T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FONKSİYON UZAYLARINDA KOMPAKTLIĞIN ZAYIF FORMLARI İLE ELDE EDİLEN TOPOLOJİLERİN İNCELENMESİ

Tezi Hazırlayan
İsmail OSMANOĞLU

Tez Danışmanı
Doç. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ

Matematik Anabilim Dalı
Doktora Tezi

Haziran 2019
NEVŞEHİR

Doç. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ danışmanlığında **İsmail OSMANOĞLU** tarafından hazırlanan "**Fonksiyon Uzaylarında Kompaktlığın Zayıf Formları ile Elde Edilen Topolojilerin İncelenmesi**" başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Doktora Tezi** olarak kabul edilmiştir.

11/06/2019

JÜRİ

Başkan	:	**Prof. Dr. Muammer KULA**
Üye	:	**Doç. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ**
Üye	:	**Prof. Dr. Necdet BATIR**
Üye	:	**Doç. Dr. Ayhan ERCİYES**
Üye	:	**Doç. Dr. Sezer SORGUN**

ONAY:

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun 26.06.2019.....tarih ve 2019.39.362 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

27/6/2019

Prof. Dr. Şahlan ÖZTÜRK
Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİM SAYFASI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada yer alan bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu ve bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

İsmail OSMANOĞLU

TEŞEKKÜR

Lisansüstü öğrenimim boyunca bilgi, birikim ve tecrübeleriyle bulunduğum noktaya gelmemde büyük emeği olan saygı değer danışman hocalarıma,

Değerli katkı ve ilgilerinden dolayı Prof. Dr. Mehmet BARAN ve Prof. Dr. Muammer KULA’ya,

Desteklerini esirgemeyen sevgili eşim ve annem başta olmak üzere üstümde emeği olan tüm sevdiklerime sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

FONKSİYON UZAYLARINDA KOMPAKTLIĞIN ZAYIF FORMLARI İLE ELDE EDİLEN TOPOLOJİLERİN İNCELENMESİ

(Doktora Tezi)

İsmail OSMANOĞLU

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Haziran 2019

ÖZET

Altı bölümden oluşan bu tez çalışmasında, fonksiyon uzayları üzerinde yeni topolojiler elde edilmiş ve bu topolojilerin bazı topolojik özellikleri incelenmiştir.

Çalışmanın ilk bölümünde, fonksiyon uzaylarının tarihsel gelişimi hakkında bilgi verilmiştir. İkinci bölümde, gerekli temel tanım ve teoremler sunulmuştur. Üçüncü bölümde, kompaktlığın zayıf formları ile elde edilen topolojiler tanımlanmış ve aralarındaki kıyaslamalar incelenmiştir. Dördüncü bölümde, bir önceki bölümde elde edilen topolojilerin ayrıntılı karşılaştırılması yapılmıştır. Beşinci bölümde, üçüncü bölümde elde edilen topolojilerin metriklenebilirlik, tam metriklenebilirlik ve sayılabilirlik özellikleri gibi topolojik özellikleri ayrıntılı olarak ele alınmıştır. Çalışmanın son bölümünde, sonuçlar ve öneriler verilmiştir.

Anahtar kelimeler: Fonksiyon Uzayı, Küme-Açık Topoloji, Metriklenebilirlik, Sayılabilirlik.
Tez Danışman: Doç. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ
Sayfa Adeti: 60

A RESEARCH OF TOPOLOGIES OF FUNCTION SPACES INDUCED BY WEAK FORMS OF COMPACTNESS

(PhD Thesis)

İsmail OSMANOĞLU

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ UNİVERSİTY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLİED SCİENCES

June 2019

ABSTRACT

In this thesis, which consists of six chapters, some new topologies have been obtained on function spaces and some topological properties of these topologies are examined.

In the first part of the study, information is given about the historical development of function spaces. In the second part, the necessary basic definitions and theorems are presented. In the third part, topologies obtained by weak forms of compactness are defined and comparisons between themselves are examined. In the fourth part, a detailed comparison of the topologies obtained in the previous section was made. In the fifth part, the topological properties of the topologies obtained in the third section such as metrizability, complete metrizability and countability are obtained in detail. In the last part of the study, results and recommendations are given.

Keywords: Function Space, Set-Open Topology, Metrizability, Countability.
Thesis Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ
Page Number: 60

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\square$	İspatın sonu
$\bigoplus$	Topolojik toplam
$\mathbb{I}$	$[-1,1]$ kapalı aralığı
$\lVert . \rVert$	Norm
$(\boldsymbol{x_n})$	Dizi
$\boldsymbol{B_d(x,\varepsilon)}$	x merkezli ε yarı çaplı açık yuvar
$\boldsymbol{f\vert_A}$	f fonksiyonunun A ya kısıtlanışı
$\boldsymbol{f_0}$	Sabit sıfır fonksiyonu
$\boldsymbol{X^Y}$	X kümesinden Y kümesine tanımlı tüm fonksiyonların kümesi
$\boldsymbol{C(X,Y)}$	X topolojik uzayından Y topolojik uzayına tanımlı tüm sürekli fonksiyonların kümesi
$\boldsymbol{C(X)}$	X topolojik uzayı üzerinde tanımlı reel değerli sürekli fonksiyonların kümesi
$\boldsymbol{C^*(X)}$	X topolojik uzayı üzerinde tanımlı reel değerli sınırlı ve sürekli fonksiyonların kümesi
$\boldsymbol{QC(X,Y)}$	X topolojik uzayından Y topolojik uzayına tanımlı tüm q-sürekli fonksiyonların kümesi
$\boldsymbol{G_\delta}$	X topolojik uzayında sayılabilir sayıda açık kümenin kesişimi olarak yazılabilen kümeler
$\boldsymbol{F_\sigma}$	X topolojik uzayında sayılabilir sayıda kapalı kümenin birleşimi olarak yazılabilen kümeler
$\boldsymbol{F(X)}$	X topolojik uzayının sonlu alt kümelerinin sınıfı
$\boldsymbol{K(X)}$	X topolojik uzayının kompakt alt kümelerinin sınıfı
$\boldsymbol{QK(X)}$	X topolojik uzayının yarı kompakt alt kümelerinin sınıfı
$\boldsymbol{CK(X)}$	X topolojik uzayının clp-kompakt alt kümelerinin sınıfı
$\boldsymbol{C_p(X,Y)}$	$C(X,Y)$ üzerindeki nokta-açık topoloji
$\boldsymbol{C_k(X,Y)}$	$C(X,Y)$ üzerindeki kompakt-açık topoloji
$\boldsymbol{C_q(X,Y)}$	$C(X,Y)$ üzerindeki yarı kompakt-açık topoloji
$\boldsymbol{C_{clp}(X,Y)}$	$C(X,Y)$ üzerindeki clp-kompakt-açık topoloji
$\boldsymbol{C_u(X,Y)}$	$C(X,Y)$ üzerindeki düzgün topoloji

$\boldsymbol{C_\gamma(X,Y)}$	$C(X,Y)$ üzerindeki örtü topoloji
$\boldsymbol{C_g(X,Y)}$	$C(X,Y)$ üzerindeki graf topoloji
$\boldsymbol{B_X(f,\varepsilon)}$	$C_u(X,Y)$ uzayındaki açık küme

1. BÖLÜM
GİRİŞ

On dokuzuncu yüzyılın başında fonksiyon kavramı açık bir şekilde tanımlanmış değildi. Bununla birlikte, reel değerli fonksiyonlar dizisinin noktasal yakınsaklık fikri mevcuttu. Ancak yakınsak seri ve sürekli fonksiyon kavramları Bolzano (1781-1848) ve Cauchy (1789-1857) tarafından tam olarak tanımlanana kadar fonksiyon dizilerinin düzgün yakınsaklığı hayal bile edilemezdi. Onlardan önce, serilerin yakınsak ve ıraksaklığına bakmadan kullanılması bir takım paradokslara ve anlaşmazlıklara yol açmıştı. 1817'deki yayınında, Bolzano, bir dizinin yakınsaması için gereken koşullar hakkında bir görüşe sahipti. 1821'de yakınsak fonksiyon serilerinin limitini ve sürekli fonksiyon serilerinin terim uyumunu incelerken, Cauchy bazı yanlış adımlar attı ve düzgün yakınsaklık ihtiyacını göz ardı etti. Neyse ki kısa bir süre sonra, Abel'in (1802-1829) uyarısıyla Cauchy hatalarının farkına vardı. 1826 tarihli makalesinde Abel, düzgün yakınsak sürekli fonksiyon serilerinin toplamı, yakınsama aralığında sürekli olduğuna dair bir kanıt verdi. Fakat fonksiyon serilerinin düzgün yakınsaklığını incelememişti. Aslında, Weierstrass (1815-1897), 1842 gibi erken bir zamanda düzgün yakınsaklık fikrine sahipti. Ancak düzgün yakınsaklık ile ilgili çalışmaları ilk olarak 1894'te yayınlandı.

Ascoli [1], Arzelà [2] ve Hadamard'in [3] on dokuzuncu yüzyılın son yirmi yılındaki çalışmaları, fonksiyon uzayları üzerindeki çalışmaların başlangıcı olarak gösterilir. Basitçe söylersek, noktaların fonksiyon olduğu topolojik uzaya, fonksiyon uzayı denir.

Fonksiyonlar üzerinde çalışmalara yirminci yüzyılda devam edildi ve reel değerli fonksiyon teorisi olarak bilinen yeni bir matematik dalı ortaya çıktı. Ayrıca, şimdi topoloji adı verilen yeni bir geometri dalı belirginleşti. [4, Sayfa 162] de "Modern matematiğin diğer birçok dalında olduğu gibi topolojinin yaratıcısı olarak görülmesi gereken Riemann'dır. Topolojik uzay kavramını formüle etmeye çalışan ilk kişiydi." vurgusu vardır. Ancak Weierstrass "mo-dern analizin babası" olarak kabul edilir. 1913–1914'te Hausdorff, bugün genel topoloji olarak bilinen konuyu geliştirmeye başladı.

Yukarıda bahsedilen gerçekler ışığında, bir topolojik uzaydan bir diğerine tanımlı tüm fonksiyonların kümesi üzerinde topoloji tanımlanması fikrinin, fonksiyon dizilerinin noktasal ve düzgün yakınsaklık kavramlarından ortaya çıktığını söylemek abartı olmaz.

Noktasal yakınsaklık topolojisi (nokta-açık topoloji) noktasal yakınsak fonksiyon dizisi kavramından kaynaklanırken, düzgün yakınsaklık topolojisi (düzgün topoloji), düzgün bir yakınsak fonksiyon dizisi kavramından kaynaklanır. Noktasal yakınsaklık ve düzgün yakınsaklık topolojileri, genel topolojinin ilk yıllarında çalışılan ilk iki fonksiyon uzay topolojileridir. Supremum metrik topolojisi (düzgün yakınsaklık topolojisi) ilk olarak 1906'da Fréchet [5] tarafından çalışılmıştır. Noktasal ve düzgün yakınsaklık kavramları ve bu kavramların düzgün yapıları açık bir şekilde Tukey [6] tarafından verilmiştir. Fonksiyon uzayları üzerinde topoloji çalışmaları tutarlı bir şekilde 1935 yılında Tychonoff [7] ile başladı ve Y^X üzerindeki çarpım topolojisinin noktasal yakınsaklık topolojisi olduğuna dikkat çekti. Kompakt-açık topoloji ilk olarak 1945 yılında Fox [8] tarafından tanımlanmış, Arens ve Dugundji [9, 10] tarafından geliştirilmiştir. Kompakt-açık topolojinin topolojik yönü, Nachbin [11], Shirota [12] ve Warner [13] gibi birçok matematikçinin önemli eseri ile karakterize edilmiştir. Jackson [14] bu topolojiyi kompakt kümeler üzerinde düzgün yakınsak fonksiyon dizileri tarafından elde etmiştir. Bu yüzden kompakt-açık topoloji, kompakt kümeler üzerinde düzgün yakınsaklık topolojisi olarak da bilinir. Ayrıca kompakt-açık topolojinin, düzgün yakınsaklık topolojisine denk olabilmesi için gerek ve yeter şartın uzayın kompakt olması gerektiğini göstermiştir. Kompaktlık güçlü bir koşul olduğundan bu iki topoloji arasında kayda değer bir araştırma alanı vardır. Son elli yıl içinde bu iki topoloji arasında pek çok topoloji tanımlanmıştır. Bazıları σ-kompakt açık [15], sözde kompakt-açık (Pseudocompact-open) [16], C-kompakt açık [17], sınırlı açık [18] ve açık-açık topoloji [19] şeklinde sıralanabilir. Altmışlı yıllardan bu yana, fonksiyon uzayı araştırmacılarının sayısı hızlı bir şekilde artmıştır. Bu durum hepsi hakkında bilgi edinmemizi zorlaştırmaktadır. Bununla birlikte, A. V. Arhangelskii [20, 21], D. J. Lutzer [22], R. A. McCoy [23, 25] ve E. A. Micheal [28], fonksiyon uzaylarının topolojik davranışının anlaşılmasına büyük katkıda bulunmuşlardır.

1948'de Hewitt [24], X topolojik uzayı üzerinde tanımlı tüm reel değerli sürekli fonksiyonların kümesi $C(X)$ üzerinde m-topolojisini tanımladı. m-topoloji aynı zamanda literatürde ince topoloji (fine topology), Whitney topolojisi veya Morse topolojisi olarak da adlandırılmıştır. Ancak topologların çoğu, genellikle buna ince topoloji demeyi tercih ederler. 1991 tarihli makalesinde Van Douwen, m-topolojisini, düzgün topolojinin doğal bir genellemesi olarak adlandırmıştır [29]. Nokta-açık ve kompakt-açık topolojiler düzgün topolojiden daha zayıfken; ince topoloji, düzgün topolojiden daha güçlüdür. Bu nedenle,

$C(X)$ üzerinde düzgün topolojiden daha güçlü başka doğal topolojiler bulmaya çalışmak oldukça doğaldır. $C(X)$ üzerindeki graf topolojisi de böyledir. 1964 yılında Naimpally, doktora tezinde graf topolojisi adı verilen yeni bir fonksiyon uzay topolojisi tanımlamıştır [30]. Naimpally'nin graf topolojisi üzerindeki tanıtım çalışması da [31] de yayınlanmıştır.

Bu çalışmanın amacı, X topolojik uzaydan Y topolojik uzayına tanımlı tüm sürekli fonksiyonların kümesi olan $C(X,Y)$ üzerinde tanımlanan topolojileri topolojik olarak incelemektir. Ağırlıklı olarak metriklenebilirlik, tam metriklenebilirlik ve sayılabilirlik özellikleri üzerinde yoğunlaşacağız.

Çalışmanın ilk bölümünde, fonksiyon uzaylarının tarihsel gelişimi hakkında bilgi verildi.

İkinci bölümde, çalışma boyunca kullanılacak bazı kavramların tanımları ve özellikleri verildi.

Üçüncü bölümde, öncelikle küme-açık topolojiler, düzgün topolojiler, örtü topolojiler ve graf topolojiler gibi $C(X,Y)$ kümesi üzerinde tanımlanan çeşitli fonksiyon uzayları topolojilerinin tanımları verildi. Daha sonra, yarı kompakt ve clp-kompakt gibi kompaktlığın bazı zayıf formları ile bu topolojilerin bazı genellemeleri verildi. Bu uzaylar ile ilgili ilişkileri göstermek için bazı örnekler verilmiştir.

Dördüncü bölümde, tanımlanan tüm topolojilerin karşılaştırılması verildi.

Beşinci bölümde, üçüncü bölümde tanımlanan yarı kompakt-açık topoloji ve clp-kompakt-açık topolojilerin metriklenebilirlik ve tam metriklenebilirlik özellikleri ele alındı. Sonrasında bu topolojilerin sayılabilirlik özellikleri incelendi. Benzer sonuçlar diğer topolojiler için de elde edildi.

2. BÖLÜM
TEMEL BİLGİLER

Bu bölümde tezde kullanılan temel tanım ve teoremler verildi.

2.1 Temel Tanım ve Teoremler

Herhangi bir karışıklığa neden olmadığı sürece (X,τ) topolojik uzayını, X uzayı olarak ifade edeceğiz.

X kümesinden Y kümesine tanımlı tüm fonksiyonların kümesini Y^X, X uzayından Y uzayına tanımlı tüm sürekli fonksiyonların kümesini ise $C(X,Y)$ ile göstereceğiz. Eğer $Y=\mathbb{R}$ olarak alırsak $C(X,\mathbb{R})$ yerine $C(X)$ gösterimini kullanacağız. Aksi belirtilmedikçe $\mathbb{R}$ üzerinde standart (alışılmış) topoloji ile ele alınacaktır.

Tanım 2.1.1 Herhangi X uzayında sayılabilir sayıda açık kümenin kesişimi olarak yazılabilen kümelere G_δ-küme, sayılabilir sayıda kapalı kümenin birleşimi olarak yazılabilen kümelere F_σ-küme denir.

Bir G_δ-kümenin tümleyeninin F_σ-küme, bir F_σ-kümenin tümleyeninin de G_δ-küme olduğu kolayca görülebilir.

Tanım 2.1.2 X herhangi topolojik uzay olmak üzere,

a) X uzayında $A=\{x\in X : f(x)=0\}$ olacak biçimde reel değerli sürekli f fonksiyonu varsa A kümesine sıfır küme (zero set) denir. Sıfır kümenin tümleyenine tümleyeni sıfır küme (cozero set) denir.

b) X uzayında hem açık hem de kapalı olan bir kümeye kapaçık küme (clopen set) denir.

Yukarıda verilen tanımları dikkate alırsak her kapaçık kümenin tümleyeni sıfır küme, her tümleyeni sıfır kümenin de açık küme olduğu açıkça görülür.

Tanım 2.1.3 **a)** Bir topolojik uzayın farklı iki elemanının ayrık açık komşulukları varsa, bu uzaya T_2-uzayı veya Hausdorff uzay denir.

b) Herhangi farklı $x,y\in X$ için $f(x)=0$ ve $f(y)=1$ (denk olarak $f(x)\neq f(y)$) olacak şekilde bir $f: X\to[0,1]$ sürekli fonksiyonu varsa X uzayına tam Hausdorff uzay denir.

c) Bir topolojik uzayın her elemanı ve bu elemanı içermeyen her kapalı küme için onların ayrık açık komşulukları varsa bu uzaya regüler uzay denir.

d) Her kapalı F kümesi ve her $x \notin F$ için $f(x) = 0$ ve $f(F) = 1$ olacak şekilde bir $f : X \to [0,1]$ sürekli fonksiyonu varsa X uzayına tam regüler uzay denir.

e) Bir topolojik uzayın her iki ayrık kapalı alt kümelerinin ayrık açık komşulukları varsa, bu uzaya normal uzayı denir.

f) Normal ve her kapalı kümesi G_δ-küme olan X uzayına tamamen normal uzay denir.

tam Hausdorff uzay, tam regüler uzay ile Hausdorff uzay arasında yer alır. Yani tam regüler uzay tam Hausdorff, tam Hausdorff uzay da Hausdorff uzaydır.

Önerme 2.1.4 Tamamen normal bir uzayda her açık küme tümleyeni sıfır kümedir [32, Teorem 1.5.19].

Tanım 2.1.5 Regüler X uzayının boştan farklı alt kümelerinin bir ailesi $\mathscr{F}$ olmak üzere,

a) Her $x \in X$ ve x in her açık U komşuluğu için, $x \in F \subseteq U$ olacak şekilde $F \in \mathscr{F}$ varsa $\mathscr{F}$ ailesine ağ (network) denir [33].

b) X in her kompakt K alt kümesi ve $K \subseteq U$ olacak şekilde her açık U alt kümesi için, $K \subseteq F \subseteq U$ olacak şekilde $F \in \mathscr{F}$ varsa $\mathscr{F}$ ailesine k-ağ (k-network) denir [28].

c) X uzayında $\mathscr{F}$ bir ağ olmak üzere, x in her açık U komşuluğu ve $A \subseteq X$ nın yığılma noktası x için $F \subseteq U$ ve $F \cap A$ kümesi sonsuz olacak şekilde $F \in \mathscr{F}$ varsa $\mathscr{F}$ ailesine Pytkeev ağ (Pytkeev network) denir [34].

Tanım 2.1.6 **a)** Sayılabilir bir ağa sahip uzaya kozmik uzay denir [33].

b) Sayılabilir bir k-ağa sahip uzaya $\aleph_0$-uzay denir [28].

c) Sayılabilir bir Pytkeev ağa sahip uzaya $\mathfrak{P}_0$-uzay denir [34].

Teorem 2.1.7 Herhangi $\mathfrak{P}_0$-uzay $\aleph_0$-uzaydır [34], $\aleph_0$-uzay kozmik uzaydır, [28] kozmik uzay ayrılabilir uzaydır [10].

Teorem 2.1.8 Herhangi bir metrik uzayın, ikinci sayılabilir, $\aleph_0$-uzay, kozmik uzay olma özellikleri bir birine denktir [23].

Tanım 2.1.9 X topolojik uzayının bir alt kümesi A ve X in açık alt kümelerin bir ailesi $\mathscr{O}$ olmak üzere $\mathscr{O}$ daki kümelerin birleşimi A kümesini içeriyorsa $\mathscr{O}$ kolleksiyonuna A kümesinin açık örtüsü denir. $\mathscr{O}$ kolleksiyonu A kümesininin açık örtüsü olmak üzere $\mathscr{O}'$, A kümesini örtecek şekilde $\mathscr{O}$ nun alt kolleksiyonu ise $\mathscr{O}'$ ye $\mathscr{O}$ nun alt örtüsü denir.

Tanım 2.1.10 Bir topolojik uzayın her açık örtüsünün bir sayılabilir alt örtüsü varsa bu uzaya Lindelöf uzayı denir.

Şimdi zayıf açık küme biçimleri ile tanımlanan kompaktlık tanımlarını verelim.

