T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KOMŞULUK UZAYLARI ÜZERİNE

Tezi Hazırlayan
Mustafa Sami YILDIRIM

Tez Danışmanı
Dr. Öğr. Üyesi Zarife ZARARSIZ

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Mayıs 2019
NEVŞEHİR

T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KOMŞULUK UZAYLARI ÜZERİNE

Tezi Hazırlayan
Mustafa Sami YILDIRIM

Tez Danışmanı
Dr. Öğr. Üyesi Zarife ZARARSIZ

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Mayıs 2019
NEVŞEHİR

Dr. Öğr. Üyesi Zarife ZARARSIZ danışmanlığında Mustafa Sami YILDIRIM tarafından hazırlanan " **Komşuluk Uzayları Üzerine"** başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans** tezi olarak kabul edilmiştir.

02/05/2019

JÜRİ

Başkan : Dr. Öğr. Üyesi Sibel TURANLI

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Zarife ZARARSIZ

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Mehmet ŞENOL

ONAY:

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun 08/05/2019 tarih ve 27-235 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

28/5/2019

Prof. Dr. Şahlan ÖZTÜRK
Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİM SAYFASI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada yer alan bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu ve bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Mustafa Sami YILDIRIM

TEŞEKKÜR

Maddi ve manevi olarak her zaman desteklerini esirgemeyen ANNEME ve BABAMA, umutsuzluğa düştüğümde cesaretlendiren EŞİME,

Yüksek lisans öğrenimim ve tez çalışmam süresince tüm bilgilerini benimle paylaşmaktan kaçınmayan, her türlü konuda desteğini benden esirgemeyen ve tezimde emeği olan Sayın Hocam Dr. Öğr. Üyesi Zarife ZARARSIZ' a teşekkür ederim.

KOMŞULUK UZAYLARI ÜZERİNE

(Yüksek Lisans Tezi)

Mustafa Sami YILDIRIM

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Mayıs 2019

ÖZET

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde bu çalışma ile ilgili önceden çalışılmış makaleler üzerinden literatür taraması yapılmıştır. İkinci bölümümde p-yığın, süzgeç, topolojik uzaylar, sınırlı kümeler ve kategori kavramları hakkında bilgiler verilmiştir.

Çalışmanın üçüncü bölümünde herhangi bir elemanın komşuluğunun üst kümeleri yardımıyla komşuluk yapıları ve bu yapıların birlikte bulunmasıyla da komşuluk uzayı tanımlanmıştır. Ayrıca bu bölümde komşuluk uzay, içine bir kümenin kapanışı ve içi kavramları açıklanmıştır. Bu kavramlar yardımıyla pretopolojik ve supratopolojik uzay tanımları yapılmıştır. (X, v) pretopolojik ve supratopolojik komşuluk uzayı ise bu durumda elemanları $\bigcap\{\bigcap_{i\in I} v(x_i)\}$ olan topolojik uzay elde edilmiştir.

Bu çalışmanın son bölümünde NBD komşuluk kategorisi içindeki kavramlar incelenmiş ve karşılaştırılması yapılmıştır.

Anahtar kelimeler:* *Komşuluk Uzayları, Pretopolojik Komşuluk Uzayları, Supratopolojik Komşuluk Uzayları, Komşuluk Kategorisi,
Tez Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Zarife ZARARSIZ
Sayfa adeti: 55

ON NEİGBOURHOOD SPACE

(master's thesis)

Mustafa Sami YILDIRIM

HACI BEKTAŞ VELİ NEVŞEHİR UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE

MAY 2019

ABSTRACT

This thesis consists of four chapters. In the first part, a literature review was performed on the previously studied articles related to this study. In the second section, p-stack, filter, topological spaces, limited sets and categories space are given.

In the third part of the study, neighborhood structures with the help of the upper sets of the neighborhood of any element and the neighboring spaces have been defined by the coexistence of these structures. Also in this section the concepts of closure and interior of a set into the neighborhood space are explained. Pretopological and supratopological spaces were defined with the help of these concepts. If (X, v) is a pretopological and supratopological neighborhood space then topological space that members are $\bigcap\{\bigcap_{i\in I} v(x_i)\}$ is obtained.

In the last part of this study, categorical concepts in NBD were examined and compared.

Keywords: ***Neighborhood Spaces, Pretopological Neighborhood Spaces, Supratopological Neighborhood Spaces, Neighborhood Categories,***
Thesis Advisor: **Asistant Prof. Zarife ZARARSIZ**
Pages Total: 55

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER LİSTESİ

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
Q	Rasyonel sayılar kümesi
IR	İrrasyonel sayılar kümesi
$P(X)$	X kümesinin bütün alt kümelerinin ailesi
(X,τ)	X kümesi üzerindeki topolojik uzay
A^o	Topolojik uzay içinde A kümesinin içi
$\bar{A}$	Topolojik uzay içinde A kümesinin kapanışı
$\mathcal{F}$	Süzgeç
$F(X)$	X kümesi üzerindeki bütün süzgeçlerin ailesi
$\mathcal{C}$	Kategori
SET	Kümeler kategorisi
TOP	Topolojik uzaylar kategorisi
POSET	Kısmi sıralı kümelerin kategorisi
NBD	Komşuluk uzaylar kategorisi
FİNSET	Sonlu kümeler kategorisi
$F:\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$	Funktor
$pS(X)$	P-yığınların kümesi
(X,v)	Komşuluk uzay
$N(X)$	Komşuluk uzaylar kümesi
$I_v(A)$	Komşuluk uzay içinde A kümesinin içi
$Cl_v(A)$	Komşuluk uzay içinde A kümesinin kapanışı
$PO(X)$	Pre-açık kümeler
$SO(X)$	Supra-açık kümeler
$PT(X)$	Pretopolojik komşuluk uzay

$ST(X)$	Supratopolojik komşuluk uzay
$RN(X)$	Regüler komşuluk uzay
$T(X)$	Topolojik komşuluk uzay
πv	Pretopolojik komşuluk modifikasyonu
σv	Supratopolojik komşuluk uzay modifikasyonu
ρv	Regüler komşuluk uzay modifikasyonu
$(X. g)$	Genelleştirilmiş komşuluk uzay
(X, ψ)	Zayıf komşuluk uzay
$l_{\psi}(A)$	Zayıf komşuluk uzayında A kümesinin içi
$\gamma_{\psi}(A)$	Zayıf komşuluk uzayında A kümesinin kapanışı

1. BÖLÜM

GİRİŞ

Topoloji’ nin tanımını Hausdorff [1] verdiğinde, herhangi bir A kümesinin bir noktası için kendisinden daha küçük olan topolojinin elemanlarının bulunması yoluyla bu noktanın komşuluğu olarak tanımlanmıştır. Bu A kümesinin topolojinin elemanı olması ile de açık komşuluk tanımlanmıştır. Daha sonra D. C. Kent ve W. K. Min [2] komşuluk uzaylarını Hausdorff’ un kullandığı aksiyomlardan daha zayıf olan aksiyomlar kullanarak tanımlamıştır. Komşuluk uzayları, bu açıdan incelendiğinde aslında iç dönüşüm aksiyomlarının farklı şekilde yorumlanmasıyla oluşturulan bir yapı olduğu görülmüştür.

Choquet [3] pretopolojik uzay tanımını X’ in her alt kümesini alt küme kabul eden kümeye götürmesiyle tanımladığı bir dönüşümün boş kümeyi de içeren bir görüntü kümesi olarak tanımlamıştır. Cech [4]’ de pretopolojik uzayları kapanış aksiyomlarına benzeyen bazı aksiyomlar kullanarak karakterize etmiştir. Ayrıca Choquet’ den yaklaşık 20 sene sonra 1960’ ların başında A. S. Mashhour [5] supratopolojik uzayı her elamanın keyfi birleşiminin kapalı olduğu ve X kümesini de eleman olarak kabul eden bir aile olarak tanımlamıştır; fakat bu durum topoloji tanımının aksine sonlu arakesitleri altında kapalı olmayı gerektirmemiştir. Pretopolojik ve supratopolojik uzaylar [2]’ de komşuluk uzaylarına da genişletilmiştir ama topolojik uzaylar içinde tanımlanan supratopolojik ve pretopolojik uzay kavramları komşuluk uzayları içinde de topolojiyle bir bağlantı oluşturmuştur. Ayrıca Levin [6] tarafından bir A kümesi eğer $A \subseteq \overline{(A^o)}$ olursa yarı açık küme olarak ve A. S. Mashhour [5] tarafından da bir A kümesi eğer $A \subseteq (\bar{A})^o$ olursa pre-açık küme olarak açıklanmıştır. Bu terimler pretopolojik ve supratopolojik uzaylardan bağımsız olarak değerlendirilmemiştir.

Chsaszar [7] genelleştirilmiş topolojik uzay kavramını açık küme aksiyomlarını eksilterek tanımladıktan sonra genelleştirilmiş komşuluk yapısı da W. K. Min [8] tarafından, X kümesinin kuvvet kümesinden kuvvet kümesine tanımladığı bir dönüşüm yardımıyla tanımlanmıştır. W. K. Min [9], aynı tanım kümesi üzerinde tanımladığı dönüşüme farklı özellikler kazandırarak zayıf komşuluk yapısını ve zayıf komşuluk uzayını tanımlamıştır.

1940’ ın başlarında S. Eilenberg ve S. M. Lane’nin [10] temellerini attığı benzer nesneleri ve bu nesneler arasındaki dönüşümleri kullanan kategori kavramı, ilerleyen zamanlarda hem matematiğin diğer ana bilim dallarında hem de diğer bilim alanlarında incelenmiştir. 1966’ de J. F. Kennisson [18] tarafından topolojik uzaylar içinde reflektiflik ve coreflektiflik kavramı S. M. Lane [19] ve P. Freyd’ in [20] araştırmalarında yer verdiği adjoint kavramı kullanılarak verilmiştir. Komşuluk uzaylar ve sürekli dönüşümlerin yardımıyla NBD kategorisi oluşturulur. D. C. Kent ve W. K. Min [2] bu komşuluk kategorisinin full alt kategorileri olarak PRTOP pretopolojik komşuluk uzay, CLS kapalı komşuluk uzay ve TOP topolojik komşuluk uzay kategorilerini oluşturmuştur. Buradan hareketle kategoriler içinde tanımlanan ilk ve son yapılar yardımıyla PRTOP’ un NBD içinde bicoreflektif, CLS’ nin NBD içinde bireflektif, TOP’ un PRTOP içinde bireflektif ve CLS içinde bicoreflektif olduğu görülmüştür.

Bu tezin içeriğinde yapılmış olan bir dizi araştırmanın derlemesi yapılmış ve bu araştırmalar ışığında, topolojik uzaylar içinde tanımlanan tanım ve teoremlerin komşuluk uzaylar içindeki bağlantıları araştırılmıştır. Ayrıca komşuluk uzaylar kategorisinin alt kategorilerinin nasıl belirlendiği ve hangi özellikleri barındırdığı belirtilmiştir. Kategori teorisi içinde yer alan reflektif ve corefelektif, bireflektif ve bicoreflektif, epireflektif ve coepireflektiflik kavramları yeniden ele alınmış ve bu kavramlarla ilgi teoremlerin komşuluk uzaylarına yansımaları araştırılmıştır.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünden sonraki bölümde D. C. Kent ve Won Keun Min [2] tanımladığı komşuluk uzayı ve bu tanım için gerekli olan p-yığın tanımı verilmiştir. Buna ek olarak komşuluk uzaylarıyla bağlantılı olan süzgeç kavramına yer verilmiştir. Üçüncü bölümde topolojik uzaylar içinde verilen tanım ve teoremlerin komşuluk uzaylarına yansımaları incelenmiştir. Daha sonraki bölümde kategori teorisi ve komşuluk uzaylar kategorisi ile bağlantılı olan tanım ve teoremler verilmiştir.

2.BÖLÜM

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde tezimizde geçen ve yeri geldikçe kullanacağımız temel tanım ve teoremler verilmiştir. Ayrıca bu tanım ve teoremlerin daha iyi açıklanabilmesi için tanımların ifadelerinde ve teoremlerin ispatlarında gerekli düzenlemeler yapılmıştır.

2.1. Yığın, P-yığını ve Süzgeç

Bu kısımda yığın, p-yığın ve süzgeç tanımları verilmiştir ve bazı örneklerle konu pekiştirilmiştir.

Tanım 2.1.1. X boştan farklı bir küme ve $\mathcal{H}$ de X kümesinin alt kümelerinden oluşan bir aile olsun. Eğer $A \in \mathcal{H}$ iken $A \subseteq B$ olan her B kümesi $\mathcal{H}$ ailesinin elemanı oluyorsa $\mathcal{H}$ ailesine bir yığın denir.

Örnek 2.1.2. $X = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerinde;
$\mathfrak{I} = \big\{\{a, b\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, X\big\}$ ailesi verilsin. $\forall A \in \mathfrak{I}$ için A' nın bütün üst kümeleri de $\mathfrak{I}$ ailesinin elemanı olduğundan bir yığın olur.

Örnek 2.1.3. Herhangi bir X kümesinin bütün alt kümelerinin ailesi bir yığın oluşturur. Çünkü bu ailenin herhangi bir elemanın üst kümeleri yine bu aile içindedir.

Tanım 2.1.4. $\mathcal{H}$ ailesi X kümesi üzerinde bir yığın olsun. Eğer $\forall\, A, B \in \mathcal{H}$ için $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \neq \emptyset$ (p) oluyorsa $\mathcal{H}$ ailesine bir p-yığını denir. (p) özelliğine de ikili kesişim özelliği denir. X üzerinde oluşturulan bütün p-yığınların kümesi $pS(X)$ ile gösterilir [2].

Örnek 2.1.5. $X = \{a, b, c, d\}$ kümesi için

$\mathcal{H} = \big\{\{a, b\}, \{b, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d\}, X\big\}$ ailesinin herhangi iki elemanın kesişimi boş kümeden farklı olduğu için p-yığın olur.

Örnek 2.1.6. X kümesinin kuvvet kümesi olan $P(X)$ bir p-yığını değildir. Çünkü ikili kesişim özelliği sağlanmaz.

Tanım 2.1.7. $X \neq \emptyset$ bir küme ve $\mathcal{F}$ ailesi bir yığın olsun. Eğer $\mathcal{F}$ ailesi aşağıdaki iki özelliği sağlarsa $\mathcal{F}$ ailesine bir süzgeç ve X kümesine de süzülmüş küme denir.

1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$,

2) $\forall A, B \in \mathcal{F}$ iken $A \cap B \in \mathcal{F}$.

Örnek 2.1.8. $X = \{a, b, c, d\}$ kümesi için $\mathcal{F}_1 = \big\{\{a, b\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, X\big\}$ ailesi bir yığındır fakat herhangi iki elemanı arasındaki kesişim kümesi de $\mathcal{F}_1$ ailesinin de elemanı olmadığı için bir süzgeç değildir. Diğer taraftan $\mathcal{F}_2 = \big\{\{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, X\big\}$ ailesi bir süzgeçtir.

Örnek 2.1.9. $\mathcal{F}_A = \{S \subseteq X : A \subseteq S \subseteq X, A \neq \emptyset\}$ ailesi bir süzgeçtir. Gerçekten $S_1 \in \mathcal{F}_A$ olsun. Burada $A \subseteq S_1 \subseteq X$ ve $S_1 \subseteq S_2$ iken $A \subseteq S_1 \subseteq S_2 \subseteq X$ olduğu için $S_2 \in \mathcal{F}_A$ olur. Böylece $\mathcal{F}_A$ ailesinin bir yığın olduğu görülür.

1) $A \neq \emptyset$ olduğundan $\emptyset \notin \mathcal{F}_A$ olur.

2) $S_1, S_2 \in \mathcal{F}_A$ olsun. Burada $A \subseteq S_1 \cap S_2$ olur. Dolayısıyla $S_1 \cap S_2 \in \mathcal{F}_A$ olup süzgeç olmanın iki şartı da sağladığı için $\mathcal{F}_A$ bir süzgeçtir. Bu şekilde tanımlanan süzgece atomik süzgeç, A kümesine de süzgecin atomu denir [13].

Örnek 2.1.10. $\mathbb{R}$, reel sayılar kümesinin alt kümelerinden oluşan

$$\mathcal{F}_{\infty} = \{A_\lambda \subseteq \mathbb{R} : \forall \lambda \in \mathbb{R}, A_\lambda = [\lambda, \infty)\}$$

$$\mathcal{F}_{-\infty} = \{A_\varepsilon \subseteq \mathbb{R} : \forall \varepsilon \in \mathbb{R}, A_\varepsilon = (-\infty, \lambda]\}$$

aileleri bir süzgeçtir [13].

Tanım 2.1.11. X bir küme olsun. Bu durumda X üzerindeki bütün p-yığınlarının kümesi olan $pS(X)$ kapsama bağıntısına göre kısmi sıralı olur. Gerçekten;

1) $\forall \mathcal{H}_1 \in pS(X)$ için $\mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{H}_1$ olur.

2) $\forall \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \in pS(X)$ için $\mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{H}_2 \Rightarrow \mathcal{H}_2 \subseteq \mathcal{H}_1$ olduğunda $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$ olur.

3) $\forall \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \in pS(X)$ için $\mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{H}_2 \Rightarrow \mathcal{H}_2 \subseteq \mathcal{H}_3$ olduğunda $\mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{H}_3$ olur.

Dolayısıyla $pS(X)$ kümesi "⊆" bağıntısına göre karşılaştırılabilir olur. Bu yüzden eğer

$\mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{H}_2$ oluyorsa $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$' den daha kaba veya $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_1$' den daha incedir denir [2]. Herhangi bir aile süzgeç olduğunda aynı zamanda bir p-yığını olduğu için süzgeçlerden oluşan aile de karşılaştırılabilirdir. Bir X kümesi üzerindeki bütün süzgeçlerin kümesi $F(X)$ ile gösterilir. Dolayısıyla $\mathcal{F}_1,\ \mathcal{F}_2 \in F(X)$ için $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$ oluyorsa $\mathcal{F}_1$ süzgeci $\mathcal{F}_2$ süzgecinden daha kabadır denir.

Teorem 2.1.12. $\mathcal{F}$ ailesi bir süzgeç ise $\mathcal{F}$ süzgecinden daha kaba ve daha ince bir süzgeç vardır [13]. $\mathcal{H}$ ailesi bir p-yığını ise bu $\mathcal{H}$ p-yığınından daha kaba ve daha ince bir p-yığını vardır.

Tanım 2.1.13. $\mathfrak{B}$ ailesi X kümesi üzerinde ikili kesişim özelliğine sahip bir aile ise bu aileye p-yığın bazı denir. $\mathfrak{B}$ ailesi tarafından üretilen

$$\langle \mathfrak{B} \rangle = \{A \subseteq X : \exists B \in \mathfrak{B},\ B \subseteq A\} \tag{2.1}$$

ailesi bir yığın olur. Eğer $\mathfrak{B}$ ailesi bir p-yığın bazı ise $\langle \mathfrak{B} \rangle$ ailesi de p-yığın olur. Eğer $\mathfrak{B}$ sonlu arakesit özelliğine sahip bir p-yığın bazı ise $\mathfrak{B}$ bir süzgeç alt bazı olur ve bu durumda $\mathfrak{B}$ ailesi,

$$[\mathfrak{B}] = \{A \subseteq X : \exists B_{i \in I} \in \mathfrak{B},\ \cap_{i=1}^{n} B_i \subseteq A\} \tag{2.2}$$

süzgecini üretir [2].

