

T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GEW VE GRLW DENKLEMLERİNİN SONLU ELEMANLAR
YÖNTEMİ İLE SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Tezi Hazırlayan
Halil ZEYBEK

Tez Danışmanı
Yrd. Doç. Dr. S. Battal Gazi KARAKOÇ

Matematik Anabilim Dalı
Doktora Tezi

Mayıs 2016
NEVŞEHİR

T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GEW VE GRLW DENKLEMLERİNİN SONLU ELEMANLAR
YÖNTEMİ İLE SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Tezi Hazırlayan
Halil ZEYBEK

Tez Danışmanı
Yrd. Doç. Dr. S. Battal Gazi KARAKOÇ

Matematik Anabilim Dalı
Doktora Tezi

Mayıs 2016
NEVŞEHİR

Yrd. Doç. Dr. S. Battal Gazi KARAKOÇ danışmanlığında Halil ZEYBEK tarafından hazırlanan “GEW ve GRLW Denklemlerinin Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Sayısal Çözümleri” başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Doktora Tezi** olarak kabul edilmiştir.

23/05/2016

JÜRİ

Başkan

Prof. Dr. Hamza EROL




Üye

Yrd. Doç. Dr. S. Battal Gazi KARAKOÇ



Üye

Doç. Dr. Aytekin ERYILMAZ



Üye

Doç. Dr. Yasin YAZLIK



Üye

Yrd. Doç. Dr. Turabi GEYİKLİ



ONAY:

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun 23/05/2016 . tarih ve . 20 - 181 . . . sayılı kararı ile onaylanmıştır.

24/05/2016



TEZ BİLDİRİM SAYFASI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada yer alan bütün bilgilerin, bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu ve bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.



Halil ZEYBEK

TEŞEKKÜR

Doktora öğrenimim ve tez çalışmam süresince tüm bilgilerimi benimle paylaşmaktan kaçınmayan, her türlü konuda desteğini benden esirgemeyen ve tezimde büyük emeği olan, aynı zamanda kişilik olarak da bana çok şey katan Sayın Hocam Yrd. Doç. Dr. S. Battal Gazi KARAKOÇ'a,

Tezin türkçe yazım ve imla kurallarına uygunluğunu kontrol eden ve gerekli düzeltmeleri yapan Türk Dili ve Edebiyatı öğretmeni eşim Ayşe ZEYBEK'e,

Dikkatli okumaları, değerli yorumları ve önerileri için JÜRİ ÜYELERİ'ne,

Teknik ve idari yardımlarından dolayı Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Rektörlüğü'ne, Fen-Edebiyat Fakültesi Dekanlığı'na, Matematik Bölüm Başkanlığı'na ve Doktora Tezime verdiği desteklerinden dolayı Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi BAP Birimi'ne içten teşekkür ederim.

**GEW VE GRLW DENKLEMLERİNİN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE
SAYISAL ÇÖZÜMLERİ
(Doktora Tezi)**

Halil ZEYBEK

**NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Mayıs 2016

ÖZET

Bu tez çalışmasında, GEW ve GRLW denklemleri, B-spline fonksiyonlar kullanılarak kollokasyon ve Galerkin sonlu elemanlar yöntemleri ile sayısal olarak çözüldü. Von-Neumann tekniği kullanılarak, lineerleştirilmiş algoritmaların şartsız kararlı olduğu gösterildi. Sayısal algoritmalar; tek solitary dalga, iki ve üç solitary dalganın etkileşimi, Maxwellian başlangıç şartı ile dalga oluşumu ve ardışık dalgaların gelişimini içeren örneklere uygulanarak test edildi. Sayısal algoritmaların performansını kanıtlamak için, L_2 ve L_∞ hata normları hesaplandı ve daha önce elde edilen sayısal sonuçlarla karşılaştırıldı. Sayısal algoritmaların kütle, momentum ve enerji ile ilgili özellikleri koruduğunu göstermek için I_1 , I_2 ve I_3 ile ifade edilen korunum sabitlerindeki değişim hesaplandı. Ayrıca, solitary dalgaların farklı zamanlardaki hareketleri grafik çizilerek gösterildi.

Tez, beş bölüm olarak tasarlandı. Tezin birinci bölümünde; GEW ve GRLW denklemleri tanıtıldı, bu denklemler için kapsamlı bir literatür araştırması yapıldı. İkinci bölümde, B-spline fonksiyonlar ve özellikleri, beş farklı lineerleştirme tekniği, dalga teorisi ve sonlu elemanlar yöntemi tanıtıldı. Tezin üçüncü ve dördüncü bölümü ana metin olarak inşa edildi. Üçüncü bölümde, GEW denkleminin sonlu elemanlar yöntemi ile sayısal çözümleri elde edildi. GRLW denkleminin sonlu elemanlar yöntemi ile yaklaşık çözümleri ise dördüncü bölümde verildi. Son bölüm olan beşinci bölümde ise, elde edilen sonuçlar ve öneriler sunuldu.

Anahtar kelimeler: *GRLW denklemleri, GEW denklemleri, Sonlu elemanlar yöntemi, B-spline, Solitary dalgalar.*

Tez Danışman: Yrd. Doç. Dr. S. Battal Gazi KARAKOÇ

Sayfa Adeti: 149

**NUMERICAL SOLUTIONS OF THE GEW AND GRLW EQUATIONS USING
FINITE ELEMENT METHOD**

(Ph. D. Thesis)

Halil ZEYBEK

**NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES**

May 2016

ABSTRACT

In this thesis work, GEW and GRLW equations are solved numerically by collocation and Galerkin finite element methods using B-spline functions. Using the von-Neumann technique, it is shown that the linearized algorithms are unconditionally stable. The numerical algorithms are tested by applying examples including the single solitary wave, the interaction of two and three solitary waves, the wave generation with Maxwellian initial condition and the development of an undular bore. To prove the performance of the numerical algorithms, L_2 and L_∞ error norms are computed and they are compared with the earlier numerical results. In order to show that the numerical algorithms conserves the properties related to mass, momentum and energy, the change in conservative quantities represented by I_1 , I_2 and I_3 is calculated. Also, the motions of solitary waves are described at different times.

Thesis is designed as a five chapter. In the first part of thesis, GEW and GRLW equations are introduced, a comprehensive literature search for these equations is made. In the second chapter, B-spline functions and its properties, five different linearization techniques, wave theory and finite element method are presented. The third and fourth part of thesis are constructed as a main text. In the third chapter, the numerical solutions of the GEW equation are obtained by finite element method. The approximate solutions of the GRLW equation with finite element method are given in the fourth chapter. In last section, Section 5, the obtained results and the suggestions are offered.

Keywords: *GRLW equation, GEW equation, Finite element method, B-spline, Solitary waves.*

Thesis Supervisor: Asst. Prof. Dr. S. Battal Gazi KARAKOÇ

Page Number: 149

İÇİNDEKİLER

KABÜL VE ONAY SAYFASI	I
TEZ BİLDİRİM SAYFASI	II
TEŞEKKÜR	III
ÖZET	IV
ABSTRACT	V
İÇİNDEKİLER	VI
TABLolar LİSTESİ	VIII
ŞEKİLLER LİSTESİ	XII
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ	XV
1 GİRİŞ	1
2 TEMEL BİLGİLER	7
2.1 B-spline Fonksiyonlar ve Özellikleri	7
2.1.1 Kübik B-spline fonksiyonlar	8
2.1.2 Kuintik B-spline fonksiyonlar	10
2.1.3 Septik B-spline fonksiyonlar	13
2.2 Lineerleştirme Teknikleri	16
2.2.1 Normal lineerleştirme tekniği	16
2.2.2 İki nokta lineerleştirme tekniği	16
2.2.3 Üç nokta lineerleştirme tekniği	17
2.2.4 Rubin-Graves lineerleştirme tekniği	17
2.2.5 Caldwell-Smith lineerleştirme tekniği	18
2.3 Dalga, Solitary Dalga ve Soliton	19
2.4 Sonlu Elemanlar Yöntemi	23
3 GENELLEŞTİRİLMİŞ EŞİT GENİŞLİKLİ DALGA (GEW) DENKLEMİNİN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ	26
3.1 GEW Denklemine Septik B-spline Kollokasyon Yöntemi ile Sayısal Çözümü	26
3.1.1 Thomas algoritması ile septa-diagonal matris sisteminin çözümü	32
3.1.2 Lineer kararlılık analizi	33
3.1.3 Sayısal örnekler ve sonuçlar	34
3.1.3.1 Tek solitary dalganın hareketi	34
3.1.3.2 İki solitary dalganın etkileşimi	39
3.1.3.3 Maxwellian başlangıç şartı	43
3.2 GEW Denklemine Kuintik B-spline Kollokasyon Yöntemi ile Sayısal Çözümü	46
3.2.1 Thomas algoritması ile penta-diagonal matris sisteminin çözümü	51
3.2.2 Lineer kararlılık analizi	52

3.2.3	Sayısal örnekler ve sonuçlar	52
3.2.3.1	Tek solitary dalganın hareketi	53
3.2.3.2	İki solitary dalganın etkileşimi	59
3.2.3.3	Maxwellian başlangıç şartı	63
3.3	GEW Denklemının Kübik B-spline Galerkin Yöntemi ile Sayısal Çözümü	65
3.3.1	Thomas algoritması ile septa-diagonal matris sisteminin çözümü	71
3.3.2	Lineer kararlılık analizi	71
3.3.3	Sayısal örnekler ve sonuçlar	72
3.3.3.1	Tek solitary dalganın hareketi	73
3.3.3.2	İki solitary dalganın etkileşimi	77
3.3.3.3	Üç solitary dalganın etkileşimi	80
4	GENELLEŞTİRİLMİŞ DÜZENLENMİŞ UZUN DALGA (GRLW) DENKLEMİNİN SONLU ELEMENLAR YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ	83
4.1	GRLW Denklemının Septik B-spline Kollokasyon Yöntemi ile Sayısal Çözümü	83
4.1.1	Thomas algoritması ile septa-diagonal matris sisteminin çözümü	89
4.1.2	Lineer kararlılık analizi	90
4.1.3	Sayısal örnekler ve sonuçlar	91
4.1.3.1	Tek solitary dalganın hareketi	92
4.1.3.2	İki solitary dalganın etkileşimi	97
4.1.3.3	Maxwellian başlangıç şartı	101
4.2	GRLW Denklemının Kuintik B-spline Kollokasyon Yöntemi ile Sayısal Çözümü	104
4.2.1	Thomas algoritması ile penta-diagonal matris sisteminin çözümü	108
4.2.2	Lineer kararlılık analizi	109
4.2.3	Sayısal örnekler ve sonuçlar	110
4.2.3.1	Tek solitary dalganın hareketi	110
4.2.3.2	İki solitary dalganın etkileşimi	115
4.2.3.3	Ardışık dalgaların gelişimi	118
4.3	GRLW Denklemının Kübik B-spline Galerkin Yöntemi ile Sayısal Çözümü	120
4.3.1	Thomas algoritması ile septa-diagonal matris sisteminin çözümü	126
4.3.2	Lineer kararlılık analizi	126
4.3.3	Sayısal örnekler ve sonuçlar	127
4.3.3.1	Tek solitary dalganın hareketi	128
4.3.3.2	İki solitary dalganın etkileşimi	133
4.3.3.3	Ardışık dalgaların gelişimi	135
5	SONUÇLAR VE ÖNERİLER	138
	KAYNAKLAR	139
	ÖZGEÇMİŞ	147

TABLOLAR LİSTESİ

Tablo 2.1	ϕ_m, ϕ'_m ve ϕ''_m in düğüm noktalarındaki değerleri	8
Tablo 2.2	$\phi_m, \phi'_m, \phi''_m(x), \phi'''_m$ ve $\phi_m^{(iv)}$ in düğüm noktalarındaki değerleri	11
Tablo 2.3	$\phi_m, \phi'_m, \phi''_m(x), \phi'''_m, \phi_m^{(iv)}, \phi_m^{(v)}$ ve $\phi_m^{(vi)}$ in düğüm noktalarındaki değerleri	14
Tablo 2.4	Cebirsel denklemin özellikleri	24
Tablo 3.1	Tek solitary dalganın $p = 2, gen. = 0.25, h = 0.1, \Delta t = 0.2$ ve $x \in [0, 80]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri	36
Tablo 3.2	Tek solitary dalganın $p = 2, gen. = 1, h = 0.1, \Delta t = 0.2$ ve $x \in [0, 80]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri	37
Tablo 3.3	Tek solitary dalganın $p = 3, gen. = 0.15, h = 0.1, \Delta t = 0.2$ ve $x \in [0, 80]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri	37
Tablo 3.4	Tek solitary dalganın $p = 3, gen. = 1, h = 0.1, \Delta t = 0.2$ ve $x \in [0, 80]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri	38
Tablo 3.5	Tek solitary dalganın $p = 4, gen. = 1, h = 0.1, \Delta t = 0.2$ ve $x \in [0, 80]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri	38
Tablo 3.6	Tek solitary dalganın $p = 2, 3, 4; h = 0.1, \Delta t = 0.2$ ve $x \in [0, 80]$ için sayısal sonuçlarının karşılaştırılması	39
Tablo 3.7	İki solitary dalganın etkileşiminin $p = 2, gen. = 1, 0.5, h = 0.1, \Delta t = 0.025$ ve $x \in [0, 80]$ için korunum sabitleri	41
Tablo 3.8	İki solitary dalganın etkileşiminin $p = 3, gen. = 1, 0.5, h = 0.1, \Delta t = 0.025$ ve $x \in [0, 80]$ için korunum sabitleri	41
Tablo 3.9	İki solitary dalganın etkileşiminin $p = 4, gen. = 1, 0.5, h = 0.1, \Delta t = 0.025$ ve $x \in [0, 80]$ için korunum sabitleri	42
Tablo 3.10	Maxwellian başlangıç şartı ve $h = 0.1, \Delta t = 0.01$ ve $x \in [-20, 20]$ için korunum sabitleri	44
Tablo 3.11	Tek solitary dalganın $p = 2, gen. = 0.25, h = 0.1, \Delta t = 0.2$ ve $x \in [0, 80]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri	54
Tablo 3.12	Tek solitary dalganın $p = 2, gen. = 1, h = 0.1, \Delta t = 0.2$ ve $x \in [0, 80]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri	54
Tablo 3.13	Tek solitary dalganın $p = 3, gen. = 0.15, h = 0.1, \Delta t = 0.2$ ve $x \in [0, 80]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri	55
Tablo 3.14	Tek solitary dalganın $p = 3, gen. = 1, h = 0.1, \Delta t = 0.2$ ve $x \in [0, 80]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri	55

Tablo 3.15	Tek solitary dalganın $p = 4$, $gen. = 1$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.2$ ve $x \in [0, 80]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri	55
Tablo 3.16	Tek solitary dalganın $p = 2, 3, 4$; $t = 20$ ve $x \in [0, 80]$ için farklı konum ve zaman adımındaki hata norm değerleri	57
Tablo 3.17	Tek solitary dalganın $p = 6, 8, 10$; $t = 20$ ve $x \in [0, 80]$ için farklı konum ve zaman adımındaki hata norm değerleri	57
Tablo 3.18	Tek solitary dalganın $p = 2, 3, 4$; $h = 0.1$, $\Delta t = 0.2$, $t = 20$ ve $x \in [0, 80]$ için sayısal sonuçlarının karşılaştırılması	58
Tablo 3.19	İki solitary dalganın etkileşiminin $p = 2$, $gen. = 1, 0.5$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.025$ ve $x \in [0, 80]$ için korunum sabitleri	61
Tablo 3.20	İki solitary dalganın etkileşiminin $p = 3$, $gen. = 1, 0.5$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.025$ ve $x \in [0, 80]$ için korunum sabitleri	61
Tablo 3.21	İki solitary dalganın etkileşiminin $p = 4$, $gen. = 1, 0.5$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.025$ ve $x \in [0, 80]$ için korunum sabitleri	61
Tablo 3.22	Maxwellian başlangıç şartı ve $h = 0.1$, $\Delta t = 0.01$ ve $x \in [-20, 20]$ için korunum sabitleri	63
Tablo 3.23	Tek solitary dalganın $p = 2$, $gen. = 0.25$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.2$ ve $x \in [0, 80]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri	74
Tablo 3.24	Tek solitary dalganın $p = 2$, $gen. = 1$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.2$ ve $x \in [0, 80]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri	74
Tablo 3.25	Tek solitary dalganın $p = 3$, $gen. = 0.15$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.2$ ve $x \in [0, 80]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri	75
Tablo 3.26	Tek solitary dalganın $p = 3$, $gen. = 1$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.2$ ve $x \in [0, 80]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri	75
Tablo 3.27	Tek solitary dalganın $p = 4$, $gen. = 1$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.2$ ve $x \in [0, 80]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri	75
Tablo 3.28	Tek solitary dalganın $p = 2, 3, 4$; $h = 0.1$, $\Delta t = 0.2$, $t = 20$ ve $x \in [0, 80]$ için sayısal sonuçlarının karşılaştırılması	76
Tablo 3.29	İki solitary dalganın etkileşiminin $p = 2$, $gen. = 1, 0.5$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.025$ ve $x \in [0, 80]$ için korunum sabitleri	78
Tablo 3.30	İki solitary dalganın etkileşiminin $p = 3$, $gen. = 1, 0.5$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.025$ ve $x \in [0, 80]$ için korunum sabitleri	78
Tablo 3.31	İki solitary dalganın etkileşiminin $p = 4$, $gen. = 1, 0.5$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.025$ ve $x \in [0, 80]$ için korunum sabitleri	79

Tablo 3.32	Üç solitary dalganın etkileşiminin $p = 2, 3, 4$; $h = 0.1$, $\Delta t = 0.025$ ve $x \in [0, 80]$ için korunum sabitleri	81
Tablo 4.1	Tek solitary dalganın $p = 2$, $gen. = 1$, $h = 0.2$, $\Delta t = 0.025$ ve $x \in [0, 100]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri	94
Tablo 4.2	Tek solitary dalganın $p = 2$, $gen. = 0.54772$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.01$ ve $x \in [0, 100]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri	94
Tablo 4.3	Tek solitary dalganın $p = 3$, $gen. = 1$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.025$ ve $x \in [0, 100]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri	94
Tablo 4.4	Tek solitary dalganın $p = 3$, $gen. = 0.6$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.01$ ve $x \in [0, 100]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri	95
Tablo 4.5	Tek solitary dalganın $p = 4$, $gen. = 1$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.025$ ve $x \in [0, 100]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri	95
Tablo 4.6	Tek solitary dalganın $p = 4$, $gen. = 0.6$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.01$ ve $x \in [0, 100]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri	95
Tablo 4.7	Tek solitary dalganın $p = 2, 3, 4$; $t = 10$ ve $x \in [0, 100]$ için sayısal sonuçlarının karşılaştırılması	96
Tablo 4.8	İki solitary dalganın etkileşiminin $p = 2$, $gen. = 2, 1$, $h = 0.2$, $\Delta t = 0.025$ ve $x \in [0, 250]$ için korunum sabitleri	98
Tablo 4.9	İki solitary dalganın etkileşiminin $p = 3$, $gen. = 2, 1$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.01$ ve $x \in [0, 120]$ için korunum sabitleri	99
Tablo 4.10	İki solitary dalganın etkileşiminin $p = 4$, $gen. = 2, 1$, $h = 0.125$, $\Delta t = 0.01$ ve $x \in [0, 200]$ için korunum sabitleri	99
Tablo 4.11	Maxwellian başlangıç şartı ve $h = 0.1$, $\Delta t = 0.01$ ve $x \in [-20, 60]$ için korunum sabitleri	102
Tablo 4.12	Tek solitary dalganın $p = 2, 3, 4$; $c = 0.1, 0.3$, $h = 0.2$, $\Delta t = 0.01$ ve $x \in [0, 100]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri	111
Tablo 4.13	Tek solitary dalganın $p = 6, 8, 10$; $c = 0.1, 0.3$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.01$ ve $x \in [0, 100]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri	112
Tablo 4.14	Tek solitary dalganın $p = 2, 3, 4$; $t = 20$ ve $x \in [0, 100]$ için farklı konum ve zaman adımındaki hata norm değerleri	113
Tablo 4.15	Tek solitary dalganın $p = 6, 8, 10$; $t = 20$ ve $x \in [0, 100]$ için farklı konum ve zaman adımındaki hata norm değerleri	114
Tablo 4.16	Tek solitary dalganın $p = 2, 3, 4$ ve $x \in [0, 100]$ için sayısal sonuçlarının karşılaştırılması	114

Tablo 4.17	İki solitary dalganın etkileşiminin $p = 2$, $gen. = 2,1$, $h = 0.2$, $\Delta t = 0.025$ ve $x \in [0, 250]$ için korunum sabitleri	116
Tablo 4.18	İki solitary dalganın etkileşiminin $p = 3,4$ ve $gen. = 2,1$ için korunum sabitleri	116
Tablo 4.19	Ardışık dalgaların gelişimi ve $U_0 = 0.1$, $x_0 = 0$, $d = 5$, $\mu = 1/6$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.1$, $x \in [-36, 300]$ için korunum sabitleri	118
Tablo 4.20	Tek solitary dalganın $p = 2$, $gen. = 1$, $h = 0.2$, $\Delta t = 0.025$ ve $x \in [0, 100]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri	129
Tablo 4.21	Tek solitary dalganın $p = 2$, $gen. = 0.54772$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.01$ ve $x \in [0, 100]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri	129
Tablo 4.22	Tek solitary dalganın $p = 3$, $gen. = 1$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.025$ ve $x \in [0, 100]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri	129
Tablo 4.23	Tek solitary dalganın $p = 3$, $gen. = 0.6$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.01$ ve $x \in [0, 100]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri	130
Tablo 4.24	Tek solitary dalganın $p = 4$, $gen. = 1$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.025$ ve $x \in [0, 100]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri	131
Tablo 4.25	Tek solitary dalganın $p = 4$, $gen. = 0.6$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.01$ ve $x \in [0, 100]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri	131
Tablo 4.26	Tek solitary dalganın $p = 2, 3, 4, 6, 8, 10$, $c = 0.03, 0.1$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.01$ ve $x \in [0, 100]$ için hata norm değerleri	132
Tablo 4.27	Tek solitary dalganın $p = 2, 3, 4$ ve $x \in [0, 100]$ için sayısal sonuçlarının karşılaştırılması	132
Tablo 4.28	İki solitary dalganın etkileşiminin $p = 2$, $gen. = 2,1$, $h = 0.2$, $\Delta t = 0.025$ ve $x \in [0, 250]$ için korunum sabitleri	133
Tablo 4.29	İki solitary dalganın etkileşiminin $p = 3,4$ ve $gen. = 2,1$ için korunum sabitleri	134
Tablo 4.30	Ardışık dalgaların gelişimi için korunum sabitleri	136

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.1	Kübik B-spline şekil fonksiyonları	9
Şekil 2.2	Kuintik B-spline şekil fonksiyonları	11
Şekil 2.3	Septik B-spline şekil fonksiyonları	14
Şekil 2.4	Bir su dalgasının hareketi	20
Şekil 2.5	İki solitary dalganın farklı zamanlardaki hareketi	22
Şekil 2.6	Sonlu elemanlar yaklaşımı	23
Şekil 3.1	Tek solitary dalganın $p = 3$, $gen. = 1$, $x_0 = 30$, $x \in [0, 80]$ için $t = 0, 10, 20$ 'deki hareketi	37
Şekil 3.2	Tek solitary dalganın $p = 4$, $gen. = 1$, $x_0 = 30$, $x \in [0, 80]$ için $t = 0, 10, 20$ 'deki hareketi	38
Şekil 3.3	İki solitary dalganın $p = 3$; a) $t = 0$, b) $t = 50$, c) $t = 70$, d) $t = 100$ 'deki hareketi	42
Şekil 3.4	İki solitary dalganın $p = 4$; a) $t = 0$, b) $t = 50$, c) $t = 70$, d) $t = 100$ 'deki hareketi	43
Şekil 3.5	Maxwellian başlangıç şartı ve $p = 3$, $t = 12$; a) $\mu = 0.1$, b) $\mu = 0.05$, c) $\mu = 0.025$, d) $\mu = 0.01$ değerleri için dalgaların oluşumu	45
Şekil 3.6	Maxwellian başlangıç şartı ve $p = 4$, $t = 12$; a) $\mu = 0.1$, b) $\mu = 0.05$, c) $\mu = 0.025$, d) $\mu = 0.01$ değerleri için dalgaların oluşumu	45
Şekil 3.7	Tek solitary dalganın $p = 2, 3, 4, 6, 8, 10$, $c = 0.3$, $x_0 = 30$, $x \in [0, 80]$ için $t = 0, 10, 20$ 'deki hareketi	59
Şekil 3.8	İki solitary dalganın $p = 3$; a) $t = 0$, b) $t = 50$, c) $t = 70$, d) $t = 100$ 'deki hareketi	62
Şekil 3.9	İki solitary dalganın $p = 4$; a) $t = 0$, b) $t = 50$, c) $t = 70$, d) $t = 100$ 'deki hareketi	62
Şekil 3.10	Maxwellian başlangıç şartı ve $p = 3$, $t = 12$; a) $\mu = 0.1$, b) $\mu = 0.05$, c) $\mu = 0.025$, d) $\mu = 0.01$ değerleri için dalgaların oluşumu	64
Şekil 3.11	Maxwellian başlangıç şartı ve $p = 4$, $t = 12$; a) $\mu = 0.1$, b) $\mu = 0.05$, c) $\mu = 0.025$, d) $\mu = 0.01$ değerleri için dalgaların oluşumu	64
Şekil 3.12	Tek solitary dalganın $p = 3$ ve $c = 0.3$, $x_0 = 30$, $x \in [0, 80]$ için $t = 0, 10, 20$ 'deki hareketi	76

Şekil 3.13	Tek solitary dalganın $p = 4$ ve $c = 0.2$, $x_0 = 30$, $x \in [0, 80]$ için $t = 0, 10, 20$ 'deki hareketi	77
Şekil 3.14	İki solitary dalganın $p = 3$; a) $t = 10$, b) $t = 50$, c) $t = 70$, d) $t = 100$ 'deki hareketi	79
Şekil 3.15	İki solitary dalganın $p = 4$; a) $t = 10$, b) $t = 50$, c) $t = 70$, d) $t = 100$ 'deki hareketi	80
Şekil 3.16	Üç solitary dalganın $p = 3$; a) $t = 10$, b) $t = 30$, c) $t = 40$, d) $t = 100$ 'deki hareketi	82
Şekil 3.17	Üç solitary dalganın $p = 4$; a) $t = 10$, b) $t = 20$, c) $t = 40$, d) $t = 120$ 'deki hareketi	82
Şekil 4.1	Tek solitary dalganın $p = 3$, $gen. = 1$, $x_0 = 40$, $x \in [0, 100]$ için $t = 0, 5, 10$ 'daki hareketi	96
Şekil 4.2	Tek solitary dalganın $p = 4$, $gen. = 1$, $x_0 = 40$, $x \in [0, 100]$ için $t = 0, 5, 10$ 'daki hareketi	97
Şekil 4.3	İki solitary dalganın $p = 3$; a) $t = 0$, b) $t = 3$, c) $t = 5$, d) $t = 6$ 'daki hareketi	100
Şekil 4.4	İki solitary dalganın $p = 4$; a) $t = 0$, b) $t = 2$, c) $t = 4$, d) $t = 6$ 'daki hareketi	100
Şekil 4.5	Maxwellian başlangıç şartı ve $p = 3$, $t = 6$; a) $\mu = 0.1$, b) $\mu = 0.05$, c) $\mu = 0.025$, d) $\mu = 0.01$ değerleri için dalgaların oluşumu	103
Şekil 4.6	Maxwellian başlangıç şartı ve $p = 4$, $t = 6$; a) $\mu = 0.1$, b) $\mu = 0.05$, c) $\mu = 0.025$, d) $\mu = 0.01$ değerleri için dalgaların oluşumu	103
Şekil 4.7	Tek solitary dalganın $p = 2, 3, 4, 6, 8, 10$, $c = 0.1$, $x_0 = 40$, $x \in [0, 100]$ için $t = 0, 10, 20$ 'deki hareketi	115
Şekil 4.8	İki solitary dalganın $p = 3$; a) $t = 0$, b) $t = 3$, c) $t = 5$, d) $t = 6$ 'daki hareketi	117
Şekil 4.9	İki solitary dalganın $p = 4$; a) $t = 0$, b) $t = 2$, c) $t = 4$, d) $t = 6$ 'daki hareketi	117
Şekil 4.10	$p = 2$; a) $t = 50$, b) $t = 200$ değerleri için ardışık dalgaların gelişimi . . .	118
Şekil 4.11	$p = 3$; a) $t = 50$, b) $t = 200$ değerleri için ardışık dalgaların gelişimi . . .	119
Şekil 4.12	$p = 4$; a) $t = 50$, b) $t = 200$ değerleri için ardışık dalgaların gelişimi . . .	119
Şekil 4.13	Tek solitary dalganın a) $p = 2$, b) $p = 3$, c) $p = 4$, d) $p = 6$, e) $p = 8$, f) $p = 10$ ve $c = 0.1$, $x_0 = 40$, $x \in [0, 100]$ için $t = 0, 10, 20$ 'deki hareketi . .	130

Şekil 4.14	İki solitary dalğanın $p = 3$; a) $t = 0$, b) $t = 3$, c) $t = 5$, d) $t = 6$ 'daki hareketi	134
Şekil 4.15	İki solitary dalğanın $p = 4$; a) $t = 0$, b) $t = 2$, c) $t = 4$, d) $t = 6$ 'daki hareketi	135
Şekil 4.16	$p = 2$; a) $t = 50$, b) $t = 200$ değerleri için ardışık dalgaların gelişimi . . .	136
Şekil 4.17	$p = 3$; a) $t = 50$, b) $t = 200$ değerleri için ardışık dalgaların gelişimi . . .	137
Şekil 4.18	$p = 4$; a) $t = 50$, b) $t = 200$ değerleri için ardışık dalgaların gelişimi . . .	137



SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

KdV	Korteweg-de Vries
mKdV	Modifiye edilmiş Korteweg-de Vries
GKdV	Genelleştirilmiş Korteweg-de Vries
EW	Eşit genişlikli dalga
MEW	Modifiye edilmiş eşit genişlikli dalga
GEW	Genelleştirilmiş eşit genişlikli dalga
RLW	Düzenlenmiş uzun dalga
MRLW	Modifiye edilmiş düzenlenmiş uzun dalga
GRLW	Genelleştirilmiş düzenlenmiş uzun dalga
KdVB	Korteweg-de Vries Burgers'
K-S	Kuramoto-Sivashinsky
GNLS	Genelleştirilmiş lineer olmayan Schrödinger
CMKdV	Kompleks modifiye edilmiş Korteweg-de Vries
BST	Boussinesq sistemi tipi

1. BÖLÜM

GİRİŞ

Lineer olmayan dalga olgusu pek çok fiziksel olayı anlamada önemli bir yere sahiptir. Değişen derinlikteki suda, uzun dalgalar hareket denklemleriyle modellenir. Küçük genlikli dalgalar için tanımlanan bu denklemler, lineer olmayan terimlere sahiptir. İlk olarak, Peregrine, pozitif x yönündeki uzun dalgaların yayılımından elde edilen düzenlenmiş uzun dalga (RLW) denklemini, kanaldaki suyun yüzeyindeki küçük genlikli uzun dalgalar için bir model olarak geliştirmiştir [1,2]. Burada, Peregrine, bir uzun dalgadan ardışık dalgaların gelişimini incelemiştir. Ona göre, uzun dalganın yükseltisi sığ suda yol alırsa, dalga dikleşir ve delik oluşturur. Benjamin ve arkadaşları, RLW denklemini daha yaygın olarak bilinen Korteweg-de Vries (KdV) denklemine alternatif bir model olarak kullanmıştır [3]. KdV denklemini, lineer olmayan dağıtıcı ve pek çok diğer fiziksel sistemlerde, küçük dalga genliği ve geniş dalga uzunluğu varsayımıyla birlikte uzun dalgaları tanımlar. Daha sonra, aynı genişlikte hem pozitif hem de negatif genliğe sahip olan eşit genişlikli dalga (EW) denklemini, Morrison ve arkadaşları tarafından RLW denklemine alternatif bir model olarak önerilmiştir [4]. Bu yüzden RLW denklemine dayanan genelleştirilmiş düzenlenmiş uzun dalga (GRLW) denklemini, genelleştirilmiş eşit genişlikli dalga (GEW) denklemini ve genelleştirilmiş Korteweg-de Vries (GKdV) denklemini ile ilgilidir. Bu denklemler $(p + 1)$. dereceden lineer olmayan dalga denklemleridir ve nabız atışına benzer solitary dalga çözümlere sahiptir [5].

GKdV denklemini,

$$U_t + \varepsilon U^p U_x + \mu U_{xxx} = 0; \quad (1.1)$$

GEW denklemini,

$$U_t + \varepsilon U^p U_x - \mu U_{xxt} = 0; \quad (1.2)$$

GRLW denklemini,

$$U_t + U_x + p(p + 1)U^p U_x - \mu U_{xxt} = 0 \quad (1.3)$$

şeklinde olup, burada fiziksel sınır şartları $x \rightarrow \pm\infty$ iken $U \rightarrow 0$, alt indis t ve x zaman ve boyutsal türevi ifade eder, ε ve p pozitif tamsayıdır, μ pozitif reel sabittir.

Sınır ve başlangıç şartları

$$\begin{aligned}U(a,t) = 0, \quad U_x(a,t) = 0, \quad U_{xxx}(a,t) = 0, \\U(b,t) = 0, \quad U_x(b,t) = 0, \quad U_{xxx}(b,t) = 0, \\U(x,0) = f(x), \quad a \leq x \leq b,\end{aligned}\tag{1.4}$$

olarak seçilecektir. Burada $f(x)$; çalışılan $[a, b]$ aralığındaki bölgesel düzensizliktir ve daha sonra belirlenecektir. Akışkanlar probleminde, U su yüzeyindeki düşey yer değiştirmeye veya benzer fiziksel büyüklükle ilgilidir. Plazma uygulamalarında ise, U negatif elektrostatik potansiyeli ifade eder. Bu yüzden, (1.1), (1.2) ve (1.3) ile verilen dalga denklemlerinin solitary dalga çözümleri, sıg sulara lineer olmayan enine dalgalar, plazmadaki iyon akustik ve manyetohidrodinamik dalgalar ve lineer olmayan kristallerdeki titrecik paketler gibi zayıf lineer olmama ve dağılımlı dalgalar ile birlikte pek çok fiziksel olgunun ne anlama geldiğini ortaya çıkarır.

Aslında EW denklemi (1.2) ile verilen GEW denkleminin $p = 1$ için özel halidir. Şu ana kadar, EW denklemi pek çok analitik ve sayısal çözüm teknikleri kullanılarak çözülmüştür. Gardner ve Gardner, kübik B-spline fonksiyonlarla beraber Galerkin sonlu elemanlar yöntemini EW denkleminde uygulamıştır [6]. Yine kuadratik B-spline fonksiyonlarla beraber Petrov-Galerkin sonlu elemanlar yöntemi, Gardner ve arkadaşları tarafından kullanılmıştır [7]. Zaki, en küçük kareler sonlu elemanlar algoritmasını EW denkleminin sayısal çözümlerini elde etmek için sunmuştur [8]. Doğan, lineer sonlu elemanlar kullanarak Galerkin yöntemi ile EW denklemini çözmüştür [9]. Kuadratik B-spline fonksiyonlar ile birlikte iki nokta Galerkin yöntemi, Esen tarafından EW denkleminin yaklaşık çözümlerini elde etmek için kullanılmıştır [10]. Saka, kuadratik B-spline fonksiyonlar kullanarak aralık bölme ve Galerkin yöntemi ile EW denkleminin sayısal çözümlerini elde etmiştir [11]. Dağ ve Saka, Raslan, Fazal-i-Haq; kübik, kuartik, septik B-spline fonksiyonlara dayanan kollokasyon yöntemini kullanarak EW denkleminin sayısal çözümlerini elde etmişlerdir [12–14].

(1.2) ile verilen GEW denkleminde $p = 2$ olarak alınırsa, elde edilen denklem modifiye edilmiş eşit genişlikli dalga (MEW) denklemi olarak bilinir. MEW denklemi de pek çok araştırmacı tarafından çalışılmıştır. Esen, iki nokta Galerkin yöntemini, kuadratik B-spline fonksiyonlarla birlikte MEW denkleminin sayısal çözümlerini elde etmek için inşa etmiştir [15]. Saka, kollokasyon sonlu elemanlar yaklaşımını MEW denkleminde uygulamıştır [16]. İslam ve arkadaşları, kuartik B-spline fonksiyonlara dayanan kollokasyon yöntemini kullanarak MEW denkleminin sayısal olarak çözmüştür [17]. Geyikli ve Karakoç, MEW denkle-

inin çözümü için septik B-spline kollokasyon yöntemini tanıtmıştır [18]. Ayrıca, kübik B-spline şekil fonksiyonlarıyla beraber iki nokta Galerkin ve Petrov-Galerkin yöntemi, MEW denkleminin yaklaşık çözümünü bulmak için Karakoç ve Geyikli tarafından tasarlanmıştır [19,20].

Bu tez çalışmasında ele aldığımız ve Bölüm 3 de çözümünü sunduğumuz GEW denklemini ele alırsak, GEW denklemi üzerinde sınırlı sayıda çalışma yapıldığını görürüz. Hamdi ve arkadaşları, genelleştirilmiş EW ve genelleştirilmiş EW-Burgers denklemlerinin tam solitary dalga çözümünü elde etmişlerdir [21]. Evans ve Raslan, Raslan; GEW denkleminin sayısal çözümlerini elde etmek için kuadratik ve kübik B-spline kollokasyon yöntemini sunmuşlardır [5, 22]. Roshan, deneme fonksiyonu olarak kuadratik B-spline fonksiyonunu kullanarak GEW denkleminin sayısal çözümleri için Petrov-Galerkin sonlu elemanlar yöntemini araştırmıştır [23]. Panahipour, RBF kollokasyon yöntemini kullanarak GEW denklemini sayısal olarak çözmüştür [24]. Taghizadeh ve arkadaşları, GEW denkleminin tam ilerleyen dalga çözümünü elde etmek için homojen dengeleme yöntemini kurmuşlardır [25].

RLW denklemi, (1.3) ile verilen GRLW denkleminde $p = 1$ alınarak oluşturulur. Literatürde RLW denklemi üzerinde pek çok çalışma vardır. 1960'larda, Peregrine, ardışık dalgaların gelişimi ile beraber RLW denklemini incelemiştir [1, 2]. Morrison ve arkadaşları, RLW denkleminin solitary dalgalarının dağılımı için yaklaşık analitik teknik yöntemleri araştırmışlardır [4]. Doğan, Gardner ve arkadaşları; lineer ve kuadratik B-spline fonksiyonlarla birlikte Galerkin yaklaşımını kullanmışlardır [26, 27]. RLW denklemi için kuadratik B-spline şekil fonksiyonları kullanılarak kollokasyon yöntemi, Raslan tarafından önerilmiştir [28]. Yine kübik, septik, kuintik, hem sektik hem de septik B-spline fonksiyonlara dayanan kollokasyon algoritması kullanılarak RLW denklemi sayısal olarak çözülmüştür [29–32]. Kuintik ve kuadratik B-spline fonksiyonlar kullanılarak Galerkin sonlu elemanlar yöntemi bir boyutlu RLW denkleminin sayısal çözümlerini elde etmek için kullanılmıştır [33, 34]. Mei ve Chen, RLW denklemi için lineer B-splinelar kullanarak yeni Galerkin yöntemini dizayn etmişlerdir [35]. Daha sonra, parametrik kuintik splinelara dayanan von-Neumann tekniği kullanılarak RLW denklemi sayısal olarak çözülmüştür [36].

(1.3) ile verilen GRLW denkleminde $p = 2$ olarak alınırsa elde edilen denklem, modifiye edilmiş düzenlenmiş uzun dalga (MRLW) denklemi olarak adlandırılır. Araştırmacılar tarafından MRLW denkleminin sayısal çözümleri kuintik, kübik, kuartik, septik B-spline

sonlu elemanlara dayanan kollokasyon yöntemi kullanılarak bulunmuştur [37–42]. Ali, örgüsüz kollokasyon yöntemini MRLW denkleminin sayısal çözümü için inşa etmiştir [43]. Yakın zamanlarda, Dağ ve arkadaşları, MRLW denkleminin sayısal çözümleri için genişletilmiş kübik B-spline fonksiyonlarını kullanarak kollokasyon algoritmasını kurmuştur [44]. Karakoç ve Yağmurlu, MRLW denklemine kübik B-spline ile birlikte Galerkin sonlu elemanlar yaklaşımını uygulamışlardır [45].

Bu tez çalışmasında ele aldığımız ve Bölüm 4 te çözümünü araştırdığımız GRLW denklemini ele alırsak, şu ana kadar GRLW denkleminin solitary dalga çözümleri, bazı tam ve sayısal çözüm teknikleri ile bulunmuştur. Bona ve arkadaşları, GRLW denkleminin hem kararlı hem kararsız solitary dalga çözümlerini elde etmişlerdir [46]. Kaya ve El-Sayed, genelleştirilmiş KdV ve genelleştirilmiş RLW denklemlerini, Adomian ayrışım yöntemini kullanarak tam ve sayısal olarak çözmüşlerdir [47]. Hamdi ve arkadaşları, GRLW denklemi ve onun daha basit alternatif modeli olan GEW denklemi için yeni bir tam çözüm yöntemi sunmuşlardır [48]. Ramos, ardışık dalgaların oluşumu üzerindeki başlangıç şartı ile beraber GRLW denkleminin solitary dalga çözümünü elde etmek için yaklaşık yarı lineerleştirme algoritmasını kullanmıştır [49]. Kaya, EL-Danaf ve arkadaşları, Guo ve arkadaşları; GRLW denkleminin sayısal davranışlarını incelemek için sırasıyla ayrışım yöntemini, sonlu fark yaklaşımını, elemansız kp-Ritz yöntemini uygulamışlardır [50–52]. Sonlu fark, He'nin değişimli tekrarlama, Meshfree, Petrov-Galerkin sonlu elemanlar, elemansız olma yaklaşımına ve $2N$ mertebeden yoğunlaştırılmış sonlu fark algoritmalarına dayanan sayısal yöntemler GRLW denkleminin çözümü için tanıtılmıştır [53–58]. Mohammadi, üstel B-spline sonlu elemanlara dayanan kollokasyon algoritmasını kullanarak GRLW denkleminin sayısal sonuçlarını elde etmiştir [59].

Bu tez çalışmasında, GEW ve GRLW denklemlerinin çözümleri için önerdiğimiz B-spline fonksiyonlara dayanan kollokasyon sonlu elemanlar yöntemi, daha önce farklı türden lineer olmayan problemlerin yaklaşık çözümlerini elde etmek için kullanılmıştır. Genelleştirilmiş Burgers–Fisher ve genelleştirilmiş Burgers–Huxley denklemleri, kübik B-spline kollokasyon algoritması kullanılarak çözülmüştür [60]. KdVB, kompleks modifiye edilmiş KdV, genelleştirilmiş lineer olmayan Schrödinger ve genelleştirilmiş Rosenau-RLW denklemleri, kuintik B-spline kollokasyon yöntemi kullanılarak sayısal olarak çözülmüştür [61–64]. Kawahara denklemi ise septik B-spline kollokasyon yöntemi kullanılarak çözülmüştür [65].

Yine, GEW ve GRLW denklemlerinin yaklaşık çözümlerini elde etmek için uyguladığımız

B-spline fonksiyonlarla beraber, Galerkin sonlu elemanlar yöntemi farklı türden problemlere uygulanmıştır. Galerkin yaklaşımı, Gardner ve Gardner tarafından RLW denklemine [66]; Saka ve Dağ tarafından KdVB denklemine [67]; Kutluay ve Uçar tarafından birleştirilmiş KdV denklemine [68]; Esen ve arkadaşları tarafından kesirli difüzyon ve kesirli difüzyon dalga denklemlerine [69]; yine Kutluay ve Uçar tarafından birleştirilmiş modifiye edilmiş KdV denklemine [70]; Uçar ve arkadaşları tarafından iyileştirilmiş Boussinesq tipindeki denkleme uygulanmıştır [71].

Sonlu elemanlar yöntemi üzerinde yapılan tez çalışmalarına göz atıldığında farklı tipten denklemlere uygulandığını görebiliriz. Kuadratik ve kübik B-spline fonksiyonlar kullanarak Galerkin sonlu elemanlar yöntemi ile KdV denkleminin sayısal çözümleri Dağ tarafından elde edilmiştir [72]. Saka, RLW ve K-S denklemlerinin çözümü için kuadratik, kübik ve kuintik B-spline fonksiyonlara dayanan kollokasyon yöntemini kullanmıştır [73]. Irk, kübik ve kuintik B-spline kollokasyon yöntemi ile GNLS denklemi, CMKdV denklemi ve BST denklem sisteminin çözümlerini vermiştir [74]. B-spline şekil fonksiyonlar kullanılarak Galerkin, Petrov-Galerkin, Subdomain ve Kollokasyon sonlu elemanlar yöntemi, Uçar tarafından birleştirilmiş KdV ve birleştirilmiş mKdV denklemlerine; Karakoç tarafından MEW denkleme uygulanmıştır [75,76]. Yağmurlu yaptığı tez çalışmasında, 2-boyutlu Poisson, difüzyon ve kararsız Burgers denklemlerinin sayısal çözümleri için modifiye edilmiş Galerkin yöntemini kullanmıştır [77].

Bu çalışmada ele aldığımız GEW ve GRLW dalga denklemlerinin yapısına bakıldığında, $(p + 1)$. dereceden lineer olmayan terimlere sahip olduğu görülür. Bu denklemlerin varsa analitik çözümlerini bulmak en iyi tercihtir. Fakat ele alınan dalga denklemlerinin lineer olmayan terimlerinden dolayı bu ve buna benzer denklemlerin genelde analitik çözümlerini elde etmek zordur. Bu aşamada, yaklaşık analitik çözüm teknikleri devreye girer. Şayet bu da mümkün olmazsa, analitik olarak çözümü zor veya imkansız olan problemlerin çözülebilmesi için uygun ve en iyi yaklaşım olan sayısal çözüm teknikleri kaçınılmaz hale gelir. Bazı durumlarda da kısmen analitik kısmen de sayısal çözüm tekniklerinin karışımını uygulamak gerekebilir.

Literatürde yapılan çalışmaları ve benzer yapıdaki lineer olmayan denklemlere uygulanan yöntemlerle elde edilen sayısal sonuçlar incelenirse, sonlu elemanlar yönteminin doğru ve etkili bir sayısal algoritma olduğu görülür. Bu nedenle, bu tez çalışmasında GEW ve GRLW

dalga denklemlerinin yaklaşıık çözümlerini elde edebilmek için sonlu elemanlar yöntemi kullanıldı. Kollokasyon ve Galerkin sonlu elemanlar algoritması ile bu dalga denklemlerinin solitary dalga çözümleri elde edildi.



2. BÖLÜM

TEMEL BİLGİLER

Bu bölümde, B-spline fonksiyonlar ve özellikleri, GEW ve GRLW denklemlerinin lineer olmayan terimi için uygulanabilecek çeşitli lineerleştirme teknikleri, dalga teorisi ve sonlu elemanlar yöntemi hakkında temel bilgiler verilecektir.

2.1 B-spline Fonksiyonlar ve Özellikleri

Yaklaşık çözüm yöntemlerinin etkili olması için seçilecek olan yöntemle birlikte uygun fonksiyonlar seçmekte önemlidir. Bunun için araştırmacılar, genellikle özellikleri bilinen polinom fonksiyonları kullanmışlardır. Fakat, polinom fonksiyonlar kullanırken çok sayıda nokta (veya fonksiyon) kullanılması, yüksek dereceden polinomların düzgün ve istenilen yaklaşımı temsil etmeyen yüksek salınımlı davranış sergilemelerine ve hesaplama zorluklarına neden olmaktadır. Bu durumda, parçalı polinomlar kullanılarak bu tür problemlerin üstesinden gelmek mümkündür. Bunun için spline fonksiyonlar olarak adlandırılan parçalı polinomlar tanımlanmıştır. Spline fonksiyonlarla hem tanımlı bölge içindeki süreklilik sağlanmış olur hem de her bir aralıkta daha küçük dereceden polinomlarla yaklaşım yapma imkanı sağlanır. Spline fonksiyonların aşağıdaki genel olarak bilinen özellikleri verilmiştir;

- Uygun bazlarla birlikte sonlu boyutlu lineer uzay oluştururlar.
- Düzgün fonksiyonlardır.
- Spline fonksiyonların türevleri ve integralleri yine spline fonksiyonlardır.
- Düşük dereceli spline fonksiyonlar esnekler, yani keskin salınım yapmazlar.
- Spline fonksiyonlar kullanıldığında yakınsaklık ve kararlılık daha kolay araştırılabilir.
- Spline fonksiyonlar bilgisayarlarda işleme, hesaplama ve depolama açısından daha uyumlu fonksiyonlardır.
- Spline fonksiyonlar kullanıldığında ortaya çıkan matrisler uygun işaretlidir ve determinant özellikleri kolay hesaplanabilir.
- Spline fonksiyonlar ve türevleri aynı anda yaklaşık olarak hesaplanabilir.

2.1.1 Kübik B-spline fonksiyonlar

$[a, b]$ sonlu aralığı içine sınırlandırılmış bir çözüm bölgesini ele alalım. $a = x_0 < x_1 \cdots < x_N = b$ ve aralık uzunluğu $h = \frac{b-a}{N} = (x_{m+1} - x_m)$ olmak üzere, x_m noktalarıyla $[a, b]$ aralığı N tane eşit alt aralığa bölünebilir. Prenter [78], $\phi_m(x)$ kübik B-spline fonksiyonları, $m = -1, 0, 1, \dots, N+1$ olmak üzere, x_m düğüm noktalarında aşağıdaki gibi tanımlamıştır:

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (x - x_{m-2})^3, & x \in [x_{m-2}, x_{m-1}), \\ h^3 + 3h^2(x - x_{m-1}) + 3h(x - x_{m-1})^2 - 3(x - x_{m-1})^3, & x \in [x_{m-1}, x_m), \\ h^3 + 3h^2(x_{m+1} - x) + 3h(x_{m+1} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^3, & x \in [x_m, x_{m+1}), \\ (x_{m+2} - x)^3, & x \in [x_{m+1}, x_{m+2}], \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (2.1)$$

$\{\phi_{-1}(x), \phi_0(x), \dots, \phi_N(x), \phi_{N+1}(x)\}$ kümesi $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı fonksiyonlar için bir baz oluşturur. Burada, ϕ_m kübik B-spline fonksiyonu ve türevleri $[x_{m-2}, x_{m+2}]$ aralığı dışında sıfır olarak tanımlanmıştır. $\phi_m(x)$ ve onun $\phi'_m(x)$ birinci merteye ve $\phi''_m(x)$ ikinci merteye türevlerinin düğüm noktalarındaki değerleri Tablo 2.1 de verilmiştir.

Tablo 2.1 ϕ_m , ϕ'_m ve ϕ''_m in düğüm noktalarındaki değerleri

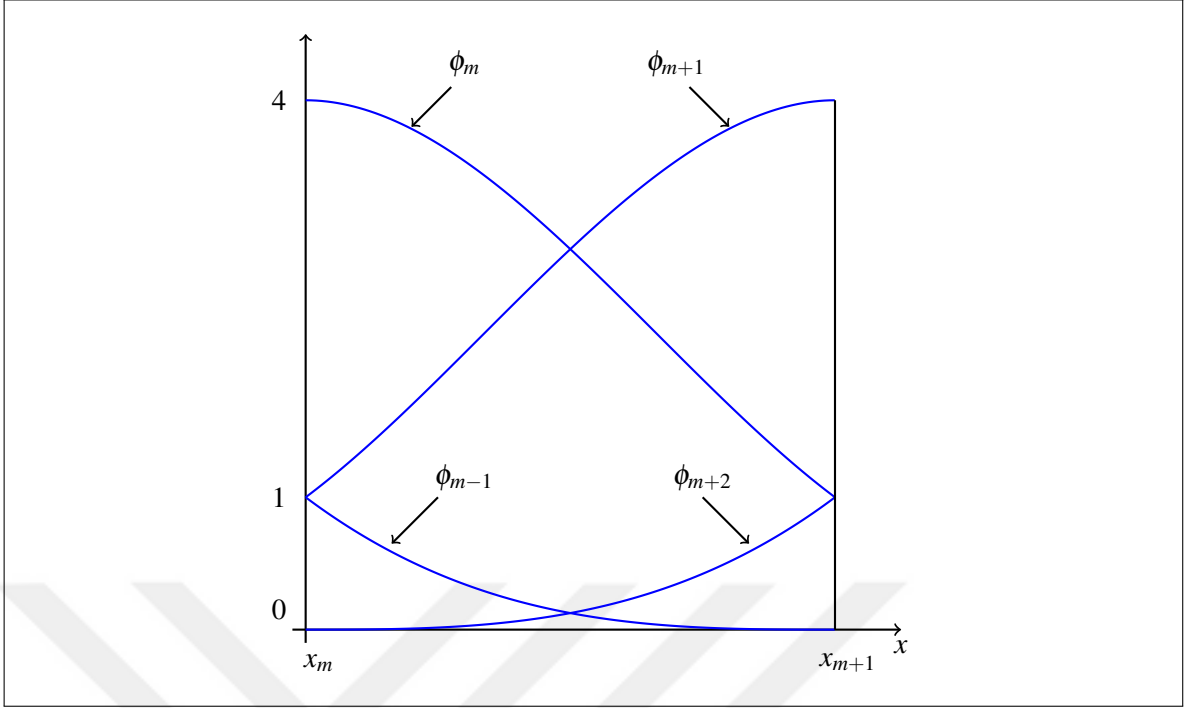
x	x_{m-2}	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}
ϕ_m	0	1	4	1	0
$h\phi'_m$	0	3	0	-3	0
$h^2\phi''_m$	0	6	-12	6	0

Ayrıca her bir ϕ_m kübik B-spline fonksiyonu $[x_{m-2}, x_{m+2}]$ aralığında ardışık 4 tane sonlu alt aralığı kaplar. Bu yüzden, Şekil 2.1 de gösterildiği gibi her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu alt aralığı, 4 adet $\{\phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}, \phi_{m+2}\}$ kübik B-spline şekil fonksiyonu tarafından örtülür.

Yaklaşık çözüm $U_N(x, t)$, kübik B-spline fonksiyonlar cinsinden,

$$U_N(x, t) = \sum_{j=-1}^{N+1} \delta_j(t) \phi_j(x) \quad (2.2)$$

olarak tanımlanır. Burada $\delta_j(t)$, zamana bağlı bilinmeyen parametrelerdir ve sınır şartları ile çözüm şartları kullanılarak hesaplanır. Yaklaşık çözüm U_N ve onun x' e göre ikinci merteye



Şekil 2.1 Kübik B-spline şekil fonksiyonları

kadar olan türevi, x_m düğüm noktasında δ_m bilinmeyen parametreleri cinsinden,

$$\begin{aligned}
 U_N(x_m, t) &= U_m = \delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1}, \\
 U'_m &= \frac{3}{h}(-\delta_{m-1} + \delta_{m+1}), \\
 U''_m &= \frac{6}{h^2}(\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1})
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

olarak hesaplanır.

$0 \leq \eta \leq 1$ için $h\eta = x - x_m$ eşitliği kullanılarak, $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı $[0, 1]$ aralığına dönüştürülebilir. Böylece, (2.1) ile verilen kübik B-spline fonksiyonları η değişkenine bağlı olarak $[0, 1]$ aralığı üzerinde,

$$\begin{aligned}
 \phi_{m-1} &= (1 - \eta)^3, \\
 \phi_m &= 1 + 3(1 - \eta) + 3(1 - \eta)^2 - 3(1 - \eta)^3, \\
 \phi_{m+1} &= 1 + 3\eta + 3\eta^2 - 3\eta^3, \\
 \phi_{m+2} &= \eta^3
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

şeklinde verilebilir. Burada $\phi_{m-1}(x)$, $\phi_m(x)$, $\phi_{m+1}(x)$ ve $\phi_{m+2}(x)$ fonksiyonları hariç tüm kübik B-spline fonksiyonlar $[0, 1]$ aralığında sıfırdır. Bu yüzden (2.2) ile verilen yaklaşım fonksiyonu, $[0, 1]$ aralığında δ_m eleman parametreleri ve ϕ_m şekil fonksiyonları cinsinden aşağıdaki

gibi yazılabilir:

$$U_N(\eta, t) = \sum_{j=m-1}^{m+2} \delta_j \phi_j. \quad (2.5)$$

Buradan da U_N ve onun η' ya göre ikinci mertebeye kadar olan türevi $x = x_m \rightarrow \eta = 0$ noktasında δ_m zaman parametreleri cinsinden,

$$\begin{aligned} U_m &= \delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1}, \\ U'_m &= 3(-\delta_{m-1} + \delta_{m+1}), \\ U''_m &= 6(\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1}) \end{aligned} \quad (2.6)$$

yazılabilir.

2.1.2 Kuintik B-spline fonksiyonlar

$[a, b]$ sonlu aralığı içine sınırlandırılmış bir çözüm bölgesini ele alalım. $a = x_0 < x_1 \cdots < x_N = b$ ve aralık uzunluğu $h = \frac{b-a}{N} = (x_{m+1} - x_m)$ olmak üzere, x_m noktalarıyla $[a, b]$ aralığı N tane eşit alt aralığa bölünebilir. Prenter [78], $\phi_m(x)$ kuintik B-spline fonksiyonları, $m = -2, -1, 0, \dots, N+2$ olmak üzere, x_m düğüm noktalarında aşağıdaki gibi tanımlamıştır:

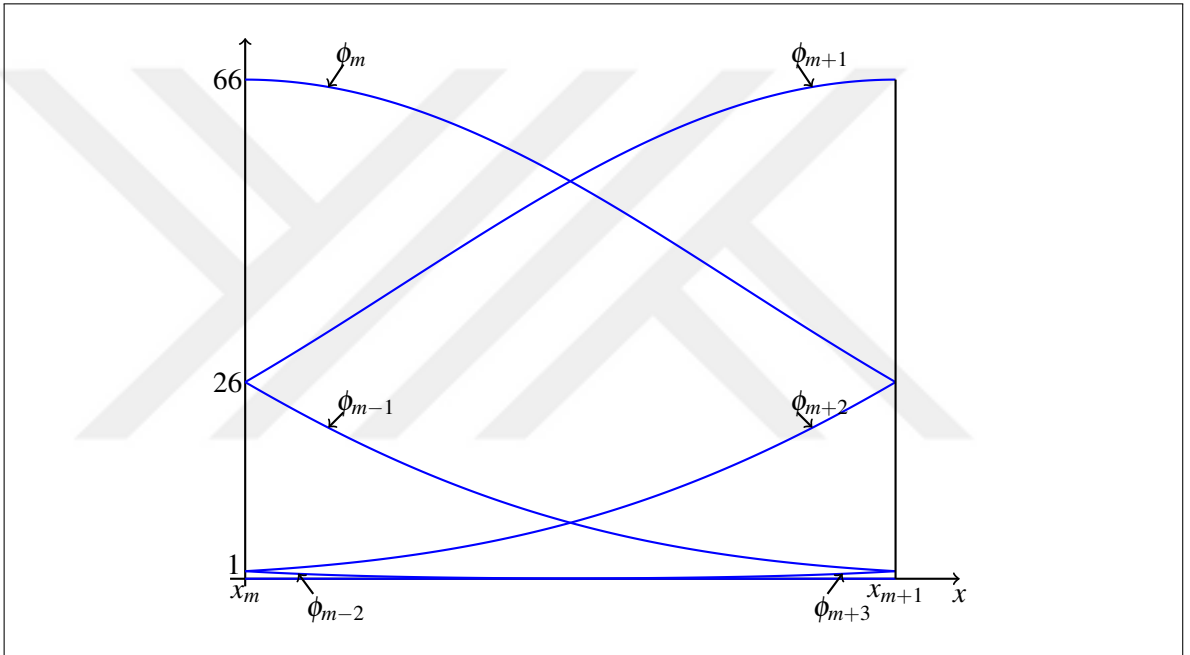
$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^5} \begin{cases} (x - x_{m-3})^5, & [x_{m-3}, x_{m-2}) \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5, & [x_{m-2}, x_{m-1}) \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5, & [x_{m-1}, x_m) \\ (x_{m+3} - x)^5 - 6(x_{m+2} - x)^5 + 15(x_{m+1} - x)^5, & [x_m, x_{m+1}) \\ (x_{m+3} - x)^5 - 6(x_{m+2} - x)^5, & [x_{m+1}, x_{m+2}) \\ (x_{m+3} - x)^5, & [x_{m+2}, x_{m+3}) \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (2.7)$$

$\{\phi_{-2}(x), \phi_{-1}(x), \dots, \phi_{N+1}(x), \phi_{N+2}(x)\}$ kümesi $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı fonksiyonlar için bir baz oluşturur. Burada ϕ_m kuintik B-spline fonksiyonu ve türevleri $[x_{m-3}, x_{m+3}]$ aralığı dışında sıfır olarak tanımlanmıştır. $\phi_m(x)$ ve onun $\phi'_m(x)$, $\phi''_m(x)$, $\phi'''_m(x)$ ve $\phi_m^{(iv)}(x)$ dördüncü mertebeye kadar türevlerinin düğüm noktalarındaki değerleri Tablo 2.2 de verilmiştir.

Ayrıca her bir ϕ_m kuintik B-spline fonksiyonu $[x_{m-3}, x_{m+3}]$ aralığında ardışık 6 tane sonlu alt aralığı kaplar. Bu yüzden Şekil 2.2 gösterildiği gibi her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu alt aralığı, 6 adet $\{\phi_{m-2}, \phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}, \phi_{m+2}, \phi_{m+3}\}$ kuintik B-spline şekil fonksiyonu tarafından örtülür.

Tablo 2.2 ϕ_m , ϕ'_m , $\phi''_m(x)$, ϕ'''_m ve $\phi_m^{(iv)}$, in düğüm noktalarındaki değerleri

x	x_{m-3}	x_{m-2}	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}	x_{m+3}
ϕ_m	0	1	26	66	26	1	0
$h\phi'_m$	0	5	50	0	-50	-5	0
$h^2\phi''_m$	0	20	40	-120	40	20	0
$h^3\phi'''_m$	0	60	-120	0	120	-60	0
$h^4\phi_m^{(iv)}$	0	120	-480	720	-480	120	0



Şekil 2.2 Kuintik B-spline şekil fonksiyonları

Yaklaşık çözüm $U_N(x, t)$, kuintik B-spline fonksiyonlar cinsinden,

$$U_N(x, t) = \sum_{j=-2}^{N+2} \delta_j(t) \phi_j(x) \quad (2.8)$$

olarak tanımlanır. Burada $\delta_j(t)$, zamana bağlı bilinmeyen parametrelerdir ve sınır şartları ile çözüm şartları kullanılarak hesaplanır. Yaklaşık çözüm U_N ve onun x' e göre dördüncü

mertebeye kadar olan türevi, x_m düğüm noktasında δ_m bilinmeyen parametreleri cinsinden,

$$\begin{aligned}
U_N(x_m, t) &= U_m = \delta_{m-2} + 26\delta_{m-1} + 66\delta_m + 26\delta_{m+1} + \delta_{m+2}, \\
U'_m &= \frac{5}{h}(-\delta_{m-2} - 10\delta_{m-1} + 10\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \\
U''_m &= \frac{20}{h^2}(\delta_{m-2} + 2\delta_{m-1} - 6\delta_m + 2\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \\
U'''_m &= \frac{60}{h^3}(-\delta_{m-2} + 2\delta_{m-1} - 2\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \\
U_m^{(iv)} &= \frac{120}{h^4}(\delta_{m-2} - 4\delta_{m-1} + 6\delta_m - 4\delta_{m+1} + \delta_{m+2})
\end{aligned} \tag{2.9}$$

olarak hesaplanır.

$0 \leq \eta \leq 1$ için $h\eta = x - x_m$ eşitliği kullanılarak, $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı $[0, 1]$ aralığına dönüştürülebilir. Bu halde, (2.7) ile verilen kuintik B-spline fonksiyonları η değişkenine bağlı olarak $[0, 1]$ aralığı üzerinde,

$$\begin{aligned}
\phi_{m-2} &= 1 - 5\eta + 10\eta^2 - 10\eta^3 + 5\eta^4 - \eta^5, \\
\phi_{m-1} &= 26 - 50\eta + 20\eta^2 + 20\eta^3 - 20\eta^4 + 5\eta^5, \\
\phi_m &= 66 - 60\eta^2 + 30\eta^4 - 10\eta^5, \\
\phi_{m+1} &= 26 + 50\eta + 20\eta^2 - 20\eta^3 - 20\eta^4 + 10\eta^5, \\
\phi_{m+2} &= 1 + 5\eta + 10\eta^2 + 10\eta^3 + 5\eta^4 - 5\eta^5, \\
\phi_{m+3} &= \eta^5
\end{aligned} \tag{2.10}$$

olarak bulunur. Burada $\phi_{m-2}(x)$, $\phi_{m-1}(x)$, $\phi_m(x)$, $\phi_{m+1}(x)$, $\phi_{m+2}(x)$ ve $\phi_{m+3}(x)$ fonksiyonları hariç tüm kuintik B-spline fonksiyonlar $[0, 1]$ aralığında sıfırdır. Bu yüzden, (2.8) ile verilen yaklaşım fonksiyonu, $[0, 1]$ aralığında δ_m eleman parametreleri ve ϕ_m şekil fonksiyonları cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$U_N(\eta, t) = \sum_{j=m-2}^{m+3} \delta_j \phi_j. \tag{2.11}$$

Böylece U_N ve onun η ' ya göre dördüncü mertebeye kadar olan türevi, $x = x_m \rightarrow \eta = 0$ noktasında δ_m zaman parametreleri cinsinden,

$$\begin{aligned}
U_m &= \delta_{m-2} + 26\delta_{m-1} + 66\delta_m + 26\delta_{m+1} + \delta_{m+2}, \\
U'_m &= 5(-\delta_{m-2} - 10\delta_{m-1} + 10\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \\
U''_m &= 20(\delta_{m-2} + 2\delta_{m-1} - 6\delta_m + 2\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \\
U'''_m &= 60(-\delta_{m-2} + 2\delta_{m-1} - 2\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \\
U_m^{(iv)} &= 120(\delta_{m-2} - 4\delta_{m-1} + 6\delta_m - 4\delta_{m+1} + \delta_{m+2})
\end{aligned} \tag{2.12}$$

olarak elde edilir.

