

**T.C.  
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**SİNGÜLER PERTÜRBASYON PROBLEMLERİNİN  
ASİMPOTİK ANALİZİ**

**Tezi Hazırlayan  
Süleyman CENGİZCİ**

**Tez Danışmanı  
Yrd. Doç. Dr. Aytekin ERYILMAZ**

**Matematik Anabilim Dalı  
Yüksek Lisans Tezi**

**TEMMUZ 2014  
NEVŞEHİR**



**T.C.**

**NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**SİNGÜLER PERTÜRBASYON PROBLEMLERİNİN  
ASİMPOTOTİK ANALİZİ**

**Tezi Hazırlayan  
Süleyman CENGİZCİ**

**Tez Danışmanı  
Yrd. Doç. Dr. Aytekin ERYILMAZ**

**Matematik Anabilim Dalı  
Yüksek Lisans Tezi**

**TEMMUZ 2014  
NEVŞEHİR**

Yrd. Doç Dr. Aytekin ERYILMAZ danışmanlığında **Süleyman CENGİZCİ** tarafından hazırlanan "**Singüler Pertürbasyon Problemlerinin Asimptotik Analizi**" başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

22/07 / 2014

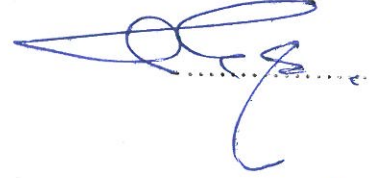
**JÜRİ**

**İMZA**

Başkan : Yrd.Doç.Dr. S.B. Gazi KARAKOÇ



Üye : Yrd.Doç.Dr. Aytekin ERYILMAZ



Üye : Yrd.Doç.Dr. Ramazan MERT



ONAY:

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulu' nun 06 /08 / 2014 tarih ve 2014..28..04 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

07 /08 / 2014

Doç. Dr. Şahlan ÖZTÜRK

Enstitü Müdürü

## TEZ BİLDİRİM SAYFASI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada yer alan bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu ve bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

  
Süleyman CENGİZCI

## TEŞEKKÜR

Dört yıllık lisans ve sonrasında iki yıllık yüksek lisans eğitimlerim süresince yaşadığım tüm zorluklarda yanımda olmuş, maddi ve manevi desteğini esirgememiş olan rahmetli büyükbabam Süleyman YILMAZ' a; büyükannem Dudu YILMAZ' a, annem Ferda CENGİZCİ ve kardeşim Şemsi CENGİZCİ' ye, Niğde' de tanışmış olduğum ve her zaman destekçilerim olan hocalarım Semin GÜLEÇ ve Ebru GÜLEÇ' e; akademik dünyayı tanımamda çok büyük katkıları olan, tanıştığım günü “hayatımın dönüm noktası” olarak nitelendirdiğim yardımcı danışman hocam Yrd. Doç. Dr. M. Tarık ATAY' a ve Arş. Grv. Nurettin IRMAK' a, yüksek lisans eğitimim sırasında tanıştığım, öğütleriyle ve destekleriyle her zaman yanımda olan danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Aytekin ERYILMAZ' a, “*Spectral Methods*” adlı dersini aldığım ve kendisinden çok şey öğrenmiş olduğum Orta Doğu Teknik Üniversitesi Mühendislik Bilimleri Bölümü öğretim üyesi Prof. Dr. Hakan I. TARMAN' a, Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi ve Niğde Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyelerine ve son olarak kıymetlim Tülin' e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Süleyman CENGİZCİ

# SİNGÜLER PERTÜRBASYON PROBLEMLERİNİN ASİMPTOTİK ANALİZİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Süleyman CENGİZCİ

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEMMUZ 2014

## ÖZET

Bu çalışmada asimptotik yaklaşım metotları incelenmiştir. Asimptotik metotların, akışkanlar ile ilgili denklemlerin, özellikle de lineer olmayan, çözümü zor Navier-Stokes denklemlerinin çözüm çalışmaları sırasında ortaya çıktığını söylemek yanlış olmayacaktır. Bunun dışında gök mekaniği, kuantum mekaniği, Newton mekaniği ve optik başta olmak üzere hemen hemen tüm fizik dallarında ve ayrıca kimya, biyoloji gibi diğer bilim dallarında karşılaşılan problemlerin matematiksel modellemelerinde asimptotik yaklaşımlar yardımıyla yüksek hassaslıkta çözümler elde edilebilmektedir. Bu tezde asimptotik yaklaşımlar başlangıç seviyesinden itibaren ele alınmış, çok sayıda örneğe yer verilmiş, farklı durumlar için ortaya çıkan farklı çözüm yöntemleri incelenmiştir. Bu yöntemler: Eşleştirilmiş açılımlar Metodu (MMAE), Ara Eşleştirme Metodu (*Intermediate Matching*), SCEM ve WKB Metodu' dur. Ayrıca problemler sadece matematiksel açıdan ele alınmamış, aynı zamanda fiziksel temellerine de konu ve tez kapsamından çıkılmadan değinilmiştir.

**Anahtar kelimeler:** *Asimptotik Metotlar, Pertürbasyon Teorisi, Singüler*

*Pertürbasyon, Sınır Tabaka Problemi, Başlangıç ve Sınır Değer Problemleri*

**Tez Danışmanı:** Yrd. Doç. Dr. Aytakin ERYILMAZ

**Sayfa Adedi:** 72

# ASYMPTOTIC ANALYSIS OF SINGULAR PERTURBATION PROBLEMS

(M. Sc. Thesis)

Süleyman CENGİZCİ

NEVSEHIR HACI BEKTAS VELI UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

JULY 2014

## ABSTRACT

In this study asymptotic approximation methods are examined. That is not wrong to say that asymptotic approximation methods have emerged from the equations in fluid mechanics and dynamics especially from non-linear Navier-Stokes Equations which are tedious to solve. In addition to this, mainly in celestial mechanics, quantum mechanics, Newtonian mechanics and optics, virtually in all physics branches thanks to the asymptotic approximations high accuracy solutions can be obtained. In this study asymptotic approximations, from beginning point to advanced levels, are investigated in an easy way and a lot of examples are solved. For each different case, different ways and methods are followed to reach the solutions. These methods: The Method of Matched Asymptotic Expansions (MMAE), The Method of Intermediate Matching, The SCEM and The Method of WKB. Moreover, problems that are solved in this study were not only examined from mathematical aspects but also examined using their physical significances.

*Keywords: Asymptotic Methods, Perturbation Theory, Singular Perturbation, Boundary Layer Problem, Initial and Boundary Value Problems*

**Thesis supervisor: Assist. Prof. Aytekin ERYILMAZ**

**Page number: 72**



## İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY SAYFASI.....	i
TEZ BİLDİRİM SAYFASI.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	v
İÇİNDEKİLER.....	vi
TABLolar LİSTESİ.....	viii
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	ix
SİMGE VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	x
1. BÖLÜM	
GİRİŞ.....	1
2. BÖLÜM	
ASİMPOTİK YAKLAŞIMLARA AİT GENEL BİLGİLER.....	5
2.1. Taylor Seri Açılımları ve L'Hospital Kuralı.....	5
2.2. Mertebe Sembolleri.....	7
2.3. Asimptotik Yaklaşımlar.....	8
2.3.1. Asimptotik açılımlar.....	11
2.3.2. Asimptotik serilerin yakınsaklığı ve hassaslığı.....	14
2.3.3. Asimptotik açılımlarla işlemler.....	15
2.4. Cebirsel ve Transandantal Denklemlerin Asimptotik Çözümleri.....	17
2.5. Diferansiyel Denklemlerin Asimptotik Çözümlerine Giriş.....	22

2.6. Asimptotik Yaklaşımların Geçerliliği.....	27
3. BÖLÜM	
EŞLEŞTİRİLMİŞ ASİMPOTİK AÇILIMLAR METODU.....	29
3.1. Eşleştirilmiş Açılımlara Giriş.....	29
3.2. Metodun İşleyişi.....	29
3.2.1. Dış çözüm (Adım1).....	30
3.2.2. Sınır tabaka çözümü (Adım 2).....	31
3.2.3. Açılımların eşleştirilmesi (Adım 3).....	33
3.2.4. Birleştirilmiş çözüm (Adım 4).....	34
3.2.5. Ara eşleştirme.....	37
3.3. Birden Fazla Sınır Tabakaya Sahip Problemler.....	42
3.3.1. Dış çözüm (Adım 1).....	42
3.3.2. Sınır tabakalar ve eşleme işlemi (Adım 2).....	42
3.3.3. Birleşik çözümün elde edilmesi (Adım 3).....	45
3.4. Transandantal Olarak Küçük Terimler.....	47
4. BÖLÜM	
ARDIŞIK TAMAMLAYICI AÇILIMLAR METODU.....	54
5. BÖLÜM	
TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER.....	64
KAYNAKLAR.....	65
EKLER.....	67
ÖZGEÇMİŞ.....	72

## TABLULAR LİSTESİ

Tablo 4.1	(4.13) probleminin $\varepsilon = 0.1$ için mutlak hatalarını veren tablo.....	57
Tablo 4.2	(4.13) probleminin $\varepsilon = 0.01$ için mutlak hatalarını veren tablo.....	58
Tablo 4.3	(4.17) probleminin $\varepsilon = 0.1$ için mutlak hatalarını veren tablo.....	58
Tablo 4.4	(4.17) probleminin $\varepsilon = 0.01$ için mutlak hatalarını veren tablo.....	59

## ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1.	Dikey atış hareketinin zamana bağlı grafiksel gösterimi.....	3
Şekil 2.3.1.	Örnek 2.3.5. $f$ ile asimptotik yaklaşımı $\varphi(x) = x^c$ in kıyaslanması.....	10
Şekil 2.4.1.	Örnek 2.4.1.' in çözümlerini $\varepsilon$ ' un değerleri için kıyaslayan grafik ....	19
Şekil 2.4.2.	Örnek 2.4.2. farklı $\varepsilon$ değerleri için asimptotik-gerçek çözüm grafiği....	22
Şekil 2.5.1.	Örnek 2.5.2.' nin asimptotik - nümerik çözümlerini kıyaslayan grafik...	27
Şekil 3.2.4.1.	$\varepsilon = 0.1$ için (3.2.1) denkleminin asimptotik ve tam çözüm grafik.....	35
Şekil 3.2.4.2.	$\varepsilon = 0.01$ için (3.2.1) denkleminin asimptotik ve tam çözüm grafiği.....	35
Şekil 3.2.4.3.	Eşleştirme Metodu' nun temeli ve iç - dış açılımların ortak geçerlilik bölgesi olan "örtüşme bölgesi" ' ni gösteren şekil.....	36
Şekil 3.2.5.1.	(3.2.1) probleminin $\varepsilon = 0.1$ parametresi için ara eşleştirme çözümü.....	41
Şekil 3.2.5.2.	(3.2.1) probleminin $\varepsilon = 0.01$ için ara eşleştirme çözümü.....	41
Şekil 3.3.3.1.	(3.3.1) denkleminin $\varepsilon = 0.1$ için nümerik ve asimptotik çözümü.....	46
Şekil 3.3.3.2.	(3.3.1) denkleminin çözümlerini $\varepsilon = 0.1$ parametre değeri için kıyaslayan grafik.....	46
Şekil 3.4.1.	Örnek 3.4.1. dış açılıma transandantal olarak küçük terimlerin etkisi....	52
Şekil 4.1.	(4.13) problemi $\varepsilon = 0.1$ için SCEM - tam çözüm kıyaslayan grafik.....	59
Şekil 4.2.	(4.13) problemi $\varepsilon = 0.1$ için MMAE - tam çözüm kıyaslayan grafik.....	60
Şekil 4.3.	(4.13) problemi $\varepsilon = 0.01$ için SCEM - tam çözüm kıyaslayan grafik.....	60
Şekil 4.4.	(4.13) problemi $\varepsilon = 0.01$ için MMAE - tam çözüm kıyaslayan grafik....	61
Şekil 4.5.	(4.17) problemi $\varepsilon = 0.1$ için SCEM ve tam çözüm kıyaslayan grafik.....	61
Şekil 4.6.	(4.17) problemi $\varepsilon = 0.1$ için MMAE ve tam çözüm kıyaslayan grafik...	62
Şekil 4.7.	(4.17) problemi $\varepsilon = 0.01$ için SCEM ve tam çözüm kıyaslayan grafik...	62
Şekil 4.8.	(4.17) problemi $\varepsilon = 0.01$ için MMAE ve tam çözüm grafiği.....	63

## SİMGE VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\in$	:	Elemanlıdır sembolü
$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	:	Reel (gerçek) sayılar kümesi
$\varepsilon$	:	Küçük epsilon parametresi
$\delta(\varepsilon)$	:	Mertebe (gauge) fonksiyonu
$\frac{d}{dx}$	:	Adi türev operatörü
$\frac{\partial}{\partial u}$	:	Kısmi türev operatörü
$\sim$	:	(Asimptotik olarak) denklik sembolü
$o$	:	Asimptotik kıyaslayıcı (küçük “o”)
$O$	:	Asimptotik kıyaslayıcı (büyük “O”)
$f^{(n+1)}$	:	$f$ fonksiyonunun $(n+1)$ . mertebeden türevi
$\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$	:	$\varepsilon$ parametresi $\varepsilon_0$ sabitine yaklaşıyor (limit)
$J_0(z)$	:	Bessel fonksiyonu
$x_\eta$	:	Ara değişken (intermediate variable)
$\exp(x)$	:	$e^x$ fonksiyonu
$\alpha$	:	Sabit bir reel sayı
$\beta$	:	Sabit bir reel sayı
$\lambda$	:	Sabit bir reel sayı

## 1. BÖLÜM

### GİRİŞ

Matematikte karşılaşılan problemlerin birçoğu aslında günlük hayatta meydana gelen fiziksel olayların matematiksel modellenmelerinin bir sonucudur. Bu problemlerin, özellikle de integral ve diferansiyel denklem içerenlerinin tam çözümlerinin bulunabilmesi her zaman mümkün olamamaktadır. Bu tür durumlarda genelde iki seçenekten biri benimsenmektedir. Bunlardan ilki, günümüzde yazılımların olağanüstü gelişimi ve işlemci hızlarının müthiş artmasıyla birlikte oldukça popüler hale gelmiş olan bilgisayarların kullanımınıdır. Böylece hem vakit kaybetmeden, hem de zahmet çekmeden ilgili problemlerin sonucuna ulaşılabilir. Diğer seçenek ise ilgili problem ya da problemlerin çözümüne asimptotik açılımlar yardımıyla yaklaşmaktır. Daha zahmetli olmalarına rağmen asimptotik açılımlar geçtiğimiz yüzyıldan bu yana uygulamalı matematiğin, mühendislik bilimlerinin, fiziksel matematiğin ve özellikle de akışkanlar mekaniğinin köşe taşlarından biri haline gelmiştir [7-8].

Asimptotik yaklaşımlar ile ilgili en basit ve açıklayıcı örnekler polinom kökleri bulunurken karşılaşılanlardır. Örneğin  $x^2 - 3.99x + 3.02 = 0$  şeklindeki kuadratik denklem incelendiğinde bu denklemin katsayılarının aslında  $x^2 - 4x + 3 = 0$  denkleminin katsayılarına ne kadar yakın olduğu göze çarpmaktadır.  $x^2 - 3.99x + 3.02 = 0$  denkleminin katsayıları için  $-3.99 = -4 + 0.01$  ve  $3.02 = 3 + 2(0.01)$  eşitliklerinin doğru olduğu açıktır. Bu noktada  $\varepsilon = 0.01$  alınması ile  $x^2 - 3.99x + 3.02 = 0$  denklemi  $x^2 + (\varepsilon - 4)x + (3 + 2\varepsilon) = 0$  formuna dönüşür. Kuadratik denklem çözümü formülleri ile  $x^2 + (\varepsilon - 4)x + (3 + 2\varepsilon) = 0$  denkleminin çözümleri

$$x_{1,2} = \frac{-(\varepsilon - 4) \pm \sqrt{(\varepsilon - 4)^2 - 4(3 + 2\varepsilon)}}{2}$$

şeklinde bulunur. Buradaki en önemli nokta  $\varepsilon = 0$  için  $x^2 + (\varepsilon - 4)x + (3 + 2\varepsilon) = 0$  denkleminin  $x^2 - 4x + 3 = 0$  denklemine dönüştüğü ve dolayısıyla  $x_{1,2}$  çözümünün de  $x_1 = 1$  ve  $x_2 = 3$  şeklinde oluşudur. Yani küçük bir  $\varepsilon$  parametresi ile oynanarak ilgili denklem istenilen şekle dönüştürülebilmektedir. Burada ilgilenilen  $x^2 - 3.99x + 3.02 = 0$

denklemini olduğundan  $\varepsilon = 0.01$  için çözümler  $x_1 = 2.9748$  ve  $x_2 = 1.0152$  olarak bulunur.  $x^2 + (\varepsilon - 4)x + (3 + 2\varepsilon) = 0$  denkleminin kuadratik yapıda olması nedeniyle kök formülleri kullanılarak çözümler elde edilebildi. Ancak durum her zaman bu kadar basit olmamaktadır ve daha sonraki bölümlerde görüleceği üzere yaklaşımlar yapılmak zorunda kalınmaktadır.

Asimptotik yaklaşımlar konusunun yapısını daha iyi anlamak amacıyla, bu tezin ana konusu olan diferansiyel denklemlere yaklaşık çözüm bulmayı örnekleyen, fiziksel temellere dayanan başka bir örneğin incelenmesi yerinde olacaktır. Bunun için *Newton'un 2. Kuralı*'ndan elde edilen dikey atış hareketi formülü incelenirse [6]

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{-gR^2}{(x+R)^2}, \quad t > 0 \quad (1.1)$$

diferansiyel denkleminde ulaşılır. Bu denkleminde  $x(t)$  nesnenin yerküre (dünya) yüzeyine olan uzaklığını,  $g$  yerçekim sabitini ve  $R$  yerkürenin yarıçapını belirtmektedir. Cismin dünyanın yüzeyinden atıldığı ve bir ilk hıza ( $v_0$ ) sahip olduğu varsayılırsa

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = v_0, \quad v_0 > 0$$

başlangıç koşulları elde edilir. Dolayısıyla (1.1) denklemini bu başlangıç koşulları ile birlikte bir başlangıç değer problemi oluşturmaktadır. Ancak bu başlangıç değer probleminin non-linear doğası kapalı formda analitik bir çözüm elde etmeyi zorlaştırmaktadır. Hatta çoğu lineer olmayan problem için tam çözümü bulmak olanaksızdır. Bu nedenle problemi daha basit hale getirilip getirilemeyeceği, eğer basitleştirilebiliyor ise bunun doğuracağı sonuçlar araştırılır. Örneğin bu problem için  $x$  (nesnenin yerküre yüzeyine olan uzaklığı)  $R^2$ 'ye göre önemsiz derecede küçük bir değere sahip ise (1.1) denklemini

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{-gR^2}{(R)^2} \Rightarrow x''(t) = -g, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = v_0 \quad (1.2)$$

başlangıç değer problemine dönüşür. (1.2) probleminin (1.1) problemine göre çok daha basit olduğu açıktır. Çünkü artık lineer bir problemdir. Probleme ait genel çözüm

$$x'(t) = -gt + c \Rightarrow x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + ct + c_1$$

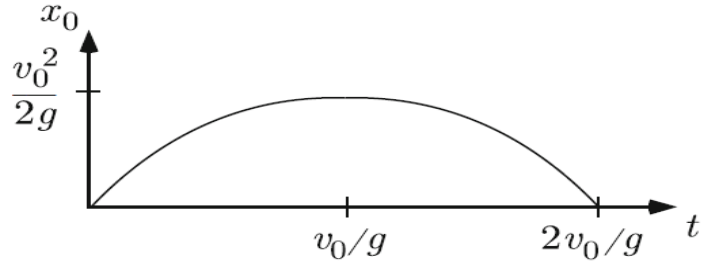
şeklinde olup başlangıç şartlarının uygulanmasıyla

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t$$

çözümüne ulaşılır. Bu çözüm ise lise fizik derslerinden bilinen dikey atış hareketi formülüdür. Basit türev işlemleri ile cismin  $t_0 = \frac{v_0}{g}$  zamanında (noktasında) maksimum yüksekliğe ulaşacağı ve bu yüksekliğin

$$x_0 = x(t_0) = \frac{v_0^2}{2g} \text{ m}$$

olduğu bulunur [6].



Şekil 1. Dikey atış hareketinin zamana bağlı grafiksel gösterimi

Görüldüğü üzere (1.1) denklemini çeşitli varsayımlarla kolayca çözülebilen bir problem olan (1.2) problemine dönüştü. Burada karşılaşılan problem, (1.1) probleminde  $R^2$  ' ye göre çok küçük olduğu için ihmal edilen  $x$  teriminin (1.2) denkleminde yok sayılışının denklemin çözümünde meydana getirdiği hatadır. Bu konu daha sonraki bölümlerde ayrıntılı bir biçimde işlenecektir.

Denklemler ve problemleri bu şekilde daha basit hale getirip çözme işlemini daha sistematik hale getirmek için değişkenleri ölçeklendirme yolu izlenir. Bunun için (1.1)



denklemini için  $\tau = \frac{t}{t_c}$  ve  $y(\tau) = \frac{x(t)}{x_c}$  dönüşümleri uygulanabilir. Burada  $t_c$  ve  $x_c$  sırasıyla, ilgilenilen problem için karakteristik bir anı ve karakteristik bir değeri belirtirler. Bu karakteristik değerlerin seçilmesinde ilgilenilen problemi iyi ifade edebilecek nitelikte olmalarına dikkat etmekten başka sınırlayıcı bir durum yoktur. Örneğin (1.1) problemi için Şekil 1. yardımı ile  $x_c = \frac{v_0^2}{g}$  ve  $t_c = \frac{v_0}{g}$  seçilebilir. Böylece problem

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} = -\frac{1}{\left(1 + \frac{v_0^2}{Rg} y\right)^2}, \quad \tau > 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \quad (1.3)$$

başlangıç değer problemine dönüşür.  $\varepsilon = \frac{v_0^2}{Rg}$  alınması ile de (1.3) problemi

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} = -\frac{1}{(1 + \varepsilon y)^2}, \quad \tau > 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \quad (1.4)$$

problemine dönüşür. Görüldüğü gibi problemin çözümü  $\varepsilon$  parametresine bağlıdır.  $\varepsilon = 0$  noktası civarlarında Taylor seri açılımı yardımıyla

$$y \sim y_0(\tau) + \varepsilon y_1(\tau) + \dots \quad (1.5)$$

şeklindeki yaklaşımla bulunulur.

Ana hatları ile asimptotik yaklaşımlar önceki sayfalarda gösterilen örneklerdeki yaklaşımlarla ilgilendirilir. Bu tür problemlerin ayrıntılı çözümlerine geçebilmek için konuyla ilgili bazı tanım ve teoremleri bilmek faydalı olacaktır.