Örnek 2.1.14. $X = \{a, b, c, d\}$ kümesinin $\mathcal{B}_1 = \big\{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\big\}$ şeklindeki ailesi (p) özelliğine sahiptir. Bu $\mathfrak{B}$ ailesi

$$\langle \mathcal{B}_1 \rangle = \big\{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, X\big\}$$

şeklinde bir p-yığını oluşturur fakat bu aile bir süzgeç değildir. Çünkü $\mathcal{B}_1$ ailesi sonlu arakesit özelliğine sahip değildir. Ancak $\mathcal{B}_2 = \big\{\{a, b\}, \{b, c\}, \{b, d\}\big\}$ şeklinde

oluşturulan aile sonlu arakesit özelliğine sahip olduğundan

$$[\mathcal{B}_2] = \big\{\{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{a, b, c\}\{a, b, d\}, \{b, c, d\}, X\big\}$$

şeklinde bir süzgeç üretir. Aynı zamanda bu ailenin bir p-yığını olduğu görülür.

Teorem 2.1.15. $\mathcal{F}$ ailesi sonlu arakesit özelliğine sahip ise $[\mathcal{F}]$ süzgeci $\mathcal{F}$ ailesini kapsayan süzgeçlerin en kabası olur [13]. $\mathfrak{B}$ ailesi (p) özelliğine sahip ise $\langle \mathcal{B} \rangle$ p-yığını $\mathfrak{B}$ ailesini kapsayan p-yığınlarının en kabası olur.

Teorem 2.1.16. X bir küme olsun. Herhangi bir $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ süzgeçler ailesinin en küçük alt sınırının olması için gerek ve yeter şart $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ süzgeçler ailesinin her sonlu alt $\{(\mathcal{F}_i)_{i\in n}, 1 \leq i \leq n\}$ ailesi ve $\forall F_i \in \mathcal{F}_i$ için $\bigcap_{i=1}^{n} F_i \neq \emptyset$ olmasıdır [13].

Lemma 2.1.17. (Zorn Lemması). Boştan farklı bir kısmi sıralı kümenin bütün zincirlerinin bir üst sınırı varsa bu kümenin bir maksimal elemanı vardır [13].

Tanım 2.1.18. $pS(X)$ p-yığınların ailesinin maksimal elemanına aşkın p-yığını denir [2]. $F(X)$ süzgeçler ailesinin maksimal elemanına da aşkın süzgeç denir [13]. Bu durumun doğal bir sonucu olarak; $\forall \mathcal{H} \in pS(X)$ için $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}_1$ oluyorsa $\mathcal{H}_1$ p-yığını bir aşkın p-yığını olur. $\forall F \in \mathcal{F}\ (X)$ için $F \subseteq \mathcal{F}_1$ oluyorsa $\mathcal{F}_1$ süzgeci de bir aşkın süzgeç olur.

Teorem 2.1.19. $\mathcal{F}_1,\ \mathcal{F}\ \in F(X)$ olsun. $\mathcal{F}_1$' in $\mathcal{F}$ 'den daha ince bir süzgeç olması için gerek ve yeter şart $A \in \mathcal{F}_1$ ve $\forall F \in \mathcal{F}$ için $F \cap A \neq \emptyset$ olmasıdır.

İspat. $\Longrightarrow \forall F \in \mathcal{F}$ için $F \in \mathcal{F}_1$' dir. $\mathcal{F}_1$ süzgeç olduğundan $F \cap A \neq \emptyset$ olur.

$\Longleftarrow F \cap A \neq \emptyset$ ise $F = \{\mathcal{F}, A\}$ ailesi süzgeç alt bazı olduğundan $\mathcal{F}_1 = [F]$ süzgeci üretilmiş olur ve dolayısıyla $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_1$ olur [13].

Teorem 2.1.20. Her p-yığını aşkın bir p-yığını tarafından kapsanır [12].

Lemma 2.1.21. $\mathcal{H} \in pS(X)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

a) $\mathcal{H}$ bir aşkın p-yığın olur.

b) Eğer her $H \in \mathcal{H}$ için $A \cap H \neq \emptyset$ ise $A \in \mathcal{H}$ olur.

c) $B \notin \mathcal{H}$ ise $X \setminus B \in \mathcal{H}$ olur [2].

İspat. $(a \Longrightarrow b)$ $\forall H \in \mathcal{H}, A \notin \mathcal{H}$ ve $A \cap H \neq \emptyset$ olarak verilsin. Bu durumda $\mathcal{H} \cup \langle A \rangle$ p-yığını $\mathcal{H}$ ailesinde daha geniş olur. Bu durum $\mathcal{H}$ ailesinin aşkın p-yığın olmasıyla çelişir. Dolayısıyla $A \in \mathcal{H}$ olur.

$(b \Longrightarrow c)$ $B \notin \mathcal{H}$ olsun. (b) ifadesinin hipotezinden yararlanarak, $H \in \mathcal{H}$ ise $\mathrm{B} \cap \mathrm{H} = \emptyset$' dir. Böylece $H \subseteq X \setminus B$ olur. Bu durumda $\mathcal{H}$, p-yığın olduğu için $X \setminus B \in \mathcal{H}$ elde edilir.

$(c \Longrightarrow a)$ $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{K}$ olsun. Burada $\mathcal{K}, \mathcal{H} \in pS(X)$ olur. Herhangi bir $K \in \mathcal{K}$ için $K \notin \mathcal{H}$ olsun. (c) ifadesinin hipotezinden dolayı $X \setminus K \in \mathcal{H}$' dır. Dolayısıyla $X \setminus K \in \mathcal{K}$ olur. Bu durum $K \in \mathcal{K}$ olamasıyla bir çelişki oluşturur ve bu durumda $\mathcal{H}$ aşkın p-yığın olur.

Örnek 2.1.22. X boştan farklı bir küme olsun $\dot{a} = \langle \{a\} \rangle = \{A \subseteq X : \{a\} \subseteq A\}$ kümesi $\{a\}$ kümesi tarafından üretilen aşkın p-yığınını oluşturur.

Önerme 2.1.23. $f: X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon ve $\mathcal{H} \in pS(X)$ olsun.

a) Eğer $\mathcal{H}$ bir yığın ise $f(\mathcal{H})$ de bir yığın olmaz ama f, bir örten fonksiyon olursa $f(\mathcal{H})$ de bir yığın olur.

b) Eğer $\mathcal{H}$ bir p-yığını ise $f(\mathcal{H})$ de bir p-yığın bazı olur ama f, bir örten fonksiyon olursa $f(\mathcal{H})$ de bir p-yığın olur.

c) Eğer $\mathcal{H}$ bir süzgeç ise $f(\mathcal{H})$ de süzgeç tabanı olur ama f, bir örten fonksiyon olursa $f(\mathcal{H})$ de bir süzgeç olur [13].

d) Eğer f bir örten fonksiyon ve $\mathcal{H}$ de bir aşkın süzgeç olursa $f(\mathcal{H})$ de bir aşkın süzgeç olur [12].

e) Eğer f bire bir ve örten fonksiyon ve $\mathcal{H}$ de bir aşkın p-yığını olursa $f(\mathcal{H})$ de bir aşkın p-yığın olur.

İspat. a) $A \in \mathcal{H}$ olsun. Bu durumda $f(A) \in f(\mathcal{H})$ olur. Buradan $\forall B \in \mathcal{H}$ için $\forall f(B) \in f(\mathcal{H})$ elde edilir; fakat burada $Y \in f(\mathcal{H})$ olup olmadığı önemlidir. f örten olduğundan $Y = f(X) \in f(\mathcal{H})$ olur.

b) $A, B \in \mathcal{H}$ olduğu için $A \cap B \neq \emptyset$ olur. Burada f fonksiyonu altında görüntüleri alınırsa $f(A), f(B) \in f(\mathcal{H})$ ve $f(A \cap B) \neq f(\emptyset)$ şeklinde bulunur. Ayrıca $f(\emptyset) \neq f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ olduğundan $\emptyset \neq f(A) \cap f(B)$ olup $f(\mathcal{H})$ de bir p-yığın bazı olur. f örten olursa $f(\mathcal{H})$ de bir yığın olduğundan $f(\mathcal{H})$ de bir p-yığın olur.

c) $i \in I, A_i \in \mathcal{H}$ için $\bigcap_{i\in I} A_i \in \mathcal{H}$ ve $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$ elde edilir. Burada $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$ ifadesinin f altındaki görüntüsü alınırsa $i \in I, f(A_i) \in f(\mathcal{H})$ için $f(\bigcap_{i\in I} A_i) \neq \emptyset$ olur. Burada $f(\bigcap_{i\in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(A_i)$ olduğundan $f(\mathcal{H})$ sonlu arakesit özelliğine sahiptir ve süzgeç tabanı olur. f örten olursa $f(\mathcal{H})$ de bir yığın olduğundan süzgeç olmanın diğer şartı da sağlanır. Bu yüzden $f(\mathcal{H})$ bir süzgeçtir.

d) $f(\mathcal{H})$ bir süzgeç bazı olsun. Eğer f örten bir fonksiyon ve F aşkın süzgeç ise $\forall F_1 \in \mathcal{F}\,(X)$ için $F_1 \subseteq F$ olur. Dolayısıyla $\forall U_1 \in F_1$ için $U_1 \in \mathcal{F}$ bulunur. Burada $\forall U_1 \in F_1$ ifadesinin f fonksiyonu altındaki görüntüsü alınırsa $\forall f(U_1) \in f(\mathcal{F}_1)$ için $f(U_1) \in f(\mathcal{F}\,)$ elde edilir. Ayrıca $\forall\, \mathcal{F}_1 \in F(X)$ ve $\mathcal{F} \in F(X)$ olduğundan $\forall f(\mathcal{F}_1) \in F(Y)$ ve $f(\mathcal{F}\,) \in F(Y)$ bulunur. Eğer $f(\mathcal{F})$ aşkın süzgeç değilse en az bir $f(\mathcal{F}_1)$ için $f(\mathcal{F}\,) \subseteq f(\mathcal{F}_1)$ olmalıdır. Dolayısıyla bazı $f(\mathrm{U}_1) \in f(\mathcal{F}_1)$ için $f(\mathrm{U}_1) \notin f(\mathcal{F}\,)$ olur ve bu durum $f(\mathrm{U}_1) \in f(\mathcal{F}\,)$ olmasıyla çelişir. Dolayısıyla $f(\mathcal{F}\,)$ bir aşkın süzgeçtir.

e) $\mathcal{H}$ bir aşkın p-yığını olduğu için, (lemma 2.1.21 (b) öncülünden dolayı) her $H \in \mathcal{H}$ ve $f^{-1}(B) \cap H \neq \emptyset$ ise $f^{-1}(B) \in \mathcal{H}$ olur. $f^{-1}(B) \cap H \neq \emptyset$ ifadesinin f fonksiyonu altındaki görüntüsü alınırsa her $f(H) \in f(\mathcal{H})$ için $B \cap f(H) \neq \emptyset$ elde edilir. Aynı zamanda $B \in f(\mathcal{H})$ olduğundan dolayı $f(\mathcal{H})$ bir aşkın p-yığını olur.

2.2 Topolojik Uzayların Birbirine Denk Tanımları

Topolojik uzay tanımı, Matematik Tarihi içinde farklı şekillerde dile getirilmiştir. Literatürde en çok bilinen topoloji tanımı 1915 yılında Hausdorff [1] tarafından yapılmıştır. Bu kısımda topolojik uzay tanımı tekrar verilmiş ve topolojik uzayların

başka yollarla da oluşturulabileceği gösterilmiştir.

Tanım 2.2.1. $X \neq \emptyset$ ve τ ailesi, elemanları X kümesinin alt kümelerinden oluşan bir aile olsun,

A_1) $\emptyset, X \in \tau$' dur.

A_2) τ ailesinin keyfi sayıdaki elemanların birleşimi τ ailesine aittir: $\forall j \in I$ (j sonlu ya

da sonsuz) $\forall i \in J$ için, $A_i \in \tau \Longrightarrow \bigcup_{i\in J} A_i \in \tau$' dır.

A_3) τ ailsine ait sonlu sayıdaki elemanların kesişimi τ ailesine aittir. Yani $\forall j \in I$ (j

sonlu) $\forall i \in J$ için, $A_i \in \tau \Longrightarrow \bigcap_{i \in J} A_i \in \tau$' dır.

Yukarıdaki aksiyomları sağlayan τ ailesinin elemanlarına açık küme denir. A_1, A_2 ve A_3 aksiyomlarına açıklar aksiyomları denir. Eğer τ ailesinin her elemanı açık küme ise bu aile bir topolojik yapı olur. (X, τ) uzayına da topolojik uzay denir [13].

Örnek 2.2.2. $X = \{a, b, c, d\}$ herhangi bir küme olsun.
$\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \{b, c, d\}, X\}$ ailesi bir topolojik yapı ve (X, τ) bir topolojik uzay olur. Ayrıca τ ailesinin her elemanı bir açık kümedir.

Örnek 2.2.3. Herhangi bir X kümesi için τ, X' in bütün alt kümelerinin oluşturduğu bir aile olsun. Bu aile bir topolojik yapı ve (X, τ) bir topolojik uzay olur. Bu topolojiye ayrık (noktasal, discrete, en ince) topoloji ve bu uzaya da ayrık topolojik uzay denir.

Örnek 2.2.4. Herhangi bir X kümesi için $\tau = \{X, \emptyset\}$ ailesi bir topoloji olur. Bu topolojiye ayrık olmayan (indiscrete, en kaba) topoloji ve bu uzaya da ayrık olmayan topolojik uzay denir.

Tanım 2.2.5. (X, τ) bir topolojik uzay, $A \subseteq X$ ve $a \in A$ olsun. Eğer $a \in G \subseteq A$ olacak şekilde en az bir tane G açık kümesi varsa a elemanına A kümesinin bir iç noktası denir. A kümesinin bütün iç noktalarının kümesine A kümesin içi denir ve A^o sembolüyle gösterilir. $A \subseteq X$ olsun eğer A^c topolojik uzayın bir elemanı ise A kümesine kapalı küme denir. A kümesini kapsayan en küçük kapalı kümeye A kümesinin kapanışı denir ve $\bar{A}$ sembolü ile gösterilir [13].

Tanım 2.2.6. (Kuratowski Kapanış Aksiyomları) Boş olmayan bir X kümesi verilsin. $P(X)$, X kümesi üzerindeki bütün alt kümelerin ailesi olmak üzere $\forall A \subseteq X$ alt kümesine karşılık aşağıdaki aksiyomları sağlayan $\alpha: P(X) \longrightarrow P(X)$ dönüşümü yardımıyla oluşturulan $\alpha(A) \subseteq P(X)$ ailesine Kuratowski kapanışı denir. Buradaki aksiyomlara da Kuratowski kapanış aksiyomları denir [13]:

K_1) $\alpha(\emptyset) = \emptyset$

K_2) $A \subseteq \alpha(A)$

K_3) $\alpha(A \cup B) = \alpha(A) \cup \alpha(B)$

$K_4)$ $\alpha(\alpha(A)) = \alpha(A)$

$K_5)$ $A \subseteq B \Longrightarrow \alpha(A) \subseteq \alpha(B)$.

Tanım 2.2.7. $P(X)$, $X \neq \emptyset$ kümesinin kuvvet kümesi olsun. $\forall A \subseteq X$ kümesi için $\beta: P(X) \longrightarrow P(X)$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlarsa bu dönüşüme iç dönüşüm ve bu aksiyomlara da iç dönüşüm aksiyomları denir [13]:

$I_1)$ $\beta(X) = X$

$I_2)$ $\beta(A) \subseteq A$

$I_3)$ $\beta(A \cap B) = \beta(A) \cap \beta(B)$

$I_4)$ $\beta(\beta(A)) = \beta(A)$

$I_5)$ $A \subseteq B \Longrightarrow \beta(A) \subseteq \beta(B)$.

Teorem 2.2.8. $\beta: P(X) \longrightarrow P(X)$ dönüşümü tanımlı olsun. $\forall A \subseteq P(X)$ için, β dönüşümü iç dönüşüm aksiyomlarını sağlasın. Bu durumda $\tau = \{A \subseteq X \mid \beta(A) = A\}$ ailesi X üzerinde bir topoloji ve $\beta(A) = A^{\circ}$ olur [13].

Teorem 2.2.9. $\alpha: P(X) \longrightarrow P(X)$ dönüşümü tanımlı olsun. $\forall A \subseteq P(X)$ için α dönüşümü Kuratowski kapanış aksiyomlarını sağlasın. Bu durumda $\tau = \{A \subseteq X \mid \alpha(A) = A\}$

ailesi X üzerinde bir topoloji ve $\alpha(A) = \bar{A}$ olur [13].

Tanım 2.2.10. (X, τ) bir topolojik uzay, $A \subseteq X$ ve $a \in A$ olsun. Eğer $a \in G_a \subseteq A$ olacak şekilde bir $G_a \in \tau$ açık kümesi varsa A kümesine a' nın bir komşuluğu denir. Özel olarak A kümesi de topolojik uzayın bir elemanı ise A' ya bir açık komşuluk denir. a elemanının bütün komşuluklarının kümesi $\mathcal{N}_a$ ile gösterilir [12].

Tanım 2.2.11. (X, τ) bir topolojik uzay ve $a \in X$ olsun. a' nın her $\mathcal{N}_a$ komşuluğu için aşağıdaki ifadeler sağlanır.

$N_1)$ $\mathcal{N}_a \neq \emptyset$ olur.

$N_2)$ $\forall V \in \mathcal{N}_a$ için $a \in V$ olur.

$N_3)$ $\forall\, V, W \in \mathcal{N}_a$ için $V \subseteq W$ olduğunda $W \in \mathcal{N}_a$ olur. (yığın olma)

$N_4)$ $\forall\, V, W \in \mathcal{N}_a$ için $V \cap W \in \mathcal{N}_a$ olur. (süzgeç olma)

$N_5)$ $\forall\, V \in \mathcal{N}_a$ için $\exists\, W \in \mathcal{N}_a$ vardır öyle ki $\forall\, b \in W$ için $V \in \mathcal{N}_b$ olur. (a'nın her komşuluğu için en az bir komşuluğu başka bir noktanın da komşuluğudur).

Burada verilen aksiyomlara komşuluk aksiyomları denir [13].

Teorem 2.2.12. X, boştan farklı bir küme olmak üzere her $a \in X$ için komşuluk aksiyomlarını sağlayan a' nın tüm komşuluklar ailesi $\mathcal{N}_a$ olarak verilsin. Bu durumda X üzerinde bir tek $\tau = \{A \subseteq X : \forall\, a \in A,\ A \in \mathcal{N}_a\}$ topolojisi mevcuttur [12].

Örnek 2.2.13. $X = \{a, b, c, d\}$ kümesi verilsin. Sırasıyla a, b, c ve d elemanlarının yukarıdaki komşuluk aksiyomlarını sağlayan τ topolojik uzayının komşulukları

$$\mathcal{N}_a = \big\{\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, X\big\}$$

$$\mathcal{N}_b = \big\{\{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, X\big\}$$

$$\mathcal{N}_c = \big\{\{b, c\}, \{a, b, c\}, \{b, c, d\}, X\big\}$$

$$\mathcal{N}_d = \big\{\{b, c, d\}, X\big\}$$

şeklinde verilsin. Teorem 2.2.14' e göre belirlenen topoloji

$$\tau = \big\{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \{b, c, d\}\big\}$$

şeklinde elde edilir ve bu τ topolojisi yukarıdaki komşuluk aileleri yardımıyla oluşturulan tek topolojidir.

