1-\beta_2)}$$

$$= \frac{\widehat{\omega}_0(\beta_2+dy)^n - \widehat{\sigma}_0(\beta_1+dy)^n}{(\beta_1-\beta_2)} \tag{3.20}$$

elde edilir. (3.18), (3.19) ve (3.20) bağıntıları kullanılarak aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$LH_{2(n+r)}(x,y).LH_{2(n-r)}(x,y) - (LH_{2n}(x,y))^2$$

$$= \frac{\widehat{\omega}_0\,\widehat{\sigma}_0(\beta_2+dy)^n(\beta_1+dy)^n\left[1-\left(\frac{\beta_2+dy}{\beta_1+dy}\right)^r\right] + \widehat{\sigma}_0\widehat{\omega}_0(\beta_1+dy)^n(\beta_2+dy)^n\left[1-\left(\frac{\beta_1+dy}{\beta_2+dy}\right)^r\right]}{(\beta_1-\beta_2)^2}.$$

***i* = 1 *olması durumu*:**

$$LH_{2(n+r)+1}(x,y) = \frac{\widehat{\omega}_1(\beta_2+dy)^{\left\lfloor\frac{2n+2r+1}{2}\right\rfloor} - \widehat{\sigma}_1(\beta_1+dy)^{\left\lfloor\frac{2n+2r+1}{2}\right\rfloor}}{(\beta_1-\beta_2)}$$

$$= \frac{\widehat{\omega}_1(\beta_2+dy)^{n+r} - \widehat{\sigma}_1(\beta_1+dy)^{n+r}}{(\beta_1-\beta_2)} \tag{3.21}$$

$$LH_{2(n-r)-1}(x,y) = \frac{\widehat{\omega}_1(\beta_2+dy)^{\left\lfloor\frac{2n-2r+1}{2}\right\rfloor} - \widehat{\sigma}_1(\beta_1+dy)^{\left\lfloor\frac{2n-2r+1}{2}\right\rfloor}}{(\beta_1-\beta_2)}$$

$$= \frac{\widehat{\omega}_1(\beta_2+dy)^{n-r} - \widehat{\sigma}_1(\beta_1+dy)^{n-r}}{(\beta_1-\beta_2)} \tag{3.22}$$

$$LH_{2n+1}(x,y) = \frac{\widehat{\omega}_1(\beta_2+dy)^{\left\lfloor\frac{2n+1}{2}\right\rfloor} - \widehat{\sigma}_1(\beta_1+dy)^{\left\lfloor\frac{2n+1}{2}\right\rfloor}}{(\beta_1-\beta_2)}$$

$$= \frac{\widehat{\omega}_1(\beta_2+dy)^n - \widehat{\sigma}_1(\beta_1+dy)^n}{(\beta_1-\beta_2)} \tag{3.23}$$

elde edilir. (3.21), (3.22) ve (3.23) bağıntıları kullanılarak aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$LH_{2(n+r)+1}(x,y).LH_{2(n-r)+1}(x,y) - (LH_{2n+1}(x,y))^2$$

$$= \frac{\widehat{\omega}_1\,\widehat{\sigma}_1(\beta_2+dy)^n(\beta_1+dy)^n\left[1-\left(\frac{\beta_2+dy}{\beta_1+dy}\right)^r\right] + \widehat{\sigma}_1\widehat{\omega}_1(\beta_1+dy)^n(\beta_2+dy)^n\left[1-\left(\frac{\beta_1+dy}{\beta_2+dy}\right)^r\right]}{(\beta_1-\beta_2)^2}.$$

Sonuç olarak elde edilen bu iki bağıntı tek bir formülle ifade edilirse,

$$LH_{2(n+r)+\xi(i)}(x,y).LH_{2(n-r)+\xi(i)}(x,y) \ \left(LH_{2n+\xi(i)}(x,y)\right)^2$$

$$= \frac{\widehat{\omega}_{\xi(i)}\,\widehat{\sigma}_{\xi(i)}(\beta_2+dy)^n(\beta_1+dy)^n\left[1-\left(\frac{\beta_2+dy}{\beta_1+dy}\right)^r\right]+\widehat{\sigma}_{\xi(i)}\widehat{\omega}_{\xi(i)}\,(\beta_1+dy)^n(\beta_2+dy)^n\left[1-\left(\frac{\beta_1+dy}{\beta_2+dy}\right)^r\right]}{(\beta_1-\beta_2)^2}$$

bulunur. ■

Sonuç 3.2.1 (Cassini Özdeşliği)

$n \geq 0$ olsun. O halde,

$LH_{2(n+1)+\xi(i)}(x,y).LH_{2(n-1)+\xi(i)}(x,y) - \left(LH_{2n+\xi(i)}(x,y)\right)^2$

$$= \frac{\widehat{\omega}_{\xi(i)}\,\widehat{\sigma}_{\xi(i)}(\beta_2+dy)^n(\beta_1+dy)^n\left[1-\left(\frac{\beta_2+dy}{\beta_1+dy}\right)\right]+\widehat{\sigma}_{\xi(i)}\widehat{\omega}_{\xi(i)}\,(\beta_1+dy)^n(\beta_2+dy)^n\left[1-\left(\frac{\beta_1+dy}{\beta_2+dy}\right)\right]}{(\beta_1-\beta_2)^2} \tag{3.24}$$

elde edilir [23].

