

T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

B-SPLINE KOLLOKASYON YÖNTEMİ İLE GENELLEŞTİRİLMİŞ
EŞİT GENİŞLİKLİ DALGA DENKLEMİNİN SAYISAL
ÇÖZÜMLERİ

Tezi Hazırlayan
İbrahim KAYA

Tez Danışmanı
Doç. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Ocak 2021
NEVŞEHİR

T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

B-SPLINE KOLLOKASYON YÖNTEMİ İLE GENELLEŞTİRİLMİŞ
EŞİT GENİŞLİKLİ DALGA DENKLEMİNİN SAYISAL
ÇÖZÜMLERİ

Tezi Hazırlayan
İbrahim KAYA

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Ocak 2021

NEVŞEHİR

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim boyunca ve tez konusunun seçimi ile tezin çalışmaları süresince tüm bilgilerini benimle paylaşan ve desteğini esirgemeyen, tezimde büyük emeği olan ve sabırla akademik yolda bana rehber olan Sayın hocam Doç. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ' a, yüksek lisansa başlamama vesile olup ve bütün hayatım boyunca sevgilerini, emeklerini benden esirgemeyen maddi ve manevi desteklerini hiçbir zaman geri çekmeyen bu tez çalışmama kadar tüm eğitim öğretim hayatımda bana sahip çıkan kıymetli babam İsmail KAYA' ya ve annem Yüksel KAYA' ya can-ı gönülden teşekkür ederim, ayrıca destekleri için Matematik Bölümü hocalarıma teşekkür ederim.

**B-SPLINE KOLLOKASYON YÖNTEMİ İLE GENELLEŞTİRİLMİŞ EŞİT
GENİŞLİKLİ DALGA DENKLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ
(Yüksek Lisans Tezi)**

İbrahim KAYA

**NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Ocak 2021

ÖZET

Bu tezde GEW denkleminin sayısal çözümleri kuintik ve septik B-spline kollokasyon sonlu elemanlar yöntemi ile elde edilmiştir.

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. Tezin birinci bölümünde; Sonlu Elemanlar Yöntemi, Spline Fonksiyonlar, B-Spline Fonksiyonlar, Kollokasyon Yöntemi, Eşit Genişlikli Dalga (EW) denklemi, Genelleştirilmiş Eşit Genişlikli Dalga (GEW) denklemi, Modifiye Edilmiş Dalga (MEW) denklemi hakkında detaylı bilgi verilmiştir.

Tezin ikinci bölümünde; kuintik B-spline kollokasyon yöntemi ile genelleştirilmiş eşit genişlikli dalga denkleminin sayısal çözümleri elde edilmiştir.

Tezin üçüncü bölümünde; septik B-spline kollokasyon yöntemi ile genelleştirilmiş eşit genişlikli dalga denkleminin sayısal çözümleri elde edilmiştir.

Tezin son bölümünde ise elde ettiğimiz sayısal çözümlerle ilgili sonuç ve öneriler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Genelleştirilmiş Eşit Genişlikli (GEW) Denklemi, Kollokasyon Yöntemi, Sonlu Elemanlar Yöntemi, Spline, B-Spline.

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ

Sayfa sayısı: 92

**NUMERICAL SOLUTIONS OF THE GENERALIZED EQUAL WIDTH WAVE
EQUATION WITH B-SPLINE COLLOCATION METHOD**

(M. Sc. Thesis)

İbrahim KAYA

**NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES**

January 2021 SUMMARY

ABSTRACT

In this thesis, numerical solutions of GEW equation are obtained by quintic and septic B-spline collocation finite element method.

This thesis study consists of four parts. In the first part of the thesis; detailed information about Finite Element Method, Spline Functions, B-Spline Functions, Collocation Method, Equal Width (EW) equation, Generalized Equal Width (GEW) equation, Modified Equal Width (MEW) equation has been given.

In the second part of the thesis, numerical solutions of the generalized equal-width wave equation with quintic B-spline collocation method are obtained.

In the third part of the thesis, numerical solutions of the generalized equal-width wave equation were obtained by the septic B-spline collocation method.

In the last part of the thesis, the obtained results and suggestions were given.

Keywords: Generalized Equal Width (GEW) Equation, Collocation Method, Finite Element Method, Spline, B-Spline.

Thesis Supervisor: Assoc. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ

Number of pages: 92

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY SAYFASI.....	I
TEZ BİLDİRİM SAYFASI.....	II
TEŞEKKÜR.....	III
ÖZET.....	IV
ABSTRACT.....	V
İÇİNDEKİLER.....	VI
TABLolar LİSTESİ.....	IX
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	XII
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	XIV
BÖLÜM 1	
GİRİŞ	1
1.1. Sonlu Elemanlar Yöntemi	1
1.2. Spline Fonksiyonlar.....	3
1.3. B-Spline Fonksiyonlar.....	5
1.3.1. Lineer B-Spline Fonksiyonlar.....	7
1.3.2. Kuadratik B-Spline Fonksiyonlar.....	8
1.3.3. Kübik B-Spline Foksiyonlar.....	10
1.3.4. Kuartik B-Spline Foksiyonlar.....	12
1.3.5. Kuintik B-Spline Foksiyonlar.....	14
1.3.6. Sektik B-Spline Foksiyonlar.....	17

1.3.7.	Septik B-Spline Foksiyonlar.....	20
1.4.	Kollokasyon Yöntemi.....	23
1.5.	Eşit Genişlikli Dalga (EW) Denklemi	25
1.6.	Genelleştirilmiş Eşit Genişlikli Dalga (GEW) Denklemi.....	27
1.7.	Modifiye Edilmiş Dalga (MEW) Denklemi.....	29

BÖLÜM 2

KUİNTİK B-SPLINE KOLLOKASYON YÖNTEMİ İLE GENELLEŞTİRİLMİŞ EŞİT GENİŞLİKLİ DALGA DENKLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ.....

2.1.	Kuintik B-Spline Kollokasyon Yöntemi	32
2.2.	Penta-Diagonal Algoritma İle Çözüm.....	36
2.3.	Lineer Kararlılık Analizi	37
2.4.	Sayısal Örnekler Ve Sonuçlar	38
2.5.	Tek Soliter Dalga Hareketi.....	38
2.6.	İki Soliter Dalganın Girişimi.....	43
2.7.	Maxwellian Başlangıç Koşulu	53

BÖLÜM 3

SEPTİK B-SPLINE KOLLOKASYON YÖNTEMİ İLE GENELLEŞTİRİLMİŞ EŞİT GENİŞLİKLİ DALGA DENKLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ.....

3.1.	Septic B-Spline Kollokasyon Yöntemi	61
3.2.	Lineer Kararlılık Analizi	66
3.3.	Sayısal Örnekler Ve Sonuçlar	66

3.3.1.	Tek Soliter Dalganın Hareketi.....	67
3.3.2.	İki Soliter Dalganın Girişimi.....	74
3.3.3	Maxwellian Başlangıç Koşulu	81

BÖLÜM 4

SONUÇ VE ÖNERİLER.....	86
KAYNAKLAR.....	87
ÖZGEÇMİŞ.....	92

TABLULAR LİSTESİ

Tablo 1.1. $\phi_m(x)$ ve $\phi'_m(x)$ in düğüm noktalarında aldığı değerler.....	9
Tablo 1.2. $\phi_m(x)$, $\phi'_m(x)$ ve $\phi''_m(x)$ in düğüm noktalarında aldığı değerler.....	11
Tablo 1.3. $\phi_m(x)$, $\phi'_m(x)$, $\phi''_m(x)$ ve $\phi'''_m(x)$ in düğüm noktalarında aldığı değerler.....	13
Tablo 1.4. $\phi_m(x)$, $\phi'_m(x)$, $\phi''_m(x)$, $\phi'''_m(x)$ ve $\phi^{(iv)}_m(x)$ in düğüm noktalarında aldığı değerler.	16
Tablo 1.5. $\phi_m(x)$, $\phi'_m(x)$, $\phi''_m(x)$, $\phi'''_m(x)$, $\phi^{(iv)}_m(x)$ ve $\phi^{(v)}_m(x)$ in düğüm noktalarında aldığı değerler.....	19
Tablo 1.6. $\phi_m(x)$, $\phi'_m(x)$, $\phi''_m(x)$, $\phi'''_m(x)$, $\phi^{(iv)}_m(x)$, $\phi^{(v)}_m(x)$ ve $\phi^{(vi)}_m(x)$ in düğüm noktalarında aldığı değerler.....	22
Tablo 2.1. Tek soliter dalga için $p = 2, h = 0.1, \Delta t = 0.2, x \in [0, 80]$ parametreleri ile bulunan hata normları ve invaryantlar.....	40
Tablo 2.2. Tek soliter dalga için $p = 2, h = 0.1, \Delta t = 0.2, x \in [0, 80]$ parametreleri ile bulunan hata normları ve invaryantlar.....	41
Tablo 2.3. Tek soliter dalga için $p = 3, h = 0.1, \Delta t = 0.2, x \in [0, 80]$ parametreleri ile bulunan hata normları ve invaryantlar.....	42
Tablo 2.4. Tek soliter dalga için $p = 3, h = 0.1, \Delta t = 0.2, x \in [0, 80]$ parametreleri ile bulunan hata normları ve invaryantlar.....	45

Tablo 2.5. Tek soliter dalga için $p = 4, h = 0.1, \Delta t = 0.2, x \in [0, 80]$ parametreleri ile bulunan hata normları ve invaryantlar.....	46
Tablo 2.6. Tek soliter dalga için $t = 20, x \in [0, 80]$ parametreleri ile elde edilen hata normları.....	47
Tablo 2.7. Tek soliter dalga için $t = 20, x \in [0, 80]$ parametreleri ile elde edilen hata normları	49
Tablo 2.8. Tek soliter dalga için $h = 0.1, \Delta t = 0.2, t = 20, x \in [0, 80]$ parametreleri ile elde edilen sonuçların karşılaştırılması	50
Tablo 2.9. İki soliter dalga için $p = 2, c_1 = 0.5, c_2 = 0.125, x_1 = 15, x_2 = 30, h = 0.1, \Delta t = 0.025$ parametreleri ile elde edilen invaryantların değerleri.....	51
Tablo 2.10. İki soliter dalga için $p = 3, c_1 = 0.3, c_2 = 0.0375, x_1 = 15, x_2 = 30, h = 0.1, \Delta t = 0.025$ parametreleri ile elde edilen invaryantların değerleri.....	52
Tablo 2.11. İki soliter dalga için $p = 4, c_1 = 0.2, c_2 = 1/80, x_1 = 15, x_2 = 30, h = 0.1, \Delta t = 0.025$ parametreleri ile elde edilen invaryantların değerleri	54
Tablo 2.12. Maxwellian başlangıç koşulu için elde edilen invaryantlar.....	55
Tablo 3.1. Tek soliter dalga için $p = 2, \Delta t = 0.2, h = 0.1, \varepsilon = 3, \mu = 1, 0 \leq x \leq 80$ parametreleri ile bulunan hata normları ve invaryantlar.....	70
Tablo 3.2. Tek soliter dalga için $p = 2, \Delta t = 0.2, h = 0.1, \varepsilon = 3, \mu = 1, 0 \leq x \leq 80$ parametreleri ile bulunan hata normları ve invaryantlar.....	71

Tablo 3.3. Tek soliter dalga için $p = 3, \Delta t = 0.2, h = 0.1, \varepsilon = 3, \mu = 1, 0 \leq x \leq 80$ parametreleri ile bulunan hata normları ve invaryantlar.....	72
Tablo 3.4. Tek soliter dalga için $p = 3, \Delta t = 0.2, h = 0.1, \varepsilon = 3, \mu = 1, 0 \leq x \leq 80$ parametreleri ile bulunan hata normları ve invaryantlar.....	73
Tablo 3.5. Tek soliter dalga için $p = 4, \Delta t = 0.2, h = 0.1, \varepsilon = 3, \mu = 1, 0 \leq x \leq 80$ parametreleri için bulunan hata normları ve invaryantlar.....	74
Tablo 3.6. Tek soliter dalga için $p = 2, 3, 4$ olmak üzere $\Delta t = 0.2, h = 0.1, \varepsilon = 3, \mu = 1,$ $0 \leq x \leq 80$ parametreleri ile bulunan sonuçların karşılaştırması.....	75
Tablo 3.7. İki soliter dalga için $p = 2, c_1 = 0.5, c_2 = 0.125, x_1 = 15, x_2 = 30, \Delta t = 0.025,$ $h = 0.1, \varepsilon = 3, \mu = 1, 0 \leq x \leq 80$ parametreleri ile bulunan invaryantlar.....	79
Tablo 3.8. İki soliter dalga için $p = 3, c_1 = 0.3, c_2 = 0.0375, x_1 = 15, x_2 = 30, \Delta t = 0.025,$ $h = 0.1, \varepsilon = 3, \mu = 1, 0 \leq x \leq 80$ parametreleri ile bulunan invaryantlar.....	80
Tablo 3.9. İki soliter dalga için $p = 4, c_1 = 0.2, c_2 = 1/80, x_1 = 15, x_2 = 30, \Delta t = 0.025,$ $h = 0.1, \varepsilon = 3, \mu = 1, 0 \leq x \leq 80$ parametreleri ile bulunan invaryantlar.....	81
Tablo 3.10. Maxwellian başlangıç durumu için invaryantlar.....	83

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1.1. Birinci dereceden spline fonksiyon.....	4
Şekil 1.2. Sıfıncı dereceden B-spline fonksiyon.....	6
Şekil 1.3. Lineer B-spline şekil fonksiyonları.....	8
Şekil 1.4. Kuadratik B-spline şekil fonksiyonları.....	10
Şekil 1.5. Kübik B-spline şekil fonksiyonları.....	12
Şekil 1.6. Kuartik B-spline şekil fonksiyonları.....	14
Şekil 1.7. Kuintik B-spline şekil fonksiyonları.....	17
Şekil 1.8. Sektik B-spline şekil fonksiyonları.....	20
Şekil 1.9. Septik B-spline şekil fonksiyonları.....	23
Şekil 2.1. Tek soliter dalganın $t = 0, 10, 20$ zaman adımlarında $c = 0.3, x_0 = 30,$ $x \in [0, 80]$ parametreleri için hareketi.....	48
Şekil 2.2. İki soliter dalganın $p = 3$ için farklı zaman adımlarındaki etkileşimi.....	56
Şekil 2.3. İki soliter dalganın $p = 4$ için farklı zaman adımlarındaki etkileşimi.....	57
Şekil 2.4. $p = 3$ için $t = 12$ zamanında Maxwellian başlangıç koşulu için dalganın hareketi.....	58
Şekil 2.5. $p = 4$ için $t = 12$ zamanında Maxwellian başlangıç koşulu için dalganın hareketi.....	59
Şekil 3.1. Tek soliter dalganın $p = 3, c = 0.3, x_0 = 30, 0 \leq x \leq 80, t = 0, 10, 20$ parametreleri için hareketi.....	69

Şekil 3.2. Tek soliter dalganın $p = 4$, $c = 0.2$, $x_0 = 30$, $0 \leq x \leq 80$, $t = 0, 10, 20$ parametreleri için hareketi.....	69
Şekil 3.3. $p = 3$ için iki soliter dalganın etkileşimi $a)t = 0, b)t = 50, c)t = 70, d)t = 100$	77
Şekil 3.4. $p = 4$ için iki soliter dalganın etkileşimi $a)t = 0, b)t = 50, c)t = 70, d)t = 100$	78
Şekil 3.5. . Maxwellian başlangıç koşulu için $t = 12$ ve $p = 3$ parametrelerinde μ nün aldığı değerler $a) \mu = 0.1, b) \mu = 0.05, c) \mu = 0.025, d) \mu = 0.01$	84
Şekil 3.6. Maxwellian başlangıç koşulu için $t = 12$ ve $p = 4$ parametrelerinde μ nün aldığı değerler $a) \mu = 0.1, b) \mu = 0.05, c) \mu = 0.025, d) \mu = 0.01$	85

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

EW	Eşit genişlikli dalga
MEW	Modifiye edilmiş dalga
GEW	Genelleştirilmiş eşit genişlikli dalga
KDV	Korteweg-de Vries
GKdV	Genelleştirilmiş Korteweg-de Vries
RLW	Düzenli uzun dalga
MRLW	Modifiye edilmiş düzenli uzun dalga
U_N	Yaklaşık çözüm
I_1	Kütle
I_2	Momentum
I_3	Enerji
L_2 ve L_∞	Hata normları
1. <i>Lineer.</i> <i>Tekniği</i>	1. Lineerleştirme tekniği
2. <i>Lineer.</i> <i>Tekniği</i>	2. Lineerleştirme tekniği

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Bu bölümde, tezde kullanılacak olan sonlu elemanlar yöntemi, spline fonksiyonlar ve B-spline fonksiyonlar hakkında bilgiler verilecektir.

1.1 Sonlu Elemanlar Yöntemi

Doğada karşılaşılan olayları ve problemleri kolaylıkla kavrayıp çözmek genelde zordur. Bu sebepten dolayı bu tür olaylar ve problemler anlaşılması daha kolay ya da bilinen alt problemlere ayrılarak daha kolay çözülebilir. Alt problemlerin çözülüp birleştirilmesi ile asıl probleme yakın bir çözümün elde edilmesi sağlanabilir. İşte sonlu elemanlar yöntemi, komplike olan bazı problemlerin çözülebilmesi için çözüm bölgesini basit alt bölgelere indirger ve denklem sistemini çözdükten sonra bu çözümleri birleştirerek yaklaşık çözümü bulur. Bu yöntemi kullanarak yaklaşık çözümüne ulaşılmaya çalışılan problemler de genellikle kısmi diferansiyel denklemler olarak ifade edilir. Örneğin; elastik cisim mekaniğinde bulmak istenilen sonuç cisimde meydana gelen yer değiştirmelerdir. Bu da yer değiştirme ve gerilme arasında kurulan ikinci mertebeden bir kısmi diferansiyel denklemin çözümü ile bulunur. Böyle denklemler basit geometri ve yükleme durumları için tam çözümler bulunabilecek biçimde çözülebilsen dahi, komplike problemlerde yaklaşık çözümlerin elde edilmesi kaçınılmazdır [1]. Sonlu elemanlar yöntemi ilk olarak yapısal mühendislik alanında kullanılmaya başlanmıştır. Bu alanda ilk çalışmalar gerçek ayırık elemanlar ve sürekli olan katı cismin parçaları arasında benzerlik geliştiren Hrenikof [2] ve Mchenry [3] tarafından gerçekleştirilmiştir. Virtüel iş prensibine dayanan bir direkt yaklaşım, Argyris tarafından verilmiş olan ve bir dizi makalede meslektaşları ve kendisi hesaplama teknikleriyle karmaşık problemlerin çözülebilmesi için bu çalışmayı gerçekleştirmişlerdir [4]. Son yıllarda dijital bilgisayarlarda olan gelişmeler sonlu eleman yönteminin hızlı bir şekilde gelişmesine neden olmuş ve uygulamalı matematikçiler, fizikçiler, mühendisler bu yöntemle ilgili çalışmalar yapmışlardır [5]. 1960 yılında “sonlu eleman” ifadesi Clough tarafından yayımlanan düzlem esnekliğindeki uygulamalar adlı makalesinde dile getirilmiştir [6]. Sonlu elemanlar yöntemi; dinamik ve ısı iletim problemleri, donanma mimarlığı, biomekanik ve elastik cisimlerin mekaniği, nükleer enerji mühendisliği, yapı

mühendisliği, uzay mühendisliği, yapı mekaniği ve akışkanlar mekaniği gibi bir çok değişik alandaki problemlere kolaylıkla uygulanabilmektedir. Sonlu elemanlar yönteminin önemli avantajları vardır. Bunlar aşağıda sıralanmıştır [7];

1. Şekilleri düzgün olmayan ve diğer yöntemlerle modellenemeyen yapıların modellenmesinde kolaylık sağlaması,
2. Eleman denklemleri birbirinden ayrı oluşturulduğu için farklı malzemelerden oluşan yapıları modelleyebilmesi,
3. Farklı sınır şartlarıyla kullanılabilmesi ve sınır şartları değişse bile sonlu elemanlar yönteminin değişmemesi,
4. Eleman büyüklüklerinin ihtiyaç duyulması halinde değiştirilebilmesi,
5. Sonlu eleman yöntemi ile elde edilen modelin gerektiğinde kolaylıkla değiştirilebilmesi,
6. Gelişen bilgisayar teknolojisine ve programlama diline kolaylıkla uyum sağlaması.

Ama sonlu elemanlar yönteminin bazı dezavantajları da vardır [8]. Bunlar;

1. Çözüm bölgesinin alt bölgelere ayrılabilmesi için iyi bir tecrübeye gerek olması,
2. Alt bölgelere süreklilik şartlarının uygulanabilmesinde zorluklarla karşılaşılması,
3. Çok hassas değerler ile çalışıldığı için bilgisayara veri girişinde hatalar yapılabilmesidir.

Herhangi bir probleme sonlu elemanlar yöntemi uygulanırken aşağıdaki adımlar izlenir [9].

1. Problemin çözüm bölgesi sonlu elemanlara ayrıştırılır (diskritizasyon).
2. Elde edilen çözüm bölgesindeki her bir tipik eleman için eleman denklemleri türetilir.
3. Eleman denklemleri birleştirilerek problemin çözüm bölgesindeki denklemleri elde edilir.
4. Problemin sınır şartları tatbik edilir.
5. Denklem sistemleri çözülür.

6. Elde edilen sonuçlar değerlendirilir.

1. 2 Spline Fonksiyonlar

Yaklaşım yöntemleri mühendislikte ve temel bilimlerde olduğu gibi matematikte de kullanılmaktadır. Genellikle iki tip yaklaşım probleminden söz edilebilir. Bu yöntemler birinci tip problemlerde, eldeki mevcut verilerin kullanılıp bilinmeyen fonksiyonları yaklaşık olarak bulabilmek için kullanılır. Bu tip problemlere veri uydurma problemleri denir. İkinci tip yaklaşımlar ise bazı fiziksel problemler için bir operatör denklem ile temsil edilen matematiksel modellerle ortaya çıkar. Böyle problemler; integro-diferansiyel denklemleri, öz değer ve öz vektörleri, adi ve kısmi diferansiyel denklemler için sınır değer problemleri içerir. En iyi çözümü bulmak için, her iki problem tipinde de, iki önemli sorun ile karşılaşılması mümkün olabilir;

1. Yaklaşım şartlarını sağlayan uygun fonksiyonları seçmek.
2. Yaklaşımın etkili olabilmesi için iyi bir yöntem seçmek.

Yaklaşım yöntemlerinden biri olan polinom yaklaşımı önemli bir yer tutmaktadır. Ama polinom yaklaşımı her zaman istenilen hassasiyette sonuç vermeyebilir. Köşeleri keskin olan ve yüksek mertebeden türevlerde hızlı değişim gösterebilen fonksiyonlara bazen de düzgün fonksiyonlara dahi yüksek dereceden polinomlar ile istenilen hassasiyette yaklaşım yapmak mümkün olmayabilir. Kullanılan nokta sayısı arttıkça, polinomun derecesi de artar ve hesaplama hatalarına sebep olabilir. Üstelik yaklaşımda kullanılmak istenilen fonksiyon asıl fonksiyondan farklılık gösterebilir. Bu sebepten birinci ve ikinci tip problemler için peş peşe gelen iki veri arasında birinci, ikinci ve üçüncü dereceden fonksiyonlarla yaklaşımın yapıldığı Spline interpolasyon yöntemi kullanılmaktadır.

Bu yöntem veri noktalarını çeşitli aralıklara bölüp her aralıkta daha düşük dereceden polinomlar ile yaklaşma esasına dayanmaktadır. Verilere kolaylıkla uyum sağlayabilen yeteri kadar esnekliğe sahip, yaklaşık çözümü bulunmak istenen, bilinmeyen fonksiyonlar için spline fonksiyonlar ve uygulamalarının kullanımı gitgide artmaktadır. Spline fonksiyonlar parçalı polinomlardır ve bu fonksiyonlar polinomların süreklilik özelliklerini gerektiren dizilişleri ile oluşmaktadır [8]. Spline ifadesi, ilk olarak 1946 yılında Schoenberg tarafından kullanılmıştır [10]. 1960 lı yıllara kadar yavaş bir gelişim gösteren spline fonksiyonlar, etkili yaklaşım gücü ve bazı yapısal özelliklerinden dolayı

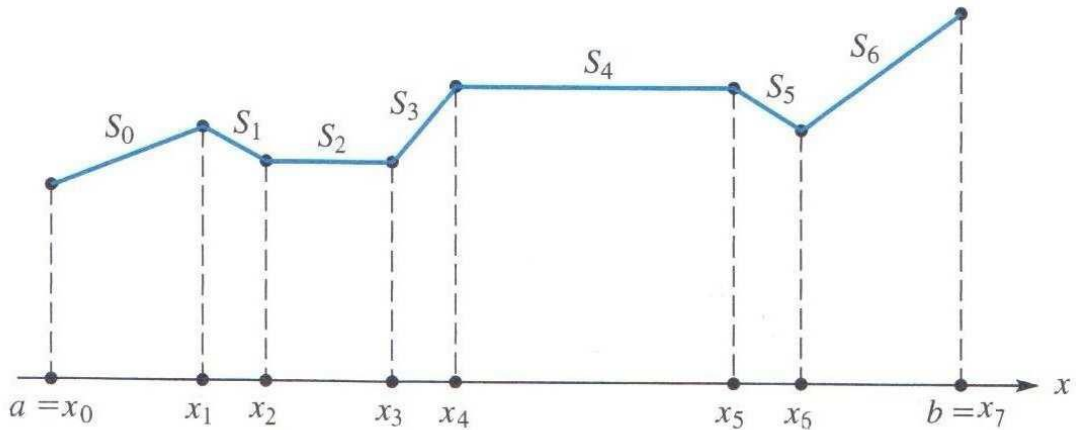
spline fonksiyonlara olan ilgi gün geçtikçe artmıştır [12]. Hesaplamalarda kolaylık sağlaması sebebiyle interpolasyon, veri uydurma, diferansiyel denklemlerin sayısal çözümünde, eğri ve yüzey uydurma gibi bir çok alanda sıkça kullanılmaya başlanmıştır [11]. Bilgisayar teknolojilerindeki gelişmeler ile depolanması, işlenmesi ve kullanılmasının kolay olması önemini artırmıştır [12]. Reel sayılarda monoton artan bir dizi

$$-\infty = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = \infty$$

olacak şekilde m . dereceden x_1, x_2, \dots, x_n e bağlı ve reel doğru üzerinde tanımlı $s(x)$ spline fonksiyonu aşağıdaki iki özelliği sağlar.

1. $s(x)$ her (x_i, x_{i+1}) , $(i = 0, \dots, n)$ aralığında m . veya daha küçük bir dereceden polinomdur. Burada $x_0 = -\infty$, $x_{n+1} = \infty$ dur.
2. $s(x)$ fonksiyonu ve $s(x)$ in $1, 2, \dots, (m-1)$. basamaktan türevleri, tanımlanan her aralıkta ve x_i , $(i = 1, 2, \dots, n)$ bölünme noktalarında süreklidir.