2.3. Lattice Kavramı

Bu kısımda bir kümenin maksimumu, minimumu, supremumu ve infimumunun tanımları verilmiştir. Ayrıca lattice ve dense kavramları da incelenmiştir.

Tanım 2.3.1. E kümesi kısmi sıralı bir S kümesinin alt kümesi olsun.
i) $\forall x \in E$ için $x \leq y$, $y \in S$ ise y elemanına E' nin üst sınırı denir. Eğer $\emptyset \in S$ olursa S

kümesinin herhangi bir elemanı $\emptyset$' nin üst sınırı olur. E kümesinin üst sınırlarını kümesi $U(E)$ ile gösterilir. Eğer $U(E) \neq \emptyset$ ise E kümesine üsten sınırlı bir küme denir.

ii) $\forall x \in E$ için $y \leq x$, $y \in S$ ise y elemanına E kümesinin alt sınırı denir. Eğer $\emptyset \in S$ olursa S kümesinin herhangi bir elemanı $\emptyset$' nin alt sınır olur. E kümesinin alt sınırlarının kümesi $L(E)$ ile gösterilir. Eğer $L(E) \neq \emptyset$ ise E kümesine alttan sınırlı bir küme denir.

iii) $\forall x \in E$ için $x \leq y$, $y \in E$ ise y elemanına E kümesinin en büyük elemanı veya E kümesinin maksimum elemanı denir ve $maxE = y$ ile gösterilir.

iv) $\forall x \in E$ için $y \leq x$, $y \in E$ ise y elemanına E kümesinin en küçük elemanı veya E kümesinin minimum elemanı denir ve $minE = y$ ile gösterilir.

v) Eğer $min\, U(E) = y$ mevcut ise $y \in X$, E kümesinin üst sınırlarının en küçüğü yani supremumu olur ve $supE = y$ olarak gösterilir.

vi) Eğer $max\, L(E) = y$ mevcut ise $y \in X$, E kümesinin alt sınırlarının en büyüğü yani

infimumu olur ve $infE = y$ olarak gösterilir [20].

Tanım 2.3.2. $(S, \leq)$ kısmi sıralı bir küme olsun. S kümesinin herhangi iki elemanı

kıyaslanabilirse S kümesine tam sıralı küme denir. Kısmi sıralı kümenin tam sıralı alt kümesine zincir denir [20].

Tanım 2.3.3. $(S, \leq)$ kısmi sıralı küme olsun. Ayrıca $E \subseteq T \subseteq S$ olacak şekilde E, T de birer kısmi sıralı alt kümesi olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler mevcuttur.

i) $L_T(E)$ kümesi E kümesinin T kümesi içindeki alt sınırlarının kümesidir.

ii) $U_T(E)$ kümesi E kümesinin T kümesi içindeki üst sınırlarının kümesidir.

iii) $sup_T(E)$ kümesi E kümesinin T kümesi içindeki supremumudur.

iv) $inf_T(E)$ kümesi E kümesinin T kümesi içindeki infimumudur [20].

Tanım 2.3.4. $(S, \leq)$ kısmi sıralı küme ve $S \subseteq T$ olsun.

i) $\forall t \in T$ için $sup_T E = t$ olacak şekilde en az bir $E \subseteq S$ kümesi bulunabiliyorsa, S kümesine T kümesi içinde *sup-dense* denir.

ii) $\forall t \in T$ için, $Inf_T E = t$ olacak şekilde en az bir $E \subseteq S$ kümesi bulunabiliyorsa, S kümesine T kümesi içinde *inf-dense* denir [20].

Örnek 2.3.5. $T = Q^+ \cup \mathbb{Z}^- \cup$ IR $\cup \{0\}$ ve $S = Q^+ \cup \mathbb{Z}^- \cup$ IR kümeleri verilsin. Buna göre;

(1) $L_T[0,1] = \{0\} \cup \mathbb{Z}^- \cup$ IR$^-$ ve $inf_T[0,1] = 0$ olur.

(2) $U_T[0,1] = [1,\infty)$ ve $sup_T[0,1] = 1$ olur.

(3) $L_{Q^+}[0,1]$ kümesi belirlenemez çünkü $[0,1] \nsubseteq Q^+$ olur.

(4) $L_{Q^+}[5,10]$ \ IR=(0,5] \ IR ve $inf_{Q^+}[5,10]$ \ IR = 5 olur.

(5) $L_T Q^+ = \{0\} \cup \mathbb{Z}^- \cup$ IR$^-$ olarak bulunur. $Q^+ \subseteq S$ ve $\forall a \notin S$ için $inf_T Q^+ = 0$ olduğundan S kümesi T içinde bir $inf - dense$ olur. Ancak S kümesi T içinde bir $sup - dense$ olmaz.

Tanım 2.3.6. $(S, \leq)$ kısmi sıralı bir küme olsun. Eğer S kümesinin boş olmayan sonlu her alt kümesinin supremumu ve infimumu varsa S kümesine pre-lattice denir. Eğer $\emptyset$ de dahil olmak üzere sonlu her alt kümesinin supremumu ve infimumun varsa S kümesine lattice denir [20].

Tanım 2.3.7. Maksimum ve minimum elemanıyla beraber tam sıralı olan kümeye tam lattice denir [20]. Eğer $A \subseteq B$ iken A kümesi alt tam latticelerin en küçüğü ise A kümesine B kümesi içinde $order - dense$ denir [2].

Örnek 2.3.8.

$i)$ $(Q, \leq)$ rasyonel sayılar kümesi tam sıralı bir kümedir. Bütün alt kümeleri alttan ve üsten sınırlı olduğu için pre-lattice olur fakat lattice değildir. Dolayısıyla tam lattice de olamaz.

$ii)$ Herhangi bir X kümesi için $(P(X), \subseteq)$ ailesi tam sıralı değildir. Ancak $P(X)$ ailesinin boş küme de dahil olamak üzere her alt kümesi maksimal ve minimal elemana sahip olduğundan lattice olur.

2.4. Kategori Kavramı

Bu kısımda kategori içindeki morfizmler yardımıyla oluşan özel yapılar incelenmiştir. Ayrıca kategoriler arasında tanımlanan funktor kavramına değinilmiştir.

Tanım 2.4.1. Bir $\boldsymbol{C}$ kategorisi aşağıdaki üç matematiksel gereklilikten oluşur.

1) Sahip olduğu elemanları obje olarak adlandırılan bir $ob(\boldsymbol{C})$ sınıfı mevcuttur.

2) Sahip olduğu elemanları morfizm, dönüşüm veya ok olarak adlandırılan bir $hom(\boldsymbol{C})$ sınıfı mevcuttur. (burada $hom(A, B)$, A' dan B' ye bütün morfizmlerin kümesini tanımlar.)

3) A, B, C ve D nesneleri arasındaki $\forall f: A \longrightarrow B$, $g: B \longrightarrow C$ ve $h: C \longrightarrow D$ dönüşümleri için, $hog: B \longrightarrow D$ aşağıdaki iki şartı sağlayan $gof: A \longrightarrow C$ ve $hog: B \longrightarrow D$ bileşke dönüşümleri mevcuttur.

(1) $\forall f: A \longrightarrow B, g: B \longrightarrow C$ ve $h: C \longrightarrow D$ dönüşümleri için $fo(goh) = (fog)oh$ olur. (Birleşme özelliğinin varlığı)

(2) $\forall f: A \longrightarrow B$ dönüşümü için $I_A of = f = foI_B$ olur. (Birim dönüşümün varlığı) Burada her A nesnesi için I_A dönüşümü $I_A: A \longrightarrow A$ birim dönüşümü tanımlar.

Örnek 2.4.2.

$i)$ Bütün kümeler ve bu kümeler arasında tanımlı bütün fonksiyonlar bir kategori oluşturur. Bu kategoriye kümelerin kategorisi denir ve **SET** şeklinde gösterilir.

$ii)$ Bütün topolojik uzaylar ve bu uzaylar arasındaki sürekli dönüşümler bir kategori oluşturur. Bu kategoriye topolojik uzaylar kategorisi denir ve **TOP** şeklinde gösterilir.

$iii)$ Tüm kısmi sıralı kümelerin kümesi $(P, \leq_p)$ ve dönüşümleri de sıralamayı koruyan monoton dönüşümler olsun. Buna göre $(P, \leq_p)$ kümesi kategori oluşturur ve kategoriye kısmi sıralı kümelerin kategorisi denir ve **POSET** şeklinde gösterilir.

$iv)$ Tüm komşuluk uzaylarının kümesi N(X) ve bu uzaylar arasındaki sürekli fonksiyonlar bir kategori oluşturur. Bu kategoriye komşuluk kategorisi denir ve **NBD** şeklinde gösterilir. Gerçekten bileşke işlemi sürekliliği korur ve dönüşümlerde kümeler arasındaki dönüşümler olduğundan diğer şartların sağlandığı görülür.

Tanım 2.4.3. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa $\mathfrak{B}$ kategorisine $\mathcal{C}$ kategorisinin alt kategorisi denir.

a) $\mathfrak{B}$ kategorisinin her nesnesi $\mathcal{C}$ kategorisinin de nesnesidir. (yani $ob(\mathfrak{B}) \subseteq ob(\mathcal{C})$)

b) $\mathfrak{B}$ kategorisindeki dönüşümler $\mathcal{C}$ kategorisi içindekilere göre kısıtlanmıştır. (yani $\forall A, B \ \in ob(\mathfrak{B})$ için $hom(A, B) \subseteq \mathrm{hom}(A, B)$' dir.)

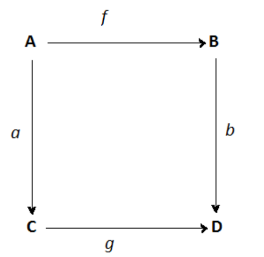
c) $\mathfrak{B}$ kategorisindeki birim ve bileşke işlemleri $\mathcal{C}$ kategorisindekiyle aynıdır.

Eğer yukarıdaki şartlar sabit iken $\mathfrak{B}$ kategorisindeki dönüşümler $\mathcal{C}$ kategorisindeki ile aynı ise $\mathfrak{B}$ kategorisine $\mathcal{C}$ kategori içinde dolgun alt kategorisi denir. Örneğin **SET** kategorisi içinde **FİNSET** (sonlu kümelerin kategorisi) dolgun alt kategori olur.

Tanım 2.4.4. Herhangi bir kategoride eğer her A nesnesi için 0 nesnesinden A nesnesine sadece bir dönüşüm varsa buradaki 0 nesnesine başlangıç (ilk) nesnesi ve eğer her A nesnesi için A nesnesinden 1 nesnesine sadece bir dönüşüm varsa buradaki 1 nesnesine bitiş (son) nesnesi denir. Örnek olarak **SET** kategorisinde başlangıç nesnesi boş küme, bitiş nesnesi de bir elemanlı kümeler olur.

Tanım 2.4.5. Bir $\mathcal{C}$ kategorisinde bir $f: A \longrightarrow B$ morfizmi verilsin. Eğer f morfizmi soldan sadeleşme özelliğine sahipse yani $fog = foh$ olacak şekilde g ve h morfizmleri için $g = h$ oluyorsa f morfizmine monomorfizm denir. Aynı f morfizmi için eğer sağdan sadeleştirme özelliği varsa f morfizmine epimorfizm denir. Benzer şekilde $gof = I_A$ olacak şekilde bir $g: B \longrightarrow A$ morfizmi varsa f morfizmine kesit eğer $fog = I_B$ olacak şekilde bir $g: B \longrightarrow A$ morfizmi varsa f morfizmine dual kesit denir. Monomorfizm ve epimorfizm olan bir morfizme bimorfizm denir. Ayrıca kesit ve dual kesit olan morfizme de izomorfizm denir. Eğer $f: A \longrightarrow B$ morfizmi bir izomorfizm ise A ve B objelerine izomorf denir [12].

Tanım 2.4.6. Bir kategorinin A, B, C ve D nesneleri ve $f,\ g,\ a$ ve b dönüşümleri için;

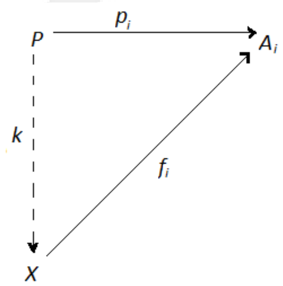


Şekil 2.1. Değişmeli diyagram

yukarıdaki diyagram verilsin. Eğer başlangıç ve bitişleri aynı olan bileşke dönüşümleri eşit ise; yani $bof = goa$ oluyorsa bu diyagrama değişmeli diyagram denir.

Tanım 2.4.7. Herhangi bir $\mathcal{C}$ kategorisinde $\{A_i : i \in I\}$ nesnelerin bir sınıfı, P bu kategorinin başka bir nesnesi ve her $i \in I$ için $p_i : P \longrightarrow A_i$ dönüşümü verilsin. X, $\mathcal{C}$

kategorisinin bir nesnesi olmak üzere $f_i : X \longrightarrow A_i$ dönüşümü verildiğinde;



Şekil 2.2. Çarpım diyagramı

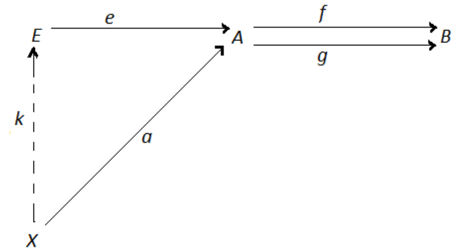
diyagramı değişmeli olacak şekilde bir tek $k : X \longrightarrow P$ dönüşümü varsa P' ye $\{A_i : i \in I\}$ nesneler ailesinin çarpımı denir.

Tanım 2.4.8. Herhangi bir $\mathcal{C}$ kategorisinde $f, g : A \longrightarrow B$ morfizmleri verilsin. Aşağıdaki şartları sağlayan (E, e) çiftine f ve g dönüşümlerinin eşitleyicisi denir.

a) $e : E \longrightarrow A$ bir dönüşümdür.

b) $foe = goe$ bileşke fonksiyonu mevcuttur.

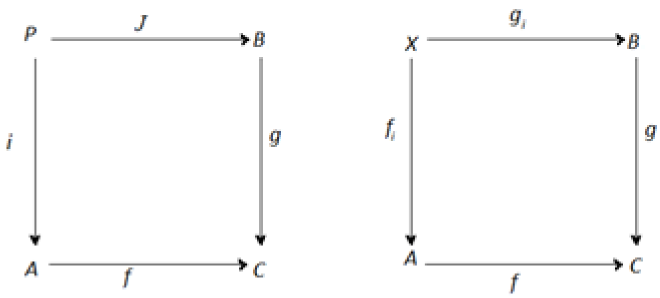
c) Eğer $foa = goa$ olacak şekilde $a: X \to A$ dönüşümü verilirse



Şekil 2.3. Eşitleyici diyagramı

diyagramını değişmeli yapan bir tek $k: X \to E$ dönüşümü vardır.

Tanım 2.4.9. Herhangi bir C kategorisi içindeki,



Şekil 2.4. Pullback değişmeli diyagramları

değişmeli diyagramları verildiğinde

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[dr, dashed, "k"] \arrow[drr, bend left, "J"] \arrow[ddr, bend right, "i"'] & & \\
& X \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "f_i"'] & B \arrow[d, "g"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}$$

Şekil 2.5. Pullback değişmeli diyagramlarını birleştiren morfizm diyagramı

diyagramını değişmeli yapan bir tek $k: P \longrightarrow X$ dönüşümü varsa

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "f_i"'] & B \arrow[d, "g"] \\
A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}$$

Şekil 2.6.Pullback diyagramı

diyagramına f ve g dönüşümlerinin pullback' i denir.

Tanım 2.4.10. $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ birer kategori olmak üzere $\mathcal{C}$' nin her bir A objesini $\mathcal{D}$' nin bir $F(A)$ objesine, $\mathcal{C}$' nin her bir $f: A \longrightarrow B$ morfizmini $\mathcal{D}$' deki bir $F(f): F(A) \longrightarrow F(B)$ morfizmine dönüştüren ve aşağıdaki şartları sağlayan bir F dönüşümüne $\mathcal{C}$' den $\mathcal{D}$' ye bir (kovariant) funktor denir ve $F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ olarak yazılır. $\mathcal{C}$ kategorisinde gof bileşkesi

tanımlı olacak şekilde f ve g morfizmleri için;

(1) $F(gof) = F(g)oF(f)$' dır.

(2) Her $A \in Ob(\mathcal{C})$ için $F(I_A) = I_{F(A)}$' dır.

Bu tanımın duali olarak aşağıdaki tanım yapılabilir.

Tanım 2.4.11. $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ birer kategori olmak üzere $\mathcal{C}$' nin her bir A objesini $\mathcal{D}$' nin bir

$F(A)$ objesine, $\mathcal{C}$' nin her bir $f: A \longrightarrow B$ morfizmini $\mathcal{D}$' deki bir $F(f): F(B) \longrightarrow F(A)$ morfizmine dönüştüren ve aşağıdaki şartları sağlayan bir F dönüşümüne $\mathcal{C}$' den $\mathcal{D}$' ye bir (kontravariant) funktor denir ve $F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ olarak yazılır. $\mathcal{C}$ kategorisinde gof bileşkesi tanımlı olacak şekilde f ve g morfizmleri için;

(1) $F(gof) = F(f)oF(g)$' dır.

(2) Her $A \in Ob(\mathcal{C})$ için $F(I_A) = I_{F(A)}$' dır [12].

3.BÖLÜM

KOMŞULUK UZAYLARI

Herhangi bir A kümesi, reel sayılar kümesi üzerindeki alışılmış topolojik uzayının bir elemanı olsun. Bu A kümesinin içinde bulunduğu bütün aralıklar bir komşuluk olur. Ayrıca bu açık aralıkların üst kümeleri de komşuluk olarak düşünülebilir. Bu bölümde D.C Kent ve W.C. Win [2]' in tanımladığı komşuluk uzayları tanımı tekrar verilmiştir. Her elemanın komşu kümeleri belirlenip bu kümelerden topoloji elde etmeye çalışılmıştır. Ayrıca bazı tanım ve teoremlerin topolojik uzaylardaki bağlantıları aktarılmıştır.

3.1. Komşuluk Uzayları

Bu kısımda herhangi bir kümenin alt kümelerinin bir ailesinin, o kümedeki herhangi bir elamanının komşu kümesi olup olmadığını belirlenmiştir. Bu şekilde belirlenen komşu kümelerin sürekli ve iç dönüşümler altında nasıl taşındığı belirtilmiştir.

Tanım 3.1.1. X bir küme ve $\forall x \in X$ için $v(\mathrm{x}) = \{A \subseteq X : x \in A\}$ şeklinde verilmiş p-yığını olsun. $v = \{v(x)\colon\ \forall x \in X\}$ şeklinde oluşturulan v yapısına X üzerinde komşuluk yapısı, her bir $v(x)$' e, x' e ait v-komşuluk yığını ve (X, v) uzayına da komşuluk uzayı denir. X üzerindeki bütün komşuluk yapılarının kümesi N(X) ile gösterilir.

Örnek 3.1.2. $X = \{a, b, c, d\}$ kümesi için

$$v(a) = \big\{\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d\}, X\big\}$$

$$v(b) = \big\{\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d\}, X\big\}$$

$$v(c) = \{X\}$$

$$v(d) = \big\{\{d\}, \{a, d\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d\}, X\big\}$$

$v = \{v(a), v(b), v(c), v(d)\}$ ailesi komşuluk yapısıdır. (X, v) yapısına da X üzerindeki komşuluk uzayı denir.