İspat: Catalan özdeşliğinde $r = 1$ alınırsa bu özdeşlik sağlandığı kolaylıkla görülür. ■

BÖLÜM 4

TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde Fibonacci dizisinin tarihsel gelişimine, hibrit sayılarına yer verilmiştir. Tezin ilerleyen kısımlarında kullanılacak olan temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. İkinci bölümde iki değişkenli şartlı Fibonacci hibrinomiyalleri, Binet formülü, Catalan ve Cassini özdeşlikleri de sunulmuştur. Üçüncü bölümde ilk olarak iki değişkenli şartlı Lucas polinomu tanımına yer verilmiştir. Bu polinomun Binet formülü ve üreteç fonksiyonu elde edildikten sonra iki değişkenli şartlı Lucas hibrinomiyali tanımı elde edilmiştir. Bu hibrinomiyallerin Binet formülü, üreteç fonksiyonu ve bazı önemli özdeşlikleri de bu bölümde sunulmuştur. Son bölümde ise tezin literatüre olan katkısından bahsedilmiştir.

Sonuç olarak bu tez çalışmasında Fibonacci ve Lucas polinomları yardımıyla hibrinomiyallerin yeni bir genellemesi olan Fibonacci ve Lucas hibrinomiyalleri elde edilmiştir.

[24] numaralı kaynakta k -ıncı mertebeden iki değişkenli Fibonacci polinomları hakkında bilgi verilmiştir. Bu tez çalışmasında elde edilen sonuçlardan yola çıkarak k -ıncı mertebeden iki değişkenli Fibonacci polinomları için de benzer bir çalışma yapılabilir.

KAYNAKLAR

1. Fibonacci, L., “Liber Abaci”,1202.
2. Horadam, A.F., “A generalized Fibonacci sequence”, *The American Mathematical Monthly*, 1961.
3. Bicknell, M., Hoggatt, Jr.V.E., “Roots of Fibonacci polynomials”, *Fibonacci Quart.*, 11 (5), 271–274, 1973.
4. Koshy, T., “Fibonacci and Lucas numbers with application”, *Wiley,* New York, 2001.
5. Falcon,S., Plaza, A., “On the Fibonacci $k-$numbers”, *Chaos, Solitons & Fractals*, 32 (5), 15-24, 2007.
6. Falcon, S., Plaza, A., “The $k-$ Fibonacci sequence and the Pascal $2-$triangle”, *Chaos, Solitons & Fractals*, 33 (1), 38-49, 2007.
7. Edson, M., Yayenie, O., “A new generalization of Fibonacci sequence & extended Binet’s formula”, *Integers*, 9 (6), 639-654, 2009.
8. Nalli, A., Haukkanen, P., “On generalized Fibonacci and Lucas polynomials”, *Chaos, Solitons & Fractals,* 42 (5), 79-86, 2009.
9. Koshy, T., “Fibonacci and Lucas numbers with applications Volume 2”, New York, 2011.
10. Yayenie, O., “A note on generalized Fibonacci sequences”, *Applied Mathematics and Computation*, 217 (12), 5603-5611, 2011.
11. Falcon, S., “Generalized Fibonacci Sequences Generated from a k–Fibonacci Sequence”, 4(2),2012.
12. Bilgici, G., “Two generalizations of Lucas sequence”, *Applied Mathematics and Computation*, 245, 526-538, 2014.
13. Bilgici, G., “New generalizations of Fibonacci and Lucas sequence”, *Applied Mathematical Sciences*, 8 (29), 1429-1437, 2014.
14. Özdemir, M., “Introduction to hybrid numbers”, *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 28., 2018.
15. Szynal-Liana, A., “The Horadam hybrid numbers”, *Discuss Math Gen Algebra Appl.*, 38 (1), 91–98, 2018.

16. Szynal-Liana, A., Włoch, I., “The Fibonacci hybrid numbers”, *Util Math.*, 110, 3–10, 2019.

17. Köme, S., Kirik, H., “On The Generalized Fibonacci and Lucas 2^k-ions”, *Notes on Number Theory and Discrete Math.*, 26 (4) 173-186, 2020.

18. Verma, V., Bala, A., “On Properties of Generalized Bi-Variate Bi-Periodic Fibonacci Polynomials”, *International Journal of Advanced Science and Technology*, 29 (3), 8065-8072, 2020.

19. Szynal-Liana, A., Włoch, I., “Introduction to Fibonacci and Lucas hybrinomials”, *Complex Variables and Elliptic Equantions*, 1736-1747, 2020.

20. Kızılateş, C., “A new generalization of Fibonacci hybrid and Lucas hybrid numbers”, *Chaos, Solitons & Fractals*,130, 109449, 2020.

21. Köme, S., Kirik, H., “Bi-periodic Fibonacci and Lucas 2^k-ions with q-integer components”, *Under review*, 2021.

22. Köme, S., Kumtas, Z., “Bivariate Biperiodic Fibonacci Hybrinomials”, 6^{th} *International Hybrid Conference On Mathematics*, İstanbul, TURKEY, 2022.

23. Köme, S., Kumtas, Z., “Generalized Bivariate Conditional Fibonacci and Lucas Hybrinomials”, *Under review*, 2022.

24. Inoue, K., Aki, S., “Bivariate Fibonacci polynomials of order k with statistical applications”, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 63(1), 197-210, 2011.