Bu tanıma göre, parçalı polinom fonksiyonların süreklilik durumlarında kendisi ve türevlerinin belirli koşulları sağlaması halinde bir spline fonksiyon oluşur. $m=0$ için ikinci şart geçersizdir. 0. dereceden spline fonksiyonuna adım fonksiyonu denir ve $m=1$ olması durumunda $s(x)$ fonksiyonu poligon (kırık çizgi) olur ve doğrusal polinomların birleştirilmesi ile oluşur. Şekil 1.1 de görüldüğü gibi [8].



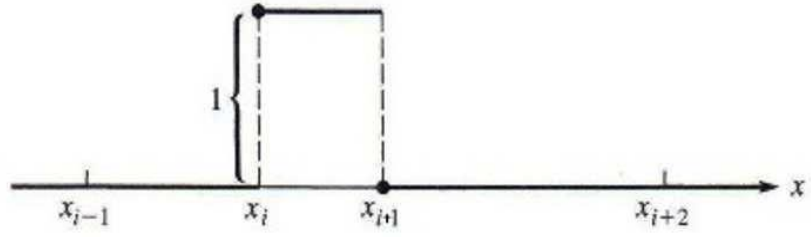
Şekil 1.1. Birinci dereceden spline fonksiyon

Spline fonksiyonun özellikleri aşağıda verilmiştir [8].

1. Spline fonksiyonlar düzgün fonksiyonlardır.
2. Spline fonksiyonlar uygun bazları olan, sonlu boyutlara sahip lineer uzaylardır.
3. Spline fonksiyonların türevleri alınması durumunda yine spline fonksiyonlar elde edilir, aynı durum integralleri içinde geçerlidir.
4. Spline fonksiyonlar bilgisayarlar ile işlenmesi, depolanması ve hesaplanması açısından uygun fonksiyonlardır, dijital ortama uyum sağlayan bir yapıları vardır.
5. Spline fonksiyonların kullanılması halinde matrisler elde edilir. Bu matrislerin uygun işaretlere sahip olmalarının yanı sıra sahip oldukları determinant özellikleri sayesinde de kolaylıkla hesaplanabilen matrislerdir.
6. Sürekli olan her fonksiyonun kâfi miktarda alt aralıklara ayrılmış $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı olması halinde; n . dereceden spline fonksiyonu ile iyi bir şekilde temsil edilebilir.
7. Spline fonksiyonların kullanılması durumunda fonksiyonun kendisine ve aynı anda türevine iyi yaklaşımlar yapılabilir.
8. Yakınsaklığın ve kararlılığın incelenmesinde spline fonksiyonlar kolaylık sağlar.
9. Derecesi düşük olan spline fonksiyonlar esnekliklerinin yanı sıra polinomlardaki gibi keskin salınım yapmazlar.

1.3 B-Spline Fonksiyonlar

Spline fonksiyon problemlerinin hesaplanması sonucunda lineer sistemler elde edildiği gibi lineer olmayan sistemlerde elde edilebilir. Bu sistemler ill-conditioned (iyi şartlı olmayan) yani istenilen parametrelerin hesaplanmasına izin vermeyecek şekilde olabilir. Ayrıca spline yaklaşımlar elde edilirken sayısal kararsızlıklarla karşılaşılabilmesi olası durumlardandır. Bu zorluklar “B-spline” (basis spline) olarak adlandırılan özel bir spline fonksiyon ile aşılabılır. Bütün spline fonksiyonlar kümesine bir baz oluşturdukları için B-spline fonksiyon denir. B-spline fonksiyonlar sayısal hesaplamalar için oldukça kullanışlıdır [13]. Sıfırıncı dereceden bir B-spline fonksiyon grafiği Şekil 1.2 de gösterilmiştir [8, 11].



Şekil 1.2. Sıfırıncı dereceden B-spline fonksiyon

$$B_i^0 = \begin{cases} 1, & x_i < x < x_{i+1} \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Buna göre $B_i^0(x_i) = 1$ ve $B_i^0(x_{i+1}) = 0$ dır. Sıfırıncı dereceden B-spline fonksiyona ait özelliklerden bazıları aşağıda verilmiştir;

1. $B_i^0(x)$ B-spline fonksiyon $[x_i, x_{i+1})$ aralığında tanımlıdır.
2. $\forall x$ ve i ler için $B_i^0(x) \geq 0$ eşitsizliği vardır.
3. B_i^0 fonksiyonu sayı doğrusunda sıçramanın olduğu düğüm noktalarının hepsinde sağda süreklidir.
4. Düğüm noktaları dizisinde 0. dereceden bütün spline fonksiyonlar bir baz teşkil eder.
5. $\forall x \in R$ için $\sum_{-\infty}^{\infty} B_i^0(x) = 1$ eşitliği vardır.

Sıfırıncı dereceden B-spline fonksiyonları kullanarak daha yüksek dereceden B-spline fonksiyonlar tüme varım yöntemi ile $k = 1, 2, \dots$ ve $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ olmak üzere

$$B_i^k(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+k} - x_i} B_i^{k-1}(x) + \frac{x_{i+k+1} - x}{x_{i+k+1} - x_{i+1}} B_{i+1}^{k-1}(x)$$

şeklinde hesaplanır [8, 13, 14].

1.3.1 Lineer B-Spline fonksiyonlar

$[a, b]$ aralığına ait düzgün bir parçalanış $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$ ve $h = x_{m+1} - x_m$ olmak üzere, x_m düğüm noktalarında $L_m(x)$ lineer B-spline fonksiyonlar $m = 0(1)N$ noktaları için;

$$L_m = \frac{1}{h} \begin{cases} (x_{m+1} - x) - 2(x_m - x), & [x_{m-1}, x_m] \\ (x_{m+1} - x), & [x_m, x_{m+1}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (1.3.1.1)$$

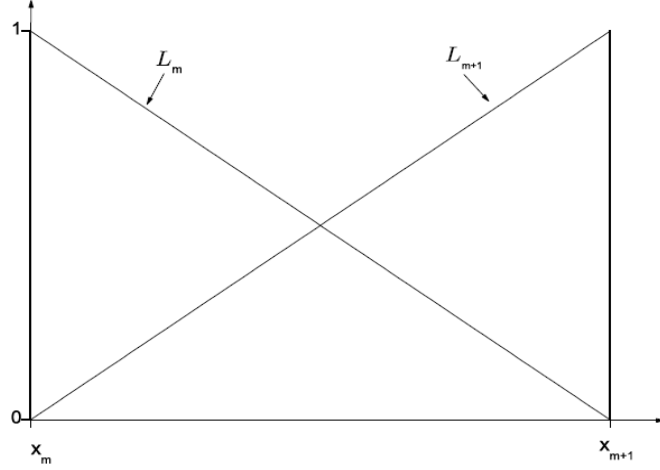
şeklinde tanımlanır [15]. $\{L_0(x), L_1(x), \dots, L_N(x)\}$ kümesi $a \leq x \leq b$ aralığında tanımlı olan fonksiyonlar için bir baz teşkil eder. Lineer B-spline fonksiyon ve türevi $[x_{m-1}, x_{m+1}]$ aralığı dışında sıfır olur. Şekil 1.3 te görüldüğü üzere her L_m B-spline fonksiyonu $[x_{m-1}, x_{m+1}]$ aralığında peş peşe iki elemanı örtmekte olup dolayısıyla her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu eleman L_m , L_{m+1} iki lineer B-spline fonksiyonu tarafından örtülmektedir. Bir $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı

$$h\xi = x - x_m, \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (1.3.1.2)$$

lokal koordinat dönüşümü ile $[0, 1]$ aralığına dönüşür. Böylece lineer B-spline fonksiyonlar $[0, 1]$ aralığında ξ türünden;

$$\begin{aligned} L_m &= 1 - \xi, \\ L_{m+1} &= \xi \end{aligned} \quad (1.3.1.3)$$

şeklinde bulunur [8] .



Şekil 1.3. Linear B-spline şekil fonksiyonları

1.3.2 Kuadratik B-Spline fonksiyonlar

$[a, b]$ aralığının bir düzgün parçalanışı $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$ ve $h = x_{m+1} - x_m$ olmak üzere, x_m düğüm noktalarında $\phi_m(x)$ kuadratik B-spline fonksiyonlar $m = -1(1)N$ noktaları için;

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^2} \begin{cases} (x_{m+2} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^2 + 3(x_m - x)^2, & [x_{m-1}, x_m] \\ (x_{m+2} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^2, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+2} - x)^2, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (1.3.2.1)$$

şeklinde tanımlanır [15]. $\{\phi_{-1}(x), \phi_0(x), \dots, \phi_N(x)\}$ kümesi $a \leq x \leq b$ aralığında tanımlı fonksiyonlar için bir baz teşkil eder. Kuadratik B-spline $\phi_m(x)$ fonksiyonu ve türevleri $[x_{m-1}, x_{m+2}]$ aralığı dışında sıfır olur. Şekil 1.4 te görülüyor ki her bir $\phi_m(x)$ kuadratik B-spline fonksiyonu bu aralıkta peş peşe üç elemanı örtmekte ve dolayısıyla her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu eleman $\phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}$ gibi üç kuadratik B-spline fonksiyon ile örtülmektedir [8]. $\phi_m(x)$ ve birinci mertebeden türevinin düğüm noktalarında aldığı değerler aşağıdaki Tablo 1.1 de verilmiştir. Bir $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı (1.3.1.2) lokal

koordinat dönüşümü ile $[0, 1]$ aralığına dönüşür. Bu şekilde kuadratik B-spline fonksiyonlar $[0, 1]$ aralığında ξ cinsinden (1.3.2.2) deki gibidir.

Tablo 1.1. $\phi_m(x)$ ve $\phi'_m(x)$ in düğüm noktalarında aldığı değerler

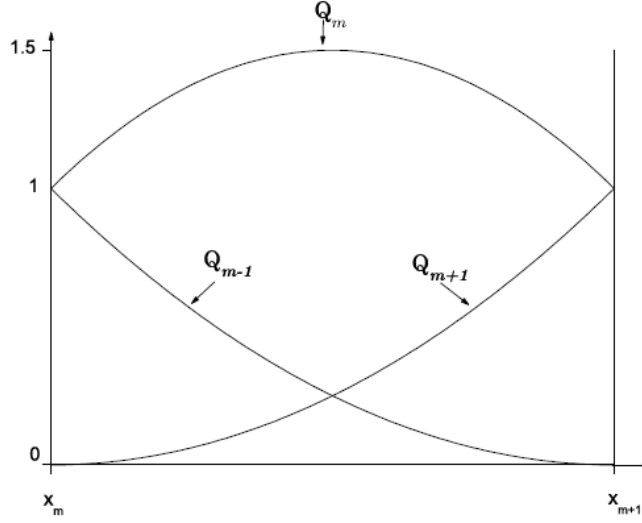
x	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}
ϕ_m	0	1	1	0
$h\phi'_m$	0	2	2	0

$$\begin{aligned}
 \phi_{m-1} &= (1-\xi)^2, \\
 \phi_m &= 1+2\xi-2\xi^2, \\
 \phi_{m+1} &= \xi^2.
 \end{aligned}
 \tag{1.3.2.2}$$

(1.3.2.2) şeklinde verilen kuadratik B-spline fonksiyonlar kullanılarak x_m düğüm noktasında U_N yaklaşık çözümü ve x e bağlı birinci mertebeden türevi δ_m eleman parametreleri türünden,

$$\begin{aligned}
 U_N(x_m, t) &= U_m = \delta_{m-1} + \delta_m, \\
 U'_m &= \frac{2}{h}(-\delta_{m-1} + \delta_m)
 \end{aligned}
 \tag{1.3.2.3}$$

şeklinde yazılabilir.



Şekil 1.4. Kuadratik B-spline şekil fonksiyonları

1.3.3 Kübik B-Spline Fonksiyonlar

$[a, b]$ aralığının düzgün bir parçalanışı $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$ ve $h = x_{m+1} - x_m$ olmak üzere, x_m düğüm noktalarında $\phi_m(x)$ kübik B-spline fonksiyonlar, $m = -1(1)N + 1$ noktaları için;

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (x - x_{m-2})^3, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ h^3 + 3h^2(x - x_{m-1}) + 3h(x - x_{m-1})^2 - 3(x - x_{m-1})^3, & [x_{m-1}, x_m] \\ h^3 + 3h^2(x_{m+1} - x) + 3h(x_{m+1} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^3, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+2} - x)^3, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (1.3.3.1)$$

bu şekilde tanımlanır [15]. $\{\phi_{-1}(x), \phi_0(x), \dots, \phi_N(x), \phi_{N+1}(x)\}$ kümesi $a \leq x \leq b$ aralığında tanımlı fonksiyonlar için baz teşkil eder. Kübik B-spline $\phi_m(x)$ fonksiyonu ve türevleri $[x_{m-2}, x_{m+2}]$ aralığı dışında sıfır olur. Şekil 1.5 te görülüyor ki her bir $\phi_m(x)$ kübik B-spline fonksiyonu $[x_{m-2}, x_{m+2}]$ aralığında peş peşe dört elemanı örtmekte ve dolayısıyla her bir $[x_m, x_{m+1}]$ aralığındaki sonlu eleman $\phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}, \phi_{m+2}$ gibi dört kübik B-spline fonksiyon tarafından örtülür [8]. $\phi_m(x)$ ve ikinci mertebeye kadarki $\phi_m'(x)$ ve $\phi_m''(x)$

türevlerinin düğüm noktalarındaki değerleri aşağıdaki Tablo 1.2 de verilmiştir. Karakteristik bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu eleman (1.3.1.2) lokal koordinat dönüşümü ile $[0, 1]$ aralığına dönüşür. Bu şekilde bir $[x_m, x_{m+1}]$ aralığını örten $\phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}, \phi_{m+2}$ kübik B-spline fonksiyonlar $[0, 1]$ aralığında ξ cinsinden (1.3.3.2) deki gibi bulunur.

Tablo 1.2. $\phi_m(x)$, $\phi'_m(x)$ ve $\phi''_m(x)$ in düğüm noktalarında aldığı değerler

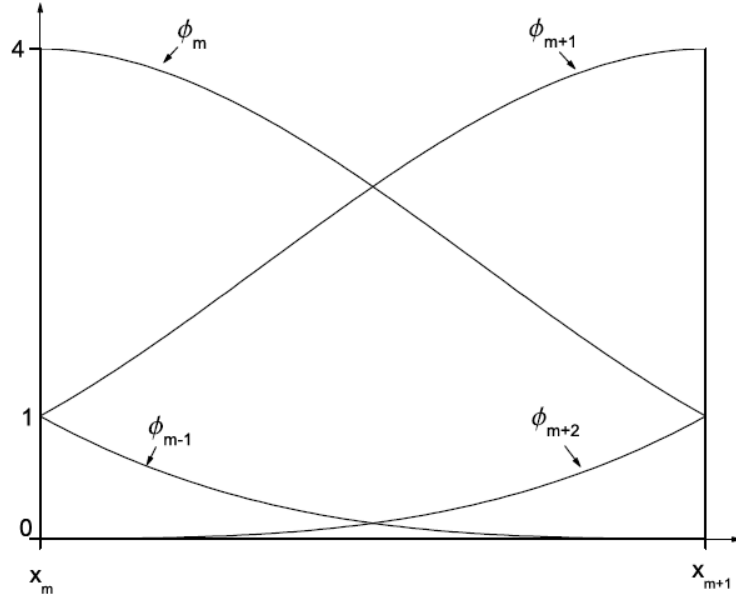
x	x_{m-2}	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}
$\phi_m(x)$	0	1	4	1	0
$h\phi'_m(x)$	0	3	0	-3	0
$h\phi''_m(x)$	0	6	-12	6	0

$$\begin{aligned}
\phi_{m-1} &= (1-\xi)^3, \\
\phi_m &= 1+3(1-\xi)+3(1-\xi)^2-3(1-\xi)^3, \\
\phi_{m+1} &= 1+3\xi+3\xi^2-3\xi^3, \\
\phi_{m+2} &= \xi^3.
\end{aligned} \tag{1.3.3.2}$$

(1.3.3.2) şeklinde verilen kübik B-spline fonksiyonlar kullanılarak x_m düğüm noktasında U_N yaklaşık çözümü ve x e bağlı ikinci mertebeye kadarki türevleri δ_m eleman parametreleri türünden,

$$\begin{aligned}
U_N(x_m, t) &= U_m = \delta_{m-1} + 4\delta + \delta_{m+1}, \\
U'_m &= \frac{3}{h}(-\delta_{m-1} + \delta_{m+1}), \\
U''_m &= \frac{6}{h^2}(\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1})
\end{aligned} \tag{1.3.3.3}$$

şeklinde yazılabilir.



Şekil 1.5. Kübik B-spline şekil fonksiyonları

1.3.4 Kuartik B-Spline Fonksiyonlar

$[a, b]$ aralığının bir düzgün parçalanışı $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$ ve $h = x_{m+1} - x_m$ olmak üzere, x_m düğüm noktalarında $\phi_m(x)$ kuartik B-spline fonksiyonlar $m = -2(1)N + 1$ noktaları için;

$$\phi_m(x) \begin{cases} (x - x_{m-2})^4, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ (x - x_{m-2})^4 - 5(x - x_{m-1})^4, & [x_{m-1}, x_m] \\ (x - x_{m-2})^4 - 5(x - x_{m-1})^4 + 10(x - x_m)^4, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+3} - x)^4 - 5(x_{m+2} - x)^4, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ (x_{m+3} - x)^4, & \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (1.3.4.1)$$

şeklinde tanımlanır [15]. $\{\phi_{-2}(x), \phi_{-1}(x), \dots, \phi_N(x), \phi_{N+1}(x)\}$ kümesi $a \leq x \leq b$ aralığında tanımlı olan fonksiyonlar için baz teşkil eder. Kuartik B-spline $\phi_m(x)$ fonksiyonu ve türevleri $[x_{m-2}, x_{m+3}]$ aralığı dışında sıfır olur. Şekil 1.6 da görülüyor ki her bir $\phi_m(x)$

kuartik B-spline fonksiyon $[x_{m-2}, x_{m+3}]$ aralığında peş peşe beş elemanı örter ve bu sebeple her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu eleman $\phi_{m-2}, \phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}, \phi_{m+2}$ gibi beş kuartik B-spline fonksiyon ile örtülür [8]. $\phi_m(x)$ ve üçüncü mertebeye kadarki $\phi_m'(x), \phi_m''(x), \phi_m'''(x)$ türevlerinin düğüm noktalarında aldığı değerler Tablo 1.3 te verilmiştir. Karakteristik bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu eleman (1.3.1.2) lokal koordinat dönüşümü ile $[0, 1]$ aralığına dönüşür. Böylece kuartik B-spline fonksiyonlar $[0, 1]$ aralığında ξ cinsinden (1.3.4.2) deki gibidir.

Tablo 1.3. $\phi_m(x), \phi_m'(x), \phi_m''(x)$ ve $\phi_m'''(x)$ in düğüm noktalarında aldığı değerler

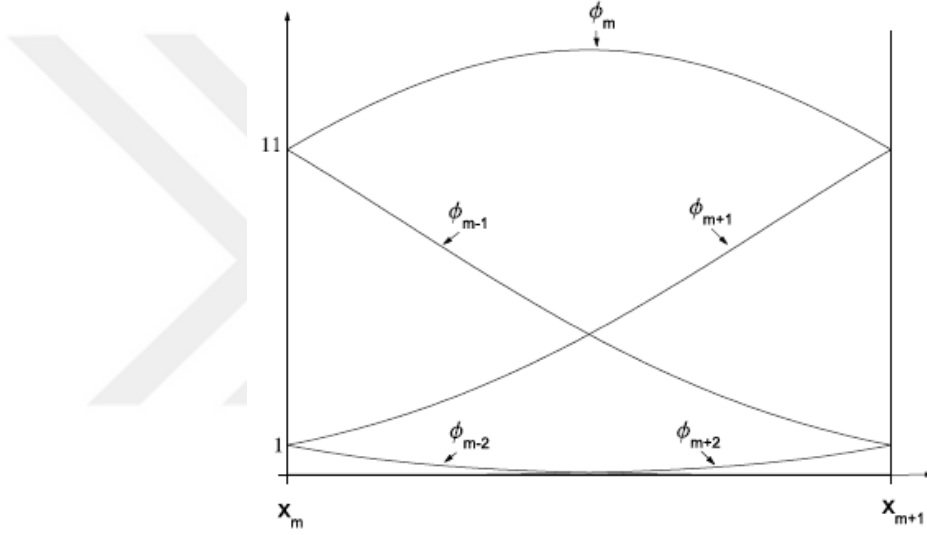
x	x_{m-2}	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}	x_{m+3}
ϕ_m	0	1	11	11	1	0
$h\phi_m'$	0	4	12	-12	-4	0
$h^2\phi_m''$	0	12	-12	-12	12	0
$h^3\phi_m'''$	0	24	-72	72	-24	0

$$\begin{aligned}
\phi_{m-2} &= 1 - 4\xi + 6\xi^2 - 4\xi^3 + \xi^4, \\
\phi_{m-1} &= 11 - 12\xi - 6\xi^2 + 12\xi^3 - \xi^4, \\
\phi_m &= 11 + 12\xi - 6\xi^2 - 12\xi^3 + \xi^4, \\
\phi_{m+1} &= 1 + 4\xi + 6\xi^2 + 4\xi^3 - \xi^4, \\
\phi_{m+2} &= \xi^4.
\end{aligned} \tag{1.3.4.2}$$

(1.3.4.2) şeklinde verilen kuartik B-spline fonksiyonlar kullanılarak x_m düğüm noktasındaki U_N yaklaşık çözümü ve x e göre üçüncü mertebeye kadarki türevleri δ_m eleman parametreleri türünden,

$$\begin{aligned}
U_N(x_m, t) &= U_m = \delta_{m-2} + 11\delta_{m-1} + 11\delta_m + \delta_{m+1}, \\
U_m' &= \frac{4}{h}(-\delta_{m-2} - 3\delta_{m-1} + 3\delta_m + \delta_{m+1}) \\
U_m'' &= \frac{12}{h^2}(\delta_{m-2} - \delta_{m-1} - \delta_m + \delta_{m+1}) \\
U_m''' &= \frac{24}{h^3}(-\delta_{m-2} + 3\delta_{m-1} - 3\delta_m + \delta_{m+1})
\end{aligned} \tag{1.3.4.3}$$

şeklinde yazılır.



Şekil 1.6. Kuartik B-spline şekil fonksiyonları

1.3.5 Kuintik B-Spline Fonksiyonlar

$[a, b]$ aralığının bir düzgün parçalanışı $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$ ve $h = x_{m+1} - x_m$ olmak üzere, x_m düğüm noktalarında $\phi_m(x)$ kuintik B-spline fonksiyonlar $m = -2(1)N + 2$ noktaları için;

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^5} \begin{cases} (x-x_{m-3})^5, & [x_{m-3}, x_{m-2}] \\ (x-x_{m-3})^5 - 6(x-x_{m-2})^5, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ (x-x_{m-3})^5 - 6(x-x_{m-2})^5 + 15(x-x_{m-1})^5, & [x_{m-1}, x_m] \\ (x-x_{m-3})^5 - 6(x-x_{m-2})^5 + 15(x-x_{m-1})^5 - 20(x-x_m)^5, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x-x_{m-3})^5 - 6(x-x_{m-2})^5 + 15(x-x_{m-1})^5 - 20(x-x_m)^5 + 15(x-x_{m+1})^5, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ (x-x_{m-3})^5 - 6(x-x_{m-2})^5 + 15(x-x_{m-1})^5 - 20(x-x_m)^5 + 15(x-x_{m+1})^5 - 6(x-x_{m+2})^5, & [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (1.3.5.1)$$

şeklinde tanımlanır. $\{\phi_{-2}(x), \phi_{-1}(x), \dots, \phi_N(x), \phi_{N+1}(x), \phi_{N+2}(x)\}$ kümesi $a \leq x \leq b$ aralığında tanımlı olan fonksiyonlar için baz teşkil eder. Kuintik B-spline $\phi_m(x)$ fonksiyonu ve türevleri $[x_{m-3}, x_{m+3}]$ aralığı dışında sıfır olur. Şekil 1.7 de görülüyor ki her bir $\phi_m(x)$ kuintik B-spline fonksiyonu $[x_{m-3}, x_{m+3}]$ aralığında peş peşe altı elemanı örter ve dolayısıyla her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu eleman $\phi_{m-2}, \phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}, \phi_{m+2}, \phi_{m+3}$ gibi altı kuintik B-spline fonksiyon ile örtülür. $\phi_m(x)$ ve dördüncü mertebeye kadarki $\phi_m'(x), \phi_m''(x), \phi_m'''(x)$ ve $\phi_m^{(iv)}(x)$ türevlerinin düğüm noktalarında aldığı değerler Tablo 1.4 te verilmiştir. Karakteristik bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu eleman (1.3.1.2) lokal koordinat dönüşümü ile $[0, 1]$ aralığına dönüşür. Böylece kuintik B-spline fonksiyonlar $[0, 1]$ aralığında ξ cinsinden (1.3.5.2) deki gibidir [8, 15].