Tanım 2.1.11 X herhangi topolojik uzay olmak üzere,

a) X uzayının her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa, X uzayına kompakt uzay denir.

b) X uzayının her tümleyeni sıfır küme örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa, X uzayına yarı kompakt uzay (quasicompact space) denir [35].

c) Her $f \in C(X)$ için $f(X)$ kümesi $\mathbb{R}$ nin sınırlı bir alt kümesi ise X uzayına sözde kompakt uzay (pseudocompact space) denir.

d) X uzayının her kapaçık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa, X uzayına clp-kompakt uzay *(clp-compact space)* denir [36].

Gelecek bölümlerde kullanım kolaylığı için yukarıda tanımladığımız kompaktlık tanımlarının sınıflarını aşağıdaki şekilde göstereceğiz.

$F(X)$	X uzayının sonlu alt kümelerinin sınıfı,
$K(X)$	X uzayının kompakt alt kümelerinin sınıfı,
$QK(X)$	X uzayının yarı kompakt alt kümelerinin sınıfı,
$CK(X)$	X uzayının clp-kompakt alt kümelerinin sınıfı.

Önerme 2.1.12 Her kompakt uzay, yarı kompakt; her yarı kompakt uzay, sözde kompakt ve her sözde kompakt uzay, clp-kompakttır (bkz. [35], [37] ve [36]).

Şimdi bu uzaylar için bazı sonuçlar verelim.

Önerme 2.1.13 Herhangi clp-kompakt kümenin kapanışı da clp-kompakttır.

İspat: A, X uzayının bir clp-kompakt alt kümesi olsun. $\{C_i : i \in I\}$ sınıfı $\overline{A}$ nın bir kapaçık örtüsü olsun; yani $\overline{A} \subseteq \cup_{i\in I} C_i$. Buradan $\{C_i : i \in I\}$ sınıfı A nın bir kapaçık örtüsüdür. A kümesi clp-kompakt olduğundan, $A \subseteq \cup_{i=1}^{n} C_i$ olacak biçimde $\{C_i : i \in \{1,2,..,n\}\}$ sonlu alt örtüsü vardır. Herkangi kapaçık kümenin kapanışı yine kendisi olacağından, $A \subseteq \cup_{i=1}^{n} C_i$ ifadesinin her iki tarafının kapanışını alırsak $\overline{A} \subseteq \cup_{i=1}^{n} C_i$ elde edilir. Bu ise $\overline{A}$ kümesinin clp-kompakt olduğunu gösterir. □

Sonuç 2.1.14 Herhangi yarı kompakt kümenin kapanışı yarı kompakttır.

İspat: Her yarı kompakt küme clp-kompakt olduğundan açıktır. □

Teorem 2.1.15 Tamamen normal yarı kompakt bir uzay kompakttır.

İspat: Önerme 2.1.4 den tamamen normal bir uzayda her açık kümenin tümleyeni sıfır küme olduğunu biliyoruz. O halde tamamen normal yarı kompakt bir uzay kompakttır. □

Tanım 2.1.16 X uzayı kapaçık kümelerden oluşan bir baza sahip ise X uzayına sıfır boyutlu uzay denir.

Teorem 2.1.17 Sıfır boyutlu clp-kompakt bir uzay kompakttır. [36, Önerme 1.12]

Tanım 2.1.18 (X,d) metrik uzayında $x \in X$ noktasına belli bir uzaklıktaki noktaların oluşturduğu küme,

$$B_d(x,\varepsilon) = \{y \in X : d(x,y) \leq \varepsilon\}$$

ile gösterilir ve bu kümeye x merkezli ε yarı çaplı açık yuvar adı verilir.

Tanım 2.1.19 (X,d) bir metrik uzay ve (x_n), X de bir dizi olsun. $x \in X$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $n > n_0$ olduğunda $d(x_n,x) < \varepsilon$ olacak şekilde ε na bağlı pozitif en az bir n_0 tam sayısı bulunabiliyorsa (x_n) dizisi x noktasına yakınsar denir ve bu durum $n \to \infty$ iken $x_n \to x$ biçiminde gösterilir.

Teorem 2.1.20 Metrik uzayda limit varsa tektir [32].

Teorem 2.1.21 Bir (x_n) dizisinin x noktasına yakınsaması için gerek ve yeter şart $d(x_n,x) \to 0$ olmasıdır [32].

Tanım 2.1.22 (X,d) bir metrik uzayında her $\varepsilon > 0$ a karşılık $n,m > n_0$ olduğunda $d(x_n,x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde ε na bağlı pozitif en az bir n_0 tam sayısı bulunabiliyorsa (x_n) dizisine Cauchy dizisi denir.

Teorem 2.1.23 Yakınsak her dizi Cauchy dizisidir [32].

Tanım 2.1.24 Her Cauchy dizisinin yakınsak olduğu metrik uzaya tam metrik uzay denir.

Tanım 2.1.25 X metrik uzayındaki açık yuvarların sınıfı, X üzerindeki bir topoloji için bazdır. Yani her metrik uzay bir topolojik uzaydır. Metrik tarafından üretilen bu topolojiye metrik topoloji denir. Ayrıca biliyoruz ki $d(x,y) = \|x-y\|$ biçiminde tanımlanan metriğe norm metriği ve bu metrik tarafından üretilen topolojiye norm topolojisi denir. Dolayısıyla her normlu uzay bir topolojik uzaydır.

Tanım 2.1.26 X bir topolojik uzay olmak üzere X üzerindeki topolojiyi üreten X üzerinde bir metrik varsa, X uzayına metriklenebilir denir. X üzerindeki topolojiyi üreten metrik tam ise X uzayına tam metriklenebilir denir.

Tanım 2.1.27 X ve Y iki topolojik uzay olmak üzere, $f : X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olsun.

a) X uzayından Y deki alt $f(X)$ uzayına bir homeomorfizma mevcut ise X uzayı Y uzayı içine gömülür ve f fonksiyonuna da gömme fonksiyonu denir.

b) Her $x \in A \subset X$ için $f|_A(x) = f(x)$ biçiminde tanımlı $f|_A : A \longrightarrow Y$ fonksiyonuna f nin A ya kısıtlanışı denir.

c) $A \subset X$ ve $f : A \longrightarrow Y$ fonksiyonu için $F|_A = f$ olacak biçimde $F : X \longrightarrow Y$ fonksiyonuna varsa F fonksiyonuna f nin X e genişlemesi denir.

d) Her $x \in X$ için $f_0(x) = 0$ biçiminde tanımlı $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna sabit sıfır fonksiyonu denir.

Tanım 2.1.28 X topolojik uzayından bir metrik uzaya sürekli, bire-bir ve içine bir fonksiyon varsa X uzayına altmetriklenebilir denir. Yani X uzayı bir metrik uzaya gömülebilir ise X uzayına altmetriklenebilir denir.

Tanım 2.1.29 X boştan farklı bir küme olmak üzere $X \times X$ in $\triangle = \{(x,x) : x \in X\}$ alt kümesine X in köşegeni denir.

Tanım 2.1.30 X in $\triangle$ köşegeni G_δ-küme ise X uzayına G_δ-köşegene sahiptir denir.

Tanım 2.1.31 $f : X^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksionu için $\triangle = f^{-1}(0)$ ise X uzayına sıfır küme köşegene sahiptir denir.

Önerme 2.1.32 X uzayı altmetriklenebilir ise sıfır küme köşegene sahip, sıfır küme köşegene sahip ise G_δ-köşegene sahiptir [38, s. 472].

Tanım 2.1.33 Her noktası G_δ-küme olan uzaya E_0-uzay denir.

Önerme 2.1.34 X uzayı G_δ-köşegene sahip ise E_0-uzaydır [33].

Önerme 2.1.35 X uzayı altmetriklenebilir ise X uzayının her yarı kompakt alt kümesi G_δ-kümedir.

İspat: X uzayı altmetriklenebilir olsun. O halde metriklenebilir Y uzayı için bire-bir sürekli $f : X \to Y$ fonksiyonu vardır. X uzayının bir yarı kompakt alt kümesi A olmak üzere $f(A)$ kümesi Y uzayında kompakttır. Metrik uzayda her kapalı küme G_δ-küme olduğundan $f(A)$ kümesi G_δ-kümedir. Buradan Y uzayının açık G_n kümeleri için $f(A) = \cap_{i=1}^{\infty} G_n$ olarak yazılabilir. O halde $A = \cap_{i=1}^{\infty} f^{-1}(G_n)$ olacağı için A yarı kompakt alt kümesi G_δ-kümedir.□

Önerme 2.1.36 X uzayı tam regüler ve altmetriklenebilir ise X uzayının her yarı kompakt alt kümesi kompakttır.

İspat: Sözde kompakt, tam regüler ve altmetriklenebilir bir uzay metriklenebilirdir [39, Sonuç 2.7]. Ayrıca yarı kompakt bir uzay sözde kompakttır. O halde tam regüler ve altmetriklenebilir X uzayının her yarı kompakt alt kümesi kompakttır. □

3. BÖLÜM
FONKSİYON UZAYLARINDA TOPOLOJİLER

Bu bölümde, tez boyunca kullanacağımız topolojiler tanımlandı ve bu topolojilerin aralarındaki karşılaştırılması incelendi.

τ, $C(X,Y)$ üzerinde bir topoloji olmak üzere $(C(X,Y),\tau)$ topolojik uzayını yazım kolaylığı için $C_\tau(X,Y)$ olarak göstereceğiz. $C(X,Y)$ üzerindeki τ ve σ topolojilerini karşılaştırırken $\tau \subseteq \sigma$ gösterimi yerine $C_\tau(X,Y) \leq C_\sigma(X,Y)$ gösterimi kullanacağız.

X uzayının boştan farklı alt kümelerinin bir sınıfını λ ile göstereceğiz ve λ sınıfını sonlu birleşim işlemine göre kapalı olduğu kabul edilecektir. Yani, $A,B \in \lambda$ ise $A \cup B \in \lambda$ dır.

Son olarak, X uzayının topolojisini $\tau(X)$ ile göstereceğiz.

3.1 Küme-Açık Topolojiler

Tanım 3.1.1 $A \in \lambda$ ve $V \in \tau(Y)$ için,

$S(A,V) = \{f \in C(X,Y) : f(A) \subseteq V\}$

ve

$S^*(A,V) = \{f \in C(X,Y) : \overline{f(A)} \subseteq V\}$

kümelerini tanımlayalım.

$f \in S^*(A,V)$ için $f(A) \subseteq \overline{f(A)} \subseteq V$ olduğundan $f \in S(A,V)$ dır. Buradan $S^*(A,V) \subseteq S(A,V)$ olduğu açıtır. Ayrıca $A_i \in \lambda$ ve $V_i \in \tau(Y)$ için kolayca,

$\cap_{i=1}^{n} S(A_i,V) = S(\cup_{i=1}^{n} A_i, V)$,

$\cap_{i=1}^{n} S(A,V_i) = S(A, \cap_{i=1}^{n} V_i)$,

$\cap_{i=1}^{n} S(A_i,V_i) \subset S(\cup_{i=1}^{n} A_i, \cup_{i=1}^{n} V_i)$

olduğu gösterilebilir.

Önerme 3.1.2 $\mathscr{A} = \{S(A,V) : A \in \lambda$ ve $V \in \tau(Y)\}$ sınıfı $C(X,Y)$ üzerinde bir topoloji için alt bazdır.

İspat: $A_1, A_2 \in \lambda$ ve $V_1, V_2 \in \tau(Y)$ için $\mathscr{A}$ sınıfının $S(A_1,V_1)$ ve $S(A_2,V_2)$ kümelerini göz önüne alalım. $S(A_1 \cup A_2, V_1 \cap V_2) \subseteq S(A_1,V_1) \cap S(A_2,V_2)$ olacak biçimde $S(A_1 \cup A_2, V_1 \cap V_2) \in \mathscr{A}$ kümesi bulmalıyız.

$$S(A_1 \cup A_2, V_1 \cap V_2) = S(A_1, V_1 \cap V_2) \cap S(A_2, V_1 \cap V_2) \subseteq S(A_1,V_1) \cap S(A_2,V_2)$$

burada $A_1 \cup A_2 \in \lambda$ ve $V_1 \cap V_2 \in \tau(Y)$ olduğundan $S(A_1 \cup A_2, V_1 \cap V_2) \in \mathscr{A}$ elde edilir. O halde $\mathscr{A}$ sınıfı $C(X,Y)$ üzerinde bir topoloji için alt bazdır. □

$\mathscr{A}$ sınıfını $C(X,Y)$ üzerinde alt baz kabul eden topolojiler genel olarak küme-açık topoloji olarak ifade edilir.

Şimdi λ sınıfının bazı özel durumları için $C(X,Y)$ üzerinde tanımlanan küme-açık topolojilerin tanımlarını verelim.

Tanım 3.1.3 $\lambda = F(X)$ alınırsa $\mathscr{A}$ sınıfını $C(X,Y)$ üzerinde alt baz kabul eden topolojiye nokta-açık topoloji (noktasal yakınsaklık topolojisi) denir ve bu uzay $C_p(X,Y)$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.4 $\lambda = K(X)$ alınırsa $\mathscr{A}$ sınıfını $C(X,Y)$ üzerinde alt baz kabul eden topolojiye kompakt-açık topoloji denir ve bu uzay $C_k(X,Y)$ ile gösterilir [8].

Tanım 3.1.5 $\lambda = QK(X)$ alınırsa $\mathscr{A}$ sınıfını $C(X,Y)$ üzerinde alt baz kabul eden topolojiye yarı kompakt-açık topoloji denir ve bu uzay $C_q(X,Y)$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.6 $\lambda = CK(X)$ alınırsa $\mathscr{A}$ sınıfını $C(X,Y)$ üzerinde alt baz kabul eden topolojiye clp-kompakt-açık topoloji denir ve bu uzay $C_{clp}(X,Y)$ ile gösterilir.

Not 3.1.7 Herhangi X uzayı ve Y metrik uzayı için, $\lambda = QK(X)$ sınıfı yerine $\overline{\lambda} = \{\overline{A} : A \in \lambda\}$ sınıfını alınırsa $C(X,Y)$ üzerinde elde edeceğimiz topoloji yine yarı kompakt-açık topoloji olur. Çünkü $f \in C(X,Y)$ ve $A \in QK(X)$ için $f(A)$ yarı kompakt kümesi Y metrik uzayında kompakt ve dolayısıyla kapalıdır. Ayrıca Sonuç 2.1.14 den yarı kompakt kümenin kapanışı yarı kompakt ve kapalı olacağından $\overline{f(\overline{A})} = \overline{f(A)}$ elde edilir. Dolayısıyla $\lambda = QK(X)$ sınıfı ile elde edilen $C_q(X,Y)$ uzayında (Y metrik uzay olmak şartıyla) A yarı kompakt alt kümesi kapalı olarak alınabilir. Bundan sonra aksi belirtilmedikçe $A \in QK(X)$ kümesi kapalı kabul edilecektir.

Bu durum clp-kompakt-açık topoloji için geçerli değildir. Çünkü X uzaynın bir clp-kompakt A alt kümesi için $f(A)$ kümesi Y metrik uzayında kapalı olmayabilir.

Önerme 3.1.8 $\mathscr{A}^* = \{S^*(A,V) : A \in \lambda$ ve $V \in \tau(Y)\}$ sınıfı $C(X,Y)$ üzerinde bir topoloji için alt bazdır.

İspat: Önerme 3.1.2 nin ispatına benzer olarak yapılabilir.

Tanım 3.1.9 $\lambda = CK(X)$ alınırsa $\mathscr{A}^*$ sınıfını $C(X,Y)$ üzerinde alt baz kabul eden topolojiye zayıf clp-kompakt-açık topoloji denir ve bu uzay $C_{clp^*}(X,Y)$ ile gösterilir.

Not 3.1.10 Herhangi X uzayı ve Y metrik uzayı için, clp-kompakt-açık topoloji dışında tanımladığımız küme-açık topolojiler zayıf küme-açık topolojilerine eşittir. Yani, $C_{k^*}(X,Y) = C_k(X,Y)$ ve $C_{q^*}(X,Y) = C_q(X,Y)$ dır. Çünkü X uzayının kompakt ya da yarı kompakt A alt kümesi ve $f \in C(X,Y)$ için, $f(A)$ kümesi Y metrik uzayında kapalı olacağından $\overline{f(A)} = f(A)$ elde edilir. Böyle bir durumda $S^*(A,V) = S(A,V)$ dır.

Teorem 3.1.11 Herhangi X ve Y uzayları için,

$$C_p(X,Y) \leq C_k(X,Y) \leq C_q(X,Y) \leq C_{clp}(X,Y) \leq C_{clp^*}(X,Y).$$

İspat: Önerme 2.1.12 den $F(X) \subseteq K(X) \subseteq QK(X) \subseteq CK(X)$ olduğunu biliyoruz. O halde Tanım 3.1.1 dikkate alınırsa $C_p(X,Y) \leq C_k(X,Y) \leq C_q(X,Y) \leq C_{clp}(X,Y) \leq C_{clp^*}(X,Y)$ olduğu kolayca görülür. □

Örnek 3.1.12 Tamamen normal X uzayı ve herhangi Y uzayı için,

$$C_k(X,Y) = C_q(X,Y) \leq C_{clp}(X,Y).$$

Çözüm: Teorem 2.1.15 den tamamen normal ve yarı kompakt bir uzayın kompakt olduğunu biliyoruz. O halde tamamen normal X uzayı için $K(X) = QK(X)$ olacağından $C_k(X,Y) = C_q(X,Y)$ dir. Ancak tamamen normal ve yarı kompakt uzay clp-kompakt olmayabilir (bkz. [40, Örnek 38]). Dolayısıyla $C_q(X,Y) \leq C_{clp}(X,Y)$ dir. □

Örnek 3.1.13 Sıfır boyutlu X uzayı ve herhangi Y uzayı için,

$$C_k(X,Y) = C_q(X,Y) = C_{clp}(X,Y).$$

Çözüm: Teorem 2.1.17 den sıfır boyutlu ve clp-kompakt bir uzayın kompakt olduğunu bili-yoruz. O halde sıfır boyutlu X uzayı için $K(X) = CK(X)$ olacağından $C_k(X,Y) = C_q(X,Y) = C_{clp}(X,Y)$ dir. □

Teorem 3.1.14 X tam regüler uzay olmak üzere $C_k(X) = C_{clp^*}(X)$ dir ancak ve ancak X uzayının her kapalı clp-kompakt alt kümesi kompakttır.

İspat: Eğer X uzayının her kapalı clp-kompakt alt kümesi kompakt ise $C_k(X) = C_{clp^*}(X)$ olur.

Tersine, $C_k(X) = C_{clp^*}(X)$, X uzayının kapalı clp-kompakt bir alt kümesi A ve $S^*(A,\mathbb{R}\backslash\{1\})$, $C_k(X)$ uzayında f_0 noktasının bir açık komşuluğu olsun. O halde $f_0 \in S(K,V) \subseteq S^*(A,\mathbb{R}\backslash\{1\})$ olacak şekilde $C_k(X)$ uzayında $S(K,V)$ alt baz elemanı ve dolayısıyla X uzayının kompakt K alt kümesi vardır. $x \in A\backslash K$ olduğunu kabul edelim. X tam regüler uzay olduğundan $g(x) = 1$ ve $g(K) = \{0\}$ olacak biçimde $g : X \to [0,1]$ sürekli fonksiyonu vardır. $0 \in V$ olduğundan $g(K) = \{0\} \subseteq V$ ve buradan $g \in S(K,V)$ olur. Ancak $1 \notin V$ olduğundan $\overline{g(A)} = \{1\} \nsubseteq \mathbb{R}\backslash\{1\}$ ve buradan $g \notin S^*(A,\mathbb{R}\backslash\{1\})$ olur. Bu ise kabulümüz ile çelişir. Dolayısıyla $A \subseteq K$ ve bu yüzden A kompakttır. □

Sonuç 3.1.15 Tam regüler X uzayı için, $C_k(X) = C_q(X)$ dir ancak ve ancak X uzayının her kapalı yarı kompakt alt kümesi kompakttır.

İspat: X uzayının her yarı kompakt alt kümesi clp-kompakt olacağından Teorem 3.1.14 den açıktır. □

Sonuç 3.1.16 Eğer X tam regüler ve kompakt ise

$$C_k(X) = C_q(X) = C_{clp}(X) = C_{clp^*}(X).$$

İspat: Kompakt uzayın her kapalı alt kümesi kompakt olacağından Teorem 3.1.14 den $C_k(X) = C_{clp^*}(X)$ dir. Teorem 3.1.11 den $C_k(X) \le C_q(X) \le C_{clp}(X) \le C_{clp^*}(X)$ olduğundan $C_k(X) = C_q(X) = C_{clp}(X) = C_{clp^*}(X)$ elde edilir. □

Sonuç 3.1.17 Eğer X uzayı tam regüler ve sıfır boyutlu ise

$$C_k(X) = C_q(X) = C_{clp}(X) = C_{clp^*}(X).$$

İspat: Sıfır boyutlu ve clp-kompakt uzay kompakt olduğundan Sonuç 3.1.16 den açıktır. □

Sonuç 3.1.18 Eğer X uzayı sayılabilir ve regüler ise

$C_k(X) = C_q(X) = C_{clp}(X) = C_{clp^*}(X)$.

İspat: Sayılabilir ve regüler bir uzay sıfır boyutlu (bkz. [32, Sonuç 4.1.14]) olduğundan Sonuç 3.1.17 den açıktır. □

Önerme 3.1.19 B, $\mathbb{R}$ için bir alt baz olmak üzere $\{S(A,V) : A \in QK(X), V \in B\}$ sınıfı $C_q(X)$ uzayı için alt bazdır.