## 2. BÖLÜM

### ASİMPOTOTİK YAKLAŞIMLARA AİT GENEL BİLGİLER

#### 2.1. Taylor Seri Açılımları ve L'Hospital Kuralı

Taylor Teoremi ve sonuçları matematikte kullanılan en önemli araçlardandır. Asimptotik yöntemlerde de geniş kullanıma sahiptir.

**Teorem 2.1.1.** Verilen bir  $f(\varepsilon)$  fonksiyonunun  $n$ . mertebeye kadar olan türevleri mevcut ve  $(n+1)$ . mertebeden türevi olan  $f^{(n+1)}$  de belirli bir  $\varepsilon_a < \varepsilon < \varepsilon_b$  aralığı için sürekli olsun. Bu durumda,  $\varepsilon$  ve  $\varepsilon_0$ ,  $(\varepsilon_a, \varepsilon_b)$  aralığına ait noktalar olmak üzere

$$f(\varepsilon) = f(\varepsilon_0) + (\varepsilon - \varepsilon_0)f'(\varepsilon_0) + \dots + \frac{1}{n!}(\varepsilon - \varepsilon_0)^n f^{(n)}(\varepsilon_0) + R_{n+1} \quad (2.1.1)$$

ve

$$R_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}(\varepsilon - \varepsilon_0)^{n+1} f^{(n+1)}(\xi) \quad (2.1.2)$$

biçiminde tanımlıdır. Burada  $\xi$  noktası  $\varepsilon_0$  ve  $\varepsilon$  arasında bulunan herhangi bir noktadır. Bu teorem ve sonuçları oldukça önemlidir. Çünkü herhangi bir  $f(\varepsilon)$  fonksiyonuna  $(n+1)$  terimli Taylor serisi yardımıyla yaklaşıldığında (2.1.2) hata formülü yardımıyla bu yaklaşımda yapılan hata belirlenmektedir.

*Örnek 2.2.1.* Bazı önemli fonksiyonların  $x=0$  noktası civarlarındaki Taylor seri açılımları:

$$\sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots$$

$$\arcsin(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \dots$$

$$\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{40}x^5 + \dots$$

$$\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \dots$$

$$\cot(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{45}x^3 + \dots$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \dots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots$$

$$a^x = e^{x \ln(a)} = 1 + x \ln(a) + \frac{1}{2}[x \ln(a)]^2 + \dots$$

$$\sinh(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \dots$$

$$\cosh(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \dots$$

$$\tanh(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \dots$$

şeklindedir [6-8].

Şimdi de matematiksel analizin önemli bir konusu olan limit işlemi ile ilgili L'Hospital kuralını verelim.

**Teorem 2.1.2.**  $f(\varepsilon)$  ve  $\varphi(\varepsilon)$  fonksiyonları  $(\varepsilon_0, \varepsilon_b)$  aralığı üzerinde diferansiyellenebilir fonksiyonlar ve yine bu aralık üzerinde  $\varphi'(\varepsilon) \neq 0$  şartı sağlanıyor olsun. Ayrıca

$-\infty \leq A \leq \infty$  olmak üzere  $\lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0} \frac{f'(\varepsilon)}{\varphi'(\varepsilon)} = A$  olsun. Bu durumda aşağıdaki iki özellikten biri

sağlanıyor ise  $\lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0} \frac{f(\varepsilon)}{\varphi(\varepsilon)} = A$  dır:  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$  için

- $f \rightarrow 0$  ve  $\varphi \rightarrow 0$ ,

ya da

- $\varphi \rightarrow \infty$  .

## 2.2. Mertebe Sembolleri

Asimptotik yaklaşımlar ile ilgili tanımları vermeden önce mertebe sembollerinin ne anlama geldiğini vermek faydalı olacaktır. Bu semboller ilk olarak *Bachmann (1894)* tarafından kullanılmaya başlanmış olsa da kullanımı *Landau (1909)* sayesinde yaygınlaşmıştır. Bu nedenle bu semboller çoğu zaman *Bachmann-Landau sembolleri* olarak bilinirler [14,17].

Limit işlemi altındaki bir fonksiyonun davranışının doğru bir şekilde belirlenebilmesi için mertebe fonksiyonlarından yararlanır. Örneğin,  $\phi(\varepsilon) = \varepsilon$  fonksiyonunun  $\varepsilon \rightarrow 0$  için  $0$ ' a yakınsama hızı  $f(\varepsilon) = \varepsilon^2$  fonksiyonuna göre daha düşüktür. Bu gerçeği ifade etmek ve bu tür kıyaslamaları yapabilmek için aşağıda tanımı verilen mertebe sembollerinden yararlanılmaktadır.

**Tanım 2.2.1.**  $-\infty < L < \infty$  olmak üzere  $\lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0} \frac{f(\varepsilon)}{\phi(\varepsilon)} = L$  sağlanıyorsa bu durum  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$  için

$f = O(\phi)$  şeklinde ifade edilir ve “ $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$  için  $f$  fonksiyonu  $\phi$  fonksiyonunun büyük  $O$ ' sudur” biçiminde okunur.

**Tanım 2.2.2.**  $\lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0} \frac{f(\varepsilon)}{\phi(\varepsilon)} = 0$  ise  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$  için  $f = o(\phi)$  şeklinde ifade edilir ve “ $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$

için  $f$  fonksiyonu  $\phi$  fonksiyonunun küçük  $o$ ' sudur” biçiminde okunur.

**Örnek 2.2.1.**  $x \rightarrow \infty$  için  $\frac{1}{1+x^2} = o\left(\frac{1}{x}\right)$  eşitliği ele alınsın.

Bu örnekte  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  ve  $g(x) = \frac{1}{x}$  şeklinde alınır ve Tanım 2.2.2. kullanılırsa

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1+x^2} = 0 \text{ elde edilir.}$$

**Örnek 2.2.2.**  $x \rightarrow 0$  için  $\frac{1}{3+2x^2} = O(1)$  eşitliği ele alınsın.

$f(x) = \frac{1}{3+2x^2}$  ve  $g(x) = 1$  alınıp Tanım 2.3.1 göz önüne alınırsa

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3+2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1} = \frac{1}{3} = L \text{ olup } -\infty < L < \infty \text{ özelliği sağlanmaktadır.}$$

*Örnek 2.2.3.* Aşağıda mertebe sembolleri ile ilgili çeşitli örnekler ve hangi nokta komşuluğunda geçerli oldukları verilmiştir.

$$x^2 = o(x), x \rightarrow 0 \text{ için}$$

$$\sin(x^2) = o(x), x \rightarrow 0 \text{ için}$$

$$\frac{1}{3+x^2} = O(x^{-2}), |x| \rightarrow \infty \text{ için}$$

$$\sin(3x) = O(x), x \rightarrow 0 \text{ için}$$

$$\tan(2x^2) = O(x^2), x \rightarrow 0 \text{ için}$$

$$\frac{1}{4-3x-2e^{-x}} = O(e^x), x \rightarrow -\infty \text{ için}$$

$$\frac{1}{4-3x-2e^{-x}} = O(x^{-1}), x \rightarrow +\infty \text{ için}$$

$$x^2 = O(-3x^2 + 5x^6), x \rightarrow 0 \text{ için}$$

$$x^2 \ln(x) = o(x), |x| \rightarrow \infty \text{ için.}$$

*Örnek 2.2.4.*  $f(\varepsilon) = e^{-\frac{1}{\varepsilon}}$  fonksiyonu incelenip L'Hospital kuralı uygulandığında  $\alpha$ 'nın tüm reel değerleri için  $f = o(\varepsilon^\alpha)$  olduğu görülür. Bu durum “ $f, \varepsilon^\alpha$ ’ya göre transandantal olarak küçüktür” şeklinde ifade edilmektedir.

### 2.3 Asimptotik Yaklaşımlar

Bu tezin ana amacı diferansiyel denklemlerin çözümleri için asimptotik yaklaşımlar oluşturmaktır. Bu yüzden “*asimptotik yaklaşım*” kavramının ne anlama geldiğinin anlaşılması çok önemlidir.

**Tanım 2.3.1.**  $f(\varepsilon)$  ve  $\varphi(\varepsilon)$  fonksiyonları verilsin.  $\lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0} \frac{f(\varepsilon)}{\varphi(\varepsilon)} = 1$  koşulu sağlanıyorsa

“ $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$  için  $f$  ve  $\varphi$  fonksiyonları asimptotik olarak özdeşirler” denir. Bu durum

$f \sim \varphi$  biçiminde ifade edilir. Bu aslında,  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$  için  $f(\varepsilon)$  ve  $\varphi(\varepsilon)$  fonksiyonlarının birbirlerinin asimptotik yaklaşımları olması demektir.

*Örnek 2.3.1.*  $\frac{1}{3+2x^2} \sim \frac{1}{2x^2}$ ,  $|x| \rightarrow \infty$  dur. Tanım 2.3.1.' i kullanarak bunu göstermek zor değildir.

*Örnek 2.3.2.*  $\frac{5}{1-x-e^{-x}} \sim \frac{-10}{x^2}$ ,  $x \rightarrow 0$  dır. Tanım 2.3.1. yardımıyla

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{5}{1-x-e^{-x}}}{\frac{-10}{x^2}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{2(1-x-e^{-x})} \Rightarrow \frac{-1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{-1+e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{-1+e^{-x}} \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{-e^{-x}} = 1 \end{aligned}$$

elde edilir.

*Örnek 2.3.3.*  $\sin(3x) \sim 3x$ ,  $x \rightarrow 0$  olduğu da Tanım 2.3.1. kullanılarak kolayca gösterilebilir.

*Örnek 2.3.4.*  $f(\varepsilon) = \sin(\varepsilon)$  fonksiyonu ile ilgilenilsin.  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0 = 0$  olmak üzere  $f(\varepsilon)$  fonksiyonunun  $\varepsilon = 0$  civarlarındaki Taylor seri açılımı ele alınsın. Böylece, Teorem 2.1.1. yardımıyla

$$f(\varepsilon) = \varepsilon - \frac{1}{6}\varepsilon^3 + \frac{1}{120}\varepsilon^5 \cos(\xi)$$

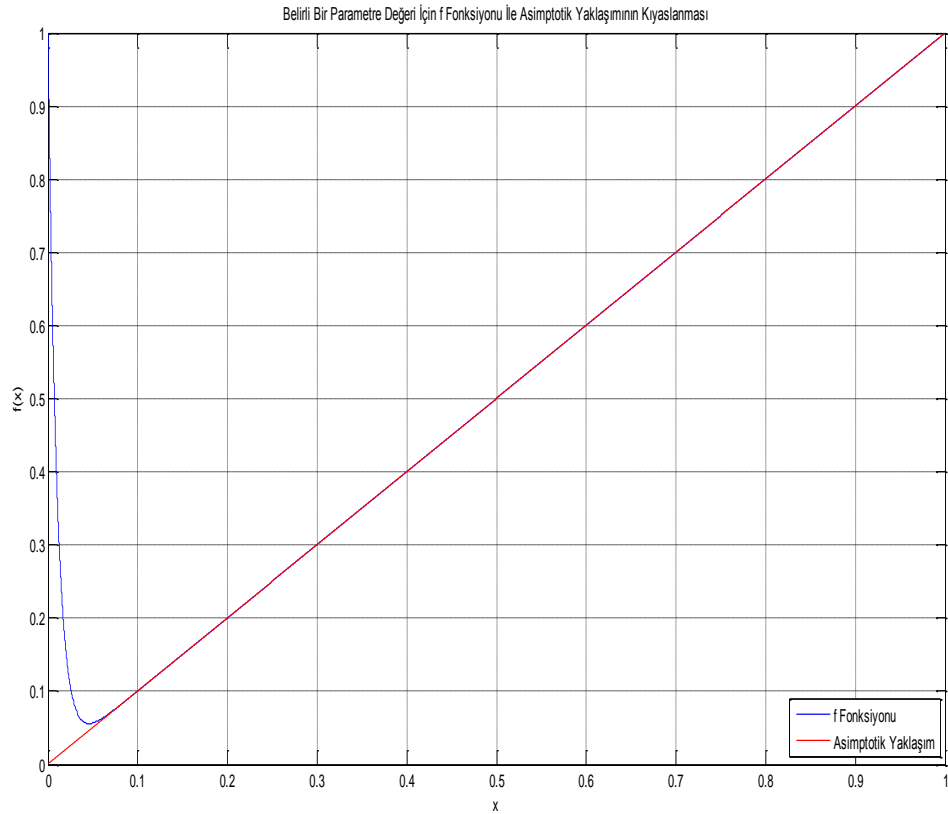
elde edilir. Bu sonuç kullanılarak aşağıdaki asimptotik yaklaşımlar elde edilebilir:

- A.  $f \sim \varepsilon$ ,
- B.  $f \sim \varepsilon - \frac{1}{6}\varepsilon^3$ ,
- C.  $f \sim \varepsilon + 2\varepsilon^2$ .

Bu asimptotik yaklaşımlardan en iyi (doğru, hassas) sonuç vereni B. iken en kötü yaklaşım C. dir. Tanım 2.3.1.' in bu karşılaştırmayı yapabilmek için pek yardımcı

olduğu söylenemez. Tanım 2.3.1.’ in bu eksikliği 2.3.1. bölümünde “*Asimptotik Açılımlar*” başlığı altında incelenecek olan tanımlar yardımıyla giderilecektir.

*Örnek 2.3.5.*  $f(x) = x + e^{\frac{-x}{\varepsilon}}$  fonksiyonu  $0 < x < 1$  için ele alınsın. Bu durumda küçük bir  $\varepsilon$  parametresi için  $f \sim x$  olduğu açıktır. Bununla beraber bu asimptotik yaklaşım ne kadar iyi sonuç verebileceği sorusu akla gelmektedir. Bu nedenle bu örnek Şekil 2.3.1. üzerinde incelenecektir. Şekil 2.3.1.’ den kolayca görülebileceği üzere  $x=0$  noktasından uzak noktalarda yaklaşım oldukça iyidir. Ancak  $x=0$  noktası civarlarında aynı durumdan bahsetmek mümkün değildir.  $\varepsilon$ ' un seçiminden bağımsız olarak  $f(0) = 1$  olduğundan bu durum meydana gelmektedir ve “*yaklaşımın  $0 < x < 1$  aralığında uniform olarak geçerli olmaması*” olarak adlandırılmaktadır.



Şekil 2.3.1. *Örnek 2.3.5.*  $f$  ile asimptotik yaklaşımı olan  $\varphi(x) = x$  in kıyaslanması

### 2.3.1. Asimptotik açılımlar

Daha önce incelenen örneklerden de anlaşılacağı gibi bir fonksiyona ait asimptotik yaklaşım tek değildir. Aynı zamanda belirtilmelidir ki, şu ana kadar incelenen asimptotik yaklaşımların iyiliği ya da kötülüğü konusunda pek de bilgilenildiği söylenemez. Bu yüzden daha güçlü yapılar incelenmelidir. Bu noktaya kadar olan örneklerde  $\varepsilon$ ' un  $0,1,2,\dots$  şeklindeki kuvvetlerini  $(\varepsilon^0, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \dots)$  kabul eden asimptotik açılımlara yer verildi. Ancak bilinmelidir ki farklı şekildeki kuvvetlerle de karşılaşmaktadır. Hatta yeri geldikçe bu farklı türdeki fonksiyonların kullanılması ilgilenilen problem için daha uygun olacaktır. Bu nedenle bazı tanımlara ihtiyaç duyulmaktadır. *Henri Poincaré*' e atfen "*Poincaré Açılımı*" adı da verilen "*asimptotik açılım*" tanımı aşağıda verilmiştir.

**Tanım 2.3.1.1.**  $\phi_1(\varepsilon), \phi_2(\varepsilon), \phi_3(\varepsilon), \dots$  şeklindeki fonksiyonlar dizisi  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$  iken  $\forall m \in \mathbb{N}$  için  $\phi_{m+1}(\varepsilon) = o(\phi_m(\varepsilon))$  özelliğini gerçekleştiriyor ise bu dizi bir asimptotik dizidir.

Yani  $\forall m \in \mathbb{N}$  için  $\lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0} \frac{\phi_{m+1}}{\phi_m} = 0$  özelliğinin sağlanması gerekmektedir.

**Tanım 2.3.1.2.**  $\phi_1(\varepsilon), \phi_2(\varepsilon), \phi_3(\varepsilon), \dots$  bir asimptotik dizi olsun. Bu durumda  $f(\varepsilon)$  fonksiyonu  $m$  terimli bir asimptotik açılıma sahiptir  $\Leftrightarrow a_k$  katsayıları  $\varepsilon$ ' dan bağımsız olmak üzere,  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$  için  $f(\varepsilon) = \sum_{k=1}^m a_k \phi_k + o(\phi_m)$ ,  $m=1,2,3,\dots$  dur. Bu durumda  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$  için  $f \sim a_1 \phi_1(\varepsilon) + a_2 \phi_2(\varepsilon) + \dots + a_m \phi_m(\varepsilon)$  yazılabilir. Burada bahsedilen  $\phi_k(\varepsilon)$  fonksiyonları açılımın *baz fonksiyonları* ya da *gauge fonksiyonları* olarak adlandırılırlar.

**Örnek 2.3.1.1.**  $\phi_m(\varepsilon) = \exp\left(\frac{-m}{\varepsilon}\right)$ ,  $m=1,2,3,\dots$  fonksiyon dizisi,  $\varepsilon \rightarrow 0$  için bir asimptotik dizidir. Gerçekten de Tanım 2.3.1.1. gereğince  $\forall m \in \mathbb{N}$  için

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\phi_{m+1}}{\phi_m} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\exp\left(\frac{-(m+1)}{\varepsilon}\right)}{\exp\left(\frac{-m}{\varepsilon}\right)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \exp\left(\frac{-1}{\varepsilon}\right) = 0 \text{ elde edilir. Bu ise ilgili dizinin bir}$$

asimptotik dizi olduğunu gösterir.



Örnek 2.3.1.2.  $\phi_n(\varepsilon) = \varepsilon^n$  fonksiyon dizisi  $\varepsilon \rightarrow 0$  için bir asimptotik dizidir.

Örnek 2.3.1.3.  $\phi_n(\varepsilon) = \varepsilon^n e^{-n\varepsilon}$  fonksiyon dizisi  $\varepsilon \rightarrow \infty$  için asimptotik bir dizi oluşturur.

Yukarıda verilen tanım ve örneklerden sonra sıra asıl soruya geldi: “Verilen bir  $f(\varepsilon)$  fonksiyonuna ait asimptotik açılım nasıl bulunur?”. Bunun için en sık kullanılan yöntemler:

- A. Taylor Teoremi,
- B. L’Hospital Kuralı,
- C. Tahmin,

dir. Tahmin yoluyla asimptotik açılımı belirlemek bir şans olayıdır ve tecrübe gerektirmektedir. Bundan daha ziyade Taylor Teoremi ve L’Hospital Kuralı kullanılmaktadır. L’Hospital Kuralı’ na göre ise Taylor Teoremi’ nin kullanılması çok daha avantajlıdır. Çünkü Taylor Teoremi yardımı ile açılımda yapılan hatayı analiz etme şansı doğmaktadır. Bu da Taylor Teoremi’ ni çok daha önemli kılmaktadır.

Örnek 2.3.1.4.  $f(\varepsilon) = \exp(\varepsilon)$  fonksiyonun üç terimli asimptotik açılımı ele alınsın. Taylor seri açılım kullanılarak ya da doğrudan Örnek 2.2.1.’ den

$$f(\varepsilon) = \exp(\varepsilon) = e^\varepsilon = 1 + \varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{1}{6}\varepsilon^3 + \dots \sim 1 + \varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2$$

elde edilir.

Örnek 2.3.1.5.  $f(\varepsilon) = \frac{\cos(\varepsilon)}{\varepsilon}$  fonksiyonu için iki terimli asimptotik açılım aransın.

Burada Taylor Teoremi’ ni doğrudan uygulamak olanaksızdır. Çünkü  $f(\varepsilon)$  fonksiyonu  $\varepsilon = 0$  için tanımsızdır. Bu nedenle tanımsızlık yaratan bölümü göz ardı edip  $\varepsilon = 0$  için tanımlı bölümü Taylor serisi ile ifade etmek gerekmektedir. Böylece

$$f(\varepsilon) \sim \frac{1}{\varepsilon} \left( 1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \dots \right) \sim \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2}\varepsilon$$

elde edilir. Beklenildiği gibi asimptotik açılım,  $f(\varepsilon)$  fonksiyonu gibi  $\varepsilon = 0$  noktasında tanımsızdır.

Örnek 2.3.1.6.  $f(\varepsilon) = \frac{\sqrt{1+\varepsilon}}{\sin(\sqrt{\varepsilon})}$  fonksiyonunun iki terimli asimptotik açılımı aransın.

$\sqrt{1+\varepsilon} = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon + \dots$  ve  $\sin(\sqrt{\varepsilon}) = \varepsilon^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{6}\varepsilon^{\frac{3}{2}} + \dots$  olduğuna dikkat edilirse

$$\begin{aligned} f(\varepsilon) &\sim \frac{1 + \frac{1}{2}\varepsilon + \dots}{\varepsilon^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{6}\varepsilon^{\frac{3}{2}} + \dots} = \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \frac{1 + \frac{1}{2}\varepsilon + \dots}{1 - \frac{1}{6}\varepsilon + \dots} \\ &\sim \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon + \dots\right) \left(1 + \frac{1}{6}\varepsilon + \dots\right) \sim \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \left(1 + \frac{1}{3}\varepsilon\right) \end{aligned}$$

asimptotik açılımı elde edilir.

Uyarı 2.3.1.1. Verilen bir  $f(\varepsilon)$  fonksiyonuna ait  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$  için asimptotik açılım

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(\varepsilon)$  biçiminde olsun. Bu durumda katsayılar

$$a_m = \lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0} \frac{f(\varepsilon) - \sum_{n=1}^{m-1} a_n \phi_n(\varepsilon)}{\phi_m(\varepsilon)}$$

ile tanımlıdır. Bu şekilde oluşturulan asimptotik açılım tektir.

Örnek 2.3.1.7.  $f(\varepsilon) = \frac{1}{1+\varepsilon} + e^{-\frac{1}{\varepsilon}}$  fonksiyonu ve  $\phi_1(\varepsilon) = 1, \phi_2(\varepsilon) = \varepsilon, \phi_3(\varepsilon) = \varepsilon^2, \dots$  gauge

fonksiyonları verilsin. Bu durumda Uyarı 2.3.1.1.' den

$$\begin{aligned} a_1 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f}{1} = 1 \\ a_2 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f-1}{\varepsilon} = -1 \\ a_3 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f-1+\varepsilon}{\varepsilon^2} = 1 \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla  $f \sim 1 - \varepsilon + \varepsilon^2 + \dots$  elde edilir. Burada ilginç olan  $e^{-\frac{1}{\varepsilon}}$

fonksiyonunun asimptotik açılıma hiçbir etkisinin olmayışdır. Bunun nedeni ise  $e^{-\frac{1}{\varepsilon}}$

fonksiyonunun çok hızlı 0' a yaklaşmasıdır. Yani  $e^{\frac{-1}{\varepsilon}} = o(\varepsilon^a), \forall a \in \mathbb{R}$  için, dir. Bu durumda bu  $e^{\frac{-1}{\varepsilon}}$  fonksiyonuna “*gauge fonksiyonlarına göre transandantal olarak küçüktür*” denir. Yine bu örnekte de görüldüğü gibi iki farklı fonksiyon aynı asimptotik açılıma sahip olabilmektedir.