Tablo 1.4. $\phi_m(x)$, $\phi'_m(x)$, $\phi''_m(x)$, $\phi'''_m(x)$ ve $\phi_m^{(iv)}(x)$ in düğüm noktalarında aldığı değerler

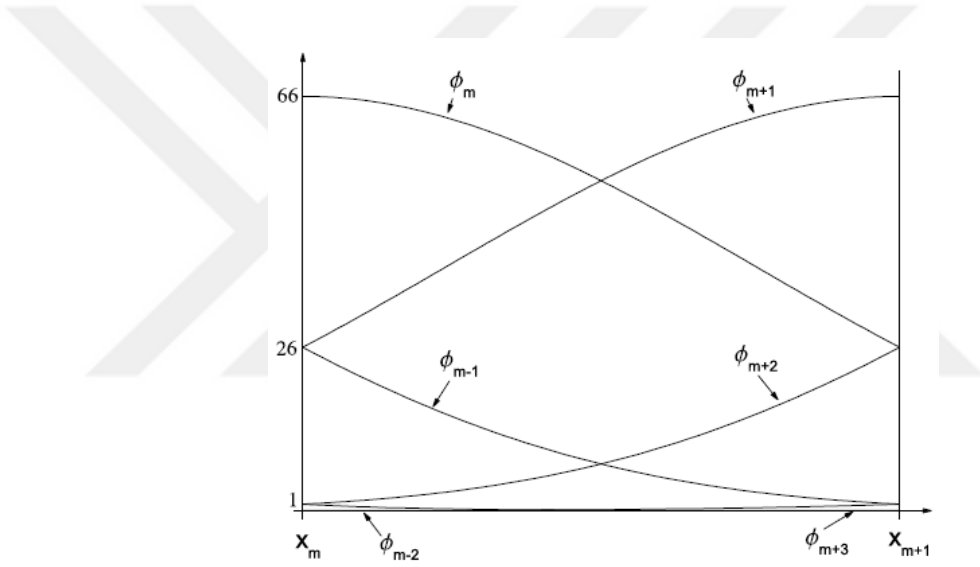
x	x_{m-3}	x_{m-2}	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}	x_{m+3}
ϕ_m	0	1	26	66	26	1	0
$h\phi'_m$	0	5	50	0	-50	-5	0
$h^2\phi''_m$	0	20	40	-120	40	20	0
$h^3\phi'''_m$	0	60	-120	0	120	-60	0
$h^4\phi_m^{(iv)}$	0	120	-480	720	-480	120	0

$$\begin{aligned}
 \phi_{m-2} &= 1 - 5\xi + 10\xi^2 - 10\xi^3 + 5\xi^4 - \xi^5, \\
 \phi_{m-1} &= 26 - 50\xi + 20\xi^2 + 20\xi^3 - 20\xi^4 + 5\xi^5, \\
 \phi_m &= 66 - 60\xi^2 + 30\xi^4 - 10\xi^5, \\
 \phi_{m+1} &= 26 + 50\xi + 20\xi^2 - 20\xi^3 - 20\xi^4 + 10\xi^5, \\
 \phi_{m+2} &= 1 + 5\xi + 10\xi^2 + 10\xi^3 + 5\xi^4 - 5\xi^5, \\
 \phi_{m+3} &= \xi^5.
 \end{aligned} \tag{1.3.5.2}$$

(1.3.5.2) şeklinde verilen kuintik B-spline fonksiyonlar kullanılarak x_m düğüm noktasında U_N yaklaşık çözümü ve x e göre dördüncü mertebeye kadarki türevleri δ_m eleman parametreleri türünden,

$$\begin{aligned}
U_N(x_m, t) &= U_m = \delta_{m-2} + 26\delta_{m-1} + 66\delta_m + 26\delta_{m+1} + \delta_{m+2}, \\
U_m' &= \frac{5}{h}(-\delta_{m-2} - 10\delta_{m-1} + 10\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \\
U_m'' &= \frac{20}{h^2}(\delta_{m-2} + 2\delta_{m-1} - 6\delta_m + 2\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \\
U_m''' &= \frac{60}{h^3}(-\delta_{m-2} + 2\delta_{m-1} - 2\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \\
U_m^{(iv)} &= \frac{120}{h^4}(\delta_{m-2} - 4\delta_{m-1} + 6\delta_m - 4\delta_{m+1} + \delta_{m+2}),
\end{aligned} \tag{1.3.5.3}$$

gibi yazılabilir.



Şekil 1.7. Kuintik B-spline şekil fonksiyonları

1.3.6 Sektik B-Spline Fonksiyonlar

$[a, b]$ aralığının düzgün bir parçalanışı $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$ ve $h = x_{m+1} - x_m$ olmak üzere, x_m düğüm noktalarında $\phi_m(x)$ sektik B-spline fonksiyonlar, $m = -3(1)N + 2$ noktaları için;

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^6} \begin{cases} (x-x_{m-3})^6, & [x_{m-3}, x_{m-2}] \\ (x-x_{m-3})^6 - 7(x-x_{m-2})^6, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ (x-x_{m-3})^6 - 7(x-x_{m-2})^6 + 21(x-x_{m-1})^6, & [x_{m-1}, x_m] \\ (x-x_{m-3})^6 - 7(x-x_{m-2})^6 + 21(x-x_{m-1})^6 - 35(x-x_m)^6, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x-x_{m+4})^6 - 7(x-x_{m+3})^6 + 21(x-x_{m+2})^6, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ (x-x_{m+4})^6 - 7(x-x_{m+3})^6, & [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ (x-x_{m+4})^6, & [x_{m+3}, x_{m+4}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (1.3.6.1)$$

şeklinde tanımlanır. $\{\phi_{-3}(x), \phi_{-2}(x), \phi_{-1}(x), \dots, \phi_N(x), \phi_{N+1}(x), \phi_{N+2}(x)\}$ kümesi $a \leq x \leq b$ aralığında tanımlı olan fonksiyonlar için baz teşkil eder. Sektik B-spline $\phi_m(x)$ fonksiyonu ve türevleri $[x_{m-3}, x_{m+4}]$ aralığı dışında sıfır olur. Şekil 1.8 de görülüyor ki her bir $\phi_m(x)$ sektik B-spline fonksiyonu $[x_{m-3}, x_{m+4}]$ aralığında peş peşe yedi elemanı örter ve dolayısıyla her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu eleman $\phi_{m-3}, \phi_{m-2}, \phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}, \phi_{m+2}, \phi_{m+3}$ gibi altı sektik B-spline fonksiyon ile örtülür. $\phi_m(x)$ ve beşinci mertebeye kadarki $\phi_m'(x), \phi_m''(x), \phi_m'''(x), \phi_m^{(iv)}(x)$ ve $\phi_m^{(v)}(x)$ türevlerinin düğüm noktalarında aldığı değerler Tablo 1.5 te verilmiştir. Karakteristik bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu eleman (1.3.1.2) lokal koordinat dönüşümü ile $[0, 1]$ aralığına dönüşür. Böylece sektik B-spline fonksiyonlar $[0, 1]$ aralığında ξ cinsinden (1.3.6.2) deki gibidir [8, 15].

Tablo 1.5. $\phi_m(x)$, $\phi'_m(x)$, $\phi''_m(x)$, $\phi'''_m(x)$, $\phi^{(iv)}_m(x)$ ve $\phi^{(v)}_m(x)$ in düğüm noktalarında aldığı değerler

x	x_{m-3}	x_{m-2}	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}	x_{m+3}	x_{m+4}
ϕ_m	0	1	57	302	302	57	1	0
$h\phi'_m$	0	6	150	240	-240	-150	-6	0
$h^2\phi''_m$	0	30	270	-300	-300	270	30	0
$h^3\phi'''_m$	0	120	120	-960	960	-120	-120	0
$h^4\phi^{(iv)}_m$	0	360	-1080	720	720	-1080	360	0
$h^5\phi^{(v)}_m$	0	720	-3600	7200	7200	3600	-720	0

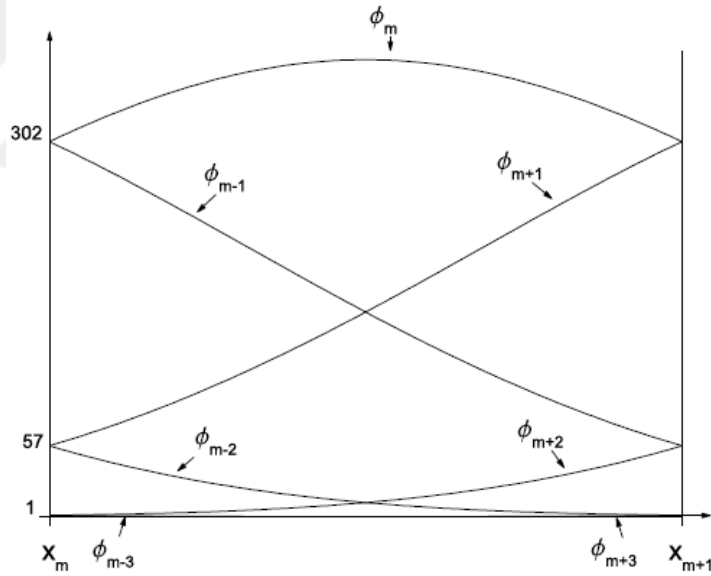
$$\begin{aligned}
 \phi_{m-3} &= 1 - 5\xi + 15\xi^2 - 20\xi^3 + 15\xi^4 - 6\xi^5 + \xi^6, \\
 \phi_{m-2} &= 57 - 150\xi + 135\xi^2 - 20\xi^3 - 45\xi^4 + 30\xi^5 - 6\xi^6, \\
 \phi_{m-1} &= 302 + 240\xi - 150\xi^2 + 160\xi^3 + 30\xi^4 - 60\xi^5 + 15\xi^6 \\
 \phi_m &= 302 + 240\xi - 150\xi^2 - 160\xi^3 + 30\xi^4 + 60\xi^5 - 20\xi^6, \\
 \phi_{m+1} &= 57 + 150\xi + 135\xi^2 + 20\xi^3 - 45\xi^4 - 30\xi^5 + 15\xi^6, \\
 \phi_{m+2} &= 1 + 6\xi + 15\xi^2 + 20\xi^3 + 15\xi^4 + 6\xi^5 - 6\xi^6, \\
 \phi_{m+3} &= \xi^6.
 \end{aligned} \tag{1.3.6.2}$$

(1.3.6.2) şeklinde verilen sektik B-spline fonksiyonlar kullanılarak x_m düğüm

noktasında U_N yaklaşık çözümü ve x e göre beşinci mertebeye kadarki türevleri δ_m eleman parametreleri türünden,

$$\begin{aligned}
 U_N(x_m, t) &= U_m = \delta_{m-3} + 57\delta_{m-2} + 302\delta_{m-1} + 302\delta_m + 57\delta_{m+1} + \delta_{m+2}, \\
 U_m' &= \frac{6}{h}(-\delta_{m-3} - 25\delta_{m-2} + 10 - 40\delta_{m-1} + 40\delta_m + 25\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \\
 U_m'' &= \frac{30}{h^2}(\delta_{m-3} + 9\delta_{m-2} - 10\delta_{m-1} - 10\delta_m + 9\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \\
 U_m''' &= \frac{120}{h^3}(-\delta_{m-3} - \delta_{m-2} + 8\delta_{m-1} - 8\delta_m + \delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \\
 U_m^{(iv)} &= \frac{360}{h^4}(\delta_{m-3} - 3\delta_{m-2} + 2\delta_{m-1} + 2\delta_m - 3\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \\
 U_m^{(v)} &= \frac{720}{h^5}(-\delta_{m-3} + 5\delta_{m-2} - 10\delta_{m-1} + 10\delta_m - 5\delta_{m+1} + \delta_{m+2})
 \end{aligned} \tag{1.3.6.3}$$

gibidir.



Şekil 1.8. Sektik B-spline Şekil Fonksiyonları

1.3.7 Septik B-Spline Fonksiyonlar

$[a, b]$ aralığının düzgün bir parçalanışı $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$ ve $h = x_{m+1} - x_m$ olmak üzere, x_m düğüm noktalarında $\phi_m(x)$ septik B-spline fonksiyonlar, $m = -3(1)N + 3$ noktaları için;

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^7} \begin{cases} (x-x_{m-4})^7, & [x_{m-4}, x_{m-3}] \\ (x-x_{m-4})^7 - 8(x-x_{m-3})^7, & [x_{m-3}, x_{m-2}] \\ (x-x_{m-4})^7 - 8(x-x_{m-3})^7 + 28(x-x_{m-2})^7, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ (x-x_{m-4})^7 - 8(x-x_{m-3})^7 + 28(x-x_{m-2})^7 - 56(x-x_{m-1})^7, & [x_{m-1}, x_m] \\ (x_{m+4}-x)^7 - 8(x_{m+3}-x)^7 + 28(x_{m+2}-x)^7 - 56(x_{m+1}-x)^7, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+4}-x)^7 - 8(x_{m+3}-x)^7 + 28(x_{m+2}-x)^7, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ (x_{m+4}-x)^7 - 8(x_{m+3}-x)^7, & [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ (x_{m+4}-x)^7, & [x_{m+3}, x_{m+4}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (1.3.7.1)$$

şeklinde tanımlanır. $\{\phi_{-3}(x), \phi_{-2}(x), \phi_{-1}(x), \dots, \phi_N(x), \phi_{N+1}(x), \phi_{N+2}(x), \phi_{N+3}(x)\}$ kümesi $a \leq x \leq b$ aralığında tanımlı olan fonksiyonlar için baz teşkil eder. Septik B-spline $\phi_m(x)$ fonksiyonu ve türevleri $[x_{m-4}, x_{m+4}]$ aralığı dışında sıfır olur. Şekil 1.9 da görülüyor ki her bir $\phi_m(x)$ septik B-spline fonksiyonu $[x_{m-4}, x_{m+4}]$ aralığında peş peşe sekiz elemanı örter ve dolayısıyla her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu eleman $\phi_{m-3}, \phi_{m-2}, \phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}, \phi_{m+2}, \phi_{m+3}$ ve ϕ_{m+4} gibi sekiz septik B-spline fonksiyon ile örtülür. $\phi_m(x)$ ve altıncı mertebeye kadarki $\phi_m'(x), \phi_m''(x), \phi_m'''(x), \phi_m^{(iv)}(x), \phi_m^{(v)}(x)$ ve $\phi_m^{(vi)}(x)$ türevlerinin düğüm noktalarında aldığı değerler aşağıdaki Tablo 1.6 da verilmiştir. Karakteristik bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu eleman (1.3.1.2) lokal koordinat dönüşümü ile $[0, 1]$ aralığına dönüşür. Böylece septik B-spline fonksiyonlar $[0, 1]$ aralığında ξ cinsinden (1.3.7.2) deki gibidir [8, 15].

Tablo 1.6. $\phi_m(x)$, $\phi'_m(x)$, $\phi''_m(x)$, $\phi'''_m(x)$, $\phi_m^{(iv)}(x)$, $\phi_m^{(v)}(x)$ ve $\phi_m^{(vi)}(x)$ in düğüm noktalarında aldığı değerler

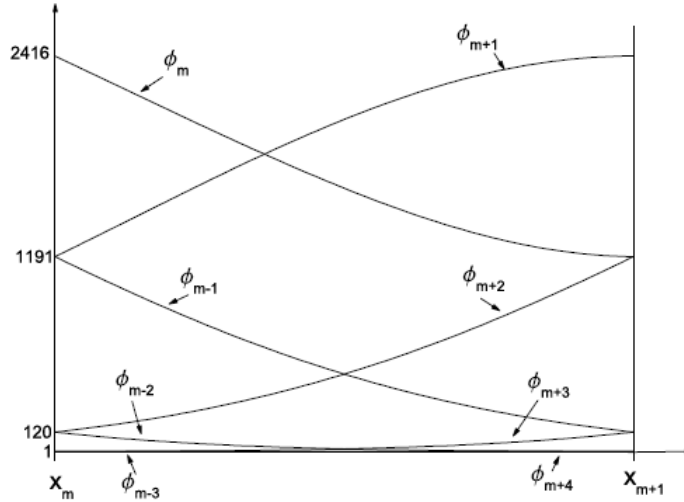
x	x_{m-4}	x_{m-3}	x_{m-2}	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}	x_{m+3}	x_{m+4}
ϕ_m	0	1	120	1191	2416	1191	120	1	0
$h\phi'_m$	0	-7	-392	-1715	0	1715	392	7	0
$h^2\phi''_m$	0	42	1008	630	-3360	630	1008	42	0
$h^3\phi'''_m$	0	-210	-1680	3990	0	-3990	1680	210	0
$h^4\phi_m^{(iv)}$	0	840	0	-7560	13440	-7560	0	840	0
$h^5\phi_m^{(v)}$	0	-2520	10080	-12600	0	12600	-10080	2520	0
$h^6\phi_m^{(vi)}$	0	5040	-30240	75600	-100800	75600	-30240	5040	0

$$\begin{aligned}
 \phi_{m-3} &= 1 - 7\xi + 21\xi^2 - 35\xi^3 + 35\xi^4 - 21\xi^5 + 7\xi^6 - \xi^7, \\
 \phi_{m-2} &= 120 - 392\xi + 504\xi^2 - 280\xi^3 + 84\xi^5 - 42\xi^6 + 7\xi^7, \\
 \phi_{m-1} &= 1191 - 1715\xi + 315\xi^2 + 665\xi^3 - 315\xi^4 - 105\xi^5 + 105\xi^6 - 21\xi^7, \\
 \phi_m &= 2416 - 1680\xi^2 + 560\xi^4 - 140\xi^6 + 35\xi^7, \\
 \phi_{m+1} &= 1191 + 1715\xi + 315\xi^2 - 665\xi^3 - 315\xi^4 + 105\xi^5 + 105\xi^6 - 35\xi^7, \\
 \phi_{m+2} &= 120 + 392\xi + 504\xi^2 + 280\xi^3 - 84\xi^5 - 42\xi^6 + 21\xi^7, \\
 \phi_{m+3} &= 1 + 7\xi + 21\xi^2 + 35\xi^3 + 35\xi^4 + 21\xi^5 + 7\xi^6 - 7\xi^7, \\
 \phi_{m+4} &= \xi^7.
 \end{aligned} \tag{1.3.7.2}$$

(1.3.7.2) şeklinde verilen septik B-spline fonksiyonlar kullanılarak x_m düğüm noktasında U_N yaklaşık çözümü ve x e göre altıncı mertebeye kadarki türevleri δ_m eleman parametreleri türünden,

$$\begin{aligned}
 U_N(x_m, t) &= U_m = \delta_{m-3} + 120\delta_{m-2} + 1191\delta_{m-1} + 241\delta_m + 1191\delta_{m+1} + 120\delta_{m+2} + \delta_{m+3}, \\
 U_m' &= \frac{7}{h}(-\delta_{m-3} - 56\delta_{m-2} - 245\delta_{m-1} + 245\delta_{m+1} + 56\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \\
 U_m'' &= \frac{42}{h^2}(\delta_{m-3} + 24\delta_{m-2} + 15\delta_{m-1} - 80\delta_m + 15\delta_{m+1} + 24\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \\
 U_m''' &= \frac{210}{h^3}(-\delta_{m-3} - 8\delta_{m-2} + 19\delta_{m-1} - 19\delta_{m+1} + 8\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \\
 U_m^{(iv)} &= \frac{840}{h^4}(\delta_{m-3} - 9\delta_{m-1} + 16\delta_m - 9\delta_{m+1} + \delta_{m+3}), \\
 U_m^{(v)} &= \frac{2520}{h^5}(-\delta_{m-3} + 4\delta_{m-2} - 5\delta_{m-1} + 5\delta_{m+1} - 4\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \\
 U_m^{(vi)} &= \frac{5040}{h^6}(\delta_{m-3} - 6\delta_{m-2} + 15\delta_{m-1} - 20\delta_m + 15\delta_{m+1} - 6\delta_{m+2} + \delta_{m+3})
 \end{aligned} \tag{1.3.7.3}$$

şeklinde tanımlanır.



Şekil 1.9. Septik B-spline Şekil Fonksiyonları

1.4 Kollokasyon Yöntemi

Bir diferansiyel denkelemin tam çözümü ve yaklaşık çözümünün farkı, sıfırdan farklı bir ağırlık fonksiyonu ile çarpılarak toplamlarının en küçük hale getirilmesi işlemi

“ağırlıklı kalan yaklaşımı” olarak ifade edilir. Bu yaklaşıma dayanan yöntemlerde “ağırlıklı kalan yöntemleri” denir. Her denklemin ağırlıklı integral formu oluşturulabileceğinden her denkleme uygulanabilir. Bu sebeple varyasyonel yöntemlerden daha geniş bir aralıkta olan problemlere uygulanabilir. Bu yöntemler bütün denklemlerin ağırlıklı integral formunu oluşturmakta kullanılabilir. Ağırlıklı integral form problemin sınır şartlarını içermediği için, ağırlık fonksiyonları yaklaşık çözümün hem doğal hem de temel sınır şartlarını sağlayacak biçimde seçilmesi gerekir. Ağırlıklı kalan yöntemlerini ifade edebilmek için Ω bölgesinde

$$A(u) = f \quad (1.4.1)$$

operatör denklemini göz önüne alırsak burada A lineer veya lineer olmayan bir operatör, f bağımsız değişken, u ise bağımlı değişkendir, u çözümü için bir yaklaşım olarak

$$u_N = \sum_{j=1}^N c_j \phi_j + \phi_0 \quad (1.4.2)$$

kullanılır. (1.4.1) de (1.4.2) denklemi ile verilen u_N yaklaşık çözüm yerine yazılırsa $f_N = A(u_N)$ fonksiyonu elde edilir ve bu fonksiyon genellikle f ye eşit değildir.

$A(u_N)$ ve f fonksiyonunun farkına yaklaşım kalanı (rezidüsü) denir ve

$$R = A(u_N) - f = A\left(\sum_{j=1}^N c_j \phi_j + \phi_0\right) - f \neq 0 \quad (1.4.3)$$

şeklinde ifade edilir. Verilen R kalan fonksiyonu c_j parametrelerine bağlı olduğu gibi konuma da bağlıdır ve ağırlıklı kalan yöntemlerinde c_j parametreleri ağırlıklı kalan integralindeki R kalanı sıfır olacak şekilde seçilmelidir.

$$\int_{\Omega} \psi_i(x, y) R(x, y, c_j) dx dy = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, N) \quad (1.4.4)$$

Burada Ω iki boyutlu bir bölgedir. ψ_i ler ise ağırlıklı kalan fonksiyonlarıdır. (1.4.4) integralinin hesaplanmasıyla elde edilen denklemlerin çözülebilmesi için seçilen ψ_i ağırlıklı kalan fonksiyonlar kümesi lineer bağımsız olmalıdır. Ağırlıklı kalan yöntemlerinden bir kaç; Galerkin, Petrov-Galerkin, Subdomain ve Kollokasyon yöntemleridir.

Bu tez çalışmasında kullanacağımız kollokasyon yönteminde Ω çözüm bölgesinde seçilen N tane $x^i \equiv (x^i, y^i)$ kollokasyon noktasında kalanın sıfır olabilmesi için;

$$R(x^i, y^i, c_j) = 0, \quad (i = 1, 2, 3, \dots, N) \quad (1.4.5)$$

olmalıdır.

\mathbf{x}^i kollokasyon noktalarının denklem sistemi iyi şartlı olacak biçimde seçilmesi gerekir. (1.4.4) denkleminde, $\psi_i = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^i)$ alınırsa;

$$\int_{\Omega} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^i) R(\mathbf{x}, c_j) dx dy = 0 \quad (1.4.6)$$

veya

$$R(\mathbf{x}^i, c_j) = 0 \quad (1.4.7)$$

elde edilir.

Burada $\delta(x)$ Dirac delta fonksiyonudur

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \delta(x - \xi) dx dy = f(\xi) \quad (1.4.8)$$

şeklinde tanımlanır [16, 17].

1.5 Eşit Genişlikli Dalga (EW) Denklemi

Morrison ve çalışma arkadaşlarının elde ettiği eşit genişlikli dalga (EW) denklemi,

$$U_t + \varepsilon U U_x - \mu U_{xxt} = 0, \quad (1.5.1)$$

şeklindeki kısmi diferansiyel denklemdir [18, 19]. Fiziksel sınır koşulları $x \rightarrow \pm\infty$ için $U \rightarrow 0$ dır. Burada t zaman, x uzay koordinatları olmak üzere $U(x,t)$ dalga genliğidir. Burada μ pozitif parametredir. t ve x indisleri değişkenlerdir [18, 19]. UU_x ve U_{xx} terimleri sırayla lineer olmayan dalganın yükselmesini ve yayılımını göstermektedir. EW denklemi başlangıç değerleri ve sınır koşulları ile analitik olarak çözülmüştür. EW denklemi için çok sayıda sayısal yöntem geliştirilmiştir [18]. Gardner ve çalışma arkadaşları kuadratik B-spline sonlu elemanlar yöntemini kullanarak Petrov- Galerkin metodu ile soliter dalganın hareketini ve bir undular bore gelişimini araştırmışlardır [20]. Zaki, tek bir soliter dalganın hareketini ve bir undular bore gelişimini incelemek için lineer B-spline sonlu elemanlarını kullanarak, en küçük kareler tekniği ile EW denklemi çözmüştür [21]. Zaki, ayrıca test fonksiyonlarını ikinci dereceden B-spline fonksiyonlar şeklinde alarak, Petrov-Galerkin sonlu elemanlar yöntemi ile, EW denkleminin soliter dalga gelişimini de incelemiştir [22]. Raslan, tek bir soliter dalganın genliğini, hızını ve konumunu, soliter dalgaların etkileşimini ve bir undular bore gelişimini göstermek için kuintik B-spline kollokasyon sonlu elemanlar yöntemi kullanmıştır [23]. Doğan, tek bir soliter dalganın hareketini ve bir undular bore gelişimini incelemek için EW denkleminde lineer B-spline fonksiyonlar olarak alınan şekil fonksiyonlarıyla birlikte Galerkin metodunu kullanmıştır [24]. Saka ve çalışma arkadaşları ise soliter dalga oluşumunu ve dalgaların gelişimini incelemek için EW denkleminde kübik B-spline kollokasyon metodunu uygulamışlardır [25]. Denklemi Gardner ve Gardner tarafından kübik B-spline Galerkin yöntemi uygulanmıştır [26]. Dağ ve Saka denklemin sayısal çözümü için kübik B-spline fonksiyonlara dayanan kollokasyon yöntemini araştırmışlardır [27]. Raslan EW denkleminin sayısal çözümü için kuartik B-spline fonksiyonlar ile kollokasyon yöntemini araştırmıştır [28]. Fazal-i Haq ve çalışma arkadaşları ise denklemin sayısal çözümü için septik B-spline fonksiyonlar ile kollokasyon yöntemini kullanmıştır [29]. EW denklemi sıgı olmayan su dalgaları ve iyon akustik plazma dalgaları gibi çok önemli fiziksel olayları tanımladığından dolayı lineer olmayan dalga yayılımı konusunda önemli bir rolü vardır [30, 31, 32].

1.6 Genelleştirilmiş Eşit Genişlikli Dalga (GEW) Denklemi

GEW denkleminin formu;

$$U_t + \varepsilon U^p U_x - \mu U_{xxt} = 0 \quad (1.6.1)$$

biçimindedir.

Burada p ise pozitif bir tamsayıdır [32]. GEW denkleminin sayısal çözümü son yıllarda fazlaca incelenmiştir [33]. Hamdi ve çalışma arkadaşları, Maple yazılımı ile GEW denkleminin soliter dalga çözümlerini analitik olarak bulmuşlardır ve tam çözüm tekniklerini göstermişlerdir [34]. Raslan, GEW denkleminin numerik çözümünü kübik B-spline fonksiyonlar ile kollokasyon yöntemini kullanarak bulmuştur [35]. Evans ve Raslan, iki dalga girişimi, dalga oluşumu problemlerinin sayısal çözümlerini ve GEW denkleminin soliter dalga çözümünü kuadratik B-spline kollokasyon yöntemini kullanarak elde etmişlerdir [36]. Roshan denklemi Petrov-Galerkin yöntemini kullanarak çözmüştür [37]. Panahipour, GEW denkleminin sayısal çözümü için RBF kollokasyon yöntemini kullanmıştır [38]. Denklem tam çözüm teknikleri Taghizadeh ve çalışma arkadaşları tarafından da gösterilmiştir [39]. Bu denklemde $p=1$ alınırsa EW denklemi elde edilir. Bu denklemin sayısal çözümü Hamdi ve çalışma arkadaşları tarafından adaptif bir yöntem kullanılarak araştırılmıştır [40]. EW denklemi için soliter ve diğer dalga hareketlerinin sınır şartları $x \rightarrow \pm\infty$ için $U(x,t) \rightarrow 0$ dır. Bu denkleminin soliter dalga analitik çözümü ise $U(x,t) = A \operatorname{sech}(k[x - x_0 - vt])$

şeklindedir. $k = \sqrt{\frac{1}{4\mu}}$, $v = c$ olmak üzere k dalga sayısını, v ise dalga hızını

göstermektedir. Bu çözüm v nin işaretine bağlı olarak x in negatif veya pozitif yönünde hareket eden soliter dalgaların hareketini ifade eder. EW denkleminin soliter dalga çözümleri $-\infty < v < +\infty$ aralığında olan dalga hızları için oluşur. Soliter dalganın

genişliği ise $\lambda = \frac{2}{k} \operatorname{sech}^{-1} \left[\sqrt{\bar{u}} \right] = 4\sqrt{\mu} \operatorname{sech}^{-1} \left(\sqrt{\bar{u}} \right)$ şeklindedir [40]. Bu denklemde \bar{u}

dalganın genliğidir ve $\bar{u} = u_\lambda / u_{zirve} = \operatorname{sech}^2 [k\lambda/2]$ şeklindedir. EW denkleminde bulunan soliter dalgalar herhangi hız ve dalga genliği için sabit genişliğe sahiptir.