İspat: $C_q(X)$ uzayıda herhangi $f \in S(A,V)$ için $f \in \cap_{i=1}^{n} S(A_i, V_{i,}) \subset S(A,V)$ olacak biçimde $A_i \in QK(X)$ ve $V_i \in B$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. $f(A)$ kompakt olduğundan $f(A) \subseteq \cup_{i=1}^{n}(z_i - \varepsilon_i, z_i + \varepsilon_i) \subseteq \cup_{i=1}^{n}(z_i - 2\varepsilon_i, z_i + 2\varepsilon_i) \subseteq V$ olacak biçimde $f(A)$ kümesinde $z_1, z_2, \ldots, z_n$ noktaları vardır. $V_i = (z_i - 2\varepsilon_i, z_i + 2\varepsilon_i)$ ve $A_i = A \cap f^{-1}(\overline{(z_i - \varepsilon_i, z_i + \varepsilon_i)})$ alalım. Buradan $A = \cup_{i=1}^{n} A_i$ ve $f \in \cap_{i=1}^{n} S(A_i, V_i)$ olduğu kolayca görülür. $\cap_{i=1}^{n} S(A_i, V_i) \subset S(\cup_{i=1}^{n} A_i, \cup_{i=1}^{n} V_i)$ $\subseteq S(A,V)$ olacağından $\{S(A,V) : A \in QK(X), V \in B\}$ sınıfı $C_q(X)$ uzayı için alt bazdır. □

Şimdi sürekli fonksiyonların bir genelleştirmesi olan q-sürekli fonksiyon kavramını tanımlayalım.

Tanım 3.1.20 X ve Y herhangi iki topolojik uzay olmak üzere, X uzayının her yarı kompakt A alt kümesi için $f|_A$ kısıtlama fonksiyonu sürekli ise $f : X \to Y$ fonksiyonuna q-sürekli fonksiyon denir.

X uzayında Y uzayına tanımlı tüm q-sürekli fonksiyonların kümesini $QC(X,Y)$ ile göstereceğiz.

Sürekli bir fonksiyonun kısıtlama fonksiyonu da sürekli olacağından her sürekli fonksiyon q-süreklidir. Buradan $C(X,Y) \subseteq QC(X,Y)$ olduğu görülür.

Tanım 3.1.21 Her q-sürekli fonksiyonun sürekli olduğu uzaya q_f-uzay denir.

Önerme 3.1.22 $QC(X,Y) = C(X,Y)$ dır ancak ve ancak X uzayı q_f-uzaydır.

İspat: $QC(X,Y) = C(X,Y)$ ise X üzerinde tanımlı tüm reel değerli q-sürekli fonksiyonlar sürekli olacağından X uzayı q_f-uzaydır. Tersine X uzayı q_f-uzay ise X üzerinde tanımlı tüm reel değerli q-sürekli fonksiyonlar süreklidir. O halde $QC(X,Y) = C(X,Y)$ dir. $\square$

Önerme 3.1.23 X uzayı tam regüler ve altmetriklenebilir ise q_f-uzaydır.

İspat: X uzayı altmetriklenebilir olsun. O halde X uzayının her yarı kompakt A alt kümesi için $f|_A$ kısıtlama fonksiyonu süreklidir. X uzayı tam regüler ve altmetriklenebilir olduğundan Önerme 2.1.36 dan her yarı kompakt A alt kümesi kompakttır. O halde $f|_A$ nin $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ genişleme fonksiyonu süreklidir [41, Teorem 1, s. 267]. Dolayısıyla X uzayı q_f-uzaydır. $\square$

Tanım 3.1.24 $A \in QK(X)$ ve $V \in \tau(Y)$ için,

$S(A,V) = \{f \in QC(X,Y) : f(A) \subseteq V\}$

kümesini tanımlayalım.

Önerme 3.1.25 $\mathscr{A}_* = \{S(A,V) : A \in QK(X)$ ve $V \in \tau(Y)\}$ sınıfı $QC(X,Y)$ üzerinde bir topoloji için alt bazdır.

İspat: Önerme 3.1.2 nin ispatına benzer olarak yapılabilir. $\square$

Tanım 3.1.26 $\mathscr{A}_*$ sınıfını $QC(X,Y)$ üzerinde alt baz kabul eden topolojiye yarı kompakt-açık topoloji denir ve bu uzay $QC_q(X,Y)$ ile gösterilir.

Önerme 3.1.27 $C_q(X,Y)$ uzayı $QC_q(X,Y)$ uzayının bir alt uzayıdır.

İspat: $C(X,Y) \subseteq QC(X,Y)$ ve $QC_q(X,Y)$ uzayının $S(A,V)$ açık alt kümesi için $S(A,V) = C(X,Y) \cap S(A,V)$ olacağından $S(A,V)$ kümesi $C_q(X,Y)$ uzayının açık alt kümesidir. Dolayısıyla $C_q(X,Y)$ uzayı $QC_q(X,Y)$ uzayının bir alt uzayıdır. $\square$

Teorem 3.1.28 Yarı kompakt X uzayı için,

$QC_q(X,Y) = C_q(X,Y)$.

İspat: X uzayı yarı kompakt ise $f : X \to Y$ q-sürekli fonksiyonu süreklidir. Dolayısıyla X uzayı q_f-uzaydır. Önerme 3.1.22 den $QC_q(X,Y) = C_q(X,Y)$ olduğu görülür. $\square$

Şimdi $C_q(X,Y)$ ve $C_{clp^*}(X,Y)$ uzayları için bazı ayırma aksiyomlarını inceleyelim.

Tanım 3.1.29 X ve Y iki topolojik uzay olmak üzere $c_y : X \to Y, c_y(x) = y$ sabit fonksiyonunu göz önüne alalım. Her $y \in Y$ için $i : Y \to C(X,Y)$, $i(y) = c_y$ fonksiyonunu tanımlayalım.

Teorem 3.1.30 X herhangi uzay ve Y uzayı T_1 olmak üzere, $i : Y \to C_{clp^*}(X,Y)$ fonksiyonu bir gömmedir. Ayrıca Y uzayı Hausdorff ise $i(Y)$, $C_{clp^*}(X,Y)$ uzayında kapalıdır.

İspat: Her $y \in Y$ için $i : Y \to C_{clp^*}(X,Y)$, $i(y) = c_y$ fonksiyonu bire-bir olduğundan i fonksi-yonunun sürekli ve açık olduğunu göstermemiz yeterlidir. Önce sürekli olduğunu gösterelim. $S^*(A,V)$, $C_{clp^*}(X,Y)$ uzayında temel açık küme olsun.

$$i^{-1}(S^*(A,V)) = \{y \in Y : i(y) = c_y \in S^*(A,V)\} = \{y \in Y : \overline{c_y(A)} = \overline{\{y\}} = \{y\} \subset V\} = V$$

olduğundan i fonksiyonu süreklidir. Buradan $i(V) = i(Y) \cap S^*(\{x\},V)$ yazılabilir. $S^*(\{x\},V)$, $C_{clp^*}(X,Y)$ uzayında açık olacağından $i(V)$, $i(Y)$ nin açık alt kümesidir. Bu yüzden i bir gömmedir.

Y Hausdorff uzay olsun. $f \notin i(Y)$ ise $f(x_1) \neq f(x_2)$ olacak biçimde farklı x_1 ve x_2 noktaları vardır. Y uzayı Hausdorff olduğundan $f(x_1)$ ve $f(x_2)$ noktalarının ayrık açık V_1 ve V_2 komşulukları vardır. Buradan $\mathscr{O} = S^*(\{x_1\},V_1) \cap S^*(\{x_2\},V_2)$, $C_{clp^*}(X,Y)$ uzayında açık ve $f \in \mathscr{O}$ olduğu görülür. Ayrıca $g \in \mathscr{O}$ ise $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ için $g(x_1) \neq g(x_2)$ olacağından $g \notin i(Y)$ dir. Bu yüzden $\mathscr{O} \subseteq (i(Y))^c$ yazılabilir. Dolayısyla $i(Y)$, $C_{clp^*}(X,Y)$ uzayında kapalıdır. $\square$

Bu teoremden anlaşılacağı üzere Y uzayı $C_{clp^*}(X,Y)$ uzayının bir alt uzayına homeomorftur.

Teorem 3.1.31 Herhangi X ve Y uzayları için, $i : Y \to C_q(X,Y)$ fonksiyonu bir gömmedir.

İspat: Her $y \in Y$ için $i : Y \to C_q(X,Y)$, $i(y) = c_y$ fonksiyonu bire-bir olduğundan i fonksiyonunun sürekli ve açık olduğunu göstermemiz yeterlidir. Önce sürekli olduğunu gösterelim. $S(A,V)$, $C_q(X,Y)$ uzayında temel açık küme olsun.

$$i^{-1}(S(A,V)) = \{y \in Y : i(y) = c_y \in S(A,V)\} = \{y \in Y : c_y(A) = \{y\} \subset V\} = V$$

olduğundan i fonksiyonu süreklidir. V, Y uzayında açık ve $x \in X$ olsun. Buradan $i(V) = i(Y) \cap S(\{x\},V)$ yazılabilir. $S(\{x\},V)$, $C_q(X,Y)$ uzayında açık olacağından $i(V)$, $i(Y)$ nin açık alt kümesidir. Bu yüzden i bir gömmedir. □

Bu teoremden anlaşılacağı üzere Y uzayı $C_q(X,Y)$ uzayının bir alt uzayına homeomorftur.

Teorem 3.1.32 Herhangi X uzayı için, $QC_q(X,Y)$ Hausdorff uzaydır ancak ve ancak Y uzayı Hausdorff uzaydır.

İspat: $QC_q(X,Y)$ uzayı Hausdorff olsun. Teorem 3.1.31 den Y uzayı $C_q(X,Y)$ uzayının bir alt uzayına homeomorf ve $QC_q(X,Y)$ uzayı Hausdorff olduğundan Y Hausdorff uzaydır.

$QC_q(X,Y)$ uzayının Hausdorff olduğunu gösterelim. Y Hausdorff uzay olsun. O halde $f,g \in QC_q(X,Y)$ ve $f \neq g$ alırsak en az bir $x \in X$ için $f(x) \neq g(x)$ dir. Y Hausdorff olduğundan $f(x) \in V_1$ ve $g(x) \in V_2$ olacak biçimde Y uzayında ayrık V_1 ve V_2 açık kümeleri vardır. Dolayısıyla, $f \in S(\{x\},V_1)$ ve $g \in S(\{x\},V_2)$ olacak biçimde $QC_q(X,Y)$ uzayında ayrık $S(\{x\},V_1)$ ve $S(\{x\},V_2)$ açık kümeleri var olduğundan $QC_q(X,Y)$ Hausdorff uzayıdır.
□

Sonuç 3.1.33 Herhangi X uzayı için, $C_q(X,Y)$ Hausdorff uzaydır ancak ve ancak Y uzayı Hausdorff uzaydır.

İspat: Teorem 3.1.31 den Y uzayı $C_q(X,Y)$ uzayının bir alt uzayına homeomorf ve $C_q(X,Y)$ uzayı Hausdorff olduğundan Y Hausdorff uzaydır.

Y Hausdorff uzay ise Teorem 3.1.32 den $QC_q(X,Y)$ Hausdorff uzayıdır. $C_q(X,Y)$ uzayı $QC_q(X,Y)$ uzayının alt uzayı olduğundan Hausdorff uzaydır. □

Sonuç 3.1.34 Herhangi X uzayı için, $C_{clp^*}(X,Y)$ Hausdorff uzaydır ancak ve ancak Y Hausdorff uzaydır.

İspat: Teorem 5.2.20 den Y uzayı $C_{clp^*}(X,Y)$ uzayının bir alt uzayına homeomorf ve $C_{clp^*}(X,Y)$ uzayı Hausdorff olduğundan Y Hausdorff uzaydır.

Y Hausdorff uzay ise Sonuç 5.1.16 den $C_q(X,Y)$ uzayı Hausdorff ve $C_q(X,Y) \leq C_{clp^*}(X,Y)$ olduğundan $C_{clp^*}(X,Y)$ Hausdorff uzaydır. □

$C_q(X,Y)$ ve $C_{clp^*}(X,Y)$ uzayları normal olmayabilir. Y^X kümesi üzerinde küme-açık topolojiler tanımlanabilir. $Y_x = Y$ olmak üzere Y^X kümesi $Y^X = \prod_{x\in X} Y_x$ biçiminde ifadede edilebilir. Buradan ayrık X uzayı için $C(X,Y)=Y^X$ olacağından Y uzayı normal ise $C_{clp^*}(X,Y)$ uzayı normal olamaz. Dolayısıyla $C_{clp^*}(X,Y)$ ve $C_q(X,Y)$ uzayları her zaman metriklenebilir değildir. Bu uzayların metriklenebilme şartları beşinci bölümde incelenmiştir.

3.2 Düzgün Topolojiler

Tanım 3.2.1 (Y,ρ) sınırlı metrik uzayı, $f\in C(X,Y)$, $A\in\lambda$ ve $\varepsilon>0$ için,

$B_A(f,\varepsilon)=\{g\in C(X,Y):\sup_{x\in A}\rho(f(x),g(x))<\varepsilon\}$

kümesini tanımlayalım. Kolayca gösterilebilir ki $\bar{\rho}(f,g)=\sup_{x\in X}\rho(f(x),g(x))$ fonksiyonu $C(X,Y)$ kümesinde tanımlı bir metriktir. Bu metriğe supremum metriği denir.

Önerme 3.2.2 (Y,ρ) sınırlı metrik uzayı ve $\varepsilon>0$ için,

$\mathscr{B}_f=\{B_A(f,\varepsilon):A\in\lambda,\ g\in C(X,Y)\}$

sınıfı $C(X,Y)$ üzerinde bir topoloji için bazdır.

İspat: $f_1,f_2\in C(X,Y)$ ve $\varepsilon_1,\varepsilon_2>0$ için $\mathscr{B}_f$ sınıfının $B_A(f_1,\varepsilon_1)$ ve $B_A(f_2,\varepsilon_2)$ kümelerini göz önüne alalım. $B_A(h,\frac{\varepsilon}{2})\subseteq B_A(f_1,\varepsilon_1)\cap B_A(f_2,\varepsilon_2)$ olacak biçimde $B_A(h,\frac{\varepsilon}{2})\in\mathscr{B}_f$ kümesi bulmalıyız. $h\in B_A(f_1,\varepsilon_1)\cap B_A(f_2,\varepsilon_2)$ ise $\sup\{\rho(f_1(x),h(x)):x\in A\}<\varepsilon_1$ ve $\sup\{\rho(f_2(x),h(x)):x\in A\}<\varepsilon_2$ dır. Buradan $\varepsilon_1^{'}=\varepsilon_1-\sup\{\rho(f_1(x),h(x)):x\in A\}$ ve $\varepsilon_2^{'}=\varepsilon_2-\sup\{\rho(f_2(x),h(x)):x\in A\}$ için $\varepsilon=\min\{\varepsilon_1^{'},\varepsilon_2^{'}\}$ alırsak $B_A(h,\frac{\varepsilon}{2})\subseteq B_A(f_1,\varepsilon_1)\cap B_A(f_2,\varepsilon_2)$ olduğu kolayca görülür. O halde $\mathscr{B}_f$ sınıfı $C(X,Y)$ üzerinde bir topoloji için bazdır. $\square$

$\mathscr{B}_f$ sınıfını $C(X,Y)$ üzerinde baz kabul topolojiler genel olarak λ üzerinde düzgün yakınsaklık topolojisi (λ üzerinde düzgün topoloji) olarak ifade edilir.

Şimdi bu topolojinin en belirgin genellemesi olan ince topolojiyi tanımlayalım.

$B_A^*(f,\varepsilon)=\{g\in C(X,Y):\sup_{x\in A}\rho(f(x),g(x))<\varepsilon(x),\varepsilon\in C(X,\mathbb{R}^+)\}$

olmak üzere Önerme 3.2.2 den kolayca görüleceği üzere $B_f^*=\{B_A^*(f,\varepsilon):A\in\lambda,\ g\in C(X,Y)\}$ sınıfını $C(X,Y)$ üzerinde bir topoloji için bazdır. Bu B_f^* sınıfını $C(X,Y)$ üzerinde baz kabul topolojiye ince topoloji denir.

Tanım 3.2.3 $\lambda = \{X\}$ alınırsa $\mathscr{B}(f)$ sınıfını $C(X,Y)$ üzerinde baz kabul eden topolojiye düzgün yakınsaklık topolojisi denir ve bu uzay $C_u(X,Y)$ ile gösterilir.

Tanım 3.2.4 $\lambda = \{X\}$ alınırsa $\mathscr{B}^*(f)$ sınıfını $C(X,Y)$ üzerinde baz kabul eden topolojiye ince topoloji denir ve bu uzay $C_f(X,Y)$ ile gösterilir [24].

(Y,ρ) metrik uzayında ρ metriği sınırlı değilse ρ ve $\grave{\rho} = \min\{\rho, 1\}$ metrikleri Y üzerinde aynı topolojiyi üretirler (bkz. [42, Problem 206]). Ancak Y uzayındaki ρ metriğine göre $C(X,Y)$ üzerinde elde edilecek düzgün yakınsaklık topolojisi farklılık gösterebilir. Bunu bir örnekle gösterelim.

Örnek 3.2.5 $X = Y = \mathbb{R}$ ve Y üzerinde ρ_1 ve ρ_2 metriklerini aşağıdaki şekilde tanımlayalım;

$\rho_1(y_1, y_2) = \min\{1, |y_1 - y_2|\}$,

$\rho_2(y_1, y_2) = |\frac{y_1}{1+|y_1|} - \frac{y_2}{1+|y_2|}|$.

Bu iki metrik de Y üzerinde alışılmış topolojiyi üretir. Fakat $\bar{\rho}_1$ ve $\bar{\rho}_2$ metrikleri $C(X,Y)$ üzerinde aynı düzgün yakınsaklık topolojisini üretmez.

$$f_n(x) = \begin{cases} x & x \leq n \\ n & x > n \end{cases}$$

şekilde tanımlı $f_n : X \to Y$ fonksiyonlarını göz önüne alalım. $f : X \to Y$ özdeşlik (birim) fonksiyonu için $\bar{\rho}_1(f_n, f) = \sup_{x\in X} \rho_1(f_n(x), f(x)) = 1$ ve $\bar{\rho}_2(f_n, f) = \sup_{x\in X} \rho_2(f_n(x), f(x)) = 1/(1+n)$ olur. Yani $\{f_n\}$ dizisi $\bar{\rho}_2$ metriğine göre f fonksiyonuna yakınsarken $\bar{\rho}_1$ metriğine göre yakınsamaz. Dolayısıyla bu iki metrik $C(X,Y)$ üzerinde farklı düzgün yakınsaklık topolojisi üretir. □

Eğer buradaki Y metrik uzayı kompakt alınırsa, Y üzerinde ρ_1 ve ρ_2 metrikleri sınırlı ve denk olacaktır. Dolayısıyla kompakt metrik Y uzayındaki ρ metriğine göre $C(X,Y)$ üzerinde elde edilecek düzgün yakınsaklık topolojisi farklılık göstermez. Aşağıda bu durumun genel hali verilmiştir.

Teorem 3.2.6 Sözde kompakt X uzayı ve Y metrik uzayı için, $C(X,Y)$ üzerinde elde edilecek düzgün yakınsaklık topolojisi, Y uzayındaki ρ metriğinin seçiminden bağımsızdır [25, Teorem 1.5].

Sonuç 3.2.7 Sözde kompakt X uzayı ve Y metrik uzayı için, $C(X,Y)$ üzerinde elde edilecek ince topoloji, Y uzayındaki ρ metriğinin seçiminden bağımsızdır [25, Sonuç 1.2].

Burada verilen metriği norma indirgersek Tanım 3.2.1 aşağıdaki şekilde ifade edilir.

Tanım 3.2.8 $f \in C(X)$ ve $A \in \lambda$ için,

$\|f\|_A = \sup\{|f(x)| : x \in A\}$

yarı normunu tanımlayalım. Bu norma supremum normu denir. Bu yarı norm, supremum metriğini üretir. O halde $B_A(f,\varepsilon)$ kümesini

$B_A(f,\varepsilon) = \{g \in C(X) : \|f-g\|_A < \varepsilon\}$

şeklinde ifade edebiliriz. Burada dikkat edilirse $\bar{\rho}(f,g) = \|f-g\|_A$ dir.

Tanım 3.2.9 $\lambda = K(X)$ alınırsa $\mathscr{B}(f)$ sınıfını $C(X,Y)$ üzerinde baz kabul eden topolojiye $K(X)$ üzerinde düzgün yakınsaklık topolojisi denir ve bu uzay $C_{k,u}(X,Y)$ ile gösterilir.

Tanım 3.2.10 $\lambda = QK(X)$ alınırsa $\mathscr{B}(f)$ sınıfını $C(X,Y)$ üzerinde baz kabul eden topolojiye $QK(X)$ üzerinde düzgün yakınsaklık topolojisi denir ve bu uzay $C_{q,u}(X,Y)$ ile gösterilir.

Tanım 3.2.11 $\lambda = CK(X)$ alınırsa $\mathscr{B}(f)$ sınıfını $C(X,Y)$ üzerinde baz kabul eden topolojiye $CK(X)$ üzerinde düzgün yakınsaklık topolojisi denir ve bu uzay $C_{clp,u}(X,Y)$ ile gösterilir.

Bu düzgün topolojileri karşılaştırabiliriz.

Teorem 3.2.12 Herhangi X uzayı ve Y metrik uzayı için,

$C_{k,u}(X,Y) \leq C_{q,u}(X,Y) \leq C_{clp,u}(X,Y) \leq C_u(X,Y)$.

İspat: Tanım 3.2.1 ve $K(X) \subseteq QK(X) \subseteq CK(X) \subseteq P(X)$ sınıfları göz önüne alınırsa kolayca görülür. □

Teorem 3.2.13 Herhangi X uzayı ve Y metrik uzayı için, $C_u(X,Y)$ uzayı metriklenebilirdir [25, Sonuç 2.1].