Teorem 3.1.3. $v, \mu \in$ N(X) komşuluk yapılarının $v \leq \mu$ olması için gerek ve yeter şart $\forall x \in X$ için $v(x) \leq \mu(x)$ olmasıdır [2]. N(X) kümesi aynı zamanda p-yığını olduğu için kısmi sıralanmış bir kümedir ve karşılaştırılabilir olur.

Tanım 3.1.4. $\upsilon, \mu \in$ N(X) olsun. Eğer $\forall x \in X, \upsilon(x) \leq \mu(x)$ olursa (X, υ) komşuluk uzayına (X, μ) komşuluk uzayından daha kaba komşuluk uzayı veya (X, μ) komşuluk uzayına (X, υ) komşuluk uzayından daha ince komşuluk uzayı denir [2].

Tanım 3.1.5. $\mathcal{H}$ ailesi X kümesi üzerinde bir p-yığını olsun. Eğer $\upsilon(x) \subseteq \mathcal{H}$ olursa $\mathcal{H}$ x elemanına υ-yakınsak olur ve $\mathcal{H} \xrightarrow{\upsilon} x$ şeklinde gösterilir [2].

Önerme 3.1.6. (X, υ) herhangi bir komşuluk uzayı N_1, N_2, N_3 ve N_5 aksiyomlarını sağlar ancak N_4 aksiyomunu sağlaması için her bir $\upsilon(x)$ komşuluk yapısının A_2 açıklar aksiyomunu sağlaması gerekir.

İspat. $X \in \upsilon(x)$ olduğundan $\upsilon(x) \neq \emptyset$ olur. Dolayısıyla komşuluk aksiyomlarının N_1 aksiyomu sağlanır. $\forall\, V \in \upsilon(x)$ için $x \in V$ olduğundan N_2 aksiyomu sağlanır. $\forall x \in X$ için $\upsilon(x)$ komşuluk yapıları bir yığın olduğundan N_3 aksiyomu sağlanır. $\forall x \in X$ için $\upsilon(x)$, A_2 aksiyomu sağlasın. Dolayısıyla $\upsilon(x)$ bir süzgeç olur ve N_4 sağlanır. $\forall V \in \upsilon(x)$ için $V \cap W \neq \emptyset$ olur. Dolayısıyla $\exists\, W \in \upsilon(x)$ vardır öyle ki $\forall\, y \in W$ için $\upsilon(y) = \langle\{W, V\}\rangle$ olur ve $V \in \upsilon(y)$' dir. Dolayısıyla N_5 da sağlanır.

Tanım 3.1.7. (X, υ) ve (Y, μ) komşuluk uzayları ve $f: (X, \upsilon) \longrightarrow (Y, \mu)$ fonksiyonu verilsin.

a) Eğer her $x \in X$ için $\mu(f(x)) \subseteq f(\upsilon(x))$ olursa f süreklidir denir.

b) Eğer her $x \in X$ için $f(\upsilon(x)) \subseteq \mu(f(x))$ olursa f iç operatördür denir [2].

Teorem 3.1.8. (Topolojik süreklilik**)** (X, υ) ve (Y, μ) komşuluk aksiyomlarını sağlayan bir komşuluk uzayı için $f: (X, \upsilon) \longrightarrow (Y, \mu)$ fonksiyonun $\forall x \in X$ noktasında sürekli olması için gerek ve yeter şart $\forall\, V \in \mu(f(x))$ için $f(U) \subseteq V$ olacak şekilde en az bir $U \in \upsilon(x)$ olmasıdır. Aynı teorem (X, υ) ve (Y, μ) topolojik uzaylar olarak düşünülürse topolojik süreklilik tanımı verilmiş olur.

İspat. $(\Longrightarrow)$ f sürekli ise $\mu(f(x)) \subseteq f(\upsilon(x))$ olur. $\forall\, V \in \mu(f(x))$ için $V \in f(\upsilon(x))$ ve

$\exists\, U \in \upsilon(x)$ için $V = f(U)$ olur. Dolayısıyla $f(U) \subseteq V$' dir.

($\Leftarrow$) $\forall\, V \in \mu(f(x))$(1) için $f(U) \subseteq V$ olacak şekilde en az bir $U \in v(x)$ var olsun. Burada,

$$f(U) \in f(v(x)) \tag{3.1}$$

olur. $v(x)$ komşuluk aksiyomlarını sağladığı için $v(x)$ süzgeçtir. Dolayısıyla $f\big(v(x)\big)$ de süzgeç olur. Herhangi bir süzgeç aynı zamanda yığındır. Bu durumda

$$f(U) \in f(v(x)) \Rightarrow f(U) \subseteq V \Rightarrow V \in \big(v(x)\big) \tag{3.2}$$

elde edilir. (3.1) ve (3.2)' den dolayı $\mu(f(x)) \subseteq f(v(x))$ olup f sürekli olur.

Teorem 3.1.9. Komşuluk uzayları arasındaki f dönüşümü sürekli ise örtendir.

İspat. f fonksiyonu sürekli olsun. Buradan $\mu(f(x)) \subseteq f(v(x))$ olur. f fonksiyonu örten olmasın yani $f(X) \neq Y$ olarak alınsın. Bu durumda $Y \in \mu(f(x))$ ve $X \in v(x)$ olur. f foksiyonu sürekli olduğundan $Y \in f(v(x))$ elde edilir. $Y \in f(v(x))$ ifadesinde f^{-1} ters dönüşümü uygulanırsa $f^{-1}(Y) \in v(x)$ bulunur. $f(X) \neq Y$ olduğu için $X \notin v(x)$ olur. Bu durum $X \in v(x)$ olasıyla bir çelişki oluşturduğu için f örten olur. Sonuç olarak komşuluk uzaylarında süreklilik için örtenlik gerekli şarttır.

Örnek 3.1.10. $X = \{a, b, c, d\}$ ve $Y = \{x, y, z\}$ kümeleri verilsin

$$\tau = \big\{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \{b, c, d\}\big\}$$

$$\Gamma = \big\{Y, \emptyset, \{x\}, \{y, z\}\big\}$$

aileleri birer topolojidir ve (X, τ) ve (Y, Γ) birer topolojik uzay olur. (X, τ) topolojik uzayı için;

$$v(a) = \big\{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, X\big\}$$

$$v(b) = \big\{\{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d\}, X\big\}$$

$$v(c) = \big\{\{b, c\}, \{a, b, c\}, \{b, c, d\}, X\big\}$$

$$v(d) = \big\{\{b, c, d\}, X\big\}$$

komşuluk yapıları ve (X, v) komşuluk uzayı oluşturulur. (Y, Γ) topolojik uzayı için;

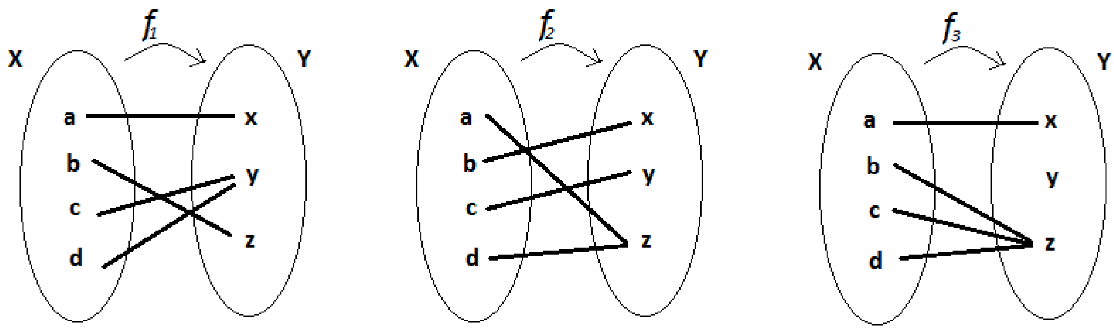
$\mu(x) = \{\{x\}, \{x,y\}, \{x,z\}, Y\}$

$\mu(y) = \{\{y,z\}, Y\}$

$\mu(z) = \{\{y,z\}, Y\}$

komşuluk yapıları ve (Y,μ) komşuluk uzayı oluşturulur.

Örnek 3.1.11. Örnek 3.10'deki (X,v) ve (Y,μ) komşuluk uzayları için şekil 3.1' deki foksiyonlar verilsin.



Şekil 3.1. f_1, f_2 ve f_3 fonksiyonları

Bu durumda;

1) f_1 fonksiyonu hem topolojik uzayında hem de komşuluk uzayında süreklidir.

2) f_2 fonksiyonu hem topolojik uzayında hem de komşuluk uzayında sürekli değildir.

3) f_3 fonksiyonu topolojik uzayında sürekli fakat komşuluk uzayında sürekli değildir.

1) Komşuluk uzayındaki süreklilik tanımı için f_1 fonksiyonunu ele alınsın. $a \in X$ olsun, $\{\{x\}, \{x,y\}, \{x,z\}, Y\} \subseteq \{\{x\}, \{x,y\}, \{x,z\}, Y\}$ olduğundan $\mu(f_1(a)) \subseteq f_1(v(a))$ olur. $b \in X$ olsun, $\{\{x,z\}, Y\} \subseteq \{\{z\}, \{x,z\}, \{y,z\}, Y\}$ olduğundan $\mu(f_1(b)) \subseteq f_1(v(b))$ olur. $c \in X$ olsun, $\mu\{\{y,z\}, Y\} \subseteq \{\{y,z\}, Y\}$ olduğundan $\mu(f_1(c)) \subseteq f_1(v(c))$ olur. $d \in X$ olsun,$\{\{y,z\}, Y\} \subseteq \{\{y,z\}, Y\}$ olduğundan $\mu(f_1(d)) \subseteq f_1(v(d))$ olur. Dolayısıyla komşuluk uzayında f_1 fonksiyonu süreklidir.

Topolojik uzaylarındaki süreklilik tanımı için f_1 $\forall a \in X$ $\forall V \in \mu(f_1(a))$, $f_1(v(a))$' nın en az bir elemanını kapsamalıdır. $a \in X$ ve $\{x\} = V_1$, $\{x,y\} = V_2$, $\{x,z\} = V_3$, $Y =$

V_4. Dolayısıyla $\mu(f_1(a)) = \mu(x) = \{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ olur ve $\{x\} \subseteq V_1$, $\{x\} \subseteq V_2$, $\{x\} \subseteq V_2$ ve $\{x\} \subseteq V_4$ bulunur. $b \in X$ ve $\{y, z\} = V_1$, $Y = V_2$ kümeleri Y' nin alt kümeleri olsun. Bu durumda $\mu(f_1(b)) = \mu(z) = \{V_1, V_2\}$ ve $\{z\} \subseteq V_1$ ve $\{z\} \subseteq V_2$ olur. $c \in X$ ve $\{y, z\} = V_1$, $Y = V_2$ kümeleri Y' nin alt kümeleri olsun. $\mu(f_1(c)) = \mu(y) = \{V_1, V_2\}$ ve $\{y, z\} \subseteq V_1$, $Y \subseteq V_2$ olur. $d \in X$ ve $\{y, z\} = V_1, Y = V_2$ kümeleri Y' nin alt kümeleri olsun. Bu durumda $\mu(f_1(d)) = \mu(y) = \{V_1, V_2\}$ ve $\{y, z\} \subseteq \{y, z\} = V_1$, $Y \subseteq Y = V_2$ olur. Dolayısıyla f_1 fonksiyonu topolojik uzayda da süreklidir.

2) f_2 fonksiyonu için; $\mu(f_2(d)) \nsubseteq f_2(v(d)) \Longrightarrow \mu(z) \nsubseteq f_2(\{b, c, d\}, Y) \Longrightarrow \{\{y, z\}, Y\} \nsubseteq \{Y\}$ olduğundan komşuluk uzayları için sürekli değildir.

Topolojik uzay içindeki süreklilik tanımı için f_2 fonksiyonu ele alınsın; $\forall a \in X$ için $\forall\, V \in \mu(f_2(a))$, $f_2(v(a))$' nın en az bir elemanını kapsamalıdır. Buradan hareketle $d \in X$ ve $\{y, z\} = V_1, Y = V_2$ kümeleri Y' nin alt kümeleri olsun. Bu durumda $\mu(f_2(d)) = \mu(z) = \{V_1, V_2\}$ ve $f_2(v(d)) = f_2(\{b, c, d\}, X) = \{Y\}$ bulunur. Burada $Y \subseteq Y$ olur fakat $Y \nsubseteq \{y, z\}$ olduğundan f_2 fonksiyonu topolojik uzay içinde sürekli değildir.

3) f_3 fonksiyonu örten olmadığı için komşuluk uzayında sürekli değildir. Geçekten $\mu(f(a)) \nsubseteq f(v(a)) \Longrightarrow \mu(x) \nsubseteq f(v(a))$ olduğundan f_3 fonksiyonu sürekli değildir. Diğer taraftan f_3 fonksiyonu topolojik uzaylar içinde incelediğinde; $a \in X$ ve $\{x\} = V_1, \{x, y\} = V_2$, $\{x, z\} = V_3$, $Y = V_4$ kümeleri Y' nin alt kümeleri olsun. Bu durumda $\mu(f_3(a)) = \mu(x) = \{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ ve $\{x\} \subseteq V_1$, $\{x\} \subseteq V_2$, $\{x\} \subseteq V_3$, $\{x\} \subseteq V_4$ olur. $b \in X$ ve $\{y, z\} = V_1$, $Y = V_2$ kümeleri Y' nin alt kümeleri olsun. Bu durumda $\mu(f_3(b)) = \mu(z) = \{V_1, V_2\}$ ve $\{z\} \subseteq \{y, z\}$, $\{z\} \subseteq V_2$ olur. $c \in X$ ve $\{y, z\} = V_1, Y = V_2$ kümeleri Y' nin alt kümeleri olsun. Bu durumda $\mu(f_3(c)) = \mu(z) = \{\{y, z\}, Y\}$ ve $\{z\} \subseteq V_1$, $\{z\} \subseteq V_2$ olur. $d \in X$ ve $\{y, z\} = V_1$, $Y = V_2$ kümeleri Y' nin alt kümeleri olsun. Bu durumda $\mu(f_3(d)) = \mu(z) = \{\{y, z\}, Y\}$ ve $\{z\} \subseteq \{y, z\}$, $\{z\} \subseteq Y$ olur. Dolayısıyla f_3 fonksiyonu topolojik uzayları içinde süreklidir.

Teorem 3.1.12. (X, τ) ve (Y, Γ) birer topolojik uzay ve $f: (X, \tau) \longrightarrow (Y, \Gamma)$ bir fonksiyon olsun. Γ' nun her alt kümesinin f fonksiyonu altındaki ters görüntüsü τ ailesinin elemanı oluyorsa f fonksiyonu süreklidir [13].

Tanım 3.1.13. Bir operatör sürekli, içine ve birebir olursa bu dönüşüme homeomorfizm denir. Bu durumda (X, v) komşuluk uzayı (Y, μ) komşuluk uzayına homeomorfiktir denir.

Önerme 3.1.14. $f: (X, v) \longrightarrow (Y, \mu)$ fonksiyonun sürekli olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{H} \in pS(X)$ ve $\mathcal{H} \overset{v}{\rightarrow} x$ olduğunda, $f(\mathcal{H}) \overset{\mu}{\rightarrow} f(x)$ olmasıdır [2].

İspat. $(\Longrightarrow)$ f fonksiyonu sürekli bir fonksiyon olduğundan $\mu(f(x)) \subseteq f(v(x))$ olur. Burada $\mathcal{H} \overset{v}{\rightarrow} x$ olarak alınsın. Bu durumda $v(x) \subseteq \mathcal{H}$' dir. Dolayısıyla $f(v(x)) \subseteq f(\mathcal{H})$ bulunur. Buradan $\mu(f(x)) \subseteq f(v(x)) \subseteq f(\mathcal{H})$ olduğundan $\mu(f(x)) \subseteq f(\mathcal{H})$ elde edilir. Dolayısıyla $f(\mathcal{H}) \overset{\mu}{\rightarrow} f(x)$ olur.

$(\Longleftarrow)$ $f(\mathcal{H}) \overset{\mu}{\rightarrow} f(x)$ olsun. Dolayısıyla $\mu\big(f(x)\big) \subseteq f(\mathcal{H})$ olur. $A \in \mu(f(x))$ ise $A \in f(\mathcal{H})$ elde edilir. Eğer $A \notin f(v(x))$ ise $A \notin f(\mathcal{H})$' dir. Bu durum $A \in f(\mathcal{H})$ olmasıyla bir çelişki oluşturur. Dolayısıyla $A \in f(v(x))$ olup $\mu(f(x)) \subseteq f(\mathcal{H})$' dir.

3.2 Bir Kümenin Kapanışı ve İçi

Bu kısımda, topolojik kavram olarak verilmiş olan iç nokta ve kapanış kavramlarının komşuluk uzaylarına yansıması incelenmiştir.

Tanım 3.2.1. (X, v) bir komşuluk uzayı, $A \subseteq X$ ve $x \in A$ noktası için $A \in v(x)$ olursa x elemanına A kümesinin iç noktası denir.

$$I_v(A) = \{x \in A\,, A \in v(x)\} \tag{3.3}$$

kümesi de A kümesinin iç noktalarının kümesi olur [2]. Bu tanım topolojik uzaylardaki iç nokta tanımına oldukça benzemektedir.

Teorem 3.2.2. (X, v) komşuluk uzayı olsun. Bu durumda

$$I_v(A) = \left\{x \in A: A \in \mathcal{H}\,, \text{Her p} - \text{yığını için } \mathcal{H} \overset{v}{\rightarrow} x\right\} \tag{3.4}$$

olur [2].

İspat. $x \in I_v(A)$ olsun. Bu durumda $x \in A \in v(x)$ olur. Burada $\mathcal{H} = \langle A \rangle \cup v(x)$ olarak seçilirse $v(x) \subseteq \mathcal{H}$ elde edilir. Dolayısıyla $A \in \mathcal{H}$' dir. $v(x) \subseteq \mathcal{H}$ olduğundan

$x \in \{x \in A: A \in \mathcal{H}, v(x) \subseteq \mathcal{H}\} = \left\{x \in A: A \in \mathcal{H}, \mathcal{H} \overset{v}{\rightarrow} x\right\}$ olur. Dolayısıyla

$$I_v(A) \subseteq \left\{x \in A: A \in \mathcal{H}, \mathcal{H} \overset{v}{\rightarrow} x\right\} \tag{3.5}$$

bulunur. Diğer taraftan $x \in \left\{x \in A: A \in \mathcal{H}, \mathcal{H} \overset{v}{\rightarrow} x\right\}$ olsun. Buradan $\{x \in A: A \in \mathcal{H}, v(x) \subseteq \mathcal{H}\}$ olur. $\mathcal{H} = \langle A \rangle \cup v(x)$ olarak alınsın. Eğer $x \notin I_v(A)$ ise $x \in A \notin v(x)$ olur. $A \in \langle A \rangle$ olduğundan $v(x) \cap \langle A \rangle = \emptyset$ olur. Bu durum $\mathcal{H}$' nin p-yığını olmasıyla çelişki oluşturur. Dolayısıyla $x \in I_v(A)$' dır. Buradan

$$\left\{x \in A: A \in \mathcal{H}, \mathcal{H} \overset{v}{\rightarrow} x\right\} \subseteq I_v(A) \tag{3.6}$$

elde edilir. (3.5) ve (3.6)' den dolayı $\left\{x \in A: A \in \mathcal{H}, \mathcal{H} \overset{v}{\rightarrow} x\right\} = I_v(A)$ olur.