Çünkü λ ve k sadece μ ye bağlı değerlerdir. EW denklemi adını bu özellikten almıştır. Denklem çözümleri, bozulmuş soliter dalganın salınan bir izle bozulan veya patlayan genlikli büzüşen bir dalgaya dönüşebilir. EW denkleminin çözümlerinin soliter dalga etkileşimleri hız ve genlikçe sınırsız büyüyebildiği gibi bir dizi zayıf dalgaya parçalanabilir. Bu etkileşimler esnek olmayan ya da açık olmayan etkileşimler şeklinde isimlendirilir. Matematiksel olarak EW denklemi integrallenemezdir. İşte bu durum onun dalga etkileşimlerini içeren esnek olmayan özelliklerinden kaynaklanır. İntegrallenebilen bir denklem sonsuz sayıda korunum kanununa sahipken integrallenemeyen denklemler ise sınırlı sayıda korunum kanununa sahiptir. Olver, EW denkleminin çözümlerinin üç tane korunum kanuna sahip olduğunu ispatlamıştır [41]. Bu kanunlar akışkanlar mekaniğinde kütle, momentum ve enerjinin korunumu kanununu ifade etmektedir.

Olver bu korunum kanunlarının

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} u dx, \quad I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (u^2 + \mu u_x u_x) dx, \quad I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} u^3 dx,$$

olduğunu göstermiştir. Birbirleri ile çarpıştıktan sonra ya da uzun mesafelerde hareket ederken orijinal şekillerinde, hızlarında ve büyüklüklerinde kayda değer bir değişiklik yapmadan hareket eden dalgalara “soliton” ismi verilir. Solitonlar elastik dalga etkileşimine sahip özel dalgalardır. EW denklemi gibi integrallenemeyen denklemlerle ilişkili olan soliter dalgalarda soliton değildir. Daha önceleri EW denkleminin aslında integrallenebilen ve elastik dalga etkileşimlerine sahip olduğu düşünülürdü. Bu düşünce tam olmayan ya da düşük çözünürlüklü sayısal yöntemlerin hesaplamalarından ve elastik olmayan dalga etkileşimlerinin küçük etkilerinin gözden kaçtığı sayısal çözümlerden kaynaklanmıştır. Örneğin soliter dalganın yavaş yavaş bozulması ve zayıf iz dalgalarını bırakmasının izahı yapılamıyordu ya da sayısal olarak üretilmiş salınım şeklinde yorumlanıyordu. Bu sayısal zorluk ilk kez aktarılmış dalgalarda soliter dalgalarda izi halinde yeteri kadar büyük ve kolaylıkla gözlenebilir elastik olmayan etkiler üreten iki soliter dalganın tek boyutlu çarpışmasındaki çalışmada Santarelli tarafından izah edilmiş ve çalıştırılmıştır [42].

1.7 Modifiye Edilmiş Dalga (MEW) Denklemi

GEW denkleminde $p = 2$, $\varepsilon = 3$ yazılırsa

$$U_t + 3U^2U_x - \mu U_{xxx} = 0 \quad (1.7.1)$$

MEW denklemi elde edilir. Modifiye edilmiş denklemlerin her biri lineer olmayan dalga denklemleridir ayrıca hepsinin soliter dalga çözümleri vardır. Bu soliter dalgalar negatif yada pozitif büyüklüklere sahip oldukları gibi bu dalgaların hepsi genlikleri ile

orantılı olarak pozitif hıza ve hepsi de $k = \sqrt{\frac{1}{\mu}}$ dalga sayısına sahiptir. Bu sebepten tüm

soliter dalgalar eşit genişliğe sahiptir. EW denklemindeki gibi MEW denkleminin de sınırlı sayıda başlangıç ve sınır şartlarına bağlı analitik çözümleri vardır. Bundan dolayı MEW denklemi ile ilgili olayların anlaşılabilmesi için çeşitli başlangıç ve sınır şartlarını ihtiva eden sayısal çözümlerin gerekliliği ortaya çıkmıştır. EW denklemi gibi MEW denkleminin de sayısal çözümleri birçok araştırmacı tarafından farklı yöntemler ile elde edilmiştir [32]. Zaki, MEW denkleminin yaklaşık çözümlerini kuintik B-spline baz fonksiyonlar yardımı ile, Petrov-Galerkin sonlu eleman yöntemini kullanarak bulmuştur [43]. Wazwaz, $\tan h$ ve $\sin e - \cos e$ yöntemlerini denklemin lineer olmayan iki formu için sunmuştur [44]. Esen, kuadratik B-spline fonksiyonlar ile Lumped Galerkin sonlu elemanlar yöntemini kullanarak MEW denkleminin sayısal çözümlerini bulmuştur [45]. Saka, konuma ve zamana göre parçalama (split) tekniği ile kuintik B-spline kollokasyon yöntemini kullanarak MEW denkleminin sayısal çözümlerini elde etmiştir [46]. Lu, denklemin sayısal çözümlerini, He'nin varyasyonel iterasyon yöntemini kullanarak bulmuştur [47]. Rui ve çalışma arkadaşları, çatallama (bifurcation) yöntemini kullanarak denklemin sayısal çözümlerini elde etmiştir [48]. Esen ve Kutluay, lineerleştirilmiş kapalı sonlu fark yönteminden yararlanarak MEW denkleminin sayısal çözümlerini bulmuşlardır [49]. Mohyud-Din ve çalışma arkadaşları, homotopy pertürbasyon yöntemi ile ve İslam ve çalışma arkadaşları, kuartik B-spline kollokasyon yöntemini kullanarak MEW denkleminin sayısal çözümlerini bulmuşlardır [50, 51]. Denklem Geyikli ve çalışma arkadaşları, Karakoç ve çalışma arkadaşları tarafından sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak sayısal olarak çözülmüştür [52, 53]. MEW ve EW denklemleri analitik çözüm için sınırlı sayıda başlangıç ve sınır şartlarına

sahip oldukarı için lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler ve birçok farklı fiziksel alanlarda yapılan çalışmalar sebebiyle önemli bir yere sahiptir. Bu nedenle daha fazla başlangıç ve sınır şartları ile çözümler yapmak için sayısal yöntemlere ihtiyaç vardır [54].



BÖLÜM 2

KUİNTİK B-SPLINE KOLLOKASYON YÖNTEMİ İLE GENELLEŞTİRİLMİŞ EŞİT GENİŞLİKLİ DALGA DENKLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Tezin bu bölümünde H. Zeybek ve S.B.G. Karakoç' un Application of the collocation method with B-splines to the GEW equation isimli makalesi ayrıntılı olarak incelenmiştir [33]. Bu bölümde GEW dalga denklemi iki farklı lineerleştirme tekniği ile kuintik B-spline kollokasyon algoritması kullanılarak sayısal olarak çözülmüştür. Yöntemin kararlılık analizi von Neumann yöntemine dayanan sayısal şemanın lineer kararlılık analizi ile incelenmiştir. Sayısal algoritma tek soliter dalga, iki soliter dalganın etkileşimi ve Maxwellian başlangıç koşulundan oluşan üç test problemine uygulanmıştır. Sayısal yöntemin performansının belirlenmesi için GEW denkleminin L_2 , L_∞ hata normları ve I_1 , I_2 , I_3 invariantları hesaplanmıştır. Bu hesaplamalar daha önceki çalışmalarla karşılaştırılmıştır. Daha sonra farklı parametrelere göre soliter dalgaların hareketleri tasarlanmıştır. Denklemin genel formu (1.6.1) de verilmiştir. Burada p pozitif tamsayıdır, ε ve μ pozitif sabitlerdir, t zaman ve x ise uzay koordinatıdır. $x \rightarrow \pm\infty$ için $U \rightarrow 0$ fiziksel sınır koşullarıdır. Bu çalışma için $x \in [a, b]$ dir. Sınır ve başlangıç koşulları ise aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} U(a, t) &= 0, & U(b, t) &= 0, & t > 0. \\ U_x(a, t) &= 0, & U_x(b, t) &= 0, & t > 0, \\ U(x, 0) &= f(x), & & & a \leq x \leq b. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Burada $f(x) \in C([a, b])$ olup test problemlerine bağlı olarak sonraki bölümlerde tanımlanacak olan bir fonsiyondur. Sıvı problemleri için U , su yüzeyinin dalga genliğini veya benzer bir fiziksel miktarı tanımlar öte yandan, plazma uygulamalarında ise elektrostatik potansiyelin negatifliği ile ilgilidir. GEW denklemi ilk olarak Peregrine [55], Benjamin ve çalışma arkadaşları [31] tarafından bir kanaldaki suyun yüzeyinde küçük genlikli uzun dalgalar için bir model olarak verilmiştir [33]. Genelleştirilmiş düzenli uzun dalga (GRLW) denklemine ve genelleştirilmiş Korteweg-de Vries (GKdV) denklemine alternatif bir model olan GEW denklemi, eşit genişlikli dalga (EW)

denklemine dayanmaktadır. Bu genel denklemler $(p+1)$. doğrusal olmayan dalga denklemleridir ve titreşim benzeri soliter çözümlere sahiptirler [35]. Bu nedenle, bu denklemlerin soliter dalga çözümleri bir çok önemli fiziksel olayı aydınlatır.

2.1 Kuintik B-Spline Kollokasyon Yöntemi

Bu bölümde (1.6.1) ile verilen GEW denkleminin kuintik B-spline kollokasyon yöntemi ile elde edilmiş sayısal çözümleri verilecektir. Denklemdaki $U(x,t)$ tam çözüm fonksiyonu olup buna karşılık gelen yaklaşık çözüm olan $U_N(x,t)$ bölüm 1 de (1.3.5.1) ile verilen $\phi_m(x)$ kuintik B-spline fonksiyonlar cinsinden;

$$U_N(x,t) = \sum_{m=-2}^{N+2} \phi_m(x) \delta_m(t) \quad (2.1.1)$$

şeklinde verilir [56].

Burada bilinmeyen fonksiyonlar $\delta_m(t)$ sınır ve kollokasyon koşulları kullanılarak bulunacaktır. (1.3.5.1) kuintik B-spline fonksiyonlarına, (2.1.1) yaklaşık fonksiyonu uygulanırsa, U_m, U_m', U_m'' düğüm değerleri, zamana bağlı fonksiyonlar olan δ_m eleman parametreleri cinsinden

$$\begin{aligned} U_m(t) &:= U_N(x_m, t) = \delta_{m-2} + 26\delta_{m-1} + 66\delta_m + 26\delta_{m+1} + \delta_{m+2}, \\ U_m'(t) &:= \partial_x U_N(x_m, t) = \frac{5}{h}(-\delta_{m-2} - 10\delta_{m-1} + 10\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \\ U_m''(t) &:= \partial_{xx} U_N(x_m, t) = \frac{20}{h^2}(\delta_{m-2} + 2\delta_{m-1} - 6\delta_m + 2\delta_{m+1} + \delta_{m+2}) \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

şeklinde elde edilir. Burada, sonlu elemanlar $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı ile gösterilir ve $[x_m, x_{m+1}]$ aralığındaki $U_N(x,t)$ fonksiyonu;

$$U_N(x,t) = \sum_{j=m-2}^{m+3} \phi_j(x) \delta_j(t)$$

şeklindedir.

Birinci lineerleştirme tekniğinde, lineer olmayan $U^p U_x$ terimindeki U^p ifadesi

$$Z_m = (U_m)^p = (\delta_{m-2} + 26\delta_{m-1} + 66\delta_m + 26\delta_{m+1} + \delta_{m+2})^p$$

olarak alınır.

İkinci (Rubin ve Graves) lineerleştirme tekniğinde, lineer olmayan terim $U^p U_x$ ifadesinde $U^{p-1} U_x$ aşağıdaki şekilde alınır;

$$Z_m = (U_m)^{p-1} U'_m .$$

Rubin ve Graves lineerleştirme tekniğini $U^{p-1} U_x$ terimine uygulanırsa

$$\left((U_m)^{p-1} U'_m \right)^{n+1} = \left((U_m)^{p-1} \right)^n (U'_m)^{n+1} + \left((U_m)^{p-1} \right)^{n+1} (U'_m)^n - \left((U_m)^{p-1} \right)^n (U'_m)^n$$

eşitliği elde edilir [57].

Her iki lineerleştirme tekniği için, Z_m nin lokal olarak sabit olduğu varsayılmaktadır.

(1.6.1) GEW denkleminde (2.1.2) ile verilen U_m ve türevlerinin düğüm değerleri kullanılırsa, ilk lineerleştirme tekniği için, aşağıdaki adi diferansiyel denklem sistemi elde edilir;

$$\begin{aligned} & \dot{\delta}_{m-2} + 26\dot{\delta}_{m-1} + 66\dot{\delta}_m + 26\dot{\delta}_{m+1} + \dot{\delta}_{m+2} \\ & + \frac{5\varepsilon Z_m}{h} (-\delta_{m-2} - 10\delta_{m-1} + 10\delta_{m+1} + \delta_{m+2}) \\ & - \frac{20\mu}{h^2} \left(\dot{\delta}_{m-2} + 2\dot{\delta}_{m-1} - 6\dot{\delta}_m + 2\dot{\delta}_{m+1} + \dot{\delta}_{m+2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

Burada

$$Z_m = (U_m)^p \text{ dir.}$$

İkinci lineerleştirme tekniği için ise aşağıdaki denklem sistemi elde edilmiştir;

$$\begin{aligned}
& \dot{\delta}_{m-2} + 26\dot{\delta}_{m-1} + 66\dot{\delta}_m + 26\dot{\delta}_{m+1} + \dot{\delta}_{m+2} \\
& + \varepsilon Z_m (\delta_{m-2} + 26\delta_{m-1} + 66\delta_m + 26\delta_{m+1} + \delta_{m+2}) \\
& - \frac{20\mu}{h^2} (\dot{\delta}_{m-2} + 2\dot{\delta}_{m-1} - 6\dot{\delta}_m + 2\dot{\delta}_{m+1} + \dot{\delta}_{m+2}) = 0,
\end{aligned} \tag{2.1.4}$$

burada

$$Z_m = (U_m)^{p-1} U'_m \text{ olup}$$

“•” işareti zamana bağlı türevi belirtir.

(2.1.3) ve (2.1.4) denklem sistemlerinde δ_i ve $\dot{\delta}_i$ yerlerine sırasıyla aşağıdaki Crank-Nicolson formülü ve ileri fark yaklaşımı uygulanmıştır:

$$\delta_m = \frac{1}{2} (\delta_m^n + \delta_m^{n+1}), \quad \dot{\delta}_m = \frac{\delta_m^{n+1} - \delta_m^n}{\Delta t}.$$

İlk lineerleştirme yaklaşımı için, n ve $n+1$ iterasyonunda iki zaman seviyesi arasında bilinmeyen δ_i^{n+1} , δ_i^n fonksiyonları ile ilgili denklem sistemi $i = m-2, \dots, m+2$ için aşağıdaki şekilde elde edilmiştir;

$$\begin{aligned}
& \gamma_1 \delta_{m-2}^{n+1} + \gamma_2 \delta_{m-1}^{n+1} + \gamma_3 \delta_m^{n+1} + \gamma_4 \delta_{m+1}^{n+1} + \gamma_5 \delta_{m+2}^{n+1} \\
& = \gamma_5 \delta_{m-2}^n + \gamma_4 \delta_{m-1}^n + \gamma_3 \delta_m^n + \gamma_2 \delta_{m+1}^n + \gamma_1 \delta_{m+2}^n, \quad (2.1.5)
\end{aligned}$$

burada

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= (1 - EZ_m - M), & \gamma_2 &= (26 - 10EZ_m - 2M), & \gamma_3 &= (66 + 6M), \\
\gamma_4 &= (26 + 10EZ_m - 2M), & \gamma_5 &= (1 + EZ_m - M), \\
m &= 0, 1, \dots, N, & E &= \frac{5\varepsilon}{2h} \Delta t, & M &= \frac{20\mu}{h^2}
\end{aligned}$$

dır.

İkinci lineerleştirme tekniği için benzer bir denklem sistemi

$$\begin{aligned} \beta_1 \delta_{m-2}^{n+1} + \beta_2 \delta_{m-1}^{n+1} + \beta_3 \delta_m^{n+1} + \beta_2 \delta_{m+1}^{n+1} + \beta_1 \delta_{m+2}^{n+1} \\ = \beta_4 \delta_{m-2}^n + \beta_5 \delta_{m-1}^n + \beta_6 \delta_m^n + \beta_5 \delta_{m+1}^n + \beta_4 \delta_{m+2}^n \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

şeklinde elde edilmiş olup burada

$$\begin{aligned} \beta_1 &= (1 + KZ_m - R), & \beta_2 &= (26 + 26KZ_m - 2R), & \beta_3 &= (66 + 66KZ_m - 6R), \\ \beta_4 &= (1 - KZ_m - R), & \beta_5 &= (26 - 26KZ_m - 2R), & \beta_6 &= (66 - 66KZ_m + 6R), \end{aligned}$$

$$m = 0, 1, \dots, N, \quad K = \frac{\varepsilon \Delta t}{2}, \quad R = \frac{20\mu}{h^2}$$

dır.

Görüldüğü gibi, (2.1.5) ve (2.1.6) denklem sistemleri $(N+1)$ tane lineer denklem ve $(N+5)$ tane bilinmeyenden $(\delta_{-2}, \delta_{-1}, \dots, \delta_{N+1}, \delta_{N+2})^T$ oluşmaktadır. Bu denklem sistemlerinin bir tek çözümlerinin elde edilebilmesi için dört tane ek sınır şartına ihtiyaç vardır. Bunun için (2.1) ile verilen sınır şartları kullanılarak (2.1.5) ve (2.1.6) sistemlerinden δ_{-2}, δ_{-1} ve $\delta_{N+1}, \delta_{N+2}$ bilinmeyenleri yok edilerek $(N+1)$ tane bilinmeyen ve $(N+1)$ tane denklemden oluşan denklem sistemleri elde edilir.

Böylece

$$Ad^{n+1} = Bd^n$$

şeklinde $N+1$ tane bilinmeyen $d^n = (\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_N)^T$ içeren bir matris denklemi elde edilir. A ve B matrisleri $(N+1) \times (N+1)$ boyutlu penta diyagonal matrislerdir. Bu matris aşağıda verilen penta-diagonal algoritması kullanılarak hesaplanabilir. Bu çözüm sürecinde, çeşitli zaman adımlarında δ^{n+1} fonksiyonları, (2.1.5) ve (2.1.6) iterasyon denklemlerinden hesaplanır. Bir sonraki zaman adımına geçmeden önce, Z_m den kaynaklanan lineer olmama problemini çözmek için, Z_m deki yeni fonksiyonlar $(\delta^*)^{n+1} = \delta^n + \frac{1}{2}(\delta^{n+1} - \delta^n)$ ile hesaplanır [46, 58]. Bu iç iterasyon, her bir zaman adımında daha iyi sonuç elde etmek için iki veya üç kez uygulanır. İterasyon

denkleminde başlangıç fonksiyonları olan d^0 , aşağıdaki başlangıç ve sınır koşulları ile hesaplanır:

$$\begin{aligned} U(x_m, 0) &= f(x_m), & m &= 0, 1, 2, \dots, N, \\ (U_N)_x(a, 0) &= 0, & (U_N)_x(b, 0) &= 0, \\ (U_N)_{xx}(a, 0) &= 0, & (U_N)_{xx}(b, 0) &= 0, \end{aligned}$$

böylece d^0 başlangıç vektörü

$$Wd^0 = b,$$

matris denkleminde elde edilir. Burada;

$$W = \begin{bmatrix} 54 & 60 & 6 & & & & & & & \\ 25.25 & 67.5 & 26.25 & 1 & & & & & & \\ 1 & 26 & 66 & 26 & 1 & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & 1 & 26 & 66 & 26 & 1 & & \\ & & & & 1 & 26.25 & 67.5 & 25.25 & & \\ & & & & & 6 & 60 & 54 & & \end{bmatrix}$$

$d^0 = (\delta_0, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{N-2}, \delta_{N-1}, \delta_N)^T$ ve $b = (U(x_0, 0), U(x_1, 0), \dots, U(x_{N-1}, 0), U(x_N, 0))^T$ dir.

2.2 Penta-Diagonal Algoritma İle Çözüm.

Penta diyagonal algoritma ile çözümde [33];

$$a_i \delta_{i-2} + b_i \delta_{i-1} + c_i \delta_i + d_i \delta_{i+1} + c_i \delta_{i+2} = f_i, \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

denklemin için ilk olarak,

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 0, & \beta_0 &= c_0, & \mu_0 &= \frac{d_0}{\beta_0}, & \zeta_0 &= \frac{e_0}{\beta_0}, & \lambda_0 &= \frac{f_0}{\beta_0}, \\ \alpha_1 &= b_0, & \beta_1 &= c_1 - \alpha_1 \mu_0, & \mu_1 &= \frac{d_1 - \alpha_1 \zeta_0}{\beta_1}, & \zeta_1 &= \frac{e_1}{\beta_1}, & \lambda_1 &= \frac{f_1 - \alpha_1 \lambda_0}{\beta_1} \end{aligned}$$

parametreleri hesaplanır. Daha sonra

$$\alpha_i = b_{i-1} - a_{i-2}\mu_{i-2}, \quad \beta_i = c_i - \alpha_i\mu_{i-1} - a_{i-2}\zeta_{i-2}, \quad \mu_i = \frac{d_i - \alpha_i\zeta_{i-1}}{\beta_i},$$

$$\zeta_i = \frac{e_i}{\beta_i}, \quad \lambda_i = \frac{f_i - \alpha_i\lambda_{i-1} - a_{i-2}\lambda_{i-2}}{\beta_i}, \quad i = 2, 3, \dots, N$$

parametreleri hesaplanarak

$$\delta_i = \lambda_i - \zeta_i\delta_{i+2} - \mu_i\delta_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, N-3, N-2,$$

$$\delta_{N-1} = \lambda_{N-1} - \mu_{N-1}\delta_N, \quad \delta_N = \lambda_N$$

çözüme ulaşılır.

2.3 Linear Kararlılık Analizi

Sayısal şemanın lineer kararlılığını araştırmak için von Neumann yaklaşımı kullanılmıştır ve GEW denkleminin lineer olmayan $U^p U_x$ terimindeki U^p ifadesi lokal olarak sabit olduğu kabul edilmiştir. k mod numarası ve h eleman büyüklüğü olmak üzere $\delta_m^n = \xi^n e^{imkh}$, ($i = \sqrt{-1}$) Fourier açılımı (2.1.5) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \gamma_1 \xi^{n+1} e^{i(m-2)kh} + \gamma_2 \xi^{n+1} e^{i(m-1)kh} + \gamma_3 \xi^{n+1} e^{imkh} + \gamma_4 \xi^{n+1} e^{i(m+1)kh} + \gamma_5 \xi^{n+1} e^{i(m+2)kh} \\ & = \gamma_5 \xi^n e^{i(m-2)kh} + \gamma_4 \xi^n e^{i(m-1)kh} + \gamma_3 \xi^n e^{imkh} + \gamma_2 \xi^n e^{i(m+1)kh} + \gamma_1 \xi^n e^{i(m+2)kh} \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

denklem sistemi elde edilir ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\xi = \frac{a - ib}{a + ib}$$

eşitliği elde edilir.

Burada

$$a = \gamma_3 + (\gamma_4 + \gamma_2) \cos[hk] + (\gamma_5 + \gamma_1) \cos[2hk],$$

$$b = (\gamma_4 - \gamma_2) \sin[hk] + (\gamma_5 - \gamma_1) \sin[2hk]$$

olup $|\xi|$ modülü 1 dir. Bu ise lineerleştirilmiş şemanın koşulsuz olarak kararlı olduğunu göstermektedir [33].

2.4 Sayısal Örnekler Ve Sonuçları

Bu bölümde, sayısal algoritma aşağıdaki üç test problemine uygulamıştır; tek dalganın hareketi, iki tek dalganın etkileşimi ve bir Maxwellian başlangıç koşulu ile dalganın hareketi, invaryantların (2.4.3) ile verilen ifadeleri, sayısal yaklaşımın korunan bazı özelliklerini doğrulamak için hesaplanmıştır. Sayısal şemanın doğruluğunu göstermek ve sonuçları literatürde verilenlerle karşılaştırmak için (2.4.2) deki analitik çözüm kullanılarak L_2 ve L_∞ hata normları hesaplanmıştır. L_2 ve L_∞ hata normları

$$\begin{aligned} L_2 &= \|U^{exact} - U_N\|_2 \simeq \sqrt{h \sum_{j=0}^N |U_j^{exact} - (U_N)_j|^2}, \\ L_\infty &= \|U^{exact} - U_N\|_\infty \simeq \max_j |U_j^{exact} - (U_N)_j|. \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

şeklinde hesaplanır [33].

(1.6.1) ile verilen GEW denkleminin analitik çözümü;

$$U(x, t) = \sqrt{\frac{c(p+1)(p+2)}{2\varepsilon}} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{p}{2\sqrt{\mu}} (x - ct - x_0) \right], \quad (2.4.2)$$

şeklinindedir [35, 36]. Burada c ; x ekseninde pozitif yönde ilerleyen dalganın sabit hızı ve x_0 keyfi sabittir [33].

Kütle, momentum ve enerjinin korunmasına karşılık gelen üç invaryant

$$I_1 = \int_a^b U dx, \quad I_2 = \int_a^b [U^2 + \mu U_x^2] dx, \quad I_3 = \int_a^b U^{p+2} dx. \quad (2.4.3)$$

şeklinindedir [33].

2.5 Tek Soliter Dalganın Hareketi

İlk olarak (1.6.1) ile verilen GEW denkleminin iki farklı lineerleştirme tekniği uygulanarak invaryantların miktarlarındaki değişiklikler ve hata normlarının değerleri

$t=0$ zaman adımından $t=20$ zaman adımına kadar hesaplanmıştır. Bunun için p , c ve genlik $\left(genlik = \sqrt[p]{\frac{c(p+1)(p+2)}{2\varepsilon}} \right)$ değerleri farklı ve

$h=0.1, \Delta t=0.2, \varepsilon=3, \mu=1, x_0=30, 0 \leq x \leq 80$ değerleri aynı olmak üzere beş farklı parametre oluşturulmuştur. Sayısal yaklaşıma iki farklı lineerleştirme tekniği uygulanarak, invaryantların miktarlardaki değişiklikler ve hata normlarının değerleri $t=0$ ile $t=20$ arasında hesaplanmıştır.