2.1.3 Septik B-spline fonksiyonlar

$[a, b]$ sonlu aralığı içine sınırlandırılmış bir çözüm bölgesini ele alalım. $a = x_0 < x_1 \cdots < x_N = b$ ve aralık uzunluğu $h = \frac{b-a}{N} = (x_{m+1} - x_m)$ olmak üzere, x_m noktalarıyla $[a, b]$ aralığı N tane eşit alt aralığa bölünebilir. $\phi_m(x)$ septik B-spline fonksiyonları, $m = -3, -2, \dots, N+3$ olmak üzere x_m düğüm noktalarında Prenter [78] tarafından aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^7} \begin{cases} (x - x_{m-4})^7, & [x_{m-4}, x_{m-3}] \\ (x - x_{m-4})^7 - 8(x - x_{m-3})^7, & [x_{m-3}, x_{m-2}] \\ (x - x_{m-4})^7 - 8(x - x_{m-3})^7 + 28(x - x_{m-2})^7, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ (x - x_{m-4})^7 - 8(x - x_{m-3})^7 + 28(x - x_{m-2})^7 - 56(x - x_{m-1})^7, & [x_{m-1}, x_m] \\ (x_{m+4} - x)^7 - 8(x_{m+3} - x)^7 + 28(x_{m+2} - x)^7 - 56(x_{m+1} - x)^7, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+4} - x)^7 - 8(x_{m+3} - x)^7 + 28(x_{m+2} - x)^7, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ (x_{m+4} - x)^7 - 8(x_{m+3} - x)^7, & [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ (x_{m+4} - x)^7, & [x_{m+3}, x_{m+4}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (2.13)$$

$\{\phi_{-3}(x), \phi_{-2}(x), \dots, \phi_{N+2}(x), \phi_{N+3}(x)\}$ kümesi $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı fonksiyonlar için bir baz oluşturur. Burada ϕ_m septik B-spline fonksiyonu ve türevleri $[x_{m-4}, x_{m+4}]$ aralığı dışında sıfır olarak tanımlanmıştır. $\phi_m(x)$ ve onun $\phi_m'(x)$, $\phi_m''(x)$, $\phi_m'''(x)$, $\phi_m^{(iv)}(x)$, $\phi_m^{(v)}(x)$ ve $\phi_m^{(vi)}(x)$ altıncı mertebeye kadar türevlerinin düğüm noktalarındaki değerleri Tablo 2.3'te verilmiştir.

Ayrıca her bir ϕ_m septik B-spline fonksiyonu $[x_{m-4}, x_{m+4}]$ aralığında ardışık 8 tane sonlu alt aralığı kaplar. Bu yüzden Şekil 2.3 de gösterildiği gibi her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu alt aralığı, 8 adet $\{\phi_{m-3}, \phi_{m-2}, \phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}, \phi_{m+2}, \phi_{m+3}, \phi_{m+4}\}$ septik B-spline şekil fonksiyonu tarafından örtülür.

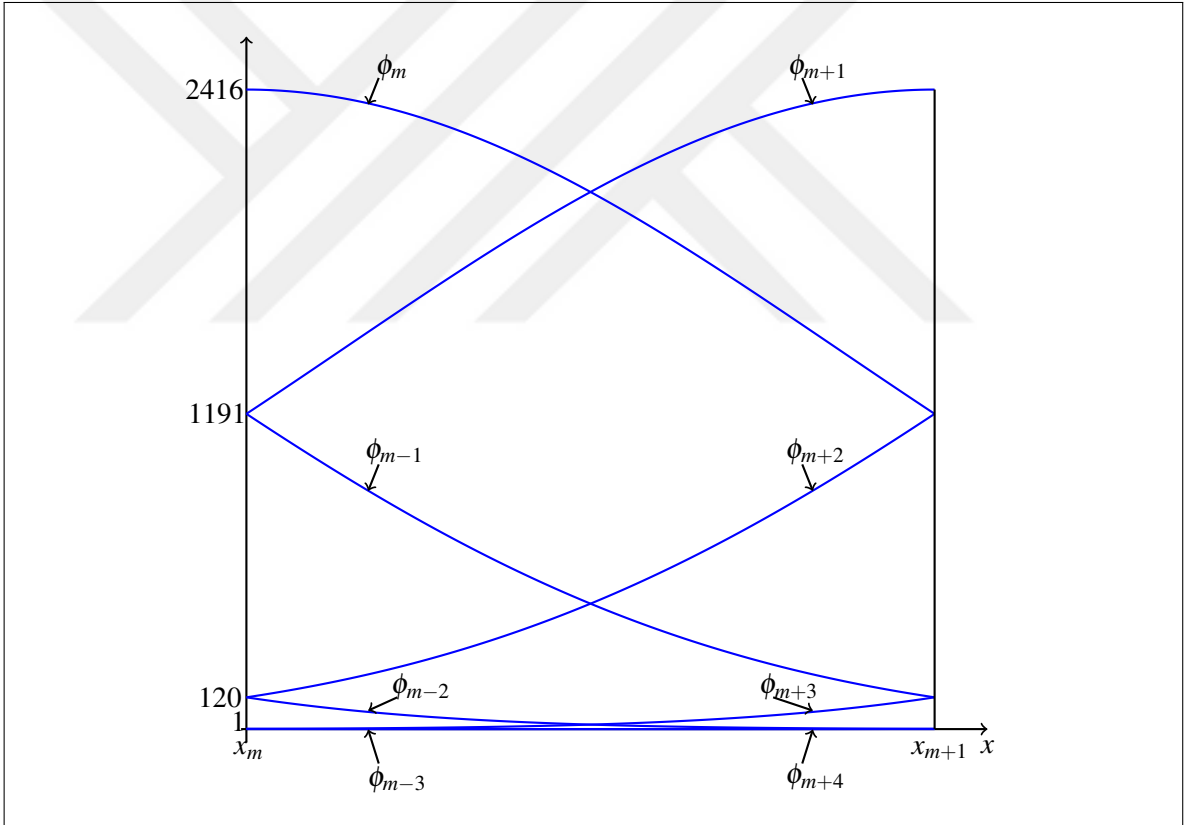
Yaklaşık çözüm $U_N(x, t)$, septik B-spline fonksiyonlar cinsinden,

$$U_N(x, t) = \sum_{j=-3}^{N+3} \delta_j(t) \phi_j(x) \quad (2.14)$$

olarak tanımlanır. Burada $\delta_j(t)$, zamana bağlı bilinmeyen parametrelerdir ve sınır şartları ile çözüm şartları kullanılarak hesaplanır. Yaklaşık çözüm U_N ve onun x' e göre altıncı merteb-

Tablo 2.3 $\phi_m, \phi'_m, \phi''_m(x), \phi'''_m, \phi_m^{(iv)}, \phi_m^{(v)}$ ve $\phi_m^{(vi)}$ in düğüm noktalarındaki değerleri

x	x_{m-4}	x_{m-3}	x_{m-2}	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}	x_{m+3}	x_{m+4}
ϕ_m	0	1	120	1191	2416	1191	120	1	0
$h\phi'_m$	0	-7	-392	-1715	0	1715	392	7	0
$h^2\phi''_m$	0	42	1008	630	-3360	630	1008	42	0
$h^3\phi'''_m$	0	-210	-1680	3990	0	-3990	1680	210	0
$h^4\phi_m^{(iv)}$	0	840	0	-7560	13440	-7560	0	840	0
$h^5\phi_m^{(v)}$	0	-2520	10080	-12600	0	12600	-10080	2520	0
$h^6\phi_m^{(vi)}$	0	5040	-30240	75600	-100800	75600	-30240	5040	0



Şekil 2.3 Septik B-spline şekil fonksiyonları

eye kadar olan türevi, x_m düğüm noktasında δ_m bilinmeyen parametreleri cinsinden,

$$\begin{aligned}
U_N(x_m, t) &= U_m = \delta_{m-3} + 120\delta_{m-2} + 1191\delta_{m-1} + 2416\delta_m + 1191\delta_{m+1} + 120\delta_{m+2} + \delta_{m+3}, \\
U'_m &= \frac{7}{h}(-\delta_{m-3} - 56\delta_{m-2} - 245\delta_{m-1} + 245\delta_{m+1} + 56\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \\
U''_m &= \frac{42}{h^2}(\delta_{m-3} + 24\delta_{m-2} + 15\delta_{m-1} - 80\delta_m + 15\delta_{m+1} + 24\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \\
U'''_m &= \frac{210}{h^3}(-\delta_{m-3} - 8\delta_{m-2} + 19\delta_{m-1} - 19\delta_{m+1} + 8\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \\
U_m^{(iv)} &= \frac{840}{h^4}(\delta_{m-3} - 9\delta_{m-1} + 16\delta_m - 9\delta_{m+1} + \delta_{m+3}), \\
U_m^{(v)} &= \frac{2520}{h^5}(-\delta_{m-3} + 4\delta_{m-2} - 5\delta_{m-1} + 5\delta_{m+1} - 4\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \\
U_m^{(vi)} &= \frac{5040}{h^6}(\delta_{m-3} - 6\delta_{m-2} + 15\delta_{m-1} - 20\delta_m + 15\delta_{m+1} - 6\delta_{m+2} + \delta_{m+3})
\end{aligned} \tag{2.15}$$

olarak hesaplanır.

$0 \leq \eta \leq 1$ için $h\eta = x - x_m$ eşitliği kullanılarak, $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı $[0, 1]$ aralığına dönüştürülebilir. Bu halde, (2.13) ile verilen septik B-spline fonksiyonları η değişkenine bağlı olarak $[0, 1]$ aralığı üzerinde,

$$\begin{aligned}
\phi_{m-3} &= 1 - 7\eta + 21\eta^2 - 35\eta^3 + 35\eta^4 - 21\eta^5 + 7\eta^6 - \eta^7, \\
\phi_{m-2} &= 120 - 392\eta + 504\eta^2 - 280\eta^3 + 84\eta^5 - 42\eta^6 + 7\eta^7, \\
\phi_{m-1} &= 1191 - 1715\eta + 315\eta^2 + 665\eta^3 - 315\eta^4 - 105\eta^5 + 105\eta^6 - 21\eta^7, \\
\phi_m &= 2416 - 1680\eta + 560\eta^4 - 140\eta^6 + 35\eta^7, \\
\phi_{m+1} &= 1191 + 1715\eta + 315\eta^2 - 665\eta^3 - 315\eta^4 + 105\eta^5 + 105\eta^6 - 35\eta^7, \\
\phi_{m+2} &= 120 + 392\eta + 504\eta^2 + 280\eta^3 - 84\eta^5 - 42\eta^6 + 21\eta^7, \\
\phi_{m+3} &= 1 + 7\eta + 21\eta^2 + 35\eta^3 + 35\eta^4 + 21\eta^5 + 7\eta^6 - \eta^7, \\
\phi_{m+4} &= \eta^7
\end{aligned} \tag{2.16}$$

olarak bulunur. Burada $\phi_{m-3}(x)$, $\phi_{m-2}(x)$, $\phi_{m-1}(x)$, $\phi_m(x)$, $\phi_{m+1}(x)$, $\phi_{m+2}(x)$, $\phi_{m+3}(x)$ ve $\phi_{m+4}(x)$ fonksiyonları hariç tüm septik B-spline fonksiyonlar $[0, 1]$ aralığında sıfırdır. Bu yüzden (2.14) ile verilen yaklaşım fonksiyonu, $[0, 1]$ bölgesinde δ_m eleman parametreleri ve ϕ_m şekil fonksiyonları cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$U_N(\eta, t) = \sum_{j=m-3}^{m+4} \delta_j \phi_j. \tag{2.17}$$

Buradanda U_N ve onun η' ya göre altıncı mertebeye kadar olan türevi $x = x_m \rightarrow \eta = 0$

noktasında δ_m zaman parametreleri cinsinden,

$$\begin{aligned}
U_N(x_m, t) &= U_m = \delta_{m-3} + 120\delta_{m-2} + 1191\delta_{m-1} + 2416\delta_m + 1191\delta_{m+1} + 120\delta_{m+2} + \delta_{m+3}, \\
U'_m &= 7(-\delta_{m-3} - 56\delta_{m-2} - 245\delta_{m-1} + 245\delta_{m+1} + 56\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \\
U''_m &= 42(\delta_{m-3} + 24\delta_{m-2} + 15\delta_{m-1} - 80\delta_m + 15\delta_{m+1} + 24\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \\
U'''_m &= 210(-\delta_{m-3} - 8\delta_{m-2} + 19\delta_{m-1} - 19\delta_{m+1} + 8\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \\
U_m^{(iv)} &= 840(\delta_{m-3} - 9\delta_{m-1} + 16\delta_m - 9\delta_{m+1} + \delta_{m+3}), \\
U_m^{(v)} &= 2520(-\delta_{m-3} + 4\delta_{m-2} - 5\delta_{m-1} + 5\delta_{m+1} - 4\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \\
U_m^{(vi)} &= 5040(\delta_{m-3} - 6\delta_{m-2} + 15\delta_{m-1} - 20\delta_m + 15\delta_{m+1} - 6\delta_{m+2} + \delta_{m+3})
\end{aligned} \tag{2.18}$$

olarak elde edilir.

2.2 Lineerleştirme Teknikleri

GEW ve GRLW denklemleri, $U^p U_x$ şeklinde lineer olmayan terime sahiptir. Bu lineer olmayan terim için aşağıda beş farklı lineerleştirme tekniğinin uygulaması verilmiştir:

2.2.1 Normal lineerleştirme tekniği

$U^p U_x$ lineer olmayan teriminde $U^p = Z_m$ olarak seçilir ve Z_m ,

kübik B-spline fonksiyonlar cinsinden,

$$Z_m \cong [U_m^n]^p = (\delta_{m-1}^n + 4\delta_m^n + \delta_{m+1}^n)^p;$$

kuintik B-spline fonksiyonlar cinsinden,

$$Z_m \cong [U_m^n]^p = (\delta_{m-2}^n + 26\delta_{m-1}^n + 66\delta_m^n + 26\delta_{m+1}^n + \delta_{m+2}^n)^p;$$

septik B-spline fonksiyonlar cinsinden,

$$Z_m \cong [U_m^n]^p = \left(\begin{array}{l} \delta_{m-3}^n + 120\delta_{m-2}^n + 1191\delta_{m-1}^n + 2416\delta_m^n + 1191\delta_{m+1}^n \\ + 120\delta_{m+2}^n + \delta_{m+3}^n \end{array} \right)^p$$

olarak ifade edilebilir.

2.2.2 İki nokta lineerleştirme tekniği

$U^p U_x$ lineer olmayan terimde $U^p = Z_m$ olarak seçilir ve Z_m ,

kübik B-spline fonksiyonlar cinsinden,

$$Z_m \cong \left[\frac{U_m^n + U_{m+1}^n}{2} \right]^p = \left(\frac{\delta_{m-1}^n + 5\delta_m^n + 5\delta_{m+1}^n + \delta_{m+2}^n}{2} \right)^p ;$$

kuintik B-spline fonksiyonlar cinsinden,

$$Z_m \cong \left[\frac{U_m^n + U_{m+1}^n}{2} \right]^p = \left(\frac{\delta_{m-2}^n + 27\delta_{m-1}^n + 92\delta_m^n + 92\delta_{m+1}^n + 27\delta_{m+2}^n + \delta_{m+3}^n}{2} \right)^p ;$$

septik B-spline fonksiyonlar cinsinden,

$$Z_m \cong \left[\frac{U_m^n + U_{m+1}^n}{2} \right]^p = \frac{1}{2^p} \left(\delta_{m-3}^n + 121\delta_{m-2}^n + 1311\delta_{m-1}^n + 3607\delta_m^n + 3607\delta_{m+1}^n + 1311\delta_{m+2}^n + 121\delta_{m+3}^n + \delta_{m+4}^n \right)^p$$

olarak yazılabilir.

2.2.3 Üç nokta lineerleştirme tekniği

$U^p U_x$ lineer olmayan terimde $U^p = Z_m$ olarak seçilir ve Z_m ,

kübik B-spline fonksiyonlar cinsinden,

$$Z_m \cong \left[\frac{U_{m-1}^n + U_m^n + U_{m+1}^n}{3} \right]^p = \left(\frac{\delta_{m-2}^n + 5\delta_{m-1}^n + 6\delta_m^n + 5\delta_{m+1}^n + \delta_{m+2}^n}{3} \right)^p ;$$

kuintik B-spline fonksiyonlar cinsinden,

$$Z_m \cong \left[\frac{U_{m-1}^n + U_m^n + U_{m+1}^n}{3} \right]^p = \frac{1}{3^p} \left(\delta_{m-3}^n + 27\delta_{m-2}^n + 93\delta_{m-1}^n + 118\delta_m^n + 93\delta_{m+1}^n + 27\delta_{m+2}^n + \delta_{m+3}^n \right)^p ;$$

septik B-spline fonksiyonlar cinsinden,

$$Z_m \cong \left[\frac{U_{m-1}^n + U_m^n + U_{m+1}^n}{3} \right]^p = \frac{1}{3^p} \left(\delta_{m-4}^n + 121\delta_{m-3}^n + 1312\delta_{m-2}^n + 3727\delta_{m-1}^n + 4798\delta_m^n + 3727\delta_{m+1}^n + 1312\delta_{m+2}^n + 121\delta_{m+3}^n + \delta_{m+4}^n \right)^p$$

olarak bulunur.

2.2.4 Rubin-Graves lineerleştirme tekniği

$U^p U_x$ lineer olmayan terimde $U^{p-1} U_x = Z_m$ olarak seçilir ve daha sonra Z_m 'e Rubin-Graves [79] lineerleştirme tekniği uygulanırsa,

$$\begin{aligned} Z_m &\cong [(U_m)^{p-1} (U_m)_x]^{n+1} = (U_m^{p-1})^n (U_m)_x^{n+1} + (U_m^{p-1})^{n+1} (U_m)_x^n - (U_m^{p-1})^n (U_m)_x^n \\ &= (U_m^n)^{p-1} (U_m^{n+1})_x + (U_m^{n+1})^{p-1} (U_m)_x - (U_m^n)^{p-1} (U_m)_x \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Buradan da Z_m ,

kübik B-spline fonksiyonlar cinsinden,

$$\begin{aligned} Z_m \cong & (\delta_{m-1}^n + 4\delta_m^n + \delta_{m+1}^n)^{p-1} \frac{3}{h} (-\delta_{m-1}^{n+1} + \delta_{m+1}^{n+1}) \\ & + (\delta_{m-1}^{n+1} + 4\delta_m^{n+1} + \delta_{m+1}^{n+1})^{p-1} \frac{3}{h} (-\delta_{m-1}^n + \delta_{m+1}^n) \\ & - (\delta_{m-1}^n + 4\delta_m^n + \delta_{m+1}^n)^{p-1} \frac{3}{h} (-\delta_{m-1}^n + \delta_{m+1}^n); \end{aligned}$$

kuintik B-spline fonksiyonlar cinsinden,

$$\begin{aligned} Z_m \cong & (\delta_{m-2}^n + 26\delta_{m-1}^n + 66\delta_m^n + 26\delta_{m+1}^n + \delta_{m+2}^n)^{p-1} \frac{5}{h} (-\delta_{m-2}^{n+1} - 10\delta_{m-1}^{n+1} + 10\delta_{m+1}^{n+1} + \delta_{m+2}^{n+1}) \\ & + (\delta_{m-2}^{n+1} + 26\delta_{m-1}^{n+1} + 66\delta_m^{n+1} + 26\delta_{m+1}^{n+1} + \delta_{m+2}^{n+1})^{p-1} \frac{5}{h} (-\delta_{m-2}^n - 10\delta_{m-1}^n + 10\delta_{m+1}^n + \delta_{m+2}^n) \\ & - (\delta_{m-2}^n + 26\delta_{m-1}^n + 66\delta_m^n + 26\delta_{m+1}^n + \delta_{m+2}^n)^{p-1} \frac{5}{h} (-\delta_{m-2}^n - 10\delta_{m-1}^n + 10\delta_{m+1}^n + \delta_{m+2}^n); \end{aligned}$$

septik B-spline fonksiyonlar cinsinden,

$$\begin{aligned} Z_m \cong & \left[(\delta_{m-3}^n + 120\delta_{m-2}^n + 1191\delta_{m-1}^n + 2416\delta_m^n + 1191\delta_{m+1}^n + 120\delta_{m+2}^n + \delta_{m+3}^n)^{p-1} \right. \\ & \left. \frac{7}{h} (-\delta_{m-3}^{n+1} - 56\delta_{m-2}^{n+1} - 245\delta_{m-1}^{n+1} + 245\delta_{m+1}^{n+1} + 56\delta_{m+2}^{n+1} + \delta_{m+3}^{n+1}) \right] \\ & + \left[(\delta_{m-3}^{n+1} + 120\delta_{m-2}^{n+1} + 1191\delta_{m-1}^{n+1} + 2416\delta_m^{n+1} + 1191\delta_{m+1}^{n+1} + 120\delta_{m+2}^{n+1} + \delta_{m+3}^{n+1})^{p-1} \right. \\ & \left. \frac{7}{h} (-\delta_{m-3}^n - 56\delta_{m-2}^n - 245\delta_{m-1}^n + 245\delta_{m+1}^n + 56\delta_{m+2}^n + \delta_{m+3}^n) \right] \\ & - \left[(\delta_{m-3}^n + 120\delta_{m-2}^n + 1191\delta_{m-1}^n + 2416\delta_m^n + 1191\delta_{m+1}^n + 120\delta_{m+2}^n + \delta_{m+3}^n)^{p-1} \right. \\ & \left. \frac{7}{h} (-\delta_{m-3}^n - 56\delta_{m-2}^n - 245\delta_{m-1}^n + 245\delta_{m+1}^n + 56\delta_{m+2}^n + \delta_{m+3}^n) \right] \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

2.2.5 Caldwell-Smith lineerleştirme tekniği

$U^p U_x$ lineer olmayan terimde $U^{p-1} U_x = Z_m$ olarak seçilir ve daha sonra Z_m 'e Caldwell-Smith [80] lineerleştirme tekniği uygulanırsa,

$$\begin{aligned} Z_m \cong & [(U_m)^{p-1} (U_m)_x]^{n+1} = \frac{(U_m^{p-1})^n (U_m)_x^{n+1} + (U_m^{p-1})^{n+1} (U_m)_x^n}{2} \\ & = \frac{(U_m)^{p-1} (U_m^{n+1})_x + (U_m^{n+1})^{p-1} (U_m)_x}{2} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Burada Z_m ,

kübik B-spline fonksiyonlar cinsinden,

$$\begin{aligned} Z_m \cong & \frac{1}{2} (\delta_{m-1}^n + 4\delta_m^n + \delta_{m+1}^n)^{p-1} \frac{3}{h} (-\delta_{m-1}^{n+1} + \delta_{m+1}^{n+1}) \\ & + \frac{1}{2} (\delta_{m-1}^{n+1} + 4\delta_m^{n+1} + \delta_{m+1}^{n+1})^{p-1} \frac{3}{h} (-\delta_{m-1}^n + \delta_{m+1}^n); \end{aligned}$$

kuintik B-spline fonksiyonlar cinsinden,

$$Z_m \cong \frac{1}{2} (\delta_{m-2}^n + 26\delta_{m-1}^n + 66\delta_m^n + 26\delta_{m+1}^n + \delta_{m+2}^n)^{p-1} \frac{5}{h} (-\delta_{m-2}^{n+1} - 10\delta_{m-1}^{n+1} + 10\delta_{m+1}^{n+1} + \delta_{m+2}^{n+1}) \\ + \frac{1}{2} (\delta_{m-2}^{n+1} + 26\delta_{m-1}^{n+1} + 66\delta_m^{n+1} + 26\delta_{m+1}^{n+1} + \delta_{m+2}^{n+1})^{p-1} \frac{5}{h} (-\delta_{m-2}^n - 10\delta_{m-1}^n + 10\delta_{m+1}^n + \delta_{m+2}^n);$$

septik B-spline fonksiyonlar cinsinden,

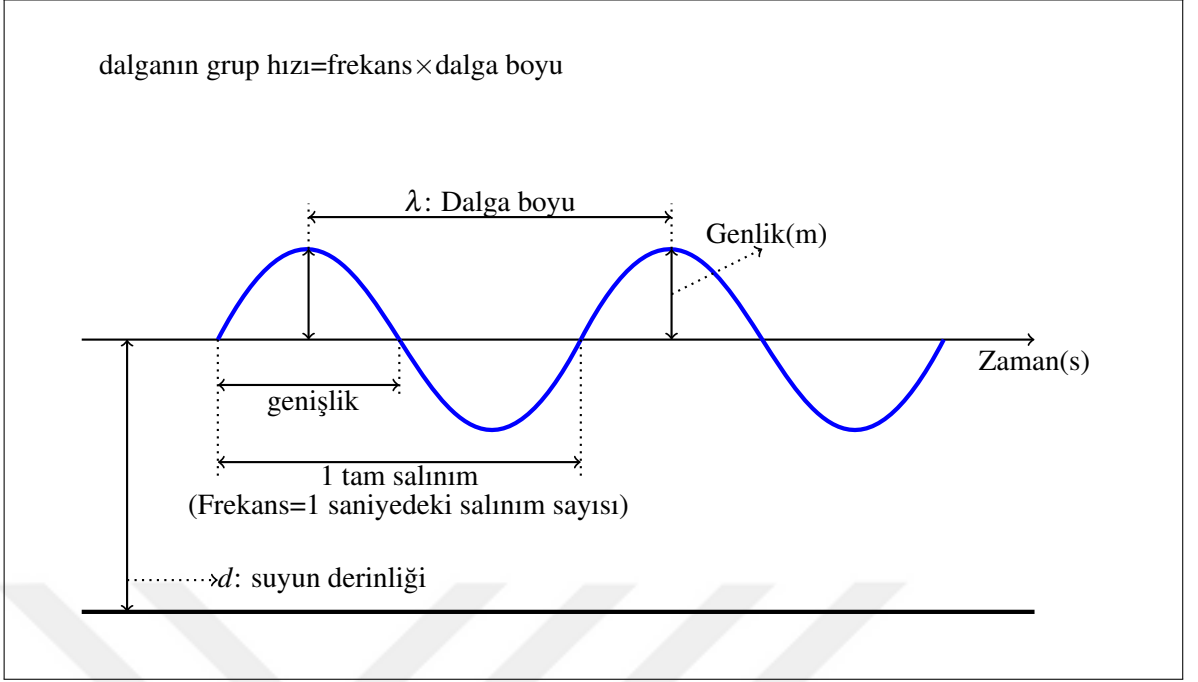
$$Z_m \cong \frac{1}{2} \left[(\delta_{m-3}^n + 120\delta_{m-2}^n + 1191\delta_{m-1}^n + 2416\delta_m^n + 1191\delta_{m+1}^n + 120\delta_{m+2}^n + \delta_{m+3}^n)^{p-1} \right. \\ \left. \frac{7}{h} (-\delta_{m-3}^{n+1} - 56\delta_{m-2}^{n+1} - 245\delta_{m-1}^{n+1} + 245\delta_{m+1}^{n+1} + 56\delta_{m+2}^{n+1} + \delta_{m+3}^{n+1}) \right] \\ + \frac{1}{2} \left[(\delta_{m-3}^{n+1} + 120\delta_{m-2}^{n+1} + 1191\delta_{m-1}^{n+1} + 2416\delta_m^{n+1} + 1191\delta_{m+1}^{n+1} + 120\delta_{m+2}^{n+1} + \delta_{m+3}^{n+1})^{p-1} \right. \\ \left. \frac{7}{h} (-\delta_{m-3}^n - 56\delta_{m-2}^n - 245\delta_{m-1}^n + 245\delta_{m+1}^n + 56\delta_{m+2}^n + \delta_{m+3}^n) \right]$$

olarak verilebilir.

2.3 Dalga, Solitary Dalga ve Soliton

Dalga, bir ortamda veya bir boşlukta meydana getirilen şekil değişimi olarak tanımlanır. Dalganın bir ortamda veya bir boşlukta yayılmasına da dalga hareketi denir. Aslında dalga hareketi, titreşim hareketinin bir ortamda veya bir boşlukta iletilerek enerjinin taşınması olarak da tanımlanır. Örneğin, durgun bir suya bir cisim bırakıldığında cismin bırakıldığı yerden dışa doğru dairesel bir hareket oluşur. İşte bu hareket dalga hareketidir. Burada cismin potansiyel enerjisi, su ortamında iletilerek kinetik enerji olarak taşınmıştır. Dalgalar, titreşim doğrultusuna göre enine ve boyuna dalgalar ve taşınan enerji türüne göre mekanik ve elektromanyetik dalgalar olarak gruplandırılır. Enine dalgalar, titreşim doğrultusuna göre dik doğrultuda yayılma hareketi yapan dalgalardır. Örnek olarak, elektromanyetik dalgalar, su dalgaları, deprem dalgaları, yay dalgaları verilebilir. Boyuna dalgalar ise titreşim doğrultusuyla aynı doğrultuda yayılan dalgalardır. Buna da örnek olarak ses dalgaları, su dalgaları, deprem dalgaları ve yay dalgaları verilebilir. Yayılabilmek için maddesel bir ortama gereksinim duyan su, ses, deprem ve yay dalgaları gibi dalgalar mekanik dalgalar olarak bilinir. Diğer yandan, elektrik ve manyetik alana sahip, boşlukta yayılan, yüklerin ivmeli hareketi ile oluşturulan radyo dalgaları, kızılötesi dalgalar, X ışınları ve benzeri dalgalar elektromanyetik dalgalar olarak tanımlanır.

Şekil 2.4'te bir su dalgasının hareketi fiziksel özellikleriyle birlikte çizilmiştir. Dalgalar sabit bir frekans ve dalga boyu ile periyodik olarak salınım yaptıkları için dalganın grup hızı sabittir. Eğer, dalga uzunluğu (genlik) bölgesel suyun derinliğinden daha kısa ise bu tip sular derin



Şekil 2.4 Bir su dalgasının hareketi

sular; dalga uzunluğu bölgesel su derinliğinden daha uzun ise bu çeşit sular sığ sular olarak adlandırılır.

Solitary dalgalar, şekil, büyüklük ve grup hızında herhangi bir değişiklik olmadan yayılan dalgalar olarak bilinir. Solitonlar ise bu özelliklere ek olarak, başka bir solitary dalga ile çarpışma sonrası özelliklerini muhafaza eden lineer olmayan dalgalardır. (Bu aşamadan sonra solitary dalga ve soliton teorisi hakkında verilen bilgilerin çoğu, Irk [74] tarafından yapılan tez çalışmasından alınmıştır). John Scott Russell [81], soliton teorisini en iyi anlatan şu doğa olayını aktarmıştır:

“İki çift at tarafından dar bir kanal boyunca hızla çekilen bir botun hareketini gözlemliyordum. Bot aniden durduğunda, bota hareket sağlayan kanaldaki su kütlesi durmadı ve su kütlesi şiddetli bir çalkalanma şeklinde botun uç kısmı etrafında toplandı ve aniden botu arkasında bırakarak, büyük bir hızla harekete geçti. Büyük bir solitary dalga yüksekliğine sahip olarak düşündüğüm formdaki, dairesel ve düzgün bir su kütlelerinin kanal boyunca şekil veya hızını bozmadan yoluna devam ettiğini gördüm. Bu dalga formunu, at üzerinde takip ettim ve yaklaşık 30 feet mesafe sonunda 8 veya 9 mil/saat hızında, ilk baştaki orijinal şeklinde ve yarı yüksekliğinde yuvarlanır halde gördüm. Yüksekliği kademeli olarak azaldı ve yaklaşık 1 veya 2 mil takip sonunda, kanalın kenarlarında kaybolduğunu gördüm.

İşte 1834 yılının Ağustos ayı, ilk kez ötelenme dalgası olarak adlandırdığım bu ilginç ve güzel olayı gözleme şansı bulduğum zamandı.”

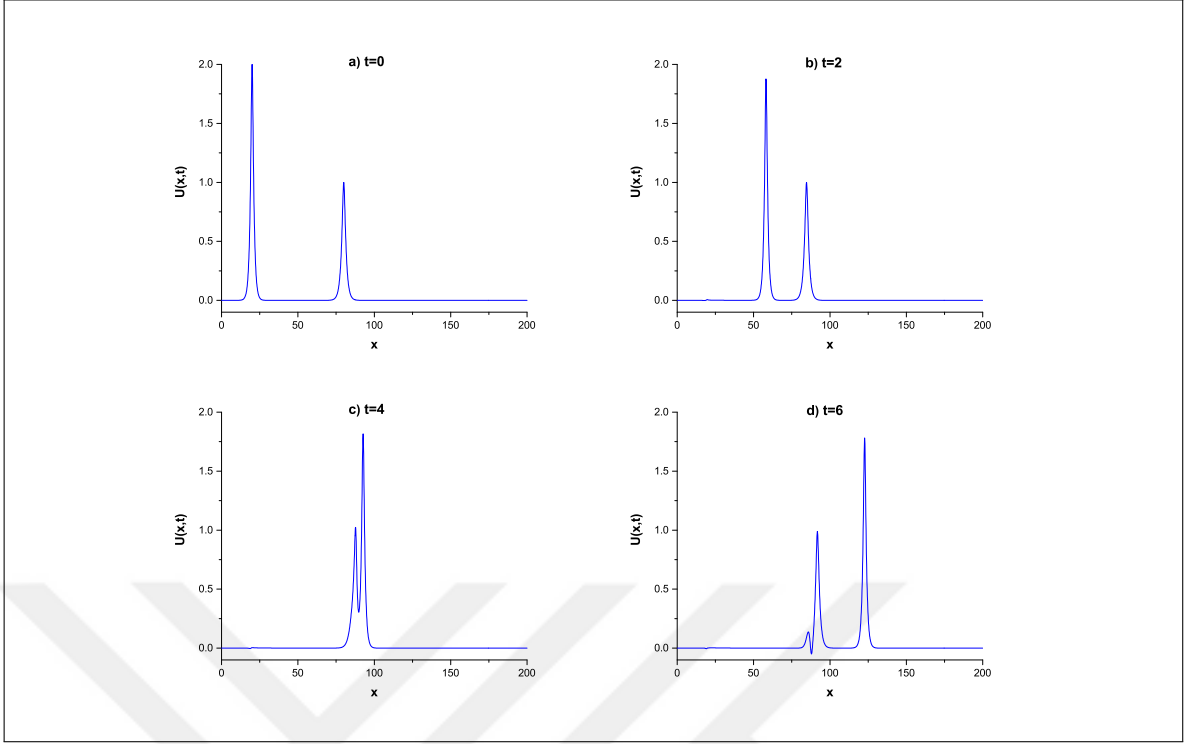
Bu gözlemlerine, laboratuvar ortamında solitary dalgaları (ötelenme dalgaları) elde edebilmek için farklı deneyler yaparak devam eden Russell, solitary dalgalarının aşağıdaki özelliklerini tespit etmiştir:

- Solitary dalgaları $h \sec h^2(k(x - vt))$ yapısındadır.
- Yeterince büyük miktardaki su kütlesi, bağımsız iki veya daha fazla solitary dalgası üretir.
- Normal dalgaların aksine solitary dalgalar birleşmez. Bu nedenle küçük genliğe sahip bir solitary dalgası ile büyük genliğe sahip bir solitary dalgası birbirleri ile çarpıştıktan sonra, iki solitary dalgası birbirlerinden ayrılarak şekillerinde bir bozulma olmadan yollarına devam edebilir. Normal dalgalar, ya düzleşmeye başlar ya da dikleşerek sönecek şekilde hareket ederken, solitary dalgaları ise kararlıdır ve uzun mesafelerde yolculuk yapabilir.
- g yerçekimi ivmesi, d suyun derinliği ve A solitary dalğanın ulaşabileceği maksimum yükseklik(yani genlik) olmak üzere bir solitary dalğanın hızı,

$$v = \sqrt{g(d + A)}$$

ile ifade edilir.

Bu sonuçlardan da anlaşıldığı üzere, genliği büyük olan solitary dalga hızlı hareket eder. Yani bir solitary dalğanın hızı genliği ile doğru orantılı olup normal dalgalardan farklı davranış sergiler. “Örneğin, biri alçak diğeri yüksek iki ses aynı anda oluştuğunda, kulağımız her iki sesi aynı anda duyacaktır. Fakat bu iletim esnasında solitary dalgalar kullanılsaydı, yüksek sesi daha önce duymamız gerekirdi. İnsan vücudundaki sinirler arasındaki iletişim ise normal dalgalar ile yapılmaz. Sıcak bir çay bardağını elimize aldığımızda , sıcaklığı kademeli olarak hissederken, kor halindeki sıcak bir kömür parçasına veya sıcak bir fırının içine elimizi yaklaştırdığımızda, sıcaklığı hemen hissederken elimizi çekeriz. Dolayısıyla sinirlerimiz bir nevi solitary dalgası oluşturarak beynimize bilgiyi en kısa şekilde, normal dalgalara göre daha hızlı olarak iletir.”

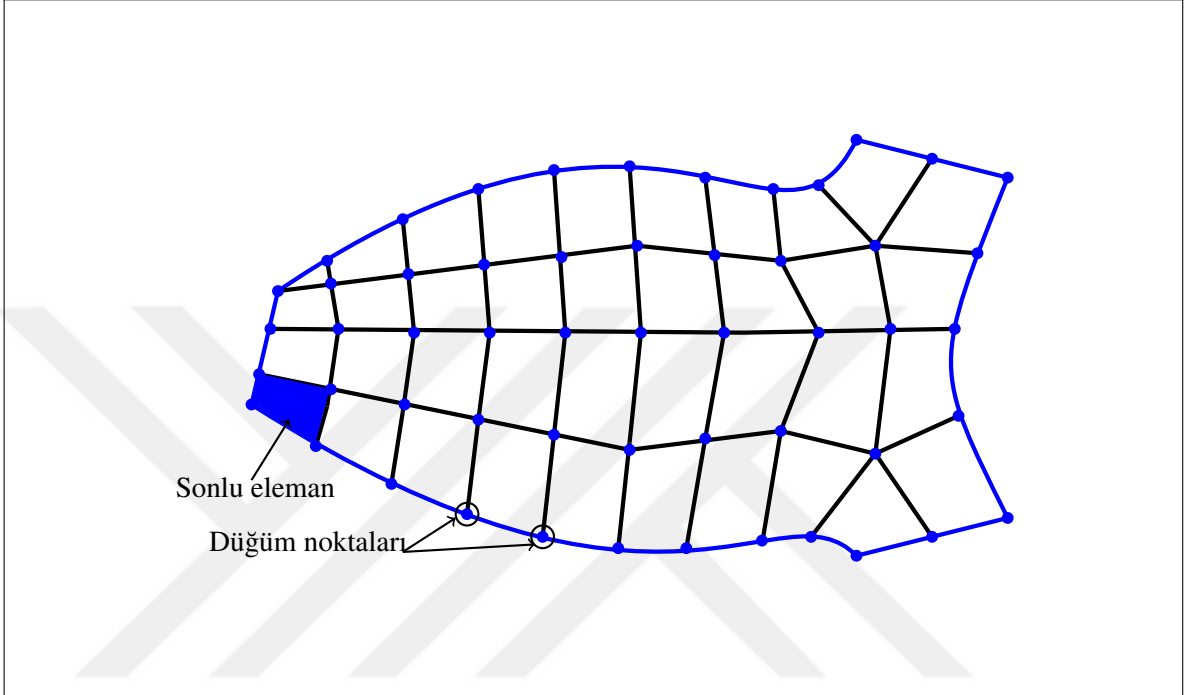


Şekil 2.5 İki solitary dalganın farklı zamanlardaki hareketi

Şekil 2.5'te, iki solitary dalganın zaman ilerledikçe hareketi gözlemlendi. Şekilden görüldüğü gibi genliği büyük olan dalganın hızı büyüktür ve başlangıçta konum olarak ilerde olan küçük genlikli dalgayı yakalamaktadır. Daha sonra iki dalganın çarpışması gerçekleşir ve hızlı olan dalga öne geçer. Son olarak, bu dalgalar mevcut yapılarını bozmadan ilerlemeye devam eder, yani soliton olarak davranır. Bu yüzden, solitary dalgalar solitonumsu dalgalar olarak ifade edilebilir. Sonuç olarak, solitonlar çarpışma sonrası mevcut yapılarını koruması, enerjilerini çok az kaybetmesi ve uzun mesafe yol almaları nedeniyle akışkanlar mekaniği, temel parçacıklar fiziği, plazma fiziği, laser fiziği, süperiletkenlik fiziği, biyofizik, elektrik ve elektromanyetik dalgaların iletimi, telekomünikasyon, lineer olmayan optik ve iletişim alanı gibi pek çok önemli alanda kullanılmaktadır. Bu çalışmada ele alınan denklemlerin de sonlu elemanlar yöntemi ile soliton çözümleri edilmiştir.

2.4 Sonlu Elemanlar Yöntemi

Sonlu elemanlar yöntemi, matematiksel fizik ve mühendislikte sınır şartları verilen ve bir kısmi diferansiyel denklemle ifade edilen problemin yaklaşık çözümünü elde etme tekniğidir.



Şekil 2.6 Sonlu elemanlar yaklaşımı

Basit bir mantıkla, aşağıdaki adımlar uygulanarak sonlu elemanlar yöntemi ile sayısal çözümler elde edilebilir:

1. Öncelikle çözüm bölgesi Şekil 2.6'da gösterildiği gibi iki veya daha çok düğüm noktası ile birbirine bağlanmış çok sayıda basit, küçük sonlu elemanlara bölünür. Bu adım ele alınan yapıyı basitleştirme adımudur. Çünkü ele alınan yapının tümü için yaklaşık çözüm bulmak zordur.
2. İkinci adımda, bir elemanın davranışını yaklaşık olarak temsil eden fonksiyon seçilir. Burada fonksiyonun seçimi daha önce yapılan yaklaşımlara bağlı olarak öngörülür veya deneme yapılarak çözüm aranır. Bu çalışmada B-spline şekil fonksiyonları kullanılarak yaklaşım yapılmıştır.
3. Matematiksel fizik ve mühendislikte ele alınan birçok problem lineer veya lineer ol-

mayan kısmi diferansiyel denklemlerle modellenebilir. Ele alınan problemin fiziksel yapısı dikkate alınarak türevli denklemler oluşturulur.

4. Türevli denklemlerde bir elemanın davranışını temsil eden yaklaşık çözüm ve türevleri yerine yazılarak bir eleman için cebirsel denklem elde edilir.
5. Eşzamanlı olarak elde edilen sonlu elemanların düğüm noktalarındaki cebirsel denklemleri kullanılıp, bu sisteme sınır koşulları uygulanır ve elde edilen cebirsel denkleme dahil edilerek,

$$[K]\{u\} = \{F\}$$

şeklinde cebirsel denklem sistemi(matris form) elde edilir. Buradaki cebirsel denklemin özellikleri Tablo 2.4'te verilmiştir.

Tablo 2.4 Cebirsel denklemin özellikleri

Kavram	Özellik $[K]$	Davranış $\{u\}$	Kuvvet $\{F\}$
Esneklik	katılık	yer değiştirme	güç
Isı	iletkenlik	sıcaklık	ısı kaynağı
Akışkanlar	akışmazlık	hız	cisim kuvveti
Elektrostatik	elektrik geçirgenliği	elektriksel potansiyel	elektrik

6. Bu cebirsel denklem sisteminden bilinmeyen davranışın çözümü $\{u\}$ bulunur ve böylece bölge üzerinde model yapının yaklaşık davranışı elde edilmiş olur.

Sonlu elemanlar yönteminin genel olarak bilinen avantajları şunlardır:

- Düzgün olmayan ve karmaşık geometriye sahip yapılara kolaylıkla uygulanabilir.
- Gerekğinde geometrik yapının karmaşıklaştığı yerde sonlu eleman daha küçük parçalara ayrılarak daha hassas çözümler elde edilebilir.
- Karma sistemlerde her eleman için farklı tipten yaklaşım fonksiyonu kullanılabilir.
- Düğüm noktaları birleştirilerek eşzamanlı olarak elde edilmiş cebirsel denklem sistemlerine sınır şartları, basit bir satır sütun işlemiyle dahil edilebilir. Yani istenildiğinde farklı sınır koşulları kolay bir şekilde işleme dahil edilebilir.

- Mühendislik uygulamalarında kullanılacak birçok yazılım mevcuttur.(Bu çalışmada Fortran programı kullanılmıştır.)
- Yukarıda verdiğimiz özellikler dikkate alınarak, sonlu elemanlar yöntemi dalga yayılımı, ısı iletimi, akışkanlar mekaniği, yapısal analizler, yapı mühendisliği, elektromanyetik hesaplamalar, makine mühendisliği, uçak mühendisliği, inşaat mühendisliği, yorulma analizi, aerodinamik, gürültü ve titreşim analizi, gerilme analizi darbe analizi, sismik deprem analizi gibi pek çok alanda kullanılmaktadır.



3. BÖLÜM

GENELLEŞTİRİLMİŞ EŞİT GENİŞLİKLİ DALGA (GEW) DENKLEMİNİN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde GEW denkleminin kollokasyon ve Galerkin sonlu elemanlar yöntemi ile sayısal çözümleri bulunmuştur. Yaklaşım fonksiyonları olarak kübik, kuintik ve septik B-spline fonksiyonlar kullanılmıştır. Sayısal yöntemin lineer kararlılık analizi için Von Neumann tekniği uygulanmıştır. Lineerleştirme tekniği olarak Bölüm 2 de açıklanan lineerleştirme tekniklerinden normal, iki nokta ve Rubin-Graves lineerleştirme teknikleri seçilmiştir. Beş farklı lineerleştirme tekniği, yöntemlerin Fortran programı ile sayısal yöntemin uygulama kısmında kullanılmıştır. Fakat bu çalışmada sadece kullanılan yönteme göre en iyi sayısal çözümü veren lineerleştirme tekniği sunulmuştur. Sonlu elemanlar yaklaşımı, tek solitary dalga, iki ve üç solitary dalganın etkileşimi ve Maxwellian başlangıç şartı ile dalganın oluşumu içeren örnekler üzerinde çalışılmıştır. Bu örnekler için L_2 ve L_∞ hata normları, kütle, momentum ve enerji ile ilgili I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitleri hesaplanmıştır.

3.1 GEW Denklemine Septik B-spline Kollokasyon Yöntemi ile Sayısal Çözümü

GEW denklemi,

$$U_t + \varepsilon U^p U_x - \mu U_{xx} = 0 \quad (3.1)$$

olarak ifade edilir. Burada fiziksel sınır şartları $x \rightarrow \pm\infty$ iken $U \rightarrow 0$, alt indis t ve x zaman ve boyutsal türevi ifade eder, ε ve p pozitif tamsayıdır, μ pozitif sabittir.

Sınır ve başlangıç şartları,

$$\begin{aligned} U(a,t) = 0, \quad U_x(a,t) = 0, \quad U_{xxx}(a,t) = 0, \\ U(b,t) = 0, \quad U_x(b,t) = 0, \quad U_{xxx}(b,t) = 0, \\ U(x,0) = f(x), \quad a \leq x \leq b \end{aligned} \quad (3.2)$$

olarak seçilecektir.

Çözüme başlamak için öncelikle $[a,b]$ sonlu aralığı içine sınırlandırılmış çözüm bölgesi ele alınır. Aralık uzunluğu $h = \frac{b-a}{N} = (x_{m+1} - x_m)$ ve $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ olmak üzere, $[a,b]$ aralığı x_m düğüm noktalarıyla N tane eşit alt aralığa parçalanır. Prenter [78], $\phi_m(x)$ septik B-spline fonksiyonları, $m = -3, -2, \dots, N+3$ olmak üzere x_m düğüm noktalarında

aşağıdaki gibi tanımlamıştır:

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^7} \begin{cases} (x - x_{m-4})^7, & [x_{m-4}, x_{m-3}] \\ (x - x_{m-4})^7 - 8(x - x_{m-3})^7, & [x_{m-3}, x_{m-2}] \\ (x - x_{m-4})^7 - 8(x - x_{m-3})^7 + 28(x - x_{m-2})^7, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ (x - x_{m-4})^7 - 8(x - x_{m-3})^7 + 28(x - x_{m-2})^7 - 56(x - x_{m-1})^7, & [x_{m-1}, x_m] \\ (x_{m+4} - x)^7 - 8(x_{m+3} - x)^7 + 28(x_{m+2} - x)^7 - 56(x_{m+1} - x)^7, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+4} - x)^7 - 8(x_{m+3} - x)^7 + 28(x_{m+2} - x)^7, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ (x_{m+4} - x)^7 - 8(x_{m+3} - x)^7, & [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ (x_{m+4} - x)^7, & [x_{m+3}, x_{m+4}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (3.3)$$

$\{\phi_{-3}(x), \phi_{-2}(x), \dots, \phi_{N+2}(x), \phi_{N+3}(x)\}$ kümesi $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı fonksiyonlar için bir baz oluşturur. Her bir septik B-spline ϕ_m fonksiyonu ardışık 8 tane sonlu alt aralığı örter. Bu yüzden her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu alt aralığı 8 adet B-spline fonksiyonu tarafından örtülür. $U_N(x, t)$ yaklaşık çözümü, septik B-spline şekil fonksiyonları cinsinden,

$$U_N(x, t) = \sum_{m=-3}^{N+3} \phi_m(x) \delta_m(t) \quad (3.4)$$

olarak tanımlanır. Burada $\delta_m(t)$, zamana bağlı bilinmeyen parametrelerdir, sınır şartları ve GEW denkleminin septik B-spline kollokasyon formu kullanılarak belirlenecektir. (3.3) ile verilen B-spline fonksiyonlar, (3.4) yaklaşık çözümünde yerine yazılırsa, yaklaşık çözüm U_m ve onun x' e göre U'_m, U''_m türevleri, x_m düğüm noktasında δ_m bilinmeyen parametreleri cinsinden,

$$\begin{aligned} U_m &= \delta_{m-3} + 120\delta_{m-2} + 1191\delta_{m-1} + 2416\delta_m + 1191\delta_{m+1} + 120\delta_{m+2} + \delta_{m+3}, \\ U'_m &= \frac{7}{h}(-\delta_{m-3} - 56\delta_{m-2} - 245\delta_{m-1} + 245\delta_{m+1} + 56\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \\ U''_m &= \frac{42}{h^2}(\delta_{m-3} + 24\delta_{m-2} + 15\delta_{m-1} - 80\delta_m + 15\delta_{m+1} + 24\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) \end{aligned} \quad (3.5)$$

olarak elde edilir. Böylece U değişimi $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı üzerinde aşağıdaki gibi yazılır:

$$U = \sum_{m=-3}^{N+3} \phi_m \delta_m. \quad (3.6)$$

Şimdi, düğüm noktalarıyla beraber kollokasyon noktalarını tanımlamak için denklem (3.5) ile verilen U_m ve onun x 'e göre türevleri, denklem (3.1) ile verilen GEW denkleminde yerine yazılırsa; Normal lineerleştirme tekniği için,

$$\begin{aligned} & \dot{\delta}_{m-3} + 120\dot{\delta}_{m-2} + 1191\dot{\delta}_{m-1} + 2416\dot{\delta}_m + 1191\dot{\delta}_{m+1} + 120\dot{\delta}_{m+2} + \dot{\delta}_{m+3} \\ & + \frac{7\varepsilon Z_m}{h} (-\delta_{m-3} - 56\delta_{m-2} - 245\delta_{m-1} + 245\delta_{m+1} + 56\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) \\ & - \frac{42\mu}{h^2} (\dot{\delta}_{m-3} + 24\dot{\delta}_{m-2} + 15\dot{\delta}_{m-1} - 80\dot{\delta}_m + 15\dot{\delta}_{m+1} + 24\dot{\delta}_{m+2} + \dot{\delta}_{m+3}) = 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

şeklinde birleştirilmiş adi diferansiyel denklemlerin bir kümesi elde edilir. Burada,

$$Z_m \cong [U_m^n]^p = \begin{pmatrix} \delta_{m-3}^n + 120\delta_{m-2}^n + 1191\delta_{m-1}^n + 2416\delta_m^n + 1191\delta_{m+1}^n \\ + 120\delta_{m+2}^n + \delta_{m+3}^n \end{pmatrix}^p$$

olarak alınmıştır. Rubin-Graves lineerleştirme tekniği için, çözüm yönteminin aşağıdaki genel formu elde edilir:

$$\begin{aligned} & \dot{\delta}_{m-3} + 120\dot{\delta}_{m-2} + 1191\dot{\delta}_{m-1} + 2416\dot{\delta}_m + 1191\dot{\delta}_{m+1} + 120\dot{\delta}_{m+2} + \dot{\delta}_{m+3} \\ & + \varepsilon Z_m (\delta_{m-3} + 120\delta_{m-2} + 1191\delta_{m-1} + 2416\delta_m + 1191\delta_{m+1} + 120\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) \\ & - \frac{42\mu}{h^2} (\dot{\delta}_{m-3} + 24\dot{\delta}_{m-2} + 15\dot{\delta}_{m-1} - 80\dot{\delta}_m + 15\dot{\delta}_{m+1} + 24\dot{\delta}_{m+2} + \dot{\delta}_{m+3}) = 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Burada,

$$\begin{aligned} Z_m & \cong [(U_m)^{p-1}(U_m)_x]^{n+1} = (U_m^{p-1})^n (U_m)_x^{n+1} + (U_m^{p-1})^{n+1} (U_m)_x^n - (U_m^{p-1})^n (U_m)_x^n \\ & = (U_m^n)^{p-1} (U_m^{n+1})_x + (U_m^{n+1})^{p-1} (U_m^n)_x - (U_m^n)^{p-1} (U_m^n)_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_m & \cong \left[(\delta_{m-3}^n + 120\delta_{m-2}^n + 1191\delta_{m-1}^n + 2416\delta_m^n + 1191\delta_{m+1}^n + 120\delta_{m+2}^n + \delta_{m+3}^n)^{p-1} \right. \\ & \left. \frac{7}{h} (-\delta_{m-3}^{n+1} - 56\delta_{m-2}^{n+1} - 245\delta_{m-1}^{n+1} + 245\delta_{m+1}^{n+1} + 56\delta_{m+2}^{n+1} + \delta_{m+3}^{n+1}) \right] \\ & + \left[(\delta_{m-3}^{n+1} + 120\delta_{m-2}^{n+1} + 1191\delta_{m-1}^{n+1} + 2416\delta_m^{n+1} + 1191\delta_{m+1}^{n+1} + 120\delta_{m+2}^{n+1} + \delta_{m+3}^{n+1})^{p-1} \right. \\ & \left. \frac{7}{h} (-\delta_{m-3}^n - 56\delta_{m-2}^n - 245\delta_{m-1}^n + 245\delta_{m+1}^n + 56\delta_{m+2}^n + \delta_{m+3}^n) \right] \\ & - \left[(\delta_{m-3}^n + 120\delta_{m-2}^n + 1191\delta_{m-1}^n + 2416\delta_m^n + 1191\delta_{m+1}^n + 120\delta_{m+2}^n + \delta_{m+3}^n)^{p-1} \right. \\ & \left. \frac{7}{h} (-\delta_{m-3}^n - 56\delta_{m-2}^n - 245\delta_{m-1}^n + 245\delta_{m+1}^n + 56\delta_{m+2}^n + \delta_{m+3}^n) \right] \end{aligned}$$

olarak hesaplanır ve her iki genel denklemde “.” zamana göre türevi ifade eder. (3.7) ve (3.8) ile verilen genel çözüm denklemlerinde bulunan zamana göre bilinmeyen parametreler olan δ_m ve zamana göre türevleri olan $\dot{\delta}_m$ katsayılarına sırasıyla,

$$\delta_m = \frac{1}{2}(\delta_m^n + \delta_m^{n+1}), \quad \dot{\delta}_m = \frac{\delta_m^{n+1} - \delta_m^n}{\Delta t} \quad (3.9)$$

formülleri ile verilen Crank-Nicolson ve klasik ileri sonlu fark yaklaşımı uygulanarak, bu genel denklemler basitleştirilebilir. Bu durumda, normal lineerleştirme tekniği için $i = m - 3, m - 2, \dots, m + 2, m + 3$ olmak üzere, δ_i^{n+1} ve δ_i^n bilinmeyen zaman parametrelerine göre iki ardışık zaman adımı n ve $n + 1$ arasındaki tekrarlı bağıntısı,

$$\begin{aligned} & \gamma_1 \delta_{m-3}^{n+1} + \gamma_2 \delta_{m-2}^{n+1} + \gamma_3 \delta_{m-1}^{n+1} + \gamma_4 \delta_m^{n+1} + \gamma_5 \delta_{m+1}^{n+1} + \gamma_6 \delta_{m+2}^{n+1} + \gamma_7 \delta_{m+3}^{n+1} \\ & = \gamma_7 \delta_{m-3}^n + \gamma_6 \delta_{m-2}^n + \gamma_5 \delta_{m-1}^n + \gamma_4 \delta_m^n + \gamma_3 \delta_{m+1}^n + \gamma_2 \delta_{m+2}^n + \gamma_1 \delta_{m+3}^n \end{aligned} \quad (3.10)$$

olarak elde edilir. Burada,

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= (1 - EZ_m - M), & \gamma_2 &= (120 - 56EZ_m - 24M), \\ \gamma_3 &= (1191 - 245EZ_m - 15M), & \gamma_4 &= (2416 + 80M), \\ \gamma_5 &= (1191 + 245EZ_m - 15M), & \gamma_6 &= (120 + 56EZ_m - 24M), \\ \gamma_7 &= (1 + EZ_m - M), \\ m &= 0, 1, \dots, N, & E &= \frac{7\varepsilon}{2h} \Delta t, & M &= \frac{42\mu}{h^2}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Rubin-Graves lineerleştirme tekniği için tekrarlı bağıntısı,

$$\begin{aligned} & \gamma_1 \delta_{m-3}^{n+1} + \gamma_2 \delta_{m-2}^{n+1} + \gamma_3 \delta_{m-1}^{n+1} + \gamma_4 \delta_m^{n+1} + \gamma_5 \delta_{m+1}^{n+1} + \gamma_6 \delta_{m+2}^{n+1} + \gamma_7 \delta_{m+3}^{n+1} \\ & = \gamma_5 \delta_{m-3}^n + \gamma_6 \delta_{m-2}^n + \gamma_7 \delta_{m-1}^n + \gamma_8 \delta_m^n + \gamma_7 \delta_{m+1}^n + \gamma_6 \delta_{m+2}^n + \gamma_5 \delta_{m+3}^n \end{aligned} \quad (3.12)$$

olarak elde edilir. Burada,

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= (1 + EZ_m - M), & \gamma_2 &= (120 + 120EZ_m - 24M), \\ \gamma_3 &= (1191 + 1191EZ_m - 15M), & \gamma_4 &= (2416 + 2416EZ_m + 80M), \\ \gamma_5 &= (1 - EZ_m - M), & \gamma_6 &= (120 - 120EZ_m - 24M), \\ \gamma_7 &= (1191 - 1191EZ_m - 15M), & \gamma_8 &= (2416 - 2416EZ_m + 80M), \\ m &= 0, 1, \dots, N, & E &= \frac{\varepsilon \Delta t}{2}, & M &= \frac{42\mu}{h^2}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

(3.10) ve (3.12) ile verilen cebirsel denklem sistemleri $N + 1$ tane lineer denklemden oluşur, fakat bu sistemde $(\delta_{-3}, \delta_{-2}, \delta_{-1}, \dots, \delta_{N+1}, \delta_{N+2}, \delta_{N+3})^T$ parametrelerinden oluşan $N + 7$ tane bilinmeyen vardır. Bu sistemin tek çözümünü elde edebilmek için 6 tane ek şart ihtiyacı vardır. Gerekli 6 tane ek şart (3.2) ile verilen sınır şartları kullanılarak elde edilir. Sınır şartlarının cebirsel denklem sistemine basit bir şekilde dahil edilmesi olarak ifade edilen bu işlemin benzeri, aşağıda iterasyonu başlatabilmek için d^0 başlangıç değerinin belirlenmesi aşamasında açıklanmıştır. Bu şekilde $\delta_{-3}, \delta_{-2}, \delta_{-1}$ ve $\delta_{N+1}, \delta_{N+2}, \delta_{N+3}$ parametreleri, (3.10) ve (3.12) cebirsel denklem sisteminden yok edilir. Bu işlemlerden sonra

$d^n = (\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_N)^T$ olmak üzere, $N + 1$ tane bilinmeyenli cebirsel denklem sistemi (matris form) oluşur:

$$A\mathbf{d}^{n+1} = B\mathbf{d}^n. \quad (3.14)$$

A ve B matrisleri, $(N + 1) \times (N + 1)$ boyutlu 7 sütun elemanlı matrislerdir (septa-diagonal matris olarak adlandırılır) ve bu matris denklemini aşağıda alt bölüm 3.1.1 de açıklandığı gibi Fortran programında Thomas algoritması (septa-diagonal algoritma) kullanılarak çözülmüştür. Lineer olmayan terim Z_m deki eleman parametresine,

$$(\delta_m^*)^{n+1} = \delta_m^n + \frac{1}{2}(\delta_m^{n+1} - \delta_m^n)$$

formülü ile verilen iç iterasyon her bir zaman adımında üç veya dört defa uygulanarak çözüm iyileştirilmiştir.