### 2.3.2. Asimptotik serilerin yakınsaklığı ve hassaslığı

Taylor seri açılımı ile elde edilen bir asimptotik açılımda daha fazla terim ekleyerek açılımın hassaslığını artırmak mümkündür. İstenilen hassaslıktaki sonuç elde edilene dek terim ekleme işine devam edilir. Ancak bir asimptotik açılım için bu her zaman doğru sonuç vermeyebilir. Çünkü asimptotik açılımlar  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$  için limit durumuyla ilgilenirken, serinin terim sayısının artması  $n \rightarrow \infty$  durumudur. Bilinmelidir ki bir asimptotik açılım yakınsak olmayabilir. Yakınsak olan bir asimptotik açılım ise açılımı olduğu fonksiyona yakınsamayabilir. Örneğin, *Örnek 2.3.1.7.*' de incelenen

$f(\varepsilon) = \frac{1}{1+\varepsilon} + e^{\frac{-1}{\varepsilon}}$  fonksiyonuna ait asimptotik açılım  $f \sim 1 - \varepsilon + \varepsilon^2 + \dots$  olarak

bulunmuştu. Bu açılım ise aslında  $\frac{1}{1+\varepsilon}$  fonksiyonunun Taylor seri açılımıdır.

Dolayısıyla asimptotik açılım  $\frac{1}{1+\varepsilon}$  fonksiyonuna yakınsamaktadır. Bu ise asimptotik açılımın açılımı olduğu fonksiyona yakınsamamasına bir örnektir.

İraksak asimptotik açılımlara örnek olarak özel bir fonksiyon olan ve  $J_0(z)$  ile gösterilen *Bessel fonksiyonu* verilebilir.

$$J_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{2^{2k} (k!)^2}$$

şeklinde ifade edilen bu fonksiyon göz önüne alınır ve  $f(\varepsilon) = J_0\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$  kabul edilirse küçük bir  $\varepsilon$  parametresi için  $f(\varepsilon)$  fonksiyonuna ait asimptotik açılım (*Abramowitz ve Stegun, 1972*)

$$f \sim \sqrt{\frac{2\varepsilon}{\pi}} \left[ \alpha \cos\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{\pi}{4}\right) + \beta \sin\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{\pi}{4}\right) \right] \quad (2.3.2.1)$$

şeklinde tanımlı olup buradaki  $\alpha$  ve  $\beta$

$$\alpha \sim 1 - \frac{1.3^2 \varepsilon^2}{2!8^2} + \frac{1.3^3.5^2.7^2 \varepsilon^4}{4!8^4} + \dots \quad (2.3.2.2)$$

$$\beta \sim \frac{\varepsilon}{8} - \frac{1.3^3.5^2 \varepsilon^3}{3!8^3} + \dots \quad (2.3.2.3)$$

ile verilir.  $0^+$  dan farklı değerdeki her  $\varepsilon$  için (2.3.2.2) ve (2.3.3.3) açılımlarının ıraksak olduğunun gösterilmesi zor değildir. (2.3.2.1) şeklindeki ıraksak serinin ilk bir ya da iki terimi kullanılarak elde edilen hassaslık,

$$J_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{2^{2k} (k!)^2}$$

serisinin en az yirmi teriminin açılması ile elde edilebilmektedir [7,14]. Asimptotik açılımlar ile uğraşılırken yukarıda incelenen iki örnek karşılaşılabilecek durumlar açısından unutulmamalıdır.

### 2.3.3. Asimptotik açılımlarla işlemler

Aynı baz (gauge, scale) fonksiyonlarına sahip olan asimptotik açılımlar için toplama ve çıkarma işlemlerinin yapılabileceğini göstermek zor değildir. Çarpma işlemi de zahmetli olmasına rağmen zor değildir. Ancak bir fonksiyonun türevinin asimptotik açılımının o fonksiyonun asimptotik açılımının türevine denk olduğunu söylemek doğru değildir.

Özel olarak  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$  için  $f(x, \varepsilon) \sim \phi_1(x, \varepsilon) + \phi_2(x, \varepsilon)$  alınsın. Burada ilgilenilen soru

$\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$  için  $\frac{d}{dx} f(x, \varepsilon) \sim \frac{d}{dx} \phi_1(x, \varepsilon) + \frac{d}{dx} \phi_2(x, \varepsilon)$  olup olmadığıdır. Hemen belirtmeli ki

bu her zaman doğru değildir. Örnek olarak  $f(x, \varepsilon) = e^{-\frac{x}{\varepsilon}} \sin(e^{\frac{x}{\varepsilon}})$ ,  $0 < x < 1$  fonksiyonu incelenirse küçük  $\varepsilon$  parametresi için  $f \sim 0 + 0.\varepsilon + 0.\varepsilon^2 + \dots$  asimptotik açılımı elde

edilir. Oysa  $\frac{d}{dx} f(x, \varepsilon) = \frac{-1}{\varepsilon} e^{-\frac{x}{\varepsilon}} + \frac{1}{\varepsilon} \cos(e^{\frac{x}{\varepsilon}})$  bir asimptotik açılım değildir. Diğer bir

işlem olan integral işleminde ise durum türev işlemine göre daha iyimserdir.

$\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$  için  $f(x, \varepsilon) \sim a_1(x)\phi_1(\varepsilon) + a_2(x)\phi_2(\varepsilon)$  şeklindeki asimptotik açılım ile ilgilenildiğinde  $a \leq x \leq b$  şartı sağlanmak üzere  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$  için

$$\int_a^b f(x, \varepsilon) dx \sim \left( \int_a^b a_1(x) dx \right) \phi_1(\varepsilon) + \left( \int_a^b a_2(x) dx \right) \phi_2(\varepsilon)$$

bağıntısı geçerlidir.

*Örnek 2.3.3.1.*  $f(\varepsilon) = \int_0^1 e^{\varepsilon x^2} dx$  şeklinde tanımlı  $f$  fonksiyonunun iki terimli asimptotik açılımı ile ilgilenilsin. Taylor Seri Açılımı yardımı ile  $e^{\varepsilon x^2} = 1 + \varepsilon x^2 + \dots$  bulunur ve bu özel olarak  $0 \leq x \leq 1$  için de geçerlidir.

Dolayısıyla

$$f(\varepsilon) = \int_0^1 (1 + \varepsilon x^2 + \dots) dx = 1 + \frac{1}{3} \varepsilon + \dots$$

elde edilir ki ilk iki terim istendiğinden  $f(\varepsilon) \sim 1 + \frac{1}{3} \varepsilon$  yazılır.

*Örnek 2.3.3.2.*  $f(\varepsilon) = \int_0^1 \frac{dx}{\varepsilon^2 + x^2}$  fonksiyonunun iki terimli asimptotik açılımı ile ilgilenilsin.

$$\frac{1}{\varepsilon^2 + x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{\varepsilon^2}{x^4} + \dots$$

şeklinde Taylor açılımına sahiptir. Ancak bu  $0 < x \leq 1$  için geçerlidir.  $x = 0$  noktasında  $\varepsilon \rightarrow 0$  için singülarite mevcuttur. Bu yüzden bu açılımın  $0 \leq x \leq 1$  için integrallenebilirliğinden bahsedilemez. Bu nedenle  $\varepsilon \ll \delta \ll 1$  olmak üzere

$$f(\varepsilon) = \int_0^\delta \frac{dx}{\varepsilon^2 + x^2} + \int_\delta^1 \frac{dx}{\varepsilon^2 + x^2}$$

yazılabilir. Burada iki parçaya ayrılan integrallerden ilki çok küçük bir aralıkta singülarite ihtiva etmektedir. İkinci integral ise singülarite ihtiva etmediğinden

integrandı için  $\frac{1}{\varepsilon^2 + x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{\varepsilon^2}{x^4} + \dots$  açılımı uygulanabilir durumdadır. Yani

$$\int_{\delta}^1 \frac{dx}{\varepsilon^2 + x^2} = \int_{\delta}^1 \left( \frac{1}{x^2} - \frac{\varepsilon^2}{x^4} + \dots \right) dx \sim -1 + \frac{1}{3}\varepsilon^2 + \frac{1}{\delta} - \frac{\varepsilon^3}{3\delta^3}$$

elde edilir. İlk integral için de

$$\int_0^{\delta} \frac{dx}{\varepsilon^2 + x^2} = \frac{1}{\varepsilon} \arctan\left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\delta} + \dots \right)$$

bulunur ki bu iki integral açılımının toplanmasıyla

$$f(\varepsilon) = \int_0^1 \frac{dx}{\varepsilon^2 + x^2} = \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\delta} + \dots \right) + -1 + \frac{1}{3}\varepsilon^2 + \frac{1}{\delta} - \frac{\varepsilon^3}{3\delta^3} \sim \frac{\pi}{2\varepsilon} - 1 + \frac{1}{3}\varepsilon^2 + \dots$$

açılımı elde edilir.

*Örnek 2.3.3.3.* Hemen önceki örnekteki çözüme benzer yaklaşımda bulunularak

$$f(\varepsilon) = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\varepsilon^2 + \sin(x)} \sim -2 \ln(\varepsilon) + \ln\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$$

asimptotik açılımı elde edilir. Görüldüğü gibi bu açılımda logaritmik bir gauge fonksiyonu bulunmaktadır. Bu çok sık karşılaşılan bir durum olmamakla beraber bazen karşılaşılabilmektedir.

#### 2.4. Cebirsel ve Transandantal Denklemlerin Asimptotik Çözümleri

Giriş bölümünde de belirtildiği gibi yaklaşık çözümler üretebilmek adına asimptotik metotların kullanım alanları oldukça geniştir ve bunların en kolay tipte olanlarına cebirsel denklemlerde rastlanmaktadır. Bu tezin asıl amacı diferansiyel denklemlerin çözümlerine asimptotik yaklaşımlarda bulunmak olduğundan bu bölüm bir ön hazırlık gibi düşünülebilir.

*Örnek 2.4.1.* Basit bir örnek olarak  $x^2 + 0.002x - 1 = 0$  kuadratik denklemini ele alınsın.  $x$  değişkeninin katsayısı olan 0.002 değerinin diğer katsayılardan oldukça küçük olduğu gözlenmektedir. Bu yüzden yaklaşık bir çözüm elde edilmeye çalışılacaktır. Öncelikle hemen belirtmeli ki *MATLAB R2012a* programı kullanılarak tam çözümler (exact solutions) hemen aşağıda verilen kod yardımıyla

```
>> format long
```

```
>> roots([1 .002 -1])
```

```
ans =
```

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.999000499999875... \\ x_2 &= -1.001000499999875... \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

şeklinde bulunur. Bu köklerin kuadratik denklem kökü formülleriyle bulunması biraz zahmetli olduğundan *MATLAB R2012a* programından yararlanılmıştır. Şimdi de asimptotik bir yaklaşımda bulunulacak ve en son gerçek çözümle olan farkları (mutlak hatalar) değerlendirilecektir.  $x^2 + 0.002x - 1 = 0$  denkleminin  $\varepsilon = 0.001$  için  $x^2 + 2\varepsilon x - 1 = 0$  formunda olduğu açıktır. Bu problem için

$$x \sim x_0 + \varepsilon^\alpha x_1 + \dots \quad (2.4.2)$$

şeklindeki bir yaklaşımın benimsenmesi olağandır ve burada  $\alpha > 0$ ' dir. (2.4.2) yaklaşımı çözüm olarak kabul edilip  $x^2 + 2\varepsilon x - 1 = 0$  denkleminde uygulanırsa

$$x_0^2 + 2\varepsilon^\alpha x_0 x_1 + \dots + 2\varepsilon(x_0 + \varepsilon^\alpha x_1 + \dots) - 1 = 0 \quad (2.4.3)$$

eşitliğine ulaşılır. Polinom eşitliği kullanılırsa  $\alpha = 1$  ve

$$O(1) \quad x_0^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_0 = \pm 1$$

$$O(\varepsilon) \quad 2x_0 x_1 + 2x_0 = 0 \Rightarrow x_1 = -1$$

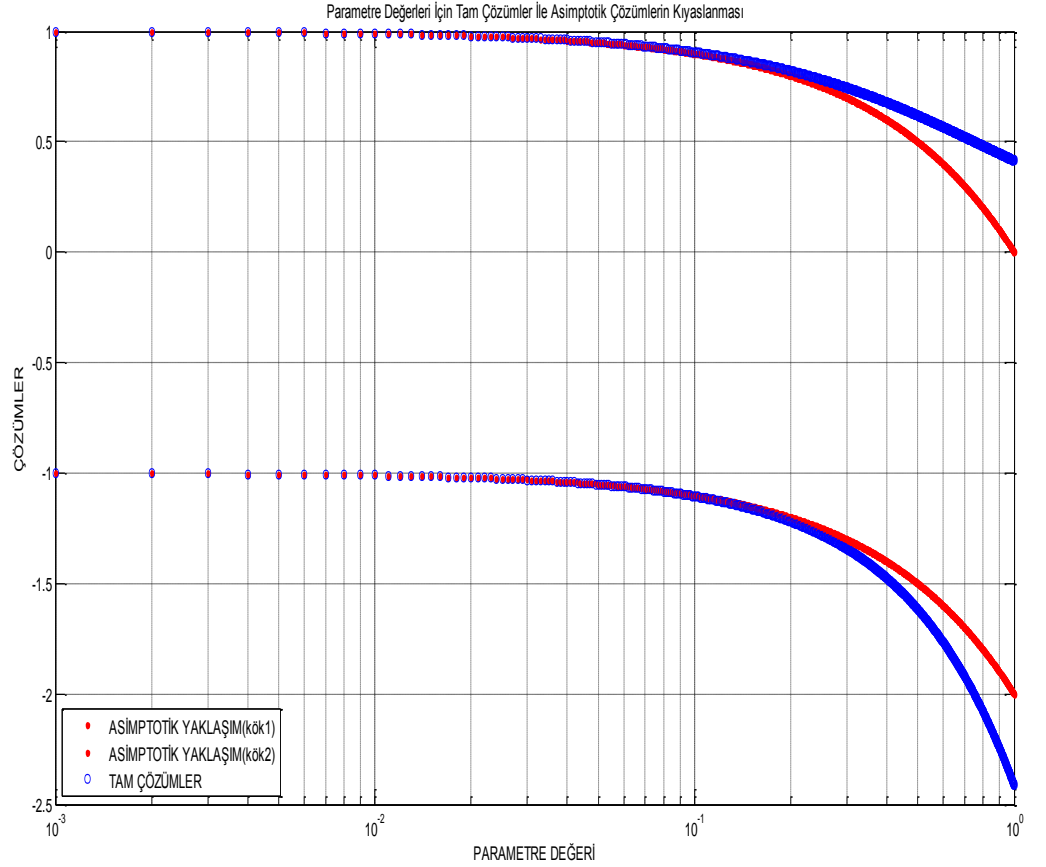
elde edilir. Böylece (2.4.2) yaklaşımı

$$x \sim \pm 1 - \varepsilon \quad (2.4.4)$$

iki terimli asimptotik yaklaşımına dönüşür. Çözümlerin kıyaslanması grafik üzerinde incelenirse Şekil 2.4.1.' den de görüldüğü üzere  $\varepsilon$  parametresinin değeri 0' a

yaklaştıkça asimptotik yaklaşım gerçek çözüme oldukça iyi bir hassaslıkla yaklaşmaktadır.

Örnek 2.4.1. ile verilen problem formunun “regüler pertürbasyon problemi” olarak anılmasına sıkça rastlanmaktadır. “regüler” sıfatı,  $\varepsilon$ ' un farklı değerleri için denklemin doğasının (denklemin mertebesinin, derecesinin,...) değişmediğini belirtmektedir.



Şekil 2.4.1. Örnek 2.4.1.' in çözümlerini  $\varepsilon$ ' un farklı değerleri için kıyaslayan grafik

Örnek 2.4.2. Bu konunun ikinci örneği olarak  $\varepsilon x^2 + 2x - 1 = 0$  şeklindeki kuadratik denklem ele alınsın. Burada ise  $\varepsilon$  parametresi en yüksek dereceli terimin önünde katsayı olarak bulunmaktadır. Bu ise özel olarak  $\varepsilon = 0$  için denklemin lineer hale gelmesi anlamını taşır. Yani denklemin derecesi düşecektir. Bu önemli bir durumdur çünkü denklemin doğası değişmektedir ve problemin “singüler” sıfatını almasına neden olmaktadır. Bu tür problemlere “singüler pertürbasyon problemi” denilmektedir. Örnek 2.4.1.' de uygulanan yaklaşım burada da uygulanırsa



$$x \sim \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{8} \quad (2.4.5)$$

yaklaşımı elde edilir. Beklenildiği üzere  $x = \frac{1}{2}$  noktası civarlarında bir asimptotik yaklaşım elde edildi. Çünkü  $\varepsilon = 0$  için oluşan lineer denklemin kökü  $x = \frac{1}{2}$  dir. Ancak  $\varepsilon x^2 + 2x - 1 = 0$  denklemi kuadratik bir denklemdir ve iki kökünün olması gerekmektedir. Oysa (1.5.2.1) yaklaşımı ise yalnız bir tek çözüm üretmektedir. Bu nedenle farklı bir çözüm yaklaşımının benimsenmesi gerekmektedir. Bu yaklaşım

$$x \sim \varepsilon^\lambda (x_0 + \varepsilon^\alpha x_1 + \dots), \alpha > 0 \quad (2.4.6)$$

formunda olsun.  $\alpha > 0$  alınmasıyla açılımın iyi sıralı olması şartı sağlanmış olur. Sonuç olarak (2.4.6) açılımının  $\varepsilon x^2 + 2x - 1 = 0$  denkleminde uygulanmasıyla

$$\varepsilon^{1+2\lambda} \underset{A}{(x_0^2 + 2\varepsilon^\alpha x_0 x_1 + \dots)} + 2\varepsilon^\lambda \underset{B}{(x_0 + \varepsilon^\alpha x_1 + \dots)} - \varepsilon^0 \underset{C}{1} = 0 \quad (2.4.7)$$

denklemi elde edilir. Bulunulan bu nokta oldukça önemlidir. (2.4.7) denkleminin sol yanını 0'a eşit olmalıdır. Bunun için ise polinom eşitliği kuralınca birbirini dengeleyen (balancing) terimlere ihtiyaç vardır. Bu ise  $\binom{3}{2} = 3$  farklı durumun söz konusu olabileceğine işaret eder (terimler ikililer olarak birbirlerini dengeleyeceklerdir, aksi durumu sağlayan  $\lambda$  reel kökü yoktur). Şimdi ise bu durumları teker teker incelenmesi gerekmektedir.

- Durum 1:  $\lambda = 0$  olması durumudur ki bu durumda B ve C terimleri birbirlerini dengeleyeceklerdir. Dengelemekten kasıt aynı dereceden olmalarıdır. Bu durumda daha önce elde edilmiş olan  $x \sim \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{8}$  (2.4.5) yaklaşımı elde edilir. Bu nedenle diğer çözümü bulmak için diğer durumlar incelenmelidir.
- Durum 2: A ve C terimlerinin birbirlerini dengelediği durum ele alınsın. Bu durumda  $1 + 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$  elde edilir. Bu durumda B teriminin katsayısı  $\varepsilon'$  dan bağımsız, yani  $\lambda = 0$  olmalıdır ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla diğer durum incelenmelidir.

- Durum 3: Son olarak A ve B terimlerinin birbirlerinin dengeleyicisi olduğu durum incelendiğinde  $1+2\lambda = \lambda$  olup  $\lambda = -1$  elde edilir. Dolayısıyla polinom eşitliği sağlanmış olur.

Böylece (2.4.7) eşitliği

$$x_0^2 + 2\varepsilon^\alpha x_0 x_1 + \dots + 2(x_0 + \varepsilon^\alpha x_1 + \dots) - \varepsilon = 0 \quad (2.4.8)$$

eşitliğine dönüşür. Buradan ise

$$O(1) \quad x_0^2 + 2x_0 = x_0(x_0 + 2) \Rightarrow x_0 = -2 \text{ ve } \alpha=1 \text{ için}$$

$$O(\varepsilon) \quad 2x_0 x_1 + 2x_1 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}$$

elde edilir. Bu değerlerin (2.4.8)' de yerlerine yazılmasıyla

$$x \sim \frac{1}{\varepsilon} \left( -2 - \frac{\varepsilon}{2} \right) \quad (2.4.9)$$

ikinci asimptotik yaklaşımı elde edilir.  $\varepsilon$  parametresinin farklı değerleri için asimptotik çözümler ile gerçek (*MATLAB R2012a*) çözümleri kıyaslayan grafik Şekil 2.4.2.' de verilmiştir.

*Örnek 2.4.3.* Son olarak transandantal fonksiyon içeren  $x^2 + e^{\varepsilon x} = 5$  denklemi ele alınsın. Bu denklemin iki reel değerli çözümünün olduğu açıktır. Denklemin çözümüne asimptotik yaklaşımda bulunmak adına

$$x \sim x_0 + \varepsilon^\alpha x_1 + \dots \quad (2.4.10)$$

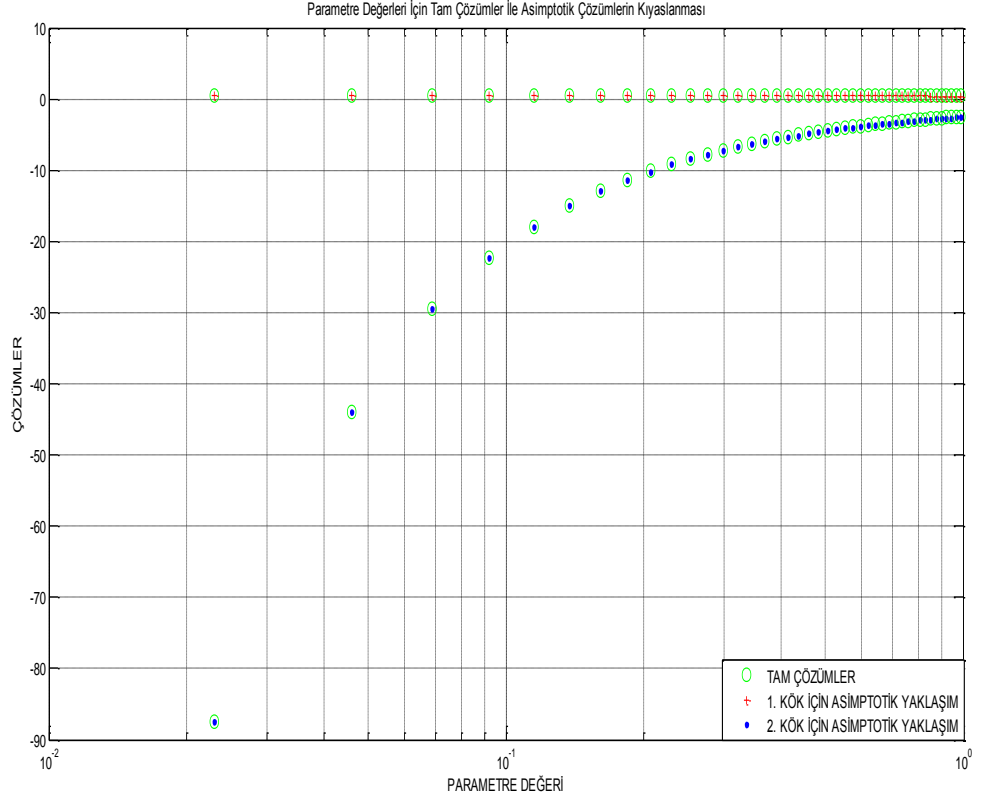
çözüm önerisinde bulunulur.  $e^x$  fonksiyonunun Taylor seri açılımının kullanılması ile

$$x_0^2 + 2x_0 x_1 \varepsilon^\alpha + \dots + 1 + \varepsilon x_0 + \dots = 5 \quad (2.4.11)$$

elde edilir ki buradan ise iki terimli asimptotik yaklaşımlar

$$x_{1,2} \sim \pm 2 - \frac{\varepsilon}{2} \quad (2.4.12)$$

şeklinde bulunur.