İlk durumda $p=2, c=1/32$ ve $c=1/2$ parametreleri alınmış $genlik=0.25$ ve $genlik=1$ elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar Tablo 2.1 ve Tablo 2.2 de verilmiştir. Tablo 2.1 den invaryantların değerlerinin zaman arttıkça hemen hemen aynı olduğu görülmektedir. Tablo 2.2 invaryantların başlangıç değerlerine göre değişimlerinin sırasıyla % 0.009, % 0.03, % 0.03 den daha düşük olduğunu göstermektedir. Ayrıca L_2 ve L_∞ hata normlarının büyüklüğünün beklendiği gibi her lineerleştirme tekniği için oldukça küçük olduğu bulunmuştur.

Tablo 2.1. Tek soliter dalga için $p = 2, h = 0.1, \Delta t = 0.2, x \in [0, 80]$ parametreleri ile bulunan hata normları ve invaryantlar

t		0	5	10	15	20
I_1	1.Lineer. Tekniği	0.7853966	0.7853966	0.7853965	0.7853965	0.7853965
	2.Lineer. Tekniği	0.7853966	0.7853966	0.7853966	0.7853966	0.7853966
I_2	1.Lineer. Tekniği	0.1666664	0.1666663	0.1666663	0.1666663	0.1666663
	2.Lineer. Tekniği	0.1666664	0.1666664	0.1666664	0.1666664	0.1666664
I_3	1.Lineer. Tekniği	0.0052083	0.0052083	0.0052083	0.0052083	0.0052083
	2.Lineer. Tekniği	0.0052083	0.0052083	0.0052083	0.0052083	0.0052083
$L_2 \times 10^5$	1.Lineer. Tekniği	0.0000000	0.03366038	0.06865677	0.10532104	0.14404828
	2.Lineer. Tekniği	0.0000000	0.03127090	0.06398038	0.09850392	0.13526316
$L_\infty \times 10^5$	1.Lineer. Tekniği	0.0000000	0.02509311	0.05215679	0.08029086	0.10853345
	2.Lineer. Tekniği	0.0000000	0.02105067	0.04383634	0.06759518	0.09151024

Tablo 2.2. Tek soliter dalga için $p = 2, h = 0.1, \Delta t = 0.2, x \in [0, 80]$ parametreleri ile bulunan hata normları ve invaryantlar

t		0	5	10	15	20
I_1	1.Lineer. Tekniği	3.1415863	3.1373888	3.1332323	3.1291144	3.1250343
	2.Lineer. Tekniği	3.1415863	3.1416080	3.1416294	3.1416508	3.1416722
I_2	1.Lineer. Tekniği	2.6666616	2.6610537	2.6555067	2.6500168	2.6445829
	2.Lineer. Tekniği	2.6666616	2.6667229	2.6667836	2.6668444	2.6669051
I_3	1.Lineer. Tekniği	1.3333283	1.3277256	1.3221957	1.3167341	1.3113394
	2.Lineer. Tekniği	1.3333283	1.3333895	1.3334503	1.3335110	1.3335718
L_2	1.Lineer. Tekniği	0.00000000	0.00665826	0.01742910	0.03232178	0.05132106
	2.Lineer. Tekniği	0.00000000	0.00419982	0.00841618	0.01260569	0.01675092
L_∞	1.Lineer. Tekniği	0.00000000	0.00474985	0.01201728	0.02183195	0.03416753
	2.Lineer. Tekniği	0.00000000	0.00259399	0.00517928	0.00773610	0.01026391

İkinci olarak $p = 3, c = 0.001$ ve $c = 0.3$ alınmış ve $genlik = 0.15$ ve $genlik = 1$ değerleri elde edilmiştir. Sayısal sonuçlar Tablo 2.3 ve Tablo 2.4 te verilmiştir. Tablo

2.3 te görülebileceği gibi, üç invaryantın değerleri, zaman arttıkça neredeyse değişmemiştir.

Tablo 2.3. Tek soliter dalga için $p = 3, h = 0.1, \Delta t = 0.2, x \in [0, 80]$ parametreleri ile bulunan hata normları ve invaryantlar

t		0	5	10	15	20
I_1	1.Lineer. Tekniği	0.4189154	0.4189154	0.4189154	0.4189154	0.4189154
	2.Lineer. Tekniği	0.4189154	0.4189154	0.4189154	0.4189154	0.4189154
I_2	1.Lineer. Tekniği	0.0549807	0.0549807	0.0549807	0.0549807	0.0549807
	2.Lineer. Tekniği	0.0549807	0.0549807	0.0549807	0.0549807	0.0549807
$I_3 \times 10^4$	1.Lineer. Tekniği	0.0000733	0.0000733	0.0000733	0.0000733	0.0000733
	2.Lineer. Tekniği	0.0000733	0.0000733	0.0000733	0.0000733	0.0000733
$L_2 \times 10^7$	1.Lineer. Tekniği	0.00000000	0.04797509	0.09597025	0.14398271	0.19200973
	2.Lineer. Tekniği	0.00000000	0.047955135	0.09592277	0.14391151	0.19191480
$L_\infty \times 10^7$	1.Lineer. Tekniği	0.00000000	0.05730697	0.11490440	0.17357780	0.23297300
	2.Lineer. Tekniği	0.00000000	0.05727720	0.11485490	0.17350253	0.23287122

Tablo 2.4 e bakıldığında invaryantların değerlerinin başlangıç değerlerine göre değişiklikleri sırasıyla % 0.007 , % 0.02 ve % 0.02 den daha az olduğu görülmektedir. Ayrıca L_2 ve L_∞ hata normlarının değerlerinin her iki lineerleştirme tekniği için yeterince küçük olduğu anlaşılmaktadır. Son olarak $p = 4$, $c = 0.2$ parametreleri seçilmiş ve *genlik* =1 olarak bulunmuştur. Tablo 2.5 elde edilen sonuçların invaryantların değişimlerinin % 0.02 , % 0.03 ve % 0.03 ten daha az olduğunu göstermektedir. Ayrıca L_2 ve L_∞ normundaki hatanın oldukça küçük olduğu gözlemlenmiştir. Diğer yandan farklı zaman ve konum adımlarında hata normlarının değerlerini araştırmak için $\varepsilon = 3$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$, $x \in [0, 80]$ ile $p = 2, 3, 4, 6, 8, 10$ ve $c = 0.03, 0.1, 0.3$ parametreleri seçilmiştir. Bu parametrelere ilişkin elde edilen değerler Tablo 2.6 ve Tablo 2.7 de verilmiştir. Tek dalganın hareketi Şekil 2.1 de $t = 0, 10, 20$ zamanlarında gösterilmiştir. Bu şekilde görülebileceği gibi tek dalga neredeyse değişmeyen hızla sağa doğru hareket etmekte ve zaman geçtikçe genliğini ve şeklini korumaktadır. Yine şekilden p değerinin arttırılması, tek dalganın tepe konumunu yükselttiği görülmektedir Tablo 2.8, daha önceki çalışmalarda elde edilen sonuçlarla sayısal sonuçlarımızın bir karşılaştırılmasını vermektedir [35, 36, 37, 45, 51, 53]. Bu tablodan invaryantların değerlerinin diğer yöntemlerle oldukça uyumlu olduğu görülmektedir. Sayısal şemada bulunan hata normlarının büyüklüğü $p = 2, 3$ için diğerlerinden daha küçük ve $p = 4$ için ise hemen hemen aynı olduğu saptanmıştır [37].

2.6 İki Soliter Dalganın Girişimi

İkinci test probleminde,

$$U(x, 0) = \sum_{i=1}^2 \sqrt[p]{\frac{c_i(p+1)(p+2)}{2\varepsilon} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{p}{2\sqrt{\mu}}(x - x_i) \right]}, \quad (2.6.1)$$

başlangıç koşulu kullanılarak iki pozitif soliter dalganın etkileşimi araştırılmıştır. Burada $i = 1, 2$ olmak üzere c_i ve x_i keyfi sabitlerdir. Denklem (2.6.1) aynı yönde hareket eden 1 ve 0.5 gibi farklı genliklere sahip iki dalgayı göstermektedir. p ve c_i

nin farklı değerleri ve aynı $h = 0.1$, $\Delta t = 0.025$, $\varepsilon = 3$, $\mu = 1$, $x_1 = 15$, $x_2 = 30$, $0 \leq x \leq 80$ değerleri alınarak üç parametre ailesi için hesaplamalar yapılmıştır. İlk olarak $p = 2$, $c_1 = 0.5$ ve $c_2 = 0.125$ alınarak sayısal hesaplamalar $t = 60$ zamanına kadar yapılmıştır. İnvaryantların elde edilen değerleri Tablo 2.9 verilmiştir. Tablodan bu invaryantların değişimlerinin $t = 0$ ile $t = 60$ zaman aralıklarında %0.0007, %0.002 ve %0.002 den daha az olduğunu görölmektedir.



Tablo 2.4. Tek soliter dalga için $p = 3, h = 0.1, \Delta t = 0.2, x \in [0, 80]$ parametreleri ile bulunan hata normları ve invaryantlar

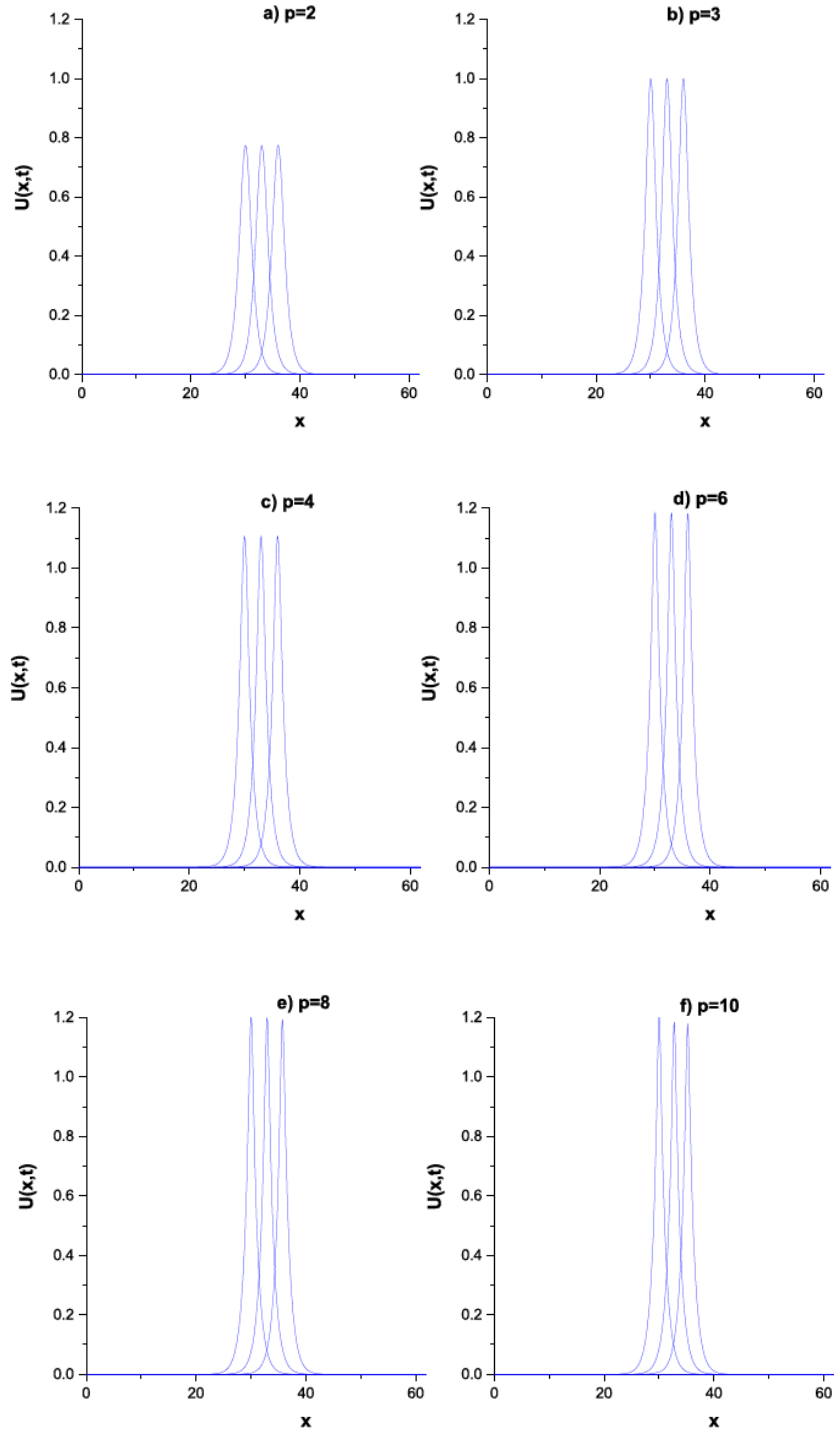
t		0	5	10	15	20
I_1	1.Lineer. Tekniği	2.8043580	2.8043577	2.8043575	2.8043572	2.8043570
	2.Lineer. Tekniği	2.8043580	2.8043425	2.8043265	2.8043104	2.8042943
I_2	1.Lineer. Tekniği	2.4639101	2.4639097	2.4639093	2.4639090	2.4639086
	2.Lineer. Tekniği	2.4639101	2.4638708	2.4638304	2.4637900	2.4637495
I_3	1.Lineer. Tekniği	0.9855618	0.9855613	0.9855609	0.9855606	0.9855602
	2.Lineer. Tekniği	0.9855618	0.9855224	0.9854821	0.9854416	0.9854011
L_2	1.Lineer. Tekniği	0.00000000	0.00204427	0.00404918	0.00603437	0.00801470
	2.Lineer. Tekniği	0.00000000	0.00166962	0.00341489	0.00522937	0.00708553
L_∞	1.Lineer. Tekniği	0.00000000	0.00145300	0.00275623	0.00406885	0.00538237
	2.Lineer. Tekniği	0.00000000	0.00114839	0.00234552	0.00356458	0.00480470

Tablo 2.5. Tek soliter dalga için $p = 4, h = 0.1, \Delta t = 0.2, x \in [0, 80]$ parametreleri ile bulunan hata normları ve invaryantlar

t		0	5	10	15	20
I_1	1.Lineer. Tekniği	2.6220516	2.6220514	2.6220512	2.6220510	2.6220508
	2.Lineer. Tekniği	2.6220516	2.6220211	2.6219902	2.6219593	2.6219184
I_2	1.Lineer. Tekniği	2.3561914	2.3561911	2.3561907	2.3561904	2.3561901
	2.Lineer. Tekniği	2.3561914	2.3561273	2.3560625	2.3559975	2.3559327
I_3	1.Lineer. Tekniği	0.7853952	0.7853948	0.7853945	0.7853942	0.7853939
	2.Lineer. Tekniği	0.7853952	0.7853310	0.7852662	0.7852013	0.7851364
L_2	1.Lineer. Tekniği	0.00000000	0.00106260	0.00211868	0.00316779	0.00421697
	2.Lineer. Tekniği	0.00000000	0.00075110	0.00156412	0.00244690	0.00339086
L_∞	1.Lineer. Tekniği	0.00000000	0.00079729	0.00152151	0.00224723	0.00297952
	2.Lineer. Tekniği	0.00000000	0.00055248	0.00115512	0.00179553	0.00247031

Tablo 2.6. Tek soliter dalga için $t = 20$, $x \in [0,80]$ parametreleri ile elde edilen hata normları

		$p = 2$			$p = 3$			$p = 4$			
c		0.03	0.1	0.3	0.03	0.1	0.3	0.03	0.1	0.3	
$genlik$		0.24	0.44	0.77	0.46	0.69	1.00	0.62	0.84	1.10	
$h \quad \Delta t$											
L_2 \times 10^3	0.1	0.01	0.0005	0.005	0.051	0.001	0.009	0.082	0.004	0.014	0.111
	0.2	0.01	0.0039	0.014	0.036	0.024	0.063	0.144	0.080	0.183	0.426
	0.1	0.05	0.0005	0.008	0.221	0.001	0.018	0.494	0.004	0.031	0.837
	0.2	0.05	0.0039	0.016	0.198	0.024	0.069	0.537	0.080	0.195	0.120
	0.1	0.2	0.0011	0.064	2.878	0.003	0.178	7.085	0.008	0.327	14.165
	0.2	0.2	0.0011	0.064	2.878	0.003	0.178	7.085	0.008	0.327	14.165
L_∞ \times 10^3	0.1	0.01	0.0003	0.003	0.035	0.002	0.006	0.058	0.006	0.008	0.080
	0.2	0.01	0.0047	0.011	0.026	0.032	0.053	0.115	0.117	0.162	0.355
	0.1	0.05	0.0003	0.005	0.140	0.002	0.012	0.338	0.006	0.020	0.601
	0.2	0.05	0.0047	0.013	0.129	0.032	0.059	0.381	0.117	0.174	0.849
	0.1	0.2	0.0008	0.040	1.775	0.003	0.122	4.804	0.009	0.239	10.250
	0.2	0.2	0.0008	0.040	1.775	0.003	0.122	4.804	0.009	0.239	10.250



Şekil 2.1. Tek soliter dalganın $t = 0, 10, 20$ zaman adımlarında $c = 0.3, x_0 = 30, x \in [0, 80]$ parametreleri için hareketi

Tablo 2.7. Tek soliter dalga için $t = 20$, $x \in [0,80]$ parametreleri ile elde edilen hata normları

		$p = 6$		$p = 8$		$p = 10$		
c		0.03	0.1	0.03	0.1	0.03	0.1	
<i>genlik</i>		0.80	0.98	0.90	1.05	0.95	1.08	
h								
Δt								
L_2 \times 10^{-3}	0.1	0.01	0.015	0.036	0.042	0.095	0.102	0.261
	0.2	0.01	0.438	1.192	2.657	9.556	16.085	59.734
	0.1	0.05	0.016	0.071	0.042	0.158	0.103	0.384
	0.2	0.05	0.438	1.224	2.658	9.626	16.088	59.918
	0.1	0.2	0.023	0.813	0.054	2.066	0.125	5.460
	0.2	0.2	0.023	0.813	0.054	2.066	0.125	5.460
L_∞ \times 10^{-3}	0.1	0.01	0.024	0.031	0.062	0.091	0.143	0.252
	0.2	0.01	0.678	1.142	3.062	8.212	14.057	47.756
	0.1	0.05	0.024	0.058	0.063	0.141	0.144	0.350
	0.2	0.05	0.678	1.169	3.063	8.262	14.059	47.886
	0.1	0.2	0.030	0.643	0.073	1.731	0.160	4.742
	0.2	0.2	0.030	0.643	0.073	1.731	0.160	4.742

Tablo 2.8. Tek soliter dalga için $h = 0.1, \Delta t = 0.2, t = 20, x \in [0, 80]$ parametreleri ile elde edilen sonuçların karşılaştırılması

	Methods	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	I_1	I_2	I_3
$p = 2$ $c = 1/32$	KübBSK[35]	0.19588	0.17443	0.78466	0.16643	0.00519
	KuadBSK[36]	0.15695	0.20214	0.78528	0.16658	0.00520
	KuadBSLG[45]	0.08100	0.04596			
	KübBSLG[53]	0.07833	0.04448			
	KuadBSPG[37]	0.00250	0.00275	0.78539	0.16666	0.00520
	KuarBSC[51]	0.00157	0.00104	0.78539	0.16666	0.00520
	KuinBSC[33]	0.00135	0.00091	0.78539	0.16666	0.00520
$p = 3$ $c = 0.001$	KübBSC[35]	0.514967	0.320605	0.65908	0.05938	0.000068
	KuadBSPG[37]	0.000064	0.000082	0.41891	0.05497	0.000073
	KuinBSC[33]	0.000019	0.000023	0.41891	0.05498	0.000073
$p = 4$ $c = 0.2$	KuadBSPG[37]	2.30499	1.88285	2.62206	2.35615	0.78534
	KuinBSC[33]	3.39086	2.47031	2.62192	2.35593	0.78513

Ayrıca yine tablodan elde edilen sonuçların Petrov-Galerkin yöntemi ile hesaplananlarla iyi bir uyum içinde olduğu görülmektedir [37]. İkinci durumda ise $p = 3, c_1 = 0.3$ ve $c_2 = 0.0375$ parametreleri seçilmiştir. Bilgisayar programı $t = 100$ zamanına kadar çalıştırılmıştır. Elde edilen sonuçlar Tablo 2.10 da verilmiştir. Tablo 2.10 dan invaryantların başlangıç durumuna göre değişimlerinin sırasıyla %0.0002, %0.0005 ve %0.0006 dan daha az olduğu gözlenmiştir. Yine invaryantların sayısal değerlerinin Roshan'ın [37] değerlerine çok yakın olduğu bulunmuştur. İki soliter dalganın hareketi farklı zamanlarla Şekil 2.2 de verilmiştir. Bu şekilde başlangıçta daha büyük genliğe sahip dalga daha küçük genliğe sahip ikinci dalganın solunda bulunur. Zaman arttıkça etkileşim başlar ve üst üste binme gerçekleşir. $t = 50$ zamanından sonra dalgalar orijinal formlarında hareket etmeye devam ederler.

Tablo 2.9. İki soliter dalga için $p = 2$, $c_1 = 0.5$, $c_2 = 0.125$, $x_1 = 15$, $x_2 = 30$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.025$ parametreleri ile elde edilen invaryantların değerleri

t	0	10	20	30	40	50	60	
I_1	1. <i>Lineer.</i> Tekniği [33]	4.71237	4.71237	4.71237	4.71237	4.71237	4.71237	4.71237
	2. <i>Lineer.</i> Tekniği [33]	4.71237	4.71237	4.71237	4.71236	4.71237	4.71237	4.71237
	PG[37]	4.71239	4.71239	4.71239	4.71239	4.71239	4.71239	4.71239
I_2	1. <i>Lineer.</i> Tekniği [33]	3.33332	3.33332	3.33332	3.33332	3.33332	3.33332	3.33332
	2. <i>Lineer.</i> Tekniği [33]	3.33332	3.33332	3.33332	3.33331	3.33332	3.33332	3.33332
	PG[37]	3.33324	3.33324	3.33324	3.33324	3.33333	3.33338	3.33333
I_3	1. <i>Lineer.</i> Tekniği [33]	1.41666	1.41666	1.41666	1.41665	1.41666	1.41666	1.41666
	2. <i>Lineer.</i> Tekniği [33]	1.41666	1.41666	1.41666	1.41664	1.41665	1.41666	1.41666
	PG[37]	1.4166	1.4166	1.4166	1.4166	1.4166	1.4166	1.4166

Tablo 2.10. İki soliter dalga için $p = 3$, $c_1 = 0.3$, $c_2 = 0.0375$, $x_1 = 15$, $x_2 = 30$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.025$ parametreleri ile elde edilen invaryantların değerleri

t	0	10	20	40	60	80	90	100	
I_1	1. <i>Lineer. Tekniği</i> [33]	4.20653	4.20653	4.20653	4.20653	4.20653	4.20653	4.20653	4.20653
	2. <i>Lineer. Tekniği</i> [33]	4.20653	4.20653	4.20653	4.20653	4.20653	4.20653	4.20653	4.20653
	PG[37]	4.20655	4.20655	4.20655	4.20655	4.20655	4.20655	4.20655	4.20655
I_2	1. <i>Lineer. Tekniği</i> [33]	3.07988	3.07988	3.07988	3.07988	3.07988	3.07988	3.07988	3.07988
	2. <i>Lineer. Tekniği</i> [33]	3.07988	3.07988	3.07988	3.07988	3.07988	3.07988	3.07988	3.07988
	PG[37]	3.97977	2.07986	3.07982	3.07986	3.07987	3.07991	3.07974	3.07972
I_3	1. <i>Lineer. Tekniği</i> [33]	1.01636	1.01636	1.01636	1.01636	1.01636	1.01636	1.01636	1.01636
	2. <i>Lineer. Tekniği</i> [33]	1.01636	1.01636	1.01636	1.01635	1.01635	1.01636	1.01636	1.01636
	PG[37]	1.01634	1.01634	1.01634	1.01634	1.01633	1.01633	1.01633	1.01634

Son olarak $p = 4$, $c_1 = 0.2$ ve $c_2 = 1/80$ parametreleri dikkate alınmıştır. Hesaplamalar $t = 0$ dan $t = 120$ zamanına kadar yapılmıştır. İnvaryantların hesaplanan değerleri Tablo 2.11 de verilmiştir. Tablo 2.11 de görülebileceği gibi invaryantların başlangıç değerlerine göre değişimleri sırasıyla % 0.0003, % 0.0007 ve % 0.0007 den az olup ayrıca yine invaryant değerlerinin Roshan' ın [37] değerleri ile uyumlu olduğu görülür.

İki tek dalganın etkileşimi hareketi daha büyük bir genliğe sahip dalganın başlangıç konumunda daha küçük genliğe sahip ikinci dalganın solunda olduğunu gösteren Şekil 2.3 farklı zaman adımlarında resmedilmiştir. Bu şekilden etkileşimin $t = 50$ zamanında başladığı zaman geçtikçe üst üste binme işleminin gerçekleştiği ve $t = 70$ zamanından sonra dalgaların orijinal şekillerini muhafaza ettikleri görülmektedir.

2.7 Maxwellian Başlangıç Koşulu

Son problemde, (1.6.1) ile verilen GEW denklemi

$$U(x,0) = \exp(-x^2), \quad -20 \leq x \leq 20 \quad (2.7.1)$$

Maxwellian başlangıç koşulu ile ele alınmıştır [28, 36, 37, 51] referanslarında Maxwellian başlangıç koşulu ile verilen sayısal sonuçlar incelendiğinde μ nün seçiminin çözümün davranışını etkilediği görülebilir. Bu nedenle $p = 2, 3, 4$ için farklı $\mu = 0.01, \mu = 0.025, \mu = 0.05, \mu = 0.1$ değerleri seçilmiştir. Üç invariyantın sayısal hesaplamaları $t = 12$ zamanına kadar yapılmış ve sonuçlar Tablo 2.12 de verilmiştir.