Başlangıç iterasyonu

(3.10) ve (3.12) ile verilen tekrarlama bağıntılarında iterasyonu başlatılmak için d^0 başlangıç değeri belirlenmelidir. Yaklaşık çözüm başlangıç parametreleri cinsinden,

$$U_N(x, 0) = \sum_{m=-3}^{N+3} \phi_m(x) \delta_m^0(t)$$

olarak yazılabilir. Bu yaklaşık çözümde δ_m^0 bilinmeyen parametrelerini belirleyebilmek için başlangıç şartı ve aşağıdaki sınır noktalarındaki türevler kullanılır:

$$\begin{aligned} U_N(x, 0) &= U(x_m, 0); \quad m = 0, 1, 2, \dots, N \\ (U_N)_x(a, 0) &= 0, \quad (U_N)_{xx}(a, 0) = 0, \quad (U_N)_{xxx}(a, 0) = 0, \\ (U_N)_x(b, 0) &= 0, \quad (U_N)_{xx}(b, 0) = 0, \quad (U_N)_{xxx}(b, 0) = 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Başlangıç şartı δ_m parametreleri cinsinden,

$$\delta_{-3} + 120\delta_{-2} + 1191\delta_{-1} + 2416\delta_0 + 1191\delta_1 + 120\delta_2 + \delta_3 = U(x_0, 0),$$

$$\delta_{-2} + 120\delta_{-1} + 1191\delta_0 + 2416\delta_1 + 1191\delta_2 + 120\delta_3 + \delta_4 = U(x_1, 0),$$

$$\delta_{-1} + 120\delta_0 + 1191\delta_1 + 2416\delta_2 + 1191\delta_3 + 120\delta_4 + \delta_5 = U(x_2, 0),$$

$$\delta_0 + 120\delta_1 + 1191\delta_2 + 2416\delta_3 + 1191\delta_4 + 120\delta_5 + \delta_6 = U(x_3, 0),$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\delta_{N-6} + 120\delta_{N-5} + 1191\delta_{N-4} + 2416\delta_{N-3} + 1191\delta_{N-2} + 120\delta_{N-1} + \delta_N = U(x_{N-3}, 0),$$

$$\delta_{N-5} + 120\delta_{N-4} + 1191\delta_{N-3} + 2416\delta_{N-2} + 1191\delta_{N-1} + 120\delta_N + \delta_{N+1} = U(x_{N-2}, 0),$$

$$\delta_{N-4} + 120\delta_{N-3} + 1191\delta_{N-2} + 2416\delta_{N-1} + 1191\delta_N + 120\delta_{N+1} + \delta_{N+2} = U(x_{N-1}, 0),$$

$$\delta_{N-3} + 120\delta_{N-2} + 1191\delta_{N-1} + 2416\delta_N + 1191\delta_{N+1} + 120\delta_{N+2} + \delta_{N+3} = U(x_N, 0)$$

(3.16)

olarak yazılır. Görüldüğü gibi elde edilen bu sistem $N + 1$ tane cebirsel denkleme ve $(\delta_{-3}, \delta_{-2}, \delta_{-1}, \dots, \delta_{N+1}, \delta_{N+2}, \delta_{N+3})^T$ parametrelerinden oluşan $N + 7$ tane bilinmeyene sahiptir. Bu sistemin tek çözümünü elde edebilmek için 6 tane ek şarta ihtiyaç vardır. Bunun için başlangıç şartının (3.15) ile verilen sınır noktalarındaki türevleri kullanılır. Türevli sınır koşulları δ_m parametreleri cinsinden,

$$\begin{aligned}
& -\delta_{-3} - 56\delta_{-2} - 245\delta_{-1} + 245\delta_1 + 56\delta_2 + \delta_3 = 0, \\
& \delta_{-3} + 24\delta_{-2} + 15\delta_{-1} - 80\delta_0 + 15\delta_1 + 24\delta_2 + \delta_3 = 0, \\
& -\delta_{-3} - 8\delta_{-2} + 19\delta_{-1} - 19\delta_1 + 8\delta_2 + \delta_3 = 0, \\
& -\delta_{N-3} - 56\delta_{N-2} - 245\delta_{N-1} + 245\delta_{N+1} + 56\delta_{N+2} + \delta_{N+3} = 0, \\
& \delta_{N-3} + 24\delta_{N-2} + 15\delta_{N-1} - 80\delta_N + 15\delta_{N+1} + 24\delta_{N+2} + \delta_{N+3} = 0, \\
& -\delta_{N-3} - 8\delta_{N-2} + 19\delta_{N-1} - 19\delta_{N+1} + 8\delta_{N+2} + \delta_{N+3} = 0
\end{aligned} \tag{3.17}$$

olarak elde edilir. Bu denklemlerden $(\delta_{-3}, \delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_{N+1}, \delta_{N+2}, \delta_{N+3})$ parametreleri çekilirse aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned}
\delta_{-3} &= \frac{1}{3}(-280\delta_0 + 105\delta_1 + 168\delta_2 + 10\delta_3), \\
\delta_{-2} &= \frac{220}{27}\delta_0 - \frac{55}{18}\delta_1 - \frac{35}{9}\delta_2 - \frac{11}{54}\delta_3, \\
\delta_{-1} &= -\frac{40}{27}\delta_0 + \frac{14}{9}\delta_1 + \frac{8}{9}\delta_2 + \frac{1}{27}\delta_3, \\
\delta_{N+1} &= -\frac{40}{27}\delta_N + \frac{14}{9}\delta_{N-1} + \frac{8}{9}\delta_{N-2} + \frac{1}{27}\delta_{N-3}, \\
\delta_{N+2} &= \frac{220}{27}\delta_N - \frac{55}{18}\delta_{N-1} - \frac{35}{9}\delta_{N-2} - \frac{11}{54}\delta_{N-3}, \\
\delta_{N+3} &= \frac{1}{3}(-280\delta_N + 105\delta_{N-1} + 168\delta_{N-2} + 10\delta_{N-3}).
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Bu ifadeler (3.16) ile verilen denklem de yerine yazılırsa, $(\delta_{-3}, \delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_{N+1}, \delta_{N+2}, \delta_{N+3})$ parametreleri yok edilir. Bu işlemle beraber d^0 başlangıç değerinin aşağıdaki matris formu elde edilir:

$$Wd^0 = b.$$

Burada

ve

$$\alpha_2 = b_2, \quad \beta_2 = c_2 - \alpha_2 \zeta_0, \quad \mu_2 = d_2 - \lambda_0 \alpha_2 - \beta_2 \zeta_1, \quad \zeta_2 = \frac{e_2 - \eta_0 \alpha_2 - \beta_2 \lambda_1}{\mu_2},$$

$$\lambda_2 = \frac{f_2 - \beta_2 \eta_1}{\mu_2}, \quad \eta_2 = \frac{g_2}{\mu_2}, \quad \gamma_2 = \frac{h_2 - \alpha_2 \gamma_0 - \beta_2 \gamma_1}{\mu_2}.$$

İkinci adımda, aşağıdaki parametreler hesaplanır:

$$\alpha_i = b_i - a_i \zeta_{i-3}, \quad \beta_i = c_i - a_i \lambda_{i-3} - \alpha_i \zeta_{i-2}, \quad \mu_i = d_i - a_i \eta_{i-3} - \lambda_{i-2} \alpha_i - \beta_i \zeta_{i-1},$$

$$\zeta_i = \frac{e_i - \eta_{i-2} \alpha_i - \beta_i \lambda_{i-1}}{\mu_i}, \quad \lambda_i = \frac{f_i - \beta_i \eta_{i-1}}{\mu_i}, \quad \eta_i = \frac{g_i}{\mu_i},$$

$$\gamma_i = \frac{h_i - \beta_i \gamma_{i-1} - \alpha_i \gamma_{i-2} - a_i \gamma_{i-3}}{\mu_i}, \quad i = 3, 4, \dots, N.$$

Son olarak çözüm,

$$\delta_i = \gamma_i - \zeta_i \delta_{i+1} - \lambda_i \delta_{i+2} - \eta_i \delta_{i+3}, \quad i = 0, 1, \dots, N-4, N-3,$$

$$\delta_{N-2} = \gamma_{N-2} - \lambda_{N-2} \delta_N - \eta_{N-2} \delta_{N-1}, \quad \delta_{N-1} = \gamma_{N-1} - \eta_{N-1} \delta_N, \quad \delta_N = \gamma_N$$

olarak elde edilir.

3.1.2 Lineer kararlılık analizi

Sayısal algoritmanın lineer olarak kararlılığını belirleyebilmek için Von-Neumann kararlılık analizi kullanılacaktır. Bunun için GEW denkleminin $U^p U_x$ lineer olmayan terimindeki U^p teriminin, bölgesel olarak sabit olduğu varsayılır. Daha sonra k mod numarası ve h eleman büyüklüğü olmak üzere,

$$\delta_m^n = \xi^n e^{imkh} \quad (i = \sqrt{-1})$$

ile verilen Fourier mod (3.10) ile verilen denklem de yerine yerleştirilirse, aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\begin{aligned} & \gamma_1 \xi^{n+1} e^{i(m-3)kh} + \gamma_2 \xi^{n+1} e^{i(m-2)kh} + \gamma_3 \xi^{n+1} e^{i(m-1)kh} + \gamma_4 \xi^{n+1} e^{imkh} \\ & + \gamma_5 \xi^{n+1} e^{i(m+1)kh} + \gamma_6 \xi^{n+1} e^{i(m+2)kh} + \gamma_7 \xi^{n+1} e^{i(m+3)kh} = \\ & \gamma_7 \xi^n e^{i(m-3)kh} + \gamma_6 \xi^n e^{i(m-2)kh} + \gamma_5 \xi^n e^{i(m-1)kh} + \gamma_4 \xi^n e^{imkh} \\ & + \gamma_3 \xi^n e^{i(m+1)kh} + \gamma_2 \xi^n e^{i(m+2)kh} + \gamma_1 \xi^n e^{i(m+3)kh}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Şimdi, $e^{ikh} = \cos(kh) + i \sin(kh)$ Euler formülü (3.19) ile verilen denklem de uygulanır ve gerekli sadeleştirme işlemleri yapılırsa büyüme faktörü olan ξ ,

$$\xi = \frac{a - ib}{a + ib}$$

olarak edilir. Burada

$$a = \gamma_4 + (\gamma_5 + \gamma_3) \cos[hk] + (\gamma_6 + \gamma_2) \cos[2hk] + (\gamma_7 + \gamma_1) \cos[3hk],$$

$$b = (\gamma_5 - \gamma_3) \sin[hk] + (\gamma_6 - \gamma_2) \sin[2hk] + (\gamma_7 - \gamma_1) \sin[3hk].$$

$|\xi|$ nin modülü 1 dir. Bu yüzden lineerleştirilmiş algoritma şartsız kararlıdır.

3.1.3 Sayısal örnekler ve sonuçlar

Bu bölümde sayısal algoritma, tek solitary dalga, iki solitary dalga arasındaki ilişki ve Maxwellian başlangıç şartını içeren üç örnek üzerine uygulanmıştır. Bu üç test problemi başlangıç şartının farklı değerleri kullanılarak oluşturulmuştur. Sayısal yöntemin doğruluğunu göstermek ve daha önceki sayısal sonuçlarla elde edilen sonuçları karşılaştırabilmek için L_2 ve L_∞ hata normları, aşağıdaki eşitlikler kullanılarak,

$$L_2 = \|U^{tam} - U_N\|_2 \simeq \sqrt{h \sum_{j=0}^N |U_j^{tam} - (U_N)_j|^2},$$

$$L_\infty = \|U^{tam} - U_N\|_\infty \simeq \max_j |U_j^{tam} - (U_N)_j|$$

elde edilmiştir. Evans ve Raslan [22] GEW denkleminin analitik çözümünü

$$U(x, t) = \sqrt[p]{\frac{c(p+1)(p+2)}{2\varepsilon} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{p}{2\sqrt{\delta}}(x - ct - x_0) \right]} \quad (3.20)$$

olarak ifade etmiştir. Burada, $gen. = \sqrt[p]{\frac{c(p+1)(p+2)}{2\varepsilon}}$ dalganın genliği, c pozitif x yönünde hareket eden dalganın sabit hızı ve x_0 keyfi sabittir.

Ayrıca Evans ve Raslan [22] tarafından verilen ve solitary dalganın kütle, momentum ve enerji ile ilgili üç hareket sabiti olan,

$$I_1 = \int_a^b U dx, \quad I_2 = \int_a^b [U^2 + \delta U_x^2] dx, \quad I_3 = \int_a^b U^{p+2} dx \quad (3.21)$$

parametrelerindeki değişim miktarı gözlemlenerek sayısal algoritmanın özellikleri koruduğu gösterilmiştir.

3.1.3.1 Tek solitary dalganın hareketi

Bu problem için denklem (3.20) de $t = 0$ alınması ile edilen başlangıç şartı kullanılacaktır. p , c ve $gen.$ nin farklı değerleri için beş farklı parametre kümesi oluşturulmuştur. Bu beş parametre kümesinin diğer değerleri $h = 0.1$, $\Delta t = 0.2$, $\varepsilon = 3$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$, $0 \leq x \leq 80$ olarak seçilmiştir ve sayısal hesaplamalar $t = 20$ zamanına kadar yapılmıştır.

İlk olarak, $p = 2$ ve $c = 1/32$ olarak alındı. Bu parametrelere göre solitary dalga $gen. = 0.25$ genliğine sahip olur. I_1, I_2, I_3 korunum sabitleri ile L_2 ve L_∞ hata normları sayısal algoritma kullanılarak, normal ve Rubin-Graves lineerleştirme tekniği için hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlar Tablo 3.1’de gösterilmiştir. Tablo 3.1’de görüldüğü gibi, $I_1 \times 10^5, I_2 \times 10^5$ ve $I_3 \times 10^5$ korunum sabitlerinin başlangıç hesabındaki değişim, sırasıyla 0.0038, 0.0027 ve 0.0002 den daha azdır. Ayrıca L_2 ve L_∞ hata normlarının büyüklüğü istenildiği kadar küçüktür ve Rubin-Graves lineerleştirme tekniği ile elde edilen sonuçlar normal lineerleştirme tekniği ile elde edilen sonuçlardan küçük kalmaktadır.

İkinci olarak, $p = 2$ ve $c = 1/2$ değerleri alındığında, solitary dalga $gen. = 1$ genliğine sahip olur. I_1, I_2, I_3 korunum sabitleri ile L_2 ve L_∞ hata normları sayısal yöntem kullanılarak, normal ve Rubin-Graves lineerleştirme tekniği için hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlar Tablo 3.2’de verilmiştir. Tablo 3.2 incelendiğinde $I_1 \times 10^3, I_2 \times 10^3$ ve $I_3 \times 10^3$ korunum sabitlerinin başlangıç durumundaki değişim miktarı, sırasıyla 0.0005, 0.0017 ve 0.0017 den daha azdır. L_2 ve L_∞ hata normlarının sayısal değeri yeterince küçüktür. Eğer, iki farklı lineerleştirme tekniği ile elde edilen hata norm değerleri karşılaştırılacak olursa hesaplama için Rubin-Graves lineerleştirme tekniğinin daha etkili olduğu görülmektedir.

Üçüncü olarak, eğer $p = 3$ ve $c = 0.001$ parametre değerleri alınır, solitary dalga $gen. = 0.15$ büyüklüğüne sahip olur. Bu parametre değerleri için I_1, I_2, I_3 korunum sabitleri ile L_2 ve L_∞ hata normları Tablo 3.3’de sunulmuştur. Tablo 3.3 den gözlemlendiği gibi $I_1 \times 10^6, I_2 \times 10^6$ ve $I_3 \times 10^6$ korunum sabitlerindeki değişim hesaplama süresince sırasıyla 0.0001, 0.0001 ve 0.0001 değerlerinden daha küçük kalmaktadır. L_2 ve L_∞ hata normları değerlendirildiği zaman, Rubin-Graves ile elde edilen sayısal sonuç daha iyi olmakla beraber, elde edilen norm değerleri hesaplama süresince oldukça küçük bulunmuştur.

$p = 3$ ve $c = 0.3$ için solitary dalga $gen. = 1$ yüksekliğine sahiptir. Elde edilen sayısal sonuçlar Tablo 3.4’te gösterilmiştir. Tablo 3.4’ten açıkça görülür ki $I_1 \times 10^3, I_2 \times 10^3$ ve $I_3 \times 10^3$ korunum sabitlerinin sayısal değerinde meydana gelen değişim miktarı 0.0637, 0.1606 ve 0.1607 den küçük kalmaktadır. L_2 ve L_∞ hata norm değerleri ise arzu edildiği gibi küçüktür ve Rubin-Graves lineerleştirme tekniği normal lineerleştirme tekniğine göre programın çalıştırıldığı süre boyunca daha iyi sonuçlar vermektedir. Diğer yandan, seçilen bu parametre değerlerine göre solitary dalganın konum ve hareketi farklı zamanlarda Şekil 3.1’de çizilmiştir. Bu şekilde, dalga $t = 0$ zamanından $t = 10$ ve $t = 20$ zamanına doğru

ilerledikçe beklendiği gibi sağa doğru şekil, hız ve büyüklüğünü kaybetmeden hareket etmektedir. Yani, bu dalgalar solitary dalga özelliğine sahiptirler.

Son olarak, $p = 4$ ve $c = 0.2$ büyüklükleri için solitary dalga $gen. = 1$ genliğine sahiptir. Elde edilen sayısal değerler Tablo 3.5'te listelenmiştir. Tablo 3.5'ten belirlendiği gibi $I_1 \times 10^3$, $I_2 \times 10^3$ ve $I_3 \times 10^3$ korunum sabitlerinin başlangıç değerine göre sayısal değişimleri, sırasıyla 0.1305, 0.2822 ve 0.2823 değerlerinden daha az olmaktadır. Rubin-Graves lineerleştime tekniği kullanılarak elde edilen hata değerleri normal lineerleştime tekniğine göre daha küçüktür ve elde edilen L_2 ve L_∞ hata norm değerleri istenildiği kadar küçüktür. Solitary dalganın farklı zaman periyotlarındaki hareketi Şekil 3.2'de tasvir edilmiştir. Şekil 3.2 gösterir ki, elde edilen çözüm tahmin edildiği gibi bir solitary dalga oluşturur. Diğer bir deyişle, zaman ilerledikçe dalgalar şekil, hız ve genliklerini kaybetmeden yoluna devam eden solitary dalgalarıdır.

Tablo 3.1 Tek solitary dalganın $p = 2$, $gen. = 0.25$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.2$ ve $x \in [0, 80]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri

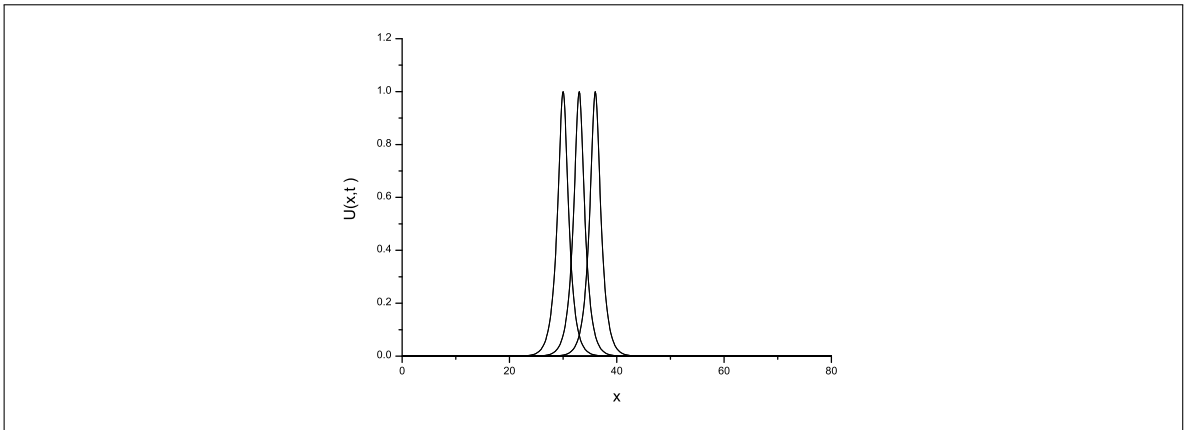
t		0	5	10	15	20
I_1	Normal	0.7853966	0.7853966	0.7853965	0.7853965	0.7853965
	Rub.-Grav.	0.7853966	0.7853966	0.7853966	0.7853966	0.7853965
I_2	Normal	0.1666664	0.1666663	0.1666663	0.1666663	0.1666663
	Rub.-Grav.	0.1666664	0.1666663	0.1666663	0.1666663	0.1666663
I_3	Normal	0.0052083	0.0052083	0.0052083	0.0052083	0.0052083
	Rub.-Grav.	0.0052083	0.0052083	0.0052083	0.0052083	0.0052083
$L_2 \times 10^5$	Normal	0.0000000	0.03067279	0.06285007	0.09693233	0.13336822
	Rub.-Grav.	0.0000000	0.02900012	0.05967250	0.09243870	0.12775844
$L_\infty \times 10^5$	Normal	0.0000000	0.01989833	0.04083748	0.06230627	0.08399884
	Rub.-Grav.	0.0000000	0.01721060	0.03441138	0.05158717	0.06887276

Tablo 3.2 Tek solitary dalganın $p = 2$, $gen. = 1$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.2$ ve $x \in [0, 80]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri

t		0	5	10	15	20
I_1	Normal	3.1415863	3.1415861	3.1415859	3.1415857	3.1415854
	Rub.-Grav.	3.1415863	3.1415864	3.1415862	3.1415860	3.1415858
I_2	Normal	2.6666616	2.6666613	2.6666610	2.6666607	2.6666604
	Rub.-Grav.	2.6666616	2.6666616	2.6666611	2.6666606	2.6666600
I_3	Normal	1.3333283	1.3333275	1.3333272	1.3333269	1.3333266
	Rub.-Grav.	1.3333283	1.3333283	1.3333278	1.3333272	1.3333267
L_2	Normal	0.00000000	0.00438263	0.00853676	0.01262954	0.01671823
	Rub.-Grav.	0.00000000	0.00421699	0.00849425	0.01279079	0.01708960
L_∞	Normal	0.00000000	0.00289068	0.00539302	0.00789694	0.01040121
	Rub.-Grav.	0.00000000	0.00261076	0.00524102	0.00787126	0.01050088

Tablo 3.3 Tek solitary dalganın $p = 3$, $gen. = 0.15$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.2$ ve $x \in [0, 80]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri

t		0	5	10	15	20
I_1	Normal	0.4189154	0.4189154	0.4189154	0.4189154	0.4189154
	Rub.-Grav.	0.4189154	0.4189154	0.4189154	0.4189154	0.4189154
I_2	Normal	0.0549807	0.0549807	0.0549807	0.0549807	0.0549807
	Rub.-Grav.	0.0549807	0.0549807	0.0549807	0.0549807	0.0549807
$I_3 \times 10^4$	Normal	0.7330748	0.7330748	0.7330748	0.7330748	0.7330748
	Rub.-Grav.	0.7330748	0.7330748	0.7330748	0.7330748	0.7330748
$L_2 \times 10^7$	Normal	0.00000000	0.01575841	0.03157299	0.04744419	0.06337251
	Rub.-Grav.	0.00000000	0.01574216	0.03154053	0.04739557	0.06330776
$L_\infty \times 10^7$	Normal	0.00000000	0.00855102	0.01715751	0.02582082	0.03454222
	Rub.-Grav.	0.00000000	0.00855128	0.01715803	0.02582167	0.03454333



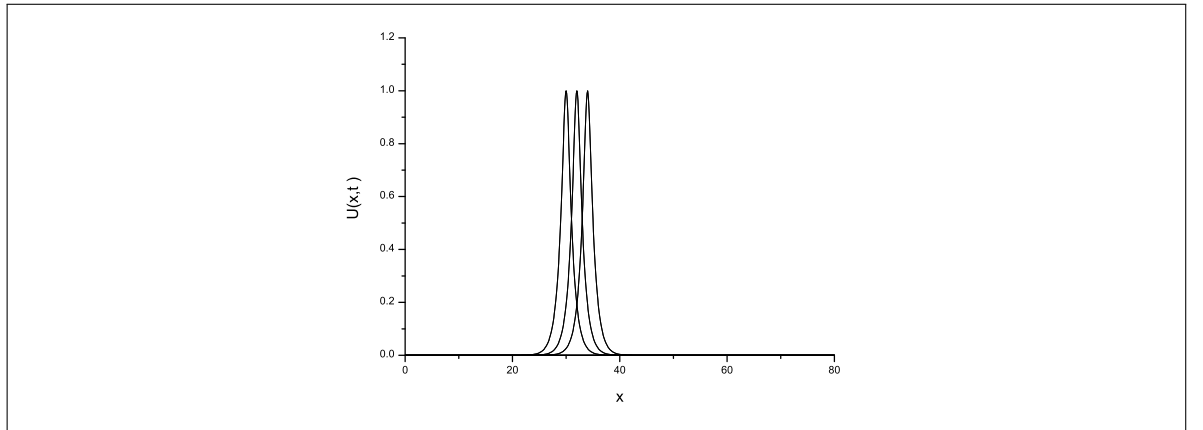
Şekil 3.1 Tek solitary dalganın $p = 3$, $gen. = 1$, $x_0 = 30$, $x \in [0, 80]$ için $t = 0, 10, 20$ 'deki hareketi

Tablo 3.4 Tek solitary dalganın $p = 3$, $gen. = 1$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.2$ ve $x \in [0, 80]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri

t		0	5	10	15	20
I_1	Normal	2.8043580	2.8043577	2.8043575	2.8043572	2.8043570
	Rub.-Grav.	2.8043580	2.8043425	2.8043265	2.8043104	2.8042943
I_2	Normal	2.4639101	2.4639097	2.4639094	2.4639090	2.4639086
	Rub.-Grav.	2.4639101	2.4638709	2.4638305	2.4637900	2.4637496
I_3	Normal	0.9855618	0.9855613	0.9855610	0.9855606	0.9855602
	Rub.-Grav.	0.9855618	0.9855225	0.9854821	0.9854416	0.9854012
L_2	Normal	0.00000000	0.00204205	0.00404586	0.00603031	0.00800997
	Rub.-Grav.	0.00000000	0.00166798	0.00341195	0.00522557	0.00708099
L_∞	Normal	0.00000000	0.00144917	0.00275209	0.00406426	0.00537733
	Rub.-Grav.	0.00000000	0.00114859	0.00234526	0.00356386	0.00480353

Tablo 3.5 Tek solitary dalganın $p = 4$, $gen. = 1$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.2$ ve $x \in [0, 80]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri

t		0	5	10	15	20
I_1	Normal	2.6220516	2.6220514	2.6220512	2.6220510	2.6220508
	Rub.-Grav.	2.6220516	2.6220193	2.6219866	2.6219539	2.6219211
I_2	Normal	2.3561915	2.3561912	2.3561909	2.3561905	2.3561902
	Rub.-Grav.	2.3561915	2.3561216	2.3560509	2.3559801	2.3559093
I_3	Normal	0.7853952	0.7853948	0.7853945	0.7853942	0.7853939
	Rub.-Grav.	0.7853952	0.7853252	0.7852545	0.7851837	0.7851130
L_2	Normal	0.00000000	0.00105910	0.00211286	0.00316045	0.00420836
	Rub.-Grav.	0.00000000	0.00075057	0.00156686	0.00245793	0.00341485
L_∞	Normal	0.00000000	0.00078877	0.00151318	0.00223807	0.00296955
	Rub.-Grav.	0.00000000	0.00055460	0.00116121	0.00180868	0.00249360



Şekil 3.2 Tek solitary dalganın $p = 4$, $gen. = 1$, $x_0 = 30$, $x \in [0, 80]$ için $t = 0, 10, 20$ 'deki hareketi

Tablo 3.6’da elde edilen korunum sabitlerinin ve hata norm büyüklüklerinin $t = 20$ anındaki sayısal sonuçları, [5, 22, 23] çalışmalarında verilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Bu tablodan görüldüğü gibi, elde edilen L_2 ve L_∞ hata normlarının büyüklükleri $p = 2, 3$ parametresi için diğer çalışmalardan daha küçüktür; $p = 4$ parametresi için ise elde edilen diğer sonuçlarla hemen hemen aynıdır. Ayrıca I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitlerinin sayısal yöntem kullanılarak elde edilen değerleri, daha önce yapılan çalışmalarda verilen sayısal değerlerle uyumlu bulunmuştur.

Tablo 3.6 Tek solitary dalganın $p = 2, 3, 4$; $h = 0.1$, $\Delta t = 0.2$ ve $x \in [0, 80]$ için sayısal sonuçlarının karşılaştırılması

	p	2	3	4
I_1	QBSC [22]	0.78528640		
	CBSC [5]	0.78466760	0.65908330	
	CBSPG [23]	0.78539800	0.41891600	2.62206000
	SBSC	0.78539650	0.41891540	2.62192110
I_2	QBSC [22]	0.16658180		
	CBSC [5]	0.16643400	0.05938137	
	CBSPG [23]	0.16666900	0.05497830	2.35615000
	SBSC	0.16666630	0.05498070	2.35590930
I_3	QBSC [22]	0.00520600		
	CBSC [5]	0.00519380	0.00006871	
	CBSPG [23]	0.00520829	0.00007330	0.78534400
	SBSC	0.00520830	0.00007330	0.78511300
$L_2 \times 10^3$	QBSC [22]	0.15695390		
	CBSC [5]	0.19588780	0.51496770	
	CBSPG [23]	0.00250172	0.00006407	2.30499000
	SBSC	0.00127758	0.00000633	3.41485000
$L_\infty \times 10^3$	QBSC [22]	0.20214760		
	CBSC [5]	0.17443300	0.32060590	
	CBSPG [23]	0.00275164	0.00008206	1.88285000
	SBSC	0.00068872	0.00000345	2.49360000

3.1.3.2 İki solitary dalganın etkileşimi

İkinci problem olarak, aynı yönde pozitif $gen. = 1$ ve $gen. = 0.5$ genliklerine sahip iki solitary dalga arasındaki etkileşim çalışılmıştır. Bu problem için,

$$U(x, 0) = \sum_{i=1}^2 \sqrt{\frac{c_i(p+1)(p+2)}{2\varepsilon}} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{p}{2\sqrt{\delta}}(x - x_i) \right] \quad (3.22)$$

ile verilen başlangıç şartı kullanılmıştır. Burada $i = 1, 2$ olmak üzere c_i ve x_i keyfi sabitlerdir. p ve c_i nin farklı değerleri için üç farklı parametre kümesi alınmıştır. Diğer tüm parametreler

bu problem için $h = 0.1$, $\Delta t = 0.025$, $\varepsilon = 3$, $\mu = 1$, $x_1 = 15$, $x_2 = 30$ ve $0 \leq x \leq 80$ olarak seçilmiştir.

İlk olarak, $p = 2$, $c_1 = 0.5$ ve $c_2 = 0.125$ parametre değerleri alınmıştır. Program $t = 0$ dan $t = 60$ zamanına kadar çalıştırılmıştır. I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitlerinin sayısal değerleri Tablo 3.7 de listelenmiştir. Tablo 3.7 den anlaşıldığı gibi $I_1 \times 10^3$, $I_2 \times 10^3$ ve $I_3 \times 10^3$ ile verilen kütle, momentum ve enerji ile ilgili üç korunum sabitinde meydana gelen değişim Rubin-Graves lineerleştirme tekniği için sırasıyla 0.0013, 0.0002 ve 0.005 ten daha küçük kalmaktadır. Normal lineerleştirme tekniği ile elde edilen korunum sabitlerinin sayısal değerleri, $t = 60$ zamanına kadar neredeyse değişmeden kalmaktadır. Ayrıca elde ettiğimiz korunum sabitlerinin sayısal değerleri, kuadratik Petrov-Galerkin yöntemi [23] ile elde edilen sonuçlara çok yakındır.

İkinci olarak, $p = 3$, $c_1 = 0.3$ ve $c_2 = 0.0375$ parametre değerlerini seçildi. Sayısal algoritma $t = 100$ zamanına kadar çalıştırılarak I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitlerinin sayısal değerleri Tablo 3.8'de gösterilmiştir. Tablo 3.8 den anlaşıldığı gibi $I_1 \times 10^3$, $I_2 \times 10^3$ ve $I_3 \times 10^3$ korunum sabitlerinin değişimi, Rubin-Graves lineerleştirme tekniği için 0.002, 0.0001 ve 0.0005 değerlerinden daha az olmaktadır. Normal lineerleştirme tekniği için elde edilen korunum sabitleri ise, programın çalışması süresince neredeyse sabit kalmaktadır. Diğer yandan korunum sabitlerinin elde ettiğimiz sayısal değerleri, [23] ile verilen çalışmadaki sonuçlarla oldukça uyumludur. Şekil 3.3, iki solitary dalga arasındaki ilişkiyi farklı zaman periyotlarında tasvir etmektedir. Şekilde gözlemlendiği gibi, $t = 0$ anında genliği büyük olan dalga genliği küçük olan dalganın konum olarak gerisindedir. Solitary dalga teorisinde de açıklandığı gibi, genliği büyük olan dalganın hızı büyük olduğu için zaman ilerledikçe konumca önde olan küçük genlikli dalgayı yakalar. $t = 50$ anı civarında iki solitary dalga arasındaki etkileşim başlar, diğer bir deyişle bir dalga diğer dalganın üzerine biner. $t = 70$ anında dalgalar ayrılmaya başlar. $t = 100$ zamanında ise dalgalar belirgin olarak ayrılır ve büyük genlikli dalga önde, küçük genlikli dalga arkada başlangıç şekil, hız ve büyüklüklerini koruyarak yollarına devam ederler. Sonuç olarak, iki solitary dalga aynı yönde ilerlerken etkileşim gerçekleşir ve çarpışmadan sonra özelliklerini çok az kaybederek uzun mesafe yol alabilirler. Yani bu dalgalar solitonlardır.

Son olarak, $p = 4$, $c_1 = 0.2$ ve $c_2 = 1/80$ parametre değerleri alındı. Sayısal hesaplamalar $t = 120$ zamanına kadar yapıldı. I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitleri sayısal yöntemin özellikleri ko-

ruduğunu göstermek için hesaplandı ve sonuçlar Tablo 3.9’da verildi. Tablo 3.9 da görüldüğü gibi $I_1 \times 10^4$, $I_2 \times 10^4$ ve $I_3 \times 10^4$ sabitlerindeki değişim Rubin-Graves lineerleştirme tekniği için 0.01, 0.001 ve 0.005 den daha küçük kalmaktadır. Normal lineerleştirme tekniği için ise bu sabitler neredeyse değişmeden kalmaktadır. Ayrıca korunum sabitlerinin sayısal sonuçları, kuadratik Petrov-Galerkin yöntemi [23] ile elde edilen sonuçlara çok yakındır. İki solitary dalganın hareketi farklı zaman aşamalarında Şekil 3.4’te resmedilmiştir. Bu şekilden şu sonuç çıkarılır: $t = 0$ anında büyük genlikli dalga küçük genlikli dalganın solundadır. $t = 50$ anında büyük genlikli dalga küçük genlikli dalgayı yakalar ve $t = 70$ anında iki dalga arasındaki etkileşim başlar. $t = 100$ anında ise solitary dalgalar ayrılır ve artık büyük genlikli dalga küçük genlikli dalganın sağındadır. Solitary dalgalar, özelliklerini çarpışmadan sonra koruduğu ve bu şekilde uzun bir müddet yol aldıkları için solitonlardır.

Tablo 3.7 İki solitary dalganın etkileşiminin $p = 2$, $gen. = 1, 0.5$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.025$ ve $x \in [0, 80]$ için korunum sabitleri

t		0	10	20	30	40	50	60
I_1	Normal	4.7123733	4.7123745	4.7123745	4.7123745	4.7123745	4.7123745	4.7123745
	Rub.-Grav.	4.7123733	4.7123745	4.7123743	4.7123665	4.7123702	4.7123746	4.7123747
	CBSPG [23]	4.7123900	4.7123900	4.7123900	4.7123900	4.7123900	4.7123900	4.7123900
I_2	Normal	3.3333294	3.3333294	3.3333294	3.3333295	3.3333295	3.3333295	3.3333295
	Rub.-Grav.	3.3333294	3.3333294	3.3333290	3.3333139	3.3333214	3.3333296	3.3333296
	CBSPG [23]	3.3332400	3.3332400	3.3332400	3.3332400	3.3333300	3.3333800	3.3333300
I_3	Normal	1.4166643	1.4166643	1.4166642	1.4166594	1.4166615	1.4166644	1.4166644
	Rub.-Grav.	1.4166643	1.4166643	1.4166639	1.4166446	1.4166532	1.4166642	1.4166644
	CBSPG [23]	1.1416660	1.1416660	1.1416660	1.1416640	1.1416650	1.1416660	1.1416660

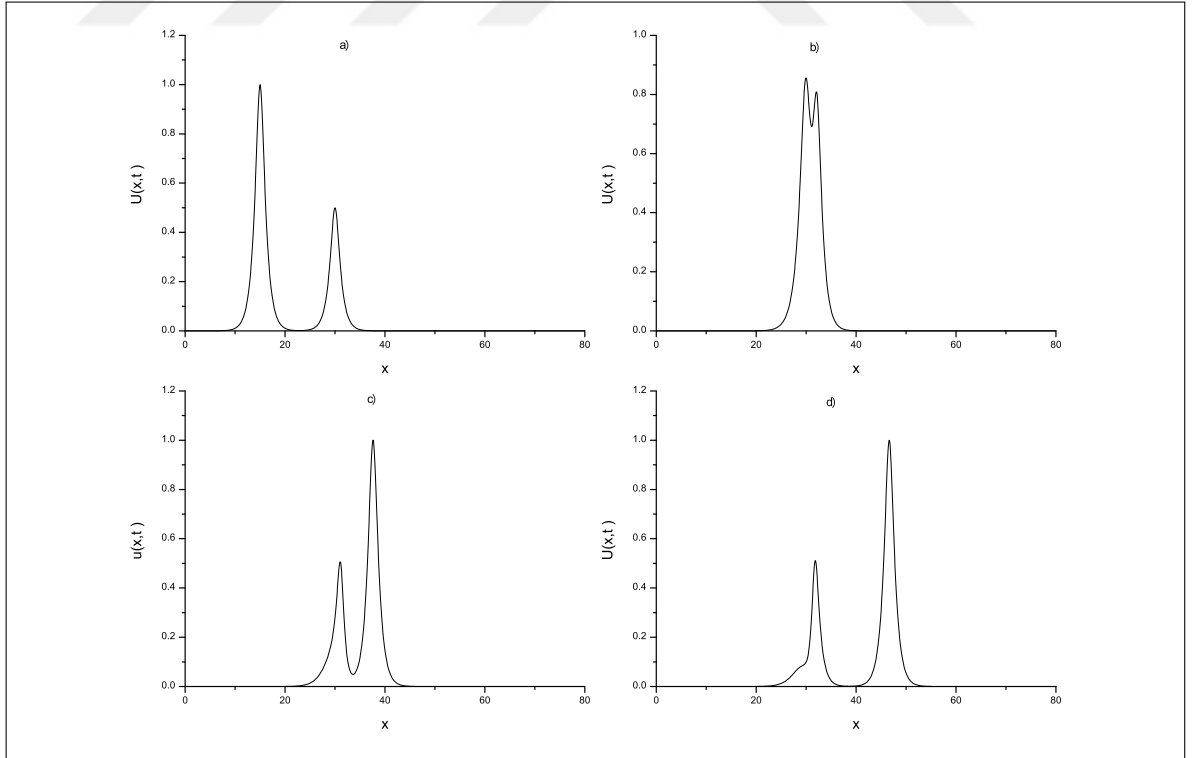
Tablo 3.8 İki solitary dalganın etkileşiminin $p = 3$, $gen. = 1, 0.5$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.025$ ve $x \in [0, 80]$ için korunum sabitleri

t		0	10	20	40	60	80	90	100
I_1	Normal	4.2065320	4.2065329	4.2065330	4.2065330	4.2065330	4.2065330	4.2065330	4.2065330
	Rub.-Grav.	4.2065320	4.2065328	4.2065328	4.2065303	4.2065314	4.2065325	4.2065324	4.2065323
	CBSPG [23]	4.2065500	4.2065500	4.2065500	4.2065500	4.2065500	4.2065500	4.2065500	4.2065500
I_2	Normal	3.0798892	3.0798892	3.0798892	3.0798892	3.0798892	3.0798892	3.0798892	3.0798892
	Rub.-Grav.	3.0798892	3.0798889	3.0798887	3.0798842	3.0798862	3.0798879	3.0798877	3.0798875
	CBSPG [23]	3.9797700	2.0798600	3.0798200	3.0798600	3.0798700	3.0799100	3.0797400	3.0797200
I_3	Normal	1.0163623	1.0163623	1.0163623	1.0163619	1.0163620	1.0163624	1.0163625	1.0163625
	Rub.-Grav.	1.0163623	1.0163621	1.0163619	1.0163573	1.0163585	1.0163606	1.0163604	1.0163602
	CBSPG [23]	1.0163400	1.0163400	1.0163400	1.0163400	1.0163300	1.0163300	1.0163300	1.0163400

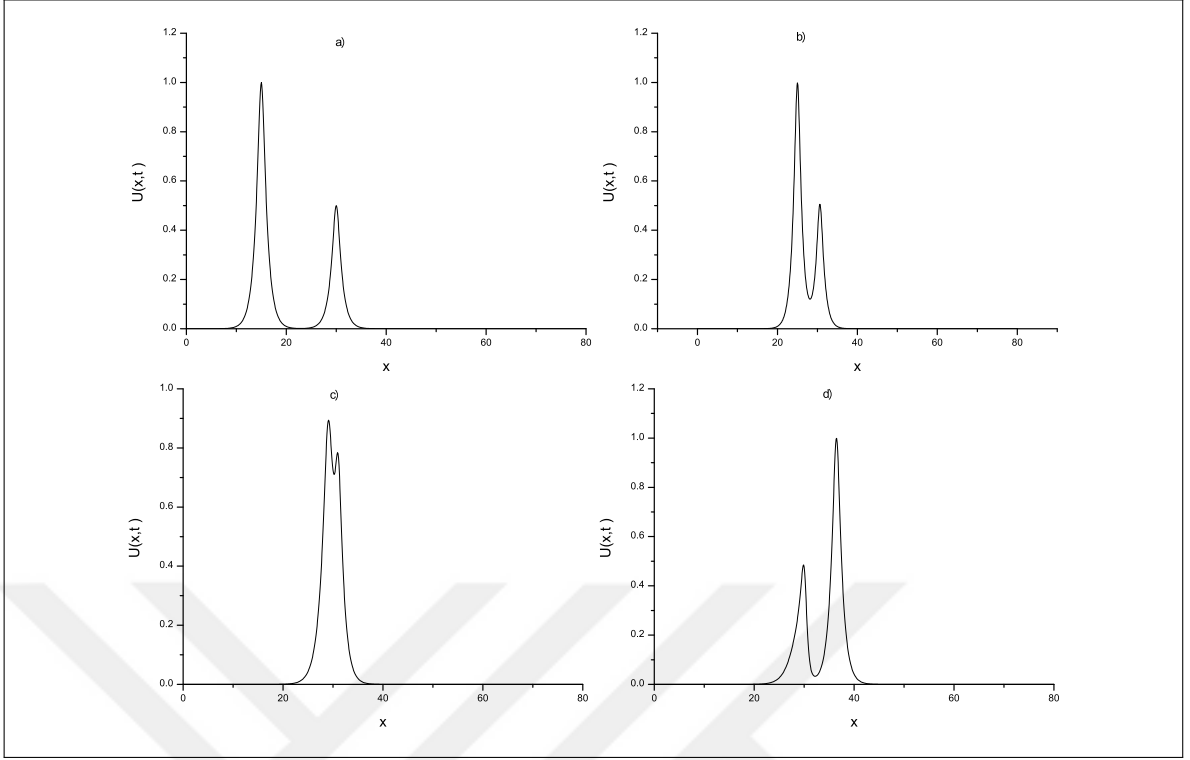
Tablo 3.9 İki solitary dalganın etkileşiminin $p = 4$, $gen. = 1, 0.5$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.025$ ve $x \in [0, 80]$

için korunum sabitleri

t		0	10	20	40	60	80	100	120
I_1	Normal	3.9330730	3.9330737	3.9330738	3.9330738	3.9330738	3.9330738	3.9330738	3.9330739
	Rub.-Grav.	3.9330730	3.9330736	3.9330735	3.9330732	3.9330702	3.9330709	3.9330728	3.9330725
	CBSPG [23]	3.9330900	3.9330900	3.9330900	3.9330900	3.9330900	3.9330900	3.9330900	3.9330800
I_2	Normal	2.9452406	2.9452406	2.9452406	2.9452406	2.9452406	2.9452406	2.9452406	2.9452406
	Rub.-Grav.	2.9452406	2.9452403	2.9452401	2.9452394	2.9452339	2.9452353	2.9452384	2.9452379
	CBSPG [23]	2.9451200	2.9451800	2.9451700	2.9451500	2.9450500	2.9450600	2.9450800	2.9451100
I_3	Normal	0.7976683	0.7976683	0.7976683	0.7976683	0.7976680	0.7976679	0.7976684	0.7976684
	Rub.-Grav.	0.7976683	0.7976680	0.7976677	0.7976671	0.7976617	0.7976622	0.7976655	0.7976649
	CBSPG [23]	0.7976140	0.7976120	0.7976110	0.7976120	0.7976220	0.7976130	0.7976110	0.7976110



Şekil 3.3 İki solitary dalganın $p = 3$; a) $t = 0$, b) $t = 50$, c) $t = 70$, d) $t = 100$ 'deki hareketi



Şekil 3.4 İki solitary dalganın $p = 4$; a) $t = 0$, b) $t = 50$, c) $t = 70$, d) $t = 100$ 'deki hareketi

3.1.3.3 Maxwellian başlangıç şartı

Son problem olarak, (3.1) ile verilen denklem

$$U(x, 0) = \text{Exp}(-x^2), \quad -20 \leq x \leq 20 \quad (3.23)$$

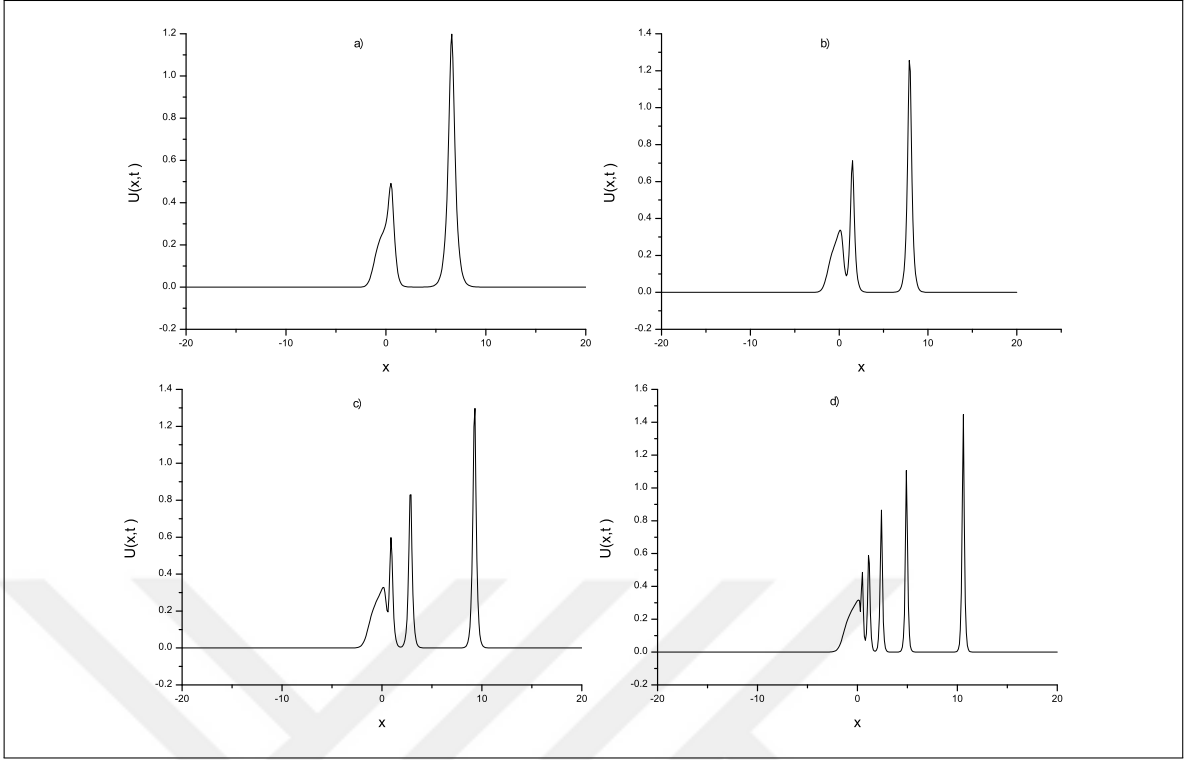
şeklinde verilen Maxwellian başlangıç şartı ile beraber ele alınmıştır. Bu durumda çözümün davranışı μ değerlerine bağlıdır. Bu yüzden, $\mu = 0.01$, $\mu = 0.025$, $\mu = 0.05$, $\mu = 0.1$ ve $p = 2, 3, 4$ parametreleri seçilerek solitary dalganın davranışı incelenmiştir. Sayısal değerler $t = 12$ anına kadar gözlemlenmiştir. Hareket sabitlerinin sayısal değerleri farklı μ değerleri için Tablo 3.10'da sunulmuştur. $I_1 \times 10^3$, $I_2 \times 10^3$ ve $I_3 \times 10^3$ hareket sabitlerinin başlangıç değerine göre değişimi sırasıyla $p = 2$ için 0.03, 0.07 ve 0.2; $p = 3$ için 0.05, 0.2 ve 0.2; $p = 4$ için 0.08, 0.2 ve 0.6 dan daha küçük kalmaktadır. Üstelik $t = 12$ de elde edilen korunum sabitleri ile [23] te verilen sayısal sonuçlar arasındaki fark oldukça küçüktür.

Şekil 3.5 ve Şekil 3.6 Maxwellian başlangıç şartına göre solitary dalgaların gelişimini göstermektedir. Bu şekillerde görüldüğü gibi $\mu = 0.1$ değeri için sadece bir tane kararlı dalga görünür. $\mu = 0.05$ olduğu zaman iki tane kararlı solitary dalga görünür. Üç ve beş tane kararlı dalga ise sırasıyla $\mu = 0.025$ ve $\mu = 0.01$ parametre değerlerinde oluşur. Bu

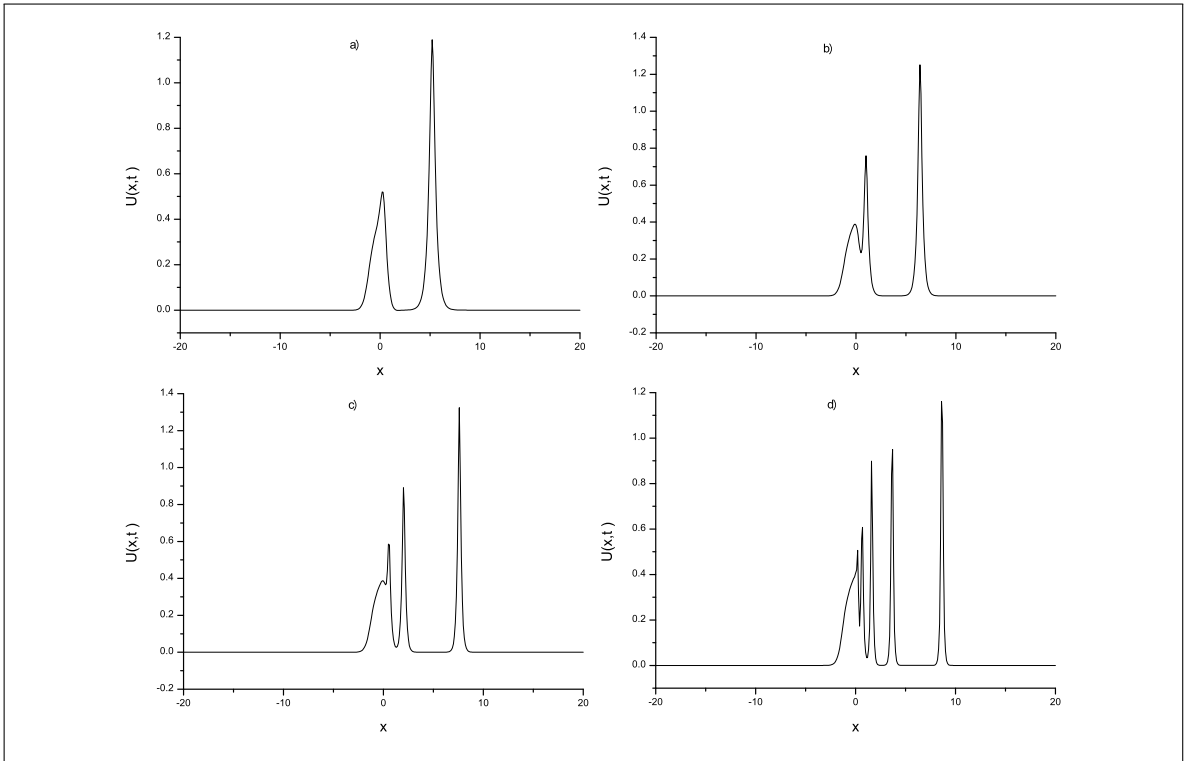
şekillerden sonuç olarak şunu söyleyebiliriz: Eğer μ değeri azaltılırsa, oluşan kararlı solitary dalga sayısı artmaktadır.

Tablo 3.10 Maxwellian başlangıç şartı ve $h = 0.1$, $\Delta t = 0.01$ ve $x \in [-20, 20]$ için korunum sabitleri

μ	t	$p = 2$			$p = 3$			$p = 4$		
		I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
0.010	0	1.772453	1.265847	0.886226	1.772453	1.265847	0.792665	1.772453	1.265847	0.723601
	4	1.773567	1.272162	0.913749	1.776431	1.280719	0.851731	1.803566	1.363095	1.083499
	8	1.774354	1.273668	0.905325	1.782107	1.293911	0.847407	1.805571	1.392182	1.468426
	12	1.773219	1.267638	0.897781	1.788222	1.329233	1.014441	1.757360	1.218707	0.577822
CBSPG [23]	12	1.772400	1.265800	0.886200	1.772400	1.266500	0.794700	1.772500	1.266900	0.725300
0.025	0	1.772453	1.284646	0.886226	1.772453	1.284646	0.792665	1.772453	1.284646	0.723601
	4	1.772624	1.285168	0.887871	1.772841	1.285658	0.799622	1.776099	1.298322	0.787247
	8	1.772635	1.285208	0.887926	1.772963	1.285086	0.792383	1.770003	1.274934	0.705119
	12	1.772636	1.285180	0.887737	1.772636	1.283938	0.793308	1.777013	1.302710	0.808295
CBSPG [23]	12	1.772400	1.283500	0.885600	1.772300	1.283400	0.791000	1.772400	1.284900	0.724300
0.050	0	1.772453	1.315979	0.886226	1.772453	1.315979	0.792665	1.772453	1.315979	0.723601
	4	1.772519	1.316150	0.886577	1.772578	1.316226	0.793414	1.772432	1.315294	0.722397
	8	1.772520	1.316152	0.886582	1.772577	1.316198	0.793400	1.772717	1.316536	0.726374
	12	1.772520	1.316151	0.886579	1.772592	1.316254	0.793420	1.773333	1.318824	0.731885
CBSPG [23]	12	1.772400	1.316000	0.886100	1.772400	1.315600	0.792200	1.772400	1.317700	0.724500
0.100	0	1.772453	1.378645	0.886226	1.772453	1.378645	0.792665	1.772453	1.378645	0.723601
	4	1.772478	1.378707	0.886327	1.772501	1.378748	0.792856	1.772530	1.378826	0.724088
	8	1.772479	1.378707	0.886327	1.772500	1.378745	0.792853	1.772531	1.378843	0.724131
	12	1.772479	1.378707	0.886327	1.772499	1.378742	0.792847	1.772524	1.378812	0.724054
CBSPG [23]	12	1.772400	1.378500	0.886100	1.772400	1.378700	0.792600	1.773400	1.383600	0.722400



Şekil 3.5 Maxwellian başlangıç şartı ve $p = 3$, $t = 12$; a) $\mu = 0.1$, b) $\mu = 0.05$, c) $\mu = 0.025$, d) $\mu = 0.01$ değerleri için dalgaların oluşumu



Şekil 3.6 Maxwellian başlangıç şartı ve $p = 4$, $t = 12$; a) $\mu = 0.1$, b) $\mu = 0.05$, c) $\mu = 0.025$, d) $\mu = 0.01$ değerleri için dalgaların oluşumu

3.2 GEW Denklemine Kuintik B-spline Kollokasyon Yöntemi ile Sayısal Çözümü

GEW denklemi aşağıdaki forma sahiptir:

$$U_t + \varepsilon U^p U_x - \mu U_{xxt} = 0. \quad (3.24)$$

Burada fiziksel sınır şartları $x \rightarrow \pm\infty$ iken $U \rightarrow 0$, alt indis t ve x zaman ve boyutsal türevi ifade eder, ε ve p pozitif tamsayıdır, μ pozitif sabittir.

Denklemin türevli yapısı ve kuintik B-spline şekil fonksiyonları dikkate alınarak, sınır ve başlangıç şartları

$$\begin{aligned} U(a,t) &= 0, & U_x(a,t) &= 0, \\ U(b,t) &= 0, & U_x(b,t) &= 0, \\ U(x,0) &= f(x), & a \leq x \leq b \end{aligned} \quad (3.25)$$

şeklinde seçilir.

$[a, b]$ aralığında tanımlanmış bir çözüm bölgesini düşünelim. Aralık uzunluğu $h = \frac{b-a}{N} = (x_{m+1} - x_m)$ ve $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ olmak üzere, $[a, b]$ aralığı x_m düğüm noktalarıyla N tane eşit alt aralığa bölünür. $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı fonksiyonlar için bir baz oluşturan $\phi_m(x)$ ($m = -2, -1, \dots, N+2$) kuintik B-spline fonksiyonları, x_m düğüm noktalarında Prenter [78] tarafından

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^5} \begin{cases} (x - x_{m-3})^5, & [x_{m-3}, x_{m-2}) \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5, & [x_{m-2}, x_{m-1}) \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5, & [x_{m-1}, x_m) \\ (x_{m+3} - x)^5 - 6(x_{m+2} - x)^5 + 15(x_{m+1} - x)^5, & [x_m, x_{m+1}) \\ (x_{m+3} - x)^5 - 6(x_{m+2} - x)^5, & [x_{m+1}, x_{m+2}) \\ (x_{m+3} - x)^5, & [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (3.26)$$

olarak tanımlanmıştır. Her bir kuintik B-spline ϕ_m fonksiyonu ardışık 6 tane sonlu alt aralığı örter. Bu yüzden her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu alt aralığı 6 adet B-spline fonksiyonu tarafından örtülür. $U_N(x, t)$ yaklaşık çözümü, kuintik B-spline şekil fonksiyonları cinsinden,

$$U_N(x, t) = \sum_{m=-2}^{N+2} \phi_m(x) \delta_m(t) \quad (3.27)$$

olarak ifade edilir. Burada $\delta_m(t)$, zamana bağlı bilinmeyen parametrelerdir, sınır şartları ve GEW denkleminin kuintik B-spline kollokasyon şartı kullanılarak bulunacaktır. (3.26) ile verilen B-spline fonksiyonlar, (3.27) ile verilen yaklaşık çözüm de yerine yerleştirilerek, yaklaşık çözüm U_m ve onun x 'e göre ikinci mertebeye kadar olan türevleri, x_m düğüm noktasında δ_m bilinmeyen parametreleri cinsinden,

$$\begin{aligned} U_N(x_m, t) &= U_m = \delta_{m-2} + 26\delta_{m-1} + 66\delta_m + 26\delta_{m+1} + \delta_{m+2}, \\ U'_m &= \frac{5}{h}(-\delta_{m-2} - 10\delta_{m-1} + 10\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \\ U''_m &= \frac{20}{h^2}(\delta_{m-2} + 2\delta_{m-1} - 6\delta_m + 2\delta_{m+1} + \delta_{m+2}) \end{aligned} \quad (3.28)$$

olarak hesaplanır. Böylece U değişimi $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı üzerinde aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$U = \sum_{m=-2}^{N+2} \phi_m \delta_m. \quad (3.29)$$

Denklem (3.28) ile verilen U_m ve onun x 'e göre türevleri, denklem (3.24) ile verilen GEW denkleminde kullanılırsa: Normal lineerleştirme tekniği için,

$$\begin{aligned} &\dot{\delta}_{m-2} + 26\dot{\delta}_{m-1} + 66\dot{\delta}_m + 26\dot{\delta}_{m+1} + \dot{\delta}_{m+2} \\ &+ \frac{5\varepsilon Z_m}{h}(-\delta_{m-2} - 10\delta_{m-1} + 10\delta_{m+1} + \delta_{m+2}) \\ &- \frac{20\mu}{h^2}(\dot{\delta}_{m-2} + 2\dot{\delta}_{m-1} - 6\dot{\delta}_m + 2\dot{\delta}_{m+1} + \dot{\delta}_{m+2}) = 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

şeklinde kollokasyon şartının genel formu elde edilir. Burada,

$$Z_m \cong [U_m^n]^p = (\delta_{m-2}^n + 26\delta_{m-1}^n + 66\delta_m^n + 26\delta_{m+1}^n + \delta_{m+2}^n)^p$$

olarak alınmıştır. Rubin-Graves lineerleştirme tekniği için, birleştirilmiş adi diferansiyel denklemlerin bir kümesi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} &\dot{\delta}_{m-2} + 26\dot{\delta}_{m-1} + 66\dot{\delta}_m + 26\dot{\delta}_{m+1} + \dot{\delta}_{m+2} \\ &+ \varepsilon Z_m(\delta_{m-2} + 26\delta_{m-1} + 66\delta_m + 26\delta_{m+1} + \delta_{m+2}) \\ &- \frac{20\mu}{h^2}(\dot{\delta}_{m-2} + 2\dot{\delta}_{m-1} - 6\dot{\delta}_m + 2\dot{\delta}_{m+1} + \dot{\delta}_{m+2}) = 0. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Burada,

$$\begin{aligned} Z_m &\cong [(U_m)^{p-1}(U_m)_x]^{n+1} = (U_m^{p-1})^n (U_m)_x^{n+1} + (U_m^{p-1})^{n+1} (U_m)_x^n - (U_m^{p-1})^n (U_m)_x^n \\ &= (U_m^n)^{p-1} (U_m^{n+1})_x + (U_m^{n+1})^{p-1} (U_m)_x - (U_m^n)^{p-1} (U_m)_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_m \cong & (\delta_{m-2}^n + 26\delta_{m-1}^n + 66\delta_m^n + 26\delta_{m+1}^n + \delta_{m+2}^n)^{p-1} \frac{5}{h} (-\delta_{m-2}^{n+1} - 10\delta_{m-1}^{n+1} + 10\delta_{m+1}^{n+1} + \delta_{m+2}^{n+1}) \\
& + (\delta_{m-2}^{n+1} + 26\delta_{m-1}^{n+1} + 66\delta_m^{n+1} + 26\delta_{m+1}^{n+1} + \delta_{m+2}^{n+1})^{p-1} \frac{5}{h} (-\delta_{m-2}^n - 10\delta_{m-1}^n + 10\delta_{m+1}^n + \delta_{m+2}^n) \\
& - (\delta_{m-2}^n + 26\delta_{m-1}^n + 66\delta_m^n + 26\delta_{m+1}^n + \delta_{m+2}^n)^{p-1} \frac{5}{h} (-\delta_{m-2}^{n+1} - 10\delta_{m-1}^{n+1} + 10\delta_{m+1}^{n+1} + \delta_{m+2}^{n+1})
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır ve her iki genel denklemde “.” zamana göre türevi ifade eder. (3.30) ve (3.31) ile verilen genel çözüm denklemlerinde bulunan zamana göre bilinmeyen parametreler olan δ_m ve zamana göre türevleri olan $\dot{\delta}_m$ katsayılarına sırasıyla,

$$\delta_m = \frac{1}{2}(\delta_m^n + \delta_m^{n+1}), \quad \dot{\delta}_m = \frac{\delta_m^{n+1} - \delta_m^n}{\Delta t} \quad (3.32)$$

formülleri ile verilen Crank-Nicolson ve klasik ileri sonlu fark yaklaşımı uygulanır. Bu halde, normal lineerleştirme tekniği için δ_i^{n+1} ve δ_i^n bilinmeyen zaman parametrelerine göre iki ardışık zaman adımı n ve $n+1$ arasındaki tekrarlı bağıntısı,

$$\begin{aligned}
& \gamma_1 \delta_{m-2}^{n+1} + \gamma_2 \delta_{m-1}^{n+1} + \gamma_3 \delta_m^{n+1} + \gamma_4 \delta_{m+1}^{n+1} + \gamma_5 \delta_{m+2}^{n+1} \\
& = \gamma_5 \delta_{m-2}^n + \gamma_4 \delta_{m-1}^n + \gamma_3 \delta_m^n + \gamma_2 \delta_{m+1}^n + \gamma_1 \delta_{m+2}^n
\end{aligned} \quad (3.33)$$

olarak elde edilir. Burada,

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= (1 - EZ_m - M), \quad \gamma_2 = (26 - 10EZ_m - 2M), \quad \gamma_3 = (66 + 6M), \\
\gamma_4 &= (26 + 10EZ_m - 2M), \quad \gamma_5 = (1 + EZ_m - M), \\
m &= 0, 1, \dots, N, \quad E = \frac{5\varepsilon}{2h} \Delta t, \quad M = \frac{20\mu}{h^2}.
\end{aligned} \quad (3.34)$$

Rubin-Graves lineerleştirme tekniği için tekrarlı bağıntısı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}
& \gamma_1 \delta_{m-2}^{n+1} + \gamma_2 \delta_{m-1}^{n+1} + \gamma_3 \delta_m^{n+1} + \gamma_4 \delta_{m+1}^{n+1} + \gamma_5 \delta_{m+2}^{n+1} \\
& = \gamma_4 \delta_{m-2}^n + \gamma_5 \delta_{m-1}^n + \gamma_6 \delta_m^n + \gamma_5 \delta_{m+1}^n + \gamma_4 \delta_{m+2}^n.
\end{aligned} \quad (3.35)$$

Burada,

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= (1 + EZ_m - M), \quad \gamma_2 = (26 + 26EZ_m - 2M), \quad \gamma_3 = (66 + 66EZ_m + 6M), \\
\gamma_4 &= (1 - EZ_m - M), \quad \gamma_5 = (26 - 26EZ_m - 2M), \quad \gamma_6 = (66 - 66EZ_m + 6M), \\
m &= 0, 1, \dots, N, \quad E = \frac{\varepsilon \Delta t}{2}, \quad M = \frac{20\mu}{h^2}.
\end{aligned} \quad (3.36)$$

(3.33) ve (3.35) ile verilen cebirsel denklem sistemleri $N+1$ tane lineer denklem ve $(\delta_{-2}, \delta_{-1}, \dots, \delta_{N+1}, \delta_{N+2})^T$ parametrelerinden oluşan $N+5$ tane bilinmeyenden oluşur. Bu sistemin tek çözümünü elde edebilmek için 4 tane ek şarta ihtiyaç vardır. Gerekli 4 tane ek şart (3.25) ile verilen sınır şartları kullanılarak elde edilir. Sınır şartlarının cebirsel denklem

sistemine basit bir şekilde dahil edilmesi olarak ifade edilen bu aşamanın benzeri, aşağıda iterasyonu başlatabilmek için d^0 başlangıç değerinin belirlenmesi aşamasında verilmiştir. Böylece δ_{-2}, δ_{-1} ve $\delta_{N+1}, \delta_{N+2}$ parametreleri, (3.33) ve (3.35) ile verilen cebirsel denklem sistemlerinden silinir. Bu işlemlerden sonra $d^n = (\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_N)^T$ olmak üzere, $N + 1$ tane bilinmeyenli cebirsel denklem sistemi (matris form) oluşur:

$$A\mathbf{d}^{n+1} = B\mathbf{d}^n. \quad (3.37)$$

A ve B matrisleri, $(N + 1) \times (N + 1)$ boyutlu 5 sütun elemanlı matrislerdir (penta-diagonal matris olarak adlandırılır) ve bu matris denklemini aşağıda alt bölüm 3.2.1'de açıklandığı gibi Fortran programında Thomas algoritması (penta-diagonal algoritma) kullanılarak çözülmüştür. Lineer olmayan terim Z_m deki eleman parametresine

$$(\delta_m^*)^{n+1} = \delta_m^n + \frac{1}{2}(\delta_m^{n+1} - \delta_m^n)$$

formülü ile verilen iç iterasyon her bir zaman adımında üç veya dört defa uygulanarak çözüm iyileştirilmiştir.