Şekil 2.4.2. Örnek 2.4.2.'nin  $\epsilon$ ' un farklı değerleri için asimptotik-gerçek çözüm grafiği

## 2.5. Diferansiyel Denklemlerin Asimptotik Çözümleri

Önceki bölümlerde cebirsel ve transandantal fonksiyonların yaklaşık çözümlerini bulmak için kullanılan yapılar diferansiyel denklemler için de benzer biçimde kullanılabilir. Bu bölümde sadece regüler tipteki adi (ordinary) ve kısmi (partial) diferansiyel denklemler giriş amacı ile incelenecektir. Bu tezin asıl amacı olan singüler pertürbasyon problemleri ve bunlara ait çözüm yöntemleri daha sonraki bölümlerde detaylı biçimde ele alınacaktır.

Örnek 2.5.1.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \epsilon \frac{dy}{dx} + 1 = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \quad (2.5.1)$$

başlangıç değer problemi ele alınsın. Bu problem fiziksel temellere sahip olan bir problemdir ve hava sürtünmesini de dikkate alan atış hareketini modellemektedir. (2.5.1) denkleminde  $k$  sabiti hava sürtünme katsayısını,  $g$  yerçekim sabitini,  $m$  cismin

ağırlığını ve  $v_0$  ilk hızı belirtmek üzere  $\varepsilon$  katsayısı  $\varepsilon = \frac{kv_0}{mg}$  ile tanımlıdır. Burada da cebirsel denklemlerin asimptotik çözümlerinde kullanılan yöntemin aynı benimsenecektir. Yani

$$y(x) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \dots \quad (2.5.2)$$

yaklaşımı çözüm kabul edilir ve başlangıç koşullarına da dikkat edilerek verilen diferansiyel denkleme uygulanırsa (üç terimli bir asimptotik yaklaşım ile ilgileniliyor)

$$\begin{aligned} y'(x) &= y_0'(x) + \varepsilon y_1'(x) + \varepsilon^2 y_2'(x) + \dots \\ &= y_0'(x) + \varepsilon y_1'(x) + \varepsilon^2 y_2'(x) + O(\varepsilon^3) \\ y''(x) &= y_0''(x) + \varepsilon y_1''(x) + \varepsilon^2 y_2''(x) + \dots \\ &= y_0''(x) + \varepsilon y_1''(x) + \varepsilon^2 y_2''(x) + O(\varepsilon^3) \\ \Rightarrow y_0''(x) + \varepsilon y_1''(x) + \varepsilon^2 y_2''(x) + \varepsilon y_0'(x) + \varepsilon^2 y_1'(x) + 1 + O(\varepsilon^3) &= 0 \\ \Rightarrow \varepsilon^2 (y_2''(x) + y_1'(x)) + \varepsilon^1 (y_1''(x) + y_0'(x)) + \varepsilon^0 (y_0''(x) + 1) + O(\varepsilon^3) &= 0 \end{aligned}$$

polinomal eşitlik kullanılarak

$$y_2''(x) + y_1'(x) = 0, \quad y_1''(x) + y_0'(x) = 0, \quad y_0''(x) + 1 = 0$$

ve başlangıç koşullarının da kullanılması ile

$$\begin{aligned} y(0) = 0 &\Rightarrow y_0(0) + \varepsilon y_1(0) + \varepsilon^2 y_2(0) + O(\varepsilon^3) = 0 \\ \Rightarrow y_0(0) = 0, \quad y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 0 \\ y'(0) = 1 &\Rightarrow y_0'(0) + \varepsilon y_1'(0) + \varepsilon^2 y_2'(0) + O(\varepsilon^3) = 1 \\ \Rightarrow y_0'(0) = 1, \quad y_1'(0) = 0, \quad y_2'(0) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bulunan tüm bu değerler düzenlenip yeniden yazılırlar ise

$$\begin{aligned} O(1): \quad y_0''(x) &= -1, \quad y_0(0) = 0, \quad y_0'(0) = 1 \\ O(\varepsilon): \quad y_1''(x) + y_0'(x) &= 0, \quad y_1(0) = 0, \quad y_1'(0) = 0 \\ O(\varepsilon^2): \quad y_2''(x) + y_1'(x) &= 0, \quad y_2(0) = 0, \quad y_2'(0) = 0 \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

başlangıç değer problemlerinin elde edildiği görülür. Şimdi de bu denklemlerin her birinin çözülmesi ile

$$\begin{aligned} y_0 &= x - \frac{x^2}{2}, \\ y_1 &= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}, \\ y_2 &= \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24}, \end{aligned} \tag{2.5.4}$$

çözümleri elde edilir. Bu çözümlerin (2.5.2) denkleminde yerlerine yazılmasıyla

$$y(x) \sim \left(x - \frac{x^2}{2}\right) + \varepsilon \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) + \varepsilon^2 \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24}\right) \tag{2.5.5}$$

üç terimli asimptotik açılımı elde edilir. (2.5.1) denklemini lineer bir denklem olduğundan analitik olarak çözülebilmesi zor değildir. Bu denklemin tam (*exact*) çözümü

$$y(x) = \frac{(1+\varepsilon)}{\varepsilon^2} (1 - e^{-\varepsilon x}) - \frac{x}{\varepsilon} \tag{2.5.6}$$

biçimindedir. Bu tam çözümü asimptotik çözümle kıyaslamak için bu örnek için grafik kullanımından farklı bir yol izleyelim. (2.5.6) denkleminde yer alan  $(1 - e^{-\varepsilon x})$  teriminin Taylor seri açılımı ile

$$(1 - e^{-\varepsilon x}) = \varepsilon x - \frac{\varepsilon^2 x^2}{2} + \frac{\varepsilon^3 x^3}{3!} - \dots \tag{2.5.7}$$

elde edilir. Bunun tam çözüm (2.5.6)'ya uygulanması ile

$$\begin{aligned} y(x) &= \left(\varepsilon x - \frac{\varepsilon^2 x^2}{2} + \frac{\varepsilon^3 x^3}{3!} + \dots\right) \frac{(1+\varepsilon)}{\varepsilon^2} - \frac{x}{\varepsilon} \\ &= \varepsilon^2 \left(\frac{x}{\varepsilon} - \frac{x^2}{2} + \frac{\varepsilon x^3}{3!} + \dots\right) \frac{(1+\varepsilon)}{\varepsilon^2} - \frac{x}{\varepsilon} = (1+\varepsilon) \left(\frac{x}{\varepsilon} - \frac{x^2}{2} + \frac{\varepsilon x^3}{3!} + \dots\right) - \frac{x}{\varepsilon} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x}{\varepsilon} - \frac{x^2}{2} + \frac{\varepsilon x^3}{3!} + \dots + x - \frac{\varepsilon x^2}{2} + \frac{\varepsilon^2 x^3}{3!} + \dots - \frac{x}{\varepsilon} \\
&= -\frac{x^2}{2} + \frac{\varepsilon x^3}{3!} + \dots + x - \frac{\varepsilon x^2}{2} + \frac{\varepsilon^2 x^3}{3!} + \dots \\
&= \left( x - \frac{x^2}{2!} \right) + \varepsilon \left( -\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \right) + \varepsilon^2 \left( \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} \right) + O(\varepsilon^3)
\end{aligned} \tag{2.5.8}$$

elde edilir. Bu ise bulunan asimptotik açılıma özdeştir. Yani asimptotik yöntem kullanılarak tam çözüm elde edilmiş oldu.

*Örnek 2.5.2.* Şimdi ise giriş bölümünde kabaca incelenmiş olan (1.1) atış denklemini farklı biçimde tekrar ele alalım.

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{1}{(1 + \varepsilon y)^2}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad t > 0 \tag{2.5.9}$$

denklemini lineer olmayan bir denklemdir ancak  $\varepsilon = 0$  için lineerlik elde edildiğinden “*zayıf non-lineer denklem*” olarak bilinir. Daha önceki örnekten biraz farklı olarak ( $\alpha$  nedeniyle) daha esnek bir yaklaşım olan

$$y(t) \sim y_0(t) + \varepsilon^\alpha y_1(t) + \dots, \quad \alpha > 0 \tag{2.5.10}$$

yaklaşımı benimsensin.

Böylece

$$\begin{aligned}
y_0''(t) + \varepsilon^\alpha y_1''(t) + \dots &= -\frac{1}{[1 + \varepsilon y_0(t) + \dots]^2} \text{ (sağ yanın Taylor yaklaşımıyla)} \\
&= -1 + 2\varepsilon y_0(t) + O(\varepsilon^2)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow y_0''(t) + \varepsilon^\alpha y_1''(t) + 1 - 2\varepsilon y_0(t) + O(\varepsilon^2) = 0$$

elde edilir. Burada  $\alpha = 1$  alınmalıdır. Başlangıç koşulları da

$$y(0) = 0 \Rightarrow y_0(0) + \varepsilon^\alpha y_1(0) + \dots = 0 \Rightarrow y_0(0) = 0, \quad y_1(0) = 0,$$

$$y'(0) = 1 \Rightarrow y_0'(0) + \varepsilon^\alpha y_1'(0) + \dots = 1 \Rightarrow y_0'(0) = 1, \quad y_1'(0) = 0,$$

şeklinde bulunur. Bulunan tüm bu veriler düzenlenip tekrar yazılırsa

$$O(1) \quad y_0''(t) = -1, \quad y_0(0) = 0, \quad y_0'(0) = 0,$$

$$O(\varepsilon) \quad y_1''(t) = 2y_0(t), \quad y_1(0) = 0, \quad y_1'(0) = 0,$$

başlangıç değer problemleri elde edilir. Bu problemlerin çözülmesiyle de

$$y_0(x) = x - \frac{1}{2}x^2 \quad \text{ve} \quad y_1(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{12}x^4$$

fonksiyonları elde edilir. Bu fonksiyonların da (1.6.2.1) açılımında  $\alpha = 1$  için yerlerine yazılması ile

$$y(t) \sim \left( t - \frac{t^2}{2} \right) + \varepsilon \left( \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{12} \right) \quad (2.5.11)$$

iki terimli asimptotik yaklaşımı elde edilir. Bulunan asimptotik yaklaşımın ne kadar iyi bir yaklaşım olduğu *MATLAB R2012a* programı yardımıyla oluşturulan Şekil 2.5.1.' de incelenebilir.

*Örnek 2.5.3.* Bölümün son örneği olarak daha sonraki bölümlerde “*singüler pertürbasyon problemi*” olarak adlandırılacak olan ve regüler açılım yardımıyla çözümüne ulaşılamayan bir sınır değer problemini ele alalım.

$$\begin{aligned} \varepsilon y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) &= 0, \quad 0 < x < 1, \\ y(0) &= 0, \quad y(1) = 1, \end{aligned} \quad (2.5.12)$$

sınır değer problemi (*boundary value problem*) verilsin. Daha önceki örneklerde olduğu gibi

$$y(x) \sim y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \dots \quad (2.5.13)$$

regüler yaklaşımı benimsensin. Böylece (2.5.13) regüler asimptotik yaklaşımının (2.5.12) problemine uygulanması ile

$$\begin{aligned} y_1''(x) + 2y_1'(x) + 2y_1(x) &= 0, \quad y_1(0) = 0, \quad y_1(1) = 0, \\ y_0''(x) + 2y_0'(x) + 2y_0(x) &= 0, \quad y_0(0) = 0, \quad y_0(1) = 0, \\ y_0(x) + y_0'(x) &= 0, \quad y_0(0) = 0, \quad y_0(1) = 1, \end{aligned}$$

denklemleri elde edilir.

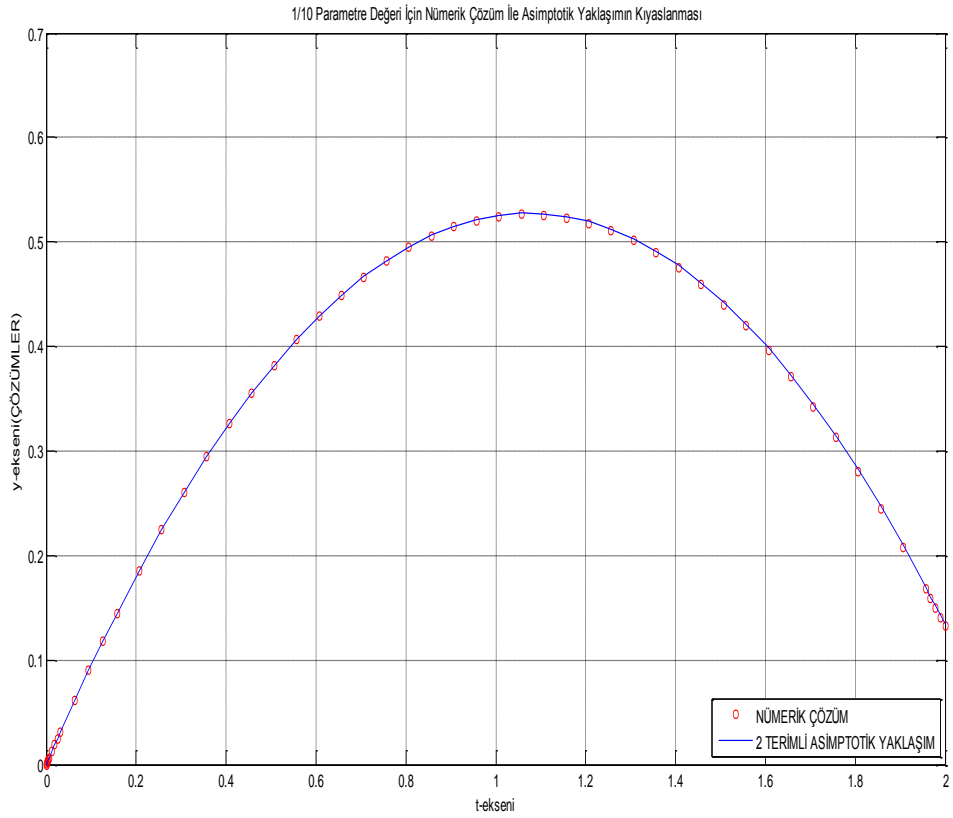
Örneğin,

$$y_0(x) + y_0'(x) = 0, y_0(0) = 0, y_0(1) = 1$$

problemi için

$$y_0(x) = c_1 e^{-x}$$

bulunur ki bu  $y_0$  fonksiyonunun bu iki sınır şartını birden sağlaması mümkün değildir. Bu ise bir singularite etkisidir. Dolayısıyla bu tür singüler pertürbasyon problemlerini regüler açılım kullanarak çözmek mümkün değildir.



Şekil 2.5.1. Örnek 2.5.2.' nin asimptotik ve nümerik çözümlerini kıyaslayan grafik

## 2.6 Asimptotik Yaklaşımların Geçerliliği

Bulunan asimptotik yaklaşımın, ilgili problemin tanım aralığının tamamında geçerli olması yaklaşımın uniformluğunu yani her yerde geçerliliğini ifade etmektedir. Daha

önce Örnek 2.3.5.' te de gördüğümüz üzere  $f(x) = x + e^{-x/\epsilon}$  fonksiyonu için elde edilen  $f \sim x$  asimptotik açılımı  $x=0$  noktası civarlarında geçerliliğini kaybetmektedir. İşte bu durum problemin tanım kümesi olan  $0 < x < 1$  aralığının tümünde geçerli olan bir



asimptotik yaklaşım edilmediğini göstermektedir. Yani  $f \sim x$  asimptotik yaklaşımı uniform bir asimptotik yaklaşım değildir.

Asimptotik yaklaşımların tüm tanım kümesi üzerinde geçerli olmamaları genelde açılımı yapılan ilgili fonksiyonun tanım aralığının uç noktalarındaki davranışından kaynaklanmaktadır. *Örnek 2.3.5.*' te de bunu örnekleyen bir durum incelenmiştir. Asimptotik açılımların uniformluğunu test etmek için basit bir limit testi kullanılabilir.  $[a, b]$ ' da sürekli ve  $(a, b)$ ' da  $f(x, \varepsilon) \sim \phi(x, \varepsilon)$  şartını sağlayan  $f$  ve  $\phi$  fonksiyonları ile ilgilenilsin.  $x_0$  noktası ise aralığın uç noktalarından ( $a$  ya da  $b$ ' den herhangi biri)

olsun.  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\phi(x_0, \varepsilon)}{\phi_0(\varepsilon)} \neq 1$  olması durumunda  $f(x, \varepsilon) \sim \phi(x, \varepsilon)$  asimptotik yaklaşımı uniform

olmayan bir yaklaşımdır. Bu test uniformluğun sağlanmadığını göstermek için

kullanılmaktadır. *Örnek 2.3.5.* için bu test uygulanır ise;  $0 < x < 1$  için  $f(x) = x + e^{\frac{-x}{\varepsilon}} \sim x$  bulunmuştu ve *Şekil 2.3.1.*' de  $x=0$  noktası civarlarında uniformluğun bozulduğu açıkça gösterilmişti. Bunu test etmek bir de yukarıda verilen kural kullanılırsa,

$f(x, \varepsilon) = x + e^{\frac{-x}{\varepsilon}}$ ,  $\phi(x, \varepsilon) = x$  ve  $x_0 = 0$  seçilmesi ile birlikte

$$f(x_0, \varepsilon) = \phi_0(\varepsilon) = 1$$

ve

$$\phi(x_0, \varepsilon) = 0 \Rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\phi(x_0, \varepsilon)}{\phi_0(\varepsilon)} = 0 \neq 1$$

elde edilir ki bu da asimptotik yaklaşımın  $x_0 = 0$  noktası civarlarında geçerli olmadığını göstermektedir.

### 3. BÖLÜM

#### EŞLEŞTİRİLMİŞ ASİMPTOTİK AÇILIMLAR METODU

##### 3.1. Eşleştirilmiş Açılımlar

Asimptotik metotların temelleri, özel fonksiyonları (*special functions*) hesaplamasının yoğun ilgi görmeye başladığı 18. yy' a kadar dayanmaktadır. Bu özel fonksiyonların en güzel örneklerinden biri de daha önceki bölümlerde incelenmiş olan ve asimptotik yaklaşımı (2.3.2.1) denklemini ile verilmiş olan Bessel fonksiyonudur (Poisson, 1823). Aynı yüzyılın sonuna gelinmeden dikkatler diferansiyel denklemlerin asimptotik çözümlerinin bulunması üzerinde odaklandı ve özellikle de gök mekaniği ile ilgili çalışmalarda önemli gelişmeler kaydedildi [1,4-8].

Bu bölümde eşleştirilmiş asimptotik açılımların tam olarak ne anlama geldiği ayrıntısı ile ele alınacaktır. Bu metodun temelleri akışkan mekaniği (*fluid mechanics*) ile sıkıca ilişkilidir. Konuyla ilgili ilk gelişmeler katı bir cisim etrafındaki akışkan akışı üzerinde çalışmalar yapan *Ludwig Prandtl (1875-1953)* tarafından kaydedildi (1905). 1950' li yıllar ise *Eşleştirilmiş Asimptotik Açılımlar Metodu'* nun altın çağıydı. Bu dönemde metot, Friedrichs ve öğrencileri tarafından günümüzdeki haliyle kullanılmaya başlandı ve optik de dahil olmak üzere birçok fiziksel probleme uygulanabilir duruma geldi. 1970' li yıllarda metotla ilgili basılan geniş kapsamlı kitaplar da yöntemin çok daha popüler hale gelmesini sağlamıştır ve metot günümüzde bile geliştirilmeye devam edilmektedir. Yöntemin “*uygulamalı matematik temellerinden*” olduğu kabul edilmektedir. Başlarda “*iç ve dış açılımlar metodu*” (*the method of inner and outer expansions*) ve “*çift asimptotik açılım metodu*” (*the method of double asymptotic expansions*) şeklinde anılan metot daha sonraları *Francis Patton Bretherton'* un deyimini ile günümüzdeki adıyla anılmaya başlanmıştır [9,11-12,17].

##### 3.2. Metodun İşleyişi

Yöntemin işleyişini örnek üzerinde ayrıntılı olarak incelemek daha açıklayıcı olacaktır. Bu nedenle *Örnek 2.5.3.'* te incelenmiş ve bir singüler pertürbasyon problemi olduğu için çözümüne ulaşılmamış olan (2.5.12) denklemini yeniden numaralandırılarak

$$\begin{aligned} \varepsilon y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) &= 0, \quad 0 < x < 1, \\ y(0) &= 0, \quad y(1) = 1, \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

şeklinde ele alınsın. Denklem, ikinci mertebeden lineer adi bir diferansiyel denklemdir ve tam çözümünü bulmak zor değildir.  $\varepsilon = 0$  için (2.2.1) denklemi merteye kaybedecektir. Daha önce de bahsedildiği üzere bu tip problemler genelde *singüler pertürbasyon problemi* olarak adlandırılmaktadır (ancak bunun ters örnekleri de mevcuttur). Bu tür problemlerin *Eşleştirilmiş Asimptotik Açılımlar Metodu* ile çözümünde dört ana adım izlenecek ve tek terimli asimptotik yaklaşım elde edilecek, sonrasında beşinci adımda ise ikinci terim de elde edilerek iki terimli asimptotik açılım elde edilecektir.