Tablo 2.11. İki soliter dalga için $p=4$, $c_1=0.2$, $c_2=1/80$, $x_1=15$, $x_2=30$, $h=0.1$, $\Delta t=0.025$ parametreleri ile elde edilen invaryantların değerleri

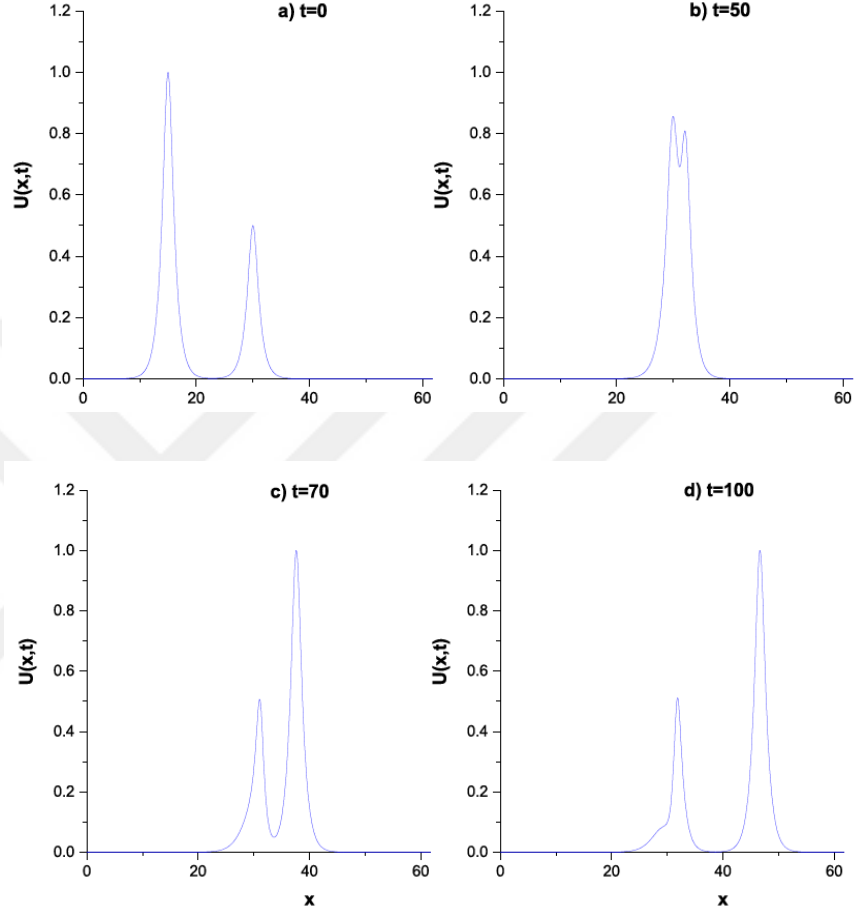
t	0	10	20	40	60	80	100	120	
I_1	1.Lineer. Tekniği [33]	3.93307	3.93307	3.93307	3.93307	3.93307	3.93307	3.93307	3.93307
	2.Lineer. Tekniği [33]	3.93307	3.93307	3.93307	3.93307	3.93307	3.93307	3.93307	3.93307
PG[37]	3.93309	3.93309	3.93309	3.93309	3.93309	3.93309	3.93309	3.93309	
I_2	1.Lineer. Tekniği [33]	2.94524	2.94524	2.94524	2.94524	2.94524	2.94524	2.94523	2.94523
	2.Lineer. Tekniği [33]	2.94524	2.94524	2.94523	2.94523	2.94523	2.94523	2.94523	2.94523
PG[37]	2.94512	2.94518	2.94517	2.94515	2.94505	2.94506	2.94508	2.94511	
I_3	1.Lineer. Tekniği [33]	0.79766	0.79766	0.79766	0.79766	0.79766	0.79766	0.79766	0.79766
	2.Lineer. Tekniği [33]	0.79766	0.79766	0.79766	0.79766	0.79766	0.79766	0.79766	0.79766
PG[37]	0.79761	0.79761	0.79761	0.79761	0.79762	0.79761	0.79761	0.79761	

Tablo 2.12. Maxwellian başlangıç koşulu için elde edilen invaryantlar

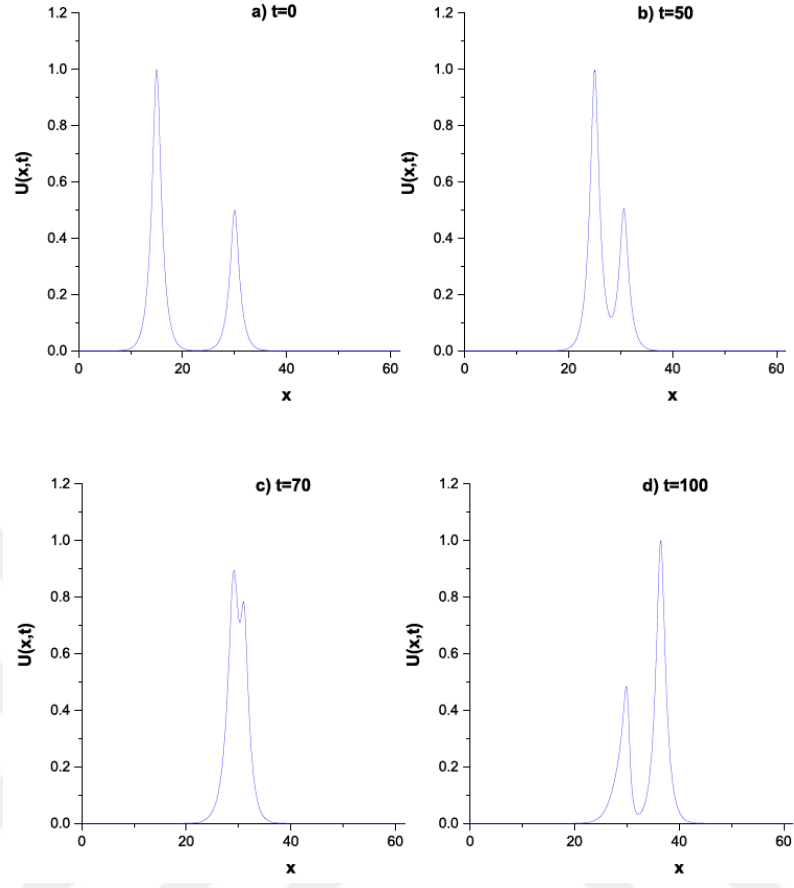
μ	t	$p = 2$			$p = 3$			$p = 4$		
		I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
0.01	0	1.7724	1.2658	0.8862	1.7724	1.2658	0.7926	1.7724	1.2658	0.7236
	4	1.7732	1.2678	0.9061	1.7786	1.2847	0.8782	1.7855	1.2847	0.7715
	8	1.7742	1.2736	0.9234	1.7868	1.3131	0.9691	1.8014	1.3131	1.2362
	12	1.7739	1.2711	0.9123	1.7813	1.2901	0.8664	1.8156	1.2901	1.2707
PG[37]	12	1.7724	1.2658	0.8862	1.7724	1.2665	0.7947	1.7725	1.2669	0.7253
0.025	0	1.7724	1.2846	0.8862	1.7724	1.2846	0.7926	1.7724	1.2846	0.7236
	4	1.7725	1.2846	0.8880	1.7731	1.2863	0.8056	1.7763	1.2967	0.7891
	8	1.7725	1.2846	0.8881	1.7733	1.2859	0.7996	1.7711	1.2762	0.7129
	12	1.7725	1.2846	0.8881	1.7730	1.2837	0.7946	1.7791	1.3056	0.8198
PG[37]	12	1.7724	1.2835	0.8856	1.7723	1.2834	0.7910	1.7724	1.2849	0.7243
0.05	0	1.7724	1.3159	0.8862	1.7724	1.3159	0.7926	1.7724	1.3159	0.7236
	4	1.7724	1.3159	0.8864	1.7725	1.3159	0.7938	1.7726	1.3155	0.7253
	8	1.7724	1.3159	0.8864	1.7725	1.3159	0.7939	1.7729	1.3168	0.7297
	12	1.7724	1.3159	0.8864	1.7725	1.3160	0.7940	1.7735	1.3188	0.7345
PG[37]	12	1.7724	1.3160	0.8861	1.7724	1.3156	0.7922	1.7724	1.3177	0.7245
0.01	0	1.7724	1.3786	0.8862	1.7724	1.3786	0.7926	1.7724	1.3786	0.7236
	4	1.7724	1.3786	0.8862	1.7724	1.3786	0.7928	1.7725	1.3786	0.7243
	8	1.7724	1.3786	0.8862	1.7724	1.3786	0.7928	1.7725	1.3787	0.7243
	12	1.7724	1.3786	0.8862	1.7724	1.3786	0.7928	1.7725	1.3786	0.7243
PG[37]	12	1.7724	1.3785	0.8861	1.7724	1.3787	0.7926	1.7734	1.3836	0.7224

Bu tablodan μ nün değeri arttıkça, invaryantların değerlerinin küçüldüğünü ve %0.08 in altında kaldığını kolayca görebiliriz. Maxwellian başlangıç şartının $t = 12$ deki

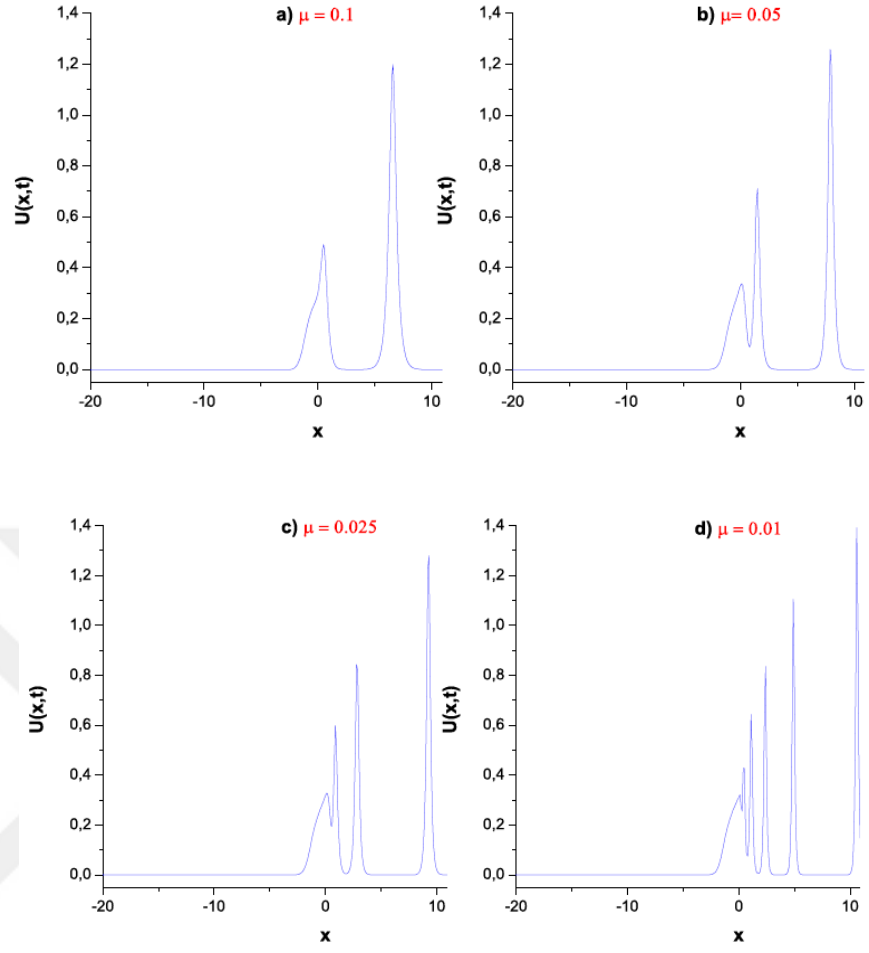
değişimi Şekil 2.4 ve Şekil 2.5 te μ nün farklı değerleri için gösterilmiştir. Bu şekillerde μ nün değeri küçüldüğünde kararlı soliter dalganın sayısının arttığı açıkça görülmektedir.



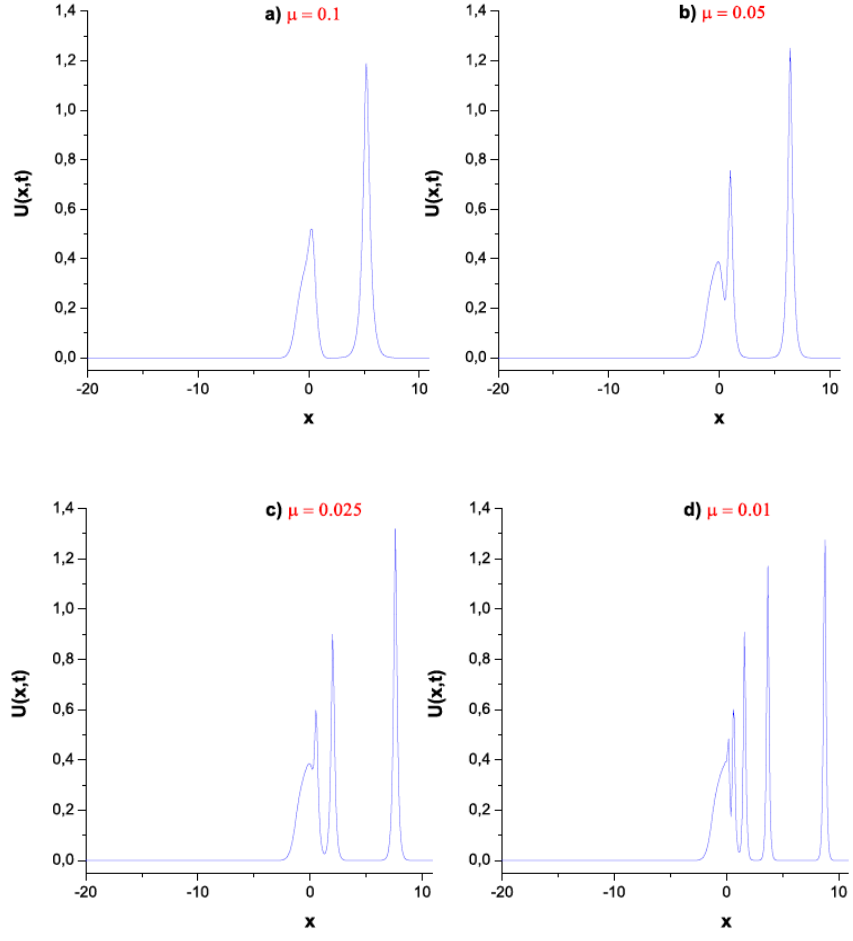
Şekil 2.2. İki soliter dalganın $p = 3$ için farklı zaman adımlarındaki etkileşimi



Şekil 2.3. İki soliter dalganın $p = 4$ için farklı zaman adımlarındaki etkileşimi



Şekil 2.4. $p = 3$ için $t = 12$ zamanında Maxwellian başlangıç koşulu için dalganın hareketi



Şekil 2.5. $p = 4$ için $t = 12$ zamanında Maxwellian başlangıç koşulu için dalganın hareketi

BÖLÜM 3

SEPTİK B-SPLINE KOLLOKASYON YÖNTEMİ İLE GENELLEŞTİRİLMİŞ EŞİT GENİŞLİKLİ DALGA DENKLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Tezin bu bölümünde S.B.G. Karakoç ve H. Zeybek' in 'A septic B-spline collocation method for solving the generalized equal width wave equation' isimli makalesi ayrıntılı olarak incelenmiştir [59]. Bu kısımda GEW dalga denkleminin sayısal çözümleri septik B-spline kollokasyon yöntemi ile iki farklı lineerleştirme tekniği kullanılarak elde edilmiştir. Önerilen yöntemin doğruluğu, tek soliton, solitonların etkileşimi ve Maxwellian başlangıç koşulu olmak üzere üç test problemi için L_2 ve L_∞ hata normları ve I_1 , I_2 ve I_3 invariantların değerleri hesaplanarak gösterilmiştir. Yöntemin koşulsuz kararlı olduğu von-Neumann kararlılık analizi uygulanarak gösterilmiştir [59]. GEW denkleminin formu (1.6.1) de verilmiştir. Fiziksel sınır koşulları $x \rightarrow \pm\infty$ olduğunda $U \rightarrow 0$ dır. Burada p pozitif bir tamsayı, ε ve δ pozitif sabittir, t zaman ve x uzay koordinatıdır. Sınır ve başlangıç koşulları ise

$$\begin{aligned} U(a,t) &= 0, & U(b,t) &= 0, \\ U_x(a,t) &= 0, & U_x(b,t) &= 0, \\ U_{xxx}(a,t) &= 0, & U_{xxx}(b,t) &= 0, \\ U(x,0) &= f(x), & a \leq x \leq b \end{aligned} \quad (3.1)$$

şeklindedir.

Sıvı problemlerinde U su yüzeyinin dalga genliğini veya benzer fiziksel olayı ifade eder. Plazma uygulamalarında ise U elektrostatik potansiyelin negatifidir [59]. (1.6.1) ile verilen GEW denklemi genelleştirilmiş RLW denklemi ve GKdV denkleminin alternatif bir modelidir bu nedenle GEW denkleminin soliter dalga çözümü bir çok fiziksel olayın anlaşılmasında önemli bir role sahiptir [59]. Geyikli ve Karakoç [60] MEW denklemini çözmek için kübik B-spline fonksiyonlara Petrov-Galerkin yöntemini uygulamışlardır. Karakoç ve çalışma arkadaşları [61] kübik B-spline Galerkin sonlu eleman yöntemi ile MRLW denkleminin sayısal çözümlerini elde etmişlerdir. Başhan ve

çalışma arkadaşları [62] kuintik B-spline diferansiyel kuadratür yöntemi ile KdVB denkleminin yaklaşık çözümünü bulmuşlardır.

3.1 Septik B-spline Kollokasyon Yöntemi

Bu bölümde ise (1.6.1) ile verilen GEW denkleminin septik B-spline kollokasyon yöntemi ile elde edilmiş sayısal çözümleri verilecektir. GEW denklemindeki $U(x,t)$ tam çözüm fonksiyonuna karşılık gelen $U_N(x,t)$ yaklaşık çözümü ve bu yaklaşık çözüm Bölüm 1 de (1.3.7.1) ile verilen $\phi_m(x)$ septik B-spline fonksiyonlar cinsinden;

$$U_N(x,t) = \sum_{m=-3}^{N+3} \phi_m(x) \delta_m(t) \quad (3.1.1)$$

şeklinde yazılabilir [56].

Burada $\delta_m(t)$ zamana bağlı parametreler olup sınır ve kollokasyon koşulları ile belirlenecektir [59]. (3.1.1) ile verilen yaklaşık çözüm fonksiyonu ve (1.3.7.1) ile verilen septik B-spline fonksiyonları kullanılarak U, U', U'', U''' fonksiyonlarına düğüm noktalarında δ_m eleman parametreleri cinsinden değerleri

$$\begin{aligned} U_N(x_m, t) &= U_m = \delta_{m-3} + 120\delta_{m-2} + 1191\delta_{m-1} + 2416\delta_m + 1191\delta_{m+1} + 120\delta_{m+2} + \delta_{m+3}, \\ U'_m &= \frac{7}{h} (-\delta_{m-3} - 56\delta_{m-2} - 245\delta_{m-1} + 245\delta_{m+1} + 56\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \\ U''_m &= \frac{42}{h^2} (\delta_{m-3} + 24\delta_{m-2} + 15\delta_{m-1} - 80\delta_m + 15\delta_{m+1} + 24\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \\ U'''_m &= \frac{210}{h^3} (-\delta_{m-3} - 8\delta_{m-2} + 19\delta_{m-1} - 19\delta_{m+1} + 8\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

şeklinde elde edilir [59]. Burada, sonlu elemanlar $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı ile gösterilir ve $[x_m, x_{m+1}]$ aralığındaki U fonksiyonu

$$U = \sum_{m=-3}^{N+3} \phi_m \delta_m \quad (3.1.3)$$

şeklindedir.

(3.1.2) eşitlikleri (1.6.1) denkleminde kullanılır ve birinci lineerleştirme tekniği uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \dot{\delta}_{m-3} + 120\dot{\delta}_{m-2} + 1191\dot{\delta}_{m-1} + 2416\dot{\delta}_m + 1191\dot{\delta}_{m+1} + 120\dot{\delta}_{m+2} + \dot{\delta}_{m+3} \\ & + \frac{7\varepsilon Z_m}{h} (-\dot{\delta}_{m-3} - 56\dot{\delta}_{m-2} - 245\dot{\delta}_{m-1} + 245\dot{\delta}_{m+1} + 56\dot{\delta}_{m+2} + \dot{\delta}_{m+3}) \\ & - \frac{42\delta}{h^2} (\dot{\delta}_{m-3} + 24\dot{\delta}_{m-2} + 15\dot{\delta}_{m-1} - 80\dot{\delta}_m + 15\dot{\delta}_{m+1} + 24\dot{\delta}_{m+2} + \dot{\delta}_{m+3}) = 0, \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

denklem sistemi elde edilir ve burada

$$Z_m = (U_m)^p = (\delta_{m-3} + 120\delta_{m-2} + 1191\delta_{m-1} + 2416\delta_m + 1191\delta_{m+1} + 120\delta_{m+2} + \delta_{m+3})^p$$

dir.

Benzer şekilde ikinci lineerleştirme tekniği uygulandığında ise

$$\begin{aligned} & \dot{\delta}_{m-3} + 120\dot{\delta}_{m-2} + 1191\dot{\delta}_{m-1} + 2416\dot{\delta}_m + 1191\dot{\delta}_{m+1} + 120\dot{\delta}_{m+2} + \dot{\delta}_{m+3} \\ & + \varepsilon Z_m (\delta_{m-3} + 120\delta_{m-2} + 1191\delta_{m-1} + 2416\delta_m + 1191\delta_{m+1} + 120\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) \\ & - \frac{42\delta}{h^2} (\dot{\delta}_{m-3} + 24\dot{\delta}_{m-2} + 15\dot{\delta}_{m-1} - 80\dot{\delta}_m + 15\dot{\delta}_{m+1} + 24\dot{\delta}_{m+2} + \dot{\delta}_{m+3}) = 0, \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

denklem sistemi elde edilmiştir [57, 59].

Burada

$$Z_m = (U_m)^{p-1} (U_m) x \text{ olup}$$

“•” zamana göre türevi belirtir [59].

(3.1.4) ve (3.1.5) denklem sistemlerinde $\dot{\delta}_i$ ve δ_i yerlerine sırasıyla aşağıdaki Crank-Nicolson formülü ve ileri fark yaklaşımı uygulanmıştır:

$$\delta_m = \frac{1}{2}(\delta_m^n + \delta_m^{n+1}), \quad \dot{\delta}_m = \frac{\delta_m^{n+1} - \delta_m^n}{\Delta t}. \quad (3.1.6)$$

Birinci lineerleştirme yaklaşımı ile δ_i^{n+1} , δ_i^n bilinmeyen parametreleri için

$$\begin{aligned} & \gamma_1 \delta_{m-3}^{n+1} + \gamma_2 \delta_{m-2}^{n+1} + \gamma_3 \delta_{m-1}^{n+1} + \gamma_4 \delta_m^{n+1} + \gamma_5 \delta_{m+1}^{n+1} + \gamma_6 \delta_{m+2}^{n+1} + \gamma_7 \delta_{m+3}^{n+1} \\ & = \gamma_7 \delta_{m-3}^n + \gamma_6 \delta_{m-2}^n + \gamma_5 \delta_{m-1}^n + \gamma_4 \delta_m^n + \gamma_3 \delta_{m+1}^n + \gamma_2 \delta_{m+2}^n + \gamma_1 \delta_{m+3}^n, \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

denklem sistemi elde edilir ki

burada

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= (1 - EZ_m - M), \quad \gamma_2 = (120 - 56EZ_m - 24M), \quad \gamma_3 = (1191 - 245EZ_m - 15M), \\ \gamma_4 &= (2416 + 80M), \quad \gamma_5 = (1191 + 245EZ_m - 15M), \quad \gamma_6 = (120 + 56EZ_m - 24M), \\ \gamma_7 &= (1 + EZ_m - M), \\ m &= 0, 1, \dots, N, \quad E = \frac{7\varepsilon}{2h} \Delta t, \quad M = \frac{42\mu}{h^2} \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

dir [59].

İkinci lineerleştirme tekniği için benzer bir denklem sistemi aşağıdaki gibi elde edilmiştir [57, 59].

$$\begin{aligned} & \gamma_1 \delta_{m-3}^{n+1} + \gamma_2 \delta_{m-2}^{n+1} + \gamma_3 \delta_{m-1}^{n+1} + \gamma_4 \delta_m^{n+1} + \gamma_5 \delta_{m+1}^{n+1} + \gamma_6 \delta_{m+2}^{n+1} + \gamma_7 \delta_{m+3}^{n+1} \\ & = \gamma_5 \delta_{m-3}^n + \gamma_6 \delta_{m-2}^n + \gamma_7 \delta_{m-1}^n + \gamma_8 \delta_m^n + \gamma_7 \delta_{m+1}^n + \gamma_6 \delta_{m+2}^n + \gamma_5 \delta_{m+3}^n, \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

burada

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= (1 + EZ_m - M), & \gamma_2 &= (120 + 120EZ_m - 24M), \\
\gamma_3 &= (1191 + 1191EZ_m - 15M), & \gamma_4 &= (2416 + 2416EZ_m + 80M), \\
\gamma_5 &= (1 - EZ_m - M), & \gamma_6 &= (120 - 120EZ_m - 24M), \\
\gamma_7 &= (1191 - 1191EZ_m - 15M), & \gamma_8 &= (2416 - 2416EZ_m + 8015M), \\
m &= 0, 1, \dots, N, & E &= \frac{\varepsilon \Delta t}{2}, & M &= \frac{42\mu}{h^2}
\end{aligned} \tag{3.1.10}$$

dir.

Birinci lineerleştirme tekniğinde lineer olmayan $U^p U_x$ terimindeki U^p terimi şeklinde iken

$$\begin{aligned}
Z_m = (U_m)^p &= (\delta_{m-3} + 120\delta_{m-2} + 1191\delta_{m-1} + 2416\delta_m \\
&\quad + 1191\delta_{m+1} + 120\delta_{m+2} + \delta_{m+3})^p
\end{aligned} \tag{3.1.11}$$

ikinci lineerleştirme tekniğinde ise lineer olmayan $U^p U_x$ terimindeki $U^{p-1} U_x$ terimi aşağıdaki gibi alınır

$$Z_m = (U_m)^{p-1} (U_m)_x \tag{3.1.12}$$

şeklindedir.

$U^{p-1} U_x$ terimi için lineerleştirme tekniği uygulandığında

$$(U^{p-1} U_x)^{n+1} = (U^{p-1})^n (U_x)^{n+1} + (U^{p-1})^{n+1} (U_x)^n - (U^{p-1})^n (U_x)^n \tag{3.1.13}$$

elde edilir.

Görüldüğü gibi, (3.1.7) ve (3.1.9) denklem sistemlerinden $(N + 1)$ tane lineer denklem ve $(N + 7)$ tane bilinmeyenden $(\delta_{-3}, \delta_{-2}, \delta_{-1}, \dots, \delta_{N+1}, \delta_{N+2}, \delta_{N+3})^T$ oluşmaktadır. Bu denklem sistemlerinin bir tek çözümlerinin elde edilebilmesi için altı ek sınır şartına

ihtiyaç vardır. Bunun için (3.1) ile verilen sınır şartlarını kullanarak (3.1.7) ve (3.1.9) sistemlerinden $\delta_{-3}, \delta_{-2}, \delta_{-1}$ ve $\delta_{N+1}, \delta_{N+2}, \delta_{N+3}$ bilinmeyenleri yok edilebilir.