3.3 Örtü Topolojiler

Tanım 3.3.1 Y uzayının herhangi bir açık örtüsü $\mathscr{O}$ olmak üzere,

$$O(f) = \{g \in C(X,Y) : \forall x \in X, \exists O \in \mathscr{O} \ni f(x), g(x) \in O\}$$

kümesini tanımlayalım.

Önerme 3.3.2 Y uzayının herhangi bir açık örtüsü $\mathscr{O}$ olmak üzere,

$$\mathscr{O}(f) = \{O(f) : O \in \mathscr{O}, f \in C(X,Y)\}$$

sınıfı $C(X,Y)$ üzerinde bir topoloji için alt bazdır.

İspat: $f_1, f_2 \in C(X,Y)$ için $\mathscr{O}(f)$ sınıfının $O(f_1)$ ve $O(f_2)$ kümelerini göz önüne alalım. $g \in O(f_1) \cap O(f_2)$ ise her $x \in X$ için $f_1(x), g(x) \in O_1$ ve $f_2(x), g(x) \in O_2$ olacak biçimde $O_1, O_2 \in \mathscr{O}$ vardır. $f(x) = g(x) \cap \{f_1(x) \cap f_2(x)\}$ için $f(x), g(x) \in O_1 \cap O_2$ olacağından $g \in O(f)$ dir. Buradan $O(f) \subset O(f_1) \cap O(f_2)$ olduğu kolayca görülür. O halde $\mathscr{O}(f)$ sınıfı $C(X,Y)$ üzerinde bir topoloji için alt bazdır. $\square$

$\mathscr{O}(f)$ sınıfını $C(X,Y)$ üzerinde alt baz kabul eden topolojiler genel olarak örtü topoloji olarak ifade edilir.

Tanım 3.3.3 $\mathscr{O}(f)$ sınıfını $C(X,Y)$ üzerinde alt baz kabul eden topolojiye açık örtü topolojisi denir ve bu uzay $C_\gamma(X,Y)$ ile gösterilir [26].

Tanım 3.3.4 Y uzayının herhangi bir tümleyeni sıfır örtüsü $\mathscr{O}$ olmak üzere, $\mathscr{O}(f)$ sınıfını $C(X,Y)$ üzerinde alt baz kabul eden topolojiye tümleyeni sıfır örtü topolojisi denir ve bu uzay $C_{q,\gamma}(X,Y)$ ile gösterilir.

Tanım 3.3.5 Y uzayının herhangi bir kapaçık örtüsü $\mathscr{O}$ olmak üzere, $\mathscr{O}(f)$ sınıfını $C(X,Y)$ üzerinde alt baz kabul eden topolojiye kapaçık örtü topolojisi denir ve bu uzay $C_{clp,\gamma}(X,Y)$ ile gösterilir.

Bu örtü topolojilerini karşılaştırabiliriz.

Teorem 3.3.6 Herhangi X ve Y uzaları için,

$C_{clp,\gamma}(X,Y) \leq C_{q,\gamma}(X,Y) \leq C_\gamma(X,Y).$

İspat: Tanım 2.1.2 de tanımladığımız kümelerin örtülerini alırsak bu örtüler açık örtü tarafından kapsanır. □

Teorem 3.3.7 Herhangi X uzayı ve Y metrik uzayı için,

$C_{q,\gamma}(X,Y) = C_\gamma(X,Y).$

İspat: Tamamen normal bir uzayda her açık küme, tümleyeni sıfır küme olduğundan Y metrik uzayında tümleyeni sıfır örtü ile açık örtü eşittir. □

Ancak Y metrik uzayında kapaçık örtü ile açık örtü eşit olmadığından $C_{clp,\gamma}(X,Y) \neq C_\gamma(X,Y)$ olur.

Teorem 3.3.8 Herhangi X uzayı ve Y sıfır boyutlu metrik uzayı için,

$C_{clp,\gamma}(X,Y) = C_{q,\gamma}(X,Y) = C_\gamma(X,Y).$

İspat: Sıfır boyutlu bir metrik uzayda kapaçık küme açık kümeye eşit olduğundan kapaçık örtü ile açık örtü eşitttir. □

3.4 Graf Topolojiler

Tanım 3.4.1 $f \in Y^X$ için $G(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ kümesine f fonksiyonunun grafı denir.

Tanım 3.4.2 $X \times Y$ uzayında herhangi açık U kümesi için,

$N(U) = \{f \in C(X,Y) : G(f) \subseteq U\}$

kümesini tanımlayalım.

Önerme 3.4.3 $\mathscr{N} = \{N(U) : U \in \tau(X \times Y)\}$ sınıfı $C(X,Y)$ üzerinde bir topoloji için bazdır.

İspat: $U_1, U_2 \in \tau(X \times Y)$ için $\mathscr{N}$ sınıfının $N(U_1)$ ve $N(U_2)$ kümelerini göz önüne alalım. $g \in N(U_1) \cap N(U_2)$ ise $G(g) \subseteq U_1$ ve $G(g) \subseteq U_2$ dir. Buradan her $x \in X$ için $(x, g(x)) \in U_1$ ve $(x, g(x)) \in U_2$ olduğundan $G(g) \subseteq U_1 \cap U_2$ elde edilir. Buradan $O(f) \subset O(f_1) \cap O(f_2)$ olduğu kolayca görülür. O halde $\mathscr{O}(f)$ sınıfı $C(X,Y)$ üzerinde bir topoloji için alt bazdır. □

$\mathscr{N}$ sınıfını $C(X,Y)$ üzerinde baz kabul eden topolojiler genel olarak graf topoloji olarak ifade edilir.

Tanım 3.4.4 $X \times Y$ uzayında herhangi açık U kümesi için $\mathscr{N}$ sınıfını $C(X,Y)$ üzerinde baz kabul eden topolojiye graf topoloji denir ve bu uzay $C_g(X,Y)$ ile gösterilir [31].

Tanım 3.4.5 $X \times Y$ uzayında herhangi tümleyeni sonlu U kümesi için $\mathscr{N}$ sınıfını $C(X,Y)$ üzerinde baz kabul eden topolojiye tümleyeni sonlu graf topoloji denir ve bu uzay $C_{q,g}(X,Y)$ ile gösterilir. Bu topolojiye aynı zamanda m-topoloji de denir [27].

Tanım 3.4.6 $X \times Y$ uzayında herhangi kapaçık U kümesi için $\mathscr{N}$ sınıfını $C(X,Y)$ üzerinde baz kabul eden topolojiye kapaçık graf topoloji denir ve bu uzay $C_{clp,g}(X,Y)$ ile gösterilir.

Bu graf topolojileri karşılaştırabiliriz.

Teorem 3.4.7 Herhangi X ve Y uzayları için,

$$C_{clp,g}(X,Y) \leq C_{q,g}(X,Y) \leq C_g(X,Y).$$

İspat: Tanım 2.1.2 de açıktır. □

Teorem 3.4.8 X tamamen normal uzay ve herhangi Y uzayı için,

$$C_{q,g}(X,Y) = C_g(X,Y).$$

İspat: Tamamen normal bir uzayda her açık küme tümleyeni sonlu küme olduğundan açıktır. □

Teorem 3.4.9 X sıfır boyutlu uzay ve herhangi Y uzayı için,

$$C_{clp,g}(X,Y) = C_{q,g}(X,Y) = C_g(X,Y).$$

İspat: Sıfır boyutlu bir uzayda kapaçık küme açık kümeye eşit olduğundan açıktır. □

4. BÖLÜM
TOPOLOJİLERİN KARŞILAŞTIRILMASI

Bu bölümde, bir önceki bölümde tanımlanan topolojilerin ayrıntılı karşılaştırılması incelendi.

4.1 Küme-açık Topolojiler ile Düzgün Topolojilerin Karşılaştırılması

Teorem 4.1.1 Herhangi X uzayı ve Y metrik uzayı için,

$C_q(X,Y) = C_{q,u}(X,Y)$.

İspat: $S(A,V)$, $C_q(X,Y)$ uzayında temel açık küme ve $f \in S(A,V)$ olsun. $f(A)$ yarı kompakt kümesi Y metrik uzayında kompakt ve $f(A) \subseteq V$ olduğundan $B_\rho(f(A),\varepsilon) \subseteq V$ olacak biçimde $\varepsilon > 0$ vardır (bkz. [32, Sonuç 4.1.14]). $g \in B_A(f,\varepsilon)$ ve $x \in A$ alırsak $g(x) \in B_\rho(f(x),\varepsilon)$ dir. O halde $g(A) \subseteq V$, yani $g \in S(A,V)$. Dolayısıyla $B_A(f,\varepsilon) \subseteq S(A,V)$ elde edilir. Buradan, $C_q(X,Y) \leq C_{q,u}(X,Y)$ olduğu görülür.
Tersine, $C_{\lambda,u}(X,Y)$ uzayında f noktasının açık bir komşuluğu $B_A(f,\varepsilon)$ olsun. $f(A)$ kompakt olduğundan $f(A) \subseteq \cup_{i=1}^{n} B_\rho(f(x_i),\frac{\varepsilon}{3})$ olacak biçimde $f(A)$ kümesinde $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ noktaları vardır. $V_i = B_\rho(f(x_i),\frac{\varepsilon}{3})$ ve $W_i = B_\rho(f(x_i),\frac{2\varepsilon}{3})$ alalım. Burada $\overline{V_i} \subseteq W_i$ dır. Ayrıca $f(A) \subseteq \cup_{i=1}^{n} V_i \subseteq \cup_{i=1}^{n} \overline{V_i}$ dır. $A_i = A \cap f^{-1}(\overline{V_i})$ alırsak $A_i \in QK(X)$ ve $A = \cup_{i=1}^{n} A_i$ olduğu kolayca görülür. Buradan $f(A_i) \subseteq \overline{V_i} \subseteq W_i$ ve $f \in \cap_{i=1}^{n} S(A_i,W_i)$ dır. Şimdi $\cap_{i=1}^{n} S(A_i,W_i) \subseteq B_A(f,\varepsilon)$ olduğunu gösterelim. $g \in \cap_{i=1}^{n} S(A_i,W_i)$ ve $x \in A$ olsun. O halde $x \in A_i$ olacak biçimde bir i vardır ve sonuç olarak $f(x) \in \overline{V_i}$ ve $g(x) \in W_i$ dir. $\rho(f(x),g(x)) \leq \rho(f(x),f(x_i)) + \rho(f(x_i),g(x)) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon$ olduğundan $g \in B_A(f,\varepsilon)$ dir. Buradan $C_{q,u}(X,Y) \leq C_q(X,Y)$ olduğu görülür. □

Sonuç 4.1.2 Herhangi X uzayı ve Y metrik uzayı için,

(a) $C_q(X,Y) = C_{q,u}(X,Y) \leq C_u(X,Y)$,

(b) $C_k(X,Y) \leq C_q(X,Y) \leq C_u(X,Y)$.

İspat: Teorem 4.1.1, Teorem 3.2.12 ve Teorem 3.1.11 den açıktır. □

Teorem 4.1.1 ve Tanım 3.2.8 dikkate alınırsa $B_A(f,\varepsilon) = \{g \in C(X) : \|f-g\|_A < \varepsilon\}$ olduğundan yarı kompakt-açık topoloji $\|.\|_A$ yarı normu tarafından üretilebilir. Ayrıca

$C_{q,u}(X,Y)$ uzayı düzgün uzay ve Y metrik uzayı için $C_q(X,Y) = C_{q,u}(X,Y)$ olduğundan yarı kompakt-açık topolojik uzayı bir düzgün uzaydır. O halde aşağıdaki önerme verilebilir.

Önerme 4.1.3 Herhangi X uzayı ve Y metrik uzayı için, $C_q(X,Y)$ Tychonoff uzaydır.

İspat: Teorem 4.1.1 den $C_q(X,Y)$ uzayı düzgün uzaydır. Herhangi düzgün uzay tam regüler (bkz. [32, Sonuç 8.1.13]) ve sonuç 5.1.16 dan $C_q(X,Y)$ uzayı Hausdorff olduğundan $C_q(X,Y)$ Tychonoff uzaydır. □

Teorem 4.1.4 Yarı kompakt X uzayı ve Y metrik uzayı için,

$C_q(X,Y) = C_u(X,Y)$.

İspat: X uzayı yarı kompakt olsun. Buradan her $f \in C(X,Y)$ ve $\varepsilon > 0$ için $B_X(f,\varepsilon)$ kümesi $C_{q,u}(X,Y) = C_q(X,Y)$ uzayında açık küme olduğu görülür. Yani $C_u(X,Y) \leq C_q(X,Y)$ olur. Teorem 3.2.12 den $C_{q,u}(X,Y) \leq C_u(X,Y)$ olduğundan $C_q(X,Y) = C_u(X,Y)$ elde edilir. □

Sonuç 4.1.5 Yarı kompakt X uzayı ve Y metrik uzayı için,

$QC_q(X,Y) = C_q(X,Y) = C_u(X,Y)$.

İspat: Yarı kompakt X uzayı için, Önerme 3.1.28 den $QC_q(X,Y) = C_q(X,Y)$ ve Teorem 4.1.4 den $C_q(X,Y) = C_u(X,Y)$ olduğunu biliyoruz. O halde $QC_q(X,Y) = C_q(X,Y) = C_u(X,Y)$ dir. □

Sonuç 4.1.6 X kompakt uzay ve Y metrik uzayı için,

$C_k(X,Y) = C_q(X,Y) = C_u(X,Y)$.

İspat: Her kompakt uzay yarı kompakt olduğundan Teorem 4.1.4 den açıktır. □

Sonuç 4.1.6 den farklı olarak Y uzayı metrik uzay olarak alınmasa da aşağıdaki teorem geçerlidir.

Teorem 4.1.7 X kompakt uzay ve herhangi Y uzayı için,

$C_k(X,Y) = C_q(X,Y)$.

İspat: X uzayı kompakt ve $C_q(X,Y)$ uzayında bir temel açık küme $S(A,V)$ olsun. Not 3.1.7 den A yarı kompakt alt kümesi kapalıdır. X uzayı kompakt olduğundan A yarı kompakt alt kümesi kompakttır. Dolayısıyla $S(A,V)$ kümesi $C_k(X,Y)$ uzayında açıktır. Bu ise $C_q(X,Y) \leq C_k(X,Y)$ olduğunu gösterir. Teorem 3.1.11 den $C_k(X,Y) \leq C_q(X,Y)$ olduğunu biliyoruz. O halde $C_k(X,Y) = C_q(X,Y)$ elde edilir. □

Teorem 4.1.8 X Lindelöf uzay ve herhangi Y uzayı için,

$C_k(X,Y) = C_q(X,Y)$.

İspat: X uzayı Lindelöf ve $C_q(X,Y)$ uzayında bir temel açık küme $S(A,V)$ olsun. Not 3.1.7 den A yarı kompakt alt kümesi kapalıdır. Lindelöf ve yarı kompakt bir uzay kompakttır. [43, Problem 5H] X uzayı Lindelöf olduğundan A yarı kompakt alt kümesi kompakttır. Dolayısıyla $S(A,V)$ kümesi $C_k(X,Y)$ uzayında açıktır. Buradan $C_k(X,Y) = C_q(X,Y)$ olduğu görülür. □

Sonuç 4.1.9 X ikinci sayılabilir uzay ve herhangi Y uzayı için,

$C_k(X,Y) = C_q(X,Y)$.

İspat: İkinci sayılabilir uzay Lindelöf olduğundan Teorem 4.1.8 den açıktır.

Teorem 4.1.10 Tam Hausdorff X uzayı için, $C_q(X) = C_u(X)$ dir ancak ve ancak X uzayı yarı kompakttır.

İspat: $C_q(X) = C_u(X)$ olsun. Teorem 4.1.1 den $C_q(X) = C_{q,u}(X)$ olduğunu biliyoruz. O halde $C_u(X) = C_{q,u}(X)$ elde edilir. $C_u(X)$ uzayında $B_X(f_0,1)$ açık kümesi için $B_A(f_0,\varepsilon) \subseteq B_X(f_0,1)$ olacak biçimde $\varepsilon > 0$ ve A yarı kompakt alt kümesi vardır. $x_0 \in X \backslash \overline{A}$ alalım. X tam Hausdorff olduğundan $g(x_0) = 1$ ve $g(\overline{A}) = \{0\}$ olacak biçimde $g : X \to [0,1]$ sürekli fonksiyonu vardır. Buradan $x \in A$ için $|g(x) - f_0(x)| = |0-0| = 0 < \varepsilon$ olduğundan $g \in B_A(f_0,\varepsilon)$ dır. Ancak $x_0 \in X$ için $|g(x_0) - f_0(x_0)| = |1-0| = 1 \not< 1$ olduğundan $g \notin B_X(f_0,1)$ dır. Dolayısıyla $B_A(f_0,\varepsilon) \nsubseteq B_X(f_0,1)$ olduğu görülür. Bu bir çelişki oluşturur. Bu yüzden $X \subseteq \overline{A}$ ve dolayısıyla X uzayı yarı kompakttır.

Tersi Teorem 4.1.4 den açıktır. □

Tanım 4.1.11 Herhangi $f \in C(X)$ ve $A \subseteq X$ için $f(A)$ kümesi $\mathbb{R}$ de kompakt ise A kümesine

$\mathbb{R}$-kompakt küme denir [44].

Teorem 4.1.12 Herhangi X uzayı ve Y metrik uzayı için, $C_{\lambda}(X,Y) = C_{\lambda,u}(X,Y)$ olsun. O halde λ sınıfı $\mathbb{R}$-kompakt kümelerden oluşur [44, Teorem 4.1].

Sonuç 4.1.13 Herhangi X uzayı ve Y metrik uzayı için,

$C_{clp}(X,Y) \neq C_{clp,u}(X,Y)$.

İspat: $A \in CK(X)$ ve $f \in C(X)$ için $f(A)$ kümesi $\mathbb{R}$ de clp-kompakttır. Ancak kompakt değildir. Dolayısıyla $\mathbb{R}$-kompakt değildir. Bu ise Teorem 4.1.12 den $C_{clp}(X,Y) \neq C_{clp,u}(X,Y)$ olduğunu gösterir.

Teorem 4.1.14 Herhangi X uzayı ve Y metrik uzayı için, $C_{\lambda^*}(X,Y) = C_{\lambda,u}(X,Y)$ olsun. O halde λ sınıfı sınırlı kümelerden oluşur [44, Teorem 4.5].

Sonuç 4.1.15 Herhangi X uzayı ve Y metrik uzayı için, $C_{clp^*}(X,Y) \neq C_{clp,u}(X,Y)$.

İspat: $A \in CK(X)$ ve $f \in C(X)$ için $\overline{f(A)}$ kümesi kümesi $\mathbb{R}$ de clp-kompakttır. Ancak $\mathbb{R}$ de sınırlı değildir. Bu ise Teorem 4.1.14 den $C_{clp}(X,Y) \neq C_{clp,u}(X,Y)$ olduğunu gösterir. □

Sonuç 4.1.13 ve Sonuç 4.1.15 den anlaşılacağı üzere $C_{clp}(X,Y)$ ve $C_{clp^*}(X,Y)$ uzayları ile $C_u(X,Y)$ uzayının kıyaslanması olası değildir. Bu kıyaslamaları yapabilmek için bu uzayları özele indirgemek gerekir. Aşağıdaki teorem bu özelleştirmelerden birini göstermektedir.

Teorem 4.1.16 Herhangi X uzayı ve sıfır boyutlu Y metrik uzayı için,

$C_{clp}(X,Y) = C_{clp^*}(X,Y) = C_{clp,u}(X,Y)$.

İspat: $C_{clp}(X,Y)$ uzayında $S(A,V)$ temel açık kümesi ve $f \in S(A,V)$ için $f(A)$ clp-kompakt kümesi (Y,ρ) sıfır boyutlu metrik uzayında kompak ve dolayısıyla kapalıdır. Buradan açıkça $C_{clp}(X,Y) = C_{clp^*}(X,Y)$ dir. $f(A)$ kompakt ve $f(A) \subseteq V$ olduğundan $B_{\rho}(f(A),\varepsilon) \subseteq V$ olacak biçimde $\varepsilon > 0$ vardır. $g \in B_A(f,\varepsilon)$ ve $x \in A$ alırsak $g(x) \in B_{\rho}(f(x),\varepsilon)$ dir. O halde $g(A) \subseteq V$, yani $g \in S(A,V)$. Dolayısıyla $B_A(f,\varepsilon) \subseteq S(A,V)$ elde edilir. Buradan $C_{clp}(X,Y) \leq C_{clp,u}(X,Y)$ olduğu görülür.