### 3.2.1. Dış çözüm (Adım 1)

İlk bölümde regüler açılımlarda yapıldığı gibi

$$y(x) \sim y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \dots \tag{3.2.1.1}$$

şeklindeki asimptotik çözüm benimsenir. Bu yaklaşım (3.2.1) denkleminde uygulanarak

$$\varepsilon(y_0'' + \varepsilon y_1'' + \dots) + 2(y_0' + \varepsilon y_1' + \dots) + 2(y_0 + \varepsilon y_1 + \dots) = 0 \tag{3.2.1.2}$$

denklemini elde edilir. Buradan

$$O(1) \quad y_0' + y_0 = 0 \Rightarrow y_0(x) = \alpha e^{-x}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

elde edilir. Ancak burada bir ikileme içerisinde kalınmıştır. Çünkü iki sınır şartı olmasına rağmen  $y_0(x) = \alpha e^{-x}$  genel çözümünde yalnız bir tane keyfi sabit bulunmaktadır. Bunun anlamı, (3.2.1.1) formunda benimsenmiş olan çözüm yaklaşımının  $0 < x < 1$  tanım kümesinin tamamı üzerinde geçerli olacak bir çözüm (uniform çözüm) üretemeyecek olmasıdır. Şu ana kadar bu genel çözümün hangi sınır şartını sağlaması gerektiği konusunda bir bilgi verilmedi. Şu an için bilinen şey  $x = 0$  ya da  $x = 1$  noktalarından birinde farklı bir çözüm anlayışının benimsenmesi gerektiği bir bölgenin (sınır tabaka) varlığıdır. Şimdilik bu sınır tabakanın  $x = 0$  noktasında bulunduğu varsayalım. Böylece

$$y_0(1) = \alpha e^{-1} = 1 \Rightarrow \alpha = e \Rightarrow y_0(x) = e e^{-x} = e^{1-x}$$

dış bölge çözümü elde edilir.

### 3.2.2. Sınır tabaka çözümü (Adım 2)

İlk adımda sınır tabakanın  $x=0$  noktasında olduğu kabul edilmişti. Bu kabule bağlı olarak yeni bir koordinat sistemi benimsenmelidir.

$$\bar{x} = \frac{x}{\varepsilon^\alpha}, \quad \alpha > 0 \quad (3.2.2.1)$$

dönüşümü ile elde edilecek olan bu yeni koordinatlar “sınır tabaka koordinatları” olarak bilinmektedir. Bu dönüşüm yardımı ile  $x=0$  için  $\varepsilon \rightarrow 0$  durumunda bölgeyi gerebilme (zoom yapabilme) olanağı sunar. Bu yüzden (3.2.2.1) dönüşümü çoğu zaman “germe dönüşümü” şeklinde adlandırılır. (3.2.2.1) dönüşümünün zincir kuralı yardımıyla uygulanması ile

$$\frac{d}{dx} = \frac{d\bar{x}}{dx} \frac{d}{d\bar{x}} = \frac{1}{\varepsilon^\alpha} \frac{d}{d\bar{x}}$$

elde edilir.  $Y(\bar{x})$ , problemin sınır tabakadaki çözümünü göstermek üzere

$$\varepsilon y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = 0$$

denklemini

$$\varepsilon^{1-2\alpha} \frac{d^2 Y}{d\bar{x}^2} + 2\varepsilon^{-\alpha} \frac{dY}{d\bar{x}} + 2Y = 0 \quad (3.2.2.2)$$

denklemine dönüşür. Sınır şartı için ise  $x=0$  için

$$y(0) = 0 \Rightarrow \bar{x} = \frac{x}{\varepsilon^\alpha} = 0 \Rightarrow Y(0) = 0$$

elde edilir. Burada ise

$$Y(\bar{x}) \sim Y_0(\bar{x}) + \varepsilon^\lambda Y_1(\bar{x}) + \dots, \quad \lambda > 0 \quad (3.2.2.3)$$

sınır tabaka yaklaşımı benimsenebilir. Bu açılımın da (3.2.2.2) denkleminin uygulanması ile

$$\begin{aligned} \varepsilon^{1-2\alpha} (Y_0'' + \varepsilon^\lambda Y_1'' + \dots) + 2\varepsilon^{-\alpha} (Y_0' + \varepsilon^\lambda Y_1' + \dots) + 2(Y_0 + \varepsilon^\lambda Y_1 + \dots) &= 0, \\ \Rightarrow \varepsilon^{1-2\alpha} Y_0'' + \varepsilon^{1-2\alpha+\lambda} Y_1'' + 2\varepsilon^{-\alpha} Y_0' + 2\varepsilon^{\lambda-\alpha} Y_1' + 2Y_0 + 2\varepsilon^\lambda Y_1 + \dots &= 0, \end{aligned}$$

elde edilir ki tek terimli asimptotik açılım elde edilmek istendiğinden

$$\varepsilon^{1-2\alpha} Y_0'' + 2\varepsilon^{-\alpha} Y_0' + 2Y_0 = 0$$

elde edilir. Dengeleme yapmak amacıyla terimler etiketlenirse

$$\varepsilon^{1-2\alpha} \underset{A}{Y_0''} + 2\varepsilon^{-\alpha} \underset{B}{Y_0'} + 2 \underset{C}{Y_0} = 0$$

elde edilir. Burada üç durum söz konusudur. Bu durumlar;

- B ~ C olması durumu:

Bu durum  $\alpha = 0$  olmasını gerektirir ki bu da  $\bar{x} = \frac{x}{\varepsilon^\alpha}$  dönüşümünün  $\bar{x} = x$  şekline gelmesine neden olur. Bu ise 1. Adımda incelenen durumdur. Dolayısıyla diğer durumlar incelenmelidir.

- A ~ C olması durumu:

Bu durumda

$$1 - 2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

elde edilir. Böylece

$$\varepsilon^0 Y_0'' + 2\varepsilon^{-\frac{1}{2}} Y_0' + 2Y_0 = 0$$

elde edilir ki dengelemenin olmadığı aşıkardır. Çünkü polinomsal eşitlik sağlanamamaktadır. Bu durum da son durumun incelenmesi gerekmektedir.

- A ~ B olması durumu:

$$1 - 2\alpha = -\alpha \Rightarrow \alpha = 1$$

elde edilir ki buradan da

$$\varepsilon \left( Y_0''(\bar{x}) + Y_0'(\bar{x}) \right) + 2Y_0(\bar{x}) = 0,$$

bulunur.

Böylece doğru dengelemeye ulaşılmış olur. Buradan ise  $Y_0'' + Y_0' = 0$  ve  $Y_0 = 0$  denklemleri elde edilir. Ancak  $Y_0 = 0$  çözümü ile ilgilenilmeyecektir (sıfır çözüm olduğundan). Artık problem  $Y_0'' + Y_0' = 0, Y(0) = 0$  şeklini almıştır. Bu problemin çözümüyle de  $A \in \mathbb{R}$  keyfi bir sabit olmak üzere

$$Y_0(\bar{x}) = A(1 - e^{-\bar{x}}) \quad (3.2.2.4)$$

denklemini elde edilir. Ancak dikkat edilirse bu çözüm A sabitini içermektedir ve bu sabitin belirlenmesi gerekmektedir. Bu ise sonraki adımda incelenecektir.

### 3.2.3. Açılımların eşleştirilmesi (Adım 3)

Sınır tabaka çözümü (iç çözüm)  $Y_0(\bar{x}) = A(1 - e^{-\bar{x}})$  şeklinde bulunmuştu. Buradaki  $A \in \mathbb{R}$  sabitini belirlemek gerekmektedir. Önceki adımlarda bulunan iç ve dış yaklaşımların aslında aynı fonksiyona ait fakat farklı bölgelerde geçerli olan açılımlar olduğu biliniyor. Friedrichs' in modeline göre iç ve dış bölgelerin birbirlerine temas ettikleri geçiş bölgesinde her iki açılımın da aynı değeri almasını beklemek yanlış olmayacaktır. Yani iç açılım değişkeni sınır tabakadan çıkarken ve dış açılım değişkeni sınır tabakaya girerken aldıkları değerler ile sırasıyla iç açılım fonksiyonu ile dış açılım fonksiyonu birbirlerine eşit olmalıdır.  $x = 0$  noktası civarlarındaki sınır tabaka varlığı ve  $\varepsilon \rightarrow 0$  için  $x$  sabit tutulur ise  $\bar{x} = \frac{x}{\varepsilon} \rightarrow \infty$  olduğu göz önüne alınarak

$$\lim_{x \rightarrow 0} y_0(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} Y(\bar{x}) \quad (3.2.3.1)$$

“eşleme prensibi” (matching condition) elde edilir. Dolayısıyla

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{1-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} A(1 - e^{-x}) \Rightarrow e = A$$

$$\Rightarrow Y_0(\bar{x}) = e - e^{1-2\bar{x}}$$

bulunur. Artık iç ve dış bölge için geçerli olan iki farklı çözüm elde edilmiş durumdadır. Ancak çözüm bitmiş değildir. Çünkü farklı bölgelerde geçerli olan farklı çözümlerle uğraşmaktansa tek bir çözümlerle uğraşmak çok daha akıllıcadır. Bu ise 4. Adımda gerçekleştirilecektir.

Hemen belirtmelidir ki (3.2.3.1) ile verilmiş olan eşleme prensibi her probleme uygulanamaz. Örneğin  $\bar{x} = \frac{x}{\varepsilon} \rightarrow \infty$  için çözüm singülariteye sahip olabilir. Dolayısıyla eşleme prensibinin farklı durumlarda farklı formda kullanılması gerekebilmektedir. Bu nedenle başlangıç çalışmaları *Kaplun ve Lagerstrom* tarafından yapılmış olan “*ara eşleme*” (*intermediate matching*) kavramı ortaya çıkmıştır. Daha sonraki bölümlerde bu kavrama değinilecektir.

#### 3.2.4. Birleştirilmiş çözüm (Adım 4)

Daha önceki adımlarda da görüldüğü üzere tanım kümesi olan  $0 \leq x \leq 1$  aralığının farklı bölgelerinde geçerli olan farklı iki çözüm elde edildi. Asıl amaç ise  $0 \leq x \leq 1$  kümesinin tamamında geçerli olan (*uniformly valid*) bir çözüm elde edebilmektir. Bunun için yapılması gereken iç ve dış çözüm olarak bulunan bu iki çözümün toplanıp ortak bölgedeki (*overlapping region*) değerlerinin çıkarılmasıdır. Böylece ortak noktadaki değerleri iki kez sayılmamış olacaktır. Yani

$$y \sim y_0(x) + Y_0(\bar{x}) - y_0(0),$$

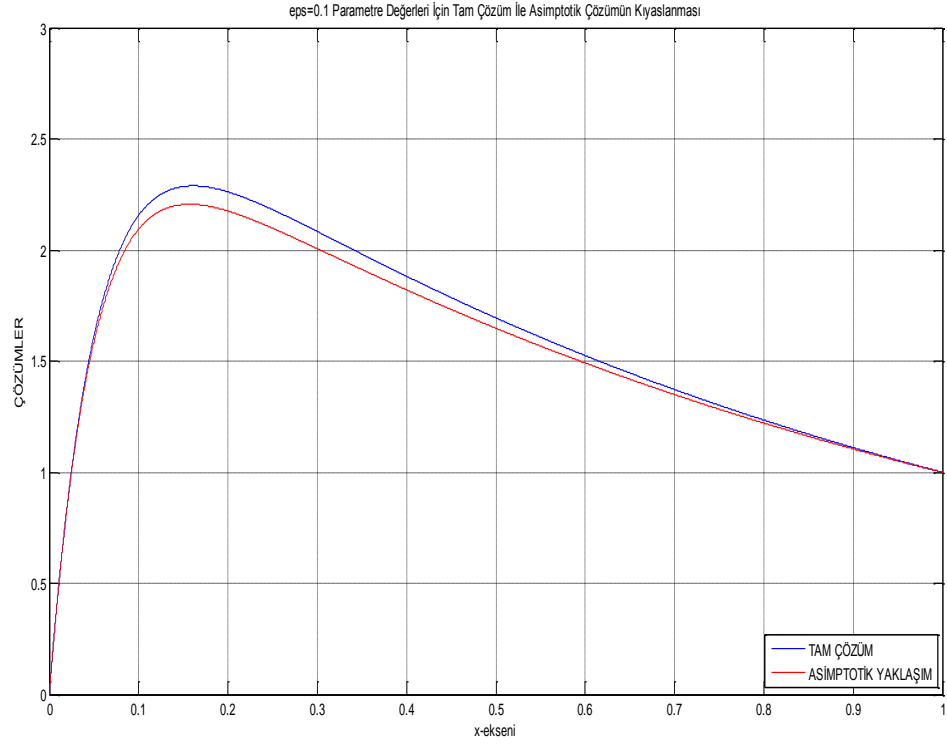
ya da buna denk olarak

$$y \sim y_0(x) + Y_0(\bar{x}) - Y_0(\infty),$$

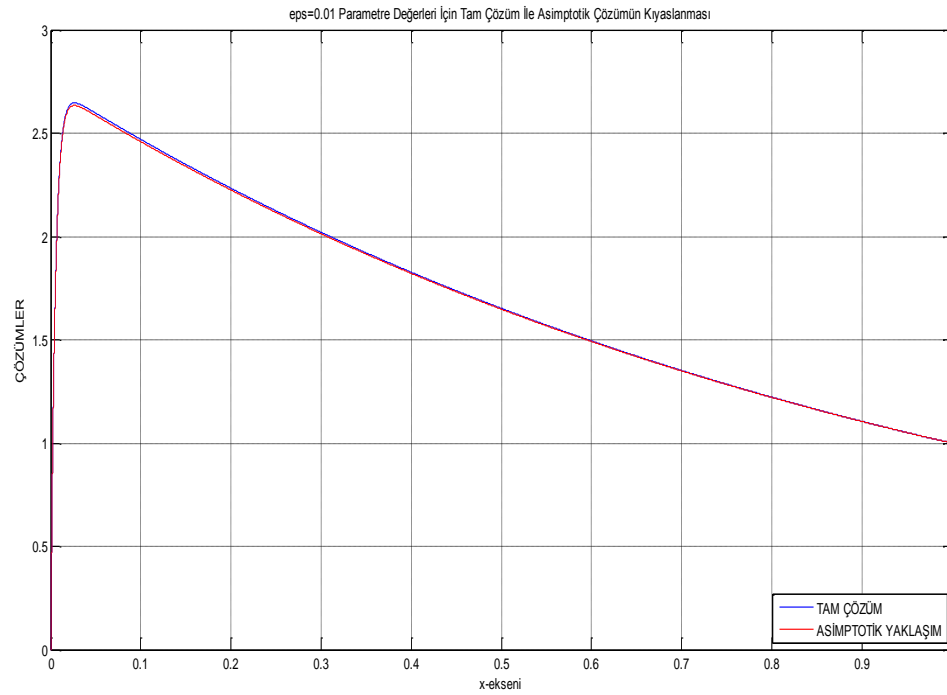
prosedürü birleşik çözümü verecektir ve böylece

$$y \sim e^{1-x} - e^{1-\frac{2x}{\varepsilon}}$$

tek terimli (iç ve dış bölge çözümlerinin her birinin ilk terimi alınarak oluşturulan) asimptotik yaklaşım elde edilir.



Şekil 3.2.4.1.  $\varepsilon = 0.1$  için (3.2.1) denkleminin asimptotik ve tam çözüm grafiği

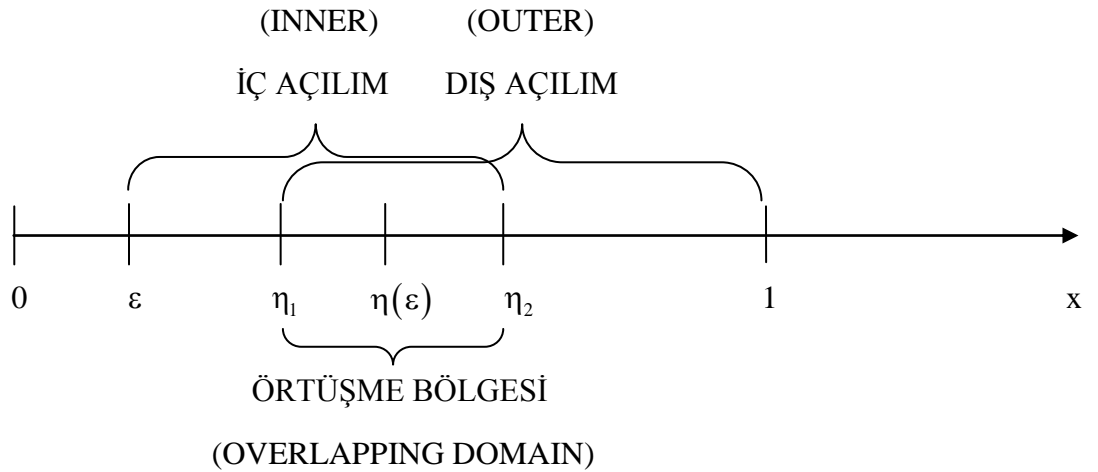


Şekil 3.2.4.2.  $\varepsilon = 0.01$  için (3.2.1) denkleminin asimptotik ve tam çözüm grafiği



Bölüm 3.2.4’ te birleşik çözüm toplamsal olarak yani iç ve dış çözümün toplanıp ortak bölgedeki değerlerinin çıkarılması ile elde edildi. Pratikte çok kullanılmasa da çarpımsal olarak elde edilen farklı bir birleşik açılım elde etme yolunun varlığından bahsedilmelidir. Ancak kolaylık açısından toplamsal yol kullanılmaktadır. Dolayısıyla birleşik çözümün tekliliğinden bahsetmek mümkün değildir.

(3.2.1) denkleminin tek terimli asimptotik yaklaşımının grafiğe dökümünden de anlaşıldığı üzere iç ve dış çözümlerin birer teriminin kullanılması ile oluşturulmuş tek terimli birleşik çözüm bile problemin tam çözümüne oldukça yakın bir yaklaşım vermiştir. Ancak daha da hassas çözüm elde etmek için açılımlarda daha fazla terim kullanmaya ihtiyaç duyulabilir. Bunun için ise ilk terimi bulmada uygulanan adımların bir benzeri uygulanır ancak burada eşleştirme prosedürü bazen biraz karmaşık olabilmektedir. Ayrıca bazı durumlarda (3.2.3.1) ile verilmiş olan eşleştirme kuralı geçerli olmayabilmektedir. Daha sonra değinileceği üzere iç ya da dış açılımın bir limite sahip olmaması bu duruma örnek oluşturmaktadır. Bu nedenle “*eşleştirme metodu*” daha ayrıntılı bir incelemeyi hak etmektedir. Aşağıda verilen şekil, birleşik çözümün nasıl oluşturulduğunu görsel olarak açıklamaktadır [1-3].



Şekil 3.2.4.3. Eşleştirme Metodu’ nun temel mantığını oluşturan, iç - dış açılımların ortak geçerlilik bölgesi olan “*örtüşme bölgesi*” ’ ni ifade eden şekil

Şekil 3.2.4.3.' ten de görüldüğü üzere  $[\eta_1, \eta_2]$  aralığı, iç açılım (*inner expansion*) ve dış açılım (*outer expansion*) fonksiyonlarının örtüştüğü bölgedir. Bu bölgenin varlığının kanıtlanması bu tezin konusu dışındadır ve bilinmelidir ki şu ana dek tatmin edici nitelikte bir ispat yayınlanmış değildir. Bu nedenle “örtüşme bölgesinin varlığı” çoğu kez “Kaplun’ un Hipotezi” şeklinde anılmaktadır [5,10,13].

### 3.2.5. Ara eşleştirme

Bu yöntemin çalışma prensibi tamamen Şekil 3.2.4.3.' te verilmiş olan diyagram üzerine kuruludur. *Saul KAPLUN (1924-1964)* ve *Paco Axel LAGERSTROM (1914-1989)* tarafından geliştirilmiş bir yöntemdir. Belirtilmelidir ki bu metodun problemlere uygulaması bazen çok karmaşık olabilmektedir.

Bu bölümde “*ara değişken*” (*intermediate variable*) olarak adlandırılan, örtüşme bölgesi üzerinde tanımlı olan yeni bir değişken tanımlanacak ve bulunan iç ve dış çözümler bu değişken cinsinden yazılacaktır. Bu ortak tanım bölgesinde iç ve dış açılımların aynı sonucu vermesi yöntemin özüdür.

Eşleştirilmiş asimptotik açılımların 5. adımı olarak işlenecek olan bu konuda ara değişken yardımıyla iki terimli birleştirilmiş çözüm elde edilecektir.

$$\begin{aligned} \varepsilon(y_0''(x) + \varepsilon y_1''(x)) + 2y_0'(x) + 2\varepsilon y_1'(x) + 2y_0 + 2\varepsilon y_1 &= 0, \\ \Rightarrow \varepsilon y_0''(x) + 2y_0'(x) + 2\varepsilon y_1'(x) + 2y_0 + 2\varepsilon y_1 &= 0, \\ \Rightarrow \varepsilon(y_0''(x) + 2y_1'(x) + 2y_1) + 2y_0'(x) + 2y_0 &= 0, \\ \Rightarrow y_0''(x) + 2y_1'(x) + 2y_1 = 0, 2y_0'(x) + 2y_0, y_0(1) = 1, y_1(x) = 0, \end{aligned}$$

denklemlerine ulaşılır ki  $y_0(x) = e^{1-x}$  olduğu daha önceden bilindiğinden

$$\begin{aligned} y_1''(x) + y_1(x) &= \frac{-e^{1-x}}{2} \Rightarrow y_1(x) = \frac{e^{1-x}}{2}(1-x), \\ \Rightarrow y(x) &\sim y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \dots \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanmış olduğu hesaba katılarak iki terimli dış bölge çözümü

$$\Rightarrow y_{dış}(x) = e^{1-x} + \varepsilon \left( \frac{e^{1-x}}{2}(1-x) \right) = e^{1-x} \left( 1 + \frac{\varepsilon}{2}(1-x) \right), \quad (3.2.5.1)$$

şeklinde elde edilir. Benzer işlemler iç açılım için uygulanır ise (3.2.2.2) ve (3.2.2.3) denklemlerinin yardımı ve  $\lambda = 1$ ,  $\alpha = 1$  alınması ile

$$Y(\bar{x}) \sim Y_0(\bar{x}) + \varepsilon Y_1(\bar{x}) \quad (3.2.5.2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\varepsilon}(Y_0'' + \varepsilon Y_1'') + \frac{2}{\varepsilon}(Y_0' + \varepsilon Y_1') + \varepsilon(Y_0 + \varepsilon Y_1) = 0,$$

$$\Rightarrow Y_0'' + \varepsilon Y_1'' + 2Y_0' + 2\varepsilon Y_1' + 2\varepsilon Y_0 = 0,$$

ve  $\varepsilon'$  un kuvvetlerine göre düzenlenir ise

$$\varepsilon(Y_1'' + 2Y_1' + 2Y_0) + (Y_0'' + 2Y_0') = 0,$$

$$\Rightarrow Y_1'' + 2Y_1' + 2Y_0 = 0, Y_0'' + 2Y_0' = 0, Y_0(0) = 0, Y_1(0) = 0,$$

denklemlerine ulaşılır.  $Y_0(\bar{x})$  zaten daha önce

$$Y_0(\bar{x}) = e - e^{1-2\bar{x}}$$

şeklinde bulunmuştu.

$$Y_1'' + Y_1' + 2e - 2e^{1-2\bar{x}} = 0 \Rightarrow Y_1'' + Y_1' = 2e^{1-2\bar{x}} - 2e, Y_1(0) = 0$$

problemine ulaşılır. *Homogen* olmayan ikinci mertebeden bu adi denklem için belirsiz katsayılar metodu uygulanırsa

$$Y_{\text{homogen}} = A + Be^{-2\bar{x}}$$

bulunur ve

$$Y_{\text{özel}} = C_1 \bar{x} e^{1-2\bar{x}} + C_2 \bar{x}$$

özel çözüm önerisi ile

$$C_1 = -1, C_2 = -e \Rightarrow Y_{\text{özel}} = -\bar{x} e^{1-2\bar{x}} - e\bar{x}$$

olup

$$Y_1 = Y_{\text{homogen}} + Y_{\text{özel}}$$

$$Y_1(\bar{x}) = A + Be^{-2\bar{x}} - \bar{x} e^{1-2\bar{x}} - e\bar{x}, Y_1(0) = 0,$$

$$\Rightarrow B = -A \Rightarrow Y_1(\bar{x}) = A(1 - e^{-2\bar{x}}) - e\bar{x}(1 + e^{-2\bar{x}}), \quad (3.2.5.3)$$

$$\Rightarrow Y(\bar{x}) \sim Y_0(\bar{x}) + Y_1(\bar{x}) = e - e^{1-2\bar{x}} + \varepsilon(A(1 - e^{-2\bar{x}}) - e\bar{x}(1 + e^{-2\bar{x}}))$$

elde edilir. Böylece iki terimli iç açılım da elde edilmiş olur. (3.2.5.3) denklemindeki  $A \in \mathbb{R}$  bir sonraki adım olan eşleme sürecinde belirlenecek olan bir sabittir.