Böylece

$$Ad^{n+1} = Bd^n \quad (3.1.14)$$

şeklinde $(N+1)$ tane bilinmeyen $d^n = (\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_N)^T$ içeren bir matris denklemi elde edilir [59]. A ve B matrisleri $(N+1) \times (N+1)$ boyutlu septa diyagonal matrislerdir ve bu matris denklemi septa-diyagonal algoritması kullanılarak hesaplanabilir. Z_m nin neden olduğu lineer olamama problemini çözebilmek için her bir zaman adımında $\delta^{n*} = \delta^n + \frac{1}{2}(\delta^n - \delta^{n-1})$ terimine iki veya üç kez iç iterasyon uygulanır. Çözüm sürecine başlamadan önce başlangıç koşulu ve sınırlarda aşağıdaki türevler kullanılarak başlangıç parametreleri d^0 belirlenmelidir:

$$\begin{aligned} U_N(x, 0) &= U(x_m, 0); & m &= 0, 1, 2, \dots, N \\ (U_N)_x(a, 0) &= 0, & (U_N)_x(b, 0) &= 0, \\ (U_N)_{xx}(a, 0) &= 0, & (U_N)_{xx}(b, 0) &= 0, \\ (U_N)_{xxx}(a, 0) &= 0, & (U_N)_{xxx}(b, 0) &= 0. \end{aligned}$$

İlk vektör d^0 için aşağıdaki matris formu kullanılmıştır

$$Wd^0 = b,$$

burada

(2.4.2) deki analitik çözüm kullanılarak hesaplanmıştır. Sayısal algoritma tek soliter dalganın hareketi, iki soliter dalganın girişimi ve Maxwellian başlangıç koşullu soliter dalganın hareketi üç farklı probleme uygulanmıştır [59]. L_2 ve L_∞ hata normları (2.4.1) ile verilmiştir. $U(x, t) = f(x - ct)$ dönüşümü uygulanarak elde edilen GEW denkleminin analitik çözümü (2.4.2) deki gibidir [35, 36]. (2.4.2) denkleminde de belirttiğimiz gibi c ; x ekseninde pozitif yönde ilerleyen dalganın sabit hızıdır, x_0 ise keyfi sabittir. Kütle, momentum ve enerjinin korunumuna karşılık gelen üç invaryant (2.4.3) te verilmiştir [33, 35, 36].

3.3.1 Tek Soliter Dalganın Hareketi

Bu bölümde sayısal yöntemin uygulanabilmesi için farklı p , c ve genlik $\left(\text{genlik} = \sqrt[p]{\frac{c(p+1)(p+2)}{2\varepsilon}} \right)$ değerleri için beş parametre kümesi ele alınmıştır. Beş kümenin tümü için diğer parametreler $h = 0.1$, $\Delta t = 0.2$, $\varepsilon = 3$, $\mu = 1$, $x_0 = 30$, $0 \leq x \leq 80$ şeklinde aynı olarak seçilmiş ve sayısal hesaplamalar $t = 20$ ye kadar yapılmıştır [59].

İlk olarak $p = 2$, $c = 1/32$ parametreleri alınmıştır ve soliter dalganın genliği 0.25 olarak bulunmuştur. I_1 , I_2 , I_3 invaryantları ve L_2 , L_∞ hata normları sayısal yöntem kullanılarak hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlar Tablo 3.1 de verilmiştir. Tablo 3.1 de görüldüğü gibi $I_1 \times 10^5$, $I_2 \times 10^5$ ve $I_3 \times 10^5$ invaryantlarındaki değişimlerin başlangıç değerlerine göre sırasıyla 0.0038, 0.0027 ve 0.0002 den daha az olduğu görülmüştür. Ayrıca ikinci lineerleştirme tekniği ile hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normlarının miktarlarının birinci lineerleştirme tekniği ile hesaplanan miktarlardan daha az olduğu görülmüştür [59].

İkinci olarak $p = 2$, $c = 1/2$ parametreleri alınmıştır ve soliter dalga genliği 1 elde edilmiştir. I_1 , I_2 ve I_3 invaryantları ve L_2 , L_∞ hata normları sayısal yöntem kullanılarak hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlar Tablo 3.2 de gösterilmiştir. Tablo 3.2 de $I_1 \times 10^3$, $I_2 \times 10^3$, $I_3 \times 10^3$ invaryantlarındaki değişimlerin başlangıç değerlerine göre

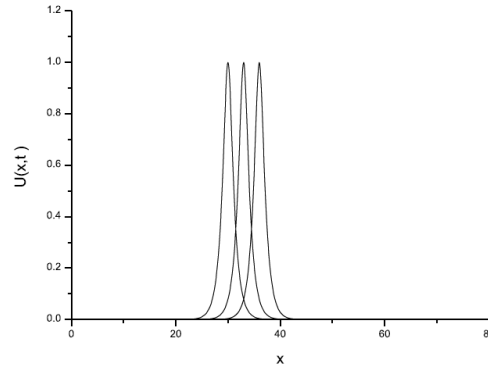
sırasıyla 0.0005 , 0.0017 ve 0.0017 den daha az olduğu görülmüştür. Birinci ve ikinci lineerleştirme teknikleri ile hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normlarının büyüklüğü karşılaştırıldığında ikinci lineerleştirme tekniği ile hesaplanan sonuçların daha küçük olduğu görülmüştür [59].

Üçüncü olarak eğer $p = 3$, $c = 0.001$ parametreleri alınır ve soliter dalganın genliği 0.15 olarak bulunur. I_1 , I_2 , I_3 invaryantları ve L_2 , L_∞ hata normları sayısal yöntem kullanılarak hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlar Tablo 3.3 te verilmiştir. Tablo 3.3 te $I_1 \times 10^6$, $I_2 \times 10^6$ ve $I_3 \times 10^6$ invaryantlarındaki değişimlerin başlangıç değerlerine göre sırasıyla 0.0001 , 0.0001 ve 0.0001 den daha az olduğu gözlenmiştir. Birinci ve ikinci lineerleştirme tekniği kullanılarak elde edilen L_2 ve L_∞ hata normları değerlendirilmiş ve ikinci lineerleştirme tekniği ile elde edilen sonuçların sayısal şema için daha iyi olduğu görülmüştür [59].

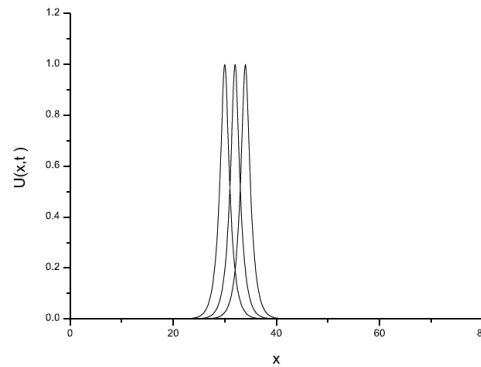
Şimdide $p = 3$, $c = 0.3$ parametreleri seçilmiş ve dalga genliği 1 olarak hesaplanmıştır. I_1 , I_2 , I_3 invaryantları ve L_2 , L_∞ hata normları sayısal yöntem kullanılarak hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlar Tablo 3.4 te listelenmiştir. Tablo 3.4 te $I_1 \times 10^3$, $I_2 \times 10^3$ ve $I_3 \times 10^3$ invaryantlarının başlangıç değerlerine göre değişimlerinin sırasıyla 0.0637 , 0.1606 ve 0.1607 den daha az olduğu görülmüştür. İkinci lineerleştirme tekniği ile hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normlarının değerleri birinci lineerleştirme tekniği ile hesaplanan değerlerden daha küçüktür. Soliter dalga profilleri Şekil 3.1 de farklı zaman seviyelerinde gösterilmiştir. Bu şekilden görüldüğü gibi soliton dalga beklendiği gibi zaman arttıkça sabit bir hızda ve neredeyse değişmeyen genlikte sağa doğru hareket etmiştir [59].

Son olarak $p = 4$, $c = 0.2$ parametreleri için soliter dalganın genliği 1 olmuştur. I_1 , I_2 , I_3 invaryantları ve L_2 , L_∞ hata normları sayısal yöntem kullanılarak hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlar Tablo 3.5 te belirtilmiştir. Tablo 3.5 te $I_1 \times 10^3$, $I_2 \times 10^3$ ve $I_3 \times 10^3$ invaryantlarındaki değişimlerin başlangıç değerlerine göre sırasıyla 0.1305 , 0.2822 ve 0.2823 ten daha az olduğu görülmüştür. Birinci ve ikinci

lineerleştirme teknikleri ile hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normlarının büyüklüğü karşılaştırıldığında ikinci lineerleştirme tekniği ile hesaplanan sonuçların daha küçük olduğu görülmüştür. Şekil 3.2 sayısal şemanın sabit hızda sağa doğru hareket eden ve beklendiği gibi artan zamanla genliğini ve şeklini koruyan solitonu gerçekleştirdiğini göstermektedir [59]. Tablo 3.6 da mevcut yöntemle elde edilen invaryantların ve hata normlarının değerleri $t=20$ zamanında elde edilen yöntemlerle karşılaştırılmıştır [35, 36, 37]. Bu tabloda, elde edilen hata normlarının $p=2, 3$ değerleri için önceki çalışmalara göre daha küçük olduğu ve $p=4$ için hemen hemen aynı olduğu görülmüştür. İnvaryantların değerleri de diğerleriyle iyi bir uyum içinde bulunmuştur [59].



Şekil 3.1. Tek soliter dalganın $p = 3$, $c = 0.3$, $x_0 = 30$, $0 \leq x \leq 80$, $t = 0, 10, 20$ parametreleri için hareketi



Şekil 3.2. Tek soliter dalganın $p = 4$, $c = 0.2$, $x_0 = 30$, $0 \leq x \leq 80$, $t = 0, 10, 20$ parametreleri için hareketi

Tablo 3.1. Tek soliter dalga için $p = 2$, $\Delta t = 0.2$, $h = 0.1$, $\varepsilon = 3$, $\mu = 1$, $0 \leq x \leq 80$

parametreleri ile bulunan hata normları ve invaryantlar

t		0	5	10	15	20
I_1	1.Lineer. Tekniği	0.7853966	0.7853966	0.7853965	0.7853965	0.7853965
	2.Lineer. Tekniği	0.7853966	0.7853966	0.7853966	0.7853966	0.7853965
I_2	1.Lineer. Tekniği	0.1666664	0.1666663	0.1666663	0.1666663	0.1666663
	2.Lineer. Tekniği	0.1666664	0.1666663	0.1666663	0.1666663	0.1666663
I_3	1.Lineer. Tekniği	0.0052083	0.0052083	0.0052083	0.0052083	0.0052083
	2.Lineer. Tekniği	0.0052083	0.0052083	0.0052083	0.0052083	0.0052083
$L_2 \times 10^5$	1.Lineer. Tekniği	0.00000000	0.03067279	0.06285007	0.09693233	0.13336822
	2.Lineer. Tekniği	0.00000000	0.02900012	0.05967250	0.09243870	0.12775844
$L_\infty \times 10^5$	1.Lineer. Tekniği	0.00000000	0.01989833	0.04083748	0.06230627	0.08399884
	2.Lineer. Tekniği	0.00000000	0.01721060	0.03441138	0.05158717	0.06887276

Tablo 3.2. Tek soliter dalga için $p = 2, \Delta t = 0.2, h = 0.1, \varepsilon = 3, \mu = 1, 0 \leq x \leq 80$ parametreleri ile bulunan hata normları ve invaryantlar

t		0	5	10	15	20
I_1	1.Lineer. Tekniği	3.1415863	3.1415861	3.1415859	3.1415857	3.1415854
	2.Lineer. Tekniği	3.1415863	3.1415864	3.1415862	3.1415860	3.1415858
I_2	1.Lineer. Tekniği	2.6666616	2.6666613	2.6666610	2.6666607	2.6666604
	2.Lineer. Tekniği	2.6666616	2.6666616	2.6666611	2.6666606	2.6666600
I_3	1.Lineer. Tekniği	1.3333283	1.3333275	1.3333272	1.3333269	1.3333266
	2.Lineer. Tekniği	1.3333283	1.3333283	1.3333278	1.3333272	1.3333267
L_2	1.Lineer. Tekniği	0.00000000	0.00438263	0.00853676	0.01262954	0.01671823
	2.Lineer. Tekniği	0.00000000	0.00421699	0.00849425	0.01279079	0.01708960
L_∞	1.Lineer. Tekniği	0.00000000	0.00289068	0.00539302	0.00789694	0.01040121
	2.Lineer. Tekniği	0.00000000	0.00261076	0.00524102	0.00787126	0.01050088

Tablo 3.3. Tek soliter dalga için $p=3, \Delta t=0.2, h=0.1, \varepsilon=3, \mu=1, 0 \leq x \leq 80$ parametreleri ile bulunan hata normları ve invaryantlar

t		0	5	10	15	20
I_1	1.Lineer. Tekniği	0.4189154	0.4189154	0.4189154	0.4189154	0.4189154
	2.Lineer. Tekniği	0.4189154	0.4189154	0.4189154	0.4189154	0.4189154
I_2	1.Lineer. Tekniği	0.0549807	0.0549807	0.0549807	0.0549807	0.0549807
	2.Lineer. Tekniği	0.0549807	0.0549807	0.0549807	0.0549807	0.0549807
$I_3 \times 10^4$	1.Lineer. Tekniği	0.7330748	0.7330748	0.7330748	0.7330748	0.7330748
	2.Lineer. Tekniği	0.7330748	0.7330748	0.7330748	0.7330748	0.7330748
$L_2 \times 10^7$	1.Lineer. Tekniği	0.00000000	0.01575841	0.03157299	0.04744419	0.06337251
	2.Lineer. Tekniği	0.00000000	0.01574216	0.03154053	0.04739557	0.06330776
$L_\infty \times 10^7$	1.Lineer. Tekniği	0.00000000	0.00855102	0.01715751	0.02582082	0.03454222
	2.Lineer. Tekniği	0.00000000	0.00855128	0.01715803	0.02582167	0.03454333

Tablo 3.4. Tek soliter dalga için $p = 3$, $\Delta t = 0.2$, $h = 0.1$, $\varepsilon = 3$, $\mu = 1$, $0 \leq x \leq 80$ parametreleri ile bulunan hata normları ve invaryantlar

t		0	5	10	15	20
I_1	1.Lineer. Tekniği	2.8043580	2.8043577	2.8043575	2.8043572	2.8043570
	2.Lineer. Tekniği	2.8043580	2.8043425	2.8043265	2.8043104	2.8042943
I_2	1.Lineer. Tekniği	2.4639101	2.4639097	2.4639094	2.4639090	2.4639086
	2.Lineer. Tekniği	2.4639101	2.4638709	2.4638305	2.4637900	2.4637496
I_3	1.Lineer. Tekniği	0.9855618	0.9855613	0.9855610	0.9855606	0.9855602
	2.Lineer. Tekniği	0.9855618	0.9855225	0.9854821	0.9854416	0.9854012
L_2	1.Lineer. Tekniği	0.00000000	0.00204205	0.00404586	0.00603031	0.00800997
	2.Lineer. Tekniği	0.00000000	0.00166798	0.00341195	0.00522557	0.00708099
L_∞	1.Lineer. Tekniği	0.00000000	0.00144917	0.00275209	0.00406426	0.00537733
	2.Lineer. Tekniği	0.00000000	0.00114859	0.00234526	0.00356386	0.00480353

3.3.2 İki Soliter Dalganın Girişimi

Bu kısımda (2.6.1) ile verilen başlangıç koşulu kullanılarak iki iyi ayrılmış soliter dalganın etkileşimi incelenmiştir [59].

Tablo 3.5. Tek soliter dalga için $p = 4$, $\Delta t = 0.2$, $h = 0.1$, $\varepsilon = 3$, $\mu = 1$, $0 \leq x \leq 80$ parametreleri için bulunan hata normları ve invaryantlar

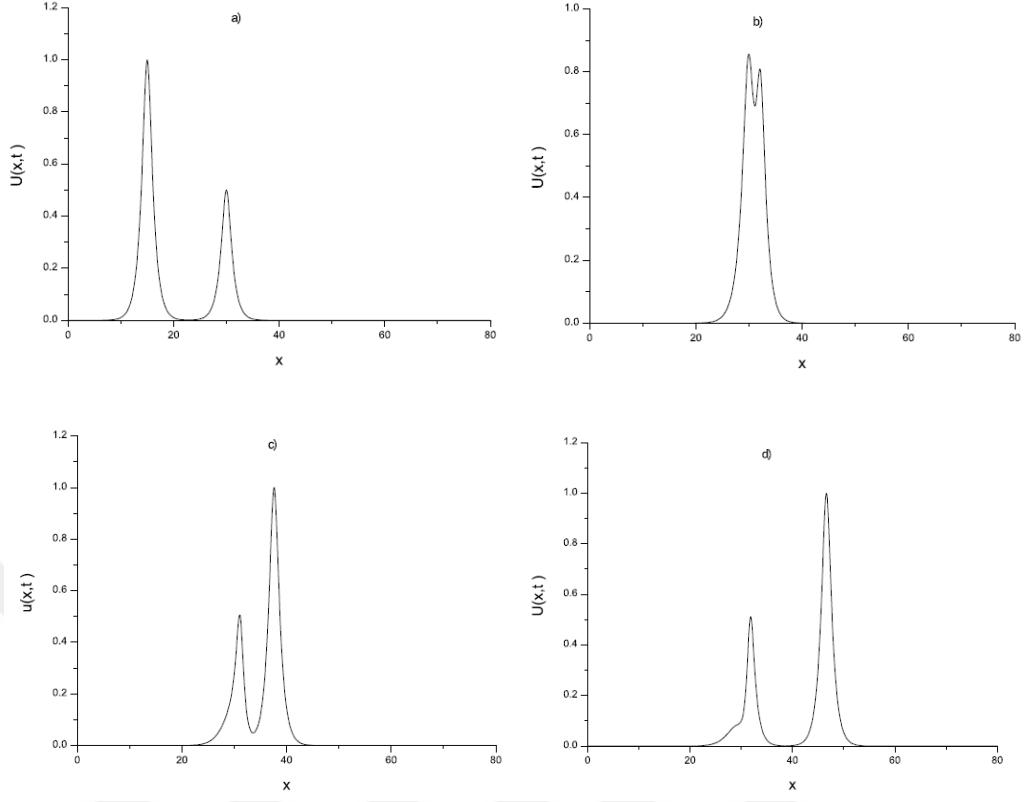
t		0	5	10	15	20
I_1	1. <i>Lineer.</i> Tekniği	2.6220516	2.6220514	2.6220512	2.6220510	2.6220508
	2. <i>Lineer.</i> Tekniği	2.6220516	2.6220193	2.6219866	2.6219539	2.6219211
I_2	1. <i>Lineer.</i> Tekniği	2.3561915	2.3561912	2.3561909	2.3561905	2.3561902
	2. <i>Lineer.</i> Tekniği	2.3561915	2.3561216	2.3560509	2.3559801	2.3559093
I_3	1. <i>Lineer.</i> Tekniği	0.7853952	0.7853948	0.7853945	0.7853942	0.7853939
	2. <i>Lineer.</i> Tekniği	0.7853952	0.7853252	0.7852545	0.7851837	0.7851130
L_2	1. <i>Lineer.</i> Tekniği	0.00000000	0.00105910	0.00211286	0.00316045	0.00420836
	2. <i>Lineer.</i> Tekniği	0.00000000	0.00075057	0.00156686	0.00245793	0.00341485
L_∞	1. <i>Lineer.</i> Tekniği	0.00000000	0.00078877	0.00151318	0.00223807	0.00296955
	2. <i>Lineer.</i> Tekniği	0.00000000	0.00055460	0.00116121	0.00180868	0.00249360

Tablo 3.6. Tek soliter dalga için $p = 2, 3, 4$ olmak üzere $\Delta t = 0.2, h = 0.1, \varepsilon = 3, \mu = 1, 0 \leq x \leq 80$ parametreleri ile bulunan sonuçların karşılaştırması

p		2	3	4
I_1	<i>Kollokasyon(kuadratik)</i> [36]	0.78528640		
	<i>Kollokasyon(kübik)</i> [35]	0.78466760	0.65908330	
	<i>Petrov – Galerkin(kuadratik)</i> [37]	0.78539800	0.41891600	2.62206000
	<i>Kollokasyon(septik)</i> [59]	0.78539650	0.41891540	2.62192110
I_2	<i>Kollokasyon(kuadratik)</i> [36]	0.16658180		
	<i>Kollokasyon(kübik)</i> [35]	0.16643400	0.05938137	
	<i>Petrov – Galerkin(kuadratik)</i> [37]	0.16666900	0.05497830	2.35615000
	<i>Kollokasyon(septik)</i> [59]	0.16666630	0.05498070	2.35590930
I_3	<i>Kollokasyon(kuadratik)</i> [36]	0.00520600		
	<i>Kollokasyon(kübik)</i> [35]	0.00519380	0.00006871	
	<i>Petrov – Galerkin(kuadratik)</i> [37]	0.00520829	0.00007330	0.78534400
	<i>Kollokasyon(septik)</i> [59]	0.00520830	0.00007330	0.78511300
$L_2 \times 10^3$	<i>Kollokasyon(kuadratik)</i> [36]	0.15695390		
	<i>Kollokasyon(kübik)</i> [35]	0.19588780	0.51496770	
	<i>Petrov – Galerkin(kuadratik)</i> [37]	0.00250172	0.00006407	2.30499000
	<i>Kollokasyon(septik)</i> [59]	0.00127758	0.00000633	3.41485000
$L_\infty \times 10^3$	<i>Kollokasyon(kuadratik)</i> [36]	0.20214760		
	<i>Kollokasyon(kübik)</i> [35]	0.17443300	0.32060590	
	<i>Petrov – Galerkin(kuadratik)</i> [37]	0.00275164	0.00008206	1.88285000
	<i>Kollokasyon(septik)</i> [59]	0.00068872	0.00000345	2.49360000

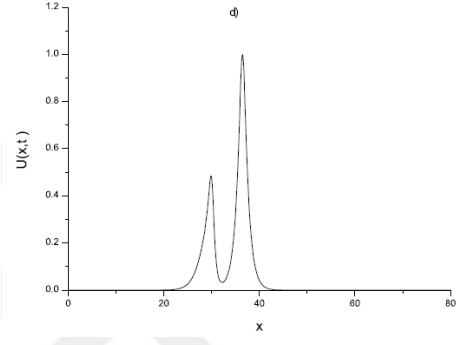
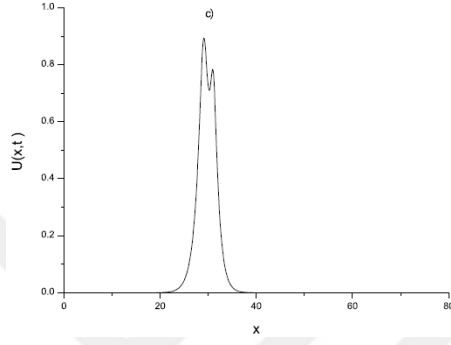
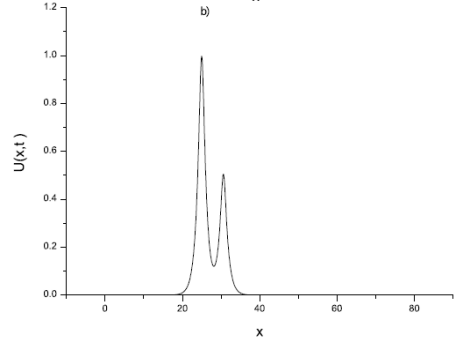
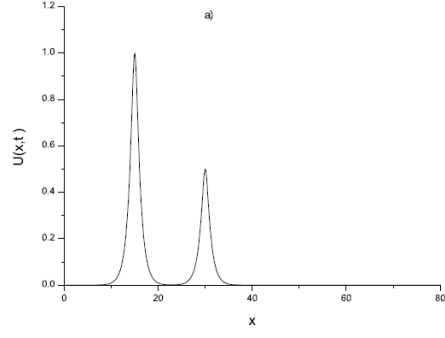
(2.6.1) denklemi için c_i ve x_i ($i = 1, 2$) keyfi sabitlerdir. Denklem (2.6.1) aynı yönde farklı genliklere sahip iki soliter dalganın hareketini gösterir. p ve c_i nin farklı değerleri için üç parametre kümesi dikkate alınmıştır. Bu üç küme için diğer parametreler $h = 0.1, \Delta t = 0.025, \varepsilon = 3, \mu = 1, x_1 = 15, x_2 = 30, 0 \leq x \leq 80$ olarak seçilmiştir. İyi ayrılmış iki soliter dalganın genliği 1 ve 0.5 dir. İlk olarak $p = 2, c_1 = 0.5$ ve $c_2 = 0.125$ alınmıştır. Hesaplamalar $t = 0$ ile $t = 60$ arasında yapılır ve I_1, I_2 ve I_3

invariantlarının değerleri Tablo 3.7 de belirtilmiştir. Tablo 3.7 den başlangıç değerlerine göre $I_1 \times 10^3$, $I_2 \times 10^3$ ve $I_3 \times 10^3$ teki değişimlerin sırasıyla 0.0013, 0.0002 ve 0.005 ten daha az olduğu grlmüştur. Ayrıca invariantların kuadratik Petrov-Galerkin metodu kullanılarak elde edilenlere çok yakın olduğu bulunmuştur. İkinci olarak $p = 3$, $c_1 = 0.3$ ve $c_2 = 0.0375$ parametreleri alınmıştır. Simülasyonlar çeşitli zamanlarda I_1 , I_2 ve I_3 invariantlarını bulmak için $t = 100$ zamanına kadar yapılmıştır. Elde edilen sonuçlar Tablo 3.8 de verilmiştir. Tablo 3.8 den $I_1 \times 10^3$, $I_2 \times 10^3$ ve $I_3 \times 10^3$ invariantlarındaki değişimlerin başlangıç değerlerine göre sırasıyla 0.002, 0.0001 ve 0.0005 ten daha az olduğu grlmüştur. İnvaryantların değerlerinin bilgisayar çalışırken neredeyse sabit kaldığı ve kuadratik Petrov-Galerkin yöntemiyle iyi bir uyum içerisinde olduğu grlmüştur. Şekil 3.3 (a)-(d) iki ayrı dalğanın farklı zamanlarda etkileşimini göstermektedir. Bu Şekilde $t = 0$ zamanında daha büyük genliğe sahip dalğanın daha küçük genliğe sahip ikinci dalğanın solunda olduğu gözlemlenmiştir. Zaman arttıa üst üste binme olayı gerçekleşir. $t = 50$ zamanından sonra dalgalar orijinal Şekillerini sürdürmeye başlar. Son olarak $p = 4$, $c_1 = 0.2$ ve $c_2 = 1/80$ parametreleri seçilmiştir. Bilgisayar programı $t = 120$ zamanında çalıştırılmıştır. I_1 , I_2 ve I_3 invariantlarının korunan miktarları için hesaplanan değerler Tablo 3.9 da verilmiştir. Tablo 3.9 da görüldüğü gibi invariantların $I_1 \times 10^4$, $I_2 \times 10^4$ ve $I_3 \times 10^4$ teki başlangıç değerlerine göre değişimleri sırasıyla 0.01, 0.001 ve 0.005 ten daha azdır. İnvaryantlar Roshan'ın [37] verdiği ile hemen hemen aynıdır. İki soliter dalğanın hareketi Şekil 3.4 (a)-(d) de farklı zaman seviyelerinde çizilmiştir. Bu Şekil $t = 0$ zamanında daha büyük genliğe sahip dalğanın ikinci dalğanın solunda daha küçük genliğe sahip olduğunu göstermektedir. Zaman geçtikçe etkileşim başlar ve çakışma meydana gelir. $t = 100$ zamanında dalgalar orijinal Şekillerini sürdürmeye başlar [59].