Başlangıç iterasyonu

(3.33) ve (3.35) ile verilen tekrarlama bağıntılarında iterasyonu başlatabilmek için d^0 başlangıç değeri bulunmalıdır. Yaklaşık çözümün başlangıç şartı,

$$U_N(x, 0) = \sum_{m=-2}^{N+2} \phi_m(x) \delta_m^0(t)$$

şeklinde yazılabilir. Bu yaklaşık çözümde δ_m^0 bilinmeyen parametrelerini belirleyebilmek için başlangıç şartı ve aşağıdaki sınır noktalarındaki türevler kullanılır:

$$\begin{aligned} U_N(x, 0) &= U(x_m, 0); \quad m = 0, 1, 2, \dots, N \\ (U_N)_x(a, 0) &= 0, \quad (U_N)_{xx}(a, 0) = 0, \\ (U_N)_x(b, 0) &= 0, \quad (U_N)_{xx}(b, 0) = 0. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Başlangıç şartı δ_m parametreleri cinsinden,

$$\begin{aligned}
\delta_{-2} + 26\delta_{-1} + 66\delta_0 + 26\delta_1 + \delta_2 &= U(x_0, 0), \\
\delta_{-1} + 26\delta_0 + 66\delta_1 + 26\delta_2 + \delta_3 &= U(x_1, 0), \\
\delta_0 + 26\delta_1 + 66\delta_2 + 26\delta_3 + \delta_4 &= U(x_2, 0), \\
&\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
\delta_{N-4} + 26\delta_{N-3} + 66\delta_{N-2} + 26\delta_{N-1} + \delta_N &= U(x_{N-2}, 0), \\
\delta_{N-3} + 26\delta_{N-2} + 66\delta_{N-1} + 26\delta_N + \delta_{N+1} &= U(x_{N-1}, 0), \\
\delta_{N-2} + 26\delta_{N-1} + 66\delta_N + 26\delta_{N+1} + \delta_{N+2} &= U(x_N, 0)
\end{aligned} \tag{3.39}$$

olarak yazılır. Bu denklem sistemi $N + 1$ tane cebirsel denkleme ve $(\delta_{-2}, \delta_{-1}, \dots, \delta_{N+1}, \delta_{N+2})^T$ parametrelerinden oluşan $N + 5$ tane bilinmeyene sahiptir. Bu sistemin tek çözümünü elde edebilmek için 4 tane ek şarta ihtiyaç vardır. Bunun için başlangıç şartının (3.38) ile verilen sınır noktalarındaki türevleri kullanılır. Türevli sınır koşulları δ_m parametreleri cinsinden,

$$\begin{aligned}
-\delta_{-2} - 10\delta_{-1} + 10\delta_1 + \delta_2 &= 0, \\
\delta_{-2} + 2\delta_{-1} - 6\delta_0 + 2\delta_1 + \delta_2 &= 0, \\
-\delta_{N-2} - 10\delta_{N-1} + 10\delta_{N+1} + \delta_{N+2} &= 0, \\
\delta_{N-2} + 2\delta_{N-1} - 6\delta_N + 2\delta_{N+1} + \delta_{N+2} &= 0
\end{aligned} \tag{3.40}$$

olarak hesaplanır. Bu denklemlerden $(\delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_{N+1}, \delta_{N+2})$ parametreleri çekilirse aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned}
\delta_{-2} &= \frac{1}{2}(15\delta_0 - 10\delta_1 - 3\delta_2), \\
\delta_{-1} &= -\frac{3}{4}\delta_0 + \frac{3}{2}\delta_1 + \frac{1}{4}\delta_2, \\
\delta_{N+1} &= -\frac{3}{4}\delta_N + \frac{3}{2}\delta_{N-1} + \frac{1}{4}\delta_{N-2}, \\
\delta_{N+2} &= \frac{1}{2}(15\delta_N - 10\delta_{N-1} - 3\delta_{N-2}).
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Bu ifadeler (3.39) ile verilen denklem de yerine yazılırsa, $(\delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_{N+1}, \delta_{N+2})$ parametreleri yok edilir. Bu işlemle beraber d^0 başlangıç değerinin aşağıdaki matris formu elde edilir:

$$Wd^0 = b.$$

Burada,

Şu anda çözüm,

$$\delta_N = \lambda_N, \quad \delta_{N-1} = \lambda_{N-1} - \mu_{N-1} \delta_N,$$

$$\delta_i = \lambda_i - \zeta_i \delta_{i+2} - \mu_i \delta_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, N-3, N-2$$

olarak bulunur.

3.2.2 Lineer kararlılık analizi

Sayısal yöntemin lineer kararlılığını araştırmak için Von-Neumann yaklaşımı kullanılacak ve GEW denkleminin $U^P U_x$ lineer olmayan terimindeki U^P teriminin bölgesel olarak sabit olduğu varsayılacaktır. Daha sonra, k mod numarası ve h eleman büyüklüğü olmak üzere,

$$\delta_m^n = \xi^n e^{imkh} \quad (i = \sqrt{-1})$$

ile verilen Fourier mod (3.33) ile verilen denklem de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} & \gamma_1 \xi^{n+1} e^{i(m-2)kh} + \gamma_2 \xi^{n+1} e^{i(m-1)kh} + \gamma_3 \xi^{n+1} e^{i(m)kh} + \gamma_4 \xi^{n+1} e^{i(m+1)kh} \\ & + \gamma_5 \xi^{n+1} e^{i(m+2)kh} = \\ & \gamma_5 \xi^n e^{i(m-2)kh} + \gamma_4 \xi^n e^{i(m-1)kh} + \gamma_3 \xi^n e^{i(m)kh} + \gamma_2 \xi^n e^{i(m+1)kh} \\ & + \gamma_1 \xi^n e^{i(m+2)kh} \end{aligned} \quad (3.42)$$

eşitliği elde edilir. $e^{ikh} = \cos(kh) + i \sin(kh)$ Euler formülü (3.42) ile verilen denklem de uygulanır ve gerekli sadeleştirme işlemleri yapılırsa büyüme faktörü olan ξ ,

$$\xi = \frac{a - ib}{a + ib}$$

olarak edilir. Burada,

$$a = \gamma_3 + (\gamma_4 + \gamma_2) \cos[hk] + (\gamma_5 + \gamma_1) \cos[2hk],$$

$$b = (\gamma_4 - \gamma_2) \sin[hk] + (\gamma_5 - \gamma_1) \sin[2hk].$$

$|\xi|$ nin modülü 1 dirki bu ise lineerleştirilmiş algoritmanın şartsız kararlı olduğu anlamındadır.

3.2.3 Sayısal örnekler ve sonuçlar

Bu bölümde sayısal algoritma, tek solitary dalga, iki solitary dalga arasındaki ilişki ve Maxwellian başlangıç şartını içeren üç test problemi üzerinde çalışılmıştır. (3.44) ile verilen hareket sabitleri sayısal yaklaşımın kütle, momentum ve enerji ile ilgili özellikleri koruduğunu göstermek için hesaplanmıştır. Sayısal yöntemin doğruluğunu kanıtlamak ve literatürde verilen sayısal sonuçlarla elde edilen sonuçları karşılaştırabilmek için L_2 ve L_∞ hata

normları, aşağıdaki eşitlikler kullanılarak hesaplanmıştır:

$$L_2 = \|U^{tam} - U_N\|_2 \simeq \sqrt{h \sum_{j=0}^N |U_j^{tam} - (U_N)_j|^2},$$

$$L_\infty = \|U^{exact} - U_N\|_\infty \simeq \max_j |U_j^{exact} - (U_N)_j|.$$

Evans ve Raslan [22], GEW denkleminin analitik çözümünü

$$U(x,t) = \sqrt[2]{\frac{c(p+1)(p+2)}{2\varepsilon} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{p}{2\sqrt{\mu}}(x-ct-x_0) \right]} \quad (3.43)$$

şeklinde ifade etmiştir. Burada $gen. = \sqrt[2]{\frac{c(p+1)(p+2)}{2\varepsilon}}$ dalganın genliği, c pozitif x yönünde hareket eden dalganın sabit hızı ve x_0 keyfi sabittir.

Solitary dalganın kütle, momentum ve enerji ile ilgili üç korunum sabiti aşağıdaki gibi verilir:

$$I_1 = \int_a^b U dx, \quad I_2 = \int_a^b [U^2 + \mu U_x^2] dx, \quad I_3 = \int_a^b U^{p+2} dx. \quad (3.44)$$

3.2.3.1 Tek solitary dalganın hareketi

İlk olarak, (3.24) ile verilen GEW denklemi, (3.43) ile verilen denklem de $t = 0$ alınarak elde edilen başlangıç şartı ile beraber düşünülmüştür. İki farklı lineerleştirme tekniği (Normal ve Rubin-Graves) ile birlikte sayısal yöntem uygulanarak, $t = 0$ dan $t = 20$ ye kadar korunum sabitlerindeki değişim ve hata norm değerleri araştırılmıştır. Bunun için, p , c , $gen. = \sqrt[2]{\frac{c(p+1)(p+2)}{2\varepsilon}}$ parametrelerinin farklı değerleri ve $h = 0.1$, $\Delta t = 0.2$, $\varepsilon = 3$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$, $0 \leq x \leq 80$ parametre değerleri alınarak beş parametre kümesi inşa edilmiştir.

İlk durumda, $p = 2$, $c = 1/32$ ve $c = 1/2$ parametrelerini alındı. Bu parametreler $gen. = 0.25$ ve $gen. = 1$ genliklerini üretir. Elde edilen sonuçlar, Tablo 3.11 ve Tablo 3.12'de listelenmiştir. Tablo 3.11 den gözlemlendiği gibi her iki lineerleştirme tekniği için hesaplama boyunca korunum sabitleri hemen hemen aynı kalmaktadır. Tablo 3.12 gösterirki: I_1 , I_2 , I_3 korunum sabitlerinin başlangıç hesabına göre değişim oranı, sırasıyla %0.009, %0.03, %0.03 değerlerinden daha küçük bulunmuştur. Ayrıca, L_2 ve L_∞ hata normlarının büyüklükleri her iki tabloda oldukça küçük ölçülmüştür. Yine Rubin-Graves lineerleştirme tekniği ile hesaplanan hata normları, hesaplama boyunca Normal lineerleştirme tekniği ile hesaplandan daha küçüktür.

İkinci durumda, $p = 3$, $c = 0.001$ ve $c = 0.3$ için $gen. = 0.15$ ve $gen. = 1$ dalga büyüklükleri elde edilir. Sayısal sonuçlar, Tablo 3.13 ve Tablo 3.14'de verilmiştir. Tablo 3.13 den

görüldüğü gibi hareket sabitleri zamanla hemen hemen değişmeden kalır. Tablo 3.12 ye göre ise I_1, I_2, I_3 korunum sabitlerinin başlangıç hesabına göre değişim oranı, sırasıyla %0.007, %0.02 ve %0.02 den küçük olmaktadır. Üstelik, hata normlarının sayısal değeri beklenildiği kadar küçüktür ve Rubin-Graves lineerleştirme tekniği daha etkili bir lineerleştirmedir.

Son durumda, $p = 4$ ve $c = 0.2$ parametreleri seçildi. Bu parametreye göre solitary dalga $gen. = 1$ yüksekliğine sahip olur. Tablo 3.15'den açıkça görülmektedir ki: Üç korunum sabitinde meydana gelen değişim oranı %0.02, %0.03 ve %0.03 değerlerinden daha küçüktür. Buna ilaveten, Rubin-Graves lineerleştirme tekniği kullanılarak elde edilen hata normlarının değeri, normal lineerleştirme tekniğine göre daha azdır ve elde edilen L_2 ve L_∞ hata norm değerleri istenildiği kadar küçüktür.

Tablo 3.11 Tek solitary dalganın $p = 2$, $gen. = 0.25$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.2$ ve $x \in [0, 80]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri

t		0	5	10	15	20
I_1	Normal	0.7853966	0.7853966	0.7853965	0.7853965	0.7853965
	Rub.-Gra.	0.7853966	0.7853966	0.7853966	0.7853966	0.7853966
I_2	Normal	0.1666664	0.1666663	0.1666663	0.1666663	0.1666663
	Rub.-Gra.	0.1666664	0.1666664	0.1666664	0.1666664	0.1666664
I_3	Normal	0.0052083	0.0052083	0.0052083	0.0052083	0.0052083
	Rub.-Gra.	0.0052083	0.0052083	0.0052083	0.0052083	0.0052083
$L_2 \times 10^5$	Normal	0.0000000	0.03366038	0.06865677	0.10532104	0.14404828
	Rub.-Gra.	0.0000000	0.03127090	0.06398038	0.09850392	0.13526316
$L_\infty \times 10^5$	Normal	0.0000000	0.02509311	0.05215679	0.08029086	0.10853345
	Rub.-Gra.	0.0000000	0.02105067	0.04383634	0.06759518	0.09151024

Tablo 3.12 Tek solitary dalganın $p = 2$, $gen. = 1$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.2$ ve $x \in [0, 80]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri

t		0	5	10	15	20
I_1	Normal	3.1415863	3.1373888	3.1332323	3.1291144	3.1250343
	Rub.-Gra.	3.1415863	3.1416080	3.1416294	3.1416508	3.1416722
I_2	Normal	2.6666616	2.6610537	2.6555067	2.6500168	2.6445829
	Rub.-Gra.	2.6666616	2.6667229	2.6667836	2.6668444	2.6669051
I_3	Normal	1.3333283	1.3277256	1.3221957	1.3167341	1.3113394
	Rub.-Gra.	1.3333283	1.3333895	1.3334503	1.3335110	1.3335718
L_2	Normal	0.0000000	0.00665826	0.01742910	0.03232178	0.05132106
	Rub.-Gra.	0.0000000	0.00419982	0.00841618	0.01260569	0.01675092
L_∞	Normal	0.0000000	0.00474985	0.01201728	0.02183195	0.03416753
	Rub.-Gra.	0.0000000	0.00259399	0.00517928	0.00773610	0.01026391

Tablo 3.13 Tek solitary dalganın $p = 3$, $gen. = 0.15$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.2$ ve $x \in [0, 80]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri

t		0	5	10	15	20
I_1	Normal	0.4189154	0.4189154	0.4189154	0.4189154	0.4189154
	Rub.-Gra.	0.4189154	0.4189154	0.4189154	0.4189154	0.4189154
I_2	Normal	0.0549807	0.0549807	0.0549807	0.0549807	0.0549807
	Rub.-Gra.	0.0549807	0.0549807	0.0549807	0.0549807	0.0549807
$I_3 \times 10^4$	Normal	0.0000733	0.0000733	0.0000733	0.0000733	0.0000733
	Rub.-Gra.	0.0000733	0.0000733	0.0000733	0.0000733	0.0000733
$L_2 \times 10^7$	Normal	0.00000000	0.04797509	0.09597025	0.14398271	0.19200973
	Rub.-Gra.	0.00000000	0.04795135	0.09592277	0.14391151	0.19191480
$L_\infty \times 10^7$	Normal	0.00000000	0.05730697	0.11490440	0.17357780	0.23297300
	Rub.-Gra.	0.00000000	0.05727720	0.11485490	0.17350253	0.23287122

Tablo 3.14 Tek solitary dalganın $p = 3$, $gen. = 1$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.2$ ve $x \in [0, 80]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri

t		0	5	10	15	20
I_1	Normal	2.8043580	2.8043577	2.8043575	2.8043572	2.8043570
	Rub.-Gra.	2.8043580	2.8043425	2.8043265	2.8043104	2.8042943
I_2	Normal	2.4639101	2.4639097	2.4639093	2.4639090	2.4639086
	Rub.-Gra.	2.4639101	2.4638708	2.4638304	2.4637900	2.4637495
I_3	Normal	0.9855618	0.9855613	0.9855609	0.9855606	0.9855602
	Rub.-Gra.	0.9855618	0.9855224	0.9854821	0.9854416	0.9854011
L_2	Normal	0.00000000	0.00204427	0.00404918	0.00603437	0.00801470
	Rub.-Gra.	0.00000000	0.00166962	0.00341489	0.00522937	0.00708553
L_∞	Normal	0.00000000	0.00145300	0.00275623	0.00406885	0.00538237
	Rub.-Gra.	0.00000000	0.00114839	0.00234552	0.00356458	0.00480470

Tablo 3.15 Tek solitary dalganın $p = 4$, $gen. = 1$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.2$ ve $x \in [0, 80]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri

t		0	5	10	15	20
I_1	Normal	2.6220516	2.6220514	2.6220512	2.6220510	2.6220508
	Rub.-Gra.	2.6220516	2.6220211	2.6219902	2.6219593	2.6219284
I_2	Normal	2.3561914	2.3561911	2.3561907	2.3561904	2.3561901
	Rub.-Gra.	2.3561914	2.3561273	2.3560625	2.3559975	2.3559327
I_3	Normal	0.7853952	0.7853948	0.7853945	0.7853942	0.7853939
	Rub.-Gra.	0.7853952	0.7853310	0.7852662	0.7852013	0.7851364
L_2	Normal	0.00000000	0.00106260	0.00211868	0.00316779	0.00421697
	Rub.-Gra.	0.00000000	0.00075110	0.00156412	0.00244690	0.00339086
L_∞	Normal	0.00000000	0.00079729	0.00152151	0.00224723	0.00297952
	Rub.-Gra.	0.00000000	0.00055248	0.00115512	0.00179553	0.00247031

Diğer taraftan, farklı konum ve zaman adımlarında hata normlarının büyüklüğünü göstermek için $p = 2, 3, 4, 6, 8, 10$, $c = 0.03, 0.1, 0.3$, $\varepsilon = 3$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$, $x \in [0, 80]$ parametre değerleri kullanılmıştır. Hesaplanan veriler, Tablo 3.16 ve Tablo 3.17’de sunulmuştur. Bu iki tablodan çıkarılabilecek sonuç şudur: p ve c değerlerinin artırılmasıyla beraber doğal olarak solitary dalganın *gen.* genlik değeri de artar. Solitary dalganın genlik değerinin artırılması ile beraber hata norm değerlerinin de büyüdüğü gözlemlenir. h konum adımı ve Δt zaman adımının değeri azaltıldıkça, hata norm değerlerinin azaldığı görülmektedir. Bu yüzden, L_2 ve L_∞ hata normlarının sayısal değeri, konum adımı $h = 0.1$, zaman adımı $\Delta t = 0.01$ parametre değerleri için en küçüktür ve sırasıyla 0.262×10^{-3} , 0.253×10^{-3} den daha küçüktür. L_∞ hata norm değeri, hesaplama süresince L_2 hata normundan daima küçük kalmaktadır. Tek solitary dalganın hareketi, $t = 0, 10, 20$ zamanlarında Şekil 3.7’de çizilmiştir. Bu şekle göre, p değerinin artırılması ile beraber dalganın genliği (yüksekliği) artmaktadır. $t = 0$ dan $t = 20$ zamanına kadar dalgalar sağa doğru hız, şekil ve genliklerini değiştirmeden hareket eder. Yani beklendiği gibi solitary dalga olarak hareket eder.

Tablo 3.18’de elde edilen sayısal sonuçlarla, daha önce çeşitli çalışmalarla elde edilen sayısal sonuçlar karşılaştırılmıştır [5, 15, 17, 19, 22, 23]. Bu tablodan açıkça görülmektedir ki: Üç korunum sabitinin sayısal değeri daha önceki çalışmalarla uyumludur. Hata norm değerleri ise diğer çalışmalarda elde edilen değerlerinden daha küçük bulunmuştur.

Tablo 3.16 Tek solitary dalganın $p = 2, 3, 4$; $t = 20$ ve $x \in [0, 80]$ için farklı konum ve zaman adımındaki hata norm değerleri

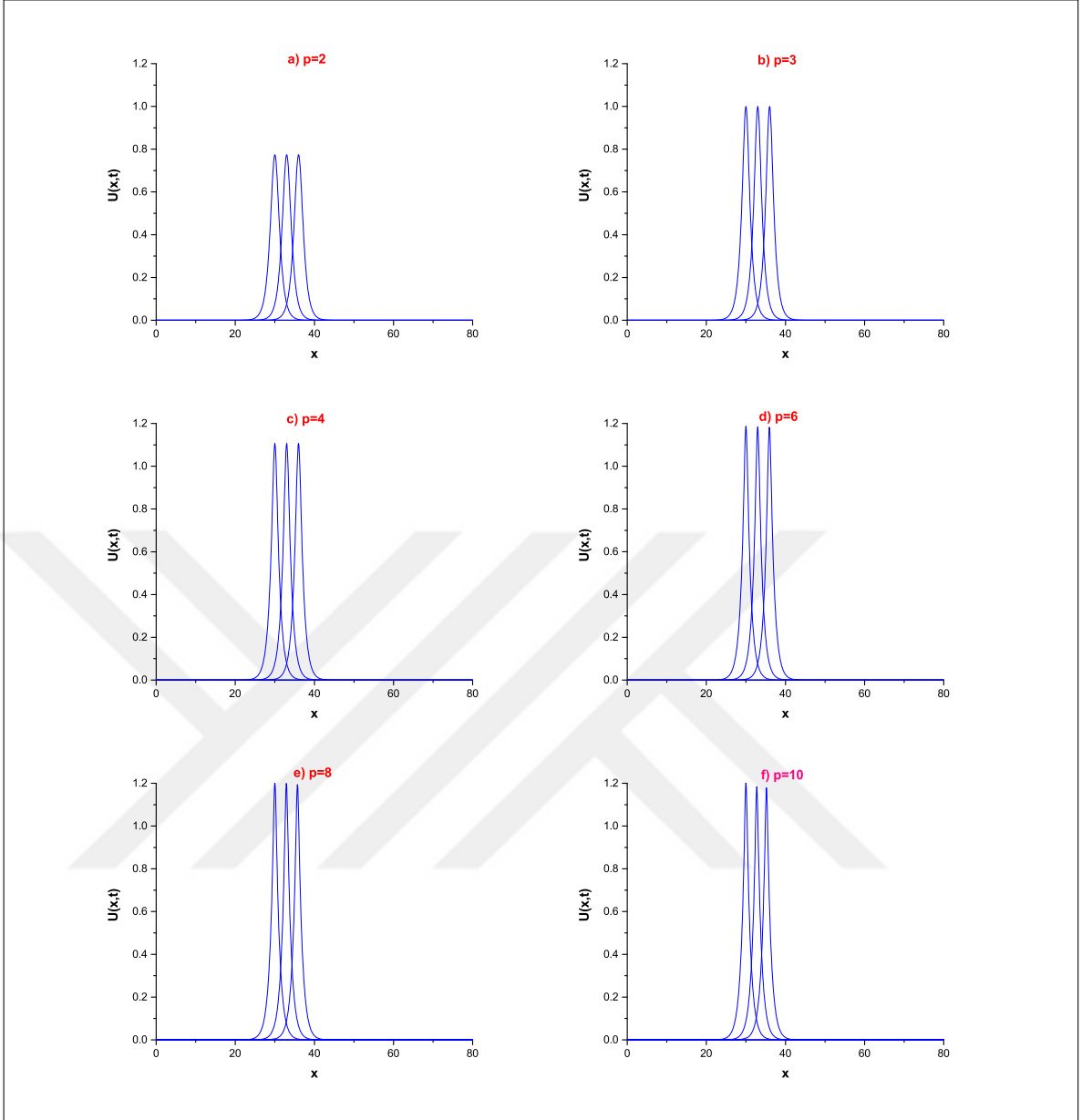
		p=2			p=3			p=4			
$c \rightarrow$		0.03	0.1	0.3	0.03	0.1	0.3	0.03	0.1	0.3	
$gen. \rightarrow$		0.24	0.44	0.77	0.46	0.69	1.00	0.62	0.84	1.10	
h	Δt										
	0.1	0.01	0.0005	0.005	0.051	0.001	0.009	0.082	0.004	0.014	0.111
	0.2	0.01	0.0039	0.014	0.036	0.024	0.063	0.144	0.080	0.183	0.426
$L_2 \times 10^3$	0.1	0.05	0.0005	0.008	0.221	0.001	0.018	0.494	0.004	0.031	0.837
	0.2	0.05	0.0039	0.016	0.198	0.024	0.069	0.537	0.080	0.195	1.120
	0.1	0.2	0.0011	0.064	2.878	0.003	0.178	7.085	0.008	0.327	14.165
	0.1	0.01	0.0003	0.003	0.035	0.002	0.006	0.058	0.006	0.008	0.080
	0.2	0.01	0.0047	0.011	0.026	0.032	0.053	0.115	0.117	0.162	0.355
$L_\infty \times 10^3$	0.1	0.05	0.0003	0.005	0.140	0.002	0.012	0.338	0.006	0.020	0.601
	0.2	0.05	0.0047	0.013	0.129	0.032	0.059	0.381	0.117	0.174	0.849
	0.1	0.2	0.0008	0.040	1.775	0.003	0.122	4.804	0.009	0.239	10.250

Tablo 3.17 Tek solitary dalganın $p = 6, 8, 10$; $t = 20$ ve $x \in [0, 80]$ için farklı konum ve zaman adımındaki hata norm değerleri

		p=6		p=8		p=10		
$c \rightarrow$		0.03	0.1	0.03	0.1	0.03	0.1	
$gen. \rightarrow$		0.80	0.98	0.90	1.05	0.95	1.08	
h	Δt							
	0.1	0.01	0.015	0.036	0.042	0.095	0.102	0.261
	0.2	0.01	0.438	1.192	2.657	9.556	16.085	59.734
$L_2 \times 10^3$	0.1	0.05	0.016	0.071	0.042	0.158	0.103	0.384
	0.2	0.05	0.438	1.224	2.658	9.626	16.088	59.918
	0.1	0.2	0.023	0.813	0.054	2.066	0.125	5.460
	0.1	0.01	0.024	0.031	0.062	0.091	0.143	0.252
	0.2	0.01	0.678	1.142	3.062	8.212	14.057	47.756
$L_\infty \times 10^3$	0.1	0.05	0.024	0.058	0.063	0.141	0.144	0.350
	0.2	0.05	0.678	1.169	3.063	8.262	14.059	47.886
	0.1	0.2	0.030	0.643	0.073	1.731	0.160	4.742

Tablo 3.18 Tek solitary dalganın $p = 2, 3, 4$; $h = 0.1$, $\Delta t = 0.2$, $t = 20$ ve $x \in [0, 80]$ için sayısal sonuçlarının karşılaştırılması

	Methods	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	I_1	I_2	I_3
$p = 2$ $c = 1/32$	CubBSC [5]	0.19588	0.17443	0.78466	0.16643	0.00519
	QuadBSC [22]	0.15695	0.20214	0.78528	0.16658	0.00520
	QuadBSLG [15]	0.08100	0.04596			
	CubBSLG [19]	0.07833	0.04448			
	QuadBSPG [23]	0.00250	0.00275	0.78539	0.16666	0.00520
	QuarBSC [17]	0.00157	0.00104	0.78539	0.16666	0.00520
	QuinBSC	0.00135	0.00091	0.78539	0.16666	0.00520
$p = 3$ $c = 0.001$	CubBSC [5]	0.514967	0.320605	0.65908	0.05938	0.000068
	QuadBSPG [23]	0.000064	0.000082	0.41891	0.05497	0.000073
	QuinBSC	0.000019	0.000023	0.41891	0.05498	0.000073
$p = 4$ $c = 0.2$	QuadBSPG [23]	2.30499	1.88285	2.62206	2.35615	0.78534
	QuinBSC	3.39086	2.47031	2.62192	2.35593	0.78513



Şekil 3.7 Tek solitary dalganın $p = 2, 3, 4, 6, 8, 10$, $c = 0.3$, $x_0 = 30$, $x \in [0, 80]$ için $t = 0, 10, 20$ 'deki hareketi

3.2.3.2 İki solitary dalganın etkileşimi

İkinci problem olarak, iki pozitif solitary dalganın etkileşimi aşağıdaki başlangıç şartı kullanılarak araştırılmıştır:

$$U(x, 0) = \sum_{i=1}^2 \sqrt[p]{\frac{c_i(p+1)(p+2)}{2\varepsilon}} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{p}{2\sqrt{\mu}}(x - x_i) \right]. \quad (3.45)$$

Burada $i = 1, 2$ olmak üzere, c_i ve x_i keyfi sabitlerdir. (3.45) ile verilen denklem, $gen. = 1$ ve $gen. = 0.5$ genliklerine sahip, aynı yönde iki farklı solitary dalga üretir. p , c_i nin farklı

değerleri ve $h = 0.1$, $\Delta t = 0.025$, $\varepsilon = 3$, $\mu = 1$, $x_1 = 15, x_2 = 30, 0 \leq x \leq 80$ parametre değerleri seçilerek üç farklı parametre kümesi oluşturulmuştur.

İlk olarak, $p = 2$, $c_1 = 0.5$ ve $c_2 = 0.125$ olarak seçildi. Program $t = 60$ zamanına kadar çalıştırılmıştır. Korunum sabitlerinin sayısal değeri, Tablo 3.19'da gösterilmiştir. Bu tabloya göre korunum sabitlerinin $t = 0$ dan $t = 60$ anına kadar değişimi, sırasıyla %0.0007, %0.002 ve %0.002 değerlerinden daha küçük bulunmuştur. Üstelik, sayısal sonuçlar Petrov-Galerkin yöntemi [23] ile hesaplanan sonuçlarla uyumludur.

İkinci durumda, $p = 3$, $c_1 = 0.3$ ve $c_2 = 0.0375$ parametre değerleri alındı. Sayısal hesaplama $t = 100$ zamanına kadar yapılmıştır. Hesaplanan veriler, Tablo 3.20'de verilmiştir. Bu tablodan gözlemlendiği gibi hesaplama süresince korunum sabitlerindeki değişim oranı %0.0002, %0.0005 ve %0.0006 den küçük bulunmuştur. Üç hareket sabitinin sayısal değerleri Petrov-Galerkin yöntemi [23] ile verilen sonuçlara çok yakındır. Seçilen bu parametrelere göre iki solitary dalganın farklı zamanlardaki hareketi Şekil 3.8'de çizilmiştir. Bu şekilden de görüldüğü gibi, başlangıçta $gen. = 1$ genlikli solitary dalga $gen. = 0.5$ genlikli dalganın gerisindedir. Zamanla arkadaki dalga öndeki dalgayı yakalar ve $t = 50$ anında diğer dalganın üstüne biner. Daha sonra dalgalar ayrılarak başlangıç formlarına geri dönmeye başlar. $t = 100$ anında ise dalgalar belirgin olarak ayrıktır ve $gen.$, hız ve şekillerini muhafaza etmiştir. Buna göre elde edilen solitary dalgalara solitonlardır denir.

Son olarak, $p = 4$, $c_1 = 0.2$ ve $c_2 = 1/80$ olarak seçildi. Sayısal program $t = 0$ dan $t = 120$ ye kadar çalıştırılmıştır. Sayısal veriler, Tablo 3.21'de listelenmiştir. Bu tabloya göre korunum sabitlerinin başlangıç durumuna göre değişim, sırasıyla %0.0003, %0.0007 ve %0.0007 değerlerinden daha küçüktür. Ayrıca korunum sabitleri Petrov-Galerkin yöntemi [23] ile elde edilen sonuçlarla uyumludur. İki solitary dalga arasındaki etkileşim farklı zaman adımlarında Şekil 3.9'da gösterilmiştir. Bu şekilden açıkça görülmektedir ki: Başlangıçta büyük genlikli solitary dalga, küçük genlikli solitary dalganın solundadır. Zaman ilerledikçe büyük genlikli dalga küçük genlikli dalgayı yakalar ve etkileşim başlar. Daha sonra dalgalar ayrılarak, kendi şekil, hız ve büyüklüklerinde yollarına devam eder. Bu ise elde edilen solitary dalgaların soliton davranışı yaptığını söyler.

Tablo 3.19 İki solitary dalganın etkileşiminin $p = 2$, $gen. = 1,0.5$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.025$ ve $x \in [0, 80]$ için korunum sabitleri

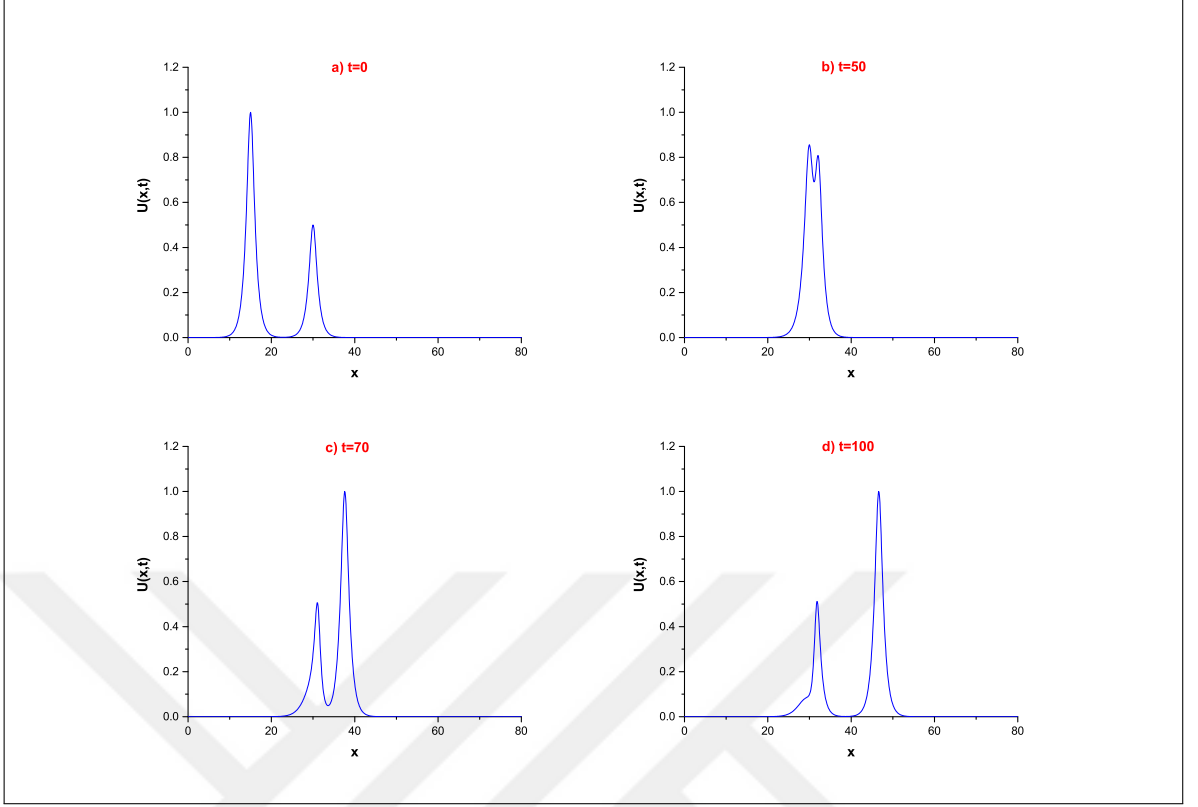
t		0	10	20	30	40	50	60
I_1	Normal	4.71237	4.71237	4.71237	4.71237	4.71237	4.71237	4.71237
	Rub.-Gra.	4.71237	4.71237	4.71237	4.71236	4.71237	4.71237	4.71237
	PG [23]	4.71239	4.71239	4.71239	4.71239	4.71239	4.71239	4.71239
I_2	Normal	3.33332	3.33332	3.33332	3.33332	3.33332	3.33332	3.33332
	Rub.-Gra.	3.33332	3.33332	3.33332	3.33331	3.33332	3.33332	3.33332
	PG [23]	3.33324	3.33324	3.33324	3.33324	3.33333	3.33338	3.33333
I_3	Normal	1.41666	1.41666	1.41666	1.41665	1.41666	1.41666	1.41666
	Rub.-Gra.	1.41666	1.41666	1.41666	1.41664	1.41665	1.41666	1.41666
	PG [23]	1.14166	1.14166	1.14166	1.14166	1.14166	1.14166	1.14166

Tablo 3.20 İki solitary dalganın etkileşiminin $p = 3$, $gen. = 1,0.5$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.025$ ve $x \in [0, 80]$ için korunum sabitleri

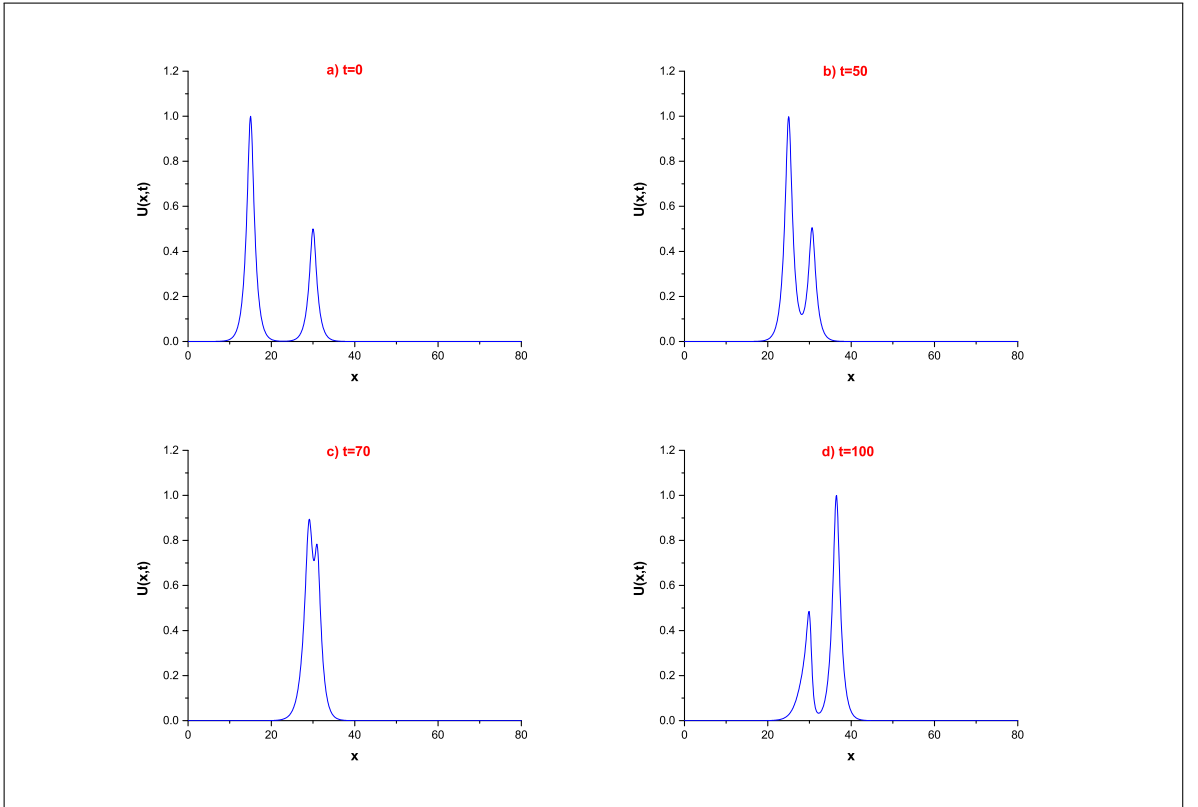
t		0	10	20	40	60	80	90	100
I_1	Normal	4.20653	4.20653	4.20653	4.20653	4.20653	4.20653	4.20653	4.20653
	Rub.-Gra.	4.20653	4.20653	4.20653	4.20653	4.20653	4.20653	4.20653	4.20653
	PG [23]	4.20655	4.20655	4.20655	4.20655	4.20655	4.20655	4.20655	4.20655
I_2	Normal	3.07988	3.07988	3.07988	3.07988	3.07988	3.07988	3.07988	3.07988
	Rub.-Gra.	3.07988	3.07988	3.07988	3.07988	3.07988	3.07988	3.07988	3.07988
	PG [23]	3.97977	2.07986	3.07982	3.07986	3.07987	3.07991	3.07974	3.07972
I_3	Normal	1.01636	1.01636	1.01636	1.01636	1.01636	1.01636	1.01636	1.01636
	Rub.-Gra.	1.01636	1.01636	1.01636	1.01635	1.01635	1.01636	1.01636	1.01636
	PG [23]	1.01634	1.01634	1.01634	1.01634	1.01633	1.01633	1.01633	1.01634

Tablo 3.21 İki solitary dalganın etkileşiminin $p = 4$, $gen. = 1,0.5$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.025$ ve $x \in [0, 80]$ için korunum sabitleri

t		0	10	20	40	60	80	100	120
I_1	Normal	3.93307	3.93307	3.93307	3.93307	3.93307	3.93307	3.93307	3.93307
	Rub.-Gra.	3.93307	3.93307	3.93307	3.93307	3.93307	3.93307	3.93307	3.93307
	PG [23]	3.93309	3.93309	3.93309	3.93309	3.93309	3.93309	3.93309	3.93309
I_2	Normal	2.94524	2.94524	2.94524	2.94524	2.94524	2.94524	2.94523	2.94523
	Rub.-Gra.	2.94524	2.94524	2.94523	2.94523	2.94523	2.94523	2.94523	2.94523
	PG [23]	2.94512	2.94518	2.94517	2.94515	2.94505	2.94506	2.94508	2.94511
I_3	Normal	0.79766	0.79766	0.79766	0.79766	0.79766	0.79766	0.79766	0.79766
	Rub.-Gra.	0.79766	0.79766	0.79766	0.79766	0.79766	0.79766	0.79766	0.79766
	PG [23]	0.79761	0.79761	0.79761	0.79761	0.79762	0.79761	0.79761	0.79761



Şekil 3.8 İki solitary dalganın $p = 3$; a) $t = 0$, b) $t = 50$, c) $t = 70$, d) $t = 100$ 'deki hareketi



Şekil 3.9 İki solitary dalganın $p = 4$; a) $t = 0$, b) $t = 50$, c) $t = 70$, d) $t = 100$ 'deki hareketi

3.2.3.3 Maxwellian başlangıç şartı

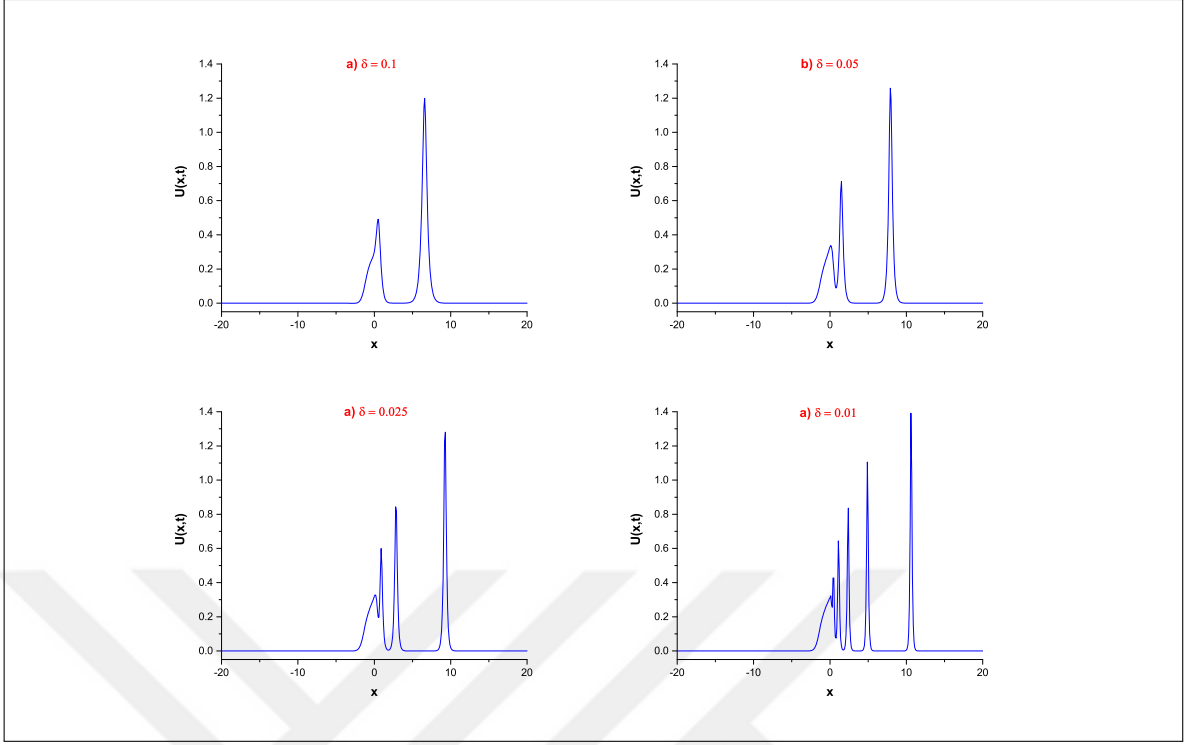
Son olarak, (3.24) ile verilen denklem,

$$U(x, 0) = \text{Exp}(-x^2), \quad -20 \leq x \leq 20 \quad (3.46)$$

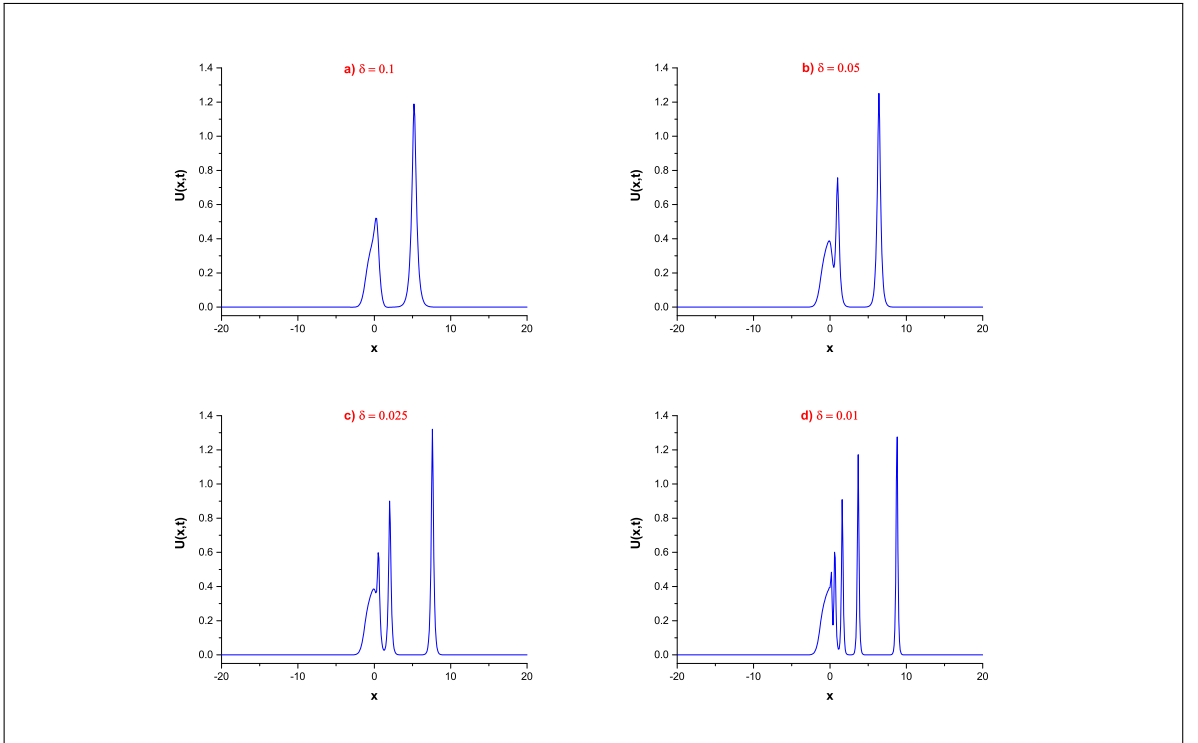
şeklinde verilen Maxwellian başlangıç şartı ile beraber ele alındı. Bilindiği gibi bu durumda μ değerinin seçimi çözümün davranışını etkiler. Bu sebeple $\mu = 0.01$, $\mu = 0.025$, $\mu = 0.05$, $\mu = 0.1$ ve $p = 2, 3, 4$ parametreleri seçilmiştir. Korunum sabitlerindeki değişim $t = 12$ anına kadar gözlemlenmiştir ve elde edilen sayısal sonuçlar Tablo 3.22’de listelenmiştir. Bu tabloya göre, μ değeri arttıkça korunum sabitlerinde meydana gelen değişim gittikçe küçülmektedir ve %0.08 den daha küçük kalmaktadır. Farklı μ değerlerine göre solitary dalgaların oluşumu, Şekil 3.10 ve Şekil 3.11’de gösterilmiştir. Bu şekillerden açıkça görülürki: μ değeri azaltıldıkça, Maxwellian başlangıç şartına göre oluşan kararlı solitary dalga sayısı artmaktadır.

Tablo 3.22 Maxwellian başlangıç şartı ve $h = 0.1$, $\Delta t = 0.01$ ve $x \in [-20, 20]$ için korunum sabitleri

μ	t	$p = 2$			$p = 3$			$p = 4$		
		I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
0.01	0	1.7724	1.2658	0.8862	1.7724	1.2658	0.7926	1.7724	1.2658	0.7236
	4	1.7732	1.2678	0.9061	1.7786	1.2847	0.8782	1.7855	1.2931	0.7715
	8	1.7742	1.2736	0.9234	1.7868	1.3131	0.9691	1.8014	1.3622	1.2362
	12	1.7739	1.2711	0.9123	1.7813	1.2901	0.8664	1.8156	1.3901	1.2707
	PG [23]	12	1.7724	1.2658	0.8862	1.7724	1.2665	0.7947	1.7725	1.2669
0.025	0	1.7724	1.2846	0.8862	1.7724	1.2846	0.7926	1.7724	1.2846	0.7236
	4	1.7725	1.2846	0.8880	1.7731	1.2863	0.8056	1.7763	1.2967	0.7891
	8	1.7725	1.2846	0.8881	1.7733	1.2859	0.7996	1.7711	1.2762	0.7129
	12	1.7725	1.2846	0.8881	1.7730	1.2837	0.7946	1.7791	1.3056	0.8198
	PG [23]	12	1.7724	1.2835	0.8856	1.7723	1.2834	0.7910	1.7724	1.2849
0.05	0	1.7724	1.3159	0.8862	1.7724	1.3159	0.7926	1.7724	1.3159	0.7236
	4	1.7724	1.3159	0.8864	1.7725	1.3159	0.7938	1.7726	1.3155	0.7253
	8	1.7724	1.3159	0.8864	1.7725	1.3159	0.7939	1.7729	1.3168	0.7297
	12	1.7724	1.3159	0.8864	1.7725	1.3160	0.7940	1.7735	1.3188	0.7345
	PG [23]	12	1.7724	1.3160	0.8861	1.7724	1.3156	0.7922	1.7724	1.3177
0.1	0	1.7724	1.3786	0.8862	1.7724	1.3786	0.7926	1.7724	1.3786	0.7236
	4	1.7724	1.3786	0.8862	1.7724	1.3786	0.7928	1.7725	1.3786	0.7243
	8	1.7724	1.3786	0.8862	1.7724	1.3786	0.7928	1.7725	1.3787	0.7243
	12	1.7724	1.3786	0.8862	1.7724	1.3786	0.7928	1.7725	1.3786	0.7243
	PG [23]	12	1.7724	1.3785	0.8861	1.7724	1.3787	0.7926	1.7734	1.3836



Şekil 3.10 Maxwellian başlangıç şartı ve $p = 3$, $t = 12$; a) $\mu = 0.1$, b) $\mu = 0.05$, c) $\mu = 0.025$, d) $\mu = 0.01$ değerleri için dalgaların oluşumu



Şekil 3.11 Maxwellian başlangıç şartı ve $p = 4$, $t = 12$; a) $\mu = 0.1$, b) $\mu = 0.05$, c) $\mu = 0.025$, d) $\mu = 0.01$ değerleri için dalgaların oluşumu

3.3 GEW Denkleminin Kübik B-spline Galerkin Yöntemi ile Sayısal Çözümü

GEW denklemi,

$$U_t + \varepsilon U^p U_x - \mu U_{xxt} = 0 \quad (3.47)$$

şeklinde verilir. Burada fiziksel sınır şartları $x \rightarrow \pm\infty$ iken $U \rightarrow 0$ olarak verilir, alt indis t ve x zamana ve boyuta göre türevi temsil eder, ε ve p pozitif tamsayı, μ ise pozitif sabittir.

Başlangıç şartı olarak

$$U(x, 0) = f(x), \quad a \leq x \leq b \quad (3.48)$$

ve sınır şartları

$$\begin{aligned} U(a, t) = 0, \quad U_x(a, t) = 0, \\ U(b, t) = 0, \quad U_x(b, t) = 0 \end{aligned} \quad (3.49)$$

olarak belirlenmiştir.

İlk aşamada, $[a, b]$ sonlu aralığına sınırlandırılmış çözüm bölgesi, aralık uzunluğu $h = \frac{b-a}{N} = (x_{m+1} - x_m)$ ve $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ olmak üzere, x_m düğüm noktalarıyla N tane eşit alt aralığa bölünür. $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı fonksiyonlar için bir baz oluşturan $\{\phi_{-1}(x), \phi_0(x), \dots, \phi_{N+1}(x)\}$ kübik B-spline fonksiyonları, x_m düğüm noktalarında aşağıdaki gibi ifade edilir [78]:

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (x - x_{m-2})^3, & x \in [x_{m-2}, x_{m-1}), \\ h^3 + 3h^2(x - x_{m-1}) + 3h(x - x_{m-1})^2 - 3(x - x_{m-1})^3, & x \in [x_{m-1}, x_m), \\ h^3 + 3h^2(x_{m+1} - x) + 3h(x_{m+1} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^3, & x \in [x_m, x_{m+1}), \\ (x_{m+2} - x)^3, & x \in [x_{m+1}, x_{m+2}), \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (3.50)$$

Burada her bir kübik B-spline ϕ_m fonksiyonu ardışık 4 tane sonlu alt aralığı örttüğü için, her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu alt aralığı 4 adet B-spline fonksiyonu tarafından örtülür. $U_N(x, t)$ yaklaşık çözüm fonksiyonu, kübik B-spline fonksiyonları cinsinden aşağıdaki formda verilir:

$$U_N(x, t) = \sum_{m=-1}^{N+1} \phi_m(x) \delta_m(t). \quad (3.51)$$

Burada $\delta_m(t)$, zamana bağılı bilinmeyen parametrelerdir, sınır ve ağırlıklı kalan şartları kullanılarak bulunacaktır.

$0 \leq \eta \leq 1$ olmak üzere $h\eta = x - x_m$ eşitliği kullanılarak $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı $[0, 1]$ aralığına dönüştürülebilir. Bu dönüşüm uygulanarak (3.50) ile verilen kübik B-spline fonksiyonları η değişkenine bağılı olarak $[0, 1]$ aralığı üzerinde,

$$\begin{aligned}\phi_{m-1} &= (1 - \eta)^3, \\ \phi_m &= 1 + 3(1 - \eta) + 3(1 - \eta)^2 - 3(1 - \eta)^3, \\ \phi_{m+1} &= 1 + 3\eta + 3\eta^2 - 3\eta^3, \\ \phi_{m+2} &= \eta^3\end{aligned}\tag{3.52}$$

olarak tanımlanır. Burada şunu belirtmeliyiz ki: $\phi_{m-1}(x)$, $\phi_m(x)$, $\phi_{m+1}(x)$ ve $\phi_{m+2}(x)$ fonksiyonları hariç tüm kübik B-spline fonksiyonlar $[0, 1]$ aralığı üzerinde sıfır olarak ifade edilir. Bu nedenle (3.51) ile verilen yaklaşım fonksiyonu, $[0, 1]$ bölgesinde δ_{m-1} , δ_m , δ_{m+1} , δ_{m+2} eleman parametreleri ve ϕ_{m-1} , ϕ_m , ϕ_{m+1} , ϕ_{m+2} şekil fonksiyonları cinsinden aşağıdaki gibi yazılır:

$$U_N(\eta, t) = \sum_{j=m-1}^{m+2} \delta_j \phi_j.\tag{3.53}$$

(3.52) ile verilen kübik B-spline fonksiyonlar ve (3.53) ile verilen yaklaşık çözüm kullanılarak, U ve onun η ' ya göre U' , U'' türevleri $\eta = 0$ noktasında δ_m parametrelerine göre aşağıdaki formda yazılabilir:

$$\begin{aligned}U_m &= \delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1}, \\ U'_m &= 3(-\delta_{m-1} + \delta_{m+1}), \\ U''_m &= 6(\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1}).\end{aligned}\tag{3.54}$$

Burada ' ve '' , η değişkenine göre birinci ve ikinci türevi sembolize etmektedir. Galerkin yaklaşımı, $W(x)$ ağırlık fonksiyonu ile beraber (3.47) ile verilen probleme uygulanarak, (3.47) ile verilen model denklemin aşağıdaki gibi zayıf formu elde edilir:

$$\int_a^b W(U_t + \varepsilon U^p U_x - \mu U_{xxt}) dx = 0.\tag{3.55}$$

$x \rightarrow \eta$ değişken değişimi (3.55) ile verilen integral denkleminde uygulanırsa

$$\int_0^1 W \left(U_t + \frac{\varepsilon}{h} \hat{U}^p U_\eta - \frac{\mu}{h^2} U_{\eta\eta t} \right) d\eta = 0\tag{3.56}$$

elde edilir. Burada \dot{U} , integrali basitleştirmek için bir eleman üzerinde sabit olarak alınmıştır. (3.56) ile verilen denkleme birkez kısmi integrasyon uygulanarak aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\int_0^1 [W(U_t + \lambda U_\eta) + \beta W_\eta U_{\eta t}] d\eta = \beta W U_{\eta t} \Big|_0^1. \quad (3.57)$$

Burada $\lambda = \frac{\varepsilon \dot{U}^p}{h}$ ve $\beta = \frac{\mu}{h^2}$ dir.

Ağırlık fonksiyonu $W(x)$ yerine, (3.52) ile verilen kübik B-spline yaklaşım fonksiyonu alınır ve (3.53) ile verilen yaklaşık çözüm, (3.57) ile verilen denklem de yerine yazılırsa,

$$\sum_{j=m-1}^{m+2} [(\int_0^1 \phi_i \phi_j + \beta \phi_i' \phi_j') d\eta - \beta \phi_i \phi_j' \Big|_0^1] \delta_j^e + \sum_{j=m-1}^{m+2} (\lambda \int_0^1 \phi_i \phi_j' d\eta) \delta_j^e = 0 \quad (3.58)$$

bulunur. Burada $\delta^e = (\delta_{m-1}, \delta_m, \delta_{m+1}, \delta_{m+2})^T$ ve “.” t ye göre türevi ifade etmektedir. Bu son denklem matris formunda aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$[A^e + \beta(B^e - C^e)] \dot{\delta}^e + \lambda D^e \delta^e = 0. \quad (3.59)$$

(3.59) ile verilen matris denkleminin elaman matrisleri de aşağıdaki gibidir:

$$A_{ij}^e = \int_0^1 \phi_i \phi_j d\eta = \frac{1}{140} \begin{bmatrix} 20 & 129 & 60 & 1 \\ 129 & 1188 & 933 & 60 \\ 60 & 933 & 1188 & 129 \\ 1 & 60 & 129 & 20 \end{bmatrix},$$

$$B_{ij}^e = \int_0^1 \phi_i' \phi_j' d\eta = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 18 & 21 & -36 & -3 \\ 21 & 102 & -87 & -36 \\ -36 & -87 & 102 & 21 \\ -3 & -36 & 21 & 18 \end{bmatrix},$$

$$C_{ij}^e = \phi_i \phi_j' \Big|_0^1 = 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D_{ij}^e = \int_0^1 \phi_i \phi_j' d\eta = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} -10 & -9 & 18 & 1 \\ -71 & -150 & 183 & 38 \\ -38 & -183 & 150 & 71 \\ -1 & -18 & 9 & 10 \end{bmatrix}.$$

Altındisler $i, j = m-1, m, m+1, m+2$ dir. Buradaki λ katsayısındaki \dot{U}^p terimi için iki nokta lineerleştirme tekniği kullanılarak,

$$\lambda \cong \frac{\varepsilon}{h} \left[\frac{U_m^n + U_{m+1}^n}{2} \right]^p = \frac{\varepsilon}{2^p h} (\delta_{m-1}^n + 5\delta_m^n + 5\delta_{m+1}^n + \delta_{m+2}^n)^p$$

olarak yazılır. Tüm elemanların katkısını beraber düşünerek (3.59) ile verilen matris denkleminin aşağıdaki formu elde edilir:

$$[A + \beta(B - C)]\dot{\delta} + \lambda D \delta = 0. \quad (3.60)$$

Burada $\delta = (\delta_{-1}, \delta_0, \dots, \delta_N, \delta_{N+1})^T$ düğüm noktasındaki parametrelerdir. A, B, C ve λD septa-diagonal matrislerdir ve bu matrislerin m . satırları,

$$A = \frac{1}{140} (1, 120, 1191, 2416, 1191, 120, 1), \quad B = \frac{1}{10} (-3, -72, -45, 240, -45, -72, -3),$$

$$C = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), \quad D = \frac{1}{20} (-1, -56, -245, 0, 245, 56, 1),$$

$$\lambda D = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} -\lambda_1, -18\lambda_1 - 38\lambda_2, 9\lambda_1 - 183\lambda_2 - 71\lambda_3, 10\lambda_1 + 150\lambda_2 - 150\lambda_3 - 10\lambda_4, \\ 71\lambda_2 + 183\lambda_3 - 9\lambda_4, 38\lambda_3 + 18\lambda_4, \lambda_4 \end{pmatrix}$$

şeklinde dir. Burada,

$$\lambda_1 = \frac{\varepsilon}{2^p h} (\delta_{m-2} + 5\delta_{m-1} + 5\delta_m + \delta_{m+1})^p,$$

$$\lambda_2 = \frac{\varepsilon}{2^p h} (\delta_{m-1} + 5\delta_m + 5\delta_{m+1} + \delta_{m+2})^p,$$

$$\lambda_3 = \frac{\varepsilon}{2^p h} (\delta_m + 5\delta_{m+1} + 5\delta_{m+2} + \delta_{m+3})^p,$$

$$\lambda_4 = \frac{\varepsilon}{2^p h} (\delta_{m+1} + 5\delta_{m+2} + 5\delta_{m+3} + \delta_{m+4})^p.$$

(3.60) ile verilen denkleme, $\dot{\delta} = \frac{\delta^{n+1} - \delta^n}{\Delta t}$ ileri sonlu fark ve $\delta = \frac{1}{2}(\delta^n + \delta^{n+1})$ Crank-Nicolson yaklaşımları uygulanırsa, aşağıdaki septa-diagonal matris sistemine ulaşılır:

$$[A + \beta(B - C) + \frac{\lambda \Delta t}{2} D] \delta^{n+1} = [A + \beta(B - C) - \frac{\lambda \Delta t}{2} D] \delta^n. \quad (3.61)$$

Bu aşamadan sonra (3.49) ile verilen sınır şartları matris denkleminde (cebirsel denklem sistemine) dahil edilerek, $(N+3) \times (N+3)$ boyutlu matris sistemi (3.61), $(N+1) \times (N+1)$ boyutlu matris sistemine dönüşür. Bu işlem aşaması sınır değerlerinin işleme basit bir şekilde dahil edilmesi olarak bilinir ve başlangıç iterasyonun hesaplanması kısmında açıklanmıştır. A, B, C ve D matrislerinin m . satırları 7 elemanlıdır, bu yüzden (3.61) ile verilen cebirsel denklem sistemi 7 sütun elemanlı diagonal matrislerden oluşur (septa-diagonal matris olarak adlandırılır). Septa-diagonal matris sistemi de Thomas algoritması ile aşağıda alt bölüm

3.3.1'de açıklandığı gibi kolaylıkla çözülür. Bu çözüm prosedüründe lineer olmamanın üstesinden gelebilmek için her bir zaman adımında

$$(\delta_m^*)^{n+1} = \delta_m^n + \frac{1}{2}(\delta_m^{n+1} - \delta_m^n)$$

formülü ile üç veya dört defa iç iterasyon uygulanarak çözüm iyileştirilir. Tüm bu işlemlerden sonra (3.61) ile verilen matris denklem sisteminin basit bir sonucu olan iki zaman adımı n ve $n+1$ arasındaki tekrarlama bağıntısı,

$$\begin{aligned} \gamma_1 \delta_{m-3}^{n+1} + \gamma_2 \delta_{m-2}^{n+1} + \gamma_3 \delta_{m-1}^{n+1} + \gamma_4 \delta_m^{n+1} + \gamma_5 \delta_{m+1}^{n+1} + \gamma_6 \delta_{m+2}^{n+1} + \gamma_7 \delta_{m+3}^{n+1} = \\ \gamma_7 \delta_{m-3}^n + \gamma_6 \delta_{m-2}^n + \gamma_5 \delta_{m-1}^n + \gamma_4 \delta_m^n + \gamma_3 \delta_{m+1}^n + \gamma_2 \delta_{m+2}^n + \gamma_1 \delta_{m+3}^n \end{aligned} \quad (3.62)$$

olarak yazılır. Burada,

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{1}{140} - \frac{3\beta}{10} - \frac{\lambda \Delta t}{40}, & \gamma_2 &= \frac{120}{140} - \frac{72\beta}{10} - \frac{56\lambda \Delta t}{40}, \\ \gamma_3 &= \frac{1191}{140} - \frac{45\beta}{10} - \frac{245\lambda \Delta t}{40}, & \gamma_4 &= \frac{2416}{140} + \frac{240\beta}{10}, \\ \gamma_5 &= \frac{1191}{140} - \frac{45\beta}{10} + \frac{245\lambda \Delta t}{40}, & \gamma_6 &= \frac{120}{140} - \frac{72\beta}{10} + \frac{56\lambda \Delta t}{40}, \\ \gamma_7 &= \frac{1}{140} - \frac{3\beta}{10} + \frac{\lambda \Delta t}{40}. \end{aligned}$$

Başlangıç iterasyonu

(3.61) ile verilen cebirsel denklem sisteminde iterasyonu başlatabilmek için d^0 başlangıç değeri (3.63) ile verilen başlangıç şartları kullanılarak hesaplanır. Yaklaşık çözümün başlangıç formu,

$$U_N(x, 0) = \sum_{m=-1}^{N+1} \phi_m(x) \delta_m^0(t)$$

olarak yazılabilir. Başlangıç şartı ve sınır noktalarındaki türevler ise

$$\begin{aligned} U_N(x, 0) = U(x_m, 0) = f(x); \quad m = 0, 1, 2, \dots, N \\ (U_N)_x(a, 0) = 0, \quad (U_N)_x(b, 0) = 0 \end{aligned} \quad (3.63)$$

olarak alınır. Başlangıç şartı ve sınır noktalarındaki türevler δ_m parametrelerine göre

zaman adımında bir önceki parametreden bulunan değerler kullanılarak (iterasyon yapılarak) GEW denkleminin sayısal çözümü bulunmuş olur.