Tanım 3.2.3. (X, v) komşuluk uzayı, $A \subseteq X$ kümesi verilsin. x noktasının her komşuluğunda A kümesinin an az bir elemanı varsa x noktasına A kümesinin kapanış (değme) noktası denir. $Cl_v(A) = \{x \in X: A \cap V \neq \emptyset, \forall V \in v(x)\}$ kümesi de A kümesinin kapanış noktalarının kümesi olur [2]. Bu tanım topolojik uzaylarda verdiğimiz tanıma oldukça benzemektedir.

Örnek 3.2.4. $X = \{a, b, c, d\}$ kümesi verilsin.

$$v(a) = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d\}, X\}$$

$$v(b) = \{\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d\}, X\}$$

$$v(c) = \{X\}$$

$$v(d) = \{\{d\}, \{a, d\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d\}, X\}$$

komşuluk yapılarının oluşturduğu komşuluk uzayı için; $A = \{b, c, d\}$, $B = \emptyset$, $C = \{c\}$ ve $D = \{d\}$ kümeleri verilsin. Buna göre;

(1) $I_vA = \{b, c\}$, $I_vB = \emptyset$, $I_vC = \emptyset$ ve $I_vd = \{d\}$ olur.

(2) $Cl_vA = X$, $Cl_vB = \emptyset$, $Cl_vC = \{c\}$ ve $Cl_vD = \{c, d\}$ olur.

Örnek 3.2.5. $\mathbb{R}$ kümesinde alışılmış topolojik uzayı ele alınsın. Buradan $\forall x \in \mathbb{R}$ için $v(x) = \{(x-a, x+b): \forall\, a, b \in \mathbb{R}^+\}$ komşuluk yapıları oluşturulur ve $(\mathbb{R}, v)$ komşuluk uzayı tanımlanmış olur. Bu komşuluk uzayı ve $A = \{1,2,3,4,5\}$ kümesi için $I(A) = \emptyset$ ve $Cl(A) = \emptyset$ olur. Ayrıca $B = [1,5]$ kümesi için $I(B) = (1,5)$ ve $Cl(B) = [1,5]$ olur.

Teorem 3.2.6. (X, v) bir komşuluk uzayı ve $A \subseteq X$ olsun.

(a) $Cl_v(A) = X \setminus I_v(X \setminus A)$

(b) $Cl_v(A) = \left\{x \in X: \exists \mathcal{H} \in pS(X),\ \mathcal{H} \overset{v}{\rightarrow} x\ \ ve\ A \in \mathcal{H}\right\}$

(c) $I_v(A) \subseteq B \Longrightarrow A \subseteq Cl_v(B)$

olur [2].

İspat. (a) $x \in A$ olsun. Dolayısıyla $x \notin {}^{X}\!/_{A}$ olur. Buradan $x \notin I_v({}^{X}\!/_{A})$ olarak bulunur. $x \in A$ olduğu için $x \in Cl_v(A)$' dır. Bu durumda $I_v({}^{X}\!/_{A}) \cap Cl_v(A) = \emptyset$ olur. Basit küme işlemlerini kullanılarak $Cl_v(A) = {}^{X}\!/_{I_v({}^{X}\!/_{A})}$ olduğu görülür.

(b) $x \in Cl_v(A)$ olsun. Bu durumda $\forall V \in v(x)$ için $A \cap V \neq \emptyset$ olur. Eğer $x \notin \{y \in X: v(y) \subseteq \mathcal{H}, A \in \mathcal{H}\}$ ise bu durumda $v(x) \nsubseteq \mathcal{H}$ olur. Ayrıca $A \in \mathcal{H}$ olduğundan $\exists V \in v(x)$ için $A \cap V = \emptyset$ elde edilir. Bu durum $A \cap V \neq \emptyset$ olmasıyla bir çelişki oluşturur. Dolayısıyla $x \in \{y \in X: v(y) \subseteq \mathcal{H}, A \in \mathcal{H}\}$ olup

$$Cl_v(A) \subseteq \left\{x \in X: \mathcal{H} \overset{v}{\rightarrow} x, A \in \mathcal{H}\right\} \tag{3.7}$$

bulunur.

Tersine $x \in \{x \in X: v(x) \subseteq \mathcal{H}, A \in \mathcal{H}\}$ ise $\mathcal{H}$ bir p-yığını olduğu için $\forall V \in v(x)$ için $A \cap V \neq \emptyset$ olur. Dolayısıyla $x \in Cl_v(A)$' dır. Buradan

$$\left\{x \in X: \mathcal{H} \overset{v}{\rightarrow} x, A \in \mathcal{H}\right\} \subseteq Cl_v(A) \tag{3.8}$$

elde edilir. (3.7) ve (3.8)' dan dolayı $\left\{x \in X: \mathcal{H} \overset{v}{\rightarrow} x, A \in \mathcal{H}\right\} = Cl_v(A)$ olur.

(c) $A \subseteq I_v(A) \subseteq B \subseteq Cl_v(B) \Longrightarrow A \subseteq Cl_v(B)$ olur.

Önerme 3.2.7. (X, v) bir komşuluk uzayı ve $A \subseteq X$ olsun. Bu durumda;

(a) $I_v(A)$, (I_1), (I_2), (I_5) aksiyomlarını sağlar [2].

(b) $\forall\, v(x)$ komşuluk yapısı süzgeç ise $I_v(A)$, (I_3) aksiyomunu sağlar.

(c) $I_v(A) = A$ ise $I_v(A)$, (I_3) aksiyomunu sağlar.

İspat. (a) $A = X$ olsun. $I_v(A) = A = X$ olup $I_v(A) = X$ olur. Bu durumda $I_v(A)$, I_1 aksiyomunu sağlar.

$I_v(A) \subseteq A, x \in I_v(A)$ olsun. Bu durumda $x \in A$ olup $I_v(A) \subseteq A$ olur. Dolayısıyla $I_v(A)$, I_2 aksiyomunu sağlar.

$A \subseteq B$ olsun. $I_v(A) = \{x \in A{:}\, A \in v(x)\}$ kümesi için $x \in I_v(A) \Longrightarrow x \in I_v(A) \Rightarrow x \in A \Longrightarrow A \in v(x)$ olur. $v(x)$ komşuluk yapısı aynı zamanda yığın olduğu için A' nın üst kümelerini içerir. $A \subseteq B$ olduğundan $x \in B \in v(x)$ olup $x \in I_v(B)$ olur. Dolayısıyla $I_v(A) \subseteq I_v(B)$ bulunur. Bu durumda $I_v(A)$, I_5 aksiyomunu sağlar.

(b) $x \in I_v(A \cap B)$ olsun. Buradan $A \cap B \subseteq v(x)$ olur. $A \cap B \subseteq A$ ve $A \cap B \subseteq B$ olup $v(x)$ yığın olduğundan $A \in v(x)$ ve $B \in v(x)$ elde edilir. Dolayısıyla $x \in I_v(A)$ ve

$x \in I_v(B)$ olur. Buradan $x \in I_v(A) \cap I_v(B)$ olduğu görülür. Dolayısıyla

$$I_v(A \cap B) \subseteq I_v(A) \cap I_v(B) \tag{3.9}$$

bulunur.

Tersine $x \in I_v(A) \cap I_v(B)$ olsun. Dolayısıyla $x \in I_v(A)$ ve $x \in I_v(B)$ olur. Buradan $A \in v(x)$ ve $B \in v(x)$ elde edilir. $v(x)$ bir süzgeç olduğundan $A \cap B \subseteq v(x)$ olur. Dolayısıyla $x \in I_v(A \cap B)$ olup

$$I_v(A) \cap I_v(B) \subseteq I_v(A \cap B) \tag{3.10}$$

bulunur. (3.9) ve (3.10)' den dolayı $I_v(A \cap B) = I_v(A) \cap I_v(B)$ elde edilir.

(c) $x \in I_v(I_v(A))$ olsun. Buradan $I_v(A) \in v(x)$ olur. $v(x)$ yığın ve $I_v(A) \subseteq A$

olduğundan $A \in v(x)$ olup $x \in I_v(A)$ olur. Dolayısıyla

$$I_v(I_v(A)) \subseteq I_v(A) \tag{3.11}$$

bulunur.

Tersine $x \in I_v(A)$ olsun. Bu durumda $A \in v(x)$' dir. $I_v(A) = A$ olduğundan $I_v(A) \in v(x)$ ve $x \in I_v(I_v(A))$ olur. Buradan

$$I_v(A) \subseteq I_v(I_v(A)) \tag{3.12}$$

elde edilir. (3.11) ve (3.12)' dan dolayı $I_v\big(I_v(A)\big) = I_v(A)$ olur.

Teorem 3.2.8. (X, v) bir komşuluk uzayı ve $A \subseteq X$ olsun. Bu durumda;

(a) Cl_v, (K_1), (K_2), (K_3) aksiyomlarını sağlar.

(b) $Cl_v(A)$ kümesi $Cl_v(Cl_v(A))$ kümesinin alt kümesidir. Eğer $Cl_v(A) = A$ ise Cl_v, (K_4) kapanış aksiyomunu sağlar.

(c) $Cl_v(A) \subseteq B \Longrightarrow A \subseteq Cl_v(B)$ olur.

İspat. (a) $Cl_v(\emptyset) = \emptyset$ olur. Çünkü boş küme ile bütün kümelerin kesişimi boş küme olur. Dolayısıyla Cl_v, K_1 aksiyomunu sağlar.

$x \in A$ olsun. $\forall\, V \in v(x)$ için $A \cap V \neq \emptyset$ olduğundan $A \subseteq Cl_v(A)$ olur. Bu durumda Cl_v, K_2 aksiyomunu sağlar.

$x \in Cl_v(A \cup B)$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned}
(A \cup B) \cap V \neq \emptyset &\Longrightarrow (A \cap V) \cup (B \cap V) \neq \emptyset \Longrightarrow (A \cap V) \neq \emptyset \vee (B \cap V) \neq \emptyset \\
&\Longrightarrow x \in Cl_v(A) \vee x \in Cl_v(B) \Longrightarrow x \in Cl_v(A) \cup Cl_v(B) \\
&\Longrightarrow Cl_v(A \cup B) \subseteq Cl_v(A) \cup Cl_v(B)
\end{aligned} \tag{3.13}$$

elde edilir. Diğer taraftan; $x \in Cl_v(A) \cup Cl_v(B)$ olsun. Buradan $x \in Cl_v(A) \vee x \in Cl_v(B)$ olur. $\forall\, V \in v(x)$ için

$$\begin{aligned}
(A \cap V) \neq \emptyset \vee (B \cap V) \neq \emptyset &\Longrightarrow (A \cap V) \cup (B \cap V) \neq \emptyset \Longrightarrow (A \cup B) \cap V \neq \emptyset \\
&\Longrightarrow x \in Cl_v(A \cup B) \\
&\Longrightarrow Cl_v(A) \cup Cl_v(B) \subseteq Cl_v(A \cup B)
\end{aligned} \tag{3.14}$$

elde edilir. (3.13) ve (3.14)' den dolayı $Cl_v(A \cup B)$= $Cl_v(A) \cup Cl_v(B)$ olur.

(b) $x \in Cl_v(A)$ olsun. $\forall V \in v(x)$ için $A \cap V \neq \emptyset$ olur. $A \subseteq Cl_v(A)$ olduğundan $\forall V \in v(x)$ için $Cl_v(A) \cap V \neq \emptyset$ olup $x \in Cl_v(Cl_v(A))$ olur. Buradan $Cl_v(A) \subseteq Cl_v(Cl_v(A))$ elde edilir. Eğer $Cl_v(A) = A$ ise, $Cl_v(A) = Cl_v(Cl_v(A))$ olur.

(c) $Cl_v(A) \subseteq B$ olsun. Buradan $A \subseteq Cl_v(A) \subseteq B \subseteq Cl_v(B)$ olur. İlk ve son terimden dolayı $A \subseteq Cl_v(B)$ olur.

Önerme 3.2.9. $f: (X, v) \longrightarrow (Y, \mu)$ iki komşuluk uzayı arasında tanımlanan bir

fonksiyon olsun. (1)⇔(2)⇔(3) ve (4)⇔(5)⇔(6) olur.

(1) f sürekli bir dönüşümdür.

(2) $\forall A \subseteq Y, f^{-1}\left(I_\mu(A)\right) \subseteq I_v\left(f^{-1}(A)\right)$' dir.

(3) $\forall B \subseteq X, f(Cl_v(B)) \subseteq Cl_\mu f(B)$' dir.

(4) f iç dönüşümdür.

(5) $\forall A \subseteq Y, I_v\left(f^{-1}(A)\right) \subseteq f^{-1}\left(I_\mu(A)\right)$' dir.

(6) $\forall B \subseteq Y, f^{-1}(Cl_v(B)) \subseteq Cl_\mu f^{-1}(B)$' dir [2].

İspat. $(1 \Leftrightarrow 2)$ $(\Longrightarrow)$ f sürekli bir dönüşüm ve $x \in X$ olsun. Dolayısıyla $\mu\left(f(x)\right) \subseteq f\left(\mu(x)\right)$ olur. Buradan $x \in f^{-1}\left(I_\mu(A)\right)$ elde edilir. Diğer taraftan $f(x) \in I_\mu(A)$ olsun.

Bu durumda;

$$f(x) \in I_\mu(A) \Longrightarrow A \in \mu(f(x)) \Longrightarrow A \in f\left(v(x)\right) \Longrightarrow f^{-1}(A) \in v(x) \tag{3.15}$$

bulunur. Dolayısıyla $x \in I_v(f^{-1}(A))$ olup $f^{-1}\left(I_\mu(A)\right) \subseteq I_v(f^{-1}(A))$ olur.

$(\Longleftarrow)$ Tersine $f^{-1}\left(I_\mu(A)\right) \subseteq I_v(f^{-1}(A))$ olsun. Bu durumda $I_\mu(A) \subseteq f(I_v\left(f^{-1}(A)\right))$ elde edilir. Ayrıca $A \subseteq Y$ ve $y \in I_v(A)$ olsun. Burada $A \in \mu(y)$' dir. $y = f(x)$ olduğundan

$A \in \mu(f(x))$ (3.16)

olur ve $y \in f\left(I_v\big(f^{-1}(A)\big)\right)$ bulunur. Diğer taraftan $y \in f\left(I_v\big(f^{-1}(A)\big)\right)$ ifadesinin

f altındaki ters görüntüsü alınırsa $f^{-1}(y) \in I_v\big(f^{-1}(A)\big)$ elde edilir. Bu durumda

$f^{-1}(y) \in I_v\big(f^{-1}(A)\big) \Rightarrow x \in I_v\big(f^{-1}(A)\big) \Rightarrow f^{-1}(A) \in v(x) \Rightarrow A \in f\big(v(x)\big)$ (3.17)

bulunur. (3.16) ve (3.17)' den dolayı $\mu(f(x)) \subseteq f(v(x))$ olur. Bu durumda f fonksiyonu süreklidir.

(1⟺3) (⟹) f sürekli ve $f(x) = y$ olsun. Buradan $\mu\big(f(x)\big) \subseteq f\big(v(x)\big) =$

$f^{-1}\left(\mu\big(f(x)\big)\right) \subseteq v(x)$ olur. Aycıca $y \in f(Cl_v(B))$ olsun. Buradan;

$y \in f\big(Cl_v(B)\big) \Rightarrow f^{-1}(y) \in Cl_v(B) \Rightarrow x \in Cl_v(B) \Rightarrow \forall V \in v(x)$ (3.18)

elde edilir. Dolayısıyla $V \cap B \neq \emptyset$ olur. Buradan $\forall V_1 \in f^{-1}\left(\mu\big(f(x)\big)\right)$ için $V_1 \cap B \neq \emptyset$ olur. $V_1 \in f^{-1}\left(\mu\big(f(x)\big)\right)$ ve $V_1 \cap B \neq \emptyset$ ifadelerinin f altındaki görüntüsü alınırsa $\forall f(V_1) \in \mu\big(f(x)\big)$ için $f(V_1) \cap f(B) \neq \emptyset$ olur. $f(x) \in Cl_\mu\big(f(B)\big) \Rightarrow y \in Cl_\mu\big(f(B)\big)$ elde edilir. Dolayısıyla $f(Cl_v(B)) \subseteq Cl_\mu f(B)$ olur.

(⟹) Tersine $x \in Cl_v(B)$ olsun. Bu takdirde $\forall V \in v(x)$ için $B \cap V \neq \emptyset$ olur. Buradan $f(x) \in f\big(Cl_v(B)\big)$ ise $f(x) \in Cl_\mu\big(f(B)\big)$ olur. Dolayısıyla her $w \in \mu\big(f(x)\big)$ için $f(B) \cap w \neq \emptyset$' dır. Burada f^{-1} ters dönüşümü kullanılarak $f^{-1}(w) \cap B \neq \emptyset \Rightarrow f^{-1}(w) \in v(x)$ elde edilir. $\forall V \in v(x)$' nin B kümesiyle ile kesişimi boş kümeden faklı olur. Buradan hareketle tekrar f altındaki görüntüleri alınarak $w \in f\big(v(x)\big)$ bulunur. Dolayısıyla $\mu\big(f(x)\big) \subseteq f\big(v(x)\big)$ olur. Bu durumda f süreklidir. f sürekli ise $w \in$

$f(v(x))$ olur.

(4 ⟺ 5) (⟹) $x \in I_v(f^{-1}(A))$ olsun. Buradan;

$f^{-1}(A) \in v(x) \Rightarrow A \in f\big(v(x)\big) \Rightarrow A \in \mu\big(f(x)\big)$

$$\Longrightarrow f(x) \in I_\mu(A) \Longrightarrow x \in f^{-1}\left(I_\mu(A)\right) \tag{3.19}$$

elde edilir. Dolayısıyla $I_v(f^{-1}(A)) \subseteq f^{-1}(I_\mu(A))$ olur.

($\Longleftarrow$) $A \in f\big(v(x)\big)$ ve $y \in A$ olsun. $f^{-1}(y) \in f^{-1}(A) \Longrightarrow f^{-1}(A) \in v(x)$ olur. Dolayısıyla $x \in I_v(f^{-1}(A))$' dir. Buradan $x \in f^{-1}(I_v(A))$ olur. Çünkü $I_v(f^{-1}(A)) \subseteq f^{-1}(I_v(A))$' dir. $x \in f^{-1}(I_v(A))$ ifadesinin f dönüşümü altındaki görüntüsü alınırsa $f(x) \in I_\mu(A)$ bulunur. Dolayısıyla $A \in \mu\big(f(x)\big)$ olur. Buradan $f(v(x)) \subseteq \mu(f(x))$ elde edilir.

($5 \Leftrightarrow 6$) ($\Longrightarrow$) f bir iç operatör ve $x \in f^{-1}\left(Cl_\mu(B)\right)$ olsun. Bu durumda $f(x) \in Cl_\mu(B) \Longrightarrow \forall V \in \mu(f(x))$ için $V \cap B \neq \emptyset$ olur. Buradan $\forall W \in f\big(v(x)\big)$ için $W \cap B \neq \emptyset$ bulunur. $\forall W \in f\big(v(x)\big)$ ifadesinin f altındaki ters dönüşümünü alınarak $\forall f^{-1}(W) \in v(x)$ için $f^{-1}(W) \cap f^{-1}(B) \neq \emptyset$ elde edilir. Bu durumda $x \in Cl_v(f^{-1}(B))$ olur. Dolayısıyla $f^{-1}(Cl_\mu(B)) \subseteq Cl_v(f^{-1}(B))$ bulunur.