Şimdi ise eşleme işlemini gerçekleştirmek üzere iç ve dış açılımların birbirine denk olmaları gereken örtüşme bölgesi üzerinde tanımlı olan ara değişken (*intermediate variable*)

$$x_\eta = \frac{x}{\eta(\varepsilon)} = \frac{x}{\varepsilon^\alpha}, 0 < \alpha < 1 \quad (3.2.5.4)$$

biçiminde tanımlansın. Bu ara değişkenin sırası ile iki terimli iç ve dış açılımlara uygulanması ile

$$y_{dış} = e^{1-x_\eta\varepsilon^\alpha} \left( 1 + \frac{\varepsilon}{2} (1-x_\eta\varepsilon^\alpha) \right) \quad (3.2.5.5)$$

ve

$$y_{iç} = e - e^{1-2x_\eta\varepsilon^{\alpha-1}} + \varepsilon \left( A \left( 1 - e^{-2x_\eta\varepsilon^{\alpha-1}} \right) - e x_\eta \varepsilon^{\alpha-1} \left( e^{-2x_\eta\varepsilon^{\alpha-1}} \right) \right) \quad (3.2.5.6)$$

denklemleri elde edilir. Artık iki terimli (3.2.5.5) iç açılım denklemi ve (3.2.5.6) dış açılım denklemi ortak tanım bölgesi değişkeni olan  $x_\eta$  ara değişkeni sayesinde eşleme prosedürüne hazır durumdadırlar ancak bazı terimlerin Taylor seri açılımları yardımıyla ortak (daha sonra birleşik çözüm bulma aşamasında iki kez sayılmaması adına çıkarılacak olan) terimleri belirlemek gerekmektedir. Yani

$$y_{dış} = e^{1-x_\eta\varepsilon^\alpha} \left( 1 + \frac{\varepsilon}{2} (1-x_\eta\varepsilon^\alpha) \right)$$

denklemindeki  $e^{1-x_\eta\varepsilon^\alpha}$  teriminin Taylor seri açılımı yardımı ile (*MacKichan Scientific Workplace 5.5* programı kullanılarak)

$$y_{dış} \sim e - x_\eta \varepsilon^\alpha e + \frac{1}{2} x_\eta^2 \varepsilon^{2\alpha} e - x_\eta \varepsilon^{\alpha+1} e - \frac{\varepsilon}{2} e + \frac{\varepsilon}{2} x_\eta^2 \varepsilon^{2\alpha} + \dots \quad (3.2.5.7)$$

denklemleri elde edilir.

(3.2.5.6) denklemi için ise basitleştirmek için  $-2x_\eta \varepsilon^{\alpha-1} = \xi$  şeklindeki dönüşüm yardımı ile (ki böylece  $\varepsilon \rightarrow 0$  için  $\xi \rightarrow -\infty$  olduğu açıktır) limite geçilir ise

$$y_{iç} \sim e - \varepsilon^\alpha x_\eta e + A\varepsilon \quad (3.2.5.8)$$

elde edilir. (3.2.5.7) ve (3.2.5.8) denklemlerinin eşleştirilmesi ile  $A = \frac{e}{2}$  bulunur.

Böylece (3.2.5.7) yaklaşımı

$$y_{iç} \sim e - \varepsilon^\alpha x_\eta e + \frac{e}{2} \varepsilon \quad (3.2.5.9)$$

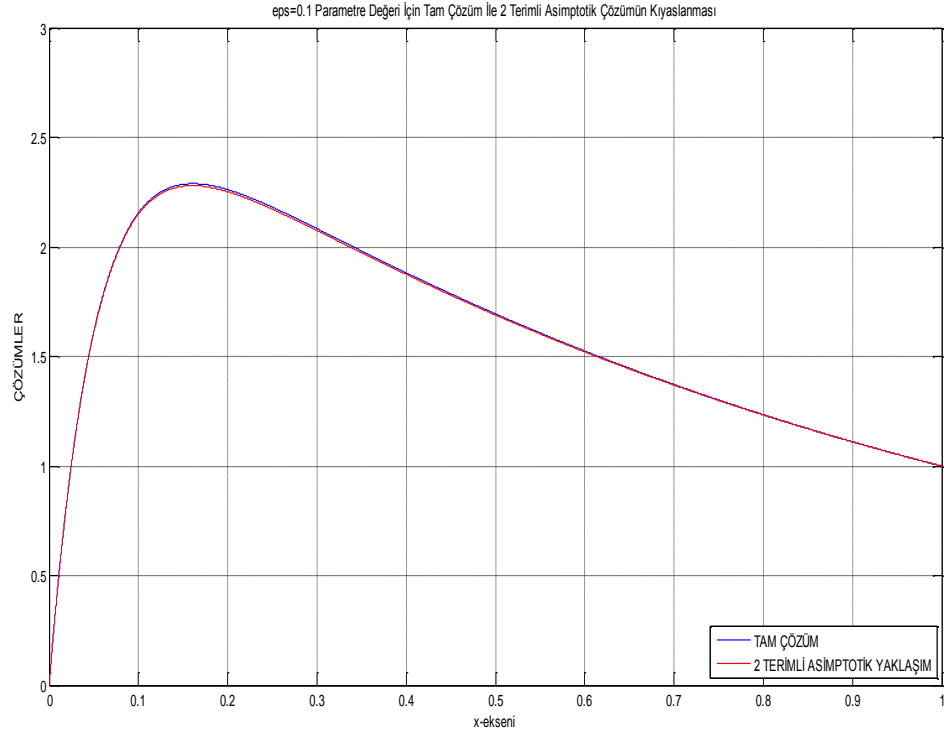
şeklini alır. Buradan da

$$y_{ortak} = e - \varepsilon^\alpha x_\eta e + \frac{e}{2} \varepsilon \quad (3.2.5.10)$$

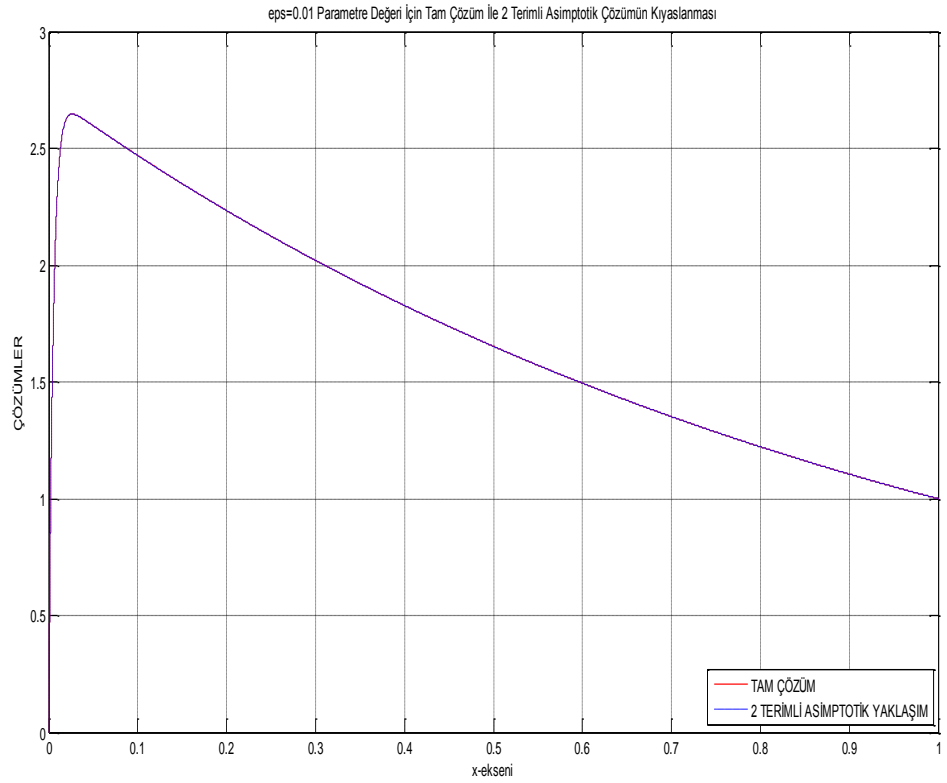
elde edilir. Birleşik çözüm  $y \sim y_0 + \varepsilon y_1 + Y_0 + \varepsilon Y_1 - y_{ortak}$  şeklinde tanımlı olduğundan

$$\begin{aligned} y &\sim e^{1-x} \left( 1 + \frac{\varepsilon}{2} (1-x) \right) + e - e^{1-2\bar{x}} + \varepsilon \left( \frac{e}{2} (1 - e^{-2\bar{x}}) - e\bar{x} (1 + e^{-2\bar{x}}) \right) - e + \varepsilon^\beta x_\eta e - \frac{e}{2} \varepsilon \\ &\sim e^{1-x} \left( 1 + \frac{\varepsilon}{2} (1-x) \right) + e - e^{1-\frac{2x}{\varepsilon}} + \varepsilon \left( \frac{e}{2} \left( 1 - e^{\frac{-2x}{\varepsilon}} \right) - e \frac{x}{\varepsilon} \left( 1 + e^{\frac{-2x}{\varepsilon}} \right) \right) - e + xe - \frac{e}{2} \varepsilon \end{aligned}$$

(3.2.5.11) iki terimli birleşik çözümü elde edilir. Şimdi ise bulunan bu iki terimli asimptotik yaklaşım ile problemin tam çözümü grafik üzerinde kıyaslınsın.



Şekil 3.2.5.1. (3.2.1) probleminin  $\varepsilon = 0.1$  değeri için ara eşleştirme çözümü



Şekil 3.2.5.2. (3.2.1) probleminin  $\varepsilon = 0.01$  değeri için ara eşleştirme çözümü

Ara eşleme (*intermediate matching*) ile ilgili daha detaylı bilgi için *Paco Lagerstrom*' un "*Matched Asymptotic Expansions: Ideas and Techniques*" kitabı incelenebilir [8,16].

### 3.3. Birden Fazla Sınır Tabakaya Sahip Problemler

Şu ana dek tanım aralığının yalnız bir sınırında meydana gelen sınır tabakalarla ele alındı. Ancak durum her zaman bu şekilde olmayabilir. Yani iç açılım fonksiyonu sınır koşullarının her ikisini birden sağlamayabilir. Bu bölümde yine çözüm prosedürü örnek problem üzerinde alınacaktır. Bu amaçla

$$\begin{aligned} \varepsilon y'' + \varepsilon xy' - y &= -e^x, \quad 0 < x < 1, \\ y(0) &= 2, \quad y(1) = 1 \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

problemi ele alınsın. Görüldüğü üzere (3.3.1) problemine ait diferansiyel denklem daha önceki örneklerdeki denklemlerin aksine değişken katsayıdır. Ancak hemen belirtilmelidir ki tanım aralığının her iki ucunda da tabaka bulunmasının nedeni bu değildir. Problemin çözümünde, daha önceki örnekte de olduğu gibi, işlemler sınıflandırılarak adım adım işlenecektir.

#### 3.3.1. Dış çözüm (Adım 1)

$\varepsilon = 0$  için denklem

$$-y = -e^x \Rightarrow y(x) = e^x$$

formunu alır ki bu dış açılım yaklaşımı olan  $y_0$ ' ın kendisidir. Dolayısıyla

$$y_0(x) = e^x$$

elde edilmiş olur. Ancak görüldüğü üzere  $y_0(x)$  her iki sınır şartını da sağlamamaktadır. Bu nedenle hem  $x=0$  hem de  $x=1$  noktalarında (ki bu noktalar problemin tanımlı olduğu aralığın uç noktalarıdır) sınır tabaka mevcuttur.

#### 3.3.2. Sınır tabakalar ve eşleme işlemi (Adım 2)

Öncelikle  $x=0$  noktasındaki sol sınır tabaka için  $\bar{x} = \frac{x}{\varepsilon^\alpha}$  sınır tabaka dönüşümü uygulansın.

Böylece  $\varepsilon y'' + \varepsilon x y' - y = -e^x$  diferansiyel denklemi

$$\varepsilon^{2-2\alpha} \frac{d^2 Y}{d\bar{x}^2} + \varepsilon x \frac{dY}{d\bar{x}} - Y = -e^{\bar{x}\varepsilon^\alpha} \quad (3.3.2.1)$$

denklemine dönüşür. (3.3.2.1) denkleminde homojenliği bozan kısım olan  $-e^{\bar{x}\varepsilon^\alpha}$ , in Taylor seri açılımı kullanılarak

$$\varepsilon^{2-2\alpha} \frac{d^2 Y}{d\bar{x}^2} + \varepsilon x \frac{dY}{d\bar{x}} - Y = -1 - \varepsilon^\alpha \bar{x} + \dots \quad (3.3.2.2)$$

denklemi elde edilir. Şimdi ise sıra (3.3.2.2) eşitliğinin dengelenmesi için belirlenecek olan  $\alpha$  sabitinin bulunmasındadır. Daha önceki bölümlerdeki örneklerden de çıkarılacağı üzere (3.3.2.2) denklemi için  $\alpha = 1$  olarak bulunur. Artık (3.3.2.2) denklemi

$$\frac{d^2 Y}{d\bar{x}^2} + \varepsilon x \frac{dY}{d\bar{x}} - Y = -1 - \varepsilon \bar{x} + \dots \quad (3.3.2.3)$$

denklemine dönüşür ki

$$Y \sim Y_0(\bar{x}) + \varepsilon Y_1(\bar{x}) + \dots$$

formunda bir çözüm arayışı benimsenebilir. Ancak sadece tek terimli birleşik çözüm ile ilgileneceğinden  $Y_0(\bar{x})$  fonksiyonunu bulmakla yetinilecektir. Buradan ise

$$Y_0'' - Y_0 = -1, \quad 0 < \bar{x} < \infty, \quad Y_0(0) = 2 \quad (3.3.2.4)$$

problemi elde edilir. (3.3.2.4) probleminin çözümü  $A \in \mathbb{R}$  olmak üzere

$$Y_0(\bar{x}) = 1 + A e^{-\bar{x}} + (1 - A) e^{\bar{x}} \quad (3.3.2.5)$$

şeklinde elde edilir. (3.2.3.1) denklemiyle verilmiş olan eşleme prensibi yardımıyla  $Y_0(\infty) = y_0(0)$  olması gerektiğinden  $A = 1$  elde edilir. Bu durumda ise (3.3.2.5) denklemi

$$Y_0(\bar{x}) = 1 + A e^{-\bar{x}} \quad (3.3.2.6)$$



şekline dönüşür.

Şimdi de tanım aralığının sağ sınırı olan  $x=1$  noktasındaki sınır tabaka incelensin.

Burada ise sınır tabaka  $x=1$  noktasında olduğundan dolayı

$$x = \frac{x-1}{\varepsilon^\beta} \quad (3.3.2.7)$$

şeklindeki yeni sınır tabaka koordinat dönüşümü uygulanacak ve bu bölgedeki çözüm

$Y(x)$  ile gösterilecektir. (3.3.2.7) dönüşümünün (3.3.1) problemine uygulanması ile

$$\varepsilon^{2-2\beta} \frac{d^2 Y}{dx^2} + (1 + \varepsilon x) \varepsilon^{1-\beta} \frac{dY}{dx} - Y = -e^{1+\varepsilon^\beta x} \quad (3.3.2.8)$$

denklemini elde edilir ki burada da dengeleme koşulu  $\beta = 1$  için sağlandığından (3.3.2.8)

denklemini

$$\frac{d^2 Y}{dx^2} + (1 + \varepsilon x) \frac{dY}{dx} - Y = -e^{1+\varepsilon x} \quad (3.3.2.9)$$

denklemine dönüşür. Tek terimli asimptotik yaklaşım istendiğinden  $Y \sim Y_0(x)$

şeklindeki çözüm arayışının benimsenmesi yanlış olmayacaktır. Böylece ( $\varepsilon \rightarrow 0$  için)

denklemin

$$Y_0'' + Y_0' - Y_0 = -e, \quad -\infty < x < 0, \quad Y_0(0) = 1 \quad (3.3.2.10)$$

problemine dönüşür. Bu homogen olmayan sabit katsayılı adi lineer diferansiyel

denklemin çözümü ise  $B \in \mathbb{R}$  ve

$$r_{1,2} = \frac{1}{2} [-1 \pm \sqrt{5}]$$

olmak üzere

$$Y_0(x) = e + Be^{r_1 x} + (1 - e - B)e^{r_2 x} \quad (3.3.2.11)$$

şeklinde elde edilir.

Şimdi de  $B$  sabitini belirlemek adına  $0 < x < 1$  için

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x-1}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x = -\infty$$

olduğu da dikkate alınarak eşleme işlemine geçilirse

$$Y_0(-\infty) = y_0(1)$$

eşleme şartı elde edilir. Buradan ise  $B = 1 - e$  bulunur ki bu (3.3.2.11) denkleminde yerine yazılırsa

$$Y_0(x) = e + (1-e)e^{\eta x} + (1-e - (1-e))e^{\eta x} = e + (1-e)e^{\eta x} \quad (3.3.2.12)$$

sağ tabaka çözümü elde edilir.

### 3.3.3. Birleşik çözümün elde edilmesi (Adım 3)

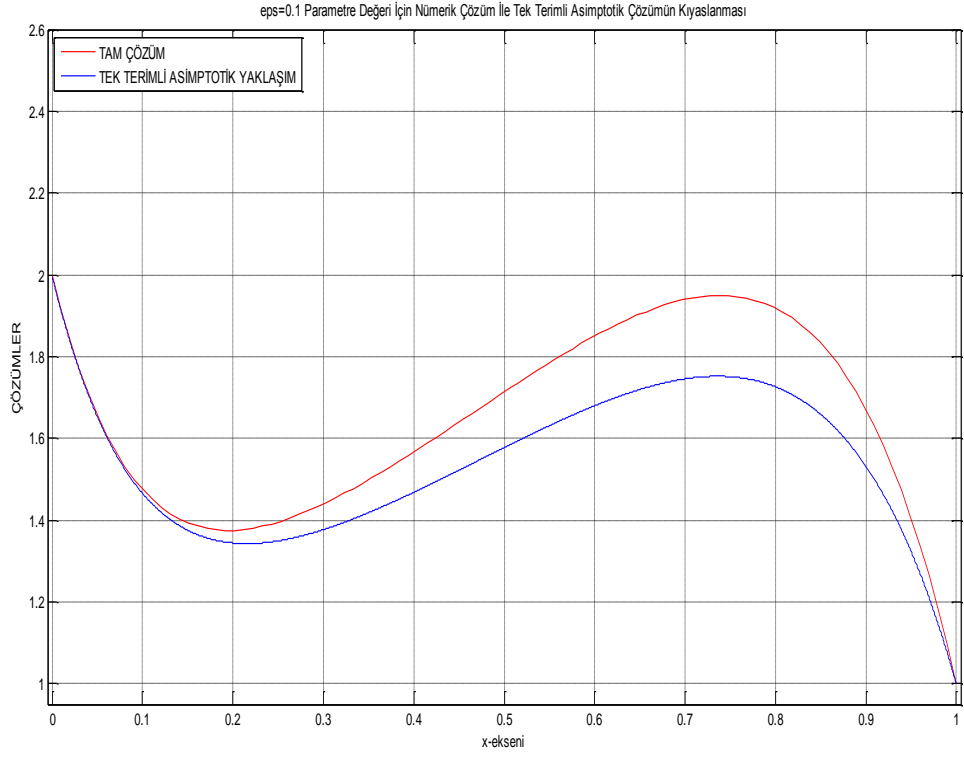
Bu problem için de son adım birleşik açılım (*composite expansion*) bulmaya ayrılmıştır. üç farklı bölge için elde edilmiş olan üç farklı asimptotik çözüm tek bir çözüm altında birleştirilecektir. Yani  $0 < x < 1$  tanım bölgesinin tamamında geçerli olan bir uniform çözüm aranmaktadır. Bu ise tek sınır tabakalı durumdakine benzer olarak

$$y \sim y_0(x) + Y_0(\bar{x}) + Y_0(x) - Y_0(\infty) - Y_0(-\infty) \quad (3.3.3.1)$$

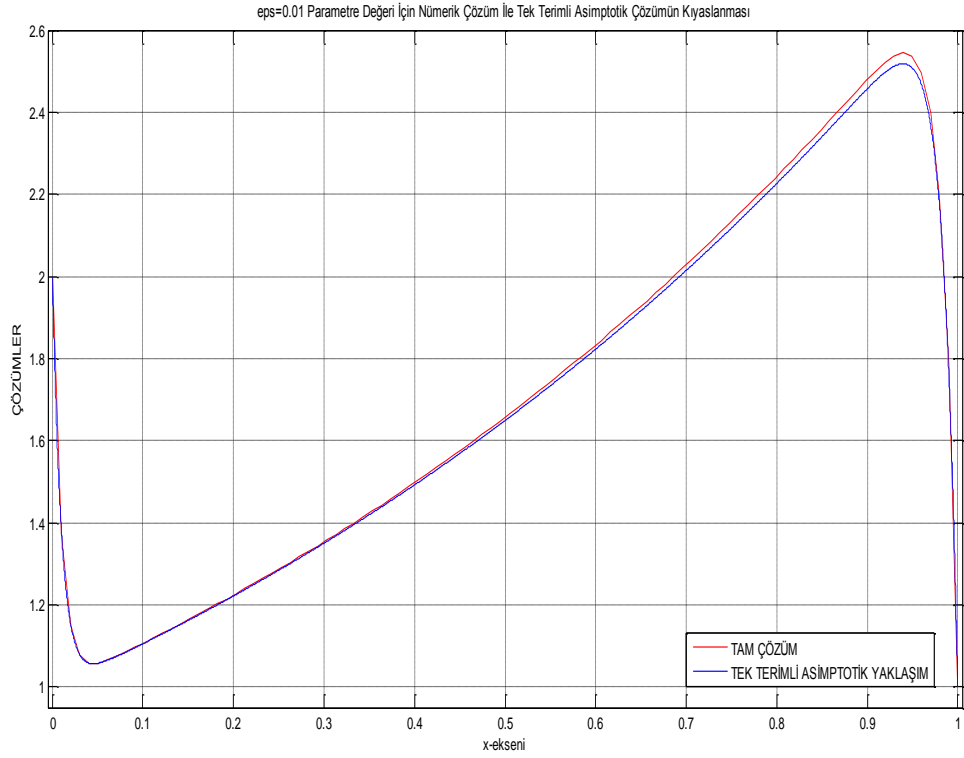
denklemini yardımıyla elde edilecektir. Sonuç olarak

$$y \sim e^x + e^{-\frac{x}{\varepsilon}} + (1-e)e^{\frac{1-x}{\varepsilon} \left[ \frac{1}{2}[-1+\sqrt{5}] \right]} \quad (3.3.3.2)$$

birleşik çözümü elde edilir. Bulunan bu tek terimli birleşik asimptotik çözümün  $\varepsilon$  parametresinin farklı değerleri için nümerik çözümlerle kıyaslanması aşağıdaki grafikler üzerinde verilmiştir. Şekil 3.3.3.2' den de gözlemlendiği üzere  $\varepsilon = 0.01$  için oldukça hassas bir çözüm elde edilmiştir.