3.3.1 Thomas algoritması ile septa-diagonal matris sisteminin çözümü

Septa-diagonal sistem aşağıdaki formda ifade edilebilir:

$$a_i \delta_{i-3} + b_i \delta_{i-2} + c_i \delta_{i-1} + d_i \delta_i + e_i \delta_{i+1} + f_i \delta_{i+2} + g_i \delta_{i+3} = h_i, \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

Burada $a_0 = b_0 = c_0 = a_1 = b_1 = a_2 = g_{N-2} = g_{N-1} = f_{N-1} = g_N = f_N = e_N = 0$ alınmıştır.

Öncelikle, parametreler aşağıdaki gibi seçilir:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= b_0, & \beta_0 &= c_0, & \mu_0 &= d_0, & \zeta_0 &= \frac{e_0}{\mu_0}, & \lambda_0 &= \frac{f_0}{\mu_0}, & \eta_0 &= \frac{g_0}{\mu_0}, & \gamma_0 &= \frac{h_0}{\mu_0}, \\ \alpha_1 &= b_1, & \beta_1 &= c_1, & \mu_1 &= d_1 - \beta_1 \zeta_0, & \zeta_1 &= \frac{e_1 - \beta_1 \lambda_0}{\mu_1}, & \lambda_1 &= \frac{f_1 - \beta_1 \gamma_0}{\mu_1}, \\ \eta_1 &= \frac{g_1}{\mu_1}, & \gamma_1 &= \frac{h_1 - \beta_1 \gamma_0}{\mu_1} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= b_2, & \beta_2 &= c_2 - \alpha_2 \zeta_0, & \mu_2 &= d_2 - \lambda_0 \alpha_2 - \beta_2 \zeta_1, & \zeta_2 &= \frac{e_2 - \eta_0 \alpha_2 - \beta_2 \lambda_1}{\mu_2}, \\ \lambda_2 &= \frac{f_2 - \beta_2 \eta_1}{\mu_2}, & \eta_2 &= \frac{g_2}{\mu_2}, & \gamma_2 &= \frac{h_2 - \alpha_2 \gamma_0 - \beta_2 \gamma_1}{\mu_2}. \end{aligned}$$

Daha sonra, aşağıdaki parametreler bulunur:

$$\begin{aligned} \alpha_i &= b_i - a_i \zeta_{i-3}, & \beta_i &= c_i - a_i \lambda_{i-3} - \alpha_i \zeta_{i-2}, & \mu_i &= d_i - a_i \eta_{i-3} - \lambda_{i-2} \alpha_i - \beta_i \zeta_{i-1}, \\ \zeta_i &= \frac{e_i - \eta_{i-2} \alpha_i - \beta_i \lambda_{i-1}}{\mu_i}, & \lambda_i &= \frac{f_i - \beta_i \eta_{i-1}}{\mu_i}, & \eta_i &= \frac{g_i}{\mu_i}, \\ \gamma_i &= \frac{h_i - \beta_i \gamma_{i-1} - \alpha_i \gamma_{i-2} - a_i \gamma_{i-3}}{\mu_i}, & i &= 3, 4, \dots, N. \end{aligned}$$

Bu iki adımdan sonra çözüm aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\delta_{N-2} = \gamma_{N-2} - \lambda_{N-2} \delta_N - \eta_{N-2} \delta_{N-1}, \quad \delta_{N-1} = \gamma_{N-1} - \eta_{N-1} \delta_N, \quad \delta_N = \gamma_N,$$

$$\delta_i = \gamma_i - \zeta_i \delta_{i+1} - \lambda_i \delta_{i+2} - \eta_i \delta_{i+3}, \quad i = 0, 1, \dots, N-4, N-3.$$

3.3.2 Lineer kararlılık analizi

Sayısal algoritmanın lineer kararlılık analizi için Fourier yöntemi kullanıldı. GRLW denkleminin $U^p U_x$ lineer olmayan terimindeki U^p teriminin bölgesel olarak sabit olduğu varsayılarak işleme başlanır. k mod numarası ve h eleman büyüklüğü olmak üzere,

$$\delta_m^n = g^n e^{imkh} \quad (i = \sqrt{-1})$$

ile verilen Fourier mod (3.62) ile verilen denklem de yerine yazılırsa, bu işlem aşağıdaki eşitliği üretir:

$$\begin{aligned}
& \gamma_1 g^{n+1} e^{i(m-3)kh} + \gamma_2 g^{n+1} e^{i(m-2)kh} + \gamma_3 g^{n+1} e^{i(m-1)kh} + \gamma_4 g^{n+1} e^{i(m)kh} \\
& + \gamma_5 g^{n+1} e^{i(m+1)kh} + \gamma_6 g^{n+1} e^{i(m+2)kh} + \gamma_7 g^{n+1} e^{i(m+3)kh} = \\
& \gamma_7 g^n e^{i(m-3)kh} + \gamma_6 g^n e^{i(m-2)kh} + \gamma_5 g^n e^{i(m-1)kh} + \gamma_4 g^n e^{i(m)kh} \\
& + \gamma_3 g^n e^{i(m+1)kh} + \gamma_2 g^n e^{i(m+2)kh} + \gamma_1 g^n e^{i(m+3)kh}.
\end{aligned} \tag{3.65}$$

Şimdi, $e^{ikh} = \cos(kh) + i \sin(kh)$ olarak ifade edilen Euler formülü (3.65) ile verilen denklem de kullanılır ve gerekli sadeleştirme işlemleri yapılırsa,

$$g = \frac{a - ib}{a + ib}$$

büyüme faktörü elde edilir. Burada,

$$a = \gamma_4 + (\gamma_5 + \gamma_3) \cos[hk] + (\gamma_6 + \gamma_2) \cos[2hk] + (\gamma_7 + \gamma_1) \cos[3hk],$$

$$b = (\gamma_5 - \gamma_3) \sin[hk] + (\gamma_6 - \gamma_2) \sin[2hk] + (\gamma_7 - \gamma_1) \sin[3hk].$$

$|g|$ nin modülü 1 dir. Bu da lineerleştirilmiş algoritmanın şartsız kararlı olduğunu gösterir.

3.3.3 Sayısal örnekler ve sonuçlar

Bu bölümde, iki nokta lineerleştirme tekniği uygulanarak Galerkin sonlu elemanlar yöntemi tek solitary dalga, iki ve üç solitary dalganın etkileşimi problemlerini içeren örnekler üzerinde çalışılmıştır. Bu üç örnek başlangıç şartının farklı değerleri kullanılarak oluşturulmuştur. L_2 ve L_∞ hata normları, sunulan sayısal yöntemin etkinliğini ve doğruluğunu kanıtlamak için (3.67) ile verilen tam solitary dalga çözüm ve

$$L_2 = \|U^{tam} - U_N\|_2 \simeq \sqrt{h \sum_{j=0}^N |U_j^{tam} - (U_N)_j|^2},$$

$$L_\infty = \|U^{tam} - U_N\|_\infty \simeq \max_j |U_j^{tam} - (U_N)_j|$$

hata norm eşitlikleri kullanılarak hesaplanmıştır. Buna ilaveten, sayısal yaklaşımın kütle, momentum ve enerji ile ilgili özellikleri koruduğunu göstermek için,

$$I_1 = \int_a^b U dx, \quad I_2 = \int_a^b [U^2 + \mu U_x^2] dx, \quad I_3 = \int_a^b U^{p+2} dx \tag{3.66}$$

korunum sabitlerindeki değişim hesaplanmıştır. Evans ve Raslan [22] tarafından sunulan GEW dekleminin tam solitary dalga çözümü aşağıdaki forma sahiptir:

$$U(x, t) = \sqrt{\frac{c(p+1)(p+2)}{2\varepsilon}} \sec h^2 \left[\frac{p}{2\sqrt{\mu}} (x - ct - x_0) \right]. \tag{3.67}$$

Burada $gen. = \sqrt[p]{\frac{c(p+1)(p+2)}{2\varepsilon}}$ dalganın genliği, c pozitif x yönünde hareket eden dalganın sabit hızı ve x_0 keyfi sabittir.

3.3.3.1 Tek solitary dalganın hareketi

Bu problem için başlangıç şartı

$$U(x, 0) = \sqrt[p]{\frac{c(p+1)(p+2)}{2\varepsilon}} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{p}{2\sqrt{\mu}}(x - x_0) \right],$$

olarak alındı. [5, 22, 23] çalışmaları ile uyumlu olması için p , c ve $gen. = \sqrt[p]{\frac{c(p+1)(p+2)}{2\varepsilon}}$ parametrelerinin farklı değerleri, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.2$, $\varepsilon = 3$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$, $0 \leq x \leq 80$ parametre değerleri kullanılarak beş parametre kümesi oluşturulmuştur. Sayısal algoritma $t = 0$ dan $t = 20$ anına kadar çalıştırılmıştır.

İlk durumda, $p = 2$, $c = 1/32$ ve $c = 1/2$ büyüklükleri seçildi Bu parametrelere göre solitary dalgalar sırasıyla, $gen. = 0.25$ ve $gen. = 1$ genliklerine sahip olur. Hesaplanan korunum sabitlerinin ve hata normlarının sayısal değerleri Tablo 3.23 ve Tablo 3.24'de sunulmuştur. Tablo 3.23'e göre I_1, I_2, I_3 korunum sabitlerindeki değişim 0.3×10^{-6} dan daha küçüktür. L_2 ve L_∞ hata norm değerleri ise sırasıyla, 7.9×10^{-5} ve 4.5×10^{-5} değerlerinden daha küçük hesaplanmıştır. Tablo 3.24'ye göre ise I_1, I_2, I_3 korunum sabitlerinin başlangıç durumuna göre değişim oranları, sırasıyla %2, %3 ve %3 değerlerinden daha az hesaplanmıştır. L_2 ve L_∞ hata normları sırasıyla, 0.039 ve 0.027 den küçük kalmaktadır.

İkinci olarak, $p = 3$, $c = 0.001$ ve $c = 0.3$ değerleri için solitary dalgalar $gen. = 0.15$ ve $gen. = 1$ genliklerini üretir. Hesaplanan korunum sabitlerinin ve hata normlarının sayısal değerleri Tablo 3.25 ve Tablo 3.26'de verilmiştir. Tablo 3.25'den görüldüğü gibi hesaplama süresince korunum sabitleri hemen hemen değişmeden kalmaktadır. L_2 ve L_∞ hata norm değerleri ise sırasıyla, 0.29×10^{-5} ve 0.19×10^{-5} değerlerinden daha küçük bulunmuştur. Tablo 3.26 incelendiğinde ise I_1, I_2, I_3 korunum sabitlerinin başlangıç durumuna göre değişim oranları, sırasıyla %2, %3 ve %3 değerlerinden daha küçük hesaplanmıştır. L_2 ve L_∞ hata normları sırasıyla, 0.017 ve 0.014 den daha küçük bulunmuştur.

Son olarak, $p = 4$ ve $c = 0.2$ parametre değeri alındı. Bu parametreye göre, solitary dalga $gen. = 1$ yüksekliğine sahip olur. Korunum sabitlerinin ve hata normlarının hesaplanan değerleri Tablo 3.27'de gösterilmiştir. Tablo 3.27; I_1, I_2, I_3 korunum sabitlerindeki değişim oranının %2 den daha küçük olduğunu ifade etmektedir. Diğer yandan, L_2 ve L_∞ hata norm-

larının sayısal değeride 0.0090 ve 0.0083 den daha küçük hesaplanmıştır.

Tek solitary dalganın $t = 0, 10, 20$ zamanlarındaki hareketleri Şekil 3.12 ve Şekil 3.13'de çizilmiştir. Bu şekillerden anlaşıldığı gibi sayısal yöntem ile elde edilen çözüm bir solitary dalga hareketi oluşturur. Bu solitary dalga, zaman ilerledikçe hemen hemen değişmeyen hızla, şekil ve yüksekliğini koruyarak sağa doğru hareket etmektedir.

Tablo 3.28'de elde edilen sayısal sonuçlarla daha önceki çalışmalarda bulunan sayısal sonuçlar karşılaştırılmıştır. Bu tabloya bakıldığında kollokasyon yöntemi ile ve Galerkin yöntemi ile elde edilen korunum sabitleri birbirine çok yakındır ve daha önceki çalışmalarla oldukça uyumludur. Hata norm değerleri değerlendirildiğinde ise daha önceki bölümlerde kollokasyon yöntemi ile elde edilen değerler daha küçük bulunmuştur. L_∞ hata normunun Galerkin yöntemi ile elde edilen sayısal değeri $p = 2$ için 0.45×10^{-4} ; $p = 3$ için 0.19×10^{-5} ; $p = 4$ için 8.22×10^{-3} değerlerinden daha küçük hesaplanmıştır. Bu değerlendirmelere göre sayısal algoritmanın verimli bir yöntem olduğu söylenebilir.

Tablo 3.23 Tek solitary dalganın $p = 2$, $gen. = 0.25$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.2$ ve $x \in [0, 80]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri

Zaman	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^5$	$L_\infty \times 10^5$
0	0.7853966	0.1666661	0.0052083	0.00000000	0.00000000
5	0.7853966	0.1666662	0.0052083	2.00511050	1.10880256
10	0.7853967	0.1666662	0.0052083	3.99064595	2.22513057
15	0.7853967	0.1666662	0.0052083	5.93886201	3.34204308
20	0.7853968	0.1666663	0.0052083	7.83378959	4.44850332

Tablo 3.24 Tek solitary dalganın $p = 2$, $gen. = 1$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.2$ ve $x \in [0, 80]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri

Zaman	I_1	I_2	I_3	L_2	L_∞
0	3.1415863	2.6666583	1.3333283	0.00000000	0.00000000
5	3.1458905	2.6724969	1.3391718	0.01650411	0.01116168
10	3.1502060	2.6783543	1.3450481	0.02812323	0.01888483
15	3.1545617	2.6842736	1.3509996	0.03526213	0.02393891
20	3.1589605	2.6902580	1.3570299	0.03803037	0.02629007

Tablo 3.25 Tek solitary dalganın $p = 3$, $gen. = 0.15$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.2$ ve $x \in [0, 80]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri

Zaman	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^7$	$L_\infty \times 10^7$
0	0.4189154	0.0549805	0.0000733	0.00000000	0.00000000
5	0.4189154	0.0549805	0.0000733	7.06255100	4.57700375
10	0.4189154	0.0549805	0.0000733	14.12494884	9.16012912
15	0.4189154	0.0549805	0.0000733	21.18707557	13.74545441
20	0.4189154	0.0549805	0.0000733	28.24881328	18.32910252

Tablo 3.26 Tek solitary dalganın $p = 3$, $gen. = 1$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.2$ ve $x \in [0, 80]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri

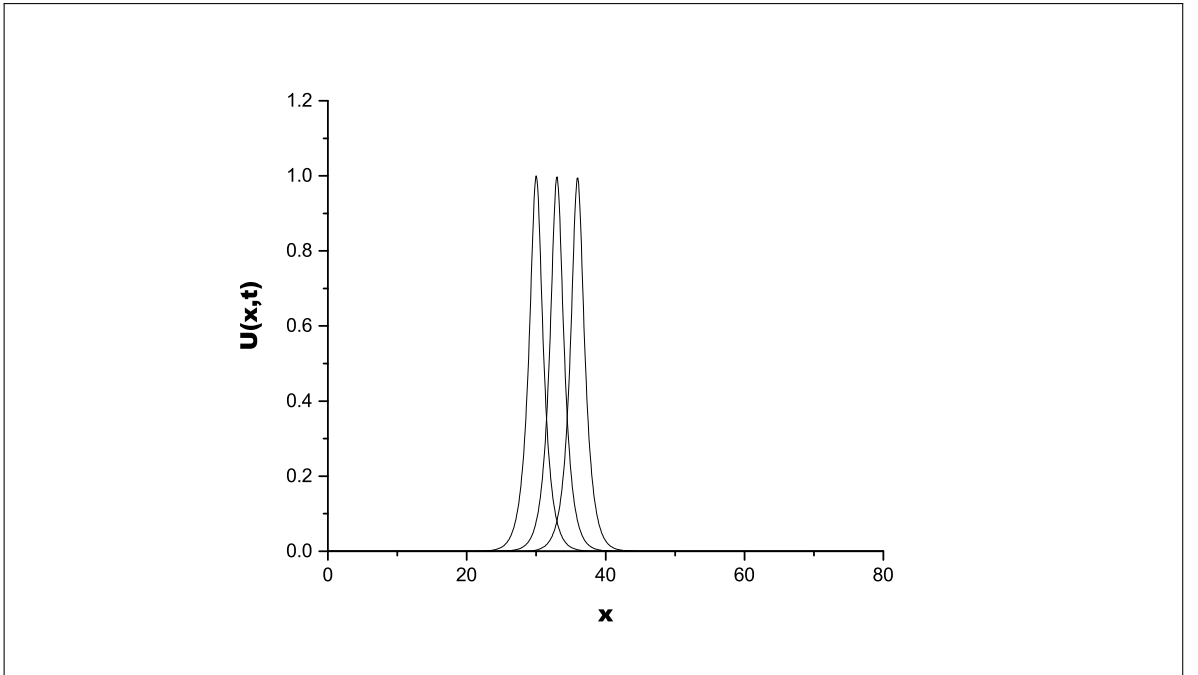
Zaman	I_1	I_2	I_3	L_2	L_∞
0	2.8043580	2.4639009	0.9855618	0.00000000	0.00000000
5	2.8079094	2.4691674	0.9908334	0.01048354	0.00825708
10	2.8114726	2.4744442	0.9961351	0.01657542	0.01277205
15	2.8150809	2.4797940	1.0015278	0.01850263	0.01460246
20	2.8187398	2.4852249	1.0070200	0.01655637	0.01370453

Tablo 3.27 Tek solitary dalganın $p = 4$, $gen. = 1$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.2$ ve $x \in [0, 80]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri

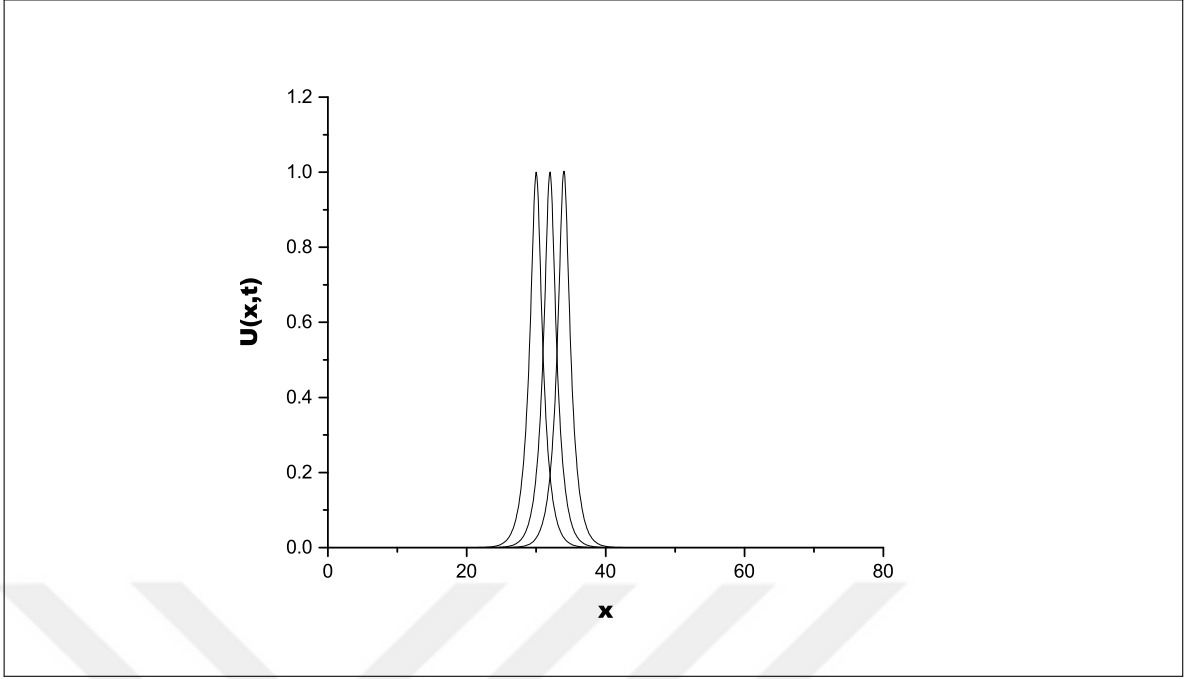
Zaman	I_1	I_2	I_3	L_2	L_∞
0	2.6220516	2.3561722	0.7853952	0.00000000	0.00000000
5	2.6247173	2.3603671	0.7895906	0.00691120	0.00632109
10	2.6273729	2.3645238	0.7937683	0.01055235	0.00914085
15	2.6300579	2.3687299	0.7980116	0.01104764	0.00976358
20	2.6327833	2.3730032	0.8023383	0.00890617	0.00821991

Tablo 3.28 Tek solitary dalganın $p = 2, 3, 4$; $h = 0.1$, $\Delta t = 0.2$, $t = 20$ ve $x \in [0, 80]$ için sayısal sonuçlarının karşılaştırılması

Yöntemler		$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	I_1	I_2	I_3
$p = 2$ $c = 1/32$	CubBSC [5]	0.19588	0.17443	0.78466	0.16643	0.00519
	QuadBSC [22]	0.15695	0.20214	0.78528	0.16658	0.00520
	QuadBSLG [15]	0.08100	0.04596			
	CubBSLG [19]	0.07833	0.04448			
	QuadBSPG [23]	0.00250	0.00275	0.78539	0.16666	0.00520
	QuarBSC [17]	0.00157	0.00104	0.78539	0.16666	0.00520
	SepBSC	0.00127	0.00068	0.78539	0.16666	0.00520
	QuinBSC	0.00135	0.00091	0.78539	0.16666	0.00520
	CubBSLG	0.07833	0.04448	0.78539	0.16666	0.00520
$p = 3$ $c = 0.001$	CubBSC [5]	0.514967	0.320605	0.65908	0.05938	0.000068
	QuadBSPG [23]	0.000064	0.000082	0.41891	0.05497	0.000073
	SepBSC	0.000006	0.000003	0.41891	0.05498	0.000073
	QuinBSC	0.000019	0.000023	0.41891	0.05498	0.000073
	CubBSLG	0.002824	0.001832	0.41891	0.05498	0.000073
$p = 4$ $c = 0.2$	QuadBSPG [23]	2.30499	1.88285	2.62206	2.35615	0.78534
	SepBSC	3.41485	2.49360	2.62192	2.35590	0.78511
	QuinBSC	3.39086	2.47031	2.62192	2.35593	0.78513
	CubBSLG	8.90617	8.21991	2.63278	2.37300	0.80233



Şekil 3.12 Tek solitary dalganın $p = 3$ ve $c = 0.3$, $x_0 = 30$, $x \in [0, 80]$ için $t = 0, 10, 20$ 'deki hareketi



Şekil 3.13 Tek solitary dalganın $p = 4$ ve $c = 0.2$, $x_0 = 30$, $x \in [0, 80]$ için $t = 0, 10, 20$ 'deki hareketi

3.3.3.2 İki solitary dalganın etkileşimi

İkinci problem olarak, aşağıdaki başlangıç koşulu kullanılmıştır:

$$U(x, 0) = \sum_{i=1}^2 \sqrt{\frac{c_i(p+1)(p+2)}{2\varepsilon}} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{p}{2\sqrt{\mu}}(x - x_i) \right]. \quad (3.68)$$

Bu başlangıç şartı $gen. = 1$ ve $gen. = 0.5$ genliklerine sahip aynı yönde hareket eden iki pozitif solitary dalga üretir. Burada c_i ve x_i , $i = 1, 2$ keyfi sabitlerdir.

İlk parametreler $p = 2$, $c_1 = 0.5$ ve $c_2 = 0.125$; ikinci parametreler $p = 3$, $c_1 = 0.3$ ve $c_2 = 0.0375$; üçüncü parametreler $p = 4$, $c_1 = 0.2$ ve $c_2 = 1/80$ alınarak üç farklı parametre kümesi oluşturulmuştur. Bilgisayar programı sırasıyla, $t = 60, 100$ ve 120 zamanına kadar çalıştırılmıştır. [5,22,23] çalışmaları ile uyumlu olması için diğer parametreler $h = 0.1$, $\Delta t = 0.025$, $\varepsilon = 3$, $\mu = 1$, $x_1 = 15, x_2 = 30, 0 \leq x \leq 80$ olarak düşünülmüştür.

Sayısal algoritmanın özellikleri koruduğunu kanıtlamak için I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitleri hesaplanarak Tablo 3.29, Tablo 3.30 ve Tablo 3.31'de sunulmuştur. Bu üç tabloya göre I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitlerinin başlangıç durumuna göre değişim oranları sırasıyla, %0.1, %0.5 ve %0.8 değerlerinden daha küçük bulunmuştur. Üstelik, hesaplanan korunum sabitleri [23] çalışması ile elde edilen sonuçlara yakındır .

İki solitary dalganın farklı zaman adımlarındaki hareketleri Şekil 3.14 ve Şekil 3.15’de gösterilmiştir. Bu şekillere göre, başlangıçta yüksekliği fazla olan dalga yüksekliği az olan dalganın gerisindedir. Zaman ilerledikçe yüksekliği fazla olan dalga diğer dalgayı yakalar ve üstüne biner. Yani iki dalga arasındaki etkileşim gerçekleşir. Daha sonra dalgalar ayrılmaya başlar. Belirli bir zaman sonra büyük genlikli dalga önde, küçük genlikli dalga arkada olarak başlangıç hız, şekil ve genliklerini koruyarak yollarına devam eder. Sonuç olarak, solitary dalgaların bu hareketine göre solitonlardır denilebilir.

Tablo 3.29 İki solitary dalganın etkileşiminin $p = 2$, $gen. = 1,0.5$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.025$ ve $x \in [0, 80]$ için korunum sabitleri

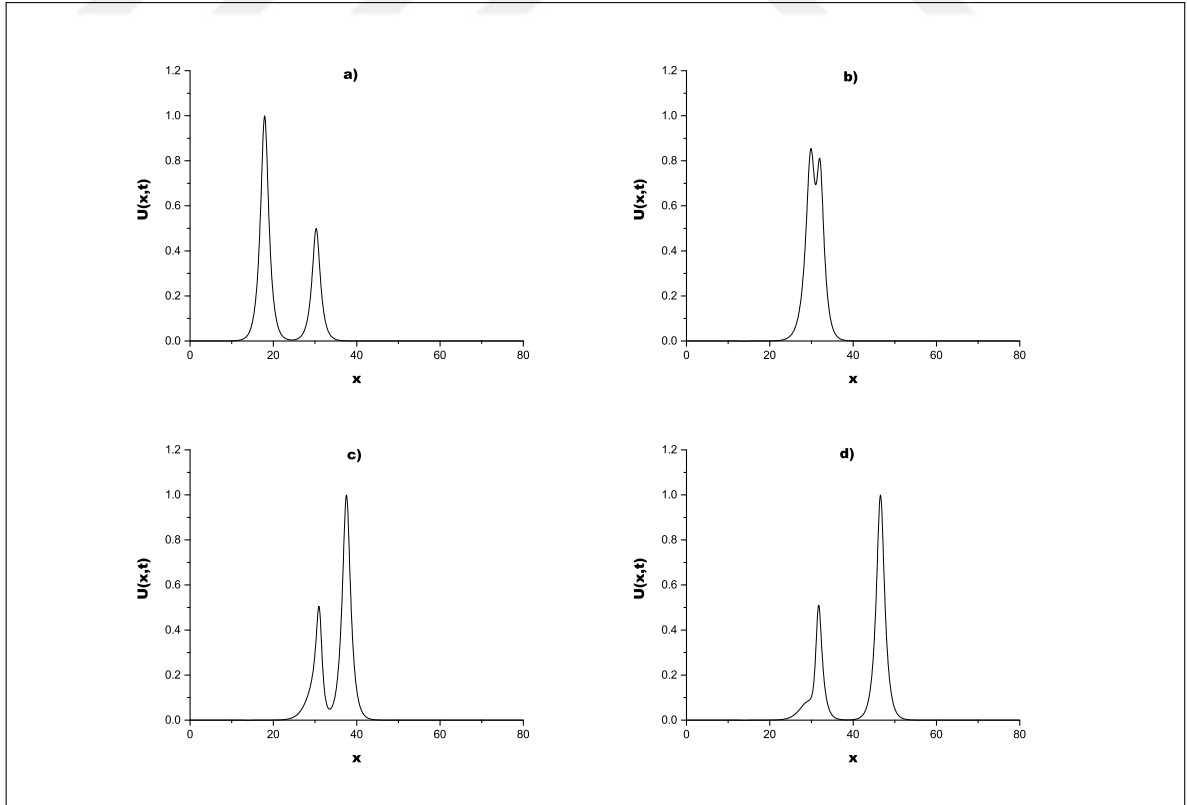
Zaman	I_1		I_2		I_3	
	Galerkin	Pet.-Gal. [23]	Galerkin	Pet.-Gal. [23]	Galerkin	Pet.-Gal. [23]
0	4.71237	4.71239	3.33332	3.33324	1.41666	1.14166
10	4.71236	4.71239	3.33331	3.33324	1.41665	1.14166
20	4.71235	4.71239	3.33332	3.33324	1.41666	1.14166
30	4.71260	4.71239	3.33416	3.33324	1.41758	1.14166
40	4.71234	4.71239	3.33345	3.33333	1.41699	1.14166
50	4.71210	4.71239	3.33290	3.33338	1.41652	1.14166
60	4.71213	4.71239	3.33296	3.33333	1.41651	1.14166

Tablo 3.30 İki solitary dalganın etkileşiminin $p = 3$, $gen. = 1,0.5$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.025$ ve $x \in [0, 80]$ için korunum sabitleri

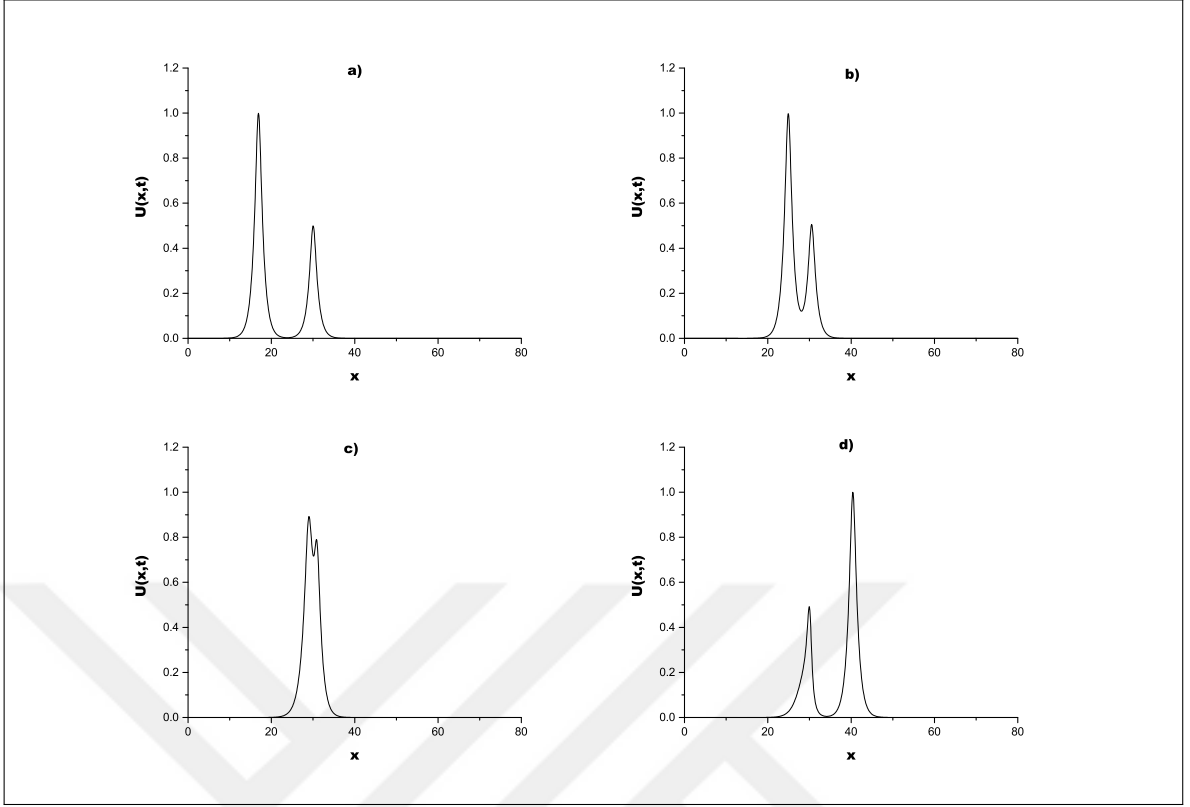
Zaman	I_1		I_2		I_3	
	Galerkin	Pet.-Gal. [23]	Galerkin	Pet.-Gal. [23]	Galerkin	Pet.-Gal. [23]
0	4.20653	4.20655	3.07987	3.97977	1.01636	1.01634
10	4.20653	4.20655	3.07989	2.07986	1.01637	1.01634
20	4.20652	4.20655	3.07988	3.07982	1.01635	1.01634
30	4.20653	4.20655	3.07991	3.07980	1.01638	1.01634
40	4.20677	4.20655	3.08050	3.07986	1.01698	1.01634
50	4.20793	4.20655	3.08362	3.07981	1.02059	1.01633
60	4.20616	4.20655	3.07947	3.07987	1.01654	1.01633
70	4.20558	4.20655	3.07863	3.07976	1.01629	1.01634
80	4.20509	4.20655	3.07800	3.07991	1.01620	1.01633
90	4.20490	4.20655	3.07777	3.07974	1.01616	1.01633
100	4.20503	4.20655	3.07797	3.07972	1.01616	1.01634

Tablo 3.31 İki solitary dalganın etkileşiminin $p = 4$, $gen. = 1,0.5$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.025$ ve $x \in [0, 80]$ için korunum sabitleri

Zaman	I_1		I_2		I_3	
	Galerkin	Pet.-Gal. [23]	Galerkin	Pet.-Gal. [23]	Galerkin	Pet.-Gal. [23]
0	3.93307	3.93309	2.94521	2.94512	0.79766	0.79761
10	3.93310	3.93309	2.94529	2.94518	0.79773	0.79761
20	3.93309	3.93309	2.94527	2.94517	0.79771	0.79761
30	3.93309	3.93309	2.94527	2.94510	0.79770	0.79761
40	3.93310	3.93309	2.94529	2.94515	0.79773	0.79761
50	3.93320	3.93309	2.94553	2.94504	0.79795	0.79761
60	3.93388	3.93309	2.94703	2.94505	0.79942	0.79762
70	3.93601	3.93307	2.95212	2.94510	0.80505	0.79763
80	3.93285	3.93309	2.94529	2.94506	0.79862	0.79761
90	3.93222	3.93309	2.94436	2.94520	0.79812	0.79761
100	3.93161	3.93309	2.94366	2.94508	0.79805	0.79761
110	3.93095	3.93309	2.94291	2.94517	0.79799	0.79761
120	3.93026	3.93308	2.94212	2.94511	0.79794	0.79761



Şekil 3.14 İki solitary dalganın $p = 3$; a) $t = 10$, b) $t = 50$, c) $t = 70$, d) $t = 100$ 'deki hareketi



Şekil 3.15 İki solitary dalganın $p = 4$; a) $t = 10$, b) $t = 50$, c) $t = 70$, d) $t = 100$ 'deki hareketi

3.3.3.3 Üç solitary dalganın etkileşimi

Son problemi için (3.47) problemi,

$$U(x, 0) = \sum_{i=1}^3 \sqrt[p]{\frac{c_i(p+1)(p+2)}{2\varepsilon} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{p}{2\sqrt{\mu}}(x - x_i) \right]} \quad (3.69)$$

şeklinde verilen başlangıç şartı ile beraber ele alındı. Burada c_i ve x_i , $i = 1, 2, 3$ keyfi sabitlerdir. Bu başlangıç şartına göre farklı genliklere sahip aynı yönde hareket eden üç adet pozitif solitary dalga oluşur.

İlk parametreler $p = 2$, $c_1 = 1$, $c_2 = 0.5$ ve $c_3 = 0.125$; ikinci parametreler $p = 3$, $c_1 = 0.5$, $c_2 = 0.3$ ve $c_3 = 0.0375$; üçüncü parametreler $p = 4$, $c_1 = 0.5$, $c_2 = 0.2$ ve $c_3 = 1/80$ alınarak üç farklı parametre kümesi oluşturulmuştur. Bu parametrelere göre sırasıyla, $p = 2$ için $gen. = 1.41$, $gen. = 1$, $gen. = 0.5$; $p = 3$ için $gen. = 1.19$, $gen. = 1$, $gen. = 0.5$; $p = 4$ için $gen. = 1.26$, $gen. = 1$, $gen. = 0.5$ genliklerine sahip üç solitary dalga oluşur. Bilgisayar hesaplaması sırasıyla, $t = 60$, 100 ve 120 zamanına kadar yapılmıştır. Diğer parametreler $h = 0.1$, $\Delta t = 0.025$, $\varepsilon = 3$, $\mu = 1$, $x_1 = 5$, $x_2 = 15$, $x_3 = 30$, $0 \leq x \leq 80$ olarak alınmıştır.

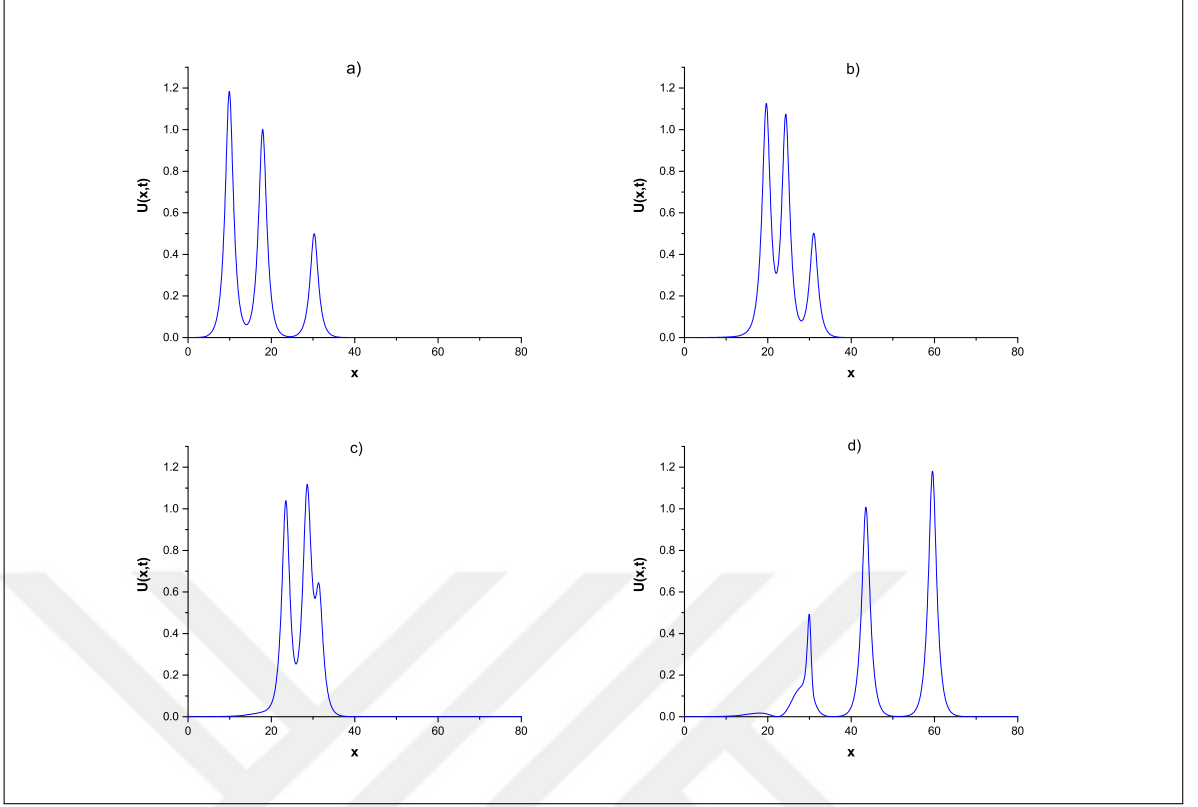
Sayısal yöntemin performansını göstermek için I_1 , I_2 ve I_3 ile verilen korunum sabitleri

hesaplanarak Tablo 3.32’da gösterilmiştir. Bu tabloda görüldüğü gibi I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitlerinin başlangıç durumuna göre değişim oranları sırasıyla, $p = 2$ için %2, %0.5 ve %0.9; $p = 3$ için %2, %0.9 ve %0.4; $p = 4$ için %2, %2 ve %3 değerlerinden daha küçük hesaplanmıştır.

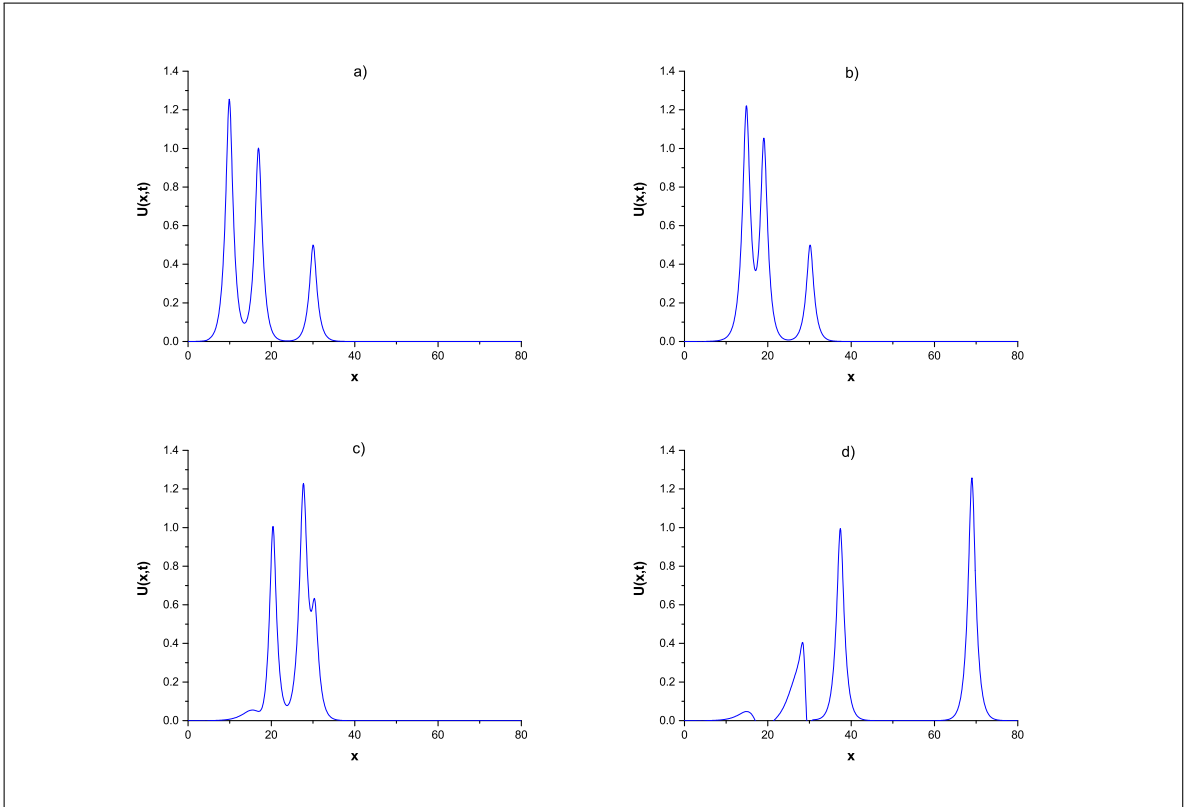
Üç solitary dalganın zaman ilerledikçe hareketleri Şekil 3.16 ve Şekil 3.17’de grafik çizilerek gösterilmiştir. Bu grafiklere göre, üç solitary başlangıçta $x_1 = 5$, $x_2 = 15$ ve $x_3 = 30$ noktalarına konumlandırılmıştır. Büyük genliğe sahip dalganın hızı da büyüktür. Bu yüzden en gerideki dalga, önce ikinci dalgayı yakalar ve etkileşim gerçekleşir. Daha sonra birinci dalgayı yakalar. Bu aşamada ikinci dalganın birinci dalga ile etkileşimi gerçekleşir. Yani üç dalga birbiri ile çarpışır. Son olarak dalgalar ayrılır ve en büyük genlikli dalga en önde, en küçük genlikli dalga en arkada yolarına devam eder. Görüldüğü gibi üç solitary dalga çarpışmadan sonra başlangıç genlik, hız ve şekillerini koruyarak ilerlemeye devam eder. Bu sonuca göre iki solitary dalganın etkileşiminde de olduğu gibi, bu hareket solitary dalgaların solitonlar olduğu sonucunu kuvvetlendirmektedir.

Tablo 3.32 Üç solitary dalganın etkileşiminin $p = 2, 3, 4$; $h = 0.1$, $\Delta t = 0.025$ ve $x \in [0, 80]$ için korunum sabitleri

Zaman	$p = 2$			$p = 3$			$p = 4$		
	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
0	9.13523	8.66728	6.75308	7.51814	6.54380	3.32686	7.21754	6.67095	3.90382
10	9.15501	8.66697	6.75198	7.53123	6.54356	3.32614	7.22965	6.67025	3.90161
20	9.15467	8.66620	6.75085	7.53134	6.54358	3.32630	7.23002	6.67143	3.90599
30	9.15444	8.66571	6.74918	7.53134	6.54380	3.32718	7.22808	6.66689	3.89879
40	9.15386	8.66470	6.74804	7.53214	6.54619	3.33083	7.22947	6.67099	3.90801
50	9.15311	8.66298	6.74559	7.53168	6.54490	3.32784	7.22775	6.66653	3.89572
60	9.15283	8.66267	6.74422	7.52943	6.54002	3.32441	7.22768	6.66705	3.89508
70				7.52914	6.54043	3.32484	7.22855	6.66985	3.89691
80				7.52774	6.53879	3.32440	7.22309	6.65880	3.88825
90				7.52618	6.53688	3.32393	7.22361	6.66097	3.88790
100				7.52481	6.53512	3.32347	7.22284	6.65988	3.88568
110							7.22186	6.65849	3.88324
120							7.22075	6.65705	3.88081



Şekil 3.16 Üç solitary dalganın $p = 3$; a) $t = 10$, b) $t = 30$, c) $t = 40$, d) $t = 100$ 'deki hareketi



Şekil 3.17 Üç solitary dalganın $p = 4$; a) $t = 10$, b) $t = 20$, c) $t = 40$, d) $t = 120$ 'deki hareketi

4. BÖLÜM

GENELLEŞTİRİLMİŞ DÜZENLENMİŞ UZUN DALGA (GRLW) DENKLEMİNİN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde GRLW denkleminin kollokasyon ve Galerkin sonlu elemanlar yöntemi ile sayısal çözümleri elde edilmiştir. Yaklaşık çözüm kübik, kuintik ve septik B-spline şekil fonksiyonları kullanılarak aranmıştır. Sayısal yöntemin lineer olarak kararlı olup olmadığını belirlemek için Von Neumann tekniği kullanılmıştır. Lineerleştirme tekniği olarak Bölüm 2 de açıkladığımız lineerleştirme tekniklerinden normal, iki nokta ve Rubin-Graves lineerleştirme teknikleri uygulanmıştır. Beş farklı lineerleştirme tekniği, yöntemlerin Fortran programı ile sayısal yöntemin uygulama kısmında kullanılmıştır. Fakat bu çalışmada sadece kullanılan yönteme göre en iyi sayısal çözümü veren lineerleştirme tekniği sunulmuştur. Sonlu elemanlar yaklaşımı, tek solitary dalga, iki solitary dalganın etkileşimi, Maxwellian başlangıç şartı ile dalganın oluşumu ve ardışık dalgaların gelişimini içeren örnekler üzerinde çalışılmıştır. Bu örnekler için L_2 ve L_∞ hata normları, kütle, momentum ve enerji ile ilgili I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitleri (hareket sabitleri) hesaplanmıştır.

4.1 GRLW Denkleminin Septik B-spline Kollokasyon Yöntemi ile Sayısal Çözümü

GRLW denklemi,

$$U_t + U_x + p(p+1)U^p U_x - \mu U_{xxt} = 0 \quad (4.1)$$

şeklinde ifade edilir. Burada fiziksel sınır şartları $x \rightarrow \pm\infty$ iken $U \rightarrow 0$, alt indis t ve x zaman ve boyutsal türevi ifade eder, p pozitif tamsayıdır, μ pozitif sabittir.

Sınır ve başlangıç şartları,

$$\begin{aligned} U(a,t) = 0, \quad U_x(a,t) = 0, \quad U_{xxx}(a,t) = 0, \\ U(b,t) = 0, \quad U_x(b,t) = 0, \quad U_{xxx}(b,t) = 0, \\ U(x,0) = f(x), \quad a \leq x \leq b \end{aligned} \quad (4.2)$$

olarak alınacaktır.

$[a,b]$ sonlu aralığı içine sınırlandırılmış problemin çözüm bölgesini düşünelim. Aralık uzunluğu $h = \frac{b-a}{N} = (x_{m+1} - x_m)$ ve $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ olmak üzere, $[a,b]$ aralığı x_m düğüm noktalarıyla N tane eşit alt aralığa bölünür. Prenter [78], $\phi_m(x)$ septik B-spline

fonksiyonları, $m = -3, -2, \dots, N+3$ olmak üzere x_m düğüm noktalarında

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^7} \begin{cases} (x - x_{m-4})^7, & [x_{m-4}, x_{m-3}] \\ (x - x_{m-4})^7 - 8(x - x_{m-3})^7, & [x_{m-3}, x_{m-2}] \\ (x - x_{m-4})^7 - 8(x - x_{m-3})^7 + 28(x - x_{m-2})^7, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ (x - x_{m-4})^7 - 8(x - x_{m-3})^7 + 28(x - x_{m-2})^7 - 56(x - x_{m-1})^7, & [x_{m-1}, x_m] \\ (x_{m+4} - x)^7 - 8(x_{m+3} - x)^7 + 28(x_{m+2} - x)^7 - 56(x_{m+1} - x)^7, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+4} - x)^7 - 8(x_{m+3} - x)^7 + 28(x_{m+2} - x)^7, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ (x_{m+4} - x)^7 - 8(x_{m+3} - x)^7, & [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ (x_{m+4} - x)^7, & [x_{m+3}, x_{m+4}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (4.3)$$

şeklinde tanımlamıştır. $\{\phi_{-3}(x), \phi_{-2}(x), \dots, \phi_{N+2}(x), \phi_{N+3}(x)\}$ kümesi $[a, b]$ çözüm bölgesi üzerinde bir baz oluşturur. Her bir septik B-spline ϕ_m fonksiyonu ardışık 8 tane sonlu alt aralığı örter. Bu sebeple her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu alt aralığı 8 adet B-spline fonksiyonu tarafından örtülür. $U_N(x, t)$ yaklaşık çözümü, septik B-spline şekil fonksiyonları cinsinden,

$$U_N(x, t) = \sum_{m=-3}^{N+3} \phi_m(x) \delta_m(t) \quad (4.4)$$

olarak ifade edilir. Burada $\delta_m(t)$, zamana bağlı bilinmeyen parametrelerdir, sınır şartları ve GRLW denkleminin septik B-spline kollokasyon şartları oluşturularak bulunacaktır. (4.3) ile verilen B-spline fonksiyonlar ve (4.4) ile verilen yaklaşık çözüm birlikte değerlendirilerek, yaklaşım fonksiyonu U_m ve onun x' e göre U'_m, U''_m türevleri, x_m düğüm noktasında δ_m bilinmeyen parametreleri cinsinden,

$$\begin{aligned} U_m &= \delta_{m-3} + 120\delta_{m-2} + 1191\delta_{m-1} + 2416\delta_m + 1191\delta_{m+1} + 120\delta_{m+2} + \delta_{m+3}, \\ U'_m &= \frac{7}{h}(-\delta_{m-3} - 56\delta_{m-2} - 245\delta_{m-1} + 245\delta_{m+1} + 56\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \\ U''_m &= \frac{42}{h^2}(\delta_{m-3} + 24\delta_{m-2} + 15\delta_{m-1} - 80\delta_m + 15\delta_{m+1} + 24\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) \end{aligned} \quad (4.5)$$

olarak elde edilir. Böylece U değişimi $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı üzerinde aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$U = \sum_{m=-3}^{N+3} \phi_m \delta_m. \quad (4.6)$$

Şimdi, düğüm noktalarıyla beraber kollokasyon şartını oluşturmak için (4.5) ile verilen denklemdaki U_m ve onun x 'e göre türevleri, (4.1) ile verilen GRLW denkleminde yerine yazılırsa; Normal lineerleştirme tekniği için,

$$\begin{aligned}
& \dot{\delta}_{m-3} + 120\dot{\delta}_{m-2} + 1191\dot{\delta}_{m-1} + 2416\dot{\delta}_m + 1191\dot{\delta}_{m+1} + 120\dot{\delta}_{m+2} + \dot{\delta}_{m+3} \\
& + \frac{7}{h} (-\delta_{m-3} - 56\delta_{m-2} - 245\delta_{m-1} + 245\delta_{m+1} + 56\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) \\
& + \frac{7p(p+1)Z_m}{h} (-\delta_{m-3} - 56\delta_{m-2} - 245\delta_{m-1} + 245\delta_{m+1} + 56\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) \\
& - \frac{42\mu}{h^2} \left(\dot{\delta}_{m-3} + 24\dot{\delta}_{m-2} + 15\dot{\delta}_{m-1} - 80\dot{\delta}_m + 15\dot{\delta}_{m+1} + 24\dot{\delta}_{m+2} + \dot{\delta}_{m+3} \right) = 0
\end{aligned} \tag{4.7}$$

şeklinde birleştirilmiş adi diferansiyel denklemlerin bir kümesi elde edilir. Burada,

$$Z_m \cong [U_m^n]^p = \begin{pmatrix} \delta_{m-3}^n + 120\delta_{m-2}^n + 1191\delta_{m-1}^n + 2416\delta_m^n + 1191\delta_{m+1}^n \\ + 120\delta_{m+2}^n + \delta_{m+3}^n \end{pmatrix}^p$$

olarak alınmıştır. Rubin-Graves lineerleştirme tekniği için,

$$\begin{aligned}
& \dot{\delta}_{m-3} + 120\dot{\delta}_{m-2} + 1191\dot{\delta}_{m-1} + 2416\dot{\delta}_m + 1191\dot{\delta}_{m+1} + 120\dot{\delta}_{m+2} + \dot{\delta}_{m+3} \\
& + \frac{7}{h} (-\delta_{m-3} - 56\delta_{m-2} - 245\delta_{m-1} + 245\delta_{m+1} + 56\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) \\
& + p(p+1)Z_m (\delta_{m-3} + 120\delta_{m-2} + 1191\delta_{m-1} + 2416\delta_m + 1191\delta_{m+1} + 120\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) \\
& - \frac{42\mu}{h^2} \left(\dot{\delta}_{m-3} + 24\dot{\delta}_{m-2} + 15\dot{\delta}_{m-1} - 80\dot{\delta}_m + 15\dot{\delta}_{m+1} + 24\dot{\delta}_{m+2} + \dot{\delta}_{m+3} \right) = 0
\end{aligned} \tag{4.8}$$

olarak kollokasyon şartının genel haline ulaşılır. Burada,

$$\begin{aligned}
Z_m \cong [(U_m)^{p-1}(U_m)_x]^{n+1} &= (U_m^{p-1})^n (U_m)_x^{n+1} + (U_m^{p-1})^{n+1} (U_m)_x^n - (U_m^{p-1})^n (U_m)_x^n \\
&= (U_m)^{p-1} (U_m^{n+1})_x + (U_m^{n+1})^{p-1} (U_m)_x - (U_m)^{p-1} (U_m)_x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_m \cong & \left[(\delta_{m-3}^n + 120\delta_{m-2}^n + 1191\delta_{m-1}^n + 2416\delta_m^n + 1191\delta_{m+1}^n + 120\delta_{m+2}^n + \delta_{m+3}^n)^{p-1} \right. \\
& \left. \frac{7}{h} (-\delta_{m-3}^{n+1} - 56\delta_{m-2}^{n+1} - 245\delta_{m-1}^{n+1} + 245\delta_{m+1}^{n+1} + 56\delta_{m+2}^{n+1} + \delta_{m+3}^{n+1}) \right] \\
& + \left[(\delta_{m-3}^{n+1} + 120\delta_{m-2}^{n+1} + 1191\delta_{m-1}^{n+1} + 2416\delta_m^{n+1} + 1191\delta_{m+1}^{n+1} + 120\delta_{m+2}^{n+1} + \delta_{m+3}^{n+1})^{p-1} \right. \\
& \left. \frac{7}{h} (-\delta_{m-3}^n - 56\delta_{m-2}^n - 245\delta_{m-1}^n + 245\delta_{m+1}^n + 56\delta_{m+2}^n + \delta_{m+3}^n) \right] \\
& - \left[(\delta_{m-3}^n + 120\delta_{m-2}^n + 1191\delta_{m-1}^n + 2416\delta_m^n + 1191\delta_{m+1}^n + 120\delta_{m+2}^n + \delta_{m+3}^n)^{p-1} \right. \\
& \left. \frac{7}{h} (-\delta_{m-3}^n - 56\delta_{m-2}^n - 245\delta_{m-1}^n + 245\delta_{m+1}^n + 56\delta_{m+2}^n + \delta_{m+3}^n) \right]
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır ve her iki genel denklemde “.” zamana göre türevi ifade eder. (4.7) ve (4.8) ile verilen kollokasyon denklemlerinde bulunan zamana göre bilinmeyen parametreleri δ_m ve

zamana göre türevleri olan $\dot{\delta}_m$ parametrelerine,

$$\delta_m = \frac{1}{2}(\delta_m^n + \delta_m^{n+1}), \quad \dot{\delta}_m = \frac{\delta_m^{n+1} - \delta_m^n}{\Delta t} \quad (4.9)$$

Crank-Nicolson ve klasik ileri sonlu fark yaklaşımı uygulanır. Bu durumda, normal lineerleştirme tekniği için δ_i^{n+1} ve δ_i^n parametrelerine göre iki ardışık zaman adımı n ve $n+1$ arasındaki tekrarlı bağıntısı,

$$\begin{aligned} & \gamma_1 \delta_{m-3}^{n+1} + \gamma_2 \delta_{m-2}^{n+1} + \gamma_3 \delta_{m-1}^{n+1} + \gamma_4 \delta_m^{n+1} + \gamma_5 \delta_{m+1}^{n+1} + \gamma_6 \delta_{m+2}^{n+1} + \gamma_7 \delta_{m+3}^{n+1} \\ & = \gamma_7 \delta_{m-3}^n + \gamma_6 \delta_{m-2}^n + \gamma_5 \delta_{m-1}^n + \gamma_4 \delta_m^n + \gamma_3 \delta_{m+1}^n + \gamma_2 \delta_{m+2}^n + \gamma_1 \delta_{m+3}^n \end{aligned} \quad (4.10)$$

olarak elde edilir. Burada,

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= (1 - E - p(p+1)EZ_m - M), & \gamma_2 &= (120 - 56E - 56p(p+1)EZ_m - 24M), \\ \gamma_3 &= (1191 - 245E - 245p(p+1)EZ_m - 15M), & \gamma_4 &= (2416 + 80M), \\ \gamma_5 &= (1191 + 245E + 245p(p+1)EZ_m - 15M), & \gamma_6 &= (120 + 56E + 56p(p+1)EZ_m - 24M), \\ \gamma_7 &= (1 + E + p(p+1)EZ_m - M), \\ m &= 0, 1, \dots, N, \quad E = \frac{7}{2h}\Delta t, \quad M = \frac{42\mu}{h^2}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Rubin-Graves lineerleştirme tekniği için tekrarlı bağıntısı,

$$\begin{aligned} & \beta_1 \delta_{m-3}^{n+1} + \beta_2 \delta_{m-2}^{n+1} + \beta_3 \delta_{m-1}^{n+1} + \beta_4 \delta_m^{n+1} + \beta_5 \delta_{m+1}^{n+1} + \beta_6 \delta_{m+2}^{n+1} + \beta_7 \delta_{m+3}^{n+1} \\ & = \beta_8 \delta_{m-3}^n + \beta_9 \delta_{m-2}^n + \beta_{10} \delta_{m-1}^n + \beta_{11} \delta_m^n + \beta_{12} \delta_{m+1}^n + \beta_{13} \delta_{m+2}^n + \beta_{14} \delta_{m+3}^n \end{aligned} \quad (4.12)$$

olarak elde edilir. Burada,

$$\begin{aligned} \beta_1 &= (1 - E + KZ_m - M), & \beta_2 &= (120 - 56E + 120KZ_m - 24M), \\ \beta_3 &= (1191 - 245E + 1191KZ_m - 15M), & \beta_4 &= (2416 + 2416KZ_m + 80M), \\ \beta_5 &= (1191 + 245E + 1191KZ_m - 15M), & \beta_6 &= (120 + 56E + 120KZ_m - 24M), \\ \beta_7 &= (1 + E + KZ_m - M), \\ \beta_8 &= (1 + E - KZ_m - M), & \beta_9 &= (120 + 56E - 120KZ_m - 24M), \\ \beta_{10} &= (1191 + 245E - 1191KZ_m - 15M), & \beta_{11} &= (2416 - 2416KZ_m + 80M), \\ \beta_{12} &= (1191 - 245E - 1191KZ_m - 15M), & \beta_{13} &= (120 - 56E - 120KZ_m - 24M), \\ \beta_{14} &= (1 - E - KZ_m - M), \\ m &= 0, 1, \dots, N, \quad E = \frac{7}{2h}\Delta t, \quad K = \frac{p(p+1)}{2}\Delta t, \quad M = \frac{42\mu}{h^2}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

(4.10) ve (4.12) ile verilen cebirsel denklem sistemleri $N + 1$ tane lineer denklemden oluşur, fakat bu sistemde $(\delta_{-3}, \delta_{-2}, \delta_{-1}, \dots, \delta_{N+1}, \delta_{N+2}, \delta_{N+3})^T$ parametrelerinden oluşan $N + 7$ tane bilinmeyen vardır. Bu sistemin tek çözümünü elde edebilmek için 6 tane ek şarta ihtiyaç vardır. Gerekli 6 tane ek şart (4.2) ile verilen sınır şartları kullanılarak elde edilir. Sınır şartlarının cebirsel denklem sistemine basit bir şekilde dahil edilmesi olarak ifade edilen bu işlemin benzeri, aşağıda iterasyonu başlatabilmek için d^0 başlangıç değerinin belirlenmesi aşamasında açıklanmıştır. Bu şekilde $\delta_{-3}, \delta_{-2}, \delta_{-1}$ ve $\delta_{N+1}, \delta_{N+2}, \delta_{N+3}$ parametreleri (4.10) ve (4.12) ile verilen cebirsel denklem sistemlerinden yok edilir. Bu işlemlerden sonra $d^n = (\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_N)^T$ olmak üzere, $N + 1$ tane bilinmeyenli cebirsel denklem sistemi (matris form) oluşur:

$$A d^{n+1} = B d^n. \quad (4.14)$$

A ve B matrisleri, $(N + 1) \times (N + 1)$ boyutlu 7 sütun elemanlı matrislerdir (septa-diagonal matris olarak adlandırılır) ve bu matris denklemini aşağıda alt bölüm 4.1.1'de açıklandığı gibi Fortran programında Thomas algoritması (septa-diagonal algoritma) kullanılarak çözülmüştür. Lineer olmayan terim Z_m deki eleman parametresine

$$(\delta_m^*)^{n+1} = \delta_m^n + \frac{1}{2}(\delta_m^{n+1} - \delta_m^n)$$

formülü ile verilen iç iterasyon her bir zaman adımında üç veya dört defa uygulanarak çözüm iyileştirilmiştir.