($\Longleftarrow$) Tersine $x \in f^{-1}\left(Cl_\mu(B)\right)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}\left(Cl_\mu(B)\right) &\Longrightarrow f(x) \in Cl_\mu(B) \Longrightarrow \forall W \in \mu\big(f(x)\big) \text{ için } W \cap B \neq \emptyset \\ &\Longrightarrow \forall f^{-1}(W) \in f^{-1}(\mu\big(f(x)\big)) \\ &\Longrightarrow f^{-1}(W) \cap f^{-1}(B) \neq \emptyset \end{aligned} \tag{3.20}$$

elde edilir. Diğer taraftan $x \in f^{-1}\left(Cl_\mu(B)\right)$ ise $f^{-1}(Cl_v(B)) \subseteq Cl_\mu f^{-1}(B)$ olduğundan

dolayı $x \in Cl_v(f^{-1}(B)) \Rightarrow \forall V \in v(x)$ bulunur. Buradan $V \cap f^{-1}(B) \neq \emptyset$ olur. Bu durumda $v(x) \subseteq f^{-1}(\mu\big(f(x)\big)) \Rightarrow f(v(x)) \subseteq \mu\big(f(x)\big)$ olduğu için f bir iç operatördür.

Teorem 3.2.10. (X, v) ve (X, μ), X üzerinde birer komşuluk uzayı ve $v \leq \mu$ olsun. Bu durumda $\forall\, V \subseteq X$ için;

(1) $I_v(V) \subseteq I_\mu(V)$

(2) $Cl_\mu(V) \subseteq Cl_v(V)$

olur.

İspat. (1) $x \in I_v(V)$ olsun. Bu durumda $V \in v(x)$ olur. $v(x) \leq \mu(x)$ olduğundan $V \in \mu(x)$ ve $x \in I_\mu(V)$ bulunur. Dolayısıyla $I_v(V) \subseteq I_\mu(V)$ elde edilir.

(2) $x \in Cl_\mu(V)$ olsun. $\forall A \in \mu(x)$ için $A \cap V \neq \emptyset$ olur. Buradan $v(x) \leq \mu(x)$ olduğundan $\forall A \in v(x)$ için $A \cap V \neq \emptyset$ bulunur. Dolayısıyla $x \in Cl_v(V)$ elde edilir. Bu durumda $Cl_\mu(V) \subseteq Cl_v(V)$ olur.

3.3. Supratopolojik ve Pretopolojik Uzay ile Supra-açık ve Pre-açık Kümeler Arasındaki İlişki

1960' larda Mashour [5] ve Levin [6] supratopolojik uzayları, 1948'de Choquet [3] pretopolojik uzayları dönüşümler yardımıyla tanımlamıştır. Bu kısımda, [2-6]' da verilen tanım ve teoremler karşılaştırılarak sunulmuştur.

Tanım 3.3.1. (X, v) bir komşuluk uzayı ve $\mathcal{H} \in pS(\mathrm{X})$ olsun.

i) $Cl_v(\mathcal{H}) = \langle\{Cl_v H: \quad H \in \mathcal{H}\}\rangle$ (3.21)

ii) $\mathcal{V}_{\mathrm{v}}(\mathcal{H}) = \langle\{A \subseteq X: I_v A \in \mathcal{H}\}\rangle$ (3.22)

sırasıyla özel p-yığın komşulukları elde edilir [2].

Önerme 3.3.2. (X, v) bir komşuluk uzayı, $\mathcal{H} \in pS(\mathrm{X})$ ve $A \in \mathcal{H}$ olsun. Burada $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\} = A$ verilsin. Bu durumda $B = \{v(x_1) \cap v(x_2) \cap v(x_3) \cap \dots \cap v(x_n)\}$ kümesi $\mathcal{V}_v(\mathcal{H})$' nin elemanı olur. Burada $\{x_1\} = A$ ise $B = v(x_1)$ olur.

İspat. $H \in \mathcal{V}_v(\mathcal{H})$ olsun. Bu durumda $I_v(H) \in \mathcal{H}$ olur. Burada özel olarak $A = I_v(H)$ alınırsa $H \in v(x_1), H \in v(x_2), H \in v(x_3), \dots$ $H \in v(x_n)$ elde edilir ve buradan $H \subseteq B$ olur. $\mathcal{V}_v(\mathcal{H})$ bir p-yığın olduğu için $B \in \mathcal{V}_v(\mathcal{H})$ olur. Eğer $\{x_1\} = A$ olursa, $\forall V \in v(x_1)$ için $x_1 \in V$ olduğundan $\forall V$ için $I_v(V) = V$ olur. Dolayısıyla $B = v(x_1)$ ve $\forall V \in \mathcal{V}_{\mathrm{v}}(\mathcal{H})$ olur.

Sonuç 3.3.3. $\mathcal{V}_v(\dot{x}) = v(x)$ olur. Önerme 3.3.2. ispat kısmından elde edilir.

Tanım 3.3.4. (X,τ) bir topolojik uzay ve $S \subseteq X$ olsun. Eğer $S \subseteq (\bar{S})^o$ oluyorsa S kümesine pre-açık küme denir. Bütün pre-açık kümelerin ailesi $PO(X)$ ile gösterilir [6].

Tanım 3.3.5. $X \neq \emptyset$ ve $P(X), X$' in kuvvet kümesi olsun. $\alpha: P(X) \longrightarrow P(X)$ dönüşümü

$i)$ $\alpha(\emptyset) = \emptyset$

$ii)$ $\forall\, A \in P(X),\ A \subseteq \alpha(A)$

özelliklerini sağlıyorsa (X,α) bir pretopolojik uzay ve $\alpha(A) = \{\emptyset, A \subseteq X\colon\ A \subseteq \alpha(A)\}$ kümesi de pretopoloji olur [17]. (X,v) bir komşuluk uzayı olsun. Eğer $\forall\, x \in X$ için $v(x)$ bir süzgeç olursa (X,v) bir pretopolojik komşuluk uzay olur ve v komşuluk yapısı bir pretopolojik komşuluk yapısı olur [2].

Örnek 3.3.6. (X,τ), $X = \{a,b,c,d\}$ üzerinde bir topolojik uzay olsun. Bu topolojik uzay $\tau = \big\{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\big\}$ şeklinde verilsin. Ayrıca $(\bar{A})^{\circ}: P(X) \longrightarrow P(X)$ dönüşümü tanımlansın. Bu dönüşüm özel olarak Tanım 3.3.5' in (i) ve (ii) özelliklerini sağlayan bir dönüşüm olur. Buradan hareketle;

$$PO(X) = \big\{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{a,d\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}\big\} \tag{3.23}$$

ailesi elde edilir. Dolayısıyla $(X,(\bar{A})^{\circ})$ uzayı bir pretopolojik uzay, $PO(X)$ bir pretopoloji ve $PO(X)$' in elemanları da pre-açık küme olur. Eğer aynı topoloji için (X,v) komşuluk uzayı

$v(a) = \big\{\{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,c,d\}, X\big\}$

$v(b) = \big\{\{b\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{b,c,d\}, X\big\}$

$v(c) = X$

$v(d) = X$

şeklinde belirlenirse $\forall\, x \in X$ için $v(x)$' ler süzgeç olur. Dolayısıyla (X,v) bir pretopolojik komşuluk uzay olur. Ayrıca komşuluk uzayları içinde $PO(A) = \{A \subseteq X\colon A \subseteq I_v(Cl_v(A)\ \}$ ailesi tanımlansın. Bu durumda

$$PO(X) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}\} \tag{3.24}$$

ailesi elde edilir. $PO(X)$ ailesi bir pretopolojidir ve bu pretopolojik uzay kullanılarak;

$v_\pi(a) = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, X\}$

$v_\pi(b) = \{\{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d\}, X\}$

$v_\pi(c) = \{\{a, b, c\}, X\}$

$v_\pi(d) = \{\{a, d\}, \{a, c, d\}, \{a, b, d\}, X\}$

şeklindeki komşuluk yapıları oluşturulur. (X, v_π) komşuluk yapısı da bir pretopolojik komşuluk uzayı olur. Bu şekilde oluşturduğumuz komşuluk uzay özel olarak (X, v_π) şeklinde ifade edilecektir.

Tanım 3.3.7. (X, τ) bir topolojik uzay ve $S \subseteq X$ olsun. Eğer $S \subseteq \overline{S^0}$ oluyorsa S kümesine yarı-açık küme denir. Bütün yarı-açık kümelerin ailesi $SO(X)$ ile gösterilir [6].

Tanım 3.3.8. τ^***,** X'in bir alt ailesi olsun. τ^* ailesi,

$i)$ $X \in \tau^*$

$ii)$ τ^* keyfi birleşimleri yine τ^*'ın elemanıdır.

şartlarını sağlarsa bir supratopoloji olur. (X, τ^*) uzayına da supratopolojik uzay denir. τ^*' nun elemanlarına da supra-açık kümeler denir [5].

Tanım 3.3.9. (X, τ^*) bir supratopolojik uzay olsun.

$i)$ τ^*' ın elemanlarına supra-açık, tümleyenine de supra-kapalı küme denir.

$ii)$ $S \subseteq X$ kümesi verilsin. S' ni alt kümesi olan supra-açık kümelerin birleşimine S'nin supra-içi denir ve $Sint(S)$ ile görterilir.

$iii)$ $S \subseteq X$ kümesi verilsin S' yi içeren supra-kapalı kümelerin kesişimine S' nin supra-kapanışı denir ve $Scl(S)$ ile gösterilir [5].

Yukarıda verilen tanımlar (X, α) pretopolojik uzay için de yapılabilir [17].

Tanım 3.3.10. (X, v) bir komşuluk uzayı olsun. Eğer $\forall\, x \in X,\ \mathcal{V}_v(v(x)) = v(x)$ oluyorsa (X, v) komşuluk uzayına supratopolojik komşuluk uzayı denir. Bu komşuluk yapısı da bir supratopolojik komşuluk yapısı olur [2].

Örnek 3.3.11. $X = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerinde (X, τ) bir komşuluk uzayı $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ şeklinde verilsin. Bu topolojiye göre yarı açıkların ailesi

$$\tau^* = SO(X) = \begin{Bmatrix} X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \\ \{b, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\} \end{Bmatrix} \tag{3.25}$$

şeklinde oluşturulur. Bu aile aynı zamanda bir supratopoloji olur. Özel olarak bu supratopolojik uzay $v_{\tau^*}(x) = \langle \{U \in \tau^* : x \in U\} \rangle$ şeklinde oluşturulursa

$v_{\tau^*}(a) = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, X\}$

$v_{\tau^*}(b) = \{\{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d\}, X\}$

$v_{\tau^*}(c) = \{\{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, X\}$

$v_{\tau^*}(d) = \{\{a, d\}, \{b, d\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, X\}$

(X, v_{τ^*}) komşuluk uzayı elde edilir. Bu komşuluk uzayı aynı zamanda bir supratopolojik komşuluk uzay olur. Bu şekilde oluşturduğumuz komşuluk uzayı özel olarak (X, v_σ) şeklinde ifade edilecektir.

Tanım 3.3.12. (X, v) komşuluk uzayı olsun. Eğer her $x \in X$ için $Cl_v(v(x)) = v(x)$ oluyorsa (X, v) komşuluk uzayına bir regüler komşuluk uzayı denir [2].

Lemma 3.3.13. (X, v) bir komşuluk uzayı olsun.

$i)$ $\forall\, V \in v(x)$ için $V \in I_v(x)$ oluyorsa (X, v) bir supratopolojik komşuluk uzay olur.

$ii)$ $\forall\, V \in v(x)$ ve $\exists W \in v(x)$ için $Cl_v(V) \subseteq W$ oluyorsa (X, v) bir regüler komşuluk uzay olur.

$iii)$ $\forall\, V, W \in v(x)$ için $V \cap W \in v(x)$ oluyorsa (X, v) bir pretopolojik komşuluk uzay olur.

Tanım 3.3.14. (X, v) bir komşuluk uzayı olsun.

i) Komşuluk yapıları $\sigma v(x) = \langle\{x \in A \subseteq X : I_v(A) = A\}\rangle$ şeklinde tanımlanan σv komşuluk uzayına (X, v) komşuluk uzayının supratopolojik modifikasyonu denir.

ii) Komşuluk yapıları $\pi v(x) = [v(x)]$, $\forall x \in X$ şeklinde tanımlanan πv komşuluk uzayına (X, v) komşuluk uzayının pretopolojik modifikasyonu denir.

iii) Komşuluk yapıları $\rho v(x) = \langle\{x \in A \subseteq X : Cl_v(A) = A\}\rangle$ şeklinde tanımlanan ρv komşuluk uzayına (X, v) komşuluk uzayının regülerleştirmesi denir [2].

Örnek 3.3.15. $X = \{a, b, c, d\}$ üzerinde (X, v) bir komşuluk uzayı ve

$$v(a) = \big\{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, X\big\}$$

$$v(b) = \big\{\{b, c\}, \{b, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d\}, X\big\}$$

$$v(c) = \big\{\{a, c\}, \{a, b, c\}, \{a, c, d\}, X\big\}$$

$$v(d) = \big\{\{a, d\}, \{b, d\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, X\big\}$$

komşuluk yapıları tanımlasın. Bu durumda v komşuluk uzayının σv supratopolojik modifikasyonu

$$\sigma v(a) = \big\{\{a, c\}, \{a, b, c\}, \{a, c, d\}, X\big\}$$

$$\sigma v(b) = \big\{\{a, b, c\}, X\big\}$$

$$\sigma v(c) = \big\{\{a, c\}, \{a, b, c\}, \{a, c, d\}, X\big\}$$

$$\sigma v(d) = \big\{\{a, c, d\}, X\big\}$$

komşuluk yapılarından oluşur. v komşuluk uzayının πv pre-topolojik modifikasyonu

$$\sigma v(a) = \big\{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, X\big\}$$

$\sigma v(b) = \{\{b\},\{a,b\},\{b,c\},\{b,d\},\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{b,c,d\},X\}$

$\sigma v(c) = \{\{a,c\},\{a,b,c\},\{a,c,d\},X\}$

$\sigma v(d) = \{\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\},X\}$

komşuluk yapılarından oluşur. v komşuluk uzayının ρv regülerleştirmesi

$\sigma v(a) = \{X\}$

$\sigma v(b) = \{\{b\},\{a,b\},\{b,c\},\{b,d\},\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{b,c,d\},X\}$

$\sigma v(c) = \{\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\},X\}$

$\sigma v(d) = \{\{d\},\{a,d\},\{b,d\},\{c,d\},\{a,b,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\},X\}$

komşuluk yapılarından oluşur.

Önerme 3.3.16. (X,v) bir komşuluk uzayı olsun.

i) En ince σv supratolololojik modifikasyonu v komşuluk uzayından daha kabadır.

ii) En ince ρv regüler modifikasyonu v komşuluk uzayından daha kabadır.

iii) En kaba πv pre-tolololojik modifikasyonu v komşuluk uzayından daha incedir [2]. Bu önermenin doğruluğuna örnek olarak Örnek 3.3.15 verilebilir.

Teorem 3.3.17. $f:(X,v) \longrightarrow (Y,\mu)$ sürekli bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki fonksiyonlar da sürekli olur:

(a) $f:(X,\sigma v) \longrightarrow (Y,\sigma\mu)$

(b) $f:(X,\rho v) \longrightarrow (Y,\rho\mu)$

(c) $f:(X,\pi v) \longrightarrow (Y,\pi\mu)$

3.4. Komşuluk Uzayları ile Topolojik Uzay Arasındaki İlişki

Bu kısımda komşuluk uzaylar ve topolojik uzaylar karşılaştırılmıştır. Ayrıca komşuluk uzaylar yardımıyla nasıl topoloji elde edileceği incelenmiştir.

Tanım 3.4.1. (X, v) bir pretopolojik komşuluk uzayı ve supratopoloik komşuluk uzayı ise (X, v) komşuluk uzayına bir topolojik komşuluk uzayı denir [2].

Teorem 3.4.2. (X, v) komşuluk uzayı olsun.

$a)$ (X, v) komşuluk uzayının bir pretopolojik komşuluk uzayı olması için gerek ve yeter şart $\forall x \in X$ ve $\forall A \in v(x)$ için $I_v(A)$' nın I_3 aksiyomunu sağlamasıdır.

$b)$ (X, v) komşuluk uzayının bir supratopolojik komşuluk uzayı olması için gerek ve yeter şart $\forall x \in X$ ve $\forall A \in v(x)$ için $I_v(A)$' nın I_4 aksiyomunu sağlamasıdır.

$c)$ (X, v) komşuluk uzayının bir topolojik komşuluk uzayı olması için gerek ve yeter şart $\forall x \in X$ ve $\forall A \in v(x)$ için $I_v(A)$' nın I_3 ve I_4 aksiyomlarını sağlamasıdır.

İspat. $a)$($\Longrightarrow$) (X, v) pretopolojik komşuluk uzayı olduğundan $\forall x \in X$ için her $v(x)$ bir süzgeç olur. Dolayısıyla $I_v(A \cap B) = I_v(A) \cap I_v(B)$ olur.

($\Longleftarrow$) $A, B \in X$ ve $v(x)$ komşuluk yapısı verilsin. $v(x)$ yığın olduğu için $\emptyset \notin v(x)$ ve A' nın bütün üst kümeleri $v(x)$' in elemanlarıdır. Ayrıca $A \in v(x)$ ve $B \in v(x)$ olsun. Bu durumda $x \in A$ ve $x \in B$ olur. Buradan;

$$x \in I_v(A) \wedge x \in I_v(B) \Longrightarrow x \in I_v(A) \cap I_v(B) \Longrightarrow x \in I_v(A \cap B) \tag{3.26}$$

bulunur. $x \in I_v(A \cap B)$ olduğu için,

$$x \in I_v(A \cap B) = \{x \in A \cap B, A \cap B \in v(x)\} \Longrightarrow A \cap B \in v(x) \tag{3.27}$$

elde edilir. $\forall A, B \in v(x)$, $A \cap B \in v(x)$ olduğundan $v(x)$ süzgeçtir.

$b)$ ($\Longrightarrow$) (X, v) bir supratopolojik komşuluk uzayı olsun. Buna göre $\forall\, x \in X, \mathcal{V}_v(v(x)) = v(x)$ olur. Başka bir ifadeyle $\mathcal{V}_v(v(x)) = \langle\{A \subseteq X : I_v(A) \subseteq v(x)\}\rangle = v(x)$ elde edilir. Burada $x \in I_v(I_v(A))$ olsun. Dolayısıyla $I_v(A) \in v(x)$ olduğu için $x \in I_v(A)$' dır. Buradan;

$$I_v(I_v(A)) \subseteq I_v(A) \tag{3.28}$$

bulunur. Diğer taraftan $x \in I_v(A)$ olsun. Dolayısıyla $A \in v(x)$ ve $A \in \mathcal{V}_v\big(v(x)\big)$ olur.

Burada $I_v(A) \in v(x)$ olduğu için $x \in I_v(I_v(A))$ olur. Dolayısıyla

$$I_v(A) \subseteq I_v(I_v(A)) \tag{3.29}$$

elde edilir. (3.28) ve (3.29)' dan dolayı $I_v(A) = I_v(I_v(A))$ olur.