Şekil 3.3. $p = 3$ için iki soliter dalganın etkileşimi

$a)t = 0, b)t = 50, c)t = 70, d)t = 100$



Şekil 3.4. $p = 4$ için iki soliter dalganın etkileşimi;
 $a)t = 0, b)t = 50, c)t = 70, d)t = 100$

Tablo 3.7. İki soliter dalga için $p = 2, c_1 = 0.5, c_2 = 0.125, x_1 = 15, x_2 = 30,$
 $\Delta t = 0.025, h = 0.1, \varepsilon = 3, \mu = 1, 0 \leq x \leq 80$ parametreleri ile bulunan invaryantlar

t	0	10	20	30	40	50	60
I_1 1. <i>Linear.</i> Tekniği[59]	4.7123733	4.7123745	4.7123745	4.7123745	4.7123745	4.7123745	4.7123745
	4.7123733	4.7123745	4.7123743	4.7123665	4.7123702	4.7123746	4.7123747
	QBSPG[37]						
I_2 1. <i>Linear.</i> Tekniği[59]	3.3333294	3.3333294	3.3333294	3.3333295	3.3333295	3.3333295	3.3333295
	3.3333294	3.3333294	3.3333290	3.3333139	3.3333214	3.3333296	3.3333296
	QBSPG[37]						
I_3 1. <i>Linear.</i> Tekniği[59]	1.4166643	1.4166643	1.4166642	1.4166594	1.4166615	1.4166644	1.4166644
	1.4166643	1.4166643	1.4166639	1.4166446	1.4166532	1.4166642	1.4166644
	QBSPG[37]						

Tablo 3.8. İki soliter dalga için $p = 3, c_1 = 0.3, c_2 = 0.0375, x_1 = 15, x_2 = 30,$
 $\Delta t = 0.025, h = 0.1, \varepsilon = 3, \mu = 1, 0 \leq x \leq 80$ parametreleri ile bulunan invaryantlar

t	0	10	20	40	60	80	90	100
I_1 1.Linear. Tekniği[59]	4.2065320	4.2065329	4.2065330	4.2065330	4.2065330	4.2065330	4.2065330	4.2065330
	4.2065320	4.2065328	4.2065328	4.2065303	4.2065314	4.2065325	4.2065324	4.2065323
2.Linear. Tekniği[59]								
QBSPG[37]	4.2065500	4.2065500	4.2065500	4.2065500	4.2065500	4.2065500	4.2065500	4.2065500
I_2 1.Linear. Tekniği[59]	3.0798892	3.0798892	3.0798892	3.0798892	3.0798892	3.0798892	3.0798892	3.0798892
	3.0798892	3.0798889	3.0798887	3.0798842	3.0798862	3.0798879	3.0798877	3.0798875
2.Linear. Tekniği[59]								
QBSPG[37]	3.9797700	2.0798600	3.0798200	3.0798600	3.0798700	3.0799100	3.0797400	3.0797200
I_3 1.Linear. Tekniği[59]	1.0163623	1.0163623	1.0163623	1.0163619	1.0163620	1.0163624	1.0163625	1.0163625
	1.0163623	1.0163621	1.0163619	1.0163573	1.0163585	1.0163606	1.0163604	1.0163602
2.Linear. Tekniği[59]								
QBSPG[37]	1.0163400	1.0163400	1.0163400	1.0163400	1.0163300	1.0163300	1.0163300	1.0163400

Tablo 3.9. İki soliter dalga için $p = 4$, $c_1 = 0.2$, $c_2 = 1/80$, $x_1 = 15$, $x_2 = 30$, $\Delta t = 0.025$,
 $h = 0.1$, $\varepsilon = 3$, $\mu = 1$, $0 \leq x \leq 80$ parametreleri ile bulunan invaryantlar

t	0	10	20	40	60	80	100	120
I_1 1.Linear. Tekniği[59]	3.9330730	3.9330737	3.9330738	3.9330738	3.9330738	3.9330738	3.9330738	3.9330739
	3.9330730	3.9330736	3.9330735	3.9330732	3.9330702	3.9330709	3.9330728	3.9330725
2.Linear. Tekniği[59]								
QBSPG[37]	3.9330900	3.9330900	3.9330900	3.9330900	3.9330900	3.9330900	3.9330900	3.9330800
I_2 1.Linear. Tekniği[59]	2.9452406	2.9452406	2.9452406	2.9452406	2.9452406	2.9452406	2.9452406	2.9452406
	2.9452406	2.9452403	2.9452401	2.9452394	2.9452339	2.9452353	2.9452384	2.9452379
2.Linear. Tekniği[59]								
QBSPG[37]	2.9451200	2.9451800	2.9451700	2.9451500	2.9450500	2.9450600	2.9450800	2.9451100
I_3 1.Linear. Tekniği[59]	0.7976683	0.7976683	0.7976683	0.7976683	0.7976680	0.7976679	0.7976684	0.7976684
	0.7976683	0.7976680	0.7976677	0.7976671	0.7976617	0.7976622	0.7976655	0.7976649
2.Linear. Tekniği[59]								
QBSPG[37]	0.7976140	0.7976120	0.7976110	0.7976120	0.7976220	0.7976130	0.7976110	0.7976110

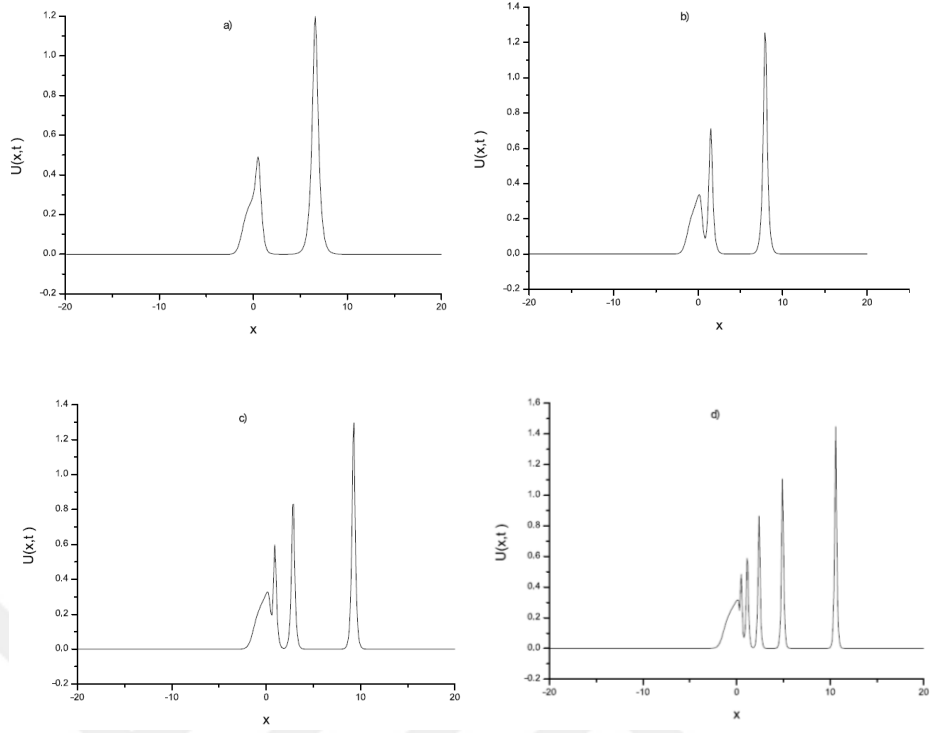
3.3.3 Maxwellian Başlangıç Koşulu

Son problemde, (1.6.1) ile verilen GEW denklemi, (2.7.1) ile verilen Maxwellian başlangıç koşulu ele alınarak incelenmiştir. Bu durumda çözüm μ değerlerine bağlıdır. Bu nedenle $p = 2, 3, 4$ için $\mu = 0.01$, $\mu = 0.025$, $\mu = 0.05$, $\mu = 0.1$ değerleri seçilmiştir. Sayısal hesaplamalar $t = 12$ ye kadar yapılmıştır. Farklı μ değerleri için elde edilen sonuçlar Tablo 3.10 da gösterilmiştir. $I_1 \times 10^3$, $I_2 \times 10^3$ ve $I_3 \times 10^3$ invaryantlarının başlangıç değerlerine göre değişimi sırasıyla $p = 2$ için 0.03, 0.07 ve

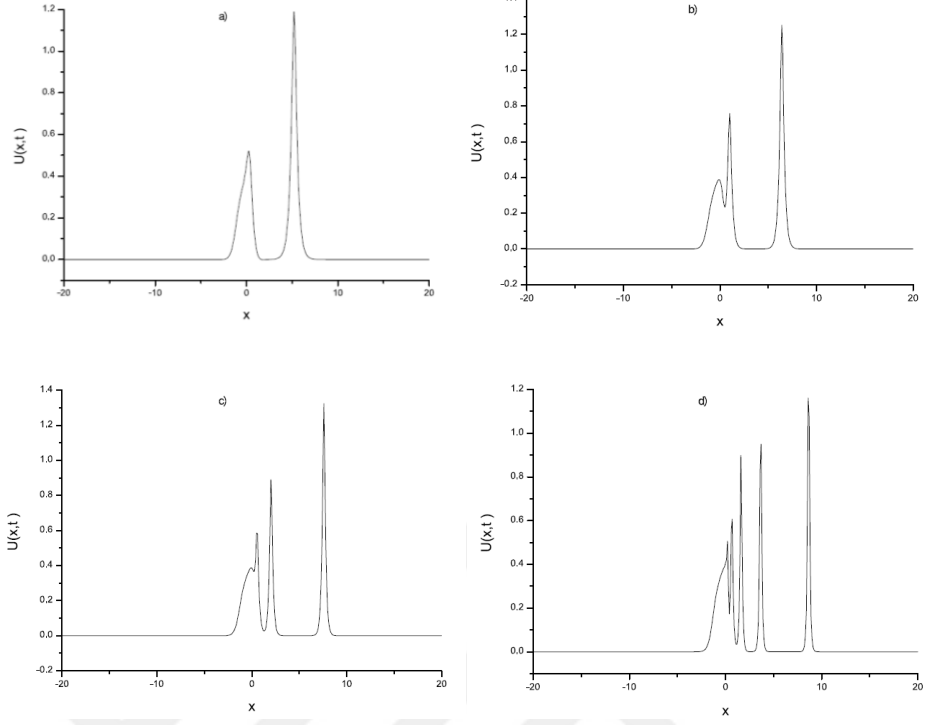
0.2 den, $p = 3$ için 0.05, 0.2 ve 0.2 den, $p = 4$ için 0.08, 0.2 ve 0.6 dan küçüktür. Yöntemimiz ile Petrov-Galerkin yöntemindeki invaryantların farkı $t = 12$ zamanında çok azdır [59]. Ayrıca Şekil 3.5 (a)-(d), Şekil 3.6 (a)-(d), Maxwellian başlangıç koşulunun soliter dalgalara dönüşmesini göstermektedir. Şekil 3.5 (a) ve Şekil 3.6 (a) da daha büyük olan soliter dalga daha küçük olanın sağındadır. $\mu = 0.1$ için tek kararlı çözüm elde edilmiştir. $\mu = 0.05$ Şekil 5(b) ve Şekil 6(b) de iki kararlı soliter dalga ortaya çıkmıştır. Şekil 5(c), (d) ve Şekil 6(c), (d) de görüldüğü gibi sırasıyla $\mu = 0.025$ ve $\mu = 0.01$ de üç adet ve beş adet kararlı soliter dalga meydana gelmiştir. Bu rakamlardan, μ değeri azaldıkça kararlı soliter dalga sayısının arttığı anlaşılmaktadır [59].

Tablo 3.10. Maxwellian başlangıç koşulu için invaryantlar

μ	t	$p = 2$			$p = 3$			$p = 4$		
		I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
0.010	0	1.772453	1.265847	0.886226	1.772453	1.265847	0.792665	1.772453	1.265847	0.723601
	4	1.773567	1.272162	0.913749	1.776431	1.280719	0.851731	1.803566	1.363095	1.083499
	8	1.774354	1.273668	0.905325	1.782107	1.293911	0.847407	1.805571	1.392182	1.468426
	12	1.773219	1.267638	0.897781	1.788222	1.329233	1.014441	1.757360	1.218707	0.577822
QBSPG [37]	12	1.772400	1.265800	0.886200	1.772400	1.266500	0.794700	1.772500	1.266900	0.725300
0.025	0	1.772453	1.284646	0.886226	1.772453	1.284646	0.792665	1.772453	1.284646	0.723601
	4	1.772624	1.285168	0.887871	1.772841	1.285658	0.799622	1.776099	1.298322	0.787247
	8	1.772635	1.285208	0.887926	1.772963	1.285086	0.792383	1.770003	1.274934	0.705119
	12	1.772626	1.285180	0.887737	1.772636	1.283938	0.793308	1.777013	1.302710	0.808295
QBSPG [37]	12	1.772400	1.283500	0.885600	1.772300	1.283400	0.791000	1.772400	1.284900	0.724300
0.050	0	1.772453	1.315979	0.886226	1.772453	1.315979	0.792665	1.772453	1.315979	0.723601
	4	1.772519	1.316150	0.886577	1.772578	1.316226	0.793414	1.772432	1.315294	0.722397
	8	1.772520	1.316152	0.886582	1.772577	1.316198	0.793400	1.772717	1.316536	0.726374
	12	1.772520	1.316151	0.886579	1.773592	1.316254	0.793420	1.773333	1.318824	0.731885
QBSPG [37]	12	1.772400	1.316000	0.886100	1.772400	1.315600	0.792200	1.772400	1.317700	0.724500
0.100	0	1.772453	1.378645	0.886226	1.772453	1.378645	0.792665	1.772453	1.378645	0.723601
	4	1.772478	1.378707	0.886327	1.772501	1.378748	0.792856	1.772530	1.378826	0.724088
	8	1.772479	1.378707	0.886327	1.772500	1.378745	0.792853	1.772531	1.378843	0.724131
	12	1.772479	1.378707	0.886327	1.772499	1.378742	0.792847	1.772524	1.378812	0.724054
QBSPG [37]	12	1.772400	1.378500	0.886100	1.772400	1.378700	0.792600	1.773400	1.383600	0.722400



Şekil 3.5. Maxwellian başlangıç koşulu için $t=12$ ve $p=3$ parametrelerinde μ nün aldığı değerler *a*) $\mu=0.1$, *b*) $\mu=0.05$, *c*) $\mu=0.025$, *d*) $\mu=0.01$



Şekil 3.6. Maxwellian başlangıç koşulu için $t = 12$ ve $p = 4$ parametrelerinde μ nün aldığı değerler *a)* $\mu = 0.1$, *b)* $\mu = 0.05$, *c)* $\mu = 0.025$, *d)* $\mu = 0.01$

BÖLÜM 4

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tezde GEW denkleminin sayısal çözümleri kuintik ve septik B-spline kollokasyon sonlu elemanlar yöntemi ile elde edilmiştir. Her iki B-spline fonksiyon için tek soliter dalganın hareketi, iki soliter dalganın girişimi ve Maxwellian başlangıç koşulu ile dalganın hareketi incelenmiştir. L_2 ve L_∞ ile belirtilen ve I_1, I_2, I_3 ile gösterilen invaryantların değerleri hesaplanmıştır. Hesaplanan veriler invaryantların sayısal değerlerinin programın çalışması boyunca hemen hemen sabit kaldığı ve önceki sonuçlarla oldukça uyumlu olduğunu göstermektedir. Von-Neumann yöntemiyle kararlılık analizi incelenmiş ve yöntemimizin şartsız kararlı olduğu görülmüştür. Hata normları da istenildiği kadar küçük elde edilmiştir. Elde edilen verilere ilişkin tablolar oluşturulmuş ve tablodaki değerlere göre şekiller çizilmiştir. Şekillerden görüldüğü gibi dalganın başlangıç zamanından bitiş zamanına kadar genliğini, hızını ve şeklini hemen hemen muhafaza ettiği görülmüştür. Yöntemimiz ile elde edilen değerlerin diğer yöntemler ile elde edilen değerlerle uyumlu olduğu ve hataların yeterince küçük olduğu görülmüştür. Dolayısıyla yöntemimizin etkili bir yöntem olduğunu söyleyebiliriz. Ayrıca yöntemimizin GEW denklemi gibi fiziksel olarak önemli olan ve doğrusal olmayan diğer kısmi diferansiyel denklemlere de başarıyla uygulanabileceğini söyleyebiliriz.

KAYNAKLAR

1. Yağmurlu, N. M., "2-Boyutlu kısmi diferansiyel denklemlerin B-spline sonlu eleman yöntemleri ile nümerik çözümleri", *İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi*, s. 29-33, Malatya 2011.
2. Hrennikoff, A., "Solution of problems in elasticity by the framework method", *J. Appl. Mech.*, A8, 169-175, 1941.
3. McHenry, D., "A lattice analogy for the solution of plane stress problems", *J. Inst. Civ. Eng.*, 21, 59-82, 1943.
4. Argyris, J.H., "Recent advances in matrix methods of structural analysis", *Progr. Aeron. Sci.* 4, 1964.
5. Davies, A. J., "The finite element method: A first approach", *Oxford University Press*, Newyork 1986.
6. Clough, R. W., "The finite element in plane stress analysis", *Proc.2nd A.S.C.E. Conf. On Elektronik Computation*, s. 345-378, Pittsburg, Pa. 1960.
7. Logan, D. L., "A first course in the finite element method (Fourth edition)", s. 7-25, Thomson, 2007.
8. Karakoç, S. B. G., "Sonlu elemanlar yöntemi ile modifiye edilmiş eşit genişlikli dalga denkleminin sayısal çözümleri", *İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi*, s. 10-29, Malatya 2011.
9. Reddy, J. N., "An introduction to nonlinear finite element analysis", *Oxford Universty Press Inc.*, s. 5-7 , New York 2004.
10. Walkley, M. A., "A numerical method for extended boussinesq shallow-water wave equations", *The University of Leeds School of Computer Studies,Doktora Tezi*, s. 48-53, Birleşik Krallık 1999.
11. Keskin, P. "RLW denkleminin trigonometrik B-spline çözümleri", *Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi*, s. 9-11, Eskişehir 2016.
12. Geyikli, T., " Finite element studies of the modified KDV equation", *Ph. D. Thesis, University College of North Wales* , s. 23-25, Bangor, Gwynedd (UK), 1994.
13. Dağ, İ., "Studies of B-spline finite elements", *Ph. D. Thesis, University College of North Wales* , s. 5-8, Bangor, Gwynedd (UK), 1994.
14. Cheney, W. and Kincaid, D., "Numerical mathematics and computing" *Sixth Edition*, Thomson 2008.

15. Prenter, P. M., "Splines and variational methods", *J. Wiley* s.77-116, Newyork 1975.
16. Stasa, F.L. " Applied finite element Analysis for Engineers" *CBS College Publishing*, s. 121-129, New York, 1985.
17. Reddy, J. N., "An introduction to nonlinear finite element analysis", *Oxford Universty Press inc.*, s. 18-22, New York 2004.
18. Esen, A., "A numerical solution of the equal width wave equation by a lumped Galerkin Method", *Applied Mathematics and Computation*, <https://www.elsevier.com/tr-tr> 168, 270-282, 2005.
19. Morrison, P. J., Meiss, J. D., Carey J.R., "Scattering of RLW solitary waves", *Physica D*, 11 , 324-336, 1984.
20. Gardner, L.R.T., Gardner, G.A, Ayoub, F.A. and Amein N.K., "Simulation of the EW undular bore", *Commun. Numer. Meth. Eng.*, 13, 583-592, 1997.
21. Zaki, S.I., "A least-squares finite element scheme for the EW equation", *Comput. Meth. Appl.Mech. Eng.*, 189, 587-594, 2000.
22. Zaki, S.I., "Solitary waves induced by the boundary forced EW equation", *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 190, 4881-4887, 2001
23. Raslan, K.R., "A computational method fort he equal width equation", *Int. J. Comp. Math.*, 81, 63- 72, 2004.
24. Doğan, A., "Application of Galerkin's method to equal width wave equation", *Appl. Math. Comput.* 160(1), 65-76, 2005.
25. Saka, B., Irk, D., Dağ, İ., "Numerical study of the equal width wave equation", *Hadronic J. (in press)*.
26. Gardner, L.R.T., and Gardner, G.A., "Solitary waves of the equal width wave equation", *J. Comput. Phys.*, 101, 218-223, 1991.
27. Dağ, İ., and Saka, B., "A cubic B-spline collocation method for the EW equation", *Math. Comput. Appl.*, 9, 381-392, 2004.
28. Raslan, K.R., "Collocation method using quartic B-spline for the equal width (EW) equation", *Appl. Math. Comput.*, 168, 795-805, 2005.
29. Fazal-i Haq, F., Shah, I.A., and Ahmad, S., "Septic B-spline collocation method for numerical solution of the equal width wave (EW) equation", *Life Sci. J.*,10(1s), 253-260, 2013.

30. Peregrine, D.H., "Calculations of the development of an undular bore", *J. Fluid. Mech.*, 25, 321-330, 1966.
31. Benjamin, T.B., Bona, J.L. and Mahony, J.J., "Model equations for long waves in non-linear dispersive systems", *Philos. Trans. Roy. Soc. London*, A272, 47-78, 1972.
32. Karakoç, S. B. G., "Sonlu elemanlar yöntemi ile modifiye edilmiş eşit genişlikli dalga denkleminin sayısal çözümleri" *İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora tezi*, s. 29-33, 2011.
33. Zeybek, H., and Karakoç, S.B.G., "Application of the collocation method with B-splines to the GEW equation", *ETNA*, 46, 71-88, 2017
34. Hamdi, S., Enright, W. E., Schiesser W.E., Gottlieb J.J. and Abd Alaal, "Exact solutions of the generalized equal width wave equation", in: *Proceedings of the International Conference on Computational Science and Its Application, LNCS*, 2668, 725-734, 2003.
35. Raslan, K. R., "Collocation method using cubic B- spline for the generalized equal width equation", *Int. J. Simulat. Pro. Model.*, 2:1/2 , 37-44, 2006.
36. Evans, D. J., Raslan, K. R., " Solitary waves for the generalized equal width (GEW) equation", *Int. J. Comput. Math.*, 82:4, 445-455, 2005.
37. Roshan, T., "A Petrov-Galerkin method for solving the generalized equal width (GEW) equation", *J. Comput. Appl. Math.*, 235, 1641-1652, 2011.
38. Panahipour, H., "Numerical simulation of GEW equation using RBF collocation method", *Commun. Numer. Anal.*, Art. ID 00059, 28, 2012.
39. Taghizadeh, N., Mirzazadeh, M., Akbari, M., and Rahimian, M., " Exact solutions for generalized equal width equation", *Math. Sci. Lett.*, (2), 99-106, 2013.
40. Hamdi, S., Gottlieb J.J., Hansen, J.S., "Numerical solutions of the equal width wave equation using an adaptive method of lines", *Adaptive method of lines*, A. Vande Wouwer, Ph. Saucez, W.E. Schiesser, *Chapman & Hall/CRC Press: Boca Raton, Florida*, Ph. D Thesis, University of Toronto, Canada, s. 65-116, 2001.
41. Olver, P.J., "Euler operators and conservation laws of the BBM equations", *Nuovo Cimento B.*, 85, , 143-160, 1989.
42. Santarelli, A. R., "Numerical analysis of the regularized long-wave equation", *Nuovo Cimento B.*, 46:1, 179-188, 1978.

43. Zaki , S. I., “Solitary wave interactions for the modified equal width equation”, *Comput. Phys. Commun.*, 126:3, 219-231, 2000.
44. Wazwaz, A.M. “The tanh and sine ve sine-cosine methods for a reliable treatment of the modified equal width equation and its variants”, *Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 11:2, 148-160, 2006.
45. Esen, A., “A lumped galerkin method for the numerical solution of the modified equal width wave equation using quadratic B splines”, *Int. J. Comput Math.*, 83:5-6, 449-459, 2006.
46. Saka, B., “Algorithms for numerical solution of the modified equal width wave equation using collocation method”, *Math. Comput. Model.*, 45:9-10, 1096-1117, 2007.
47. Lu, J., “He’s variational iteration method for the modified equal width wave equation”, *Chaos, Solitions and Fractals*, 39:5, 2102-2109, 2007.
48. Rui, W., Xie, S., Long, Y., and He, B., “Integral bifurcation method and its aplication for solving the modified equal width wave equation and its variants”, *Rostock. Math Kolloq.*, 62, 87-106, 2007.
49. Esen, A., and Kuluay, S., “Solitary wave solutions of the modified equal width wave equation”, *Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 13:8, 1538-1546, 2008.
50. Mohyud-Din, S.T., Yıldırım, A., Berberler, M.E., and Hosseini, M.M., “Numerical solution of modified equal width equation”, *World Appl. Sci. J.*, 8:7, 792-798, 2010.
51. İslam, S., Haq, F., and Tirmizi, İ.A., “Collocation method using quartic B-spline for numerical solution of the modified equal width wave equation”, *J. Appl. Math. & Informatics*, 28:3-4, 611-624, 2010.
52. Geyikli, T., and Karakoç, S. B. G., “Septic B-spline collocation method for the numerical solution of the modified equal width wave equation”, *Appl. Math. (Irvine)*, 2, 739-749, 2011.
53. Karakoç, S.B.G., and Geyikli, T., “Numerical solution of the modifed equal width wave equation”, *Int. J. Differ. Equ*, Art ID 587208 (15 pages), 2012.
54. Karakoç, S.B.G., “Sonlu elemanlar yöntemi ile modifiye edilmiş eşit genişlikli dalga denkleminde sayısal çözümler”, *İnönü Üniv. Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi*, s. 32-33, Malatya 2011.

55. Peregrine, D.H., "Long waves on a beach", *J. Fluid Mech.*, 27, 815-827, 1967.
56. Prenter, P.M., "Splines and variational methods", *Colorado State University*, s. 87-107, Wiley, New York, 1975.
57. Rubin, S.G., and Graves, R.A., "A cubic spline approximation for problems in fluid mechanics", Tech. Report, *Nasa TR R-436*, Hampton, 1975.
58. Saka, B., Dağ, İ., and Irk, D., "Quintic B-spline collocation method for numerical solution of the RLW equation", *ANZIAM J.*, 49, 389-410, 2008.
59. Karakoç, S.B.G., Zeybek, H., "A septic B-spline collocation method for solving the generalized equal width wave equation", *Kuwait J. Sci.*, 43(3), 20-31, 2016.
60. Geyikli, T., Karakoç, S.B.G., "Petrov-Galerkin method with cubic B-splines for solving the MEW equation", *Bulletin of the Belgian Mathematical Society-Simon Stevin*, 19(2), 215-227, 2012.
61. Karakoç, S.B.G., Uçar, Y., and Yağmurlu, N.M., "Numerical solutions of the MRLW equation by cubic B-spline Galerkin finite element method", *Kuwait Journal of Science*, 42(2), 141-159, 2015.
62. Başhan, A., Karakoç, S.B.G., and Geyikli, T., "Approximation of the KdVB equation by the quintic B-spline differential quadrature method", *Kuwait Journal of Science*, 42(2), 67-92, 2015.