Başlangıç iterasyonu

(4.10) ve (4.12) ile verilen tekrarlama bağıntılarında, d^0 başlangıç değeri bulunarak iterasyon başlatılır. Yaklaşım fonksiyonu, başlangıç parametreleri cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$U_N(x, 0) = \sum_{m=-3}^{N+3} \phi_m(x) \delta_m^0(t).$$

Bu yaklaşımdaki δ_m^0 bilinmeyen parametrelerini belirleyebilmek için başlangıç şartı ve aşağıdaki sınır noktalarındaki türevler kullanılır:

$$\begin{aligned} U_N(x, 0) &= U(x_m, 0); \quad m = 0, 1, 2, \dots, N \\ (U_N)_x(a, 0) &= 0, \quad (U_N)_{xx}(a, 0) = 0, \quad (U_N)_{xxx}(a, 0) = 0, \\ (U_N)_x(b, 0) &= 0, \quad (U_N)_{xx}(b, 0) = 0, \quad (U_N)_{xxx}(b, 0) = 0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Başlangıç şartı δ_m parametreleri cinsinden,

$$\begin{aligned}
\delta_{-3} + 120\delta_{-2} + 1191\delta_{-1} + 2416\delta_0 + 1191\delta_1 + 120\delta_2 + \delta_3 &= U(x_0, 0), \\
\delta_{-2} + 120\delta_{-1} + 1191\delta_0 + 2416\delta_1 + 1191\delta_2 + 120\delta_3 + \delta_4 &= U(x_1, 0), \\
\delta_{-1} + 120\delta_0 + 1191\delta_1 + 2416\delta_2 + 1191\delta_3 + 120\delta_4 + \delta_5 &= U(x_2, 0), \\
\delta_0 + 120\delta_1 + 1191\delta_2 + 2416\delta_3 + 1191\delta_4 + 120\delta_5 + \delta_6 &= U(x_3, 0), \\
&\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
\delta_{N-6} + 120\delta_{N-5} + 1191\delta_{N-4} + 2416\delta_{N-3} + 1191\delta_{N-2} + 120\delta_{N-1} + \delta_N &= U(x_{N-3}, 0), \\
\delta_{N-5} + 120\delta_{N-4} + 1191\delta_{N-3} + 2416\delta_{N-2} + 1191\delta_{N-1} + 120\delta_N + \delta_{N+1} &= U(x_{N-2}, 0), \\
\delta_{N-4} + 120\delta_{N-3} + 1191\delta_{N-2} + 2416\delta_{N-1} + 1191\delta_N + 120\delta_{N+1} + \delta_{N+2} &= U(x_{N-1}, 0), \\
\delta_{N-3} + 120\delta_{N-2} + 1191\delta_{N-1} + 2416\delta_N + 1191\delta_{N+1} + 120\delta_{N+2} + \delta_{N+3} &= U(x_N, 0)
\end{aligned} \tag{4.16}$$

olarak düzenlenir. Elde edilen bu sistem $N + 1$ tane cebirsel denkleme ve $(\delta_{-3}, \delta_{-2}, \delta_{-1}, \dots, \delta_{N+1}, \delta_{N+2}, \delta_{N+3})^T$ parametrelerinden oluşan $N + 7$ tane bilinmeyene sahiptir. Bu sistemin tek çözümünü elde edebilmek için 6 tane ek şarta ihtiyaç vardır. Bunun için başlangıç şartının (4.15) ile verilen sınır noktalarındaki türevleri kullanılır. Türevli sınır koşulları δ_m parametreleri cinsinden,

$$\begin{aligned}
-\delta_{-3} - 56\delta_{-2} - 245\delta_{-1} + 245\delta_1 + 56\delta_2 + \delta_3 &= 0, \\
\delta_{-3} + 24\delta_{-2} + 15\delta_{-1} - 80\delta_0 + 15\delta_1 + 24\delta_2 + \delta_3 &= 0, \\
-\delta_{-3} - 8\delta_{-2} + 19\delta_{-1} - 19\delta_1 + 8\delta_2 + \delta_3 &= 0, \\
-\delta_{N-3} - 56\delta_{N-2} - 245\delta_{N-1} + 245\delta_{N+1} + 56\delta_{N+2} + \delta_{N+3} &= 0, \\
\delta_{N-3} + 24\delta_{N-2} + 15\delta_{N-1} - 80\delta_N + 15\delta_{N+1} + 24\delta_{N+2} + \delta_{N+3} &= 0, \\
-\delta_{N-3} - 8\delta_{N-2} + 19\delta_{N-1} - 19\delta_{N+1} + 8\delta_{N+2} + \delta_{N+3} &= 0
\end{aligned} \tag{4.17}$$

olarak elde edilir. Bu denklemlerden $(\delta_{-3}, \delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_{N+1}, \delta_{N+2}, \delta_{N+3})$ parametreleri

$$\begin{aligned}
\delta_{-3} &= \frac{1}{3}(-280\delta_0 + 105\delta_1 + 168\delta_2 + 10\delta_3), \\
\delta_{-2} &= \frac{220}{27}\delta_0 - \frac{55}{18}\delta_1 - \frac{35}{9}\delta_2 - \frac{11}{54}\delta_3, \\
\delta_{-1} &= -\frac{40}{27}\delta_0 + \frac{14}{9}\delta_1 + \frac{8}{9}\delta_2 + \frac{1}{27}\delta_3, \\
\delta_{N+1} &= -\frac{40}{27}\delta_N + \frac{14}{9}\delta_{N-1} + \frac{8}{9}\delta_{N-2} + \frac{1}{27}\delta_{N-3}, \\
\delta_{N+2} &= \frac{220}{27}\delta_N - \frac{55}{18}\delta_{N-1} - \frac{35}{9}\delta_{N-2} - \frac{11}{54}\delta_{N-3}, \\
\delta_{N+3} &= \frac{1}{3}(-280\delta_N + 105\delta_{N-1} + 168\delta_{N-2} + 10\delta_{N-3})
\end{aligned} \tag{4.18}$$

İlk aşamada, parametreler aşağıdaki gibi seçilir:

$$\alpha_0 = b_0, \quad \beta_0 = c_0, \quad \mu_0 = d_0, \quad \zeta_0 = \frac{e_0}{\mu_0}, \quad \lambda_0 = \frac{f_0}{\mu_0}, \quad \eta_0 = \frac{g_0}{\mu_0}, \quad \gamma_0 = \frac{h_0}{\mu_0},$$

$$\alpha_1 = b_1, \quad \beta_1 = c_1, \quad \mu_1 = d_1 - \beta_1 \zeta_0, \quad \zeta_1 = \frac{e_1 - \beta_1 \lambda_0}{\mu_1}, \quad \lambda_1 = \frac{f_1 - \beta_1 \gamma_0}{\mu_1},$$

$$\eta_1 = \frac{g_1}{\mu_1}, \quad \gamma_1 = \frac{h_1 - \beta_1 \gamma_0}{\mu_1},$$

ve

$$\alpha_2 = b_2, \quad \beta_2 = c_2 - \alpha_2 \zeta_0, \quad \mu_2 = d_2 - \lambda_0 \alpha_2 - \beta_2 \zeta_1, \quad \zeta_2 = \frac{e_2 - \eta_0 \alpha_2 - \beta_2 \lambda_1}{\mu_2},$$

$$\lambda_2 = \frac{f_2 - \beta_2 \eta_1}{\mu_2}, \quad \eta_2 = \frac{g_2}{\mu_2}, \quad \gamma_2 = \frac{h_2 - \alpha_2 \gamma_0 - \beta_2 \gamma_1}{\mu_2}.$$

İkinci adımda, aşağıdaki parametreler bulunur:

$$\alpha_i = b_i - a_i \zeta_{i-3}, \quad \beta_i = c_i - a_i \lambda_{i-3} - \alpha_i \zeta_{i-2}, \quad \mu_i = d_i - a_i \eta_{i-3} - \lambda_{i-2} \alpha_i - \beta_i \zeta_{i-1},$$

$$\zeta_i = \frac{e_i - \eta_{i-2} \alpha_i - \beta_i \lambda_{i-1}}{\mu_i}, \quad \lambda_i = \frac{f_i - \beta_i \eta_{i-1}}{\mu_i}, \quad \eta_i = \frac{g_i}{\mu_i},$$

$$\gamma_i = \frac{h_i - \beta_i \gamma_{i-1} - \alpha_i \gamma_{i-2} - a_i \gamma_{i-3}}{\mu_i}, \quad i = 3, 4, \dots, N.$$

Son olarak çözüm,

$$\delta_i = \gamma_i - \zeta_i \delta_{i+1} - \lambda_i \delta_{i+2} - \eta_i \delta_{i+3}, \quad i = 0, 1, \dots, N-4, N-3,$$

$$\delta_{N-2} = \gamma_{N-2} - \lambda_{N-2} \delta_N - \eta_{N-2} \delta_{N-1}, \quad \delta_{N-1} = \gamma_{N-1} - \eta_{N-1} \delta_N, \quad \delta_N = \gamma_N.$$

olarak hesaplanır.

4.1.2 Lineer kararlılık analizi

Sayısal yöntemin lineer olarak kararlı olup-olmadığını tespit edebilmek için Von-Neumann kararlılık analizi kullanılacaktır. Öncelikle, GRLW denkleminin $U^p U_x$ lineer olmayan terimindeki U^p teriminin bölgesel olarak sabit olduğu kabul edilir. Daha sonra k mod numarası ve h eleman genişliği olmak üzere,

$$\delta_m^n = \xi^n e^{imkh} \quad (i = \sqrt{-1})$$

ile verilen Fourier mod, (4.10) ile verilen denklem de uygulanarak, aşağıdaki form elde edilir:

$$\begin{aligned} & \gamma_1 \xi^{n+1} e^{i(m-3)kh} + \gamma_2 \xi^{n+1} e^{i(m-2)kh} + \gamma_3 \xi^{n+1} e^{i(m-1)kh} + \gamma_4 \xi^{n+1} e^{imkh} \\ & + \gamma_5 \xi^{n+1} e^{i(m+1)kh} + \gamma_6 \xi^{n+1} e^{i(m+2)kh} + \gamma_7 \xi^{n+1} e^{i(m+3)kh} = \\ & \gamma_7 \xi^n e^{i(m-3)kh} + \gamma_6 \xi^n e^{i(m-2)kh} + \gamma_5 \xi^n e^{i(m-1)kh} + \gamma_4 \xi^n e^{imkh} \\ & + \gamma_3 \xi^n e^{i(m+1)kh} + \gamma_2 \xi^n e^{i(m+2)kh} + \gamma_1 \xi^n e^{i(m+3)kh}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

$e^{ikh} = \cos(kh) + i \sin(kh)$ Euler formülü (4.19) ile verilen denklem de yerine yazılır ve gerekli sadeleştirme işlemleri yapılırsa büyüme faktörü olan ξ ,

$$\xi = \frac{a - ib}{a + ib}$$

olarak edilir. Burada,

$$a = \gamma_4 + (\gamma_5 + \gamma_3) \cos[hk] + (\gamma_6 + \gamma_2) \cos[2hk] + (\gamma_7 + \gamma_1) \cos[3hk],$$

$$b = (\gamma_5 - \gamma_3) \sin[hk] + (\gamma_6 - \gamma_2) \sin[2hk] + (\gamma_7 - \gamma_1) \sin[3hk].$$

$|\xi|$ nin modülü 1 dir. Bu yüzden lineerleştirilmiş algoritma şartsız kararlıdır.

4.1.3 Sayısal örnekler ve sonuçlar

Bu bölümde sayısal yöntem, başlangıç şartının farklı değerleri kullanılarak oluşturulan tek solitary dalga, iki solitary dalga arasındaki ilişki ve Maxwellian başlangıç şartını içeren üç test problemi üzerinde çalışılmıştır. Sayısal yöntemin doğruluğunu göstermek ve daha önceki sayısal sonuçlarla elde edilen sonuçları karşılaştırabilmek için L_2 ve L_∞ hata normları,

$$L_2 = \|U^{tam} - U_N\|_2 \simeq \sqrt{h \sum_{j=0}^N |U_j^{tam} - (U_N)_j|^2},$$

$$L_\infty = \|U^{tam} - U_N\|_\infty \simeq \max_j |U_j^{tam} - (U_N)_j|$$

ile verilen normlar kullanılarak elde edilmiştir. Gardner ve arkadaşları [37] tarafından yapılan çalışmada, GRLW denkleminin tam çözümü,

$$U(x,t) = \sqrt[2]{\frac{c(p+2)}{2p} \sec h^2 \left[\frac{p}{2} \sqrt{\frac{c}{\mu(c+1)}} (x - (c+1)t - x_0) \right]} \quad (4.20)$$

şeklinde ifade edilmiştir. Burada $gen. = \sqrt[2]{\frac{c(p+2)}{2p}}$ dalganın genliği, $c+1$ pozitif x yönünde hareket eden dalganın sabit hızı ve x_0 keyfi sabittir.

Sayısal algoritmanın kütle, momentum ve enerjisi ile ilgili özelliklerini koruduğunu göstermek için,

$$I_1 = \int_a^b U dx, \quad I_2 = \int_a^b [U^2 + \mu U_x^2] dx, \quad I_3 = \int_a^b [U^4 - \mu U_x^2] dx \quad (4.21)$$

parametrelerindeki değişim hesaplanmıştır.

4.1.3.1 Tek solitary dalganın hareketi

Bu problem için korunum sabitleri ve hata normları, normal ve Rubin-Graves lineerleştirme tekniği uygulanarak elde edilmiştir. Başlangıç şartı olarak (4.20) ile verilen denklem de $t = 0$ alınması ile elde edilen fonksiyon kullanılmıştır. Elde edilen sayısal sonuçlar, daha önce verilen [37, 40, 56] sonuçlarla karşılaştırılmıştır. p , c , h , Δt ve $gen.$ nin farklı değerleri; $\mu = 1$, $x_0 = 40$ ve $0 \leq x \leq 100$ nin aynı değerleri alınarak altı farklı parametre kümesi inşa edilmiştir. Sayısal program $t = 10$ veya $t = 20$ anına kadar çalıştırılmıştır.

İlk durumda, $p = 2$, $c = 1$, $h = 0.2$ ve $\Delta t = 0.025$ parametre değerleri düşünüldü. Bu değerlere göre solitary dalga $gen. = 1$ yüksekliğine sahip olur. Sayısal algoritma $t = 10$ zamanına kadar çalıştırılmış ve elde edilen sonuçlar Tablo 4.1'de gösterilmiştir. Bu tablodan çıkarılabilir sonuç şudur: Normal lineerleştirme tekniği için hesaplanan korunum sabitleri $t = 10$ zamanına kadar hemen hemen aynı kalmaktadır. Rubin-Graves lineerleştirme tekniği için $I_1 \times 10^3$, $I_2 \times 10^3$ ve $I_3 \times 10^3$ hareket sabitleri, sırasıyla 0.0001, 0.2 ve 0.2 değerlerinden daha küçük bulunmuştur. Ayrıca L_2 ve L_∞ hata normlarının büyüklüğü beklenildiği kadar küçüktür ve Rubin-Graves lineerleştirme tekniği ile elde edilenler normal lineerleştirme tekniğiyle elde edilenlerden hesaplama boyunca küçük kalmaktadır.

İkinci durumda, $p = 2$, $c = 0.3$, $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ için solitary dalga $gen. = 0.54772$ genliğine sahip olur. Sayısal sonuçlar $t = 0$ dan $t = 20$ zamanına kadar elde edilmiştir. Elde edilen değerler Tablo 4.2'de listelenmiştir. Tablo 4.2'ye göre normal lineerleştirme tekniği uygulanarak hesaplanan korunum sabitleri, zaman ilerledikçe hemen hemen değişmeden kalmaktadır. Rubin-Graves lineerleştirme tekniği uygulandığında ise, $I_1 \times 10^5$, $I_2 \times 10^5$ ve $I_3 \times 10^5$ sabitlerinin başlangıç durumuna göre değişimi 0.03, 0.2 ve 0.2 değerlerinden daha küçük ölçülmüştür. Hata normları ise oldukça küçük bulunmuştur ve sayısal yöntem için Rubin-Graves lineerleştirme tekniği daha etkili bulunmuştur.

Üçüncü olarak, eğer $p = 3$, $c = 6/5$, $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.025$ olarak seçildi. Solitary dalga $gen. = 1$ büyüklüğüne sahip olur. Deneyler $t = 10$ zamanına kadar yapılmıştır. Bu parametre değerleri için korunum sabitleri ve hata normaları Tablo 4.3'de sunulmuştur. Bu tablodan gözlemlendiği gibi korunum sabitleri için normal lineerleştirme tekniği ile elde edilen sonuçlar daha iyidir. $I_1 \times 10^3$, $I_2 \times 10^3$ ve $I_3 \times 10^3$ hareket sabitlerinin Rubin-Graves lineerleştirme tekniği ile elde edilen sonuçları ise, sırasıyla 0.06, 0.2 ve 0.2 değerlerinden daha küçük kalmaktadır. L_2 ve L_∞ hata normları değerlendirildiğinde ise, Rubin-Graves ile

elde edilen sayısal sonuç daha iyi olmakla beraber, elde edilen norm değerleri hesaplama süresince oldukça küçük bulunmuştur. Bir dalganın hareketi Şekil 4.1’de çizilmiştir. Bu şekilden anlaşıldığı gibi zaman ilerledikçe dalga beklendiği gibi sağa doğru sabit hız ve hemen hemen değişmeyen genlikle hareket etmektedir. Bu ise solitary dalga tanımına uygundur.

Dördüncü durumda, $p = 3$, $c = 0.3$, $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ parametre değerleri alındı. Böylece dalga $gen. = 0.6$ genliğine sahip olur. Çözümler $t = 10$ anına kadar elde edilmiştir ve sonuçlar Tablo 4.4’te sunulmuştur. Bu tabloya göre, normal lineerleştirme tekniği ile elde edilen hareket sabitleri, hesaplama süresince hemen hemen değişmeden kalmaktadır. Rubin-Graves lineerleştirme tekniğine göre $I_1 \times 10^5$, $I_2 \times 10^5$ ve $I_3 \times 10^5$ sabitlerinde meydana gelen değişim 0.02, 0.2 ve 0.2 den küçük bulunmuştur. Buna ilaveten, hata norm değerleri beklendiği gibi küçüktür ve Rubin-Graves ile uygulaması daha etkilidir.

$p = 4$, $c = 4/3$, $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.025$ olarak seçildi. Solitary dalganın yüksekliği $gen. = 1$ olur. Bu parametrelere göre hesaplamalar $t = 10$ anına kadar çalıştırılmıştır. Sonuçlar Tablo 4.5’te verilmiştir. Tablodan görüldüğü gibi I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitlerinin başlangıç durumuna göre değişim oranı %0.004 ve daha küçüktür. L_2 ve L_∞ hata normları ise, hesaplama boyunca 0.34×10^{-2} den daha küçük ölçülmüştür. Şekil 4.2’de elde edilen sayısal sonuçların bir dalga hareketi oluşturduğu görülmektedir. Bu dalgalar, zaman ilerledikçe sabit hızda ve büyüklüklerini muhafaza ederek ilerleyen solitary dalgadır.

Son olarak, $p = 4$, $c = 0.3$, $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ parametreleri için dalga $gen. = 0.6$ genliğine sahiptir. Bilgisayar programı $t = 10$ anına kadar çalıştırılmış ve hesaplamalar Tablo 4.6’da listelenmiştir. Diğer parametre değerlerinde de olduğu gibi, normal lineerleştirme tekniği ile elde edilen korunum sabitleri hemen hemen değişmeden kalmaktadır. Rubin-Graves lineerleştirme tekniği ile elde edilen hareket sabitlerindeki değişim oranı %0.0003 den daha küçük hesaplanmıştır. L_2 ve L_∞ hata normları ise hesaplama boyunca, sırasıyla 0.13×10^{-3} ve 0.63×10^{-4} den daha küçük ölçülmüştür.

Tablo 4.7’de korunum sabitleri ve hata normları $t = 10$ anında farklı çalışmalardan elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Bu sonuçlara göre korunum sabitleri diğer çalışmalarda elde edilen sonuçlara yakındır. L_2 ve L_∞ hata normlarının büyüklükleri ise, diğer çalışmalardan daha küçüktür ve sırasıyla 2.58×10^{-3} ve 1.35×10^{-3} den daha küçük bulunmuştur.

Tablo 4.1 Tek solitary dalganın $p = 2$, $gen. = 1$, $h = 0.2$, $\Delta t = 0.025$ ve $x \in [0, 100]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri

t		0	2	4	6	8	9	10
I_1	Normal	4.4428661	4.4428661	4.4428661	4.4428661	4.4428661	4.4428661	4.4428661
	Rub.-Grav.	4.4428661	4.4428661	4.4428661	4.4428661	4.4428661	4.4428661	4.4428661
I_2	Normal	3.2998227	3.2998227	3.2998227	3.2998227	3.2998227	3.2998227	3.2998227
	Rub.-Grav.	3.2998227	3.2997808	3.2997415	3.2997248	3.2997180	3.2997162	3.2997151
I_3	Normal	1.4142046	1.4142046	1.4142045	1.4142045	1.4142045	1.4142045	1.4142045
	Rub.-Grav.	1.4142046	1.4142465	1.4142858	1.4143025	1.4143093	1.4143111	1.4143122
$L_2 \times 10^3$	Normal	0.00000000	0.60716949	1.14063868	1.64433340	2.13954492	2.38609516	2.63246332
	Rub.-Grav.	0.00000000	0.56248008	1.08566992	1.58675627	2.08032250	2.32602024	2.57148152
$L_\infty \times 10^3$	Normal	0.00000000	0.36598695	0.63405702	0.88886854	1.14126892	1.26720221	1.39306406
	Rub.-Grav.	0.00000000	0.31854916	0.58528925	0.83879372	1.08975930	1.21494581	1.34021078

Tablo 4.2 Tek solitary dalganın $p = 2$, $gen. = 0.54772$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.01$ ve $x \in [0, 100]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri

t		0	4	8	12	16	18	20
I_1	Normal	3.5820205	3.5820205	3.5820205	3.5820206	3.5820205	3.5820205	3.5820204
	Rub.-Grav.	3.5820205	3.5820205	3.5820205	3.5820206	3.5820206	3.5820205	3.5820204
I_2	Normal	1.3450941	1.3450941	1.3450941	1.3450941	1.3450941	1.3450941	1.3450941
	Rub.-Grav.	1.3450941	1.3450945	1.3450949	1.3450952	1.3450954	1.3450955	1.3450956
I_3	Normal	0.1537283	0.1537283	0.1537283	0.1537283	0.1537283	0.1537283	0.1537283
	Rub.-Grav.	0.1537283	0.1537280	0.1537275	0.1537272	0.1537270	0.1537269	0.1537268
$L_2 \times 10^4$	Normal	0.00000000	0.23672179	0.47619933	0.71790890	0.96089487	1.08268831	1.20462362
	Rub.-Grav.	0.00000000	0.23418686	0.47177441	0.71193992	0.95355112	1.07469409	1.19599766
$L_\infty \times 10^4$	Normal	0.00000000	0.09872538	0.20175604	0.30567565	0.40978331	0.46185354	0.51392349
	Rub.-Grav.	0.00000000	0.09904113	0.20198201	0.30544405	0.40924890	0.46114976	0.51304090

Tablo 4.3 Tek solitary dalganın $p = 3$, $gen. = 1$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.025$ ve $x \in [0, 100]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri

t		0	2	4	6	8	9	10
I_1	Normal	3.7971850	3.7971850	3.7971850	3.7971850	3.7971850	3.7971850	3.7971850
	Rub.-Grav.	3.7971850	3.7971746	3.7971643	3.7971539	3.7971436	3.7971385	3.7971333
I_2	Normal	2.8812522	2.8812522	2.8812522	2.8812522	2.8812522	2.8812522	2.8812522
	Rub.-Grav.	2.8812523	2.8811910	2.8811373	2.8811139	2.8811003	2.8810949	2.8810899
I_3	Normal	0.9729661	0.9730958	0.9731319	0.9731417	0.9731447	0.9731453	0.9731457
	Rub.-Grav.	0.9729661	0.9730274	0.9730811	0.9731045	0.9731181	0.9731235	0.9731285
$L_2 \times 10^3$	Normal	0.00000000	1.90329843	3.69133655	5.45488983	7.21419106	8.09357939	8.97298352
	Rub.-Grav.	0.00000000	1.53511864	3.06287331	4.60591335	6.17668280	6.97351539	7.77816967
$L_\infty \times 10^3$	Normal	0.00000000	1.16955458	2.17410995	3.17420400	4.17483173	4.67535458	5.17598210
	Rub.-Grav.	0.00000000	0.88908301	1.75051811	2.62846490	3.52598420	3.98164296	4.44187369

Tablo 4.4 Tek solitary dalganın $p = 3$, $gen. = 0.6$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.01$ ve $x \in [0, 100]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri

t		0	2	4	6	8	9	10
I_1	Normal	3.6776069	3.6776069	3.6776069	3.6776069	3.6776070	3.6776070	3.6776070
	Rub.-Grav.	3.6776069	3.6776070	3.6776070	3.6776070	3.6776069	3.6776069	3.6776069
I_2	Normal	1.5657604	1.5657604	1.5657604	1.5657604	1.5657604	1.5657604	1.5657604
	Rub.-Grav.	1.5657604	1.5657607	1.5657612	1.5657615	1.5657618	1.5657619	1.5657620
I_3	Normal	0.2268462	0.2268462	0.2268462	0.2268462	0.2268462	0.2268462	0.2268462
	Rub.-Grav.	0.2268462	0.2268459	0.2268455	0.2268451	0.2268448	0.2268447	0.2268446
$L_2 \times 10^4$	Normal	0.00000000	0.17328588	0.34661331	0.52006829	0.69360491	0.78037511	0.86713653
	Rub.-Grav.	0.00000000	0.15717557	0.31406200	0.47113473	0.62819930	0.70668688	0.78513671
$L_\infty \times 10^4$	Normal	0.00000000	0.08009713	0.15772492	0.23706868	0.31711953	0.35713873	0.39714589
	Rub.-Grav.	0.00000000	0.07211019	0.14548091	0.21877988	0.29201943	0.32854583	0.36501241

Tablo 4.5 Tek solitary dalganın $p = 4$, $gen. = 1$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.025$ ve $x \in [0, 100]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri

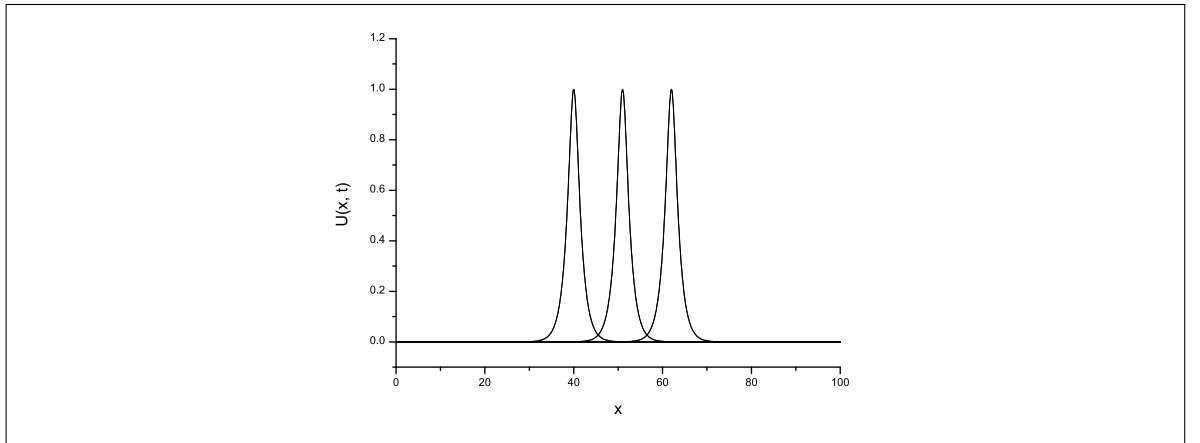
t		0	2	4	6	8	9	10
I_1	Normal	3.4687090	3.4687090	3.4687090	3.4687090	3.4687090	3.4687090	3.4687090
	Rub.-Grav.	3.4687090	3.4687016	3.4686942	3.4686868	3.4686793	3.4686756	3.4686719
I_2	Normal	2.6716961	2.6716961	2.6716961	2.6716961	2.6716961	2.6716961	2.6716961
	Rub.-Grav.	2.6716961	2.6716916	2.6716801	2.6716720	2.6716648	2.6716614	2.6716580
I_3	Normal	0.7291997	0.7292453	0.7292551	0.7292575	0.7292582	0.7292583	0.7292584
	Rub.-Grav.	0.7291998	0.7292043	0.7292158	0.7292239	0.7292311	0.7292345	0.7292379
$L_2 \times 10^3$	Normal	0.00000000	0.68380580	1.35202774	2.01856221	2.68509298	3.01840343	3.35174007
	Rub.-Grav.	0.00000000	0.47718681	0.98480922	1.52387541	2.09512659	2.39288065	2.69870907
$L_\infty \times 10^3$	Normal	0.00000000	0.43263300	0.83440039	1.24065060	1.64702738	1.84815798	2.04973389
	Rub.-Grav.	0.00000000	0.29861347	0.60821892	0.93545672	1.28679533	1.46559601	1.65600236

Tablo 4.6 Tek solitary dalganın $p = 4$, $gen. = 0.6$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.01$ ve $x \in [0, 100]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri

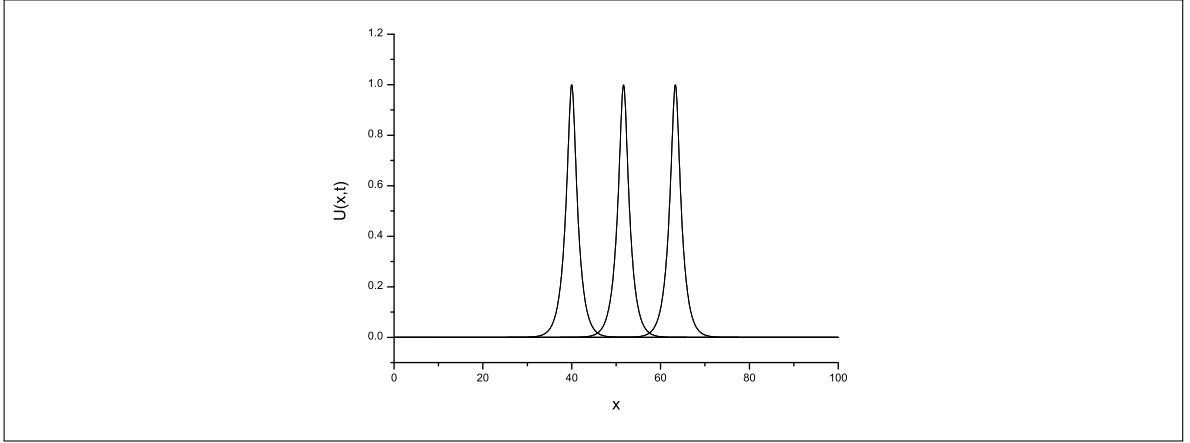
t		0	2	4	6	8	9	10
I_1	Normal	3.7592865	3.7592865	3.7592865	3.7592865	3.7592865	3.7592865	3.7592865
	Rub.-Grav.	3.7592865	3.7592865	3.7592865	3.7592864	3.7592864	3.7592864	3.7592863
I_2	Normal	1.7300238	1.7300238	1.7300238	1.7300238	1.7300238	1.7300238	1.7300238
	Rub.-Grav.	1.7300239	1.7300244	1.7300250	1.7300254	1.7300256	1.7300258	1.7300259
I_3	Normal	0.2894189	0.2894191	0.2894192	0.2894192	0.2894192	0.2894192	0.2894192
	Rub.-Grav.	0.2894189	0.2894183	0.2894178	0.2894174	0.2894171	0.2894170	0.2894169
$L_2 \times 10^4$	Normal	0.00000000	0.25417530	0.50867400	0.76378746	1.01967310	1.14789286	1.27628477
	Rub.-Grav.	0.00000000	0.19937853	0.39600506	0.59159317	0.78622772	0.88322868	0.98004530
$L_\infty \times 10^4$	Normal	0.00000000	0.13193138	0.25511505	0.37848569	0.50227119	0.56431519	0.62645346
	Rub.-Grav.	0.00000000	0.09833776	0.19527926	0.29108460	0.38611041	0.43351464	0.48083798

Tablo 4.7 Tek solitary dalganın $p = 2,3,4$; $t = 10$ ve $x \in [0,100]$ için sayısal sonuçlarının karşılaştırılması

p		2	3	4
		$gen. = 1, h = 0.2, \Delta t = 0.025$	$gen. = 0.6, h = 0.1, \Delta t = 0.01$	$gen. = 0.6, h = 0.1, \Delta t = 0.01$
I_1	CBSC+PA-CN [37]	4.44000000		
	CBSC-CN [37]	4.44200000		
	CBSC [40]	4.44288000		
	QBSPG [56]	4.44288000	3.67755000	3.75923000
	SBSC	4.44286610	3.67760690	3.75928630
I_2	CBSC+PA-CN [37]	3.29600000		
	CBSC-CN [37]	3.29900000		
	CBSC [40]	3.29983000		
	QBSPG [56]	3.29981000	1.56574000	1.72999000
	SBSC	3.29971510	1.56576200	1.73002590
I_3	CBSC+PA-CN [37]	1.41100000		
	CBSC-CN [37]	1.41300000		
	CBSC [40]	1.41420000		
	QBSPG [56]	1.41416000	0.22683700	0.28940600
	SBSC	1.41431220	0.22684460	0.28941690
$L_2 \times 10^3$	CBSC+PA-CN [37]	20.30000000		
	CBSC-CN [37]	16.39000000		
	CBSC [40]	9.30196000		
	QBSPG [56]	3.00533000	0.07197600	0.12253900
	SBSC	2.57148152	0.07851367	0.09800453
$L_\infty \times 10^3$	CBSC+PA-CN [37]	11.20000000		
	CBSC-CN [37]	9.24000000		
	CBSC [40]	5.43718000		
	QBSPG [56]	1.68749000	0.03772280	0.06620700
	SBSC	1.34021078	0.03650124	0.04808379



Şekil 4.1 Tek solitary dalganın $p = 3$, $gen. = 1$, $x_0 = 40$, $x \in [0, 100]$ için $t = 0, 5, 10$ 'daki hareketi



Şekil 4.2 Tek solitary dalganın $p = 4$, $gen. = 1$, $x_0 = 40$, $x \in [0, 100]$ için $t = 0, 5, 10$ 'daki hareketi

4.1.3.2 İki solitary dalganın etkileşimi

Bu problem için, aynı yönde pozitif $gen. = 2$ ve $gen. = 1$ genliklerine sahip iki solitary dalga arasındaki etkileşim,

$$U(x, 0) = \sum_{i=1}^2 p \sqrt{\frac{c_i(p+2)}{2p}} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{p}{2} \sqrt{\frac{c_i}{\mu(c_i+1)}} (x - x_i) \right] \quad (4.22)$$

ile verilen başlangıç şartı kullanılarak çalışılmıştır. Burada $i = 1, 2$ olmak üzere, c_i ve x_i keyfi sabitlerdir. p ve c_i nin farklı değerleri için üç farklı parametre kümesi oluşturulmuştur.

İlk durumda, $p = 2$, $c_1 = 4$, $c_2 = 1$, $x_1 = 25$, $x_2 = 55$, $h = 0.2$, $\Delta t = 0.025$, $\mu = 1$ ve $0 \leq x \leq 250$ parametre kümesi seçildi. Sayısal program $t = 0$ dan $t = 20$ zamanına kadar çalıştırılmıştır. I_1 , I_2 ve I_3 korunum sabitlerinin sayısal değeri, Tablo 4.8'de sunulmuştur. Bu tabloya göre I_1 , I_2 ve I_3 sabitlerinin başlangıç hesabına göre değişim oranı, sırasıyla %0.00002, %0.00004 ve %0.5 den daha küçüktür. Ayrıca elde edilen sonuçlar quintik B-spline Petrov-Galerkin yöntemi [56] ile elde edilen sonuçlara çok yakın bulunmuştur.

İkinci şart olarak $p = 3$, $c_1 = 48/5$, $c_2 = 6/5$, $x_1 = 20$, $x_2 = 50$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.01$, $\mu = 1$ ve $0 \leq x \leq 120$ parametre değerleri alındı. Sayısal hesaplamalar $t = 6$ anına kadar yapılmıştır. Korunum sabitlerinin sayısal değeri, Tablo 4.9'da verilmiştir. Bu tablodan gözlemlendiği gibi korunum sabitlerindeki değişim oranı, normal lineerleştirme tekniği için daha küçüktür ve bu değişim oranı Roshan'ın elde ettiği sonuçlara [56] yakındır. Şekil 4.3'te, iki solitary dalganın farklı zamanlardaki hareketi çizilmiştir. Bu şekle göre başlangıç anında genliği büyük olan dalga genliği küçük olan dalganın solundadır. Zaman ilerledikçe genliği büyük olan dalga, küçük genlikli dalgayı yakalar. $t = 3$ zamanı civarında bir dalga diğer dalganın

üzerine biner. $t = 5$ anında dalgalar ayrılmaya başlar. $t = 6$ anında ise dalgalar belirgin olarak ayrılır ve büyük genlikli dalga önde, küçük genlikli dalga arkada başlangıç şekil, hız ve büyüklüklerini koruyarak yollarına devam eder. Sonuç olarak, iki solitary dalga aynı yönde ilerlerken etkileşim gerçekleşir ve çarpışmadan sonra başlangıç şekillerine dönerek uzun mesafe yol alabilir. Yani bu dalgalar solitonlardır.

Son olarak, $p = 4$, $c_1 = 64/3$, $c_2 = 4/3$, $x_1 = 20$, $x_2 = 80$, $h = 0.125$, $\Delta t = 0.01$, $\mu = 1$ ve $0 \leq x \leq 200$ değerleri düşünüldü. Bilgisayar programı $t = 6$ anına kadar çalıştırılmıştır ve korunum sabitlerinin sayısal değeri Tablo 4.10'da gösterilmiştir. Korunum sabitlerinin başlangıç hesabına göre değişimi yeterince küçüktür ve bu sayısal değerler Roshan'ın elde ettiği sonuçlarla [56] uyumludur. Diğer taraftan, sayısal yöntem uygulanarak elde edilen iki solitary dalganın hareketi Şekil 4.4'te gösterilmiştir. Büyük genlikli solitary dalga $t = 0$ da küçük genlikli dalganın solundadır. Zamanla gerideki dalga öndeki dalgayı yakalar ve etkileşim başlar. Daha sonra bu iki dalga ayrılır ve başlangıç formlarını koruyarak yollarına devam eder. Bu yüzden solitary dalgalar solitonlardır.

Tablo 4.8 İki solitary dalganın etkileşiminin $p = 2$, $gen. = 2, 1$, $h = 0.2$, $\Delta t = 0.025$ ve $x \in [0, 250]$ için korunum sabitleri

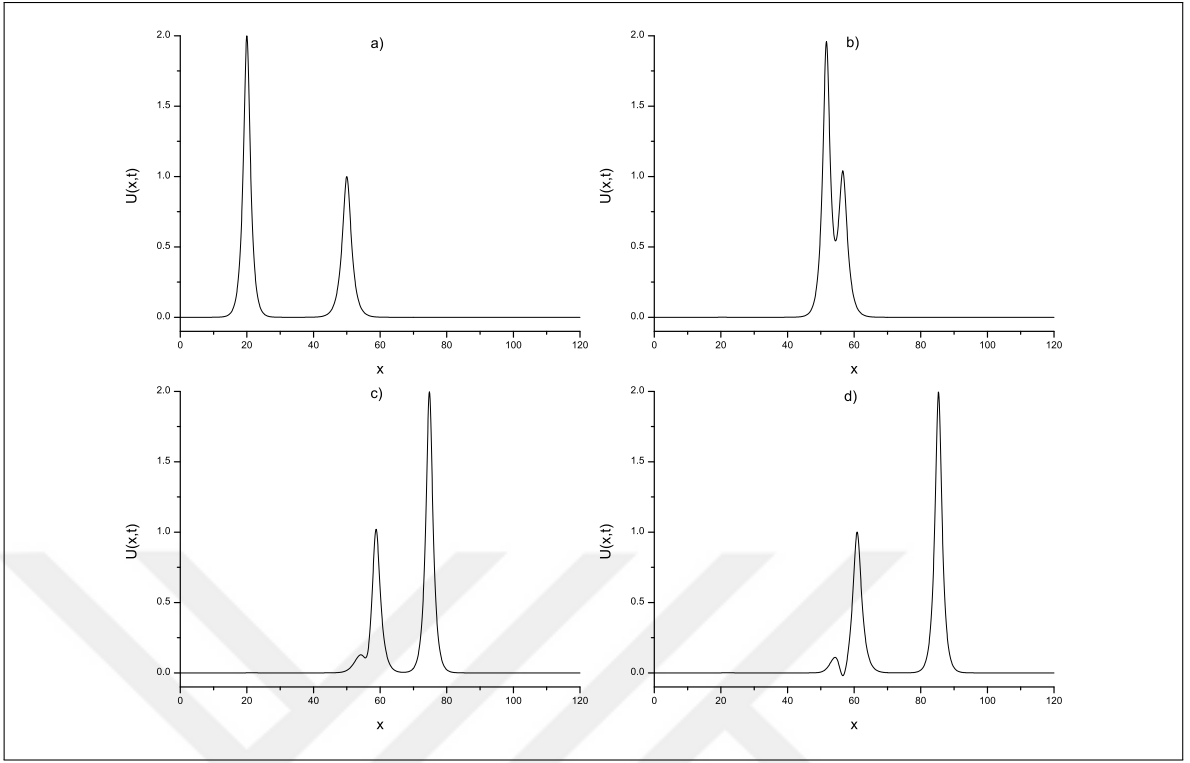
t		0	4	8	12	16	18	20
I_1	Normal	11.4676542	11.4676542	11.4676542	11.4676542	11.4676541	11.4676541	11.4676541
	Rub.-Grav.	11.4676542	11.4676484	11.4668849	11.4676777	11.4676555	11.4676490	11.4676452
	QBSPG [56]	11.4677000	11.4677000	11.4677000	11.4677000	11.4677000	11.4677000	11.4677000
I_2	Normal	14.6292089	14.6292088	14.6292088	14.6292087	14.6292087	14.6292087	14.6292086
	Rub.-Grav.	14.6292089	14.6277880	14.1400014	14.6803731	14.6442435	14.6350836	14.6309639
	QBSPG [56]	14.6286000	14.6292000	14.6229000	14.6299000	14.6295000	14.6296000	14.6299000
I_3	Normal	22.8803575	22.8803204	22.8759840	22.8803706	22.8803978	22.8803925	22.8803901
	Rub.-Grav.	22.8803575	22.8817784	23.3695650	22.8291933	22.8653229	22.8744828	22.8786025
	QBSPG [56]	22.8788000	22.8811000	22.8798000	22.8803000	22.8805000	22.8807000	22.8806000

Tablo 4.9 İki solitary dalganın etkileşiminin $p = 3$, $gen. = 2, 1$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.01$ ve $x \in [0, 120]$ için korunum sabitleri

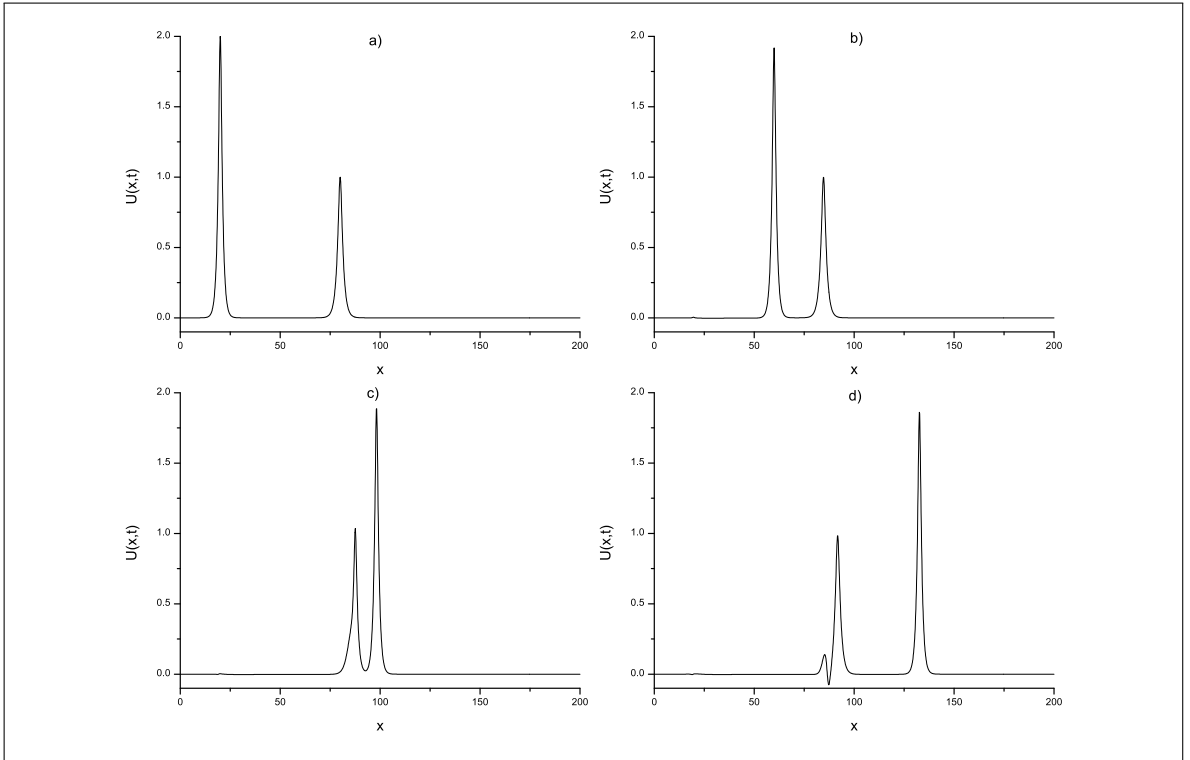
t		0	1	2	3	4	5	6
I_1	Normal	9.6907772	9.6907774	9.6907776	9.6907778	9.6907778	9.6907780	9.6907782
	Rub.-Grav.	9.6907772	9.6894501	9.6881175	9.6850972	9.6860154	9.6847993	9.6834620
	QBSPG [56]	9.6907500	9.6907400	9.6907400	9.6907400	9.6907400	9.6907400	9.6907400
I_2	Normal	12.9443914	12.9443919	12.9443925	12.9443930	12.9443932	12.9443937	12.9443943
	Rub.-Grav.	12.9443914	12.9432906	12.9390629	12.3046064	12.9703128	13.0538036	13.0027533
	QBSPG [56]	12.9444000	12.9459000	12.9452000	12.9379000	12.9453000	12.9457000	12.9454000
I_3	Normal	17.0186758	17.0236820	17.0256746	17.9687428	16.9816963	16.9181837	16.9520240
	Rub.-Grav.	17.0186758	17.0197766	17.0240043	17.6584608	16.9927544	16.9092637	16.9603139
	QBSPG [56]	17.0184000	16.9819000	16.9835000	17.0591000	16.9261000	16.8781000	16.9113000

Tablo 4.10 İki solitary dalganın etkileşiminin $p = 4$, $gen. = 2, 1$, $h = 0.125$, $\Delta t = 0.01$ ve $x \in [0, 200]$ için korunum sabitleri

t		0	1	2	3	4	5	6
I_1	Normal	8.8342728	8.8342136	8.8341602	8.8341068	8.8340534	8.8340001	8.8339467
	Rub.-Grav.	8.8342728	8.6690235	8.5641864	8.4846626	8.4354647	8.3773932	8.3271616
	QBSPG [56]	8.8342700	8.8342700	8.8420400	8.8420500	8.8420900	8.8342100	8.8343400
I_2	Normal	12.1708877	12.1707034	12.1705372	12.1703713	12.1702053	12.1700395	12.1698737
	Rub.-Grav.	12.1708877	12.0300916	11.9395989	11.8340526	11.9770970	11.9162211	11.8147229
	QBSPG [56]	12.1697000	12.3179000	12.3700000	12.4530000	12.5703000	12.6304000	12.6103000
I_3	Normal	14.0294238	14.4197656	14.4134423	14.3841812	14.3516241	14.3210739	14.2929015
	Rub.-Grav.	14.0294238	14.1702200	14.2607126	14.3662589	14.2232145	14.2840904	14.3855886
	QBSPG [56]	14.0302000	13.8420000	13.9607000	14.0887000	13.9805000	14.2357000	14.6974000



Şekil 4.3 İki solitary dalganın $p = 3$; a) $t = 0$, b) $t = 3$, c) $t = 5$, d) $t = 6$ 'daki hareketi



Şekil 4.4 İki solitary dalganın $p = 4$; a) $t = 0$, b) $t = 2$, c) $t = 4$, d) $t = 6$ 'daki hareketi

4.1.3.3 Maxwellian başlangıç şartı

Son olarak, (4.1) ile verilen denklem aşağıdaki Maxwellian başlangıç şartı ile beraber düşünüldü:

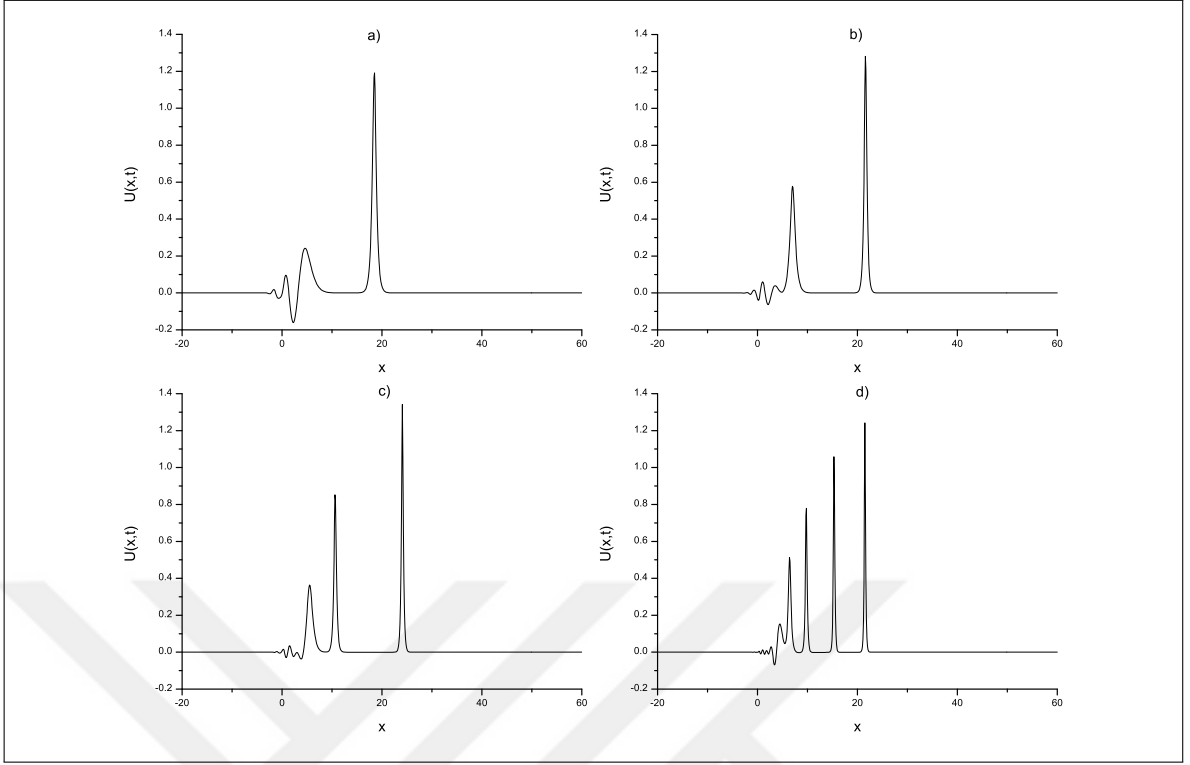
$$U(x, 0) = \text{Exp}(-x^2), \quad -20 \leq x \leq 60. \quad (4.23)$$

Bu durumda çözümün davranışının μ değerine bağlı olarak değiştiği bilinmektedir. Bu yüzden, $\mu = 0.01$, $\mu = 0.025$, $\mu = 0.05$, $\mu = 0.1$ ve $p = 2, 3, 4$. parametre değerlerine göre dalganın oluşumu incelenmiştir. Sayısal algoritma $t = 6$ anına kadar çalıştırılmıştır. Hareket sabitlerinin sayısal değerleri farklı μ değerleri için Tablo 4.11’de sunulmuştur. $I_1 \times 10^2$, I_2 ve I_3 sabitlerinin hesaplama süresince değişimi, sırasıyla $p = 2$ için 0.0001, 0.1 ve 0.1; $p = 3$ için 0.0005, 0.2 ve 0.2; $p = 4$ için 0.2, 0.3 ve 0.3 olarak ölçülmüştür. Elde edilen sayısal sonuçlar ile Petrov-Galerkin yöntemi [56] ile elde edilen sonuçlar arasındaki fark $t = 6$ zamanında çok küçüktür.

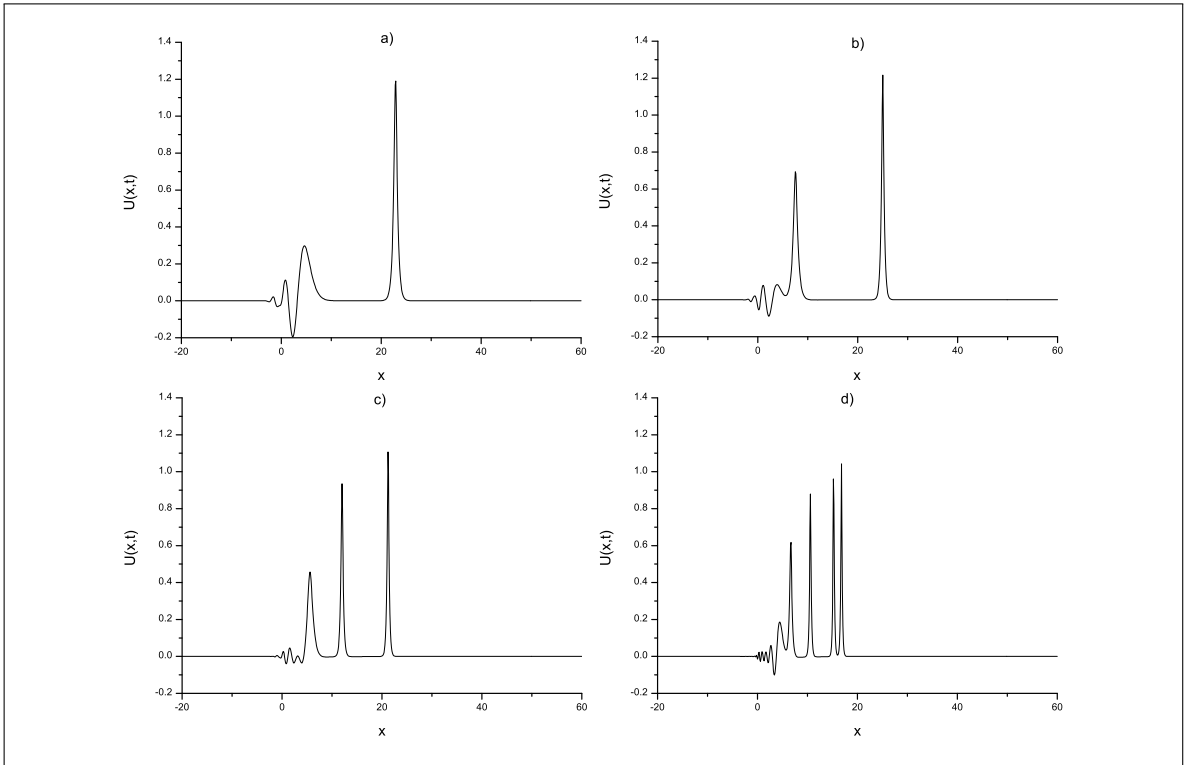
Şekil 4.5 ve Şekil 4.6’da, Maxwellian başlangıç şartına göre solitary dalgaların oluşumu çizilmiştir. Bu şekillerde görüldüğü gibi $\mu = 0.1$ değeri için sadece bir tane kararlı dalga ve yanında bir kaç tane küçük belirsiz dalga oluşur. $\mu = 0.05$ olduğu zaman, iki tane kararlı solitary dalga oluşur. Üç ve dört tane kararlı dalga ise, sırasıyla $\mu = 0.025$ ve $\mu = 0.01$ parametre değerlerinde oluşur. Yine bu dalgaların yanında bir kaç tane belirsiz dalga oluşmuştur. Buradan şunu söyleyebiliriz: Eğer μ değeri azaltılırsa, oluşan kararlı solitary dalga sayısı artmaktadır.

Tablo 4.11 Maxwellian başlangıç şartı ve $h = 0.1$, $\Delta t = 0.01$ ve $x \in [-20, 60]$ için korunum sabitleri

μ	t	$p = 2$			$p = 3$			$p = 4$		
		I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
0.1	0	1.772453	1.378645	0.760895	1.772453	1.378645	0.760895	1.772453	1.378645	0.760895
	2	1.772453	1.472878	0.666662	1.772452	1.548191	0.591349	1.772110	1.591837	0.547703
	4	1.772453	1.472838	0.666702	1.772451	1.546329	0.593211	1.771702	1.588948	0.550592
	6	1.772453	1.472598	0.666942	1.772449	1.545540	0.594000	1.771297	1.587779	0.551761
	QBSPG [56]	6	1.772450	1.380900	0.761900	1.772450	1.384330	0.599080	1.772450	1.389450
0.05	0	1.772453	1.315979	0.823561	1.772453	1.315979	0.823561	1.772453	1.315979	0.823561
	2	1.772453	1.457911	0.681630	1.772376	1.514843	0.624697	1.753662	1.535874	0.603666
	4	1.772453	1.456986	0.682554	1.772272	1.514131	0.625409	1.741625	1.528679	0.610862
	6	1.772453	1.455748	0.683792	1.772168	1.513035	0.626505	1.733910	1.523490	0.616050
	QBSPG [56]	6	1.772390	1.319510	0.825686	1.772480	1.323940	0.624720	1.772120	1.451680
0.025	0	1.772453	1.284646	0.854894	1.772453	1.284646	0.854894	1.772453	1.284646	0.854894
	2	1.772454	1.446475	0.693065	1.768943	1.502469	0.637071	1.693029	1.482414	0.657126
	4	1.772452	1.450770	0.688770	1.764956	1.501801	0.637740	1.682425	1.476250	0.663290
	6	1.772451	1.450891	0.688649	1.761477	1.498994	0.640546	1.674869	1.468703	0.670837
	QBSPG [56]	6	1.772380	1.290110	0.854909	1.772350	1.308060	0.635790	1.772490	1.296260
0.01	0	1.772453	1.265847	0.873693	1.772453	1.265847	0.873693	1.772453	1.265847	0.873693
	2	1.772512	1.438944	0.700596	1.720433	1.456451	0.683090	1.651315	1.437490	0.702051
	4	1.772403	1.443961	0.695579	1.706008	1.450265	0.689276	1.644999	1.439995	0.699545
	6	1.772190	1.443723	0.695817	1.700567	1.451593	0.687947	1.633634	1.431710	0.707830
	QBSPG [56]	6	1.772490	1.283150	0.892359	1.772450	1.276270	0.632880	1.756480	1.405770



Şekil 4.5 Maxwellian başlangıç şartı ve $p = 3$, $t = 6$; a) $\mu = 0.1$, b) $\mu = 0.05$, c) $\mu = 0.025$, d) $\mu = 0.01$ değerleri için dalgaların oluşumu



Şekil 4.6 Maxwellian başlangıç şartı ve $p = 4$, $t = 6$; a) $\mu = 0.1$, b) $\mu = 0.05$, c) $\mu = 0.025$, d) $\mu = 0.01$ değerleri için dalgaların oluşumu

4.2 GRLW Denkleminin Kuintik B-spline Kollokasyon Yöntemi ile Sayısal Çözümü

GRLW denklemleri,

$$U_t + U_x + p(p+1)U^p U_x - \mu U_{xx} = 0 \quad (4.24)$$

şeklinde tanımlanır. Burada fiziksel sınır şartları $x \rightarrow \pm\infty$ iken $U \rightarrow 0$, alt indis t ve x zaman ve boyutsal türevi ifade eder, p pozitif tamsayıdır, μ pozitif sabittir.

Sınır ve başlangıç şartları,

$$\begin{aligned} U(a,t) &= 0, & U_x(a,t) &= 0, \\ U(b,t) &= 0, & U_x(b,t) &= 0, \\ U(x,0) &= f(x), & a \leq x \leq b \end{aligned} \quad (4.25)$$

olarak alınacaktır.

$[a, b]$ sonlu aralığına sınırlandırılmış çözüm bölgesini düşünelim. Aralık uzunluğu $h = \frac{b-a}{N} = (x_{m+1} - x_m)$ ve $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ olmak üzere, $[a, b]$ aralığı x_m düğüm noktalarıyla N tane eşit alt aralığa bölünür. $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı fonksiyonlar için bir baz oluşturan $\{\phi_{-2}(x), \phi_{-1}(x), \dots, \phi_{N+2}(x)\}$ kuintik B-spline fonksiyonları, x_m düğüm noktalarında,

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^5} \begin{cases} (x - x_{m-3})^5, & [x_{m-3}, x_{m-2}) \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5, & [x_{m-2}, x_{m-1}) \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5, & [x_{m-1}, x_m) \\ (x_{m+3} - x)^5 - 6(x_{m+2} - x)^5 + 15(x_{m+1} - x)^5, & [x_m, x_{m+1}) \\ (x_{m+3} - x)^5 - 6(x_{m+2} - x)^5, & [x_{m+1}, x_{m+2}) \\ (x_{m+3} - x)^5, & [x_{m+2}, x_{m+3}) \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (4.26)$$

şeklinde tanımlanmıştır [78]. Her bir kuintik B-spline ϕ_m fonksiyonu ardışık 6 tane sonlu alt aralığı örter. Bu yüzden her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu alt aralığı 6 adet B-spline fonksiyonu tarafından örtülür. $U_N(x, t)$ global yaklaşımı, kuintik B-spline şekil fonksiyonları cinsinden,

$$U_N(x, t) = \sum_{m=-2}^{N+2} \phi_m(x) \delta_m(t) \quad (4.27)$$

olarak ifade edilir. Burada $\delta_m(t)$, zamana bağlı bilinmeyen parametrelerdir, sınır şartları ve GRLW denkleminin kuintik B-spline kollokasyon şartı kullanılarak belirlenecektir. (4.26)

ile verilen B-spline fonksiyonlar, (4.27) ile verilen yaklaşım fonksiyonunda kullanılarak, yaklaşım fonksiyonu U_m ve onun x 'e göre ikinci mertebeye kadar olan türevleri, x_m düğüm noktasında δ_m bilinmeyen parametrelerine göre aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} U_N(x_m, t) &= U_m = \delta_{m-2} + 26\delta_{m-1} + 66\delta_m + 26\delta_{m+1} + \delta_{m+2}, \\ U'_m &= \frac{5}{h}(-\delta_{m-2} - 10\delta_{m-1} + 10\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \\ U''_m &= \frac{20}{h^2}(\delta_{m-2} + 2\delta_{m-1} - 6\delta_m + 2\delta_{m+1} + \delta_{m+2}). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Bu ifade ile birlikte U değişimi $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu elemanı üzerinde

$$U = \sum_{m=-2}^{N+2} \phi_m \delta_m \quad (4.29)$$

olarak yeniden yazılabilir. (4.28) ile verile denklem de U_m ve onun x 'e göre türevleri, denklem (4.24) ile verilen GRLW denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} & \left(\dot{\delta}_{m-2} + 26\dot{\delta}_{m-1} + 66\dot{\delta}_m + 26\dot{\delta}_{m+1} + \dot{\delta}_{m+2} \right) \\ & + \frac{5}{h}(-\delta_{m-2} - 10\delta_{m-1} + 10\delta_{m+1} + \delta_{m+2}) \\ & + p(p+1)Z_m(\delta_{m-2} + 26\delta_{m-1} + 66\delta_m + 26\delta_{m+1} + \delta_{m+2}) \\ & - \frac{20\mu}{h^2}(\dot{\delta}_{m-2} + 2\dot{\delta}_{m-1} - 6\dot{\delta}_m + 2\dot{\delta}_{m+1} + \dot{\delta}_{m+2}) = 0 \end{aligned} \quad (4.30)$$

olarak çözüm yaklaşımının genel formu elde edilir. Burada Z_m lineer olmayan terimi ve bu terime Rubin-Graves lineerleştirme tekniği uygulanmış formu,

$$\begin{aligned} Z_m &\cong [(U_m)^{p-1}(U_m)_x]^{n+1} = (U_m^{p-1})^n (U_m)_x^{n+1} + (U_m^{p-1})^{n+1} (U_m)_x^n - (U_m^{p-1})^n (U_m)_x^n \\ &= (U_m^n)^{p-1} (U_m^{n+1})_x + (U_m^{n+1})^{p-1} (U_m)_x - (U_m^n)^{p-1} (U_m)_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_m &\cong (\delta_{m-2}^n + 26\delta_{m-1}^n + 66\delta_m^n + 26\delta_{m+1}^n + \delta_{m+2}^n)^{p-1} \frac{5}{h} (-\delta_{m-2}^{n+1} - 10\delta_{m-1}^{n+1} + 10\delta_{m+1}^{n+1} + \delta_{m+2}^{n+1}) \\ &+ (\delta_{m-2}^{n+1} + 26\delta_{m-1}^{n+1} + 66\delta_m^{n+1} + 26\delta_{m+1}^{n+1} + \delta_{m+2}^{n+1})^{p-1} \frac{5}{h} (-\delta_{m-2}^n - 10\delta_{m-1}^n + 10\delta_{m+1}^n + \delta_{m+2}^n) \\ &- (\delta_{m-2}^n + 26\delta_{m-1}^n + 66\delta_m^n + 26\delta_{m+1}^n + \delta_{m+2}^n)^{p-1} \frac{5}{h} (-\delta_{m-2}^n - 10\delta_{m-1}^n + 10\delta_{m+1}^n + \delta_{m+2}^n) \end{aligned}$$

şeklinde ve “.” zamana göre türevi ifade eder. (4.30) ile verilen genel çözüm denkleminde bulunan zamana göre bilinmeyen parametreleri δ_m ve zamana göre türevleri $\dot{\delta}_m$ katsayılarına sırasıyla,

$$\delta_m = \frac{1}{2}(\delta_m^n + \delta_m^{n+1}), \quad \dot{\delta}_m = \frac{\delta_m^{n+1} - \delta_m^n}{\Delta t} \quad (4.31)$$

formülleri ile verilen Crank-Nicolson ve klasik ileri sonlu fark yaklaşımı uygulanır. Böylece δ_i^{n+1} ve δ_i^n bilinmeyen zaman parametrelerine göre iki ardışık zaman adımı n ve $n+1$

arasındaki tekrarlıma bağıntısı,

$$\begin{aligned} & \gamma_1 \delta_{m-2}^{n+1} + \gamma_2 \delta_{m-1}^{n+1} + \gamma_3 \delta_m^{n+1} + \gamma_4 \delta_{m+1}^{n+1} + \gamma_5 \delta_{m+2}^{n+1} \\ & = \gamma_6 \delta_{m-2}^n + \gamma_7 \delta_{m-1}^n + \gamma_8 \delta_m^n + \gamma_9 \delta_{m+1}^n + \gamma_{10} \delta_{m+2}^n \end{aligned} \quad (4.32)$$

olarak hesaplanır. Buradaki γ katsayıları,

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= (1 - K + EZ_m - M), & \gamma_2 &= (26 - 10K + 26EZ_m - 2M), \\ \gamma_3 &= (66 + 66EZ_m + 6M), & \gamma_4 &= (26 + 10K + 26EZ_m - 2M), \\ \gamma_5 &= (1 + K + EZ_m - M), & \gamma_6 &= (1 + K - EZ_m - M), \\ \gamma_7 &= (26 + 10K - 26EZ_m - 2M), & \gamma_8 &= (66 - 66EZ_m + 6M), \\ \gamma_9 &= (26 - 10K - 26EZ_m - 2M), & \gamma_{10} &= (1 - K - EZ_m - M), \\ m &= 0, 1, \dots, N, & K &= \frac{5\Delta t}{2h}, & E &= \frac{p(p+1)\Delta t}{2}, & M &= \frac{20\mu}{h^2} \end{aligned} \quad (4.33)$$

şeklindedir.