$(\Longleftarrow)$ $I_v(A) = I_v(I_v(A))$ olsun. Bu durumda $I_v(A) = A$ olur. Dolayısıyla $\forall\, x \in A$ için $\forall\, A \in v(x)$ ve $I_v(A) \in v(x)$ bulunur. Buradan $\mathcal{V}_v(v(x)) = v(x)$ elde edilir.

$c)$ (X, v) komşuluk uzayı bir topolojik komşuluk uzayı ise aynı zamanda pretopolojik komşuluk uzay ve supratopolojik komşuluk uzay olur. Teorem 3.4.2. (a) ve (b) ifadelerine göre: (X, v) komşuluk uzayı pretopolojidir ancak ve ancak I_3 aksiyomunu sağlar ve ayrıca (X, v) komşuluk uzayı supratopolojidir ancak ve ancak I_4 aksiyomunu sağlar.

Sonuç 3.4.3. (X, v) komşuluk uzayının bir supratopolojik komşuluk uzay olması için gerek ve yerer şart $I_v(I_v(A)) = I_v(\mathrm{A})$ olmasıdır.

Örnek 3.4.4. $X = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerinde

$$\tau = \big\{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \{b, c, d\}\big\}$$

topolojisi verilsin. Bu topolojiye göre oluşturulan (X, v) komşuluk yapısı

$$v(a) = \big\{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, X\big\}$$

$$v(b) = \big\{\{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d\}, X\big\}$$

$$v(c) = \big\{\{b, c\}, \{a, b, c\}, \{b, c, d\}, X\big\}$$

$$v(d) = \big\{\{b, c, d\}, X\big\}$$

şeklinde olur. Bu komşuluk yapısı hem pretolojojik komşuluk yapısı hem de supratopolojik komşuluk yapısıdır. τ topolojik uzayı için supratopolojik ve pretopolojik uzay olma özelliklerini sağlayan

$$SO(X) = \tau^* = \big\{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d\}, \{a, c, d\}\big\}$$
(3.30)

ailesi hem supratopolojik uzay hem de pretopolojik uzay olur. Bu yapıya bağlı kalarak oluşturulan (X, v_{τ^*}) komşuluk uzayı da hem pretopolojik komşuluk uzay hem de supratopolojik komşuluk uzaydır. Dolayısıyla (X, v_{τ^*}) ikilisi de bir topolojik komşuluk uzay olur. Aslında (X, τ^*)' ın bir topoloji olduğunu açıklar aksiyomları yardımıyla belirlemek daha basittir.

Lemma 3.4.5. (X, v) komşuluk uzayı hem pretopolojik komşuluk uzay hem de supratopolojik komşuluk uzay olsun.

$$\tau = \{A \subseteq X : \forall B \subseteq X \text{ ve } \forall x_i \in B \text{ için } \bigcap\{\bigcap_{i\in I} v(x_i)\} = A\} \tag{3.31}$$

şeklinde verilen τ ailesi bir topoloji oluşturur.

Örnek 3.4.6. Örnek 3.4.4' te verilen (X, v_{τ^*}) komşuluk yapısının Lemma 3.4.5' e göre oluşturduğu topoloji $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{b, c, d\}\}$ şeklinde elde edilir.

Teorem 3.4.7. (X, v) bir komşuluk uzayı olsun.

i) (X, v) bir pre-topoloji ise v komşuluk uzayının σv suptatopolojik modifikasyonu bir topoloji olur.

ii) (X, v) bir supra-topoloji ise v komşuluk uzayının πv pretopolojik modifikasyonu bir topoloji olur [2].

Tanım 3.4.8. $X \neq \emptyset$ olsun. X üzerinde tanımlanan bütün pretopolojik, supratopolojik, topolojik ve regüler komşuluk uzaylarının kümesi sırasıyla PT(X), ST(X), T(X) ve RN(X) olarak gösterilir.

Tanım 3.4.9. (X, τ) bir topolojik uzay ve τ^* bir supratopoloji olsun. Eğer $\tau \subseteq \tau^*$ olursa τ^*' a, τ' nun topolojik birleşimi denir [5]. Benzer şekilde (X, v) bir topolojik komşuluk uzay ve (X, v_{τ^*}) bir supratopolojik komşuluk uzay olsun. Eğer $v \leq v_{\tau^*}$ olursa v_{τ^*}' a, v

komşuluk uzayının komşu topolojik birleşimi denir.

Örnek 3.4.10. PT(X) pretopolojik komşuluk uzaylarının her elemanı aynı zamanda bir supratopolojik komşuluk uzay olsun ve ST(X) supratopolojik komşuluk uzayları verilsin. Bu durumda PT(X) ve ST(X) komşuluk uzayları ayrı ayrı T(X) topolojik komşuluk uzayının komşu topolojik birleşimi olur.

Tanım 3.4.11. Eğer $x \in S \subseteq V$ olacak şekilde bir S supra-açık kümesi varsa $V \subseteq X$ kümesine X' in bir supra-komşuluğu denir [5].

Örnek 3.4.12. Örnek 3.3.6. ve Örnek 3.3.11. içinde belirtilen topolojik uzaylar için $\tau \subseteq \tau^*$ olup τ^*, τ ile topolojik birleşim olur. Ayrıca $\mathrm{T(X)} \subseteq \mathrm{PO(X)} \subseteq \mathrm{SO(X)}$ ve $v \leq v_\pi \leq v_\sigma$ olur.

3.5. Genelleştirilmiş ve Zayıf Komşuluk Uzayları

Bu kısımda Won Keun Min [8,9] ve arkadaşlarının tanımladığı genelleştirilmiş ve zayıf komşuluk uzayları kavramlarının tanımları ve bu tanımlarla ilgi teoremler verilmiştir.

Tanım 3.5.1. $X \neq \emptyset$ bir küme, $P(X)$, X' in kuvvet kümesi ve $\psi: X \longrightarrow P(P(X))$ olsun. ψ, $x \in V$ için $V \in \psi(x)$ olursa V kümesine $x \in X$'in genelleştirilmiş komşuluğu ve $\forall x \in X$, $\psi(x)$'e X üzerinde genelleştirilmiş komşuluk sistemi denir [8].

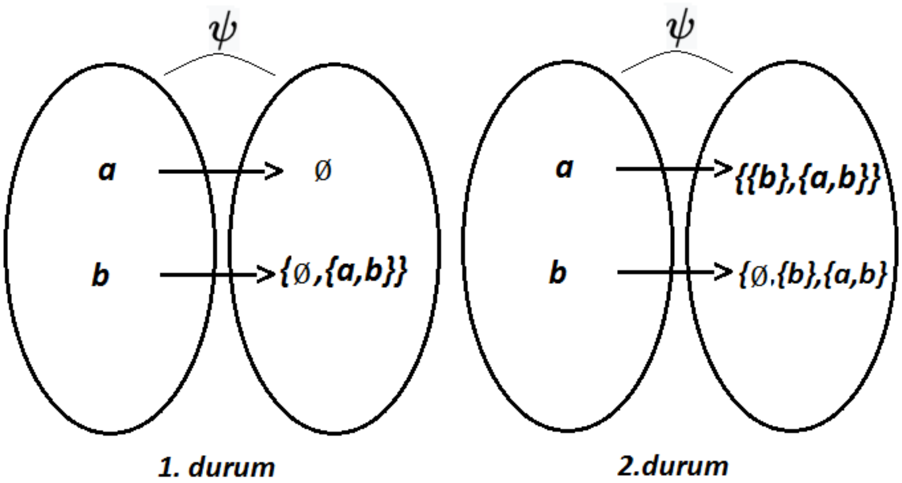
Tanım 3.5.2. $X \neq \emptyset$ bir küme ve g, X üzerinde bir aile olsun. Eğer $\emptyset \in g$ ve $\forall G_i \in g$ için $\bigcup_{i \in I} G_i \in g$ olursa g' ye genelleştirilmiş topoloji denir. (X, g) uzayına da genelleştirilmiş topolojik uzay denir [9].

Örnek 3.5.3. $X = \{a, b\}$ kümesinin $\{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \emptyset\}$ bütün alt kümeleri verilsin. Bu ailenin alt kümelerinin ailesi,

$$\left\{\begin{matrix} \emptyset, \{\emptyset\}, \{\{a\}\}, \{\{b\}\}, \{\{a,b\}\}, \{\emptyset, \{a\}\}, \{\emptyset, \{b\}\}, \{\emptyset, \{a,b\}\}, \{\{a\},\{b\}\}, \{\{a\},\{a,b\}\}, \{\{b\},\{a,b\}\}, \\ \{\emptyset, \{a\}, \{b\}\}, \{\emptyset, \{a\}, \{a,b\}\}, \{\emptyset, \{b\}, \{a,b\}\}, \left\{\{\{a\},\{b\},\{a,b\}\}\right\}, \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\} \end{matrix}\right\}$$

(3.32)

şeklinde olur. Bu kümeler ışığında aşağıdaki gibi iki farklı ψ fonksiyonu tanımlansın.



Şekil 3.2. ψ fonksiyonları

Buna göre 1. Durum için;

$V_1 = \{a\}$ ve $V_2 = \{a, b\}$ gibi iki küme verilsin. $a \in V_1$ için $\psi(a) = \emptyset$ ve $V_1 \notin \psi(a)$ olur. Dolayısıyla V_1 kümesi a'ın bir genelleştirilmiş komşuluğu değildir. $a \in V_2$ için $\psi(a) = \emptyset$ ve $V_2 \notin \psi(a)$ olur. Dolayısıyla V_2 kümesi a' ın bir genelleştirilmiş komşuluğu değildir. $b \in V_2$ için $\psi(b) = \{\emptyset, \{a, b\}\}$ ve $V_2 \in \psi(b)$ olur. Dolayısıyla V_2 kümesi b'nin bir genelleştirilmiş komşuluğu olur. Buradan $\psi(b) = \{\emptyset, \{a, b\}\}$ ailesi de b' nin bir genelleştirilmiş komşuluk sistemidir. Ayrıca $\{\emptyset, \{a, b\}\}$ ailesi genelleştirilmiş topolojik uzay olur.

2. durum için;

$V_1 = \{a\}$ ve $V_2 = \{a, b\}$ gibi iki küme verilsin. $a \in V_1$ için $\psi(a) = \{\{b\}, \{a, b\}\}$ ve $V_1 \notin \psi(a)$' dır. Dolayısıyla V_1 kümesi a'ın bir genelleştirilmiş komşuluğu değildir. $a \in V_2$ için $\psi(a) = \{\{b\}, \{a, b\}\}$ ve $V_2 \in \psi(a)$ elde edilir. Bundan dolayı V_2 kümesi a'ın bir genelleştirilmiş komşuluğudur. $\psi(a) = \{\{b\}, \{a, b\}\}$ ailesi de a' nın genelleştirilmiş komşuluk sistemi olur. Ayrıca $\{\{b\}, \{a, b\}\}$ ailesi genelleştirilmiş topolojik uzay olur. $b \in V_2$ için $\psi(b) = \{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}\}$ ve $V_2 \in \psi(b)$ olduğu için V_2 kümesi b' nin bir genelleştirilmiş komşuluğudur. Dolayısıyla $\psi(b) = \{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}\}$ ailesi de b' nin bir genelleştirilmiş komşuluk sistemi olur. Ayrıca $\{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}\}$ ailesi genelleştirilmiş topolojik uzaydır.

Tanım 3.5.4. $\psi: X \longrightarrow P(P(x))$ olsun. ψ aşağıdaki aksiyomları sağlarsa ψ' ye X üzerinde zayıf komşuluk sistemi denir. (X, ψ) uzayına da zayıf komşuluk uzayı denir [9].

i) $x \in X$ için $\psi(x) \neq \emptyset$

ii) $x \in X$ için$V \in \psi(x), x \in V$

iii) $V, U \in \psi(x)$ iken $U \cap V \in \psi(x)$.

Tanım 3.5.5. (X, ψ) zayıf komşuluk uzayı ve $A \subseteq X$ olsun.

$l_{\psi}(A) = \{x \in A: V \in \psi, V \subseteq A\}$

$\gamma_{\psi}(A) = \{x \in X: V \in \psi(x), V \cap A \neq \emptyset\}$

kümeleri sırasıyla A kümesinin ψ-içi ve ψ-kapanışı olur. Bu tanımlar komşuluk uzaylarındaki tanımlara oldukça benzemektedir [9].

Teorem 3.5.6. (X, ψ) zayıf komşuluk uzayı ve $A \subseteq X$ olsun. Bu durumda;

a) $l_{\psi}(A)$, $I_1, I_2, I_{3,} I_4$ ve I_5 iç dönüşüm aksiyomlarını sağlar.

b) $\gamma_{\psi}(A)$, K_1, K_2 ve K_3 kapanış aksiyomlarını sağlar.

Bu teoremin ispatı, teorem 3.2.7. ve teorem 3.2.8. (a)' nın ispatlarına benzer şekilde yapılır.

3.6. Komşuluk Uzaylarında Sınırlılık

Bu kısımda N(X) komşuluk uzayları kümesinin ve alt kümelerinin, alt ve üst sınırı, infimum ve supremumu, sup-yoğunluğu, inf-yoğunluğu ve order-densesi incelenmiştir.

Tanım 3.6.1. $\mathcal{A} = \{v_i: i \in J\} \subseteq N(X)$ komşuluk uzayları ailesi olsun. Bu durumda (X, v) ve (X, μ) komşuluk uzaylarına sırasıyla, N(X) içinde $\mathcal{A}$ ailesinin infimumu ve supremumu denir ve $v = inf_{N(X)}\mathcal{A}$ ve $\mu = sup_{N(X)}\mathcal{A}$ olarak gösterilir. Burada $v(x)$ ve $\mu(x)$ komşuluk yapıları $v(x) = \cap \{v_i(x): i \in J\}$ ve $\mu(x) = \cup \{v_i(x): iJ\}$ şeklinde

tanımlanır [2].

Önerme 3.6.2. $\mathcal{A} = \{v_i : i \in J\} \subseteq N(X)$ olsun.

(1) $\forall v_i \in \mathcal{A}$ bir supratopolojik komşuluk uzayı ise $sup_{N(X)}\mathcal{A}$ da supratopolojik komşuluk uzayı olur.

(2) $\forall v_i \in \mathcal{A}$ bir regüler komşuluk uzayı ise $sup_{N(X)}\mathcal{A}$ da regüler komşuluk uzayı olur.

(3) $\forall v_i \in \mathcal{A}$ bir pretopolojik komşuluk uzayı ise $inf_{N(X)}\mathcal{A}$ da pretopolojik komşuluk uzayı olur.

(4) $\forall v_i \in \mathcal{A}$ bir topolojik komşuluk uzayı ise $sup_{PR(X)}\mathcal{A}$ ve $inf_{ST(X)}\mathcal{A}$ da bir topolojik komşuluk olur [2].

İspat. (1) $v_j \in \mathcal{A}$ ve $\mu = sup_{N(X)}\mathcal{A}$ olsun. (X, μ) komşuluk uzayının bir supratopolojik komşuluk uzay olduğunu göstermek için $V \in \mu(x)$, $I_\mu(V) \in \mu(x)$ olduğunu göstermek yeterlidir. Tanım 3.6.1' den dolayı bazı $j \in J$ için $V \in \mu(x)$, $V \in v_j(x)$ olur. v_j' ler bir supratopolojik komşuluk uzay olduğundan $I_{v_j}(V) \in V_j(x)$' dir. Burada $v_j \leq \mu$ olduğu için $v_j(x) \leq \mu(x)$ bulunur ve dolayısıyla $I_{v_j}(V) \subseteq I_\mu(V)$'dir. Ayrıca $v_j(x)$ komşuluk yapısı olduğu için $I_{v_j}(V) \in v_j(x)$ ise $I_\mu(V) \in v_j(x)$ olur. Buradan $v_j(x) \subseteq \mu(x)$ olduğu için $I_\mu(V) \in \mu(x)$ elde edilir.

(2) $v_j \in \mathcal{A}$ ve $\mu = sup_{N(X)}\mathcal{A}$ olsun. Bu durumda $x \in X$ ve $V \in \mu(x)$ bulunur. Buradan bazı $j \in J$ için $V \in v_j(x)$' dir. Burada v_j' ler regüler komşuluk uzayı olduğu için $W \in v_j(x)$ ve $\exists V \in v_j(x)$ için $Cl_{v_j}W \subseteq V$ olur. $v_j \leq \mu$ olduğundan dolayı $v_j(x) \subseteq \mu(x)$ ve $Cl_\mu W \subseteq Cl_{v_j}W$ bulunur. $V \in v_j(x)$ ise $V \in \mu(x)$ ve $\forall W \in v_j(x)$ elde edilir. Dolayısıyla $Cl_\mu W \subseteq V$ olur.

(3) $v_i \in \mathcal{A}$ ve $v = inf_{N(X)}\mathcal{A}$ olsun. v komşuluk uzayının bir pretopolojik komşuluk uzay olması için $\forall x \in X$ için $v(x)$' lerin her birinin birer süzgeç olması gerekir. Bunun için de $\forall V, W \in v(x)$ için $V \cap W \in v(x)$ olduğu gösterilmelidir. Tanım 3.6.1' de $v(x) = \cap \{v_i(x) : i \in J\}$ olduğundan $\forall i \in I$ için $V, W \in v_i(x)$ elde edilir. $v_i(x)$ süzgeç olduğundan dolayı $\forall i \in I$ için $V \cap W \in v_i(x)$ bulunur. Dolayısıyla $V \cap W \in v(x)$ olur.

(4) $\forall v_i \in \mathcal{A}$ bir topolojik komşuluk uzay ise o zaman hem pretopolojik komşuluk hem

de supratopolojik komşuluk uzay olur. Önermenin (1) ifadesi özel olarak N(X) ailesi içinden değil de PR(X) ailesinden seçilirse $\forall v_i \in \mathcal{A}$ supratopolojik komşuluk uzayı için $sup_{PR(X)}\mathcal{A}$ ifadesi hem pretopoloji hem de supratopolojik komşuluk uzayı olur. Dolayısıyla $sup_{PR(X)}\mathcal{A}$ bir topolojik komşuluk uzayı olur. Önermenin (3) ifadesi özel olarak N(X) ailesi içinden değil de ST(X) ailesinden seçilirse $\forall v_i \in \mathcal{A}$ pretopolojik komşuluk uzayı için $inf_{ST(X)}\mathcal{A}$ ifadesi hem pretopoloji hem de supratopolojik komşuluk uzayı olur. Dolayısıyla $inf_{ST(X)}\mathcal{A}$ bir topolojik komşuluk uzayı olur.

Teorem 3.6.3.

(1) ST(X), N(X) içinde *inf-dense* olur.

(2) PR(X), N(X) içinde *sub- dense* olur.

(3) T(X), N(X) içinde *sub- dense* olur.

(4) T(X), PR(X) içinde *inf- dense* olur [2].

Sonuç 3.6.4. $X \neq \emptyset$ olsun. PR(X), ST(X), RN(X), T(X) ve discret topoloji ve indiscret topoloji N(X) komşuluk uzaylarının kısmi sıralı alt kümeleridir. Discret topoloji ve indiscret topoloji en küçük en büyük eleman gibi düşünülürse N(X) tam sıralı bir küme ve dolayısıyla tam lattice olur [2].

4. BÖLÜM

KOMŞULUK UZAYLAR KATEGORİSİ

Bu bölümünde komşuluk uzayları kategorisinde ilk ve son yapı kavramlarının tanımı verilmiştir. Ayrıca bu tanımlar yardımıyla komşuluk uzaylarının alt kategorileri arasındaki reflektiflik kavramı ve komşuluk kategorisindeki bazı özellikler incelenmiştir.