Tersine, $C_{clp,u}(X,Y)$ uzayında f noktasının açık bir komşuluğu $B_A(f,\varepsilon)$ olsun. $f(A)$

clp-kompakt kümesi (Y,ρ) sıfır boyutlu metrik uzayında kompakt olduğundan $f(A) \subseteq \cup_{i=1}^{n} B_\rho(f(x_i),\frac{\varepsilon}{3})$ olacak biçimde $f(A)$ kümesinde $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ noktaları vardır. $V_i = B_\rho(f(x_i),\frac{\varepsilon}{3})$ ve $W_i = B_\rho(f(x_i),\frac{2\varepsilon}{3})$ alalım. Açıkça $\overline{V_i} \subseteq W_i$ dır. Ayrıca $f(A) \subseteq \cup_{i=1}^{n} V_i \subseteq \cup_{i=1}^{n} \overline{V_i}$ dır. $A_i = A \cap f^{-1}(\overline{V_i})$ alırsak $A_i \in CK(X)$ ve $A = \cup_{i=1}^{n} A_i$ olduğu kolayca görülür. Buradan $f(A_i) \subseteq \overline{V_i} \subseteq W_i$ ve $f \in \cap_{i=1}^{n} S(A_i,W_i)$ dır. Şimdi $\cap_{i=1}^{n} S(A_i,W_i) \subseteq B_A(f,\varepsilon)$ olduğunu gö sterelim.$g \in \cap_{i=1}^{n} S(A_i,W_i)$ ve $x \in A$ olsun. O halde $x \in A_i$ olacak biçimde bir i vardır ve sonuç olarak $f(x) \in \overline{V_i}$ ve $g(x) \in W_i$ dir. $\rho(f(x),g(x)) \leq \rho(f(x),f(x_i)) + \rho(f(x_i),g(x)) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon$ olduğundan $g \in B_A(f,\varepsilon)$ dir. Buradan $C_{clp,u}(X,Y) \leq C_{clp}(X,Y)$ olduğu görülür. $\square$

Sonuç 4.1.17 Herhangi X uzayı ve sıfır boyutlu Y metrik uzayı için,

$$C_{clp}(X,Y) = C_{clp^*}(X,Y) = C_{clp,u}(X,Y) \leq C_u(X,Y).$$

Buradan anlaşılan Y uzayı sıfır boyutlu metrik uzay olarak alınınca $C_{clp}(X,Y)$ ve $C_{clp^*}(X,Y)$ uzayları ile $C_u(X,Y)$ uzayı kıyaslanabiliyor. Aşağıda başka bir özele indirgeme mevcuttur.

X den Y ye tanımlı tüm sürekli ve sınırlı fonksiyonların kümesini $C^*(X,Y)$ ile göstereceğiz. $C^*(X,Y)$ üzerinde küme-açık ve zayıf küme-açık topolojiler benzer şekilde tanımlanabilir. Bu $C^*(X,Y)$ üzerinde clp-kompakt açık ve zayıf clp-kompakt açık topolojiler ile uzayları sırasıyla $C^*_{clp}(X,Y)$ ve $C^*_{clp^*}(X,Y)$ ile göstereceğiz.

$C^*_{clp^*}(X)$ uzayı ile $C^*_u(X)$ uzayı karşılaştırılabilir.

Teorem 4.1.18 Herhangi X uzayı için,

$$C^*_{clp^*}(X) = C^*_{clp,u}(X).$$

İspat: $S^*(A,V)$, $C^*_{clp^*}(X)$ uzayında temel açık küme ve $f \in S^*(A,V)$ olsun. $\overline{f(A)}$ kompakt ve $\overline{f(A)} \subseteq V$ olduğundan $f(x) \in \overline{f(A)}$ için $[f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon] \subseteq C \subseteq V$ olacak biçimde $\mathbb{R}$ nin kapalı C alt kümesi ve $\varepsilon > 0$ vardır. $g \in B_A(f,\varepsilon)$ alırsak $\overline{g(A)} \subseteq C \subseteq V$ olur.Yani $g \in S^*(A,V)$. Dolayısıyla $B_A(f,\varepsilon) \subseteq S^*(A,V)$ elde edilir. Buradan $C^*_{clp^*}(X) \leq C_{clp,u}(X)$ olduğu görülür.

Tersine, $C^*_{clp,u}(X)$ uzayında f noktasının açık bir komşuluğu $B_A(f,\varepsilon)$ olsun. $\overline{f(A)}$ kompakt olduğundan $\overline{f(A)} \subseteq \cup_{i=1}^{n}(f(x_i)-\frac{\varepsilon}{3}, f(x_i)+\frac{\varepsilon}{3})$ yazılabilir. $V_i = (f(x_i)-\frac{\varepsilon}{3}, f(x_i)+\frac{\varepsilon}{3})$ ve $W_i = (f(x_i)-\frac{2\varepsilon}{3}, f(x_i)+\frac{2\varepsilon}{3})$ alalım. Açıkça $\overline{V_i} \subseteq W_i$ dır. Ayrıca $\overline{f(A)} \subseteq \cup_{i=1}^{n} V_i \subseteq \cup_{i=1}^{n} \overline{V_i}$ dır.

$A_i = A \cap f^{-1}(\overline{V_i})$ alırsak A_i clp-kompakt olduğu görülür. Buradan $\overline{f(A_i)} \subseteq \overline{V_i} \subseteq W_i$ ve $f \in \cap_{i=1}^{n} S^*(A_i, W_i)$ dır. Şimdi $\cap_{i=1}^{n} S^*(A_i, W_i) \subseteq B_A(f, \varepsilon)$ olduğunu gösterelim.$g \in \cap_{i=1}^{n} S^*(A_i, W_i)$ ve $x \in \cup_{i=1}^{n} A_i$ olsun. O halde $x \in A_i$ olacak biçimde bir i vardır ve sonuç olarak $f(x) \in \overline{V_i}$ ve $g(x) \in W_i$ dir. $|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon$ olduğundan $g \in B_A(f, \varepsilon)$ dir. Buradan $C_{clp,u}(X) \leq C^*_{clp^*}(X)$ olduğu görülür. □

Sonuç 4.1.19 Herhangi X uzayı için,

$$C^*_{clp^*}(X) = C^*_{clp,u}(X) \leq C^*_u(X).$$

Teorem 4.1.20 Tam regüler X uzayı için, $C^*_{clp^*}(X) = C^*_u(X)$ dir ancak ve ancak X clp-kompakttır.

İspat: $C^*_{clp^*}(X) = C^*_u(X)$ olsun. Teorem 4.1.18 den $C^*_{clp^*}(X) = C^*_{clp,u}(X)$ olduğunu biliyoruz. O halde $C^*_u(X) = C^*_{clp,u}(X)$ elde edilir. $C^*_u(X)$ uzayında $B_X(f_0, 1)$ açık kümesi için $B_A(f_0, \varepsilon) \subseteq B_X(f_0, 1)$ olacak biçimde $\varepsilon > 0$ ve A clp-kompakt alt kümesi vardır. $x \in X \backslash \overline{A}$ alalım. X tam regüler olduğundan $g(x) = 1$ ve $g(\overline{A}) = \{0\}$ olacak biçimde $g : X \to [0, 1]$ sürekli fonksiyonu vardır. Buradan $B_A(f_0, \varepsilon) \nsubseteq B_X(f_0, 1)$ olduğu görülür. Bu bir çelişki oluşturur. Bu yüzden $X \subseteq \overline{A}$ ve dolayısıyla X uzayı clp-kompakttır

X uzayı clp-kompakt olsun. Buradan her $f \in C(X)$ ve $\varepsilon > 0$ için $B_X(f, \varepsilon)$ kümesi $C^*_{clp^*}(X) = C^*_{clp,u}(X)$ uzayında açık küme olduğu görülür. Yani $C^*_u(X) \leq C^*_{clp^*}(X)$ olur. Sonuç 4.1.19 den $C^*_{clp,u}(X) \leq C^*_u(X)$ olduğundan $C^*_{clp^*}(X) = C^*_u(X)$ elde edilir. □

Sonuç 4.1.21 Sözde kompakt X uzayı için,

$$C_q(X) = C_{clp^*}(X) = C_{clp,u}(X) = C_u(X).$$

İspat: Sözde kompakt X uzayı için, $C(X) = C^*(X)$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca sözde kompakt uzay clp-kompakt olduğundan Teorem 4.1.20 den açıktır. □

Sonuç 4.1.22 Yarı kompakt X uzayı için,

$$C_q(X) = C_{clp^*}(X) = C_{clp,u}(X) = C_u(X).$$

İspat: Yarı kompakt uzay sözde kompakt olduğundan Sonuç 4.1.21 den açıktır. □

4.2 Düzgün Topolojiler ile Örtü ve Graf topolojilerin Karşılaştırılması

Teorem 4.2.1 Herhangi X uzayı ve Y metrik uzayı için,

$C_u(X,Y) \leq C_\gamma(X,Y)$.

İspat: $g \in B(f,\varepsilon)$ için $g \in O(f) \subseteq B(f,\varepsilon)$ olacak biçimde $C_\gamma(X,Y)$ uzayında $O(f)$ açık kümesi bulmalıyız. $g \in B(f,\varepsilon)$ ise $\sup_{x\in X} \rho(f(x),g(x)) < \varepsilon$ olur. Buradan $g(x) \in B_\rho(f(x),\varepsilon)$ elde edilir. Her $x \in X$ için $O_x = B_\rho(f(x),\varepsilon)$ kümesi Y metrik uzayında açık ve $f(x),g(x) \in O_x$ olduğundan $g \in O(f)$ dir. Şimdi $O(f) \subseteq B(f,\varepsilon)$ olduğunu gösterelim. $h \in O(f)$ alalım. O halde her $x \in X$ için $f(x),h(x) \in O$ olacak biçimde $O \in \mathcal{O}$ vardır. (Y,ρ) metrik uzayında O açık kümesini $\frac{\varepsilon}{2}$ yarı çaplı bir yuvar olarak alırsak $\rho(f(x),h(x)) < \varepsilon$ olur. Dolayısıyla $h \in B(f,\varepsilon)$ dir. □

Sonuç 4.2.2 Herhangi X uzayı ve Y metrik uzayı için,

$C_q(X,Y) \leq C_\gamma(X,Y)$.

Sonuç 4.2.3 Herhangi X uzayı ve Y metrik uzayı için, $C_\gamma(X,Y)$ Hausdorff uzaydır.

Teorem 4.2.4 Herhangi X ve Tychonoff Y uzayları için,

$C_q(X,Y) \leq C_{q,g}(X,Y)$.

İspat: $f \in S(A,V)$ için $f \in N(C) \subseteq S(A,V)$ olacak biçimde $C \subseteq X \times Y$ tümleyeni sıfır kümesi ve $C_{q,g}(X,Y)$ uzayında $N(C)$ açık kümesi bulmalıyız. $f \in S(A,V)$ ise $f(A) \subseteq V$ yazılır. Y uzayı Tychonoff olduğundan $g(f(A)) = 0$ ve $g(V^c) = 1$ olacak biçimde $g : Y \to [0,1]$ sürekli fonksiyonu vardır. Burada $\widetilde{Z_1} = (g \circ f)^{-1}(0)$ kümesi X uzayında sıfır kümedir. Ayrıca $h : Y \to [0,1]$, $h(y) = 1 - g(y)$ fonksiyonunu tanımlayalım. g fonksiyonunun tanımı gereği h sürekli fonksiyondur. Burada $\widetilde{Z_2} = h^{-1}(0)$ kümesi Y uzayında sıfır kümedir. O halde $Z_1 = \widetilde{Z_1} \times Y$ ve $Z_2 = X \times \widetilde{Z_2}$ kümeleri $X \times Y$ uzayında sıfır kümelerdir. O halde $Z = Z_1 \cap Z_2$ kümesi $X \times Y$ uzayında sıfır kümelerdir. Buradan $C = Z^c$ kümesi $X \times Y$ uzayında tümleyeni sıfır kümedir.

$x \in X$ için $(x, f(x)) \in C$ olduğunu gösterelim. $(x, f(x) \notin C$ ise $(x, f(x) \in Z_1 \cap Z_2$ dir. O halde $(x, f(x) \in Z_1$ ve $(x, f(x) \in Z_1 \cap Z_2$ dir. Buradan $x \in \widetilde{Z_1}$ ve $f(x) \in \widetilde{Z_2}$ olduğu görülür. $x \in \widetilde{Z_1}$ için $(g \circ f)(x) = 0$ dır. Yine $f(x) \in \widetilde{Z_2}$ için $h(f(x)) = 0$ ve dolayısıyla $g(f(x)) = 1$ olur. Bu ise

$(g \circ f)(x) = 0$ olması ile çelişir. Bu yüzden $(x, f(x)) \in C$ dir. $G(f) \subseteq C$ olacağından $f \in N(C)$ dir.

Son olarak, $N(C) \subseteq S(A,V)$ olduğunu gösterelim. $g(f(A)) = 0$ ve $\widetilde{Z_1} = (g \circ f)^{-1}(0)$ olduğundan $A \subseteq \widetilde{Z_1}$ dir. Benzer şekilde $g(V^c) = 1$ ve $\widetilde{Z_2} = h^{-1}(0)$ olduğundan $V^c \subseteq \widetilde{Z_2}$ dir. Denk olarak $(\widetilde{Z_2})^c \subseteq V$ yazılabilir. $\phi \in N(C)$ ve $x \in A$ alalım. O halde $(x, \phi(x)) \in C = (Z_1 \cap Z_2)^c = Z_1^c \cup {Z_2}^c$ dir. Buradan $(x, \phi(x)) \in Z_1^c$ veya $(x, \phi(x)) \in Z_2^c$ dir. $(x, \phi(x)) \in Z_1^c = (\widetilde{Z_1} \times Y)^c$ ise $x \notin \widetilde{Z_1}$ elde edilir. Ancak $A \subseteq \widetilde{Z_1}$ olduğundan bu bir çelişkidir. O halde $(x, \phi(x)) \in Z_2^c = (X \times \widetilde{Z_2})^c$ dir. Buradan $\phi(x) \in (\widetilde{Z_2})^c$ ve $(\widetilde{Z_2})^c \subseteq V$ olduğundan $\phi(x) \in V$ dır. $x \in A$ aldığımızdan $\phi \in S(A,V)$ elde edilir. $\square$

Sonuç 4.2.5 Herhangi X uzayı ve Y metrik uzayı için,

$$C_q(X,Y) = C_{q,u}(X,Y) \leq C_{q,g}(X,Y) \leq C_g(X,Y).$$

Teorem 4.2.6 Herhangi X ve Y uzayları için,

$$C_{q,\gamma}(X,Y) \leq C_{q,g}(X,Y).$$

İspat: $g \in O(f)$ için $g \in N(U) \subseteq O(f)$ olacak biçimde $C_g(X,Y)$ uzayında $N(U)$ açık kümesi bulmalıyız. $g \in O(f)$ ise her $x \in X$ için $f(x), g(x) \in O_x$ olacak biçimde $O_x \in O$ vardır. f ve g sürekli olduğundan $x \in H_x$ açık kümesi varıdır. $U_x = H_x \times O_x$ olmak üzere her $x \in X$ için $(x, g(x)) \in U_x$ ve $U = \cup_{x \in X} U_x$ için $G(g) \subseteq U$ olur. Dolayısıyla $g \in N(U)$ dur. Şimdi $N(U) \subseteq O(f)$ olduğunu gösterelim. $h \in N(U)$ alalım. O halde $G(h) \subseteq U$ dir. Buradan herhangi $x_0 \in X$ için $(x_0, h(x_0)) \in U_{x_0}$ olur. Dolayısıyla $h(x_0) \in O_{x_0}$ dir. $x_0 \in H_{x_0}$ olduğundan $f(x_0) \in O_{x_0}$ dir. O halde $h \in O(f)$ dir. $\square$

Sonuç 4.2.7 Herhangi X uzayı ve Y metrik uzayı için,

$$C_u(X,Y) \leq C_\gamma(X,Y) \leq C_g(X,Y).$$

Sonuç 4.2.8 Tamamen normal yarı kompakt X uzayı için,

$$C_q(X) = C_u(X) = C_\gamma(X) = C_g(X).$$

İspat: Yarı kompakt X uzayı için Teorem 4.1.4 den $C_q(X) = C_u(X)$ ve tamamen normal sözde kompakt uzay sayılabilir kompakt olduğundan [27] den $C_u(X) = C_g(X)$ dir. Her yarı kompakt uzay sözde kompakt olduğundan $C_q(X) = C_u(X) = C_g(X)$ olduğu görülür. □

Sonuç 4.2.9 Kompakt X uzayı için,

$$C_q(X) = C_u(X) = C_\gamma(X) = C_g(X).$$

İspat: Tamamen normal yarı kompakt uzay kompakt olduğundan Sonuç 4.2.8 den açıktır. □

Sonuç 4.2.10 Herhangi X uzayı ve Y metrik uzayı için, $C_g(X,Y)$ Hausdorff uzaydır.

5. BÖLÜM

FONKSİYON UZAYLARINDA TOPOLOJİK SONUÇLAR

5.1 Metriklenebilme Özellikleri

Bu bölümde üçüncü bölümde tanımladığımız topolojilerin altmetriklenebilme, metriklenebilme ve tam metriklenebilme özellikler incelendi.

Öncesinde kullanacağımız bazı fonksiyon yapılarını inceleyelim.

Tanım 5.1.1 X, Y ve Z üç topolojik uzay olsun. Her $f \in C(X,Y)$ ve $g \in C(Y,Z)$ fonksiyonları için, $\Phi : C(X,Y) \times C(Y,Z) \to C(X,Z), \Phi(f,g) = g \circ f$ fonksiyonuna f ve g fonksiyonlarının bileşke fonksiyonu denir.

Bileşke fonksiyonunun tanım kümesinin bileşenlerinin biri sabit bırakılarak elde edilen fonksiyonlar, fonksiyon uzaylarında çok kullanışlıdır. Aşağıda bu fonksiyonların tanımları verildi.

Tanım 5.1.2 X, Y ve Z üç topolojik uzay olsun. $f \in C(X,Y)$ ve $g \in C(Y,Z)$ alalım. $f^* : C(Y,Z) \to C(X,Z), f^*(g) = \Phi(f,g) = g \circ f$ fonksiyonuna f tarafından üretilen fonksiyon denir. Yine benzer şekilde, $g_* : C(X,Y) \to C(X,Z), g_*(f) = \Phi(f,g) = g \circ f$ fonksiyonuna g tarafından üretilen fonksiyon denir.

Tanım 5.1.3 Herhangi X kümesi ve Y topolojik uzayı için $f(X)$ kümesi Y uzayında yoğun ise $f : X \to Y$ fonksiyonuna hemen hemen örten fonksiyon denir.

Teorem 5.1.4 $f \in C(X,Y)$ alalım.

(a) $f^* : C(Y) \to C(X)$ fonksiyonu bire-birdir ancak ve ancak f fonksiyonu hemen hemen örtendir [23, Teorem 2.2.6].

(b) $f^* : C_q(Y) \to C_q(X)$ fonksiyonu süreklidir.

(c) $f^* : C^*_{clp^*}(Y) \to C^*_{clp^*}(X)$ fonksiyonu süreklidir.

(d) Y tamamen normal uzay olmak üzere f fonksiyonu bire-bir ise $f^* : C_q(Y) \to C_q(X)$ fonksiyonu hemen hemen örtendir.

İspat: **(b)** $A \in QK(X)$ ve $\mathbb{R}$ de açık V kümesi için $(f^*)^{-1}(S(A,V)) = \{g \in C_q(Y) : f^*(g) \in S(A,V)\} = \{g \in C_q(Y) : g(f(A)) \subset V\} = S(f(A),V)$ yazılabilir. $S(f(A),V)$, $C_q(Y)$ uzayında açık olduğundan f^* süreklidir.

(c) $g \in C^*_{clp^*}(Y)$ alalım. $C^*_{clp^*}(X)$ uzayında $f^*(g)$ nin $B_A(f^*(g),\varepsilon)$ açık komşuluğu için $f^*(B_{f(A)}(g,\varepsilon)) \subseteq B_A(f^*(g),\varepsilon)$ olduğundan f^* fonksiyonu süreklidir.

(d) $C_q(X)$ uzayında h noktasını içeren bir açık küme $S = \cap_{i=1}^n S(A_i,V_i)$ olsun. $A = \cup_{i=1}^n A_i$ ve $B = f(A)$ alalım. f bire-bir olduğundan $f|_A : A \to B$ bir homeomorfizmdir. Yarı kompakt B kümesi tamamen normal Y uzayında kompakt ve dolayısıyla kapalıdır. O zaman [32, Teorem 2.1.8] den $h \circ (f|_A)^{-1} : B \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $g \in C_q(Y)$ genişlemesine sahiptir. Her $x \in A$ için $f^*(g)(x) = g(f(x)) = h(x)$ olacağından $f^*(g) \in S$ dir. Dolayısıyla $f^*(C_q(Y))$, $C_q(X)$ uzayında yoğundur. Sonuç olarak f^* fonksiyonu hemen hemen örtendir. □

Teorem 5.1.5 $f : X \to Y$ clp-örtü fonksiyonudur ancak ve ancak $f^* : C_{clp^*}(Y) \to C_{clp^*}(X)$ fonksiyonu bir gömmedir.

Teorem 5.1.6 $\{X_i : i \in I\}$ uzaylarının topolojik toplamı $X = \oplus\{X_i : i \in I\}$ olmak üzere her $i \in I$ ve $f \in C_{clp^*}(X)$ için $s : C_{clp^*}(X) \to \prod\{C_{clp^*}(X_i) : i \in I\}, s(f)(i) = f|_{X_i}$ fonksiyonu bir homeomorfizmdir.