(4.32) ile verilen cebirsel denklem sistemi $N + 1$ tane lineer denklem ve $(\delta_{-2}, \delta_{-1}, \dots, \delta_{N+1}, \delta_{N+2})^T$ parametrelerinden oluşan $N + 5$ tane bilinmeyenden oluşur. Bu sistemin tek çözümünü elde edebilmek için 4 tane ek şarta ihtiyaç vardır. Gerekli 4 tane ek şart (4.25) ile verilen sınır şartları kullanılarak elde edilir. Sınır şartlarının cebirsel denklem sistemine basit bir şekilde dahil edilmesi olarak ifade edilen bu aşamanın benzeri, aşağıda iterasyonu başlatabilmek için d^0 başlangıç değerinin belirlenmesi aşamasında verilmiştir. Bu işlemlerden sonra δ_{-2}, δ_{-1} ve $\delta_{N+1}, \delta_{N+2}$ parametreleri, (4.32) ile verilen cebirsel denklem sisteminden silinir. Bu durumda $d^n = (\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_N)^T$ olmak üzere, $N + 1$ tane bilinmeyenli aşağıdaki cebirsel denklem sistemi (matris form) elde edilir:

$$A d^{n+1} = B d^n. \quad (4.34)$$

A ve B matrisleri, $(N + 1) \times (N + 1)$ boyutlu 5 sütun elemanlı matrislerdir (penta-diagonal matris olarak adlandırılır) ve bu matris denklemini aşağıda alt bölüm 4.2.1'de açıklandığı gibi Fortran programında Thomas algoritması (penta-diagonal algoritma) kullanılarak çözülmüştür. Çözüm aşamasında, lineer olmayan terim Z_m deki eleman parametresine,

$$(\delta_m^*)^{n+1} = \delta_m^n + \frac{1}{2}(\delta_m^{n+1} - \delta_m^n)$$

formülü ile verilen iç iterasyon her bir zaman adımında üç veya dört defa uygulanarak çözüm iyileştirilmiştir.

Öncelikle parametreler,

$$\alpha_0 = 0, \quad \beta_0 = c_0, \quad \mu_0 = \frac{d_0}{\beta_0}, \quad \zeta_0 = \frac{e_0}{\beta_0}, \quad \lambda_0 = \frac{f_0}{\beta_0},$$

$$\alpha_1 = b_0, \quad \beta_1 = c_1 - \alpha_1 \mu_0, \quad \mu_1 = \frac{d_1 - \alpha_1 \zeta_0}{\beta_1}, \quad \zeta_1 = \frac{e_1}{\beta_1}, \quad \lambda_1 = \frac{f_1 - \alpha_1 \lambda_0}{\beta_1}$$

olarak belirlenir. Daha sonra aşağıdaki parametreler bulunur:

$$\alpha_i = b_{i-1} - a_{i-2} \mu_{i-2}, \quad \beta_i = c_i - \alpha_i \mu_{i-1} - a_{i-2} \zeta_{i-2}, \quad \mu_i = \frac{d_i - \alpha_i \zeta_{i-1}}{\beta_i},$$

$$\zeta_i = \frac{e_i}{\beta_i}, \quad \lambda_i = \frac{f_i - \alpha_i \lambda_{i-1} - a_{i-2} \lambda_{i-2}}{\beta_i}, \quad i = 2, 3, \dots, N.$$

Bu iki adımdan sonra δ_m bilinmeyen parametreleriyle çözüm aşağıdaki gibi bulunur:

$$\delta_N = \lambda_N, \quad \delta_{N-1} = \lambda_{N-1} - \mu_{N-1} \delta_N,$$

$$\delta_i = \lambda_i - \zeta_i \delta_{i+2} - \mu_i \delta_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, N-3, N-2.$$

4.2.2 Lineer kararlılık analizi

Sayısal algoritmanın lineer kararlılığını araştırmak için Von-Neumann tekniği takip edilecektir. GRLW denkleminin $U^p U_x$ lineer olmayan terimindeki U^p teriminin bölgesel olarak sabit olduğu kabul edilecektir. Sunulan sayısal algoritmadaki aynı adımlar uygulanarak,

$$\begin{aligned} & \alpha_1 \delta_{m-2}^{n+1} + \alpha_2 \delta_{m-1}^{n+1} + \alpha_3 \delta_m^{n+1} + \alpha_4 \delta_{m+1}^{n+1} + \alpha_5 \delta_{m+2}^{n+1} \\ & = \alpha_5 \delta_{m-2}^n + \alpha_4 \delta_{m-1}^n + \alpha_3 \delta_m^n + \alpha_2 \delta_{m+1}^n + \alpha_1 \delta_{m+2}^n \end{aligned} \quad (4.39)$$

şeklinde tekrarlamaya bağıntısı elde edili. Burada,

$$\alpha_1 = (1 - K - KEZ_m - M), \quad \alpha_2 = (26 - 10K - 10KEZ_m - 2M), \quad \alpha_3 = (66 + 6M),$$

$$\alpha_4 = (26 + 10K + 10KEZ_m - 2M), \quad \alpha_5 = (1 + K + KEZ_m - M),$$

$$m = 0, 1, \dots, N, \quad K = \frac{5\Delta t}{2h}, \quad E = \frac{p(p+1)\Delta t}{2}, \quad M = \frac{20\mu}{h^2}.$$

Daha sonra, k mod numarası ve h eleman büyüklüğü olmak üzere,

$$\delta_m^n = \xi^n e^{imkh} \quad (i = \sqrt{-1})$$

ile verilen Fourier mod (4.39) ile verilen denklem de yerine yazılırsa, bu işlem aşağıdaki eşitliği üretir:

$$\begin{aligned} & \alpha_1 \xi^{n+1} e^{i(m-2)kh} + \alpha_2 \xi^{n+1} e^{i(m-1)kh} + \alpha_3 \xi^{n+1} e^{i(m)kh} + \alpha_4 \xi^{n+1} e^{i(m+1)kh} \\ & + \alpha_5 \xi^{n+1} e^{i(m+2)kh} = \\ & \alpha_5 \xi^n e^{i(m-2)kh} + \alpha_4 \xi^n e^{i(m-1)kh} + \alpha_3 \xi^n e^{i(m)kh} + \alpha_2 \xi^n e^{i(m+1)kh} \\ & + \alpha_1 \xi^n e^{i(m+2)kh} \end{aligned} \quad (4.40)$$

$e^{ikh} = \cos(kh) + i \sin(kh)$ Euler formülü (4.40) ile verilen denklem de kullanılır ve gerekli sadeleştirme işlemleri yapılırsa büyüme faktörü olan ξ ,

$$\xi = \frac{a - ib}{a + ib}$$

olarak elde edilir. Burada,

$$a = \alpha_3 + (\alpha_4 + \alpha_2) \cos[hk] + (\alpha_5 + \alpha_1) \cos[2hk],$$

$$b = (\alpha_4 - \alpha_2) \sin[hk] + (\alpha_5 - \alpha_1) \sin[2hk].$$

$|\xi|$ nin modülü 1 dir, öyleki lineerleştirilmiş algoritma şartsız kararlıdır.

4.2.3 Sayısal örnekler ve sonuçlar

Bu bölümde sayısal yöntem tek solitary dalga, iki solitary dalganın etkileşimi ve ardışık dalganın gelişimini kapsayan üç örneğe uygulanmıştır. L_2 ve L_∞ hata normları, sayısal algoritmanın doğruluğunu ve etkinliğini test etmek için hesaplanmıştır. Bunun için GRLW denkleminin (4.41) ile verilen tam çözümü ve aşağıdaki norm eşitlikleri kullanılacaktır:

$$L_2 = \|U^{tam} - U_N\|_2 \simeq \sqrt{h \sum_{j=0}^N |U_j^{tam} - (U_N)_j|^2},$$

$$L_\infty = \|U^{tam} - U_N\|_\infty \simeq \max_j |U_j^{tam} - (U_N)_j|.$$

Gardner ve arkadaşları [37], Roshan [56] tarafından GRLW dekleminin tam çözümü,

$$U(x, t) = \sqrt[p]{\frac{c(p+2)}{2p} \sec^2 \left[\frac{p}{2} \sqrt{\frac{c}{\mu(c+1)}} (x - (c+1)t - x_0) \right]} \quad (4.41)$$

olarak verilmiştir. Burada $\sqrt[p]{\frac{c(p+2)}{2p}}$ dalganın genliği, $c+1$ pozitif x yönünde ilerleyen dalganın hızı ve x_0 keyfi sabittir. Buna ilaveten, sayısal algoritmanın kütle, momentum ve enerji ile ilgili özellikleri koruduğunu ifade etmek için,

$$I_1 = \int_a^b U dx, \quad I_2 = \int_a^b [U^2 + \mu(U_x)^2] dx, \quad I_3 = \int_a^b [U^4 - \mu(U_x)^2] dx \quad (4.42)$$

olarak verilen korunum sabitlerindeki değişim araştırılmıştır.

4.2.3.1 Tek solitary dalganın hareketi

İlk örnek, (4.41) ile verilen denklem de $t = 0$ alınması ile elde edilen başlangıç şartı kullanılarak oluşturulmuştur. Düzgün ve karşılaştırılabilir sayısal sonuçlara ulaşabilmek için, daha önce yapılan makale çalışmaları [33, 37, 39, 40, 43, 56, 59] referans alınmıştır. Bu

makalelerle uyumlu olması için $\mu = 1$, $x_0 = 40$, $x \in [0, 100]$ parametreleri ve p , c , konum adımı h , zaman adımı Δt parametrelerinin farklı değerleri seçilmiştir. Deneysel $t = 20$ anına kadar çalıştırılmıştır.

İlk durumda, $p = 2, 3, 4, 6, 8, 10$; $c = 0.1, 0.3$; $h = 0.2, 0.1$; $\Delta t = 0.01$ parametreleri düşünülmüştür. Bu parametrelere göre hesaplanan korunum sabitleri ve hata normları Tablo 4.12 ve Tablo 4.13'te sunulmuştur. Bu tablolardan gözlemlendiği gibi I_1 , I_2 , I_3 korunum sabitlerinin tüm hesaplama süresince başlangıç hesabına göre değişim oranı %0.03 den daha küçüktür. L_2 ve L_∞ hata normları artan p , c ve zaman değerleriyle beraber yeterince küçük kalmaktadır ve L_∞ hata normu L_2 normundan daima küçüktür. $c = 0.1$ parametresi için L_2 ve L_∞ hata normları hesaplama boyunca sırasıyla 0.85×10^{-4} ve 0.34×10^{-4} değerlerinden daha küçük hesaplanmıştır.

Tablo 4.12 Tek solitary dalganın $p = 2, 3, 4$; $c = 0.1, 0.3$, $h = 0.2$, $\Delta t = 0.01$ ve $x \in [0, 100]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri

p=2		I_1		I_2		I_3		$L_2 \times 10^4$		$L_\infty \times 10^4$	
Zaman	c=0.1	c=0.3	c=0.1	c=0.3	c=0.1	c=0.3	c=0.1	c=0.3	c=0.1	c=0.3	
0	3.29490	3.58195	0.68342	1.34507	0.02412	0.15372	0.000	0.000	0.000	0.000	
5	3.29492	3.58195	0.68342	1.34507	0.02412	0.15372	0.040	0.095	0.029	0.051	
10	3.29493	3.58195	0.68342	1.34507	0.02412	0.15372	0.075	0.159	0.035	0.076	
15	3.29494	3.58195	0.68342	1.34506	0.02412	0.15372	0.101	0.207	0.036	0.095	
20	3.29493	3.58195	0.68342	1.34506	0.02412	0.15372	0.120	0.376	0.066	0.175	
p=3		I_1		I_2		I_3		$L_2 \times 10^4$		$L_\infty \times 10^4$	
Zaman	c=0.1	c=0.3	c=0.1	c=0.3	c=0.1	c=0.3	c=0.1	c=0.3	c=0.1	c=0.3	
0	4.06256	3.67753	1.13387	1.56573	0.09289	0.22683	0.000	0.000	0.000	0.000	
5	4.06258	3.67753	1.13387	1.56573	0.09289	0.22683	0.048	0.217	0.032	0.121	
10	4.06260	3.67753	1.13387	1.56573	0.09289	0.22684	0.088	0.400	0.038	0.203	
15	4.06261	3.67753	1.13387	1.56573	0.09289	0.22684	0.116	0.581	0.039	0.284	
20	4.06260	3.67753	1.13386	1.56572	0.09289	0.22684	0.137	0.918	0.073	0.438	
p=4		I_1		I_2		I_3		$L_2 \times 10^4$		$L_\infty \times 10^4$	
Zaman	c=0.1	c=0.3	c=0.1	c=0.3	c=0.1	c=0.3	c=0.1	c=0.3	c=0.1	c=0.3	
0	4.55093	3.75921	1.49159	1.72999	0.18389	0.28940	0.000	0.000	0.000	0.000	
5	4.55095	3.75921	1.49159	1.72999	0.18389	0.28941	0.059	0.402	0.034	0.231	
10	4.55097	3.75921	1.49159	1.72998	0.18389	0.28941	0.106	0.803	0.041	0.421	
15	4.55098	3.75921	1.49159	1.72998	0.18389	0.28941	0.142	1.235	0.042	0.627	
20	4.55097	3.75921	1.49159	1.72998	0.18389	0.28941	0.176	1.868	0.078	0.915	

Tablo 4.13 Tek solitary dalganın $p = 6, 8, 10$; $c = 0.1, 0.3$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.01$ ve $x \in [0, 100]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri

p=6		I_1		I_2		I_3		$L_2 \times 10^4$		$L_\infty \times 10^4$	
Zaman	c=0.1	c=0.3	c=0.1	c=0.3	c=0.1	c=0.3	c=0.1	c=0.3	c=0.1	c=0.3	
0	5.12921	3.86622	1.98857	1.94334	0.36740	0.37760	0.000	0.000	0.000	0.000	
5	5.12924	3.86622	1.98857	1.94334	0.36740	0.37760	0.236	0.752	0.092	0.402	
10	5.12926	3.86622	1.98857	1.94334	0.36740	0.37760	0.458	1.554	0.179	0.823	
15	5.12927	3.86622	1.98857	1.94333	0.36740	0.37760	0.661	2.429	0.259	1.282	
20	5.12926	3.86622	1.98857	1.94333	0.36740	0.37760	0.848	3.390	0.333	1.785	

p=8		I_1		I_2		I_3		$L_2 \times 10^4$		$L_\infty \times 10^4$	
Zaman	c=0.1	c=0.3	c=0.1	c=0.3	c=0.1	c=0.3	c=0.1	c=0.3	c=0.1	c=0.3	
0	5.45779	3.92982	2.30588	2.07217	0.51946	0.43167	0.000	0.000	0.000	0.000	
5	5.45781	3.92982	2.30589	2.07217	0.51946	0.43167	0.268	1.204	0.108	0.690	
10	5.45783	3.92981	2.30589	2.07216	0.51946	0.43168	0.499	3.012	0.200	1.699	
15	5.45785	3.92981	2.30589	2.07214	0.51946	0.43170	0.686	5.690	0.273	3.184	
20	5.45784	3.92980	2.30589	2.07212	0.51946	0.43172	0.822	9.520	0.322	5.296	

p=10		I_1		I_2		I_3		$L_2 \times 10^4$		$L_\infty \times 10^4$	
Zaman	c=0.1	c=0.3	c=0.1	c=0.3	c=0.1	c=0.3	c=0.1	c=0.3	c=0.1	c=0.3	
0	5.66906	3.97136	2.52266	2.15744	0.63820	0.46614	0.000	0.000	0.000	0.000	
5	5.66908	3.97134	2.52266	2.15742	0.63819	0.46615	0.297	2.271	0.124	1.380	
10	5.66910	3.97133	2.52266	2.15737	0.63819	0.46620	0.536	7.775	0.220	4.595	
15	5.66912	3.97131	2.52267	2.15729	0.63819	0.46629	0.700	19.017	0.280	11.082	
20	5.66911	3.97129	2.52267	2.15714	0.63819	0.46643	0.764	39.763	0.288	22.983	

İkinci olarak, farklı hız, konum adımı ve zaman adımlarında hata normlarının büyüklüğünü incelendi. Bu amaçla, $p = 2, 3, 4, 6, 8, 10$; $c = 0.03, 0.1, 0.3$; $h = 0.1, 0.2$; $\Delta t = 0.01, 0.025, 0.1$ parametreleri ile çalışıldı. L_2 ve L_∞ hata normlarının sayısal sonuçları, Tablo 4.14 ve Tablo 4.15'te listelenmiştir. Bu tablolar da hata normları yeterince küçük ölçülmüştür ve L_∞ hata normu L_2 hata normundan daima küçük kalmaktadır. Eğer $c = 0.1$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.025$ parametre değerleri seçilirse, program süresince L_2 ve L_∞ hata normları 1.5×10^{-3} ve 0.8×10^{-3} den daha küçük kalmaktadır.

Tablo 4.16'da elde edilen korunum sabitlerinin ve hata normlarının sonuçları ile daha önceki makalelerde elde edilen sonuçlarla karşılaştırılması yapılmıştır. Bu tabloya göre I_1 , I_2 , I_3 korunum sabitleri daha önce hesaplanan değerleri ile hemen hemen aynıdır. Ayrıca bu tablodan açıkça görülmektedir ki; Hata norm değerleri daha önce hesaplanan sonuçlardan daha küçük bulunmuştur. Bu iki sonuç ise algoritmanın doğruluğunu kanıtlamaktadır.

Diğer taraftan tek solitary dalganın farklı zamanlarda ve farklı p değerlerindeki hareketi Şekil 4.7'de çizilmiştir. Bu şekle göre artan p değerine göre dalganın genliği doğru orantılı

olduğundan, dalganın yüksekliği de artmaktadır. $t = 0$ dan $t = 20$ zamanına kadar dalga hareketi incelendiğinde, dalganın genlik, hız ve şeklinde herhangi bir bozulma olmadan sağa doğru ilerlediği görülmektedir. Yani bu dalgalar solitary dalgadır.

Tablo 4.14 Tek solitary dalganın $p = 2, 3, 4$; $t = 20$ ve $x \in [0, 100]$ için farklı konum ve zaman adımlarındaki hata norm değerleri

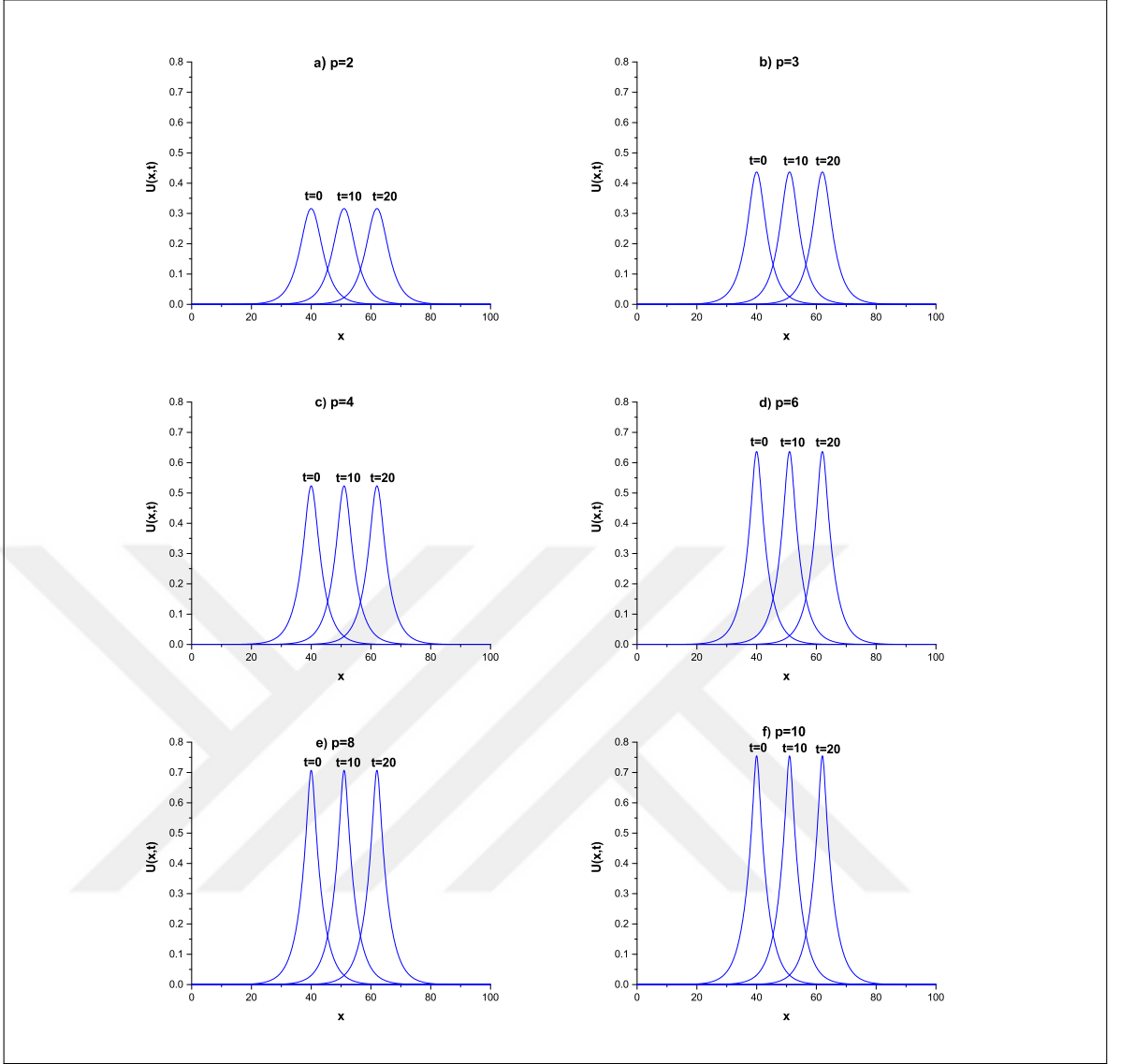
		p=2			p=3			p=4			
$c \rightarrow$		0.03	0.1	0.3	0.03	0.1	0.3	0.03	0.1	0.3	
$gen. \rightarrow$		0.17	0.31	0.54	0.29	0.43	0.62	0.38	0.52	0.68	
h	Δt										
$L_2 \times 10^3$	0.1	0.010	1.002	0.044	0.119	1.343	0.062	0.157	1.585	0.073	0.195
	0.2	0.010	0.889	0.012	0.037	1.192	0.013	0.091	1.407	0.017	0.186
	0.1	0.025	1.002	0.064	0.328	1.343	0.109	0.593	1.585	0.158	0.988
	0.2	0.025	0.889	0.025	0.248	1.192	0.055	0.530	1.407	0.101	0.981
	0.1	0.100	1.004	0.488	4.323	1.353	1.035	8.561	1.611	1.795	16.850
	0.2	0.100	0.891	0.452	4.244	1.201	0.986	8.499	1.430	1.741	16.842
$L_\infty \times 10^3$	0.1	0.010	0.403	0.014	0.051	0.541	0.022	0.072	0.638	0.027	0.095
	0.2	0.010	0.403	0.006	0.017	0.541	0.007	0.043	0.638	0.007	0.091
	0.1	0.025	0.403	0.023	0.143	0.541	0.042	0.277	0.638	0.064	0.482
	0.2	0.025	0.403	0.009	0.105	0.541	0.022	0.245	0.638	0.042	0.475
	0.1	0.100	0.403	0.199	1.894	0.541	0.433	4.016	0.638	0.766	8.235
	0.2	0.100	0.403	0.185	1.854	0.541	0.414	3.984	0.638	0.744	8.213

Tablo 4.15 Tek solitary dalganın $p = 6, 8, 10$; $t = 20$ ve $x \in [0, 100]$ için farklı konum ve zaman adımlarındaki hata norm değerleri

		p=6			p=8			p=10			
$c \rightarrow$		0.03	0.1	0.3	0.03	0.1	0.3	0.03	0.1	0.3	
$gen. \rightarrow$		0.52	0.63	0.76	0.60	0.70	0.81	0.66	0.75	0.84	
h	Δt										
$L_2 \times 10^3$	0.1	0.010	1.900	0.084	0.339	2.094	0.082	0.952	2.225	0.076	3.976
	0.2	0.010	1.686	0.049	0.699	1.858	0.158	2.887	1.974	0.521	13.291
	0.1	0.025	1.901	0.296	2.954	2.095	0.590	12.175	2.228	1.461	57.247
	0.2	0.025	1.686	0.268	3.316	1.859	0.679	14.108	1.976	1.926	66.443
$L_\infty \times 10^3$	0.1	0.010	0.765	0.033	0.178	0.843	0.032	0.529	0.896	0.028	2.298
	0.2	0.010	0.765	0.021	0.366	0.843	0.074	1.591	0.896	0.257	7.601
	0.1	0.025	0.765	0.128	1.563	0.843	0.274	6.802	0.896	0.724	33.005
	0.2	0.025	0.765	0.119	1.750	0.843	0.317	7.808	0.896	0.954	38.021

Tablo 4.16 Tek solitary dalganın $p = 2, 3, 4$ ve $x \in [0, 100]$ için sayısal sonuçlarının karşılaştırılması

		Methods	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	I_1	I_2	I_3
$p = 2$		CBSC-CN [37]	16.3900	9.2400	4.4420	3.2990	1.4130
$c = 1$		CBSC+PA-CN [37]	20.3000	11.2000	4.4400	3.2960	1.4110
$h = 0.2$		CBSC [40]	9.3019	5.4371	4.4428	3.2998	1.4142
$\Delta t = 0.025$		MFC [43]	3.9140	2.0190	4.4428	3.2997	1.4141
$t = 10$		QBSPG [56]	3.0053	1.6874	4.4428	3.2998	1.4141
		QBSC [39]	2.4155	1.0797	4.4431	3.3003	1.4146
		EBSC [59]	2.3909	1.0647	4.4428	3.2998	1.4142
		QBSC	2.5893	1.3518	4.4428	3.2997	1.4143
$p = 3$		QBSPG [56] t=5	0.0409	0.0238	3.6775	1.5657	0.2268
$c = 0.3$		t=10	0.0719	0.0377	3.6775	1.5657	0.2268
$h = 0.1$		QBSC t=5	0.0393	0.0182	3.6776	1.5657	0.2268
$\Delta t = 0.01$		t=10	0.0787	0.0365	3.6776	1.5657	0.2268
$p = 4$		QBSPG [56] t=5	0.0542	0.0382	3.7592	1.7299	0.2894
$c = 0.3$		t=10	0.1225	0.0662	3.7592	1.7299	0.2894
$h = 0.1$		QBSC t=5	0.0497	0.0244	3.7592	1.7300	0.2894
$\Delta t = 0.01$		t=10	0.0987	0.0483	3.7592	1.7300	0.2894



Şekil 4.7 Tek solitary dalganın $p = 2, 3, 4, 6, 8, 10$, $c = 0.1$, $x_0 = 40$, $x \in [0, 100]$ için $t = 0, 10, 20$ 'deki hareketi

4.2.3.2 İki solitary dalganın etkileşimi

İkinci olarak, 2 ve 1 genliklerine sahip aynı yönde hareket eden iki pozitif solitary dalganın etkileşimi,

$$U(x, 0) = \sum_{i=1}^2 p \sqrt{\frac{c_i(p+2)}{2p}} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{p}{2} \sqrt{\frac{c_i}{\mu(c_i+1)}} (x - x_i) \right] \quad (4.43)$$

olarak verilen başlangıç şartı kullanılarak araştırılmıştır. Burada c_i ve x_i , $i = 1, 2$ keyfi sabitlerdir.

Sayısal çalışma için, ilk parametreler $p = 2$, $c_1 = 4$, $c_2 = 1$, $x_1 = 25$, $x_2 = 55$, $h = 0.2$, $\Delta t = 0.025$, $\mu = 1$, $x \in [0, 250]$; ikinci parametreler $p = 3$, $c_1 = 48/5$, $c_2 = 6/5$, $x_1 = 20$, $x_2 = 50$,

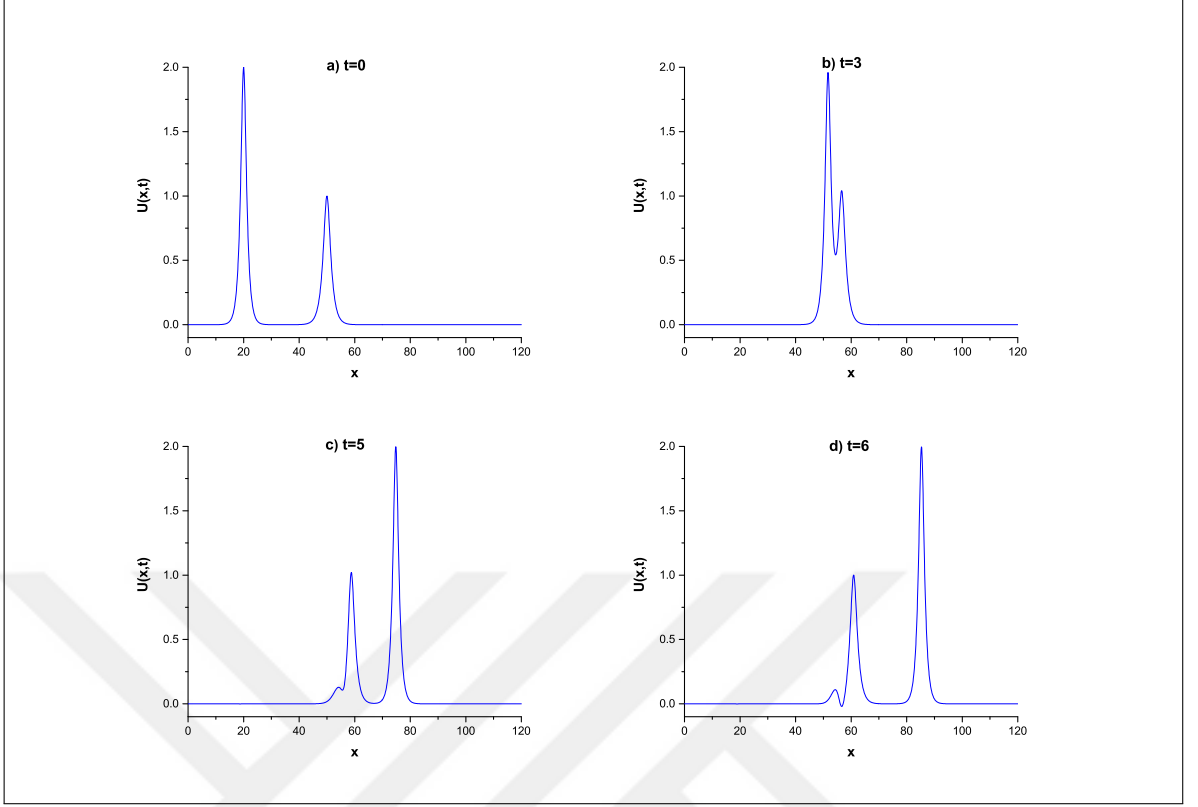
$h = 0.1$, $\Delta t = 0.01$, $\mu = 1$, $x \in [0, 120]$ ve üçüncü parametreler $p = 4$, $c_1 = 64/3$, $c_2 = 4/3$, $x_1 = 20$, $x_2 = 80$, $h = 0.125$, $\Delta t = 0.01$, $\mu = 1$, $x \in [0, 200]$ olarak seçilmiştir. Sayısal veriler Tablo 4.17 ve Tablo 4.18’de gösterilmiştir. Bu tablolara göre korunum sabitlerinin başlangıç hesabına göre değişimleri, oldukça küçüktür ve sonuçlar Roshan’ın elde ettiği sonuçlarla uyumludur [56]. Diğer yandan iki solitary dalganın farklı zaman adımlarındaki hareketi Şekil 4.8 ve Şekil 4.9’da gösterilmiştir. Bu şekillerde görüldüğü gibi, başlangıçta büyük genliğe sahip dalga küçük genliğe sahip dalganın gerisindedir. Zamanla büyük genlikli dalga küçük genlikli dalgayı yakalar ve aynı yönde ilerleyen bu iki dalga çarpışır. Daha sonra bu iki dalga ayrılarak büyük genlikli dalga öne geçerek yollarına devam eder. Bu iki dalganın aynı yönde ilerlerken çarpışması gerçekleştikten sonra dalgaların şekil, hız ve büyüklük gibi kavramları etkilenmez ya da çok az değişir. Bu yüzden bu iki dalga solitondur.

Tablo 4.17 İki solitary dalganın etkileşiminin $p = 2$, $gen. = 2, 1$, $h = 0.2$, $\Delta t = 0.025$ ve $x \in [0, 250]$ için korunum sabitleri

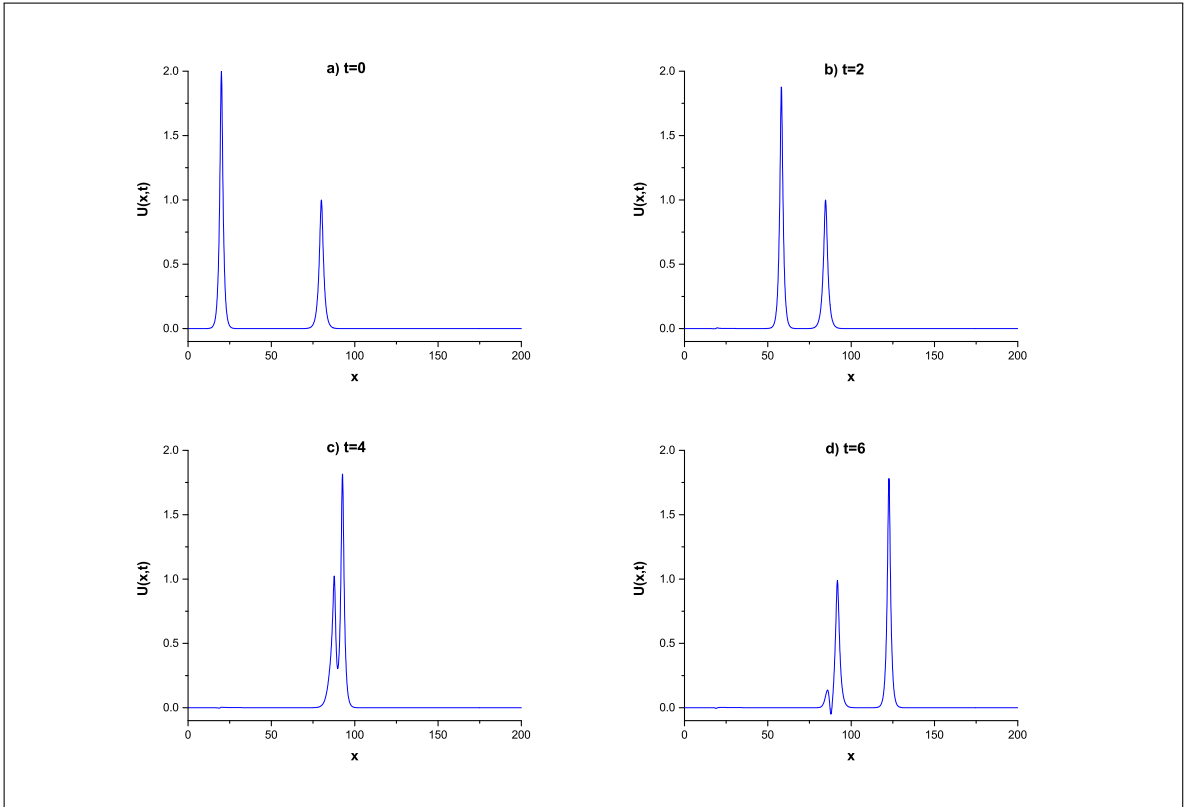
Zaman ↓	I_1		I_2		I_3	
	QBSC	QBSPG [56]	QBSC	QBSPG [56]	QBSC	QBSPG [56]
0	11.4676	11.4677	14.6292	14.6286	22.8803	22.8788
4	11.4676	11.4677	14.6277	14.6292	22.8818	22.8811
8	11.4668	11.4677	14.1399	14.6229	23.3695	22.8798
12	11.4676	11.4677	14.6803	14.6299	22.8292	22.8803
16	11.4676	11.4677	14.6442	14.6295	22.8653	22.8805
20	11.4676	11.4677	14.6309	14.6299	22.8786	22.8806

Tablo 4.18 İki solitary dalganın etkileşiminin $p = 3, 4$ ve $gen. = 2, 1$ için korunum sabitleri

Zaman	0	1	2	3	4	5	6	
p=3	I_1	9.6907	9.6894	9.6881	9.6851	9.6860	9.6848	9.6835
	I_2	12.9443	12.9433	12.9391	12.3044	12.9704	13.0539	13.0028
	I_3	17.0186	17.0197	17.0239	17.6586	16.9926	16.9091	16.9601
p=4	I_1	8.8342	8.6650	8.5662	8.4965	8.4529	8.4089	8.3702
	I_2	12.1708	11.9332	11.7919	11.6913	11.4644	11.7254	11.5990
	I_3	14.0294	14.2670	14.4083	14.5090	14.7358	14.4748	14.6012



Şekil 4.8 İki solitary dalganın $p = 3$; a) $t = 0$, b) $t = 3$, c) $t = 5$, d) $t = 6$ 'daki hareketi



Şekil 4.9 İki solitary dalganın $p = 4$; a) $t = 0$, b) $t = 2$, c) $t = 4$, d) $t = 6$ 'daki hareketi

4.2.3.3 Ardışık dalgaların gelişimi

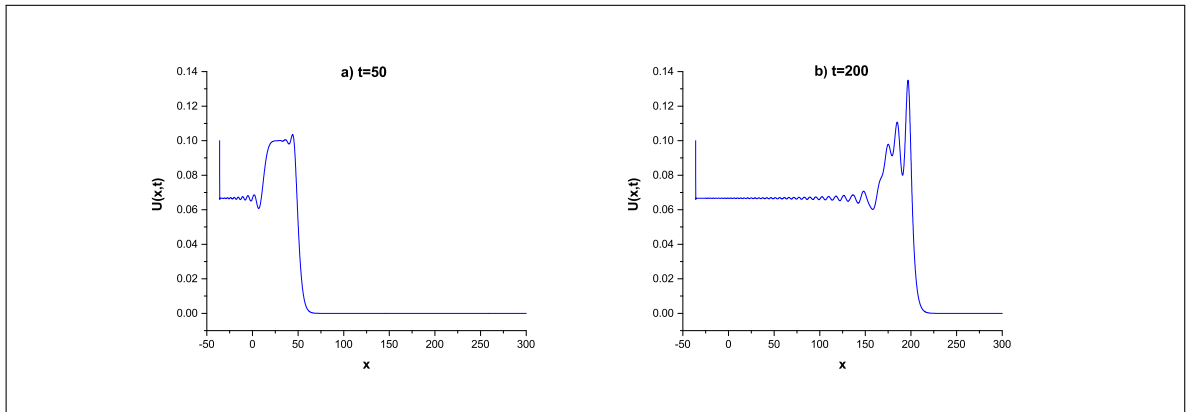
Son olarak, ardışık dalgaların gelişimi aşağıdaki başlangıç şartı ile beraber incelenmiştir:

$$U(x, 0) = \frac{1}{2}U_0 \left[1 - \tanh\left(\frac{x - x_c}{d}\right) \right]. \quad (4.44)$$

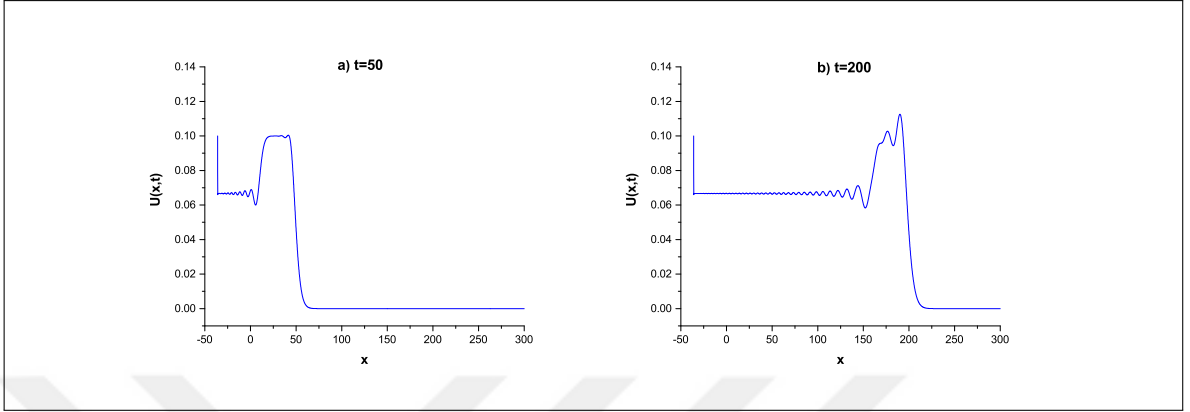
Bu başlangıç şartı $t = 0$ anında denge seviyesinden yukarıda bulunan suyun yükseltisini belirtir. d durgun su ve derin su arasındaki eğimi temsil eder. (4.44) ile verilen su seviyesinin değişimindeki büyüklük, $x = x_c$ noktasına yerleştirilmiştir. Daha önce sunulan çalışmalar [1, 34, 35] ile uyumlu olması için $U_0 = 0.1, \mu = 1/6, x_c = 0, d = 5, h = 0.1, \Delta t = 0.1, x \in [-36, 300]$ parametreleri kullanılmıştır. Üç korunum sabitinin sayısal değeri, Tablo 4.19'da verilmiştir. Bu tabloya göre üç hareket sabitinin değişimi, yüksek zaman periyotunda bile beklenen seviyededir. Ardışık dalgaların hareketi Şekil 4.10, Şekil 4.11 ve Şekil 4.12'de çizilmiştir. Bu üç şekilden anlaşıldığı gibi, seçilen bu başlangıç büyüklüğüne göre uzun bir müddet solitary dalgalarda çok az büyüklü dalgalanmalar oluşur. Daha sonra solitary dalganın ani bir sıçrama hareketi ile genliği büyür ve daha sonra dalga sönmeye başlar.

Tablo 4.19 Ardışık dalgaların gelişimi ve $U_0 = 0.1, x_0 = 0, d = 5, \mu = 1/6, h = 0.1, \Delta t = 0.1, x \in [-36, 300]$ için korunum sabitleri

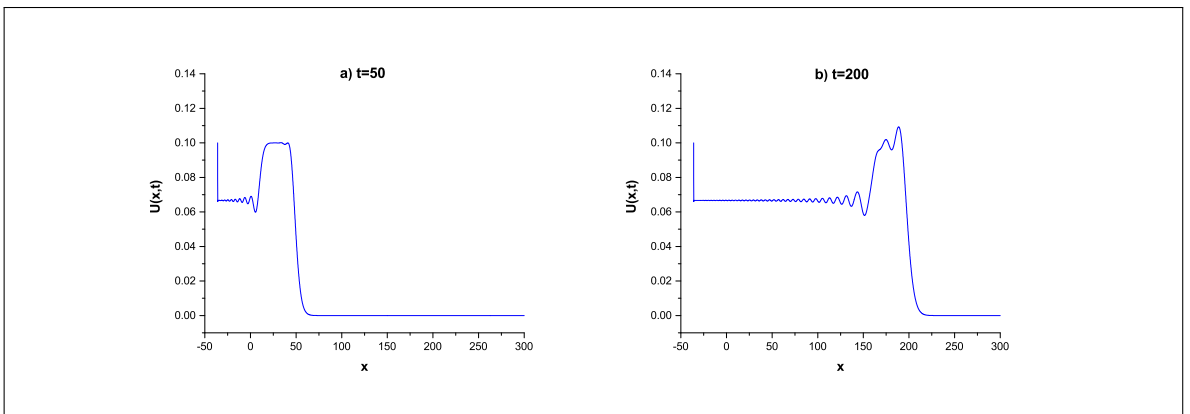
Zaman ↓	I_1			I_2			I_3		
	p=2	p=3	p=4	p=2	p=3	p=4	p=2	p=3	p=4
0	3.6049	3.6049	3.6049	0.3372	0.3372	0.3372	0.0014	0.0014	0.0014
50	7.0244	6.9980	6.9954	0.5694	0.5668	0.5665	0.0041	0.0041	0.0041
100	10.3873	10.3343	10.3290	0.7946	0.7893	0.7888	0.0051	0.0051	0.0051
150	13.7503	13.6706	13.6626	1.0198	1.0119	1.0110	0.0061	0.0061	0.0061
200	17.1133	17.0069	16.9961	1.2450	1.2344	1.2333	0.0071	0.0071	0.0071



Şekil 4.10 $p = 2$; a) $t = 50$, b) $t = 200$ değerleri için ardışık dalgaların gelişimi



Şekil 4.11 $p = 3$; a) $t = 50$, b) $t = 200$ değerleri için ardışık dalgaların gelişimi



Şekil 4.12 $p = 4$; a) $t = 50$, b) $t = 200$ değerleri için ardışık dalgaların gelişimi

4.3 GRLW Denkleminin Kübik B-spline Galerkin Yöntemi ile Sayısal Çözümü

GRLW denklemi aşağıdaki forma sahiptir:

$$U_t + U_x + p(p+1)U^p U_x - \mu U_{xxt} = 0, \quad (4.45)$$

burada fiziksel sınır şartları $x \rightarrow \pm\infty$ iken $U \rightarrow 0$, alt indis t ve x zaman ve boyutsal türevi temsil eder, p pozitif tamsayı, μ ise pozitif sabittir.

Başlangıç şartı olarak,

$$U(x, 0) = f(x), \quad a \leq x \leq b \quad (4.46)$$

ve sınır şartları

$$\begin{aligned} U(a, t) = 0, \quad U_x(a, t) = 0, \\ U(b, t) = 0, \quad U_x(b, t) = 0 \end{aligned} \quad (4.47)$$

olarak alınmıştır.

Öncelikle, $[a, b]$ sonlu aralığına sınırlandırılmış çözüm bölgesi, aralık uzunluğu $h = \frac{b-a}{N} = (x_{m+1} - x_m)$ ve $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ olmak üzere, x_m düğüm noktalarıyla N tane eşit alt aralığa bölünür. $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı fonksiyonlar için bir baz oluşturan $\{\phi_{-1}(x), \phi_0(x), \dots, \phi_{N+1}(x)\}$ kübik B-spline fonksiyonları x_m düğüm noktalarında

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (x - x_{m-2})^3, & x \in [x_{m-2}, x_{m-1}), \\ h^3 + 3h^2(x - x_{m-1}) + 3h(x - x_{m-1})^2 - 3(x - x_{m-1})^3, & x \in [x_{m-1}, x_m), \\ h^3 + 3h^2(x_{m+1} - x) + 3h(x_{m+1} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^3, & x \in [x_m, x_{m+1}), \\ (x_{m+2} - x)^3, & x \in [x_{m+1}, x_{m+2}], \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (4.48)$$

şeklinde tanımlanmıştır [78]. Her bir kübik B-spline ϕ_m fonksiyonu ardışık 4 tane sonlu alt aralığı örter. Bu yüzden her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu alt aralığı 4 adet B-spline fonksiyonu tarafından örtülür. $U_N(x, t)$ yaklaşım fonksiyonu,

$$U_N(x, t) = \sum_{m=-1}^{N+1} \phi_m(x) \delta_m(t) \quad (4.49)$$

şeklinde kübik B-spline şekil fonksiyonları cinsinden tanımlanır. Burada $\delta_m(t)$, zamana bağlı bilinmeyen parametreler olup sınır ve ağırlıklı kalan şartları kullanılarak hesaplanacaktır.

Şimdi $0 \leq \eta \leq 1$ olmak üzere $h\eta = x - x_m$ eşitliği kullanılarak $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı $[0, 1]$ aralığına dönüştürülebilir. Bu halde, (4.48) ile verilen kübik B-spline fonksiyonlarının η değişkenine bağlı olarak $[0, 1]$ aralığı üzerinde,

$$\begin{aligned}\phi_{m-1} &= (1 - \eta)^3, \\ \phi_m &= 1 + 3(1 - \eta) + 3(1 - \eta)^2 - 3(1 - \eta)^3, \\ \phi_{m+1} &= 1 + 3\eta + 3\eta^2 - 3\eta^3, \\ \phi_{m+2} &= \eta^3\end{aligned}\tag{4.50}$$

olarak elde edilir. Burada şunu belirtmeliyizki: $\phi_{m-1}(x)$, $\phi_m(x)$, $\phi_{m+1}(x)$ ve $\phi_{m+2}(x)$ fonksiyonları hariç tüm kübik B-spline fonksiyonlar $[0, 1]$ aralığında sıfırdır. Bu yüzden (4.49) ile verilen yaklaşım fonksiyonu, $[0, 1]$ bölgesinde δ_{m-1} , δ_m , δ_{m+1} , δ_{m+2} eleman parametreleri ve ϕ_{m-1} , ϕ_m , ϕ_{m+1} , ϕ_{m+2} şekil fonksiyonları cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$U_N(\eta, t) = \sum_{j=m-1}^{m+2} \delta_j \phi_j.\tag{4.51}$$

(4.50) ile verilen denklem ve (4.51) ile verilen denklem birlikte değerlendirilerek, U ve onun η ' ya göre U' , U'' türevlerinin $x = x_m$ alındığında $\eta = 0$ olup δ_m parametrelerine göre değerleri

$$\begin{aligned}U_m &= \delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1}, \\ U'_m &= 3(-\delta_{m-1} + \delta_{m+1}), \\ U''_m &= 6(\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1})\end{aligned}\tag{4.52}$$

şeklinde. Burada $'$ ve $''$, η değişkenine göre birinci ve ikinci türevi sembolize etmektedir. Galerkin yaklaşımı, $W(x)$ ağırlık fonksiyonu ile beraber (4.45) ile verilen denkleme uygulanarak, (4.45) ile verilen denklemin zayıf formu aşağıdaki gibi yazılır:

$$\int_a^b W(U_t + U_x + p(p+1)U^p U_x - \mu U_{xxt}) dx = 0.\tag{4.53}$$

$x \rightarrow \eta$ değişken değişimi (4.53) ile verilen integral denklemine uygulanırsa,

$$\int_0^1 W \left(U_t + \frac{1}{h} U_\eta + \frac{p(p+1)}{h} \dot{U}^p U_\eta - \frac{\mu}{h^2} U_{\eta\eta t} \right) d\eta = 0\tag{4.54}$$

elde edilir. Burada \dot{U} , integrali basitleştirmek için bir eleman üzerinde sabit olarak düşünülmüştür. Daha sonra (4.54) ile verilen denkleme birkez kısmi integrasyon uygulanırsa, bu işlem aşağıdaki eşitliği üretir:

$$\int_0^1 [W(U_t + \frac{(1+\lambda)}{h} U_\eta) + \beta W_\eta U_{\eta t}] d\eta = \beta W U_{\eta t} \Big|_0^1,\tag{4.55}$$

burada $\lambda = p(p+1)U^p$ ve $\beta = \frac{\mu}{h^2}$ dir.

Ağırlık fonksiyonu $W(x)$ yerine, (4.50) ile verilen kübik B-spline yaklaşım fonksiyonu alınır ve (4.51) ile verilen yaklaşık çözüm, (4.55) ile verilen denklem de yerine yazılırsa,

$$\sum_{j=m-1}^{m+2} [(\int_0^1 \phi_i \phi_j + \beta \phi_i' \phi_j') d\eta - \beta \phi_i \phi_j'|_0^1] \delta_j^e + \sum_{j=m-1}^{m+2} (\frac{1+\lambda}{h} \int_0^1 \phi_i \phi_j' d\eta) \delta_j^e = 0 \quad (4.56)$$

bulunur. Burada $\delta^e = (\delta_{m-1}, \delta_m, \delta_{m+1}, \delta_{m+2})^T$ ve “.” t ye göre türevi ifade eder. Bu son denklem matris formunda aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$[A^e + \beta(B^e - C^e)] \delta^e + \frac{(1+\lambda)}{h} D^e \delta^e = 0. \quad (4.57)$$

(4.57) ile verilen matris denkleminin elaman matrisleri de

$$A_{ij}^e = \int_0^1 \phi_i \phi_j d\eta = \frac{1}{140} \begin{bmatrix} 20 & 129 & 60 & 1 \\ 129 & 1188 & 933 & 60 \\ 60 & 933 & 1188 & 129 \\ 1 & 60 & 129 & 20 \end{bmatrix},$$

$$B_{ij}^e = \int_0^1 \phi_i' \phi_j' d\eta = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 18 & 21 & -36 & -3 \\ 21 & 102 & -87 & -36 \\ -36 & -87 & 102 & 21 \\ -3 & -36 & 21 & 18 \end{bmatrix},$$

$$C_{ij}^e = \phi_i \phi_j'|_0^1 = 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D_{ij}^e = \int_0^1 \phi_i \phi_j' d\eta = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} -10 & -9 & 18 & 1 \\ -71 & -150 & 183 & 38 \\ -38 & -183 & 150 & 71 \\ -1 & -18 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

şeklindedir ve altındisler $i, j = m - 1, m, m + 1, m + 2$. Buradaki λ katsayısının iki nokta lineerleştirme tekniği uygulanmış formu,

$$\lambda \cong p(p+1) \left[\frac{U_m^n + U_{m+1}^n}{2} \right]^p = \frac{p(p+1)}{2^p} (\delta_{m-1}^n + 5\delta_m^n + 5\delta_{m+1}^n + \delta_{m+2}^n)^p$$

olarak yazılır. Tüm elemanların katkısını beraber düşünerek (4.57) ile verilen matris denkleminin aşağıdaki formu elde edilir:

$$[A + \beta(B - C)]\dot{\delta} + \frac{(1 + \lambda)}{h} D\delta = 0. \quad (4.58)$$

Burada $\delta = (\delta_{-1}, \delta_0, \dots, \delta_N, \delta_{N+1})^T$ düğüm noktasındaki parametrelerdir. A, B, C ve λD septa-diagonal matrislerdir ve bu matrislerin m . satırları,

$$A = \frac{1}{140} (1, 120, 1191, 2416, 1191, 120, 1), \quad B = \frac{1}{10} (-3, -72, -45, 240, -45, -72, -3),$$

$$C = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), \quad D = \frac{1}{20} (-1, -56, -245, 0, 245, 56, 1),$$

$$\lambda D = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} -\lambda_1, -18\lambda_1 - 38\lambda_2, 9\lambda_1 - 183\lambda_2 - 71\lambda_3, 10\lambda_1 + 150\lambda_2 - 150\lambda_3 - 10\lambda_4, \\ 71\lambda_2 + 183\lambda_3 - 9\lambda_4, 38\lambda_3 + 18\lambda_4, \lambda_4 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Burada,

$$\lambda_1 = \frac{p(p+1)}{2^p} (\delta_{m-2} + 5\delta_{m-1} + 5\delta_m + \delta_{m+1})^p,$$

$$\lambda_2 = \frac{p(p+1)}{2^p} (\delta_{m-1} + 5\delta_m + 5\delta_{m+1} + \delta_{m+2})^p,$$

$$\lambda_3 = \frac{p(p+1)}{2^p} (\delta_m + 5\delta_{m+1} + 5\delta_{m+2} + \delta_{m+3})^p,$$

$$\lambda_4 = \frac{p(p+1)}{2^p} (\delta_{m+1} + 5\delta_{m+2} + 5\delta_{m+3} + \delta_{m+4})^p.$$

(4.58) ile verilen denkleme, $\dot{\delta} = \frac{\delta^{n+1} - \delta^n}{\Delta t}$ ileri sonlu fark ve $\delta = \frac{1}{2}(\delta^n + \delta^{n+1})$ Crank-Nicolson yaklaşımları uygulanırsa, aşağıdaki matris form elde edilir:

$$[A + \beta(B - C) + \frac{(1 + \lambda)\Delta t}{2h} D]\delta^{n+1} = [A + \beta(B - C) - \frac{(1 + \lambda)\Delta t}{2h} D]\delta^n. \quad (4.59)$$

Bu aşamadan sonra (4.47) ile verilen sınır şartları matris denkleminde (cebirsal denklem sistemine) dahil edilerek, $(N + 3) \times (N + 3)$ boyutlu matris sistemi (4.59), $(N + 1) \times (N + 1)$ boyutlu matris sistemine dönüşür. Bu işlem aşaması sınır değerlerinin işleme basit bir şekilde dahil edilmesi olarak bilinir ve başlangıç iterasyonun hesaplanması kısmında açıklanmıştır. A, B, C ve D matrislerinin m . satırları 7 elemanlıdır, bu yüzden (4.59) ile verilen cebirsal denklem sistemi 7 sütun elemanlı diagonal matrislerden oluşur (septa-diagonal matris olarak adlandırılır). Septa-diagonal matris sistemi de Thomas algoritması ile aşağıda alt bölüm

4.3.1'de açıklandığı gibi kolaylıkla çözülür. Bu çözüm prosedüründe lineer olmamanın üstesinden gelebilmek için her bir zaman adımında

$$(\delta_m^*)^{n+1} = \delta_m^n + \frac{1}{2}(\delta_m^{n+1} - \delta_m^n)$$

formülü ile üç veya dört defa iç iterasyon uygulanarak çözüm iyileştirilir. Tüm bu işlemlerden sonra (4.59) ile verilen matris denklem sisteminin basit bir sonucu olan iki zaman adımı n ve $n + 1$ arasındaki tekrarlama bağıntısı,

$$\begin{aligned} \gamma_1 \delta_{m-3}^{n+1} + \gamma_2 \delta_{m-2}^{n+1} + \gamma_3 \delta_{m-1}^{n+1} + \gamma_4 \delta_m^{n+1} + \gamma_5 \delta_{m+1}^{n+1} + \gamma_6 \delta_{m+2}^{n+1} + \gamma_7 \delta_{m+3}^{n+1} = \\ \gamma_7 \delta_{m-3}^n + \gamma_6 \delta_{m-2}^n + \gamma_5 \delta_{m-1}^n + \gamma_4 \delta_m^n + \gamma_3 \delta_{m+1}^n + \gamma_2 \delta_{m+2}^n + \gamma_1 \delta_{m+3}^n \end{aligned} \quad (4.60)$$

olarak yazılır. Burada,

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{1}{140} - \frac{3\beta}{10} - \frac{(1+\lambda)\Delta t}{40h}, & \gamma_2 &= \frac{120}{140} - \frac{72\beta}{10} - \frac{56(1+\lambda)\Delta t}{40h}, \\ \gamma_3 &= \frac{1191}{140} - \frac{45\beta}{10} - \frac{245(1+\lambda)\Delta t}{40h}, & \gamma_4 &= \frac{2416}{140} + \frac{240\beta}{10}, \\ \gamma_5 &= \frac{1191}{140} - \frac{45\beta}{10} + \frac{245(1+\lambda)\Delta t}{40h}, & \gamma_6 &= \frac{120}{140} - \frac{72\beta}{10} + \frac{56(1+\lambda)\Delta t}{40h}, \\ \gamma_7 &= \frac{1}{140} - \frac{3\beta}{10} + \frac{(1+\lambda)\Delta t}{40h}. \end{aligned}$$

Başlangıç iterasyonu

Çözüm aşamasında, (4.59) ile verilen cebirsel denklem sistemin de iterasyonu başlatabilmek için d^0 başlangıç değeri (4.61) ile verilen başlangıç şartları kullanılarak bulunur. Yaklaşık çözümün başlangıç formu,

$$U_N(x, 0) = \sum_{m=-1}^{N+1} \phi_m(x) \delta_m^0(t)$$

şeklindeir. Başlangıç şartı ve sınır noktalarındaki türevler ise

$$\begin{aligned} U_N(x, 0) = U(x_m, 0) = f(x); \quad m = 0, 1, 2, \dots, N \\ (U_N)_x(a, 0) = 0, \quad (U_N)_x(b, 0) = 0 \end{aligned} \quad (4.61)$$

olarak verilir. Başlangıç şartı ve sınır noktalarındaki türevler δ_m parametrelerine göre

zaman adımında bir önceki parametreden bulunan değerler kullanılarak (iterasyon yapılarak) GRLW denkleminin sayısal çözümü bulunmuş olur.

4.3.1 Thomas algoritması ile septa-diagonal matris sisteminin çözümü

Septa-diagonal sistem aşağıdaki formda ifade edilebilir:

$$a_i \delta_{i-3} + b_i \delta_{i-2} + c_i \delta_{i-1} + d_i \delta_i + e_i \delta_{i+1} + f_i \delta_{i+2} + g_i \delta_{i+3} = h_i, \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

Burada $a_0 = b_0 = c_0 = a_1 = b_1 = a_2 = g_{N-2} = g_{N-1} = f_{N-1} = g_N = f_N = e_N = 0$ alınmıştır.