4.1. Komşuluk Uzaylar Kategorisinde İlk ve Son Yapı

Bu kısımda komşuluk kategorisinde ilk ve son yapı kavramlarının tanımları ve bu tanımlarla ilgili teoremler verilmiştir.

Tanım 4.1.1. X bir küme, $\{(X_i, v_i): i \in J\}$ ailesi komşuluk uzaylarının bir ailesi, $\{f_\text{i} : i \in J\}$ ailesi $f_i: (X, v_j) \to (X_i, v_i)$ şeklinde tanımlanan fonksiyonların ailesi ve $\{(X, v_J): j \in J\}$ ailesi de her $f_i: (X, v_j) \to (X_i, v_i)$ fonksiyonunu sürekli yapan X üzerindeki komşuluk uzaylarının bir ailesi olsun. $\forall x \in X$ için $v_j(x)$ komşuluk yapılarının en kabası alınarak oluşturulan komşuluk uzayına, fonksiyonlar ve (X_i, v_i) komşuluk uzayları tarafından tanımlanan X üzerinde ilk komşuluk uzayı denir.

Tanım 4.1.2. X bir küme, $\{(X_i, v_i): i \in J\}$ ailesi komşuluk uzaylarının bir ailesi, $\{f_\text{i} : i \in J\}$ ailesi $f_i: (X_i, v_i) \to (X, \mu_j)$ şeklinde tanımlanan fonksiyonların ailesi ve $\{(X, \mu_J): j \in J\}$ ailesi de her $f_i: (X_i, v_i) \to (X, \mu_j)$ fonksiyonunu sürekli yapan X üzerindeki komşuluk uzaylarının bir ailesi olsun. $\forall x \in X$ için $\mu_j(x)$ komşuluk yapılarının en incesi alınarak oluşturulan komşuluk uzayına, fonksiyonlar ve (X_i, v_i) komşuluk uzayları tarafından tanımlanan X üzerinde son komşuluk uzayı denir.

Tanım 4.1.3. $\{(X_i, v_i): i \in J\}$ komşuluk uzayları ve bu uzayların her biri herhangi bir P özelliğine sahip olsun. Ayrıca (X, v) komşuluk uzayı $f_i: (X, v) \to (X_i, v_i)$ sürekli fonksiyonları altında bir ilk yapı olarak verilsin. Eğer (X, v) komşuluk uzayı da P özelliğine sahip ise bu P özelliğine bir ilk özellik denir. Benzer olarak $\{(X_i, v_i): i \in J\}$ komşuluk uzayları ve bu uzayların her biri herhangi bir P özelliğine sahip olsun. Ayrıca (X, v) komşuluk uzayı $f_i: (X_i, v_i) \to (X, v)$ sürekli fonksiyonları altında bir son yapı olarak verilsin. Eğer (X, v) komşuluk uzayı da P özelliğine sahip ise bu P özelliğine bir son özellik denir [2].

Önerme 4.1.4. X bir küme, $\{(X_i, v_i): i \in J\}$ ailesi komşuluk uzaylarının bir ailesi ve $\{f_\mathrm{i} : i \in J\}$ ailesi $f_i: X \to X_i$ fonksiyonlarının ailesi olsun. X üzerinde v ilk yapısı mevcuttur ve $\forall x \in X$ için $v(x) = \bigcup_{i\in J} f_i^{-1}\left(v_i\big(f_i(x)\big)\right)$ şeklinde olur [2].

İspat. (X, v) bir komşuluk uzayı ve $f_i: (X, v) \to (X_i, v_i)$ sürekli fonksiyonların ailesi olsun. Bu durumda $\forall i \in J$ ve $\forall x \in X$ için $f_i^{-1}\left(v_i\big(f_i(x)\big)\right) \subseteq v(x)$ olur. Burada $\forall x \in X$ için $\mu_y(x) = f_i^{-1}\left(v_i\big(f_i(x)\big)\right)$ komşuluk yapıları ele alınırsa önerme 3.6.2' den dolayı $v = sup_{N(X)}\{\mu_i: i \in J\} \Longrightarrow v(x) = \bigcup_{i\in J} f_i^{-1}\left(v_i\big(f_i(x)\big)\right)$ bulunur. Ayrıca her $\mu_y(x)$ için $v(x) \subseteq \mu_y(x)$ olduğundan v en kabadır.

Önerme 4.1.5. $\{(X_i, v_i): i \in J\}$ ve $f_i: X \to X_i$ fonksiyonları verilsin. $(X. v)$ komşuluk uzayı $\{f_\mathrm{i} : i \in J\}$ fonksiyonları tarafından tanımlanan X üzerinde ilk komşuluk yapısı olsun. $\mathcal{H}$, X üzerinde bir p-yığını ve $x \in X$ olsun. $\forall i \in J$ için $\mathcal{H} \xrightarrow{v} x$ olması için gerek ve yeter şart $f_i(\mathcal{H}) \xrightarrow{v_i} f_i(x)$ olmasıdır [2].

Önerme 4.1.6. X bir küme, $\{(X_i, v_i): i \in J\}$ ailesi komşuluk uzaylarının bir ailesi ve $\{f_\mathrm{i} : i \in J\}$ ailesi $f_i: X_i \to X$ tanımlanan fonksiyonların ailesi olsun. X üzerinde μ son yapısı mevcuttur ve (1) ve (2) ile belirlenir.

(1) Eğer $x \in \bigcup_{i\in J} f_i(X_i)$, $\mu(x) = \{A \subseteq X: A \in f_i(v_i(a)),\ \forall f_i^{-1}(x) \in X_i, \forall\, i \in J\}$

(2) Diğer taraftan, $\mu(x) = \dot{x}$ olur.

Tanım 4.1.7. NBD bütün komşuluk uzaylarını obje ve aralarındaki sürekli fonksiyonları morfizm kabul eden bir kategoridir. Ayrıca bütün pretopolojik, supratopolojik, regüler ve topolojik komşuluk uzayları NBD kategorisinin dolgun alt kategorileri olur. Bu kategoriler sırasıyla PRTOP, SUPTOP, RNBD ve TOP olarak adlandırılır.

Teorem 4.1.8. NBD komşuluk uzayları kategorisi içinde

(1) Regüler olma özelliği ilk özelliktir.

(2) Pretopoloji olma özelliği son özelliktir [2].

İspat. (1) (X_j, v_j) komşuluk uzaylarının her biri regüler olsun. Ayrıca önerme 4.1.4.' in terminolojisi ve notasyonu kullanılarak μ_j komşuluk yapısını X üzerinde $\mu_j = f_j^{-1}\left(v_j(f_j(x))\right)$ şeklinde tanımlansın. $A \in \mu_j(x)$ olsun. v_j regüler olduğu için $B \in v_j(f_j(x))$' dır öyle ki $f_j^{-1}(B) \subseteq A$ olur. Ayrıca burada $C \in v_j\ (f_j(x))$ vardır öyle ki $Cl_{\mu_j}C \subseteq B$' dır. Önerme 3.2.9.' den dolayı $f_j(Cl_{\mu_j}(f_j^{-1}(C))) \subseteq Cl_{v_j}f_j(f_j^{-1}C) \subseteq Cl_{v_j}$ bulunur. Dolayısıyla $Cl_{\mu_j}f_j^{-1}(C) \subseteq f_j^{-1}(Cl_{v_j}C) \subseteq A$ olur. Bu yüzden $f_j^{-1}(C) \in \mu_j(x)$ olduğu için $\left(X, \mu_j\right)$ regülerdir. Önerme 4.1.4.' ün ispatında da görüldüğü gibi $v = sup_{N(X)}\{\mu_j : j \in J\}$ olur ve böylece (X, v) Önerme 3.6.2.' nin (2) kısmından dolayı regüler olur.

(2) $\forall i \in J$, (X_i, v_i) bir supratopoloji olsun. Eğer $x \notin \bigcup_{i\in J} f_i(x_i)$ ise $\mu(x) = \dot{x}$ olur. Bu durumda $\mu(x)$ süzgeçtir. Diğer taraftan $x \in \bigcup_{i\in J} f_i(x_i)$, $A, B \in \mu(x)$ ve $\exists i \in J, a_i \in X_i$ olsun. Burada $f_i(a_i) = x$ olacak şekilde $\exists x \in X$ vardır. Burada v_i süzgeç olduğundan $f^{-1}(A \cap B) \in v_i(a)$ olur. $f^{-1}(A \cap B) \in v_i(a)$ ifadesinin f altındaki görüntüsü alınırsa $A \cap B \in f^{-1}(v_i(a))$ elde edilir. Bu durumda $A \cap B \in \mu(x)$ olur. Dolayısıyla $\mu(x)$ bir pretopolojidir.

Lemma 4.1.9. (1) $\{(X_i, v_i) : i \in J\}$ ailesi supratopolojik komşuluk uzaylarının bir alt ailesi ve $\{f_i : i \in J\}$, $f_i : X_i \to X$ şeklinde tanımlanan dönüşümlerinin kümesi olsun. Eğer v, bu aileler tarafından tanımlanan NBD içinde X üzerinde son yapı ise σv benzer aileler tarafından tanımlanan SUPTOP içinde X üzerinde son yapı olur [2].

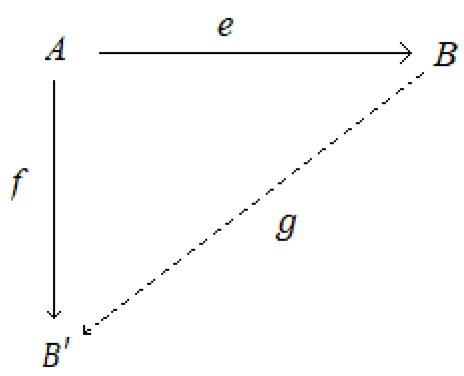
(2) $\{(X_i, \mu_i) : i \in J\}$ pretopolojik komşuluk uzayların bir alt ailesi ve $\{g_i : i \in J\}$, $g_i : X \to X_i$ şeklinde tanımlanan dönüşümlerinin kümesi olsun. Eğer μ bu aileler tarafından tanımlanan NBD içinde X üzerinde ilk yapı ise $\pi\mu$ benzer aileler tarafından tanımlanan PRTOP içinde X üzerinde ilk yapı olur [2].

Teorem 4.1.10. Topolojik komşuluk uzayı olma durumu PRTOP içinde bir ilk özellik ve SUPTOP içinde bir son özellik olur [2].

4.2. Reflektif Komşuluk Kategorisi

Bu kısımda reflektiflik kavramının tanımı verilmiştir ve daha sonra bu tanımla bağlantılı olan monoreflektiflik, epireflektiflik ve bireflektiflik kavramlarına değinilmiştir. Ayrıca bu kavramların dualleri belirtilmiştir.

Tanım 4.2.1. $\mathcal{C}$ bir kategori ve $\mathcal{B}$ kategorisi de $\mathcal{C}$ kategorisinin bir full alt kategorisi olsun. Eğer $\mathcal{C}$ içinden $\mathcal{B}$' ye yerleşen funktor $\mathcal{C}$' den $\mathcal{B}$ üzerine bir adjointe sahipse $\mathcal{B}$' ye bir reflektif denir. Bu dönüşüme de reflektif dönüşüm denir. Bu tanıma denk olarak $\mathcal{C}$' nin her objesi bir reflektif dönüşüme sahipse $\mathcal{B}$ full alt kategorisi $\mathcal{C}$ içinde bir reflektif olur. Diğer bir ifadeyle her $A \in \mathcal{C}$ ve $B \in \mathcal{B}$ olsun. $B' \in \mathcal{B}$ iken $f: A \longrightarrow B'$ morfizmi ile beraber $f = goe$ bileşke işlemini değişmeli yapan bir $e: A \longrightarrow B$ morfizmi yardımıyla tanımlanan bir tek $g: B \longrightarrow B'$ dönüşümü varsa $\mathcal{B}$ full alt kategorisine reflektif denir.



Şekil 4.1. Reflektif morfizm diyagramı

Şekil 4.1' de gösterilen okları tersine çevirip tanım 4.2.1' deki "$\mathcal{C}$ içinden $\mathcal{B}$' ye yerleşen funktor $\mathcal{C}$' den $\mathcal{B}$ üzerine bir adjointe sahipse" ifadesini "$\mathcal{C}$ içinden $\mathcal{B}$' ye yerleşen funktor $\mathcal{B}$' den $\mathcal{C}$ üzerine bir coadjointe sahipse" şeklinde değiştirildiğinde dual tanımı yapılmış olur. Bu şekilde oluşturulan $f: B \longrightarrow A$ döşümüne koreflektif dönüşüm denir [18]. Eğer reflektif dönüşüm aynı zamanda monomorfizm olursa bu dönüşüme monoreflektif, dualine de monokoreflektif dönüşüm, eğer reflektif dönüşüm aynı zamanda epimorfizm olursa epireflektif, dualine de epikoreflektif dönüşüm ve eğer reflektif dönüşüm bimorfizm olursa bireflektif ve dualine de bikoreflectif dönüşüm denir.

Örnek 4.2.2. NBD komşuluk uzayları kategorisi, SUPTOP ve RNBD full alt kategorileri içinde birer bireflektif ve PRTOP full alt kategorisi içinde bir bicoreflectif olur. Ayrıca TOP full alt kategorisi PRTOP kategori içinde bireflektif ve SUPTOP içinde bicoreflektif olur.

4.3 Komşuluk Uzaylarının Bazı Özellikleri

Bu kısımda kategori içinde verilen çarpım ve dual çarpım, pullback ve pushout kavramlarının komşuluk uzaylar kategorisi içine yansımaları verilmiştir.

Tanım 4.3.1. Komşuluk uzayları kümesinde $(X, v) = \prod_{i\in}(X_i, v_i)$ kartezyen çarpımı ve P_i: $(X, v) \longrightarrow (X_i, v_i)$ dönüşümlerin ailesi verilsin. (X, v) komşuluk uzayı $\forall x \in X$ için $v(x) = \bigcup_{i\in J} P_i^{-1}(v_i(P_i(x)))$ şeklinde tanımlanırsa çarpım komşuluk uzayı olur. $(X, v) = \prod_{i\in}(X_i, v_i)$ kartezyen çarpımı ve Q_i: $(X_i, v_i) \longrightarrow (X, v)$ ailesi verilsin. (X, v) komşuluk uzayı $x \in \bigcup_{i\in J} P_i(X_i)$ olduğunda $\mu(x) = \{A \subseteq X: P_i^{-1}(A) \in v_i(a),\ \forall\, a \in P_i^{-1}(x), \forall\, i \in J,\ x \in P_i(X_i)\}$ şeklinde diğer durumlarda $\mu(x) = \dot{x}$ şeklinde tanımlanır ise dual çarpım komşuluk uzayı olur.

Teorem 4.3.2. NBD kategorisinde (X_i, v_i) komşuluk uzaylarının bir ailesi, (X, v) komşuluk uzayı ve P_i: $(X, v) \longrightarrow (X_i, v_i)$ morfizmi verilsin. V, NBD kategorisinin bir objesi olmak üzere $f_i: V \longrightarrow X_i$ morfizmi verildiğinde

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "P_i"] & X_i \\ V \arrow[u, dashed, "k"] \arrow[ur, "f_i"'] & \end{tikzcd}$$

Şekil 4.2. Komşuluk kategorisinde çarpım diyagramı

$(X, v) = \{v(x): v(x) = \bigcup_{i\in J} P_i^{-1}(v_i(P_i(x)))\}$ şeklinde tanımlanan komşuluk yapısı bu diyagramı değişmeli yapan bir tek $k: V \longrightarrow X$ morfizmini verir. Buradaki diyagram NBD içindeki çarpım diyagramı olur. Benzer olarak Tanım 4.3.1 içindeki dual çarpım komşuluk uzayı terminolojisi kullanılarak ve oklar tersine çevrilerek bu teoremin duali yazılır. Bu şekilde belirtilen diyagram da NBD içindeki dual çarpım diyagramı olur.

Önerme 4.3.3. NBD içindeki çarpım diyagramı aynı zamanda pullback diyagramı ve dual çarpım diyagramı da pushout diyagramı olur.

KAYNAKLAR

1- Hausdorff, F., “Grundzüge der mengenlehre”, *Verlag Von Veit & Comp.*, 1914.

2- Kent, D. C., Min, W. K., “Neigborhood space”, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*,32(7), 387-399, 2002.

3- Choquet, G., *“*Convergences*”, Ann. Univ. Grenoble. Sect. Sci. Math. Phys.*, 23, 57–112, 1948.

4- Cech, E., “Topological spaces*”, Interscience Publishers*, New York, 1966.

5- Mashhour, A. S., Allam, A. A., Mahmoud, F. S., Khedr, F. H., “On supratopological sapace”, *Indian Journal Pure Applied Mathematics*, 14(4), 502-510, 1983.

6- Levine, N., “Semi-open sets and semi-continuty in topological space”, *Amer. Math. Monthly*, 70, 36-41, 1963.

7- Csaszar, A.,”Generalized topology, generalized continuity”, *Acta Math. Hungar*, 96 (-), 351-357, 2002

8- Kim, Y. K., Min, W. K., “Remark on generalized topologies induced by supra-neighborhood systems”, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 98(3), 323-332, 2015.

9- Min, W. K., “Remark on weak neighborhood space”, *Hacettepe Journal of Mathematics And Statistics”,* 40(6), 811-818, 2011

10- Lane, M., “Categories for the working mathematicians”, *Sprenger Verlag*, New York, 1971.

11- Herrlich, H., “Topological coreflections”, *Proc. Syrup. Topology*, Herceg Novi, 1968.

12- Mucuk, O., “Kategori teorisi”, Topoloji ve Kategori 2. bsk., Ankara, 371-436, 2009

13- Yüksel, Ş., “Topolojik uzaylar”, Genel Topoloji 7. bsk., Konya, 18-71, 2011

14- Birkhoff, G, “Lattice theory”, *American Mathematical Society*, 1940.

15- Wyler, O., “TOP categories and categorical topology”, *General Topology and Its Applications*, 1(971), USA, 1970.

16- Wodzicki, W., “ Note on order sets”, USA, 2012.

17- Dalud-Vincent, M., Brissaud, M., Lamure, M., “Closed sets and closures in pretopology”, 50(3), 391-402, 2009.

18- Kennison, J. F., “Reflective functors in general topology and elsewhere", *Trans. Amer.Math. Soc.*, 118, 303-315, 1965.

19- Danile M. Kan, “Adjoint Functors”, *Trans. Amer Math. Soc.*, 87(2), 294-329, USA, 1958.
20- Freyd, P., “Abelian categories”, *Harper and Row,* New York, 1964.

ÖZGEÇMİŞ

Mustafa Sami YILDIRIM 1987 yılında Isparta'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Isparta'da tamamladı. 2005 yılında kazandığı Erzurum Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünden 2009 yılında mezun oldu. 2011 yılında Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalında Yüksek Lisansa başladı. 2012 yılında yüksek lisansı devam ederken Milli Eğitim Bakanlığı bünyesinde Matematik öğretmeni olarak atandı. Evli ve bir çocuk babası olup halen Afyonkarahisar Merkez Afyon Lisesi' nde görevine devam etmektedir.

Adres: Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

38039 - Nevşehir

Telefon: 0 384 437 25 01 - 2308

Belgegeçer: 0 384 437 25 84

e-posta : msyildirim@windowslive.com