İspat: Her $i \in I$ ve $f \in C_{clp^*}(X)$ için $r_i : C_{clp^*}(X) \to C_{clp^*}(X_i), r_i(f) = f|_{X_i}$ fonksiyonu süreklidir. Çünkü $f : \oplus X_i \to \mathbb{R}$ fonksiyonu süreklidir ancak ve ancak $f|_{X_i} : X_i \to \mathbb{R}$ fonksiyonu süreklidir. Buradan $s(f)(i) = r_i(f) = f|_{X_i}$ olduğu görülür. $p_i : \prod C_{clp^*}(X_i) \to C_{clp^*}(X_i)$ izdüşüm fonksiyonu sürekli olduğundan her $i \in I$ için $p_i \circ s = r_i$ yazılır ve dolayısıyla s fonksiyonu süreklidir. $f \neq g$ olacak biçimde $f,g \in C_{clp^*}(X)$ alalım. O halde en az bir $x \in X$ için $f(x) \neq g(x)$ dir. Buradan en az bir $i \in I$ için $x \in X_i$ olacağından $f|_{X_i} \neq g|_{X_i}$ ve bu yüzden $s(f)(i) \neq s(g)(i)$ dir. Bu ise s fonksiyonunun bire-bir olduğunu gösterir. Herhangi $g \in \prod\{C_{clp^*}(X_i) : i \in I\}$ alalım. $x \in X$ için $x \in X_i$ olacak biçimde en az bir $i \in I$ vardır. Buradan $f(x) = g(i)(x)$ için $s(f) = g$ ve f fonksiyonu sürekli olacağından s fonksiyonu örtendir. $C_{clp^*}(X)$ uzayında temel açık kümeleri $S^*(A,V)_\oplus = \{f \in C(\oplus X_i) : f(A) \subseteq V\}$ ve $C_{clp^*}(X_i)$ uzayında temel açık kümesleri ise $S^*(A,V)_i = \{f \in C(X_i) : f(A) \subseteq V\}$ ile gösterelim. $s = p_i^{-1} \circ r_i$ olduğundan $C_{clp^*}(X)$ uzayında $S^*(A,V)_\oplus$ temel açık kümesi için $s(S^*(A,V)_\oplus) = p_i^{-1}(S^*(r_i(A),V)_i)$ yazılır. Bu ise

s fonksiyonunun açık olduğunu gösterir. Sonuç olarak s fonksiyonu bir homeomorfizmdir. $\square$

Teorem 5.1.7 $\{X_i : i \in I\}$ uzaylarının topolojik toplamı $X = \oplus\{X_i : i \in I\}$ olmak üzere her $i \in I$ ve $f \in C_q(X)$ için $s : C_q(X) \to \prod\{C_q(X_i) : i \in I\}, s(f)(i) = f|_{X_i}$ fonksiyonu bir homeomorfizmdir.

İspat: Teorem 5.1.6 nın ispatına benzer olarak yapılabilir. $\square$

5.1.1 $C_q(X)$ uzayının metriklenebilme özellikleri

Tanım 5.1.8 $X = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ olacak biçimde X uzayının yarı kompakt alt kümelerinin bir $\{A_n\}$ dizisi varsa X uzayına σ-yarı kompakt *uzay* denir.

Teorem 5.1.9 Tam Hausdorff X uzayı için aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) $C_q(X)$ uzayı altmetriklenebilirdir.

(2) $C_q(X)$ uzayının her yarı kompakt alt kümesi G_δ-kümedir.

(3) $C_q(X)$ uzayının her kompakt alt kümesi G_δ-kümedir.

(4) $C_q(X)$ uzayı bir E_0-uzaydır.

(5) X uzayı σ-yarı kompakttır.

(6) $C_q(X)$ uzayı sıfır-küme-köşegene sahiptir.

(7) $C_q(X)$ uzayı G_δ-köşegene sahiptir.

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) $C_q(X)$ uzayı altmetriklenebilir ise Önerme 2.1.35 den her yarı kompakt alt kümesi G_δ-kümedir.

(2) $\Rightarrow$ (3) Her kompakt küme yarı kompakt olduğundan (1) $\Rightarrow$ (2) gerektirmesinden görülür.

(3) $\Rightarrow$ (4) Her tek nokta kümesi kompakt ve $C_q(X)$ uzayının her kompakt alt kümesi G_δ-küme olduğundan her tek nokta kümesi G_δ-kümedir. O halde $C_q(X)$ uzayı bir E_0-uzaydır.

(4) $\Rightarrow$ (5) $C_q(X)$ uzayı bir E_0-uzayı ise f_0 sabit sıfır fonksiyonu G_δ-kümedir. $\cap_{n=1}^{\infty} B_{A_n}(f_0, \varepsilon_n) = \{f_0\}$ olsun. $X = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ olduğunu göstermek istiyoruz. Kabul edelim

ki $x_0 \in X \setminus \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ olsun. O zaman her $x \in \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ için $f_1(x) = 0$ ve $f_1(x_0) = 1$ olacak biçimde $f_1 : X \to [0,1]$ sürekli fonksiyonu vardır. Her $x \in A_n$ için $f_1(x) = 0$ olduğundan $f_1 \in B_{A_n}(f_0, \varepsilon_n)$ dir ve bu yüzden $f_1 \in \cap_{n=1}^{\infty} B_{A_n}(f_0, \varepsilon_n) = \{f_0\}$ elde edilir. Yani f_1 sabit sıfır fonksiyonudur. Acak $f_1(x_0) = 1$ olduğunu biliyoruz. Buradan bir gelişki elde edilir. Dolayısıyla X uzayı σ-yarı kompakttır.

(5) $\Rightarrow$ (1) $X = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ olsun. Yarı kompakt kümelerinin topolojik toplamı $S = \oplus\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ ve $\phi : S \to X$ sürekli fonksiyonunu göz önüne alalım. ϕ fonksiyonunun üretilen fonksiyonu $\phi^* : C_q(X) \to C_q(S)$ süreklidir. Önce ϕ^* bire-bir olduğunu göstermeliyiz. $\phi^*(g_1) = \phi^*(g_2)$ alırsak $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ üzerinde g_1 ve g_2 fonksiyonları için $g_1 - g_2 \in \cap_{n=1}^{\infty} B_{A_n}(f_0, \varepsilon_n) = \{f_0\}$ elde edilir. Bu yüzden $g_1 = g_2$ ve buradan da ϕ^* fonksiyonunun bire-bir olduğu görülür. Teorem 5.1.7 den $C_q(\oplus\{A_n : n \in \mathbb{N}\})$ ile $\prod\{C_q(A_n) : n \in \mathbb{N}\}$ uzaylarının homeomorf ve Teorem 4.1.10 den $C_q(A_n)$ uzayının metriklenebilir olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $C_q(S)$ metriklenebilir ve ϕ^* bire-bir sürekli olduğundan $C_q(X)$ uzayı altmetriklenebilirdir.

(1) $\Rightarrow$ (6) $\Rightarrow$ (7) Gerektirmeleri Önerme 2.1.32 den açıktır.

(7) $\Rightarrow$ (4) Gerektirmesi Önerme 2.1.34 den açıktır. $\square$

Sonuç 5.1.10 X uzayı σ-yarı kompakt olsun. O halde $C_q(X)$ uzayının kompakt ve yarı kompakt alt kümeleri denktir.

İspat: X uzayı σ-yarı kompakt ise Teorem 5.1.9 den $C_q(X)$ uzayı altmetriklenebilirdir. Önerme 2.1.36 göz önüne alınırsa $C_q(X)$ uzayının kompakt ve yarı kompakt alt kümelerinin denk olduğu görülür. $\square$

$C_u(X)$ uzayının metriklenebilir olduğunu biliyoruz. O halde Teorem 4.1.10 dan yarı kompakt X uzayı için $C_q(X) = C_u(X)$ olacağından $C_q(X)$ uzayı metriklenebilirdir. Buradaki X uzayının yarı kompakt olması güçlü bir şarttır. Aşığıdaki teoremde daha zayıf şartlarla $C_q(X)$ uzayının metriklenebildiği görülmektedir.

Tanım 5.1.11 X uzayının herhangi yarı kompakt A alt kümesi için $A \subseteq A_n$ olacak biçimde X uzayının yarı kompakt alt kümelerinin bir $\{A_n\}$ dizisi varsa X uzayına hemiyarı kompakt uzay denir.

Teorem 5.1.12 Tam Hausdorff X uzayı için aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) $C_q(X)$ uzayı metriklenebilirdir.

(2) $C_q(X)$ uzayı birinci sayılabilirdir.

(3) $C_q(X)$ uzayı bir q-uzaydır.

(4) X uzayı hemiyarı kompakttır.

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) Herhangi bir metrik uzay birinci sayılabilir olduğundan kolayca görülür.

(2) $\Rightarrow$ (3) Birinci sayılabilir uzay q-uzay [45, s. 26] olduğundan kolayca görülür.

(3) $\Rightarrow$ (4) $C_q(X)$ uzayı bir q-uzay olsun. O halde her n için $g_n \in U_n$ ise $\{g_n : n \in \mathbb{N}\}$ sınıfı $C_q(X)$ uzayında bir yığılma noktasına sahip olacak biçimde $C_q(X)$ uzayında f_0 sabit sıfır fonksiyonunun açık komşuluklarının $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ sınıfı vardır. O zaman $f_0 \in B_{A_n}(f_0, \varepsilon_n) \subseteq U_n$ olacak biçimde her n için X uzayının yarı kompakt A_n alt kümesi ve $\varepsilon_n > 0$ mevcuttur. X uzayının herhangi yarı kompakt A alt kümesini alalım. A kümesi A_n kümesinin alt kümesi olmasın. O halde $a_n \in A \backslash A_n$ vardır. Buradan her $n \in \mathbb{N}$ için $g_n(a_n) = n$ ve $g_n(A_n) = \{0\}$ olacak biçimde $g_n : X \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu vardır. Açıkça görülür ki $g_n \in B_{A_n}(f_0, \varepsilon_n)$ dir. Ancak $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $C_q(X)$ uzayında bir yığılma noktasına sahip değildir. Eğer bu dizini bir g yığılma noktası olduğunu kabul edersek her $k \in \mathbb{N}$ için $g_{n_k} \in B_A(g, 1)$ olacak biçimde $n_k > k$ pozitif tam sayısı vardır. Bu yüzden her $k \in \mathbb{N}$ için $g(a_{n_k}) > g_{n_k}(a_{n_k}) - 1 = n_k - 1 \geq k$ dır. Bu ise g fonksiyonun yarı kompakt A kümesi üzerinde sınırlı olmadığını gösterir. O halde $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $C_q(X)$ uzayında bir yığılma noktasına sahip değildir. Bu durum $C_q(X)$ uzayının bir q-uzay olmasıyla çelişir. Dolayısıyla $A \subseteq A_n$ olmalıdır. Yani X uzayı hemiyarı kompakttır.

(4) $\Rightarrow$ (1) X uzayı hemiyarı kompakt olsun. O halde X uzayındaki her yarı kompakt A kümesi için $A \subseteq A_n$ olacak biçimde bir yarı kompakt A_n kümesi vardır. Buradan $\{\|.\|_A : A \in CK(X)\}$ yarı normların sınıfı tarafından üretilen topoloji, $\{\|.\|_{A_n} : n \in \mathbb{N}\}$ yarı normların sayılabilir sınıfı tarafından üretilen topolojiden kabadır ve bu topolojiler yerel konveks Hausdorff topolojilerdir [48, Örnek 2, s. 109]. Ayrıca biz biliyoruz ki yarı normlarının sayılabilir sınıfı tarafından üretilen yerel konveks Hausdorff topoloji metriklenebilirdir [48, Problem 4, s. 119]. Dolayısıyla $C_q(X)$ uzayı metriklenebilirdir. $\square$

Teorem 5.1.13 Tam regüler X uzayı için, $C_q(X)$ uzayı tamdır ancak ve ancak X uzayı bir q_f-uzaydır.

İspat: $C_q(X)$ uzayı tam ve $f : X \to \mathbb{R}$, q-sürekli fonksiyon olsun. O halde X uzayının her yarı kompakt A alt kümesi için $f|_A$ kısıtlama fonksiyonu süreklidir. $f_A = f|_A$ olacak biçimde (f_A) dizisini göz önüne alalım. $\|f_A\|_A = \sup_{x\in A}|f_A(x)|$ ve $f_A(A)$ kümesi $\mathbb{R}$ de sınırlı olduğundan f_A sınırlıdır. [41, Teorem 1, s. 267] den f_A nin $\overline{f}_A : X \longrightarrow \mathbb{R}$ genişleme fonksiyonu süreklidir. Burada $x \in A$ için $\overline{f}_A(x) = f_A(x)$ ve $\|f_A\|_A \leq \left\|\overline{f}_A\right\|_X$ dir. (f_A) dizisi sınırlı, $C_q(X)$ uzayı tam olduğundan (f_A) dizisini bir Cauchy dizisi ve $f_A \to f$ olacak biçimde $f \in C(X)$ vardır. Dolayısıyla X uzayı bir q_f-uzaydır.

Tersine X uzayı bir q_f-uzay ve (f_i), $C_q(X)$ uzayında bir Cauchy dizisi olsun. $C_u(X)$ uzayı tam olduğundan her $x \in X$ için $f_i(x) \to f(x)$ olacak biçimde $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır. Buradan her $A \in QK(X)$ için $\|f_i - f\|_A \to 0$ dir. Her $n \geq 1$ için $\|f_{i_n} - f\|_A < \frac{1}{2^n}$. Her $x \in A$ için,

$$\begin{aligned}
|f_{i_{n+1}}(x) - f_{i_n}(x)| &\leq |f_{i_{n+1}}(x) - f(x)| + |f_{i_n}(x) - f(x)| \\
&\leq \left\|f_{i_{n+1}} - f\right\|_A + \|f_{i_n} - f\|_A \\
&\leq \tfrac{1}{2^{n+1}} + \tfrac{1}{2^n} < \tfrac{1}{2^{n-1}}.
\end{aligned}$$

O halde $\left\|f_{i_{n+1}} - f_{i_n}\right\|_A < \frac{1}{2^{n-1}}$ dır. $c_1 = \|f_{i_1}\|_A$ ve $c_{n+1} = \left\|f_{i_{n+1}} - f_{i_n}\right\|_A$ alalım. $x \in X$ için

$$g_1(x) = \begin{cases} c_1 & f_{i_1}(x) > c_1 \\ f_{i_1}(x) & -c_1 \leq f_{i_1}(x) \leq c_1 \\ -c_1 & f_{i_1}(x) < -c_1 \end{cases}$$

ve

$$g_{n+1}(x) = \begin{cases} c_{n+1} & f_{i_{n+1}}(x) - f_{i_n}(x) > c_{n+1} \\ f_{i_1}(x) & -c_{n+1} \leq f_{i_{n+1}}(x) - f_{i_n}(x) \leq c_{n+1} \\ -c_{n+1} & f_{i_{n+1}}(x) - f_{i_n}(x) \leq -c_{n+1} \end{cases}$$

fonksiyonlarını tanımlayalım. $\sup\{|g_1(x)| : x \in X\} \leq c_1$ ve $\sup\{|g_{n+1}(x)| : x \in X\} \leq c_{n+1} < \frac{1}{2^{n-1}}$ olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ serisi reel değerli g fonksiyonuna yakınsar. Her g_n fonksiyonu sürekli olduğundan $g \in C(X)$ dir. $x \in A$ için $g_1(x) = f_{i_1}(x)$ ve $g_{n+1}(x) = f_{i_{n+1}}(x) - f_{i_n}(x)$ olduğundan $x \in A$ için $f(x) = g(x)$ dir. Bu ise f fonksiyonunun q-sürekli olduğunu gösterir. X uzayı bir q_f-uzay ve f fonksiyonu sürekli olduğundan her $A \in QK(X)$ için

$\|f_i - f\|_A \to 0$ ve bu yüzden $C_q(X)$ uzayı tamdır. $\square$

Teorem 5.1.14 Herhangi X uzayı için, $QC_q(X)$ uzayı tamdır.

İspat: $\{f_n\}$, $QC_q(X)$ uzayında bir Cauchy dizisi olsun. Buradan X uzayının her yarı kompakt A alt kümesi için $\{f_n|_A\}$, $QC_q(A) = C_q(A)$ uzayında bir Cauchy dizisidir. Teorem 5.1.13 den $C_q(A)$ uzayı tam olduğundan $f_n|_A \to f_A$ olacak biçimde $f_A \in C_q(A)$ vardır. $x \in A$ için $f : X \to \mathbb{R}, f(x) = f_A(x)$ fonksiyonunu tanımlayalım. Buradan X uzayının her yarı kompakt A alt kümesi için $f|_A = f_A$ olduğu görülür. O halde $f \in QC_q(X)$ dır. Ayrıca $f_n \to f$ dir. $\square$

Sonuç 5.1.15 Herhangi X uzayı için, $QC_q(X)$ uzayının tam metriklenebilir olası için gerek ve yeter şart metriklenebilir olmasıdır.

İspat: Teorem 5.1.14 den $QC_q(X)$ uzayı tamdır. O halde $QC_q(X)$ uzayının tam metriklenebilir olması metriklenebilir olmasına denktir.

Bu sonuçtan aşağıdaki teoremi verme gerekliliği doğuyor. $QC_q(X)$ uzayını metriklenebilir yapan şartlara bazı ekler yaparak $C_q(X)$ uzayının tam metriklenebilir olmasını sağlarız.

Teorem 5.1.16 Tam regüler X uzayı için aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) $QC_q(X)$ uzayı tam metriklenebilirdir.

(2) $QC_q(X)$ uzayı metriklenebilirdir.

(3) $QC_q(X)$ uzayı birinci sayılabilirdir.

(4) $C_q(X)$ uzayı metriklenebilirdir.

(5) X uzayı hemiyarı kompakttır.

İspat: $(1) \Rightarrow (2)$ Tam metriklenebilir uzay metriklenebilir olduğundan açıktır.

$(2) \Rightarrow (3)$ Metriklenebilir uzay birinci sayılabilir olduğundan açıktır.

$(3) \Rightarrow (5)$ Tam regüler uzay, tam Hausdorff ve birinci sayılabilir uzayın alt uzayı da birinci sayılabilir olduğundan Teorem 5.1.12 den açıktır.

$(4) \Leftrightarrow (5)$ Teorem 5.1.12 de verilmiştir.

$(5) \Rightarrow (1)$ X uzayı hemiyarı kompakt olsun. O halde X uzayındaki her yarı kompakt A kümesi için $A \subseteq A_n$ olacak biçimde bir yarı kompakt A_n kümesi vardır. Buradan $\{\|.\|_A : A \in CK(X)\}$ yarı normların sınıfı tarafından üretilen topoloji, $\{\|.\|_{A_n} : n \in \mathbb{N}\}$ yarı normların sayılabilir sınıfı tarafından üretilen topolojiden kabadır ve bu topolojiler yerel konveks Hausdorff topolojilerdir [48, Örnek 2, s. 109]. Ayrıca biz biliyoruz ki yarı normlarının sayılabilir sınıfı tarafından üretilen yerel konveks Hausdorff topoloji metriklenebilirdir [48, Problem 4, s. 119]. Dolayısıyla $QC_q(X)$ uzayı metriklenebilirdir. Sonuç 5.1.15 den $QC_q(X)$ uzayı tam metriklenebilirdir. □

Sonuç 5.1.17 Tam regüler X uzayı için, $C_q(X)$ uzayı tam metriklenebilirdir ancak ve ancak X uzayı bir hemiyarı kompakt q_f-uzaydır.

İspat: Teorem 5.1.13 ve Teorem 5.1.16 dan açıktır.

5.1.2 $C^*_{clp^*}(X)$ uzayının metriklenebilme özellikleri

Tanım 5.1.18 $X = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ olacak biçimde X uzayının clp-kompakt alt kümelerinin bir $\{A_n\}$ dizisi varsa X uzayına σ-clp-kompakt uzay denir. Ayrıca X uzayının yoğun σ-clp-kompakt alt kümesi varsa X uzayına hemen hemen σ-clp-kompakt uzay denir.

Teorem 5.1.19 Tam regüler X uzayı için aşağıdaki ifadeler tir.

(1) $C^*_{clp^*}(X)$ uzayı altmetriklenebilirdir.

(2) $C^*_{clp^*}(X)$ uzayının her yarı kompakt alt kümesi G_δ-kümedir.

(3) $C^*_{clp^*}(X)$ uzayının her kompakt alt kümesi G_δ-kümedir.

(4) $C^*_{clp^*}(X)$ uzayı bir E_0-uzaydır.

(5) X uzayı hemen hemen σ-clp-kompakttır.

(6) $C^*_{clp^*}(X)$ uzayı sıfır-küme-köşegene sahiptir.

(7) $C^*_{clp^*}(X)$ uzayı G_δ-köşegene sahiptir.

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) $C^*_{clp^*}(X)$ uzayı altmetriklenebilir ise Önerme 2.1.35 den her yarı kompakt alt kümesi G_δ-kümedir.

(2) $\Rightarrow$ (3) Her kompakt küme yarı kompakt olduğundan (1) $\Rightarrow$ (2) gerektirmesinden görülür.

(3) $\Rightarrow$ (4) Her tek nokta kümesi kompakt ve $C^*_{clp^*}(X)$ uzayının her kompakt alt kümesi G_δ-küme olduğundan her tek nokta kümesi G_δ-kümedir. O halde $C^*_{clp^*}(X)$ uzayı bir E_0-uzaydır.

(4) $\Rightarrow$ (5). $C^*_{clp^*}(X)$ uzayı bir E_0-uzayı ise f_0 sabit sıfır fonksiyonu G_δ-kümedir. Yani $\cap_{n=1}^{\infty} B_{A_n}(f_0, \varepsilon_n) = \{f_0\}$ dır. $X = \overline{\cup_{n=1}^{\infty} A_n}$ olduğunu göstermek istiyoruz. Kabul edelim ki $x_0 \in X \setminus \overline{\cup_{n=1}^{\infty} A_n}$ olsun. O zaman her $x \in \overline{\cup_{n=1}^{\infty} A_n}$ için $f_1(x) = 0$ ve $f_1(x_0) = 1$ olacak biçimde $f_1 : X \to [0,1]$ sürekli fonksiyonu vardır. Her $x \in A_n$ için $f_1(x) = 0$ olduğundan $f_1 \in B_{A_n}(f_0, \varepsilon_n)$ dir ve bu yüzden $f_1 \in \cap_{n=1}^{\infty} B_{A_n}(f_0, \varepsilon_n) = \{f_0\}$ elde edilir. Yani f_1 sabit sıfır fonksiyonudur. Acak $f_1(x_0) = 1$ olduğunu biliyoruz. Buradan bir çelişki elde edilir. Dolayısıyla X uzayı hemen hemen σ-clp-kompakttır.

(5) $\Rightarrow$ (4) X uzayı hemen hemen σ-clp-kompakt ve $f \in C^*_{clp^*}(X)$ olsun. $\{f\} = \cap_{n=1}^{\infty} B_{A_n}(f, \frac{1}{n})$ olduğunu göstermeliyiz. $g \in \cap_{n=1}^{\infty} B_{A_n}(f, \frac{1}{n})$ ve $x \in X$ alalım. Her $n \geq m$ için $x \in A_n$ olacak biçimde $m \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan her $n \geq m$ için $|g(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n}$ ve bu yüzden $g(x) = f(x)$ elde edilir. Dolayısıyla $C_q(X)$ uzayı bir E_0-uzaydır.