Şekil 3.3.3.1. (3.3.1) denkleminin çözümlerini  $\epsilon = 0.1$  değeri için kıyaslayan grafik



Şekil 3.3.3.2. (3.3.1) denkleminin çözümlerini  $\epsilon = 0.01$  değeri için kıyaslayan grafik

### 3.4. Transandantal Olarak Küçük Terimler

Şu ana kadar ele alınmış (nispeten kolay) olan pertürbasyon problemlerine ait bulunan sonuçlarda (ki bunlar asimptotik yaklaşımlar idi) göz ardı edilmiş (*missing*) terimlerin ne oldukları ve ne işlevde oldukları ile ilgili sorular akla gelebilir. Örneğin,

$$\varepsilon y'' + y' = 2, \quad 0 < x < 1, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1 \quad (3.4.1)$$

sınır değer problemi ile ilgilenilsin. Problem  $x = 0$  noktasında sınır tabakaya sahiptir. Dış açılım için alışılmış formdaki

$$y \sim y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \dots \quad (3.4.2)$$

çözüm önerisi benimsensin.  $\varepsilon = 0$  alınarak çözüm yapılır ise

$$y_0'(x) = 2 \Rightarrow y_0(x) = 2x + c_0, \quad c_0 \in \mathbb{R} (y(1) = 1) \Rightarrow y_0(x) = 2x - 1$$

elde edilir. Diğer terimler için  $\varepsilon'$  a göre polinomal eşitlik kullanılır ve denklemler çözülür ise

$$y_1(x) = y_2(x) = y_3(x) = \dots = 0$$

elde edilir. Bunun anlamı ise, dış açılım için (3.4.2) önerisi kullanılarak elde edilebilecek tüm yaklaşımın  $y \sim 2x - 1$  olmasıdır. Ancak  $y = 2x - 1$  tam çözüm değildir. Dolayısıyla (3.4.2) önerisi ile bulunan çözümde eksik bir şeyler vardır. Bu eksiklik  $\varepsilon'$  un kuvvetlerine göre kıyaslandığında transandantal olarak küçük olan terimlerden başka bir şey değildir. Şu ana kadar çözülen örnek problemlerde bu terimler hep göz ardı edildi ancak buna rağmen gayet iyi yaklaşımlar elde edildi. Bazı özel durumlarda ise bu terimlere ihtiyaç duyulabilmektedir. Bu terimlerin işlevini anlamak adına sonraki sayfalarda iki örnek çözülecektir. İlk örnekte transandantal terimlerin asimptotik yaklaşımlarda bulunup bulunmamasının çözümün hassaslığında “olmasa da olur” şeklinde bir etkiye sahip olduğu gözlemlenecektir. İkinci örnekte ise çözümün tamamlanabilmesi için transandantal olarak küçük terimlerden yararlanılacaktır.

*Örnek 3.4.1.* İlk örnek olarak yukarıda dış açılımının ilk terimi bulunmuş olan (3.4.1) problemi ele alınsın. Dış bölge çözümü için doğrudan  $\bar{x} = \frac{x}{\varepsilon}$  şeklindeki sınır tabaka koordinat dönüşümü kullanılır ise

$$\varepsilon \frac{1}{\varepsilon^2} Y''(\bar{x}) + \frac{1}{\varepsilon} Y'(\bar{x}) = 2$$

denkleme ulaşılır ki eşitliğin her iki yanını da  $\varepsilon$  parametresi ile çarpılır ise

$$Y''(\bar{x}) + Y'(\bar{x}) = 2\varepsilon \quad (3.4.3)$$

sabit katsayılı lineer homogen olmayan adi diferansiyel denklemi bulunur. Dış çözüm yaklaşımı olarak

$$Y(\bar{x}) = Y_0(\bar{x}) + \varepsilon Y_1(\bar{x}) + \varepsilon^2 Y_2(\bar{x})$$

çözümü benimsenir ise

$$(Y_0'' + \varepsilon Y_1'' + \varepsilon^2 Y_2'' + \dots) + (Y_0' + \varepsilon Y_1' + \varepsilon^2 Y_2' + \dots) = 2\varepsilon$$

eşitliği bulunur ki bu denklem de  $\varepsilon$ ' un kuvvetlerine göre düzenlenir ise

$$\varepsilon^0 (Y_0'' + Y_0') + \varepsilon^1 (Y_1'' + Y_1') + \varepsilon^2 (Y_2'' + Y_2') + \dots = 2\varepsilon$$

elde edilir. Bu denklemden de

$$\begin{aligned} Y_0'' + Y_0' &= 0, & Y_0(0) &= 0, \\ Y_1'' + Y_1' &= 2, & Y_1(0) &= 0, \\ Y_2'' + Y_2' &= 0, & Y_2(0) &= 0, \\ & \vdots & & \end{aligned}$$

denklemlerine ulaşılır. Bu denklemlerden  $Y_1'' + Y_1' = 2, Y_1(0) = 0$  problemine ait olan denklem haricinde diğerleri homogen denklemler olduğundan çözümleri (karakteristik denklem yardımıyla) gayet kolaydır. Bu nedenle yalnızca  $Y_1'' + Y_1' = 2, Y_1(0) = 0$  probleminin çözümüyle ilgilenilsin. Bunun için homogen olan ve homogen olmayan

kısımlara ait çözümler ayrı ayrı bulunup toplanacaktır. Homogen kısmın çözümü için karakteristik denklem yazılır ise

$$r^2 + r = 0 \Rightarrow r(r+1) = 0 \Rightarrow r_1 = 0, r_2 = -1$$

elde edilir ki buradan da  $S, T \in \mathbb{R}$  sabitler olmak üzere

$$Y_{\text{homogen}}(\bar{x}) = S + Te^{-\bar{x}}$$

çözümü elde edilir. Homogen olmayan kısım için ise belirsiz katsayılar metodu kullanılır ise  $D \in \mathbb{R}$  olmak üzere

$$Y_{\text{özel}}(\bar{x}) = D\bar{x}$$

çözüm önerisi yardımıyla  $D = 2$  elde edilir. Dolayısıyla özel çözüm

$$Y_{\text{özel}}(\bar{x}) = 2\bar{x}$$

şeklinde bulunur. Böylece

$$Y_1(\bar{x}) = Y_{\text{homogen}} + Y_{\text{özel}} = S + Te^{-\bar{x}} + 2\bar{x}$$

genel çözümü elde edilir.  $Y_1(0) = 0$  şartının uygulanmasıyla da  $T = -S$  bulunur ki bu da

$$Y_1(\bar{x}) = 2\bar{x} + S(1 - e^{-\bar{x}})$$

olmasına neden olur. Böylece dış çözüm

$$Y(\bar{x}) = A_0(1 - e^{-\bar{x}}) + \varepsilon \left[ 2\bar{x} + A_1(1 - e^{-\bar{x}}) \right] + \varepsilon^2 A_2(1 - e^{-\bar{x}}) + \dots$$

şeklinde bulunur.

Dış çözümde yer alan denklemlerin katsayılarının belirli bir düzende bulunması adına  $S$  katsayısı  $A_1$  olarak alındı. Görüldüğü üzere bu yaklaşım  $x=0$  için sınır şartını sağlamaktadır.

İç ve dış yaklaşımlar elde edildi. Şimdi ise dış açılımda göz ardı edilen (*missing*) terimlerle ilgilenilecektir.

Bu terimleri belirlemek için

$$y \sim y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \dots + z_0(x, \varepsilon) + z_1(x, \varepsilon) + \dots \quad (3.4.4)$$

yaklaşımı ele alınsın. Burada  $z_i$  fonksiyonları iyi sıralı ve kuvvet fonksiyonlarına göre transandantal olarak küçük fonksiyonlardır. Yani  $\forall i, j$  için  $i < j$  iken  $z_j \ll z_i$  ve  $\forall i, n$  için  $z_i \ll \varepsilon^n$  dir. Ancak  $z_i(x, \varepsilon)$  fonksiyonlarında  $\varepsilon$  parametresinin ne şekilde bulunduğu hakkında herhangi bir ipucu şu an için bulunmamaktadır. Bilinen şudur ki (3.4.4) yaklaşımı dış açılıma ait olduğundan  $0 < x \leq 1$  için  $x$  sabit tutulup  $\varepsilon \rightarrow 0$  için limite geçildiğinde dış açılımı sağlamalıdır. (3.4.4) yaklaşımı (3.4.1) denklemine uygulanır ise

$$\varepsilon(y_0'' + \varepsilon y_1'' + \dots + z_0'' + z_1'' + \dots) + (y_0' + \varepsilon y_1' + \dots + z_0' + z_1' + \dots) = 2$$

elde edilir. Bu denklem yardımı ile  $y_i$  ve  $z_i$  fonksiyonları için eşitlikler elde edilecektir. Ancak  $y_i$  fonksiyonları için daha önce elde edilmiş olan denklemler geçerliliğini korumaktadır. Çünkü  $z_i$  fonksiyonları aynı zamanda  $\varepsilon$  parametresinin fonksiyonudur ve  $y_i$  fonksiyonları için daha önce elde edilmiş denklemlerin kabul edilmesi  $z_i$  fonksiyonlarının bu duruma uygun değer almasına neden olacaktır. Yani yine  $y_0(x) = 2x - 1$  ve  $y_1(x) = y_2(x) = y_3(x) = \dots = 0$  dir. Şimdi ise yalnızca  $z_0$  fonksiyonu ile ilgilenilecektir.  $z_0$  fonksiyonunun  $\varepsilon$  parametresine ne şekilde bağlı olduğu tarafımızca belirleneceğinden

$$\varepsilon z_0'' + z_0' = 0, \quad z_0(0, \varepsilon) = 0$$

denklemini yazılabilir. Buradan ise

$$z_0(x, \varepsilon) = \mu(\varepsilon) \left( e^{\frac{-x}{\varepsilon}} - e^{\frac{1}{\varepsilon}} \right) \quad (3.4.5)$$

çözümüne ulaşılır.  $z_0$  fonksiyonunu tam olarak belirleyebilmek (yani  $\mu(\varepsilon)$  fonksiyonunu bulmak) için ara eşleme (*intermediate matching*) kuralından yararlanılacaktır. Bunun için iç ve dış yaklaşım fonksiyonları ortak tanım aralığında

tanımlı olan ara değişken cinsinden yazılacaktır. Yani  $x_\eta = \frac{x}{\varepsilon^\beta}$ ,  $0 < \beta < 1$  ara değişkeninden yararlanılacaktır. Böylece

$$y_{dış} \sim -1 + 2x_\eta \varepsilon^\beta + \dots + \mu(\varepsilon) \left( e^{\frac{-x}{\varepsilon}} - e^{\frac{1}{\varepsilon}} \right) \quad (3.4.6)$$

ve

$$y_{iç} \sim A_0 \left( 1 - e^{-x_\eta \varepsilon^{\beta-1}} \right) + \varepsilon \left[ 2x_\eta \varepsilon^{\beta-1} + A_1 \left( 1 - e^{-x_\eta \varepsilon^{\beta-1}} \right) \right] + \dots \quad (3.4.7)$$

denklemleri elde edilir. Artık iç ve dış çözüm yaklaşımları eşleme ara eşleme işlemine hazır durumdadırlar. Eşleme işlemi yardımıyla  $A_0 = -1$  ve  $\mu(\varepsilon) = 1$  bulunur. Böylece

$$z_0(x, \varepsilon) = \left( e^{\frac{-x}{\varepsilon}} - e^{\frac{1}{\varepsilon}} \right) \quad (3.4.8)$$

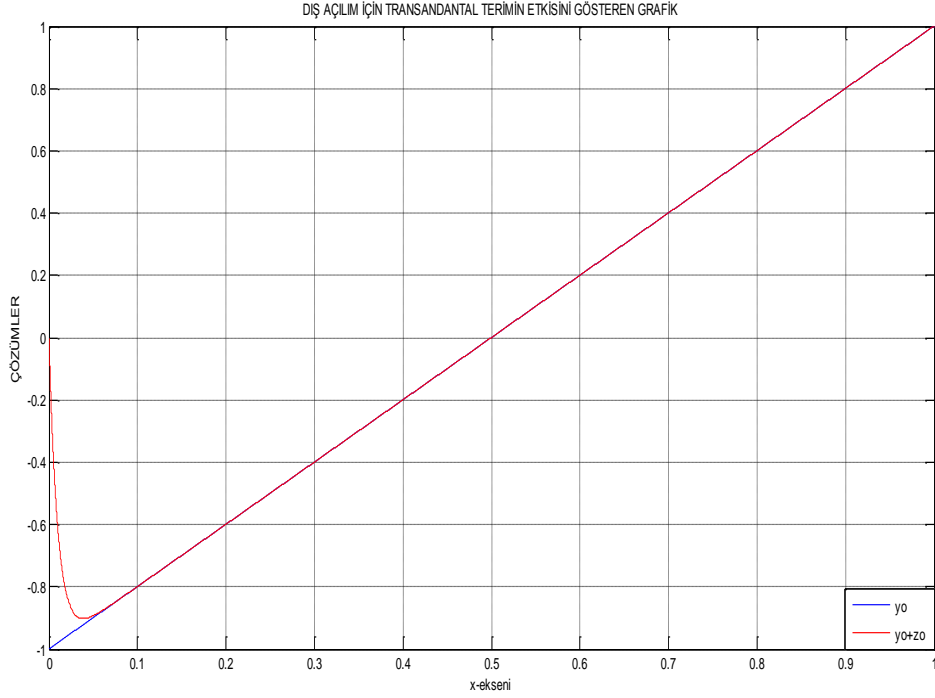
elde edilir. (3.4.8) teriminin  $0 < x \leq 1$  özelliğini taşıyan  $x$  değerleri için  $\varepsilon$ ' un kuvvetlerine göre transandantal olarak küçük olduğunu göstermek zor değildir. Sonuç olarak

$$y \sim 2x - 1 + \dots + e^{\frac{-x}{\varepsilon}} - e^{\frac{1}{\varepsilon}} + \dots \quad (3.4.9)$$

dış açılımı elde edilir. Örneğin  $x = 0.85$  ve  $\varepsilon = 0.01$  seçilsin. Bu durumda  $y_0 = 0.7$  iken  $z_0 \approx 1.2161 \times 10^{-37}$  bulunur. İşte bu ve bundan önceki örneklerde dış açılım için bu terimlerin göz ardı edilmesinin nedenidir. Aşağıda verilen grafik,  $x=0$  noktasındaki sınır tabakadan uzak yerlerde (dış açılımın geçerli olduğu bölgede)  $z_0$  teriminin ne kadar küçük etkiye sahip olduğunu görsel olarak göstermektedir.

Hemen belirtmelidir ki (3.4.4) ile transandantal olarak küçük olan terimleri bulmaya yönelik benimsenen yaklaşım daha farklı formlarda da olabilmektedir. İlgilenilen problemin doğasına göre farklı formlardaki yaklaşımlar benimsenebilir.





Şekil 3.4.1. *Örnek 3.4.1.*' de dış açılıma ait transandantal olarak küçük terimlerin etkisi

*Örnek 3.4.2.*  $\varepsilon y'' - xy' + \varepsilon xy = 0$ ,  $-1 < x < 1$ ,  $y(-1) = y_{sol}$ ,  $y(1) = y_{sağ}$  problemi ile ilgilenilsin. Her iki sınırda da tabaka mevcuttur. Buradaki  $y_{sol}$  ve  $y_{sağ}$  sınır değerleri daha sonra özel olarak sırayla 2 ve  $-2$  seçilip durum incelenecektir. Dış açılım için

$$y \sim y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2$$

şeklindeki yaklaşım benimsenir ise  $y_0 = c, c \in \mathbb{R}$  elde edilir. Yani dış açılıma ait ilk terim yalnızca bir reel sabittir.  $x = -1$  için sınır tabaka çözümü ele alınsın.  $\bar{x} = \frac{x+1}{\varepsilon}$  koordinat dönüşümünün uygulanması ile

$$Y_0'' + Y_0' = 0$$

denklemini elde edilir. Buradan da sol sınır koşulunun da uygulanması ile sol tabaka açılımının ilk terimi olarak

$$Y_0(\bar{x}) = c + (y_{sol} - c)e^{-\bar{x}}$$

elde edilir. Benzer biçimde sağ sınır tabakası için  $x = \frac{x-1}{\varepsilon}$  koordinat dönüşümü uygulanır ve ilgili sınır koşulu uygulanır ise

$$Y_0 = c + (y_{sağ} - c)e^x$$

elde edilir. Bulunan bu çözümlerin tek bir fonksiyon ile ifadesi

$$y \sim \begin{cases} c + (y_{sol} - c)e^{-x}, & x = -1 \text{ sınır} \\ c \\ c + (y_{sağ} - c)e^x, \end{cases}$$

şeklinde elde edilir. Ancak burada eşleme prensibi kullanılsa dahi bilinmeyen c sabiti varlığını sürdürecektir. Bu alışılmış bir durum değildir. Bu sorunu çözme prosedürü problemden probleme farklılık göstermektedir. Bazı problemler için 2. terimlerin bulunması bu sorunu çözmek için yeterli iken bazı lineer problemler içinse WKB (Wentzel-Kramers-Brillouin) metodu adı verilen yaklaşım uygulanabilir. Sorunun çözümü için dış bölgede transandantal olarak küçük terimlerin bulunması işlemi diğer yöntemlere göre oldukça zahmetli olmasına rağmen açıkça gözlenen avantajlara sahiptir. Çünkü lineer ve lineer olmayan çok çeşitli problemlere uygulanabilir. Yukarıdaki problemde uygulanan işlemler benzer olarak uygulanırsa

$$\varepsilon(y_0'' + \dots + z_0'' + \dots) + x(y_0' + \dots + z_0' + \dots) + \varepsilon x(y_0 + \dots + z_0 + \dots) = 0$$

elde edilir. Tıpkı önceki örnekteki gibi sadece  $z_0$ 'ı içeren denkleme ilgilendirilirse

$$\varepsilon z_0'' - x z_0' + \varepsilon x z_0 = 0$$

denkleme ulaşılır.

## 4. BÖLÜM

### ARDIŞIK TAMAMLAYICI AÇILIMLAR METODU

*Successive Complementary Expansion Method* (SCEM) adı ile anılan bu metot, J. Cousteix ve J. Mauss' un [1] kitabında tanıtılmış ve bu çalışmanın üçüncü bölümünde detaylıca incelenmiş olan Eşleştirilmiş Açılımlar Metodu (MMAE)' ye alternatif olarak ortaya çıkmıştır. Aşağıda, Ardışık Tamamlayıcı Açılımlar Metodu' nun özellikleri incelenecek olup temel anlamda Eşleştirilmiş Açılımlar Metodu' nun işleyişinin tersini benimsemiş olan bir metot olduğu söylenebilir. Yani öncelikle *uniform olarak geçerli* olan bir çözüm anlayışı benimsenir ve daha sonra sınır koşulları ile ilgilenilir. Regüler ve genel olmak üzere iki farklı SCEM yaklaşımı mevcuttur. Bu yaklaşımlar,  $\delta_i$  ler asimptotik diziler,  $\psi_i$  ler tamamlayıcı fonksiyonlar ve  $\varphi_i$  ler MMAE ile bulunmuş olan dış çözümler olmak üzere

$$\phi_{ar}(x, \bar{x}, \varepsilon) = \sum_{i=1}^n \delta_i(\varepsilon) \left[ \varphi_i(x) + \psi_i(\bar{x}) \right] \quad (4.1)$$

ve

$$\phi_a(x, \bar{x}, \varepsilon) = \sum_{i=1}^n \bar{\delta}_i(\varepsilon) \left[ \bar{\varphi}_i(x, \varepsilon) + \bar{\psi}_i(\bar{x}, \varepsilon) \right] \quad (4.2)$$

formundadır.

Metodu daha anlaşılabilir hale getirmek adına özel olarak ikinci mertebe sabit katsayılı singüler pertürbasyon problemlerinin en genel hali ile ilgilenilsin.  $f$  sürekli bir fonksiyon,  $0 < \varepsilon \ll 1$  ;  $a \neq 0$ ,  $b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  olmak üzere

$$\varepsilon y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (4.3)$$

$$y(0) = \alpha \quad (4.4)$$

ve

$$y(1) = \beta \quad (4.5)$$

sınır tabaka problemi için

$$y(x, \varepsilon) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \dots \quad (4.6)$$

basit açılımı önerilirse indirgenmiş dış açılım denklemini olan

$$y_0'(x) + \frac{b}{a} y_0(x) = f(x) \quad (4.7)$$

elde edilir ki çözümü elde etmek integrasyon çarpanı yardımıyla oldukça kolaydır. Ancak iki sınır şartı mevcut olup (4.4) ve (4.5) sınır şartlarının aynı anda sağlanması özel durumlar haricinde mümkün değildir. Dolayısıyla problemin tanım aralığında ani değişimlerin yaşandığı (daha önceki bölümlerde iç (inner) bölge olarak adlandırılmış olan) bir bölge mevcuttur. Bu bölge  $\Omega_\varepsilon$  ile gösterilsin ve ani değişimin yaşandığı bölge  $x_0 \in [0,1]$  olsun. İç bölge için çözüm elde edebilmek adına sınır bölgesi değişken değişimi uygulanmalıdır. Bu değişken

$$\bar{x} = \frac{x - x_0}{\delta(\varepsilon)} \quad (4.8)$$

formundadır. Dolayısıyla  $y(x, \varepsilon) = Y(\bar{x}, \varepsilon)$  çözümü aranır ve (4.1) problemi

$$\varepsilon \frac{d^2 Y}{d\bar{x}^2} + \delta(\varepsilon) a \frac{dY}{d\bar{x}} + O(\delta^2) = \bar{f}(\bar{x}) \quad (4.9)$$

problemine dönüşür. Özel olarak (probleme göre değişkenlik gösterebilir)  $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$  alınır ve

$$y(x, \varepsilon) = Y_0(\bar{x}) + \varepsilon Y_1(\bar{x}) + \dots \quad (4.10)$$

çözümü önerilirse

$$\frac{d^2 Y_0}{d\bar{x}^2} + a \frac{dY_0}{d\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}) \quad (4.11)$$

iç açılım denklemini elde edilir. (4.7) ve (4.11) denklemleri matematik lisans bilgileri ile kolayca çözülebilen denklemlerdir ve çözümde oluşan sabitler eşleştirme metodu yardımıyla belirlenebilir. Ancak daha önceki bölümde detaylı bir şekilde incelenen bu eşleme problemine değinmeden SCEM yardımıyla tüm tanım kümesi üzerinde

uniform olarak geçerli olan bir çözüm elde edilecektir. Buna geçmeden önce farklı durumlar için sınır tabakanın lokasyonu ile ilgili birkaç incelemede bulunulsun:

- Durum 1: Eğer  $a > 0$  ise sınır tabaka  $x = 0$  noktası civarlarında oluşacaktır.
- Durum 2: Eğer  $a < 0$  ise sınır tabaka  $x = 1$  noktası civarlarında oluşacaktır.
- Durum 3: Eğer  $x < x_0$  için  $a > 0$  ve  $x > x_0$  için  $a < 0$  ise tanım aralığının uç noktalarında oluşan iki sınır tabaka mevcuttur.
- Durum 4: Eğer  $x < x_0$  için  $a < 0$  ve  $x > x_0$  için  $a > 0$  ise tanım aralığının herhangi bir noktası olan  $x = x_0$  noktası civarlarında sınır tabaka mevcuttur.