İlk aşamada, parametreler aşağıdaki gibi seçilir:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= b_0, & \beta_0 &= c_0, & \mu_0 &= d_0, & \zeta_0 &= \frac{e_0}{\mu_0}, & \lambda_0 &= \frac{f_0}{\mu_0}, & \eta_0 &= \frac{g_0}{\mu_0}, & \gamma_0 &= \frac{h_0}{\mu_0}, \\ \alpha_1 &= b_1, & \beta_1 &= c_1, & \mu_1 &= d_1 - \beta_1 \zeta_0, & \zeta_1 &= \frac{e_1 - \beta_1 \lambda_0}{\mu_1}, & \lambda_1 &= \frac{f_1 - \beta_1 \gamma_0}{\mu_1}, \\ \eta_1 &= \frac{g_1}{\mu_1}, & \gamma_1 &= \frac{h_1 - \beta_1 \gamma_0}{\mu_1} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= b_2, & \beta_2 &= c_2 - \alpha_2 \zeta_0, & \mu_2 &= d_2 - \lambda_0 \alpha_2 - \beta_2 \zeta_1, & \zeta_2 &= \frac{e_2 - \eta_0 \alpha_2 - \beta_2 \lambda_1}{\mu_2}, \\ \lambda_2 &= \frac{f_2 - \beta_2 \eta_1}{\mu_2}, & \eta_2 &= \frac{g_2}{\mu_2}, & \gamma_2 &= \frac{h_2 - \alpha_2 \gamma_0 - \beta_2 \gamma_1}{\mu_2}. \end{aligned}$$

Daha sonra, aşağıdaki parametreler bulunur:

$$\begin{aligned} \alpha_i &= b_i - a_i \zeta_{i-3}, & \beta_i &= c_i - a_i \lambda_{i-3} - \alpha_i \zeta_{i-2}, & \mu_i &= d_i - a_i \eta_{i-3} - \lambda_{i-2} \alpha_i - \beta_i \zeta_{i-1}, \\ \zeta_i &= \frac{e_i - \eta_{i-2} \alpha_i - \beta_i \lambda_{i-1}}{\mu_i}, & \lambda_i &= \frac{f_i - \beta_i \eta_{i-1}}{\mu_i}, & \eta_i &= \frac{g_i}{\mu_i}, \\ \gamma_i &= \frac{h_i - \beta_i \gamma_{i-1} - \alpha_i \gamma_{i-2} - a_i \gamma_{i-3}}{\mu_i}, & i &= 3, 4, \dots, N. \end{aligned}$$

Bu iki adımdan sonra çözüm aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\delta_{N-2} = \gamma_{N-2} - \lambda_{N-2} \delta_N - \eta_{N-2} \delta_{N-1}, \quad \delta_{N-1} = \gamma_{N-1} - \eta_{N-1} \delta_N, \quad \delta_N = \gamma_N,$$

$$\delta_i = \gamma_i - \zeta_i \delta_{i+1} - \lambda_i \delta_{i+2} - \eta_i \delta_{i+3}, \quad i = 0, 1, \dots, N-4, N-3.$$

4.3.2 Lineer kararlılık analizi

Sayısal algoritmanın lineer kararlılık analizi için Fourier yöntemi kullanıldı. Ayrıca, GRLW denkleminin $U^P U_x$ lineer olmayan terimindeki U^P teriminin bölgesel olarak sabit olduğu kabul edildi. k mod numarası ve h eleman büyüklüğü olmak üzere,

$$\delta_m^n = g^n e^{imkh} \quad (i = \sqrt{-1})$$

ile verilen Fourier mod (4.60) ile verilen denklem de yerine yazılırsa, bu işlem aşağıdaki eşitliği üretir:

$$\begin{aligned}
& \gamma_1 g^{n+1} e^{i(m-3)kh} + \gamma_2 g^{n+1} e^{i(m-2)kh} + \gamma_3 g^{n+1} e^{i(m-1)kh} + \gamma_4 g^{n+1} e^{i(m)kh} \\
& + \gamma_5 g^{n+1} e^{i(m+1)kh} + \gamma_6 g^{n+1} e^{i(m+2)kh} + \gamma_7 g^{n+1} e^{i(m+3)kh} = \\
& \gamma_7 g^n e^{i(m-3)kh} + \gamma_6 g^n e^{i(m-2)kh} + \gamma_5 g^n e^{i(m-1)kh} + \gamma_4 g^n e^{i(m)kh} \\
& + \gamma_3 g^n e^{i(m+1)kh} + \gamma_2 g^n e^{i(m+2)kh} + \gamma_1 g^n e^{i(m+3)kh}.
\end{aligned} \tag{4.63}$$

Şimdi, $e^{ikh} = \cos(kh) + i \sin(kh)$ Euler formülü (4.63) ile verilen denklem de kullanılır ve elde edilen denklem basitleştirilirse,

$$g = \frac{a - ib}{a + ib}$$

büyüme faktörü elde edilir. Burada,

$$a = \gamma_4 + (\gamma_5 + \gamma_3) \cos[hk] + (\gamma_6 + \gamma_2) \cos[2hk] + (\gamma_7 + \gamma_1) \cos[3hk],$$

$$b = (\gamma_5 - \gamma_3) \sin[hk] + (\gamma_6 - \gamma_2) \sin[2hk] + (\gamma_7 - \gamma_1) \sin[3hk].$$

$|g|$ nin modülü 1 olup lineerleştirilmiş algoritma şartsız kararlıdır.

4.3.3 Sayısal örnekler ve sonuçlar

Bu bölümde, iki nokta lineerleştirme tekniği ile beraber Galerkin yöntemi tek solitary dalga, iki solitary dalganın etkileşimi ve ardışık dalganın gelişimini içeren üç örneğe uygulanmıştır. Bu üç örnek başlangıç şartının farklı değerleri kullanılarak oluşturulmuştur. L_2 ve L_∞ hata normları, sunulan sayısal yöntemin etkinliğini ve doğruluğunu kanıtlamak için (4.65) ile verilen tam solitary dalga çözüm ve

$$L_2 = \|U^{tam} - U_N\|_2 \simeq \sqrt{h \sum_{j=0}^N |U_j^{tam} - (U_N)_j|^2},$$

$$L_\infty = \|U^{tam} - U_N\|_\infty \simeq \max_j |U_j^{tam} - (U_N)_j|$$

hata norm eşitlikleri kullanılarak hesaplanmıştır. Üstelik, sayısal yaklaşımın kütle, momentum ve enerji ile ilgili özellikleri koruduğunu belirtmek için,

$$I_1 = \int_a^b U dx, \quad I_2 = \int_a^b [U^2 + \mu(U_x)^2] dx, \quad I_3 = \int_a^b [U^4 - \mu(U_x)^2] dx \tag{4.64}$$

korunum sabitlerindeki değişim gözlemlenmiştir. Gardner ve arkadaşları [37], Roshan [56] tarafından sunulan GRLW dekleminin tam solitary dalga çözümü aşağıdaki forma sahiptir:

$$U(x, t) = \sqrt{\frac{c(p+2)}{2p}} \sec h^2 \left[\frac{p}{2} \sqrt{\frac{c}{\mu(c+1)}} (x - (c+1)t - x_0) \right]. \tag{4.65}$$

Burada $\sqrt[p]{\frac{c(p+2)}{2p}}$ dalganın genliği, $c + 1$ pozitif x yönünde ilerleyen dalganın hızı ve x_0 keyfi sabittir.

4.3.3.1 Tek solitary dalganın hareketi

Bu problem için başlangıç şartı

$$U(x, 0) = \sqrt[p]{\frac{c(p+2)}{2p}} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{p}{2} \sqrt{\frac{c}{\mu(c+1)}} (x - x_0) \right],$$

olarak alındı. [33, 37, 39, 40, 43, 56, 59] çalışmaları ile uyumlu olması için $\mu = 1$, $x_0 = 40$, $x \in [0, 100]$ parametreleri ve p , c , konum adımı h , zaman adımı Δt parametrelerinin farklı değerleri alınmıştır. Sayısal hesaplamalar $t = 0$ dan $t = 10$ veya $t = 20$ zamanına kadar yapılmıştır.

İlk olarak, $p = 2$, $c = 1$, $h = 0.2$, $\Delta t = 0.025$ ve $p = 2$, $c = 0.3$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.01$ büyüklükleri alındı. Bu değerler $gen. = 1$ ve $gen. = 0.54772$ genliklerine sahip solitary dalgalar üretir. Hesaplanan korunum sabitlerinin ve hata normlarının sayısal değerleri Tablo 4.20 ve Tablo 4.21'de verildi. Tablo 4.20'ye göre I_1 , I_2 , I_3 korunum sabitlerinin başlangıç durumuna göre değişim oranları, sırasıyla %0.04, %0.05 ve %0.05 değerlerinden daha küçük hesaplanmıştır. Tablo 4.21 ye göre ise korunum sabitleri zaman ilerledikçe hemen hemen sabit olarak kalmaktadır. Hata normları ise hesaplama boyunca yeterince küçüktür. $gen. = 0.54772$ genliğine sahip solitary dalga için L_2 ve L_∞ hata normlarının sayısal değeri de 1.23×10^{-4} ve 0.45×10^{-4} değerlerinden daha küçük hesaplanmıştır.

İkinci durumda, $p = 3$, $c = 1.2$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.025$ ve $p = 3$, $c = 0.3$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.01$ parametre değerleri alındı. Bu parametrelere göre solitary dalga $gen. = 1$ ve $gen. = 0.6$ genliklerine sahip olur. Korunum sabitlerinin ve hata normlarının büyüklükleri Tablo 4.22 ve Tablo 4.23'de listelenmiştir. Tablo 4.22'de görüldüğü gibi I_1 , I_2 , I_3 korunum sabitlerindeki değişim oranları, sırasıyla %0.5, %0.7 ve %0.7 den daha az bulunmuştur. Tablo 4.23 gösterir ki: Korunum sabitleri zaman ilerledikçe hemen hemen değişmeden durmaktadır. Hata normları ise hesaplama boyunca istenildiği gibi küçüktür. $gen. = 0.6$ genliğine sahip solitary dalga için L_2 ve L_∞ hata normlarının sayısal değerleri de 1.92×10^{-4} ve 0.89×10^{-4} değerlerinden daha küçüktür.

Üçüncü olarak, eğer $p = 4$, $c = 4/3$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.01$ ve $p = 4$, $c = 0.3$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.01$ parametreleri seçildiğinde solitary dalga $gen. = 1$ ve $gen. = 0.6$ yüksekliklerine sahip

olur. Korunum sabitlerinin ve hata normlarının hesaplanan değerleri Tablo 4.24 ve Tablo 4.25’de verilmiştir. Tablo 4.24; I_1, I_2, I_3 korunum sabitlerindeki değişim oranlarının, sırasıyla %0.2, %0.3 ve %0.3 den daha kck olduğunu ifade etmektedir. Diğer yandan, bu değişim oranları Tablo 4.25’de olduka kcktr. $p = 2, 3$ parametre değerlerinde de olduğu gibi hata normlarının sayısal değeri makul oranda kcktr. $gen. = 0.6$ genliğine sahip solitary dalga iin L_2 ve L_∞ hata normlarının sayısal değerleri de 3.09×10^{-4} ve 1.45×10^{-4} değerlerinden daha kcktr.

Tablo 4.20 Tek solitary dalganın $p = 2$, $gen. = 1$, $h = 0.2$, $\Delta t = 0.025$ ve $x \in [0, 100]$ iin korunum sabitleri ve hata norm değerleri

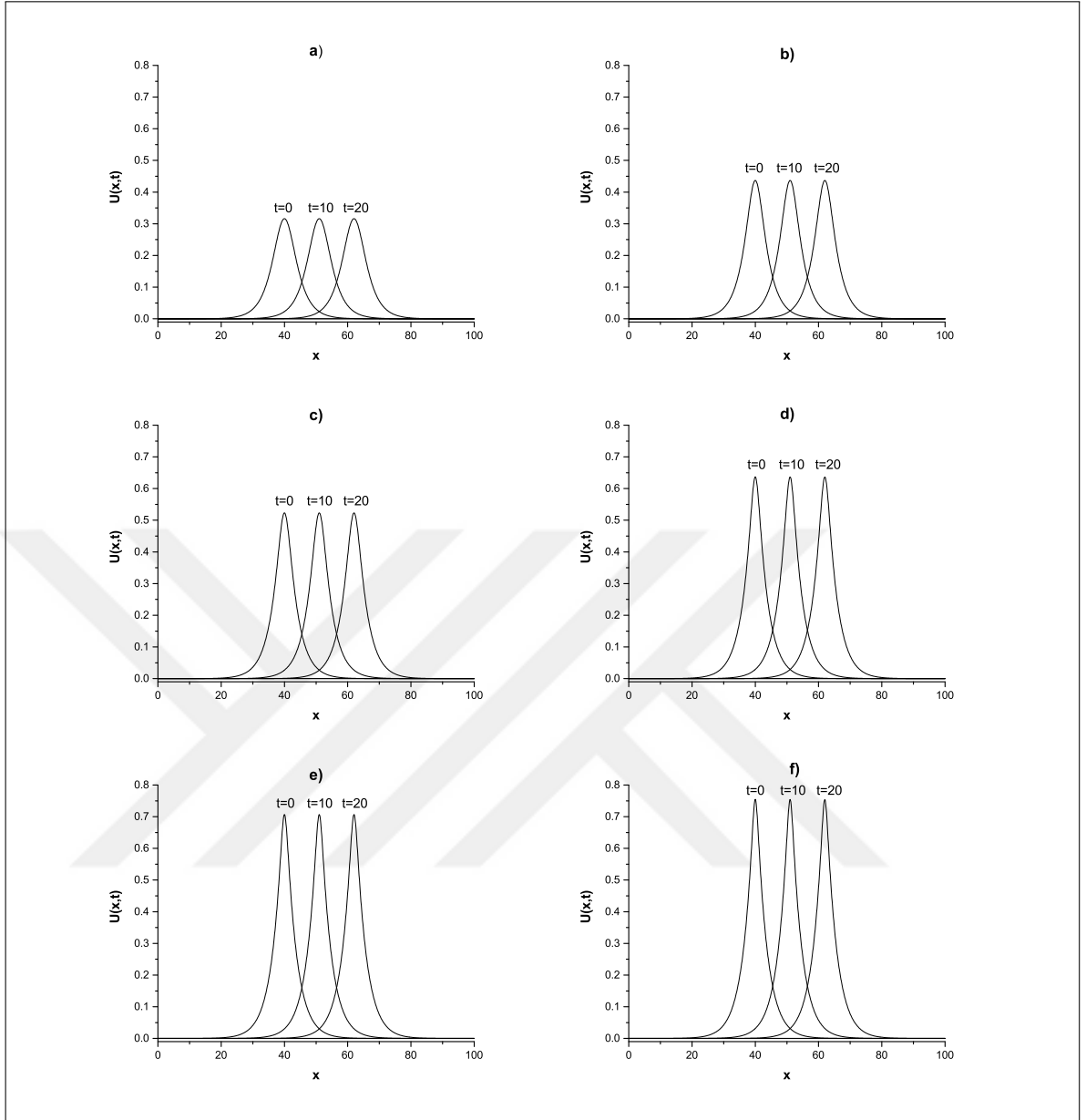
Zaman	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0	4.4428661	3.2998133	1.4142140	0.00000000	0.00000000
2	4.4429408	3.2999387	1.4143308	1.95082039	1.19160336
4	4.4430058	3.3000340	1.4144250	2.36484347	1.22370847
6	4.4430683	3.3001243	1.4145151	2.45181423	1.20000405
8	4.4431302	3.3002134	1.4146042	2.45030808	1.15204959
10	4.4431919	3.3003022	1.4146930	2.41750291	1.08099621

Tablo 4.21 Tek solitary dalganın $p = 2$, $gen. = 0.54772$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.01$ ve $x \in [0, 100]$ iin korunum sabitleri ve hata norm değerleri

Zaman	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^4$	$L_\infty \times 10^4$
0	3.5820205	1.3450941	0.1537283	0.00000000	0.00000000
4	3.5820206	1.3450942	0.1537284	0.87664666	0.42835220
8	3.5820207	1.3450943	0.1537284	1.09331524	0.42259060
12	3.5820207	1.3450943	0.1537284	1.16711699	0.42542846
16	3.5820207	1.3450944	0.1537284	1.20368923	0.43881496
20	3.5820206	1.3450944	0.1537284	1.22736382	0.44722941

Tablo 4.22 Tek solitary dalganın $p = 3$, $gen. = 1$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.025$ ve $x \in [0, 100]$ iin korunum sabitleri ve hata norm değerleri

Zaman	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0	3.7971850	2.8812503	0.9729681	0.00000000	0.00000000
2	3.7980891	2.8826274	0.9747778	6.37523435	4.16206480
4	3.7989816	2.8839827	0.9760069	10.53160077	6.58017074
6	3.7998750	2.8853393	0.9771207	13.02367954	8.10106559
8	3.8007710	2.8867002	0.9782095	13.93740889	8.73017950
10	3.8016702	2.8880662	0.9792942	13.29108053	8.47810737



Şekil 4.13 Tek solitary dalganın a) $p = 2$, b) $p = 3$, c) $p = 4$, d) $p = 6$, e) $p = 8$, f) $p = 10$ ve $c = 0.1$, $x_0 = 40$, $x \in [0, 100]$ için $t = 0, 10, 20$ 'deki hareketi

Tablo 4.23 Tek solitary dalganın $p = 3$, $gen. = 0.6$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.01$ ve $x \in [0, 100]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri

Zaman	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^4$	$L_\infty \times 10^4$
0	3.6776069	1.5657603	0.2268463	0.00000000	0.00000000
2	3.6776071	1.5657606	0.2268544	1.18720589	0.73102952
4	3.6776072	1.5657607	0.2268573	1.60659681	0.88913800
6	3.6776072	1.5657607	0.2268575	1.76861454	0.81537826
8	3.6776072	1.5657607	0.2268575	1.85663605	0.75460192
10	3.6776072	1.5657608	0.2268574	1.91332225	0.77992648

Tablo 4.24 Tek solitary dalganın $p = 4$, $gen. = 1$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.025$ ve $x \in [0, 100]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri

Zaman	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0	3.4687090	2.6716914	0.7292045	0.00000000	0.00000000
2	3.4690660	2.6722659	0.7305244	2.71272493	1.97322350
4	3.4694090	2.6728105	0.7309610	3.80159123	2.65902173
6	3.4697519	2.6733547	0.7313161	3.84205549	2.71392029
8	3.4700954	2.6738997	0.7316538	2.88903866	2.11361885
10	3.4704395	2.6744459	0.7319875	1.51139451	0.85758574

Tablo 4.25 Tek solitary dalganın $p = 4$, $gen. = 0.6$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.01$ ve $x \in [0, 100]$ için korunum sabitleri ve hata norm değerleri

Zaman	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^4$	$L_\infty \times 10^4$
0	3.7592865	1.7300236	0.2894191	0.00000000	0.00000000
2	3.7592871	1.7300246	0.2894498	1.91721709	1.20079691
4	3.7592873	1.7300248	0.2894559	2.45184081	1.44560973
6	3.7592874	1.7300249	0.2894566	2.70531310	1.21535724
8	3.7592874	1.7300250	0.2894569	2.90077790	1.31685490
10	3.7592875	1.7300251	0.2894570	3.08940237	1.44471990

Son olarak, $p = 2, 3, 4, 6, 8, 10$, $c = 0.03$, $c = 0.1$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.01$ parametre değerleri alındı. Bu parametre değerlerine göre hata normlarının sayısal verileri Tablo 4.26'da gösterilmiştir. Bu tablodan açıkça görülmektedir ki: Hata değerleri beklenildiği gibi küçük ve hesaplama süresince 5.2×10^{-3} den daha küçük kalmaktadır. Ek olarak, tek solitary dalganın farklı zamanlarda ve farklı p değerlerindeki hareketleri Şekil 4.13'de görüntülenmiştir. Bu şekle göre artan p değerine göre dalganın genliğide de artmaktadır. $t = 0$ dan $t = 20$ zamanına kadar dalga hareketi incelendiğinde dalganın genlik, hız ve şeklinde herhangi bir değişme olmadan veya çok az bir değişimle sağa doğru ilerlediği görülmektedir. Yani bu dalgalar solitary dalgadır.

Tablo 4.27'de sunulan algoritmayla daha önceki yöntemlerle elde edilen hata normlarının ve korunum sabitlerinin sayısal değerlerinin karşılaştırılması yapılmıştır. Bu tablodaki verilere göre I_1 , I_2 , I_3 korunum sabitleri daha önce hesaplanan değerler ile oldukça uyumludur. Hata norm değerleri ise daha önce hesaplanana göre en iyi sonuçlardan birisidir. Bu iki sonuca göre sayısal algoritmanın etkin ve isabetli bir yöntem olduğu söylenebilir.

Tablo 4.26 Tek solitary dalganın $p = 2, 3, 4, 6, 8, 10$, $c = 0.03, 0.1$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.01$ ve $x \in [0, 100]$ için hata norm değerleri

		p=2		p=3		p=4		p=6		p=8		p=10	
$c \rightarrow$		0.03	0.1	0.03	0.1	0.03	0.1	0.03	0.1	0.03	0.1	0.03	0.1
$gen. \rightarrow$		0.17	0.31	0.29	0.43	0.38	0.52	0.52	0.63	0.60	0.70	0.66	0.75
Zaman													
$L_2 \times 10^4$	5	4.36	0.16	5.84	0.37	6.89	0.65	8.26	1.44	9.12	2.76	9.71	5.09
	10	5.15	0.27	6.91	0.52	8.15	0.88	9.78	2.24	10.80	5.61	11.53	13.26
	15	5.28	0.36	7.08	0.63	8.35	1.08	10.02	3.25	11.08	9.92	11.91	27.67
	20	5.54	0.44	7.43	0.74	8.77	1.29	10.53	4.51	11.67	15.92	12.66	51.36
$L_\infty \times 10^4$	5	2.21	0.09	2.96	0.21	3.49	0.36	4.18	0.82	4.61	1.68	4.90	3.20
	10	2.11	0.13	2.83	0.25	3.33	0.43	4.00	1.18	4.41	3.09	4.68	7.34
	15	2.01	0.16	2.69	0.29	3.18	0.51	3.81	1.66	4.20	5.12	4.46	14.39
	20	4.16	0.19	5.57	0.34	6.58	0.61	7.88	2.22	8.69	7.88	9.23	25.82

Tablo 4.27 Tek solitary dalganın $p = 2, 3, 4$ ve $x \in [0, 100]$ için sayısal sonuçlarının karşılaştırılması

	Methods	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	I_1	I_2	I_3
$p = 2$	CBSC-CN [27]	16.3900	9.2400	4.4420	3.2990	1.4130
$c = 1$	CBSC+PA-CN [27]	20.3000	11.2000	4.4400	3.2960	1.4110
$h = 0.2$	CBSC [40]	9.3019	5.4371	4.4428	3.2998	1.4142
$\Delta t = 0.025$	MFC [43]	3.9140	2.0190	4.4428	3.2997	1.4141
$t = 10$	QBSPG [56]	3.0053	1.6874	4.4428	3.2998	1.4141
	QBSC [39]	2.4155	1.0797	4.4431	3.3003	1.4146
	EBSC [59]	2.3909	1.0647	4.4428	3.2998	1.4142
	CBSG	2.4175	1.0809	4.4431	3.3003	1.4146
$p = 3$	QBSPG [56] t=1	0.0101	0.0080	3.6775	1.5657	0.2268
$c = 0.3$	t=5	0.0409	0.0238	3.6775	1.5657	0.2268
$h = 0.1$	t=10	0.0719	0.0377	3.6775	1.5657	0.2268
$\Delta t = 0.01$	CBSG t=1	0.0706	0.0514	3.6776	1.5657	0.2268
	t=5	0.1702	0.0876	3.6776	1.5657	0.2268
	t=10	0.1913	0.0779	3.6776	1.5657	0.2268
$p = 4$	QBSPG [56] t=1	0.0158	0.0138	3.7592	1.7299	0.2894
$c = 0.3$	t=5	0.0542	0.0382	3.7592	1.7299	0.2894
$h = 0.1$	t=10	0.1225	0.0662	3.7592	1.7299	0.2894
$\Delta t = 0.01$	CBSG t=1	0.1222	0.0983	3.7592	1.7300	0.2894
	t=5	0.2591	0.1357	3.7592	1.7300	0.2894
	t=10	0.3089	0.1444	3.7592	1.7300	0.2894

4.3.3.2 İki solitary dalganın etkileşimi

İkinci problem olarak

$$U(x, 0) = \sum_{i=1}^2 \sqrt[p]{\frac{c_i(p+2)}{2p}} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{p}{2} \sqrt{\frac{c_i}{\mu(c_i+1)}} (x - x_i) \right] \quad (4.66)$$

başlangıç şartı için çözümler incelendi. Bu başlangıç şartı ile $gen. = 2$ ve $gen. = 1$ genliklerine sahip aynı yönde hareket eden iki pozitif solitary dalga oluşur. Burada c_i ve x_i , $i = 1, 2$ keyfi sabitlerdir.

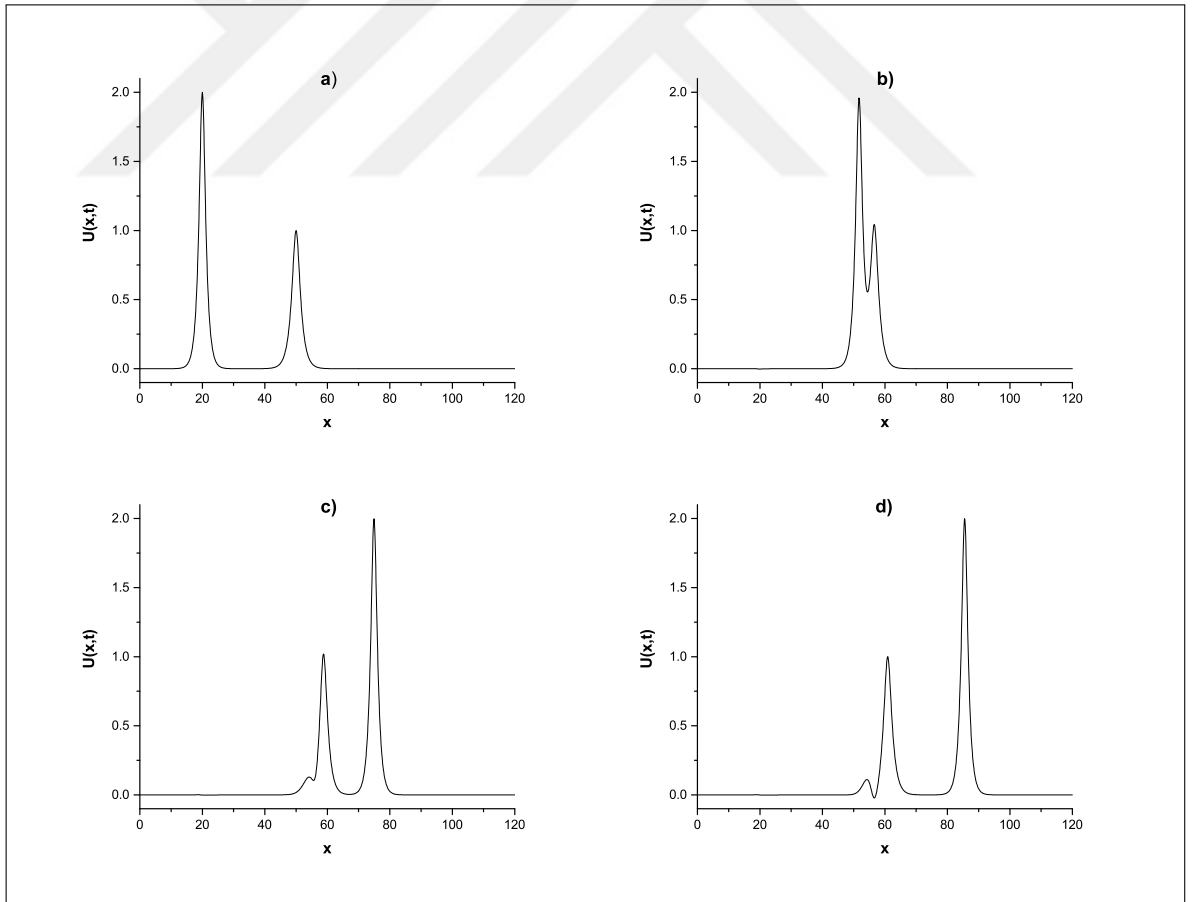
İlk olarak $p = 2$, $c_1 = 4$, $c_2 = 1$, $x_1 = 25$, $x_2 = 55$, $h = 0.2$, $\Delta t = 0.025$, $\mu = 1$, $x \in [0, 250]$; ikinci olarak $p = 3$, $c_1 = 48/5$, $c_2 = 6/5$, $x_1 = 20$, $x_2 = 50$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.01$, $\mu = 1$, $x \in [0, 120]$ ve üçüncü olarak $p = 4$, $c_1 = 64/3$, $c_2 = 4/3$, $x_1 = 20$, $x_2 = 80$, $h = 0.125$, $\Delta t = 0.01$, $\mu = 1$, $x \in [0, 200]$ olarak seçilmiştir. Sayısal hesaplamalar Tablo 4.28 ve Tablo 4.29'da verilmiştir. Tablolardaki sonuçlara göre korunum sabitlerinin başlangıç hesabına göre değişimleri yeterince küçük ve sonuçlar [56] ile oldukça uyumludur. İki solitary dalganın farklı zaman adımlarındaki hareketi Şekil 4.14 ve Şekil 4.15'de grafik çizilerek gösterilmiştir. Bu grafikler gösterir ki başlangıçta büyük genliğe sahip dalga küçük genliğe sahip dalganın solunda konumlandırılmıştır. Solitary dalga teorisinde de bahsedildiği gibi büyük genliğe sahip dalganın hızı daha büyüktür. Bu yüzden zaman ilerledikçe büyük genlikli dalganın küçük genlikli dalgayı yakaladığı görülmektedir. Belirli bir zaman sonra ise büyük genlikli dalga küçük genlikli dalganın üzerine biner. Yani dalgalar aynı yönde ilerlerken çarpışma gerçekleşir. Daha sonra bu iki dalga birbirinden ayrılmaya başlar. Ayrılmadan sonra büyük genlikli dalga önde küçük genlikli dalga arkada olarak mevcut hız, şekil ve genliklerini koruyarak yollarına devam ederler. Sonuç olarak bu dalgalara solitonlardır diyebiliriz.

Tablo 4.28 İki solitary dalganın etkileşiminin $p = 2$, $gen. = 2, 1$, $h = 0.2$, $\Delta t = 0.025$ ve $x \in [0, 250]$ için korunum sabitleri

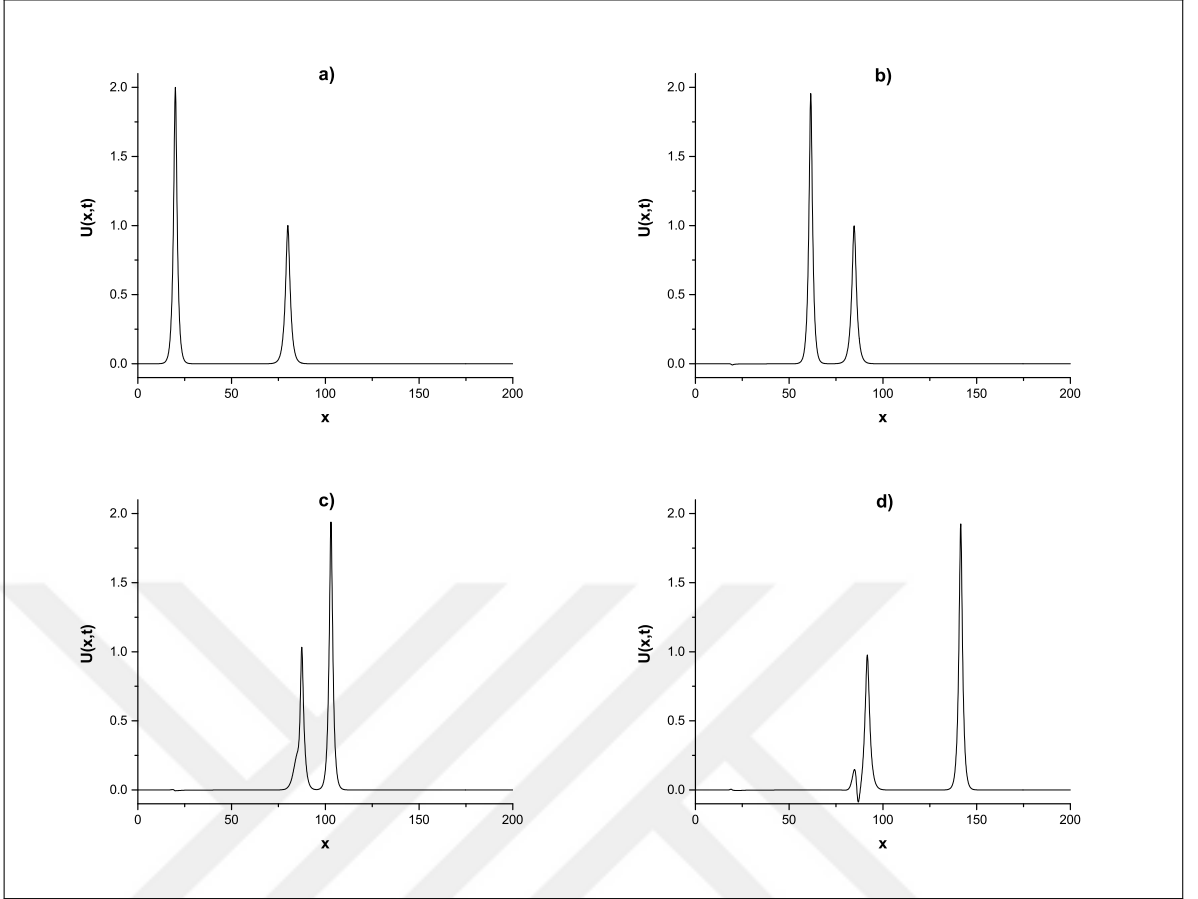
Zaman	I_1		I_2		I_3	
	CBSG	QBSPG [56]	CBSG	QBSPG [56]	CBSG	QBSPG [56]
0	11.4676	11.4677	14.6290	14.6286	22.8804	22.8788
4	11.4674	11.4677	14.6287	14.6292	22.8783	22.8811
8	11.4685	11.4677	14.6360	14.6229	22.9020	22.8798
12	11.4663	11.4677	14.6257	14.6299	22.8717	22.8803
16	11.4664	11.4677	14.6260	14.6295	22.8686	22.8805
20	11.4662	11.4677	14.6253	14.6299	22.8650	22.8806

Tablo 4.29 İki solitary dalganın etkileşiminin $p = 3, 4$ ve $gen. = 2, 1$ için korunum sabitleri

Zaman	0	1	2	3	4	5	6
$p=3$							
I_1	9.6907	9.6907	9.6906	9.6917	9.6898	9.6898	9.6901
I_2	12.9443	12.9443	12.9440	12.9489	12.9418	12.9420	12.9426
I_3	17.0187	17.0311	17.0324	18.0050	16.9849	16.9222	16.9557
$p=4$							
I_1	8.8342	8.7559	8.7089	8.6774	8.6518	8.6322	8.6134
I_2	12.1707	11.9304	11.7871	11.6932	11.6179	11.5560	11.4992
I_3	14.0296	13.3472	12.9204	13.2047	12.1972	12.0924	11.9640



Şekil 4.14 İki solitary dalganın $p = 3$; a) $t = 0$, b) $t = 3$, c) $t = 5$, d) $t = 6$ 'daki hareketi



Şekil 4.15 İki solitary dalganın $p = 4$; a) $t = 0$, b) $t = 2$, c) $t = 4$, d) $t = 6$ 'daki hareketi

4.3.3.3 Ardışık dalgaların gelişimi

Son olarak,

$$U(x, 0) = \frac{1}{2}U_0 \left[1 - \tanh\left(\frac{x - x_c}{d}\right) \right] \quad (4.67)$$

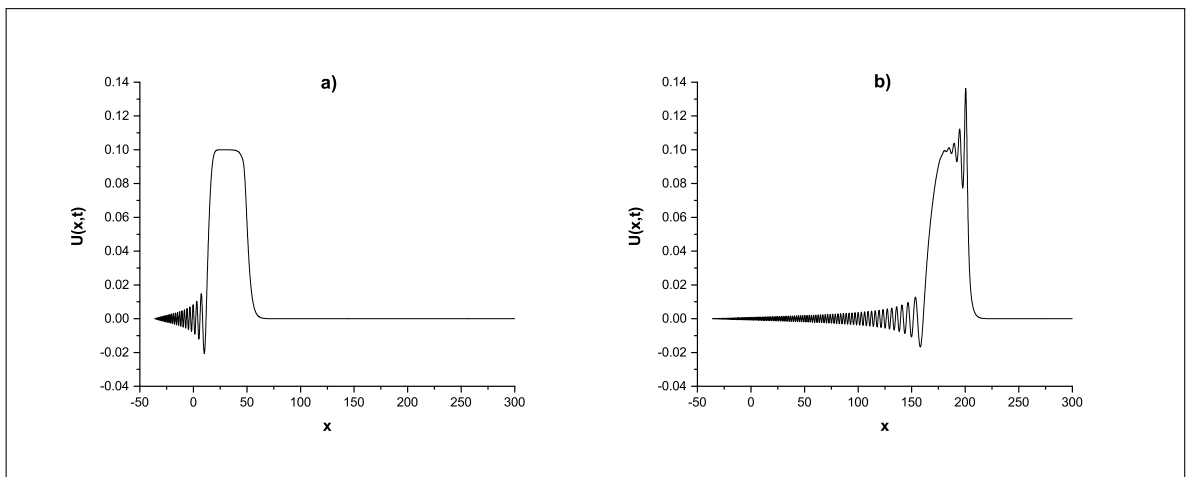
başlangıç şartı ile birlikte ardışık dalgaların gelişimi incelendi. Bu başlangıç şartı $t = 0$ anında denge seviyesinden yukarıda bulunan suyun yükseltisini belirtir. d durgun su ve derin su arasındaki eğimi temsil eder. (4.67) ile verilen denklem, $x = x_c$ noktasına yerleştirilmiştir. [1, 34, 35] çalışmaları ile uyumlu olması için $U_0 = 0.1, \mu = 1/6, x_c = 0, d = 5, h = 0.1, \Delta t = 0.1, x \in [-36, 300]$ alındı. Bu parametre değerlerine göre $p = 2, 3, 4$ için Galerkin yöntemi ile elde edilen korunum sabitleri ve quintik kollokasyon yöntemi [83] ile $U_0 = 0.1, \mu = 3/2, d = 5, h = 0.2, \Delta t = 0.1, x \in [0, 250]$ ve $p = 2$ parametreleri için bulunan korunum sabitleri Tablo 4.30'da gösterilmiştir. Bu tabloya göre $t = 0$ dan $t = 200$ zamanına kadar korunum sabitlerindeki değişim p değerinin artmasıyla azalmakla beraber, değişim oranı %1.02 veya daha küçük kalmaktadır. Ayrıca, bu değişim miktarı [83] de elde edilen değişim oranından çok

daha küçüktür. Ardışık dalgaların gelişiminin hareketi ise Şekil 4.16, Şekil 4.17 ve Şekil 4.18’de gözlemlenmiştir. Bu üç şekilden anlaşıldığı gibi $t = 50$ anında $x = -36$ konumundan başlayarak $x = 10$ noktası civarına kadar artan yükseklikli ardışık dalgalar oluşmaktadır. $t = 200$ anında ise $x = -36$ noktasından $x = 150$ noktasına kadar artan genlikli ardışık dalgalar oluşmaktadır. Daha sonra solitary dalganın ani bir sıçrama hareketi ile genliği büyür ve daha sonra dalga yok olmaya başlar.

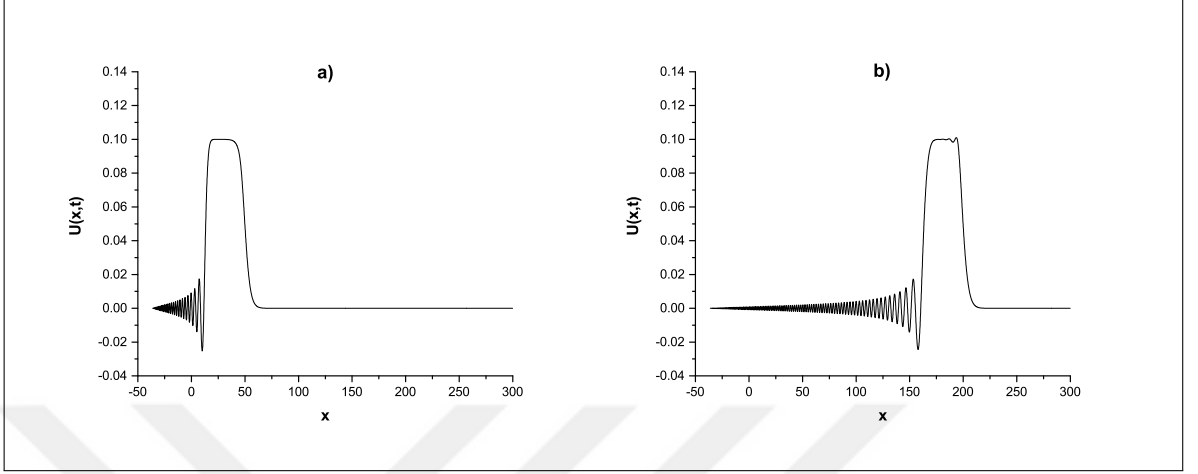
Tablo 4.30 Ardışık dalgaların gelişimi için korunum sabitleri

$U_0 = 0.1, x_0 = 0, d = 5, \mu = 1/6, h = 0.1, \Delta t = 0.1, x \in [-36, 300]$									
Time	I_1			I_2			I_3		
↓	p=2	p=3	p=4	p=2	p=3	p=4	p=2	p=3	p=4
0	3.5949	3.5949	3.5949	0.3344	0.3344	0.3344	0.0031	0.0031	0.0031
50	3.6051	3.6050	3.6049	0.3348	0.3350	0.3350	0.0019	0.0016	0.0015
100	3.6051	3.6050	3.6050	0.3348	0.3350	0.3350	0.0018	0.0016	0.0015
150	3.6050	3.6050	3.6049	0.3350	0.3349	0.3350	0.0017	0.0016	0.0015
200	3.6050	3.6050	3.6049	0.3354	0.3349	0.3350	0.0012	0.0016	0.0015

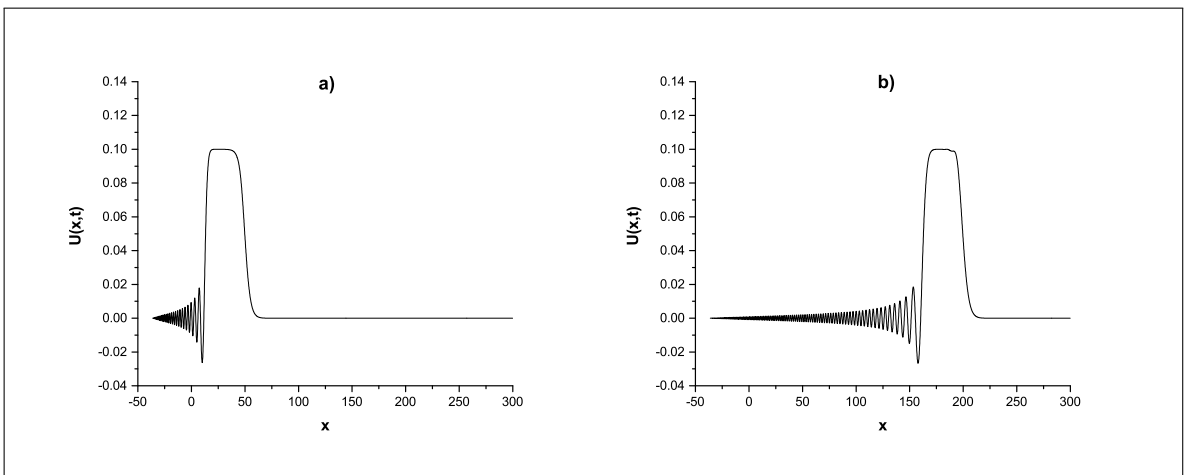
QBSC [83] - $U_0 = 0.1, d = 5, \mu = 3/2, h = 0.2, \Delta t = 0.1, x \in [0, 250]$			
Time	I_1	I_2	I_3
↓	p=2	p=2	p=2
0	4.0000	0.3759	0.0025
50	4.8507	0.4620	0.0034
100	5.7016	0.5480	0.0042
150	6.5531	0.6341	0.0051
200	7.4055	0.7204	0.0060



Şekil 4.16 $p = 2$; a) $t = 50$, b) $t = 200$ değerleri için ardışık dalgaların gelişimi



Şekil 4.17 $p = 3$; a) $t = 50$, b) $t = 200$ değerleri için ardışık dalgaların gelişimi



Şekil 4.18 $p = 4$; a) $t = 50$, b) $t = 200$ değerleri için ardışık dalgaların gelişimi

5. BÖLÜM

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, B-spline fonksiyonlara dayanan kollokasyon ve Galerkin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak, GEW ve GRLW denklemlerinin sayısal çözümleri elde edilmiştir. Sayısal çözüm yöntemleri, başlangıç şartının farklı seçimleri ile oluşturulan tek solitary dalga, iki ve üç solitary dalganın etkileşimi, Maxwellian başlangıç şartı ile dalga oluşumu ve ardışık dalgaların gelişimini kapsayan örneklere uygulanmıştır. Sayısal yöntemlerin etkinliğini kanıtlamak için, L_2 ve L_∞ hata normları; I_1 , I_2 ve I_3 ile ifade edilen kütle, momentum ve enerji ile ilgili korunum sabitleri hesaplanmıştır. Elde edilen hata normlarının sayısal değerleri oldukça küçük ve daha önce elde edilen sayısal sonuçlardan daha iyi olduğu görülmüştür. Yine, korunum sabitleri hesaplama süresince hemen hemen sabit ve referans alınan çalışmalarla uyumlu bulunmuştur. Sayısal yöntemler ile elde edilen GEW ve GRLW denklemlerinin çözümleri grafik çizilerek gösterilmiştir. Bu şekillere göre, elde edilen çözümlerin solitary dalgalar ve solitonlar olduğu görülmüştür. Sonuç olarak, sayısal algoritmaların GEW ve GRLW denklemlerinin solitary dalga çözümlerini elde etmede daha başarılı ve daha etkilidir. Sayısal algoritmalar, benzer yapıdaki lineer olmayan problemlerin sayısal çözümlerini elde etmede güvenilir bir şekilde kullanılabilirliği düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

1. Peregrine, D. H., "Calculations of the development of an undular bore", *Journal of Fluid Mechanics*, 25 (2), 321-330, 1966.
2. Peregrine, D. H., "Long waves on a beach", *Journal of Fluid Mechanics*, 27 (4), 815-827, 1967.
3. Benjamin, T. B., Bona, J. L., Mahony, J. J., "Model equations for long waves in non-linear dispersive systems", *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A*, 272 (1220), 47-78, 1972.
4. Morrison, P. J., Meiss, J. D., Carey, J. R., "Scattering of RLW solitary waves", *Physica D*, 11, 324-336, 1984.
5. Raslan, K. R., "Collocation method using cubic B-spline for the generalised equal width equation", *Int. J. Simulation and Process Modelling*, 2, 37-44, 2006.
6. Gardner, L. R. T., Gardner, G. A., "Solitary waves of the equal width wave equation", *Journal of Computational Physics*, 101 (1), 218-223, 1991.
7. Gardner, L. R. T., Gardner, G. A., Ayoup, F. A., Amein, N. K., "Simulations of the EW undular bore", *Commun. Numer. Meth. En.*, 13 (7), 583-592, 1997.
8. Zaki, S. I., "A least-squares finite element scheme for the EW equation", *Comp. Methods in Appl. Mech. and Eng.*, 189 (2), 587-594, 2000.
9. Doğan, A., "Application of Galerkin's method to equal width wave equation", *Applied Mathematics and Computation*, 160 (1), 65-76, 2005.
10. Esen, A., "A numerical solution of the equal width wave equation by a lumped Galerkin method", *Applied Mathematics and Computation*, 168 (1), 270-282, 2005.
11. Saka, B., "A finite element method for equal width equation", *Applied Mathematics and Computation*, 175 (1), 730-747, 2006.
12. Dağ, İ., Saka, B., "A cubic B-spline collocation method for the EW equation", *Mathematical and Computational Applications*, 9 (3), 381-392, 2004.
13. Raslan, K. R., "Collocation method using quartic B-spline for the equal width (EW) equation", *Applied Mathematics and Computation*, 168 (2), 795-805, 2005.

14. Fazal-i-Haq, F., Shah, I. A., Ahmad, S., "Septic B-spline collocation method for numerical solution of the equal width wave (EW) equation", *Life Science Journal*, 10 (1), 253-260, 2013.
15. Esen, A., "A lumped Galerkin method for the numerical solution of the modified equal-width wave equation using quadratic B-splines", *International Journal of Computer Mathematics*, 83 (5-6), 449-459, 2006.
16. Saka, B., "Algorithms for numerical solution of the modified equal width wave equation using collocation method", *Mathematical and Computer Modelling*, 45 (9-10), 1096-1117, 2007.
17. İslam, S., Haq, F., Tirmizi, İ. A., "Collocation method using quartic B-spline for numerical solution of the modified equal width wave equation", *J. Appl. Math. & Informatics*, 28 (3-4), 611-624, 2010.
18. Geyikli, T., Karakoç, S. B. G., "Septic B-spline collocation method for the numerical solution of the modified equal width wave equation", *Applied Mathematics*, 2011 (2), 739-749, 2011.
19. Karakoç, S. B. G., Geyikli, T., "Numerical solution of the modified equal width wave equation", *International Journal of Differential Equations*, 2012, 1-15, 2012.
20. Geyikli, T., Karakoç, S. B. G., "Petrov-Galerkin method with cubic B-splines for solving the MEW equation", *Bulletin of the Belgian Mathematical Society-Simon Stevin*, 19 (2), 215-227, 2012.
21. Hamdi, S., Enright, W. H., Schiesser, W. E., Gottlieb, J. J., Alaal, A., "Exact solutions of the generalized equal width wave equation", in: *Proceedings of the International Conference on Computational Science and Its Applications, LNCS*, 2668, 725-734, 2003.
22. Evans, D. J., Raslan, K. R., "Solitary waves for the generalized equal width (GEW) equation", *International Journal of Computer Mathematics*, 82 (4), 445-455, 2005.
23. Roshan, T., "A Petrov-Galerkin method for solving the generalized equal width (GEW) equation", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 235, 1641-1652, 2011.
24. Panahipour, H., "Numerical simulation of GEW equation using RBF collocation method", *Communications in Numerical Analysis*, 2012, 1-28, 2012.

25. Taghizadeh, N., Mirzazadeh, M., Akbari, M., Rahimian, M., “Exact solutions for generalized equal width equation”, *Math. Sci. Lett.* 2, 2, 99-106, 2013.
26. Doğan, A., “Numerical solution of RLW equation using linear finite elements within Galerkin’s method”, *Applied Mathematical Modelling*, 26, 771-783, 2002.
27. Gardner, L. R. T., Gardner, G. A., Dağ, İ., “A B-spline finite element method for the regularized long wave equation”, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 11 (1), 59-68, 1995.
28. Raslan, K. R., “Collocation method using quadratic B-spline for the RLW equation”, *International Journal of Computer Mathematics*, 78 (3), 399-412, 2001.
29. Dağ, İ., Saka, B., Irk, D., “Application of cubic B-splines for numerical solution of the RLW equation”, *Applied Mathematics and Computation*, 159 (2), 373-389, 2004.
30. Soliman, A. A., Hussien, M. H., “Collocation solution for RLW equation with septic spline”, *Applied Mathematics and Computation*, 161 (2), 623-636, 2005.
31. Saka, B., Dağ, İ., Irk, D., “Quintic B-spline collocation method for numerical solution of the RLW equation”, *The ANZIAM Journal*, 49 (3), 389-410, 2008.
32. Saka, B., Sahin, A., Dağ, İ., “B-spline collocation algorithms for numerical solution of the RLW equation”, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 27 (3), 581-607, 2011.
33. Dağ, İ., Saka, B., Irk, D., “Galerkin method for the numerical solution of the RLW equation using quintic B-splines”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 190, 532-547, 2006.
34. Esen, A., Kutluay, S., “Application of a lumped Galerkin method to the regularized long wave equation”, *Applied Mathematics and Computation*, 174, 833-845, 2006.
35. Mei, L., Chen, Y., “Numerical solutions of RLW equation using Galerkin method with extrapolation techniques”, *Computer Physics Communications*, 183, 1609-1616, 2012.
36. Lin, B., “Parametric spline solution of the regularized long wave equation”, *Applied Mathematics and Computation*, 243, 358-367, 2014.

37. Gardner, L. R. T., Gardner, G. A., Ayoub, F. A., Ameen, N. K., “Approximations of solitary waves of the MRLW equation by B-spline finite element”, *Arabian Journal for Science and Engineering*, 22, 183–193, 1997.
38. Raslan, K. R., EL-Danaf, T. S., “Solitary waves solutions of the MRLW equation using quintic B-splines”, *Journal of King Saud University - Science*, 22 (3), 161-166, 2010.
39. Karakoç, S. B. G., Yağmurlu, N. M., Uçar, Y., “Numerical approximation to a solution of the modified regularized long wave equation using quintic B-splines”, *Boundary Value Problems*, 2013 (27), 1-17, 2013.
40. Khalifa, A. K., Raslan, K. R., Alzubaidi, H. M., “A collocation method with cubic B-splines for solving the MRLW equation”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 212 (2), 406-418, 2008.
41. Haq, F., Islam, S., Tirmizi, I. A., “A numerical technique for solution of the MRLW equation using quartic B-splines”, *Applied Mathematical Modelling*, 34 (12), 4151-4160, 2010.
42. Karakoç, S. B. G., Ak, T., Zeybek, H., “An efficient approach to numerical study of the MRLW equation with B-spline collocation method”, *Abstract and Applied Analysis*, 2014, 1-15, 2014.
43. Ali, A., “Mesh Free Collocation Method for Numerical Solution of Initial-boundary Value Problems using Radial Basis Functions”, Ph. D. thesis, Ghulam Ishaq Khan Institute of Engineering Sciences and Technology, Pakistan, 2009.
44. Dağ, İ., Irk, D., Sari, M., “The extended cubic B-spline algorithm for a modified regularized long wave equation”, *Chinese Physics B*, 22 (4), 2013.
45. Karakoç, S. B. G., Uçar, Y., Yağmurlu, N. M., “Numerical solutions of the MRLW equation by cubic B-spline Galerkin finite element method”, *Kuwait J. Sci.*, 42 (2), 141-159, 2015.
46. Bona, J. L., McKinney, W. R., Restrepo, J. M., “Stable and unstable solitary-wave solutions of the generalized regularized long-wave equation”, *Journal of Nonlinear Science*, 10, 603-638, 2000.

47. Kaya, D., El-Sayed, S. M., "An application of the decomposition method for the generalized KdV and RLW equations", *Chaos, Solitons and Fractals*, 17, 869-877, 2003.
48. Hamdi, S., Enright, W. H., Schiesser, W. E., Gottlieb, J. J., "Exact solutions and invariants of motion for general types of regularized long wave equations", *Mathematics and Computers in Simulation*, 65, 535-545, 2004.
49. Ramos, J. I., "Solitary wave interactions of the GRLW equation", *Chaos, Solitons & Fractals*, 33, 479-491, 2007.
50. Kaya, D., "A numerical simulation of solitary-wave solutions of the generalized regularized long-wave equation", *Applied Mathematics and Computation*, 149, 833-841, 2004.
51. EL-Danaf, T. S., Raslan, K. R., Ali, K. K., "New numerical treatment for the generalized regularized long wave equation based on finite difference scheme", *International Journal of Soft Computing and Engineering*, 4 (4), 16-24, 2014.
52. Guo, P. F., Zhang, L. W., Liew, K. M., "Numerical analysis of generalized regularized long wave equation using the element-free kp-Ritz method", *Applied Mathematics and Computation*, 240, 91-101, 2014.
53. Zhang, L., "A finite difference scheme for generalized regularized long-wave equation", *Applied Mathematics and Computation*, 168, 962-972, 2005.
54. Soliman, A. A., "Numerical simulation of the generalized regularized long wave equation by He's variational iteration method", *Mathematics and Computers in Simulation*, 70, 119-124, 2005.
55. Mokhtari, R., Mohammadi, M., "Numerical solution of GRLW equation using Sinc-collocation method", *Computer Physics Communications*, 181, 1266-1274, 2010.
56. Roshan, T., "A Petrov-Galerkin method for solving the generalized regularized long wave (GRLW) equation", *Computers and Mathematics with Applications*, 63, 943-956, 2012.
57. Huang, D. M., Zhang, L. W., "Element-free approximation of generalized regularized long wave equation", *Mathematical Problems in Engineering*, 2014, 1-10, 2014.
58. Hammad, D. A., El-Azab, M. S., "A $2N$ order compact finite difference method for solving the generalized regularized long wave (GRLW) equation", *Applied Mathematics and Computation*, 253, 248-261, 2015.

59. Mohammadi, R., “Exponential B-spline collocation method for numerical solution of the generalized regularized long wave equation”, *Chinese Physics B*, 24, 1-14, 2015.
60. Mittal, R. C., Tripathi, A., “Numerical solutions of generalized Burgers–Fisher and generalized Burgers–Huxley equations using collocation of cubic B-splines”, *International Journal of Computer Mathematics*, 93, 1053-1077, 2015.
61. Zaki, S. I., “A quintic B-spline finite elements scheme for the KdVB equation”, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 188 (1), 121-134, 2000.
62. Ismail, M. S., “Numerical solution of complex modified Korteweg-de Vries equation by collocation method”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 14, 749-759, 2009.
63. Irk, D., Dağ, İ., “Quintic B-spline collocation method for the generalized nonlinear Schrödinger equation”, *Journal of the Franklin Institute*, 348, 378-392, 2011.
64. Mittal, R. C., Jain, R. K., “Numerical solution of General Rosenau-RLW Equation using Quintic B-splines Collocation Method”, *Communications in Numerical Analysis*, 2012, 1-16, 2012.
65. Karakoç, S. B. G., Zeybek, H., Ak, T., “Numerical solutions of the Kawahara equation by the septic B-spline collocation method”, *Statistics Optimization and Information Computing*, 2 (3), 211-221, 2014.
66. Gardner, L. R. T., Gardner, G. A., “Solitary waves of the regularized long wave equation”, *J. Comput. Phys.*, 91, 441-459, 1990.
67. Saka, B., Dağ, İ., “Quartic B-spline Galerkin approach to the numerical solution of the KdVB equation”, *Applied Mathematics and Computation*, 215 (2), 746-758, 2009.
68. Kutluay, S., Uçar, Y., “A Quadratic B-spline Galerkin Approach for Solving a Coupled KdV Equation”, *Mathematical Modelling and Analysis*, 18 (1), 103-121, 2013.
69. Esen, A., Uçar, Y., Yağmurlu, N., Tasbozan, O., “A Galerkin Finite Element Method to Solve Fractional Diffusion and Fractional Diffusion-Wave Equations”, *Mathematical Modelling and Analysis*, 18 (2), 260-273, 2013.

70. Kutluay, S., Uçar, Y., “Numerical solution of a coupled modified Korteweg–de Vries equation by the Galerkin method using quadratic B-splines”, *International Journal of Computer Mathematics*, 90 (11), 2353-2371, 2013.
71. Uçar, Y., Karağaç, B., Esen, A., “A new approach on numerical solutions of the Improved Boussinesq type equation using quadratic B-spline Galerkin finite element method”, *Applied Mathematics and Computation*, 270, 148-155, 2015.
72. Dağ, İ., “Studies of B-spline finite elements”, *Prifysgol Bangor University Department of Mathematics*, Ph. D. Thesis, s.1-172, Bangor, Gwynedd, 1994.
73. Saka, B., “RLW ve K-S denklemlerinin B-spline kolokeyşin metodları ile çözümleri”, *Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Doktora Tezi, s.1-107, Eskişehir, 2002.
74. Irk, D., “Bazı kısmi türevli diferansiyel denklem sistemlerinin B-spline sonlu elemanlar çözümleri”, *Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Doktora Tezi, s.1-148, Eskişehir, 2007.
75. Uçar, Y., “B-spline sonlu eleman yöntemleri ile coupled diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri”, *İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Doktora Tezi, s.1-240, Malatya, 2011.
76. Karakoç, S. B. G., “Sonlu elemanlar yöntemi ile modifiye edilmiş eşit genişlikli dalga denkleminin sayısal çözümleri”, *İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Doktora Tezi, s.1-219, Malatya, 2011.
77. Yağmurlu, N. M., “2-boyutlu kısmi diferansiyel denklemlerin B-spline sonlu eleman yöntemleri ile nümerik çözümleri”, *İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Doktora Tezi, s.1-245, Malatya, 2011.
78. Prenter, P. M., “Splines and variational methods”, J. Wiley, New York, 1975.
79. Rubin, S. G., Graves, R. A., “A cubic spline approximation for problems in fluid mechanics”, NASA TR R-436, Washington, DC, 1975.
80. Caldwell, J., Smith, P., “Solution of Burgers’ equation with a large Reynolds number”, *Appl. Math. Modelling.*, 6, 381-386, 1982.
81. Russel, J.S., “Report on waves”, *Report of the 14th Meeting of the British Association for the Advancement of Science (John Murray, London)*, 311-390, 1844.

82. Zaki, S. I., "Solitary waves of the Korteweg-de Vries Burgers' equation", *Comput. Phys. Commun.*, 126, 207-218, 2000.
83. Raslan, K. R., "Numerical study of the Modified Regularized Long Wave (MRLW) equation", *Chaos, Solitons & Fractals*, 42 (3), 1845-1853, 2009.



ÖZGEÇMİŞ

1985 yılında Manisa’da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Manisa’da tamamladı. 2004-2008 yılları arasında Ondokuz Mayıs Üniversitesi Matematik Bölümü’nde lisans eğitimi aldı. 2011 yılında Nevşehir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda yüksek lisans eğitimi tamamladı ve aynı yıl Doktora eğitimine başladı. 2012 yılından itibaren Abdullah Gül Üniversitesi Bilgisayar Bilimleri Fakültesi Uygulamalı Matematik Bölümü’nde öğretim elemanı olarak çalışmaktadır.

BİLİMSEL FAALİYETLER

TEZLER

- Zeybek, H., “Lineer ve Lineer Olmayan Diferansiyel Denklem Sistemlerinin Yaklaşık Çözümü İçin Taylor Matris Yöntemi”, *Nevşehir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Yüksek Lisans Tezi, 1-68, Nevşehir, 2011.

SCI,SSCI,AHCI İNDEKSLERİNE GİREN DERGİLERDE YAYINLANAN MAKALELER

- Karakoç, S.B.G., Zeybek, H., “Solitary-wave solutions of the GRLW equation using septic B-spline collocation method”, *Applied Mathematics and Computation*, 2016 (Tezden Üretilen).
- Karakoç, S.B.G., Zeybek, H., “A septic B-spline collocation method for solving the generalized equal width wave equation”, *Kuwait Journal of Science*, 43 (3), 2016 (Tezden Üretilen).
- Zeybek, H., Karakoç, S.B.G., “A numerical investigation of the GRLW equation using lumped Galerkin approach with cubic B-spline”, *SpringerPlus*, 5 (199), 1-17, 2016 (Tezden Üretilen).
- Karakoç, S.B.G., Ak, T., Zeybek, H., “An Efficient Approach To Numerical Study Of The Mrlw Equation With B-Spline Collocation Method”, *Abstract and Applied Analysis*, 2014, 1-15, 2014.

DİĞER DERGİLERDE YAYINLANAN MAKALELER

- Karakoç, S.B.G., Zeybek, H., “A cubic B-spline Galerkin approach for the numerical simulation of the GEW equation”, *Statistics, Optimization and Information Computing*, 4 (1), 30-41, 2016 (Tezden Üretilen).
- Karakoç, S.B.G., Zeybek, H., Ak, T., “Numerical solutions of the Kawahara equation by the septic B-spline collocation method”, *Statistics, Optimization and Information Computing*, 2 (3), 211-221, 2014.

İNCELEME ALTINDA OLAN MAKALELER

- Zeybek, H., Karakoç, S.B.G., “Application of the B-spline finite element method to the GEW equation”, *Electronic Transactions on Numerical Analysis* (Tezden Üretilen, SCIE).
- Zeybek, H., Karakoç, S.B.G., “An efficient algorithm to compute the solitary-wave solutions of the GRLW equation”, *Mediterranean Journal of Mathematics* (Tezden Üretilen, SCIE).

HAKEMLİ KONGRE / SEMPOZYUMLARIN BİLDİRİ KİTAPLARINDA YER ALAN YAYINLAR

- Ak, T., Zeybek, H., Karakoç, S.B.G., “Numerical Scheme for Rosenau-KdV equation using finite element method”, *ICMME 2016 International Conference on Mathematics and Mathematics Education*, Elazığ, Türkiye, 12-14 Mayıs 2016.
- Ak, T., Zeybek, H., Karakoç, S.B.G., “Simulation of Shallow Water Waves with MKdV Equation Using Finite Element Method”, *ICANAS 2016 International Conference on Advances in Natural and Applied Sciences*, Antalya, Türkiye, 21-23 Nisan 2016.
- Zeybek, H., Ak, T., Karakoç, S.B.G., “B-spline Finite Element Approach for the Numerical Solution of the GRLW Equation”, *ICANAS 2016 International Conference on Advances in Natural and Applied Sciences*, Antalya, Türkiye, 21-23 Nisan 2016 (Tezden Üretilen).
- Karakoç, S.B.G., Zeybek, H., “Genelleştirilmiş Eşit Genişlikli Dalga (Gew) Denkleminin Septik B-Spline Kollokasyon Sonlu Eleman Yöntemi İle Çözümü”, *14. Matematik Sempozyumu*, 208-211, Niğde, Türkiye, 14-16 Mayıs 2015 (Tezden Üretilen).

- Karakoç, S.B.G., Zeybek, H., “Solitary-Wave Solutions Of The Gew Equation Using Quintic B-Spline Collocation Method”, *ICMCMST 2015 The International Conference Mathematical and Computational Modelling in Science and Technology*, 145-146, İzmir, Türkiye, 2-7 Ağustos 2015 (Tezden Üretilen).
- Karakoç, S.B.G., Ak, T., Zeybek, H., “Application Of The Septic B-Spline Collocation Method To The Mrlw Equation”, *Karatekin Mathematics Days 2014*, 1-1, Çankırı, Türkiye, 11-13 Haziran 2014.
- Dolapci, İ.T., Zeybek, H., “Değişken Katsayılı Isı Ve Dalga Tipindeki Lineer Denklemlerin Çözümü İçin Diferansiyel Dönüşüm Metodu”, *23. Ulusal Matematik Sempozyumu*, 167-167, Kayseri, Türkiye, 4-7 Ağustos 2010.

DESTEKLENEN PROJELER

- “Septik B-Spline Kollokasyon Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Genelleştirilmiş Eşit Genişlikli (GEW) ve Genelleştirilmiş Düzenli Uzun (GRLW) Dalga Denklemlerinin Sayısal Çözümleri”, BAP Arastırma Projesi, NEÜ BAP, 1- 15F12 , 2015, Araştırmacı, Devam Ediyor (Tezden Üretilen).

KATILDIĞI BİLİMSEL KONGRE / SEMPOZYUM ve BİLİMSEL TOPLANTILAR

- Uygulamalı Matematik Çalıştayı, Ankara, Şubat 2016.

BİLİMSEL HAKEMLİKLER

- Iranian Journal of Science and Technology, Transactions A: Science (SCIE), Dergide Hakemlik, Nisan 2016.
- New Trends in Mathematical Sciences, Dergide Hakemlik, Aralık 2015.
- General Mathematics Notes (GMN), Dergide Hakemlik, Kasım 2015.