(5) $\Rightarrow$ (1) $X = \overline{\cup_{n=1}^{\infty} A_n}$ olsun. clp-kompakt kümelerinin topolojik toplamı $S = \oplus\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ ve $\phi : S \to X$ fonksiyonunu göz önüne alalım. ϕ fonksiyonunun üretilen fonksiyonu $\phi^* : C^*_{clp^*}(X) \to C^*_{clp^*}(S)$ süreklidir. ϕ fonksiyonu hemen hmen örten olduğundan Teorem 5.1.4(a) den ϕ^* fonksiyonunun bire-birdir. Teorem 5.1.6 den $C^*_{clp^*}(\oplus\{A_n : n \in \mathbb{N}\})$ ile $\prod\{C^*_{clp^*}(A_n) : n \in \mathbb{N}\}$ uzaylarının homeomorf ve Teorem 4.1.10 den $C_q(A_n)$ metriklenebilir olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $C^*_{clp^*}(S)$ metriklenebilir ve ϕ^* bire-bir sürekli olduğundan $C^*_{clp^*}(X)$ uzayı altmetriklenebilirdir.

(1) $\Rightarrow$ (6) $\Rightarrow$ (7) Gerektirmeleri Önerme 2.1.32 den açıktır.

(7) $\Rightarrow$ (4) Gerektirmesi Önerme 2.1.34 den açıktır. $\square$

Sonuç 5.1.20 X uzayı hemen hemen σ-clp-kompakt olsun. O halde $C^*_{clp^*}(X)$ uzayının kompakt ve yarı kompakt alt kümeleri denktir.

İspat: X uzayı hemen hemen σ-clp-kompakt ise Teorem 5.1.19 den $C^*_{clp^*}(X)$ uzayı altmetriklenebilirdir. Önerme 2.1.36 göz önüne alınırsa $C^*_{clp^*}(X)$ uzayının kompakt ve yarı kompakt alt kümelerinin denk olduğu görülür. □

Tanım 5.1.21 X uzayının herhangi clp-kompakt A alt kümesi için $A \subseteq A_n$ olacak biçimde X uzayının clp-kompakt alt kümelerinin bir $\{A_n\}$ dizisi varsa X uzayına hemiclp-kompakt uzay denir.

Teorem 5.1.22 Tam regüler X uzayı için $C_{clp^*}(X)$ uzayı birinci sayılabilirdir ancak ve ancak X uzayı hemiclp-kompakttır.

İspat: $C_{clp^*}(X)$ uzayı birinci sayılabilir olsun. O halde f_0 noktasının kümeleri $W_n = S^*(A_{n1}, V_{n1}) \cap \ldots \cap S^*(A_{nk_n}, V_{nk_n})$ biçiminde tanımlı $\{W_n\}$ sayılabilir bazı vardır. $A_n = \cup_{i=1}^{k_n} A_{ni}$ alalım. X uzayının herhangi clp-kompakt A alt kümesi ise $n \in \mathbb{N}$ için $A \subseteq A_n$ olduğunu göstermeliyiz. $V = (-1,1)$ için $S^*(A,V)$, f_0 noktasının açık komşuluğu olur. Buradan $n \in \mathbb{N}$ için $W_n \subseteq S^*(A,V)$ olacak biçimde W_n baz elemanı vardır. Şimdi kabul edelim ki $x \in A \backslash A_n$ olsun. X uzayı tam regüler olduğundan $f(x) = 1$ ve $f(A_n) = \{0\}$ olacak biçimde $f \in C(X)$ vardır. Buradan $f \notin S^*(A,V)$ ve $f \in W_n$ olduğu kolayca görülür. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla $A \subseteq A_n$ ve bu yüzden de X uzayı hemiclp-kompakttır.

Tersine, X uzayı hemiclp-kompakt, $\mathscr{A} = \{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ ve $0 \in \mathbb{R}$ noktasında sayılabilir bir baz $\mathscr{V}$ olsun. $C_{clp^*}(X)$ uzayında f_0 noktasının $\cap_{i=1}^{n} S^*(A_i, W_i)$ açık komşuluğunu alalım. Buradan $1 \leq i \leq n$ için $A_i \subseteq K_{k_i}$ ve $V_{k_i} \subseteq W_i$ olacak biçimde $K_{k_i} \in \mathscr{A}$ ve $V_{k_i} \in \mathscr{V}$ vardır. Bu yüzden $f_0 \in \cap_{i=1}^{n} S^*(K_{k_i}, V_{k_i}) \subseteq \cap_{i=1}^{n} S^*(A_i, W_i)$ elde edilir. Dolayısıyla $C_{clp^*}(X)$ uzayı birinci sayılabilirdir.
□

Teorem 5.1.23 Tam regüler X uzayı için aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) $C^*_{clp^*}(X)$ uzayı metriklenebilirdir.

(2) $C^*_{clp^*}(X)$ uzayı birinci sayılabilirdir.

(3) X uzayı hemiclp-kompakttır.

İspat: $(1) \Rightarrow (2)$ gerektirmesi açıktır.

$(2) \Rightarrow (3)$ gerektirmesi Teorem 5.1.22 den açıkça görülür.

$(3) \Rightarrow (1)$ X uzayı hemiclp-kompakt olsun. O halde X uzayındaki her clp-kompakt A kümesi için $A \subseteq A_n$ olacak biçimde bir clp-kompakt A_n kümesi vardır. Buradan $\{\|.\|_A : A \in CK(X)\}$ yarı normların sınıfı tarafından üretilen topoloji, $\{\|.\|_{A_n} : n \in \mathbb{N}\}$ yarı normların sayılabilir sınıfı tarafından üretilen topolojiden kabadır ve bu topolojiler yerel konveks Hausdorff topolojilerdir [48, Örnek 2, s. 109]. Ayrıca biz biliyoruz ki yarı normlarının sayılabilir sınıfı tarafından üretilen yerel konveks Hausdorff topoloji metriklenebilirdir [48, Problem 4, s. 119]. Dolayısıyla $C^*_{clp^*}(X)$ uzayı metriklenebilirdir. □

Tanım 5.1.24 X uzayının her clp-kompakt A alt kümesi için $g|_A = f|_A$ olacak biçimde $g : X \to \mathbb{R}$ sürekli ve sınırlı fonksiyonu varsa $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna clp-sürekli fonksiyon denir.

Tanım 5.1.25 X uzayında tanımlı her sınırlı clp-sürekli fonksiyon sürekli ise X uzayına clp_f-uzay denir.

Teorem 5.1.26 $C^*_{clp^*}(X)$ uzayı tamdır ancak ve ancak X uzayı bir clp_f-uzaydır.

İspat: Teorem 5.1.13 ün ispatına benzer olarak yapılabilir.

Teorem 5.1.27 Tam regüler X uzayı için, $C^*_{clp^*}(X)$ uzayı tam metriklenebilirdir ancak ve ancak X uzayı bir hemiclp-kompakt clp_f-uzaydır.

İspat: Yine Teorem 5.1.17 nin ispatına benzer olarak yapılabilir.

5.1.3 $C_{q,\gamma}(X)$ ve $C_{q,g}(X)$ uzaylarının metriklenebilme özellikleri

Teorem 5.1.28 Tam regüler X uzayı için, $C_u(X) = C_g(X)$ ancak ve ancak X uzayı sayılabilir kompakttır [27].

Teorem 5.1.29 Tam regüler X uzayı için aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) $C_{q,g}(X)$ uzayı metriklenebilirdir.

(2) $C_{q,g}(X)$ uzayı birinci sayılabilirdir.

(3) X uzayı sayılabilir kompakttır.

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) $C_{q,g}(X)$ uzayı metriklenebilir ise metriklenebilir uzay birinci sayılabilirdir olduğundan $C_{q,g}(X)$ uzayı birinci sayılabilirdir.

(2) $\Rightarrow$ (1) $C_{q,g}(X)$ uzayı birinci sayılabilir ise Teorem 4.2.7 den $C_u(X,Y) \leq C_g(X,Y)$ olduğundan $C_u(X)$ uzayı birinci sayılabilirdir. O halde [25, Teorem 2.3] den X uzayı sayılabilir kompakttır.

(3) $\Rightarrow$ (1)Teorem 3.4.7 den $C_{q,g}(X,Y) \leq C_g(X,Y)$ ve Teorem 5.1.28 den X uzayı sayılabilir kompakt ise $C_u(X,Y) = C_{q,g}(X,Y)$ dır. Dolayısıyla $C_{q,g}(X)$ uzayı metriklenebilirdir. □

Sonuç 5.1.30 Tamamen normal X uzayı için aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) $QC_{q,g}(X)$ uzayı metriklenebilirdir.

(2) $QC_{q,g}(X)$ uzayı birinci sayılabilirdir.

(3) $QC_{q,\gamma}(X)$ uzayı metriklenebilirdir.

(4) $QC_{q,\gamma}(X)$ uzayı birinci sayılabilirdir.

(5) $C_{q,g}(X)$ uzayı metriklenebilirdir.

(6) $C_{q,g}(X)$ uzayı birinci sayılabilirdir.

(7) $C_{q,\gamma}(X)$ uzayı metriklenebilirdir.

(8) $C_{q,\gamma}(X)$ uzayı birinci sayılabilirdir.

(9) X uzayı yarı kompakttır.

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) $QC_{q,g}(X)$ uzayı metriklenebilir ise metriklenebilir uzay birinci sayılabilirdir olduğundan $QC_{q,g}(X)$ uzayı birinci sayılabilirdir. Buradan (3) $\Rightarrow$ (4), (5) $\Rightarrow$ (6) ve (7) $\Rightarrow$ (8) gerektirmelerinin de doğruluğu görülür.

(1) $\Rightarrow$ (5) $QC_{q,g}(X)$ uzayı metriklenebilirdir ise metriklenebilir uzayın her alt uzayı da metriklenebilir olduğundan $C_{q,g}(X)$ uzayı metriklenebilirdir. Buradan (3) $\Rightarrow$ (7), (2) $\Rightarrow$ (6) ve (4) $\Rightarrow$ (8) gerektirmelerinin de doğruluğu görülür.

(8) $\Rightarrow$ (9) $C_{q,\gamma}(X) \leq C_{q,g}(X,Y)$ olduğundan Teorem 5.1.29 den açıktır.

(9) $\Rightarrow$ (1) X uzayı yarı kompakt ise $C_{q,g}(X) = C_g(X) = QC_{q,g}(X)$ ve Teorem 4.2.8 den $C_u(X) = C_g(X)$ olduğundan $QC_{q,g}(X)$ uzayı metriklenebilirdir. □

Teorem 5.1.31 [25, Teorem 2.14] Tam regüler X uzayı için, $C_g(X)$ tam metriklenebilirdir ancak ve ancak X uzayı sayılabilir kompakttır.

Sonuç 5.1.32 Tam regüler X uzayı için aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) $C_{q,g}(X)$ uzayı tam metriklenebilirdir.

(2) $C_{q,\gamma}(X)$ uzayı tam metriklenebilirdir.

(3) X uzayı sayılabilir kompakttır.

5.2 Sayılabilirlik Özellikleri

5.2.1 $C_q(X)$ uzayının sayılabilirlik özellikleri

Önerme 5.2.1 X uzayı tam Hausdorff, yerel kompakt ve ikinci sayılabilir ise $C_q(X)$ uzayı ikinci sayılabilirdir.

İspat: Urysohn Metriklenebilme Teoremi'nden biliyoruz ki regüler ve ikinci sayılabilir bir uzay metriklenebilirdir. Buradan tam Hausdorff, yerel kompakt ve ikinci sayılabilir X uzayı metriklenebilirdir. Sonuç 3.1.12 den $C_k(X) = C_q(X)$ olduğu kolayca görülür. Ayrıca yerel kompakt ve ikinci sayılabilir X uzayı için [26, Teorem 2] den $C_k(X)$ uzayı ikinci sayılabilirdir. Dolayısıyla $C_q(X)$ uzayı ikinci sayılabilirdir. □

Teorem 5.2.2 Tam Hausdorff X uzayı için aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) $C_q(X)$ uzayı ayrılabilirdir.

(2) $C_k(X)$ uzayı ayrılabilirdir.

(3) X uzayı ayrılabilir ve metriklenebilir bir zayıf topolojiye sahiptir.

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) $C_q(X)$ uzayı ayrılabilir ise $C_k(X) \leq C_q(X)$ olduğundan açıkça $C_k(X)$ uzayı da ayrılabilirdir.

(2) $\Rightarrow$ (3) Bu gerektirmenin ispatı [26] de verilmiştir.

(3) $\Rightarrow$ (1) X uzayı ayrılabilir ve metriklenebilir bir zayıf topolojiye sahip ise X uzayı $I^{|\mathbb{N}|}$Hilbert küpüne gömülebilir (bkz. [32, Teorem 4.2.10]). O zaman bire-bir sürekli $f : X \to I^{\omega}$ fonksiyonu vardır. Hilbert küpü metriklenebilir olduğundan (bkz. [32, Sonuç 4.2.3]) Teorem 5.1.4(d) den f tarafından üretilen $f^* : C_q(I^{\omega}) \to C_q(X)$ fonksiyonu hemen hemen örtendir. f^* fonksiyonu hemen hemen örten ve Önerme 5.2.1 den $C_q(I^{\omega})$ uzayı ikinci sayılabilir olacağı için $C_q(X)$ uzayı ayrılabilir olmalıdır. $\square$

Sonuç 5.2.3 Tam regüler X uzayı için $C_q(X)$ uzayı ayrılabilir ise $C_k(X) = C_q(X)$ dir.

İspat: $C_q(X)$ uzayı ayrılabilir ise X uzayı altmetriklenebilirdir. Önerme 2.1.36 dan tam regüler ve altmetriklenebilir X uzayında her yarı kompakt alt kümesi kompakt olacağı için $C_k(X) = C_q(X)$ dir. $\square$

Sonuç 5.2.4 Tam regüler X uzayı için, $C_q(X)$ uzayı ayrılabilir ise $QC(X) = C(X)$.

İspat: $C_q(X)$ uzayı ayrılabilir ise X uzayı altmetriklenebilirdir. Önerme 3.1.23 den altmetriklenebilir X uzayı q_f-uzaydır. Dolayısıyla $QC(X) = C(X)$. $\square$

Sonuç 5.2.5 X uzayı yarı kompakt ve metriklenebilir ise $C_q(X)$ uzayı ayrılabilirdir.

İspat: X uzayı yarı kompakt ve metriklenebilir ise X uzayı kompakttır. Kompakt ve metriklenebilir X uzayı ayrılabilirdir. X uzayı metriklenebilir ve ayrılabilir olduğu için $C_q(X)$ uzayı ayrılabilirdir. $\square$

Bu sonucun tersi genelde doğru değildir. Çünkü $C_q(X)$ uzayı ayrılabilir ise X uzayı altmetriklenebilirdir. Ancak yarı kompakt ve altmetriklenebilir bir uzay metriklenemeyebilir. Buna bir örnek olarak Gillman'ın $E \cap [0,1]$ uzayı yarı kompakt ve altmetriklenebilirdir ama metriklenebilir değildir [43]. Bu sorun X uzayının tam regüler alınmasıyla çözülür.

Teorem 5.2.6 Tam regüler ve yarı kompakt X uzayı için $C_q(X)$ uzayı ayrılabilirdir ancak ve ancak X uzayı kompakt ve metriklenebilirdir.

İspat: $C_q(X)$ uzayı ayrılabilir ise Teorem 5.2.2 den X uzayı altmetriklenebilirdir. Tam regüler, yarı kompakt ve altmetriklenebilir X uzayı metriklenebilir ve dolayısıyla kompakktır.

Yeter şartı Sonuç 5.2.5 den açıktır. □

Önerme 5.2.7 Ayrılabilir ve metriklenebilir X uzayı için $C_q(X)$ uzayı $\aleph_0$-uzaydır.

İspat: X uzayı ayrılabilir ve metriklenebilir ise Teorem 4.1.8 den $C_k(X) = C_q(X)$ ve [46, Lemma 2.3.6] den $C_k(X)$ uzayı $\aleph_0$-uzay olduğundan $C_q(X)$ uzayı $\aleph_0$-uzaydır. □

Sonuç 5.2.8 X uzayı $\aleph_0$-uzay ise $C_k(X) = C_q(X)$ dır.

Sonuç 5.2.9 X uzayı $\aleph_0$-uzay ise $C_q(X)$ uzayı $\aleph_0$-uzaydır.

İspat: Ayrılabilir ve metriklenebilir uzay, $\aleph_0$-uzay [28] olduğundan açıktır.

Sonuç 5.2.10 X uzayı $\aleph_0$-uzay ise $C_q(X)$ uzayı $\mathfrak{P}_0$-uzaydır.

İspat: X uzayı $\aleph_0$-uzay ise $C_k(X)$ uzayı $\mathfrak{P}_0$-uzaydır [34, Sonuç 2.6]. O halde Sonuç 5.2.8 den $C_q(X)$ uzayının $\mathfrak{P}_0$-uzay olduğu görülür.

Teorem 5.2.11 Tam regüler X uzayı için aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) $C_q(X)$ uzayı kozmiktir.

(2) $C_q(X)$ uzayı bir $\aleph_0$-uzaydır.

(3) $C_k(X)$ uzayı kozmiktir.

(4) $C_k(X)$ uzayı bir $\aleph_0$-uzaydır.

(5) X uzayı bir $\aleph_0$-uzaydır.

İspat: (1) ⇒ (5) $C_q(X)$ uzayı için bir sayılabilir ağ $\mathscr{F}$ olsun. $F \in \mathscr{F}$ için $F^* = \{x \in X : f(x) > 0\}$ kümesini ve $\mathscr{F}^* = \{F^* : F \in \mathscr{F}\}$ sınıfını tanımlayalım. $\mathscr{F}^*$ sınıfının X uzayı için bir k-ağ olduğunu gösterelim. $A \subset U$ olacak biçimde X uzayında U açık ve A kompakt alt kümelerini alalım. X uzayı regüler olduğundan tam Hausdorfftur. Buradan $f(A) = \{1\}$ ve $f(X \backslash U) = \{0\}$ olacak biçimde $f \in C(X)$ fonksiyonu vardır. O halde $f \in S(A,(0,\infty))$

dır. $\mathscr{F}$, $C_q(X)$ uzayı için bir sayılabilir ağ olduğundan $f \in F \subset S(A,(0,\infty))$ olacak biçimde $F \in \mathscr{F}$ vardır. Buradan $A \subset F^*$ olduğu görülür. $F^* \subset U$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. Kabul edelim ki $x \in F^* \backslash U$ olsun. O halde $x \notin U$ olacağından $f(x) = 0$ dır. Fakat $x \in F^*$ ve $f \in F$ için $f(x) > 0$ olur. Bu ise çelişkidir. Bu yüzden $F^* \subset U$ elde edilir.

$(5) \Rightarrow (1)$ X uzayı bir $\aleph_0$-uzay ise X uzayı altmetriklenebilirdir (bkz. [28, Lemma 10.1 ve Önerme 10.2]). O halde Önerme 2.1.36 den $C_k(X) = C_q(X)$ dır. Dolayısıyla $C_q(X)$ uzayı kozmik uzaydır.

$(5) \Rightarrow (2)$Sonuç 5.2.9 den açıktır.

$(2) \Rightarrow (1)$ Her $\aleph_0$-uzay, kozmik uzay olduğundan $C_k(X)$ uzayı kozmiktir.

$(3) \Leftrightarrow (4) \Leftrightarrow (5)$ [28, Önerme 10.3] de verilmiştir. □

Teorem 5.2.12 Tam Hausdorff ve yerel kompakt X uzayı için aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) $C_q(X)$ uzayı ikinci sayılabilirdir.

(2) $C_k(X)$ uzayı ikinci sayılabilirdir.

(3) X uzayı hemikompakt ve altmetriklenebilirdir.

(4) X uzayı σ-kompakt ve altmetriklenebilirdir.

(5) X uzayı Lindelöf ve altmetriklenebilirdir.

(6) X uzayı ikinci sayılabilirdir.

İspat: $(1) \Rightarrow (2)$ $C_q(X)$ uzayı ikinci sayılabilir ise $C_k(X) \leq C_q(X)$ olduğundan açıkça $C_k(X)$ uzayı da ikinci sayılabilirdir.

$(2) \Rightarrow (3)$ $C_k(X)$ uzayı ikinci sayılabilir ise ayrılabilir ve metriklenebilir bir zayıf topolojiye sahiptir. Yani X uzayı ayrılabilir ve altmetriklenebilirdir. Dolayısıyla X uzayı hemikompakt ve altmetriklenebilirdir.

$(3) \Leftrightarrow (4) \Leftrightarrow (5)$ Yerel kompakt bir uzayda hemikompakt, σ-kompakt ve Lindelöf'lük kavramları denk olduğundan açıktır.

(5) $\Rightarrow$ (6) X uzayı yerel kompakt olduğundan her $x \in X$ için $x \in V_x$ ve $\overline{V_x}$ kümesi kompakt olacak biçimde X uzayında açık V_x kümesi vardır. Kolayca görülür ki $\{V_x : x \in X\}$ sınıfı X uzayının bir açık örtüsüdür. X uzayı lindelöf olduğundan $X = \cup_{n=1}^{\infty} V_{x_n}$ olacak biçimde X uzayının $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ sayılabilir alt kümesi vardır. Ayrıca X uzayı ayrılabilir ve altmetriklenebilir ve her $\overline{V_{x_n}}$ kompakt olduğundan her $\overline{V_{x_n}}$ metriklenebilirdir. Bu yüzden $\overline{V_{x_n}}$ ikinci sayılabilirdir. Sonuç olarak her V_{x_n} ikinci sayılabilir ve $X = \cup_{n=1}^{\infty} V_{x_n}$ olduğundan X uzayı da ikici sayılabilirdir.

(6) $\Rightarrow$ (1) İfadesi Önerme 5.2.1 de verilmiştir. $\square$

Teorem 5.2.13 Tam regüler X uzayı için aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) $QC_q(X)$ uzayı ikinci sayılabilirdir.

(2) $C_q(X)$ uzayı ikinci sayılabilirdir.

(3) $C_k(X)$ uzayı ikinci sayılabilirdir.

(4) X uzayı hemiyarı kompakt ve $\aleph_0$-uzaydır.

(5) X uzayı hemiyarı kompakt ve kozmiktir.

(6) X uzayı hemiyarı kompakt ve altmetriklenebilirdir.

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) $C_q(X)$ uzayı ikinci sayılabilir ve ikinci sayılabilir uzay ayrılabilir olduğundan Teorem 5.2.2 dan X uzayı ayrılabilir ve metriklenebilir bir zayıf topolojiye sahiptir. Altmetriklenebilir bir uzay q_f-uzay olduğundan Önerme 3.1.22 den $QC(X) = C(X)$ yazılabilir. Buradan $QC_q(X)$ uzayı ikinci sayılabilirdir.

(2) $\Rightarrow$ (3) $QC_q(X)$ uzayı ikinci sayılabilir ise Urysohn Metriklenebilme Teoremi'nden $QC_q(X)$ uzayı metriklenebilirdir. Teorem 5.1.16 den X uzayı hemikompakt ve Teorem 5.2.11 den X uzayı $\aleph_0$-uzaydır.

(3) $\Rightarrow$ (4) Her $\aleph_0$-uzay kozmik olduğundan açıktır.

(4) $\Rightarrow$ (5) X uzayı kozmik ise altmetriklenebilirdir [46, Önerme 2.3.8.].

$(5) \Rightarrow (1)$ X uzayı hemiyarı kompakt ve altmetriklenebilir ise X uzayındaki her yarı kompakt A kümesi için $A \subseteq A_n$ olacak biçimde bir yarı kompakt A_n kümesi vardır. Buradan her A_n kümesi ayrılabilir ve altmetriklenebilirdir. Teorem 5.1.12 ve Teorem 5.2.2 den her $C_q(A_n)$ uzayı ayrılabilir ve metriklenebilirdir. Teorem 5.1.6 den $C_q(X)$ uzayı $\prod\{C_q(A_n) : n \in \mathbb{N}\}$ ayrılabilir ve metriklenebilir uzayına gömülebileceğinden $C_q(X)$ uzayı ikinci sayılabilirdir.□

Sonuç 5.2.14 Tam regüler X uzayı için $C_q(X)$ uzayı ikinci sayılabilir ise $C_k(X) = C_q(X)$ dir.

Sonuç 5.2.15 Regüler X uzayı için $C_q(X)$ uzayı ikinci sayılabilirdir ancak ve ancak X uzayı hemikompakt ve $\aleph_0$-uzaydır.

İspat: $C_q(X)$ uzayı ikinci sayılabilir ise Teorem 5.2.12 den X uzayı hemikompakt ve Teorem 5.2.11 den X uzayı $\aleph_0$-uzaydır. Tersine, X uzayı hemikompakt ve $\aleph_0$-uzay ise Teorem 5.1.12 den $C_q(X)$ uzayı metriklenebilir ve Teorem 5.2.11 den $C_q(X)$ uzayı kozmiktir. $C_q(X)$ uzayı metriklenebilir ve kozmik olduğundan ikici sayılabilirdir. □

Yerel kompakt $\aleph_0$-uzay, ayrılabilir ve metriklenebilir [28] olduğundan aşağıdaki sonucu verelebilir.

Sonuç 5.2.16 Tam regüler ve yerel kompakt X uzayı için aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) $QC_q(X)$ uzayı ikinci sayılabilirdir.

(2) $C_q(X)$ uzayı ikinci sayılabilirdir.

(3) X uzayı Lindelöf ve altmetriklenebilirdir.

(4) X uzayı $\mathfrak{P}_0$-uzaydır.

(5) X uzayı $\aleph_0$-uzaydır.

(6) X uzayı kozmik uzaydır.

(7) X uzayı ikinci sayılabilirdir.

Teorem 5.2.17 Tam regüler X uzayı için aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) $QC_q(X)$ uzayı ayrılabilirdir.

(2) $C_q(X)$ uzayı ayrılabilirdir.

(3) $C_k(X)$ uzayı ayrılabilirdir.

(4) X uzayı $\aleph_0$-uzay olan bir zayıf topolojiye sahiptir.

(5) X uzayı kozmik uzay olan bir zayıf topolojiye sahiptir.

(6) X uzayı ayrılabilir ve metriklenebilir bir zayıf topolojiye sahiptir.

İspat: $(1) \Leftrightarrow (2)$ $C_q(X)$ uzayı ayrılabilir ise Sonuç 5.2.4 den $QC(X) = C(X)$ dir. Dolayısıyla $QC_q(X)$ uzayı ayrılabilirdir.

$(2) \Leftrightarrow (3) \Leftrightarrow (6)$ Teorem 5.2.2 de verilmiştir.

$(4) \Leftrightarrow (5) \Leftrightarrow (6)$ [28, (A), Lemma 10.1 ve Önerme 10.2] den açıktır. $\square$

Sonuç 5.2.18 X uzayı kozmik uzay ise $C_q(X)$ uzayı ayrılabilir ve metriklenebilir bir zayıf topolojiye sahiptir.

Sonuç 5.2.19 Metriklenebilir X uzayı için aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) $C_q(X)$ uzayı ikinci sayılabilirdir.

(2) X uzayı $\mathfrak{P}_0$-uzaydır.

(3) X uzayı $\aleph_0$-uzaydır.

(4) X uzayı kozmik uzaydır.

(5) X uzayı ikinci sayılabilirdir.

(6) X uzayı ayrılabilirdir.

Teorem 5.2.20 Tam regüler ve σ-yarı kompakt X uzayı için aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) $QC_q(X)$ uzayı ayrılabilirdir.

(2) $C_q(X)$ uzayı ayrılabilirdir.

(3) X uzayının her yarı kompakt alt uzayı metriklenebilirdir.

(4) X uzayı kozmiktir.

(5) X uzayı altmetriklenebilirdir.

İspat: $(1) \Leftrightarrow (2)$ Teorem 5.2.17 den açıktır.

$(2) \Rightarrow (3)$ X uzayının A yarı kompakt alt kümesi olsun. $C_q(X)$ uzayı ayrılabilir ise Teorem 5.2.2 dan X uzayı altmetriklenebilirdir. Tam regüler, yarı kompakt ve altmetriklenebilir bir uzay metriklenebilir olacağından A metriklenebilirdir.

$(3) \Rightarrow (4)$ [46, Sonuç 2.3.4] den açıktır.

$(4) \Rightarrow (2)$ Teorem 5.2.13 den açıktır.

$(4) \Leftrightarrow (5)$ Önerme 2.1.36 ve [46, Sonuç 2.3.4] den σ-yarı kompakt ve altmetriklenebilir uzay kozmiktir. $\square$

5.2.2 $C^*_{clp^*}(X)$ uzayının sayılabilirlik özellikleri

Teorem 5.2.21 Tam regüler X uzayı için aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) $C_u(X)$ uzayı $\mathfrak{P}_0$-uzaydır.

(2) $C_u(X)$ uzayı $\aleph_0$-uzaydır.

(3) $C_u(X)$ uzayı kozmik uzaydır.

(4) $C_u(X)$ uzayı ikinci sayılabilirdir.

(5) $C_u(X)$ uzayı ayrılabilirdir.

(6) $C^*_{clp^*}(X)$ uzayı $\mathfrak{P}_0$-uzaydır.

(7) $C^*_{clp^*}(X)$ uzayı $\aleph_0$-uzaydır.

(8) $C^*_{clp^*}(X)$ uzayı kozmik uzaydır.

(9) $C^*_{clp^*}(X)$ uzayı ikinci sayılabilirdir.

(10) $C^*_{clp^*}(X)$ uzayı ayrılabilirdir.

(11) X uzayı kompakt ve metriklenebilirdir.

İspat: $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (5)$ ve $(6) \Rightarrow (7) \Rightarrow (8) \Rightarrow (10)$ Teorem 2.1.7 den açıktır.

$(4) \Rightarrow (5)$ ve $(9) \Rightarrow (10)$ Herhangi $\mathfrak{P}_0$-uzay, $\aleph_0$-uzay olduğundan açıktır.

$(5) \Rightarrow (10)$ Ayrılabilir olma özelliği zayıf topoloji tarafından korunur. $C_u(X)$ uzayı ayrılabilir ise $C^*_{clp^*}(X) \leq C^*_u(X) \leq C_u(X)$ olduğundan $C^*_{clp^*}(X)$ uzayı ayrılabilirdir.

$(4) \Rightarrow (9)$ $C_u(X)$ uzayı ikinci sayılabilir ise $C^*_{clp^*}(X) \leq C^*_u(X) \leq C_u(X)$ olduğundan $C^*_{clp^*}(X)$ uzayı ikinci sayılabilirdir.

$(10) \Rightarrow (11)$ $C^*_{clp^*}(X)$ uzayı ayrılabilir ise $C^*_q(X) \leq C^*_{clp^*}(X)$ olduğundan $C^*_q(X)$ uzayı ayrılabilirdir. Teorem 5.2.2 den X uzayı altmetriklenebilirdir. Ayrıca [47, Teorem 4.2] den X uzayı sözde kompakttır. O halde Önerme 2.1.36 den X uzayı metriklenebilirdir. Dolayısıyla sözde kompakt ve metriklenebilir olduğundan X uzayı kompakttır. Buradan aynı zaman da $(9) \Rightarrow (11)$ ifadesinin ispatı çıkar.

$(5) \Rightarrow (1)$ X uzayı kompakt ise Sonuç 3.1.16 den $C_q(X) = C_{clp^*}(X) = C_u(X)$ dir. Ayrıca X uzayı kompakt ve metriklenebilir olduğundan ikinci sayılabilirdir. Teorem 5.2.12 den $C_q(X)$ $= C_u(X)$ uzayının ikinci sayılabilir olduğu görülür. □

Sonuç 5.2.22 X uzayı sözde kompakt ve tam regüler olmak üzere $C_{clp^*}(X)$ uzayı ikinci sayılabilirdir ancak ve ancak X uzayı ikinci sayılabilirdir.

İspat: $C_{clp^*}(X)$ uzayı ikinci sayılabilir olsun. O halde X uzayı kompakt ve metriklenebilir ve dolayısıyla ikinci sayılabilirdir.

Tersine, X uzayı ikinci sayılabilir ve tam regüler olduğundan metriklenebilirdir. Bu yüzden sözde kompakt X uzayı kompakttır. Teorem 5.2.21 den X uzayı kompakt ve metriklenebilir olduğundan $C_{clp^*}(X)$ uzayı ikinci sayılabilirdir. □

Teorem 5.2.23 X uzayı tam regüler olmak üzere aşağıdaki şartlardan birinin sağlanması durumunda $C^*_{clp^*}(X)$ uzayı Lindelöf değildir.

(a) X uzayı clp-kompakt, fakat kompakt değildir.

(b) X uzayı kompakt, fakat metriklenebilir değildir.

İspat: **(a)** X uzayı clp-kompakt ise Teorem 4.1.9 dan $C^*_{clp^*}(X) = C^*_u(X)$ ve bu yüzden $C^*_{clp^*}(X)$ uzayı metriklenebilirdir. Eğer $C^*_{clp^*}(X)$ uzayını Lindelöf alırsak Teorem 5.2.21 den X uzayı kompakt ve metriklenebilir olur. Bu ise kabulümüz ile çelişir. O halde $C^*_{clp^*}(X)$ uzayı Lindelöf değildir.

(b) X uzayı kompakt ve $C^*_{clp^*}(X)$ uzayı Lindelöf ise $C^*_{clp^*}(X)$ uzayı ikinci sayılabilir olacağı için Teorem 5.2.21 den X uzayı metriklenebilir olur. Bu ise kabulümüz ile çelişir. O halde $C^*_{clp^*}(X)$ uzayı Lindelöf değildir. □

5.2.3 $C_{q,\gamma}(X)$ ve $C_{q,g}(X)$ uzaylarının sayılabilirlik özellikleri

Teorem 5.2.24 Tam regüler X uzayı için aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) $C_{q,g}(X)$ uzayı $\mathfrak{P}_0$-uzaydır.

(2) $C_{q,g}(X)$ uzayı $\aleph_0$-uzaydır.

(3) $C_{q,g}(X)$ uzayı kozmik uzaydır.

(4) $C_{q,g}(X)$ uzayı ikinci sayılabilirdir.

(5) $C_{q,g}(X)$ uzayı ayrılabilirdir.

(6) $C_{q,\gamma}(X)$ uzayı $\mathfrak{P}_0$-uzaydır.

(7) $C_{q,\gamma}(X)$ uzayı $\aleph_0$-uzaydır.

(8) $C_{q,\gamma}(X)$ uzayı kozmik uzaydır.

(9) $C_{q,\gamma}(X)$ uzayı ikinci sayılabilirdir.

(10) $C_{q,\gamma}(X)$ uzayı ayrılabilirdir.

(11) X uzayı kompakt ve metriklenebilirdir.

İspat: X uzayı kompakt ve metriklenebilir ise Sonuç 4.2.9 ve Sonuç 4.1.21 den $C_{clp^*}(X) = C_u(X) = C_{q,\gamma}(X) = C_{q,g}(X)$ olduğundan Teorem 5.2.21 den açıktır.

6. BÖLÜM
SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada X topolojik uzaydan Y topolojik uzayına tanımlı tüm sürekli fonksiyonların kümesi olan $C(X,Y)$ üzerinde öncelikle küme-açık topolojiler, düzgün topolojiler, örtü topolojiler ve grafik topolojiler gibi çeşitli fonksiyon uzayları topolojilerinin tanımları verildi. Daha sonra, yarı kompakt ve clp-kompakt gibi kompaktlığın zayıf formları ile bu topolojilerin bazı genellemeleri verildi. Tanımlanan tüm topolojilerin karşılaştırılması yapıldı.Yarı kompakt-açık topoloji ve clp-kompakt-açık topolojilerin metriklenebilirlik, tam metriklenebilirlik ve sayılabilirlik özellikleri ayrıntılı olarak incelendi. Bu özellikler tanımlanan diğer topolojiler içinde incelendi.

Yarı kompakt-açık ve clp-kompakt-açık topoloji için bu çalışma kapsamı dışında kalan topolojik özellikleri incelenebilir. Özellikle clp-kompakt-açık topolojinin metriklenebilmesi için çalışmalar yapılabilir.

KAYNAKLAR

1. Ascoli, G., “Le curve limiti di una varietà data di curve”, *Mem. della R. Accad. Lincei* 18, 521—586, 1883.

2. Arzelà, C., “Funzioni di linee, Atti della Reale Accademia dei Lincei”, *Rendiconti*, 5, 342–348, 1889.

3. Hadamard, J., “Sur certaines applications possibles de la théorie des ensembles”, *Verhandl. Intern. Math. Kongress*, Zürich, 1898

4. Bourbaki, N., “General Topology”, *Springer-Verlag*, Berlin-Heidelberg, 1995.

5. Fréchet, M., “Sur quelques points du calcul functional”, *Rend. Circ. Maum.*,Paris, 1906.

6. Tukey, J. W., “Convergence and Uniformity in Topology”, *Princeton University Press*, New Jersey, 1940.

7. Tychonoff, A., “Über einen Funktionenraum”, *Mathematische Annalen*, 111, 762—766, 1935.

8. Fox, R. H., “On topologies for function spaces”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 51, 429—432, 1945.

9. Arens, R. F., “A topology for spaces of transformations”, *Ann. of Math.*, 47, 480—495, 1946.

10. Arens, R. F., Dugundji, R., “Topologies for function spaces”, *Pacific J. Math.*, 1, 5-31, 1951.

11. Nachbin, L., “Topological vector spaces of continuous functions”, *Proc. Nat. Acad. Sei. U.S. A.*, 40, 471-474, 1954.

12. Shirota, T., “On locally convex vector spaces of continuous functions”, *Proc. Japan Acad.*, 30, 294-298, 1954.

13. Warner, S., “The topology of compact convergence on continuous function spaces”, *Duke Math. J.*, 25, 265—282, 1958.

14. Jackson, J. R., “Comparison of topologies on function spaces”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 3, 156—158, 1952.

15. Gulick, D., “The sigma-compact-open topology and its relatives”, *Math. Scand.*, 30, 159—176, 1972.

16. Kundu, S., Garg, P., “The pseudocompact-open topology on C(X)”, *Topology Proc.*, 30 (1), 279—299, 2006.

17. Osipov, A. V., “The C-compact-open topology on function spaces”, *Topology Appl.*, 159, 3059—3066, 2012.

18. Kundu, S., Raha, A. B., “The bounded-open topology and its relatives”, *Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste*, 27, 61—77, 1995.

19. Porter, K. F., “The open-open topology for function spaces”, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 16(1), 111—116, 1993.

20. Arkhangel’skii, A. V., “Topological Function Spaces”, *Springer*, Netherlands, 1992.

21. Arkhangel’skii, A. V., “General Topology III: Paracompactness, Function Spaces, Descriptive Theory”, *Springer-Verlag*, Berlin-Heidelberg, 1995.

22. Lutzer, D. J., McCoy, R. A., “Category in function spaces. I.”, *Pacific J. Math.*, 90(1), 145-168, 1980.

23. McCoy, R.A., Ntantu, I., “Topological Properties of Spaces of Continuous Functions”, *Springer Verlag*, Berlin, 1988.

24. Hewitt, E., “Rings of real-valued continuous functions”, *I. Trans. Am. Math. Soc.*, 64, 45–99, 1948.

25. McCoy, R. A., Kundu, S., Jindal, V., “Function Spaces with Uniform, Fine and Graph Topologies”, *Springer*, 2018.

26. McCoy, R. A., “The open-cover topology on function spaces”, *Fundamenta Mathematicae*, 104, 69-73, 1979.

27. Noble, N., “Products with closed projections”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 140, 381-391, 1969.

28. Michael, E., “N0-spaces”, *J. Math. Mech*, 15, 983–1002, 1966.

29. Van Douwen, E. K., “Nonnormality or hereditary paracompactness of some spaces of real functions”, *Topol. Appl.*, 39(1), 3–32, 1991.

30. Naimpally, S. A., “Essential fixed points and almost continuous functions, Michigan State University”, Ph.D. Thesis, East Lansing, 1964.

31. Naimpally, S. A., “Graph topology for function spaces”, *Trans. Am. Math. Soc.*, 123, 267–272, 1966.

32. Engelking, R., “General Topology, revised andcompleted ed.”, *Heldermann Verlag*, Berlin, 1989.

33. Gruenhage, G., “Generalized metric spaces and metrization”, Recent progress in general topology, *North-Holland*, Amsterdam, 239–274, 1992.

34. Banakh, T., “P0-spaces”, *Topology and its Applications*, 195, 151–173, 2015

35. Frolik, Z., “Generalization of compact and Lindelöf spaces”, *Czechoslovak Math. J.*, 13(84), 172—217, 1959 (Russian).

36. Sondore, A., Sostak, A., “On clp-compact and countably clp-compact spaces”, *Acta Univ. Latviensis*, 595, 123—143, 1994.

37. D’Aristotle, A. J., “Quasicompactness and functionally Hausdorff spaces”, *J. Aust. Math. Soc.*, 15(3), 319—324, 1973.

38. Gruenhage, G., “Generalized Metrizable Spaces”, Recent Progress in General Topology III, *Atlantis Press*, Amsterdam, 471-505, 2014.

39. McArthur, W. G., “G_δ-diagonals and metrization theorems”, *Pacific J. Math.*, 44(2), 613-617, 1973.

40. Steen, L. A., Seeback, J. A., “Counter Examples in Topology”, *Springer Verlag*, New York, 1978.

41. Husain, T., “Topology and Maps”, *Plenum Press*, New York, 1977.

42. Tkachuk, V.V., “A Cp-Theory Problem Book, Topological and Function Spaces”, *Springer*, New York, 2011.

43. Gillman, L., Jerison, M., “Rings of continuous functions, University Series in Higher Mathematics”, *D. Van Nostrand*, 1960.

44. Osipov, A. V., “The set-open topology”, *Topology Proc.*, 37, 205—217, 2011.

45. Siwiec, F., “Generalizations of the first axiom of Countability”, *Rocky Mountain J. Math.*, 5(1), 1-60, 1975.

46. Ntantu, I., “The compact-open topology on C(X), Virginia Polytechnic Institute and State University”, Doctoral Dissertation, 1985.

47. Kundu, S., McCoy, R. A., “Topologies between compact and uniform convergence on function spaces”, *Internat. J. Math. Math. Sci.*, 16, 101—109, 1993.

48. Taylor, A. E., Lay, D. C., “Introduction to Functional Analysis, 2nd ed.”, *John Wiley & Sons*, New York, 1980.

ÖZGEÇMİŞ

İsmail OSMANOĞLU 1989 yılında Ordu'nun Gölköy ilçesinde doğdu. Aslen Trabzon'un Çaykara ilçesindendir. İlk ve orta öğrenimini Gölköy'de tamamladı. 2011 yılında Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden mezun oldu. 2013 yılında Nevşehir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisansını tamamladı. Aynı yıl Nevşehir Hacı Bektaş Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalında Doktora öğrenimine başladı.

Adres: Atapark Mah. 1372. Sok. Çizmeci Apt. 6/6 06280 Keçiören, ANKARA

Telefon: 0545 403 5900

E-posta : osmanoglui@yahoo.com – ismailosmanoglu@yahoo.com