Bu genel bilgilerden sonra tek terimli SCEM yaklaşımı ile ilgilenilirse (4.2) denklemini yardımıyla bu açılımın

$$y_0^{scem}(x, \bar{x}, \varepsilon) = y_0(x) + \bar{Y}_0(\bar{x}, \varepsilon) \quad (4.12)$$

formatında olacağı açıktır. SCEM' in üzerine kurulu olduğu mantık (4.12) denkleminin sınır şartlarını sağlaması gerektirir.

*Örnek 4.1.* Eşleştirilmiş Açılımlar Metodu bölümünde incelenmiş olan (3.2.1) denkleminin SCEM ile çözümü doğrudan tam (exact) çözümü vermiştir.

*Örnek 4.2.* Akışkanlar dinamiğinde az akışkanlığa sahip sıvılar için bir modelleme olan singüler pertürbasyon problemi

$$\varepsilon y'' + y' = 1 + 2x, \quad 0 \leq x < 1, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1 \quad (4.13)$$

ile ilgilenilsin. Bu problem  $x = 0$  noktası civarlarında ani değişimlere sahiptir. Tam çözümü bilinen bir problem olan (4.13) için MMAE ve SCEM aşağıdaki gibidir.

$$y_{tam}(x) = x^2 + (1 - 2\varepsilon)x + \frac{2\varepsilon - 1}{1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}} \left( 1 - e^{-\frac{x}{\varepsilon}} \right) \quad (4.14)$$

$$y_{mmae}(x) \approx x^2 + x - 1 + e^{-\frac{x}{\varepsilon}} \quad (4.15)$$

$$y_{scem}(x) \approx x^2 + x - 1 + \frac{2\varepsilon - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}{1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}} + \left( \frac{1 - 2\varepsilon}{1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}} \right) e^{-\frac{x}{\varepsilon}} - 2\varepsilon x \quad (4.16)$$

Örnek 4.3. Aşağıda verilmiş olan

$$\varepsilon y''(x) - y'(x) = 0, \quad x \in [0, 1], \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 0 \quad (4.17)$$

problemi ile ilgilenilsin. Problemin çözümü  $x = 1$  noktası yakınlarında ani değişimler göstermektedir. Bu noktada sınır tabaka mevcuttur ve probleme ait çözümler aşağıdaki gibi bulunmuştur.

$$y_{iam}(x) = \frac{e^{\frac{x-1}{\varepsilon}} - 1}{e^{-\frac{1}{\varepsilon}} - 1} \quad (4.18)$$

$$y_{mmae}(x) \approx 1 - e^{-\frac{x-1}{\varepsilon}} \quad (4.19)$$

$$y_{scem}(x) \approx \frac{e^{\frac{x}{\varepsilon}} - e^{\frac{1}{\varepsilon}}}{1 - e^{\frac{1}{\varepsilon}}} \quad (4.20)$$

Aşağıda verilen tablo ve grafiklerde bulunan bu sonuçlar kıyaslanmıştır.

Tablo 4.1. (4.13) probleminin  $\varepsilon = 0.1$  için mutlak hatalarını veren tablo

x	MMAE results	SCEM results	Abs.Err.MMAE	Abs.Err.SCEM
0.0	0.0000000000	1.1102 x 10 <sup>-16</sup>	0.0000000000	1.110 x 10 <sup>-16</sup>
0.1	-0.5221205588	-0.4157194066	0.1064011521	5.551 x 10 <sup>-17</sup>
0.2	-0.6246647167	-0.4917631794	0.1329015373	0.0000000000
0.3	-0.5602129316	-0.4302048585	0.1300080730	5.551 x 10 <sup>-17</sup>
0.4	-0.4216843611	-0.3053831452	0.1163012158	5.551 x 10 <sup>-17</sup>
0.5	-0.2432620530	-0.1446457192	0.0986163337	2.775 x 10 <sup>-17</sup>
0.6	-0.0375212478	0.0419467701	0.0794680180	0.0000000000
0.7	0.1909118819	0.2506932171	0.0597813351	2.220 x 10 <sup>-16</sup>
0.8	0.4403354626	0.4802320606	0.0398965980	5.551 x 10 <sup>-17</sup>
0.9	0.7101234098	0.7300624107	0.0199390009	3.330 x 10 <sup>-16</sup>
1.0	1.0000453999	1.0000000000	0.0000453999	0.0000000000

Tablo 4.2. (4.13) probleminin  $\varepsilon = 0.01$  için mutlak hatalarını veren tablo

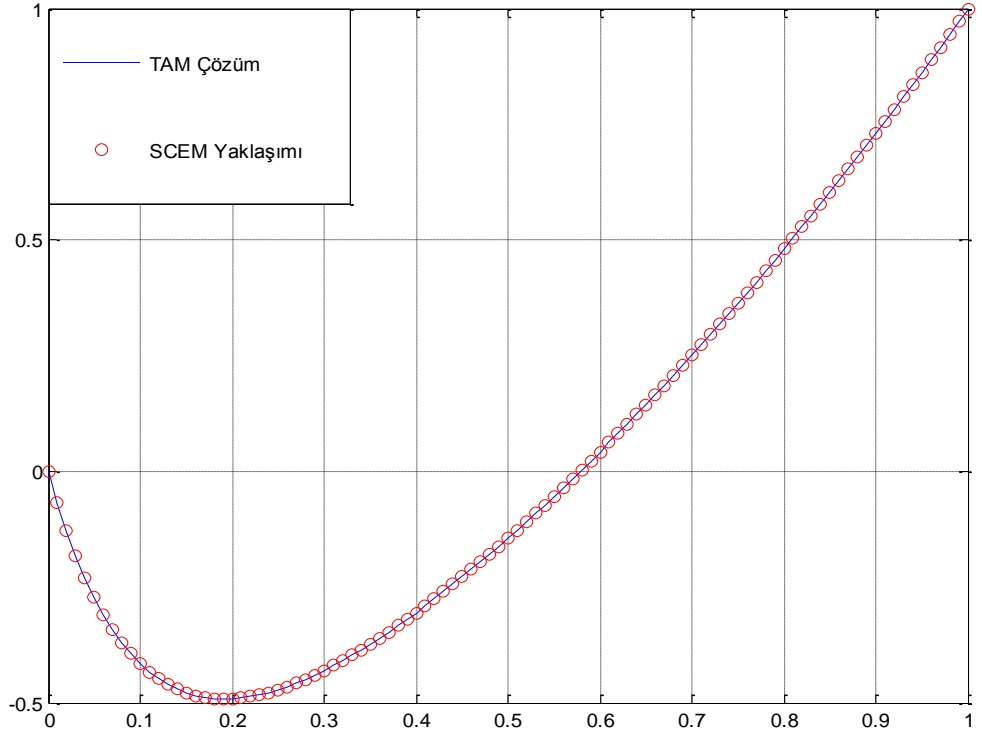
x	MMAE results	SCEM results	Abs.Err.MMAE	Abs.Err.SCEM
0.0	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.000000000
0.1	-0.889954666	-0.87195555	0.017999000	0.000000000
0.2	-0.759999999	-0.74399999	0.015999999	0.000000000
0.3	-0.609999999	-0.59599999	0.013999999	0.000000000
0.4	-0.440000000	-0.42800000	0.012000000	0.000000000
0.5	-0.250000000	-0.24000000	0.010000000	$2.775 \times 10^{-17}$
0.6	-0.040000000	-0.03200000	0.008000000	0.000000000
0.7	0.190000000	0.19600000	0.006000000	$2.775 \times 10^{-17}$
0.8	0.440000000	0.44400000	0.004000000	0.000000000
0.9	0.710000000	0.71200000	0.002000000	$2.220 \times 10^{-16}$
1.0	1.000000000	1.00000000	0.000000000	0.000000000

Tablo 4.3. (4.17) probleminin  $\varepsilon = 0.1$  için mutlak hatalarını veren tablo

x	MMAE results	SCEM results	Abs.Err.MMAE	Abs.Err.SCEM
0.0	0.999954600070238	1.000000000000000	0.00004539992	0.00000000000
0.1	0.999876590195913	0.999921986583872	0.00004539638	$1.11102 \times 10^{-16}$
0.2	0.999664537372097	0.999709924132436	0.00004538676	0.00000000000
0.3	0.999088118034446	0.999133478624198	0.00004536058	0.00000000000
0.4	0.997521247823334	0.997566537274059	0.00004528945	0.00000000000
0.5	0.993262053000915	0.993307149075715	0.00004509607	0.00000000000
0.6	0.981684361111266	0.981728931535803	0.00004457042	$1.11102 \times 10^{-16}$
0.7	0.950212931632136	0.950256073191115	0.00004314155	$1.11102 \times 10^{-16}$
0.8	0.864664716763387	0.864703974263084	0.00003925749	$1.11102 \times 10^{-16}$
0.9	0.632120558828558	0.632149258360487	0.00002869953	0.00000000000
1.0	0.000000000000000	0.000000000000000	0.00000000000	0.00000000000

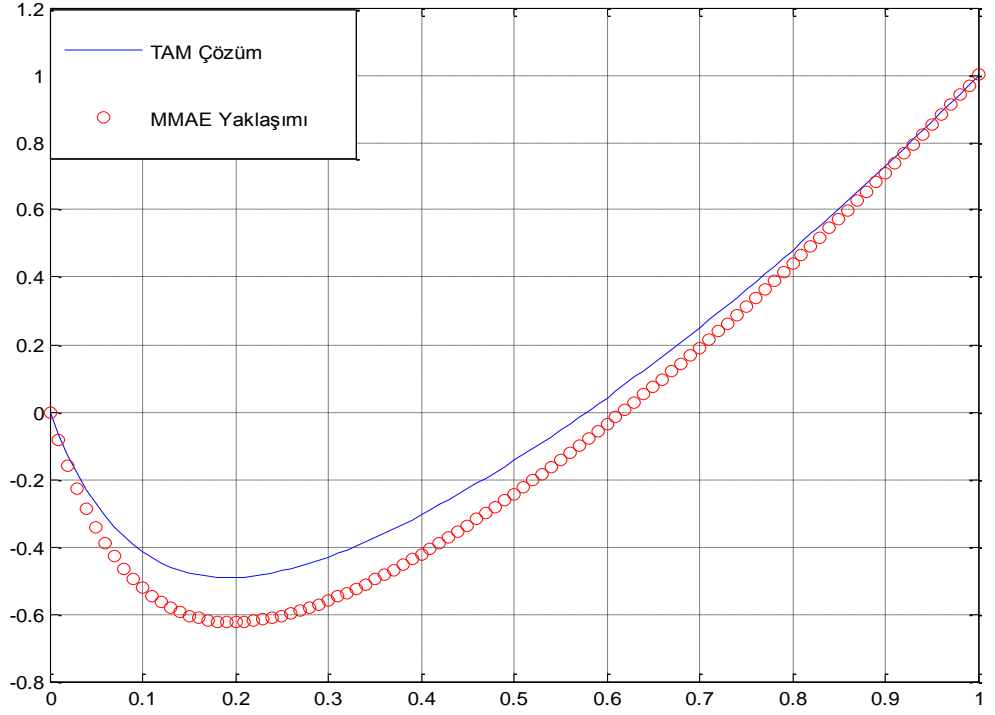
Tablo 4.4. (4.17) probleminin  $\varepsilon = 0.01$  için mutlak hatalarını veren tablo

x	MMAE results	SCEM results	Abs.Err.MMAE	Abs.Err.SCEM
0.0	1.0000000000000000	1.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
0.1	1.0000000000000000	1.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
0.2	1.0000000000000000	1.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
0.3	1.0000000000000000	1.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
0.4	1.0000000000000000	1.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
0.5	1.0000000000000000	1.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
0.6	1.0000000000000000	1.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
0.7	0.9999999999999906	0.9999999999999906	0.0000000000000000	0.0000000000000000
0.8	0.999999997938846	0.999999997938846	0.0000000000000000	$1.11102 \times 10^{-16}$
0.9	0.999954600070238	0.999954600070237	0.0000000000000000	$1.11102 \times 10^{-16}$
1.0	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000

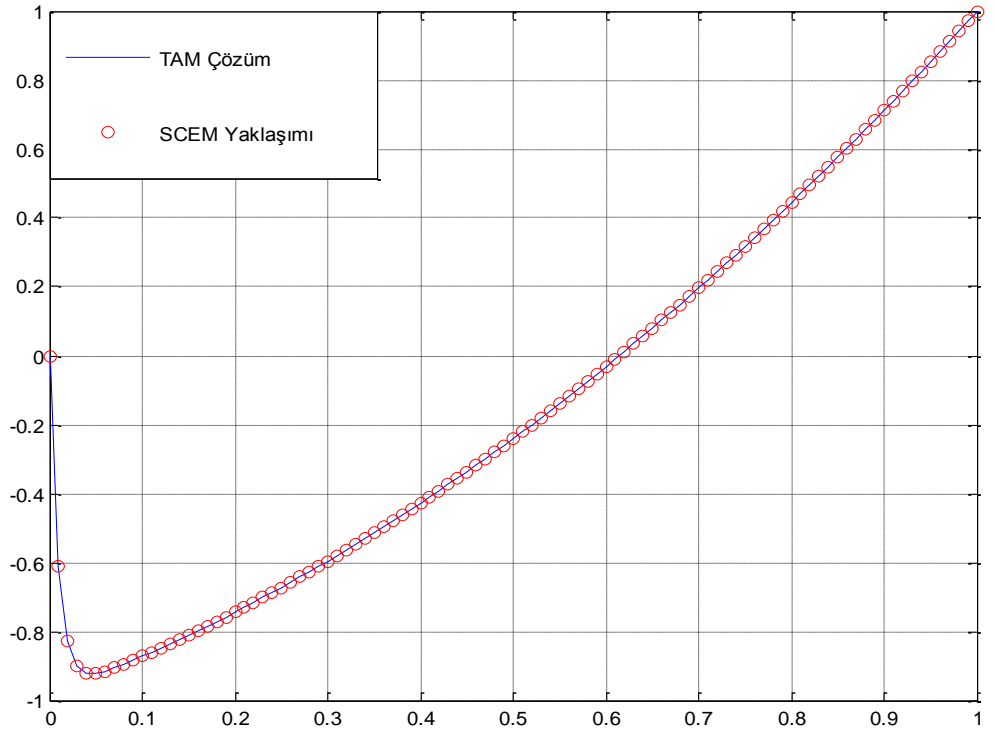


Şekil 4.1. (4.13) probleminin  $\varepsilon = 0.1$  için SCEM ve tam çözümünü kıyaslayan grafik

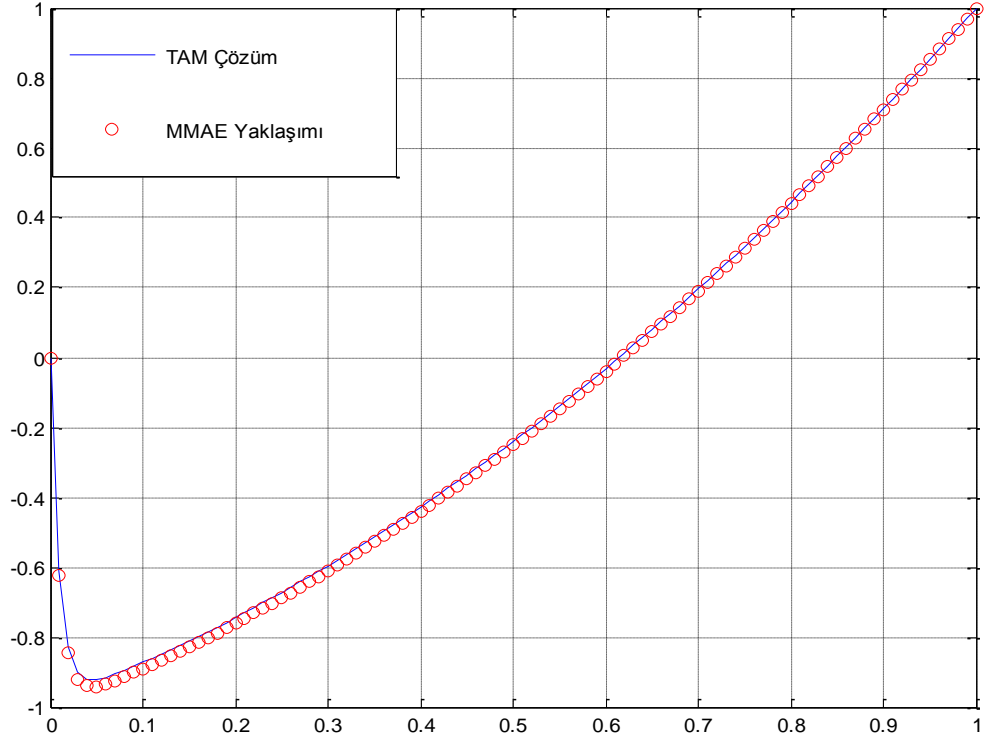




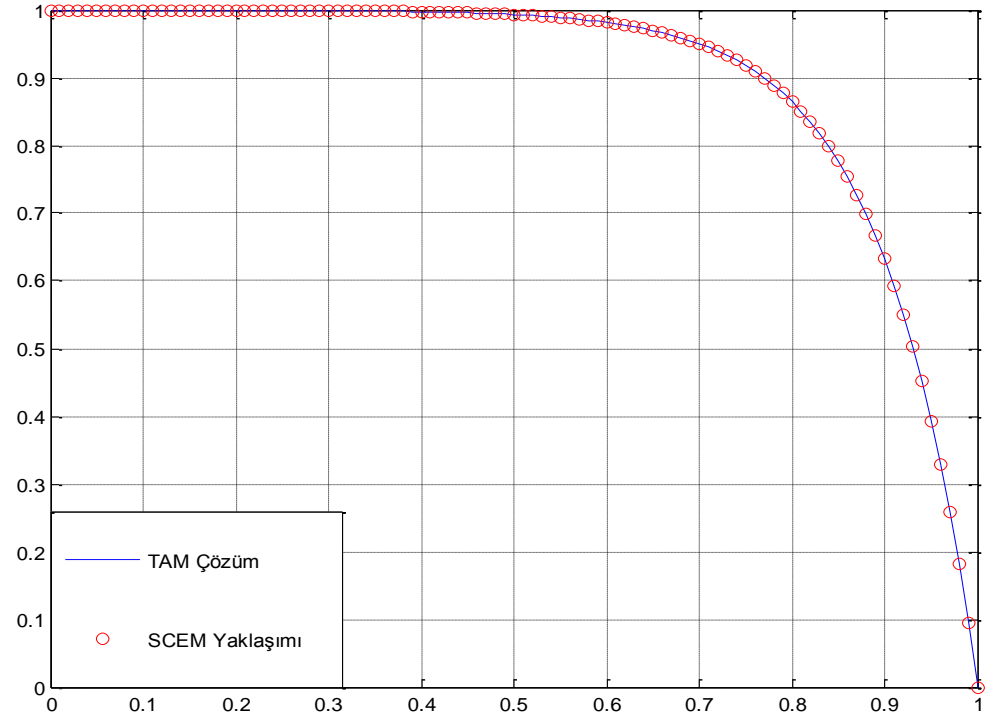
Şekil 4.2. (4.13) probleminin  $\varepsilon = 0.1$  için MMAE ve tam çözümünü kıyaslayan grafik



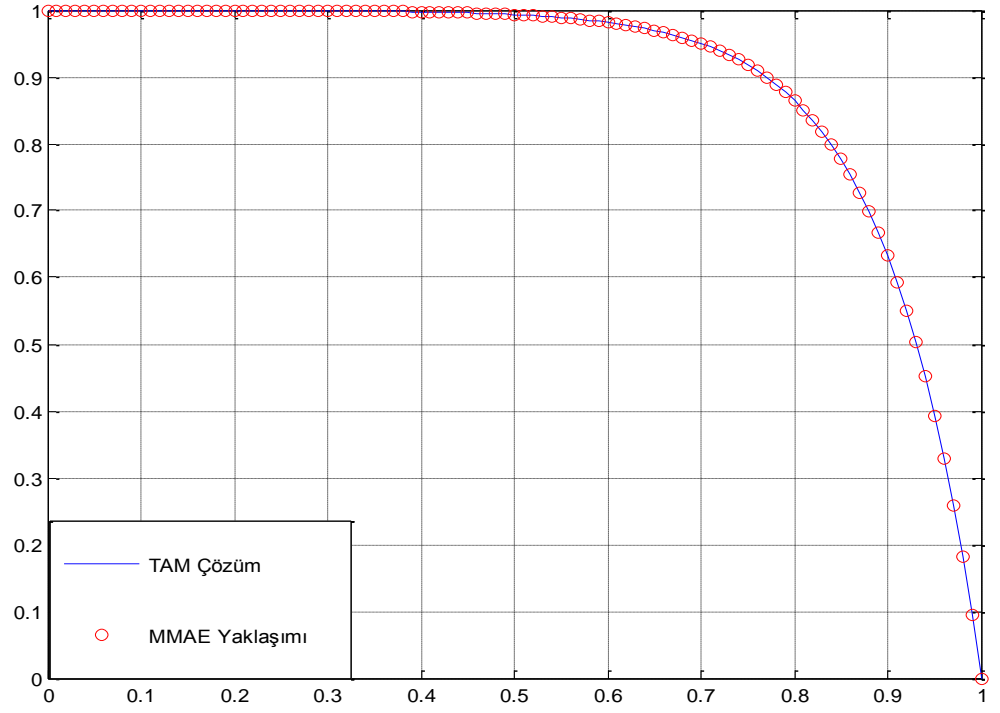
Şekil 4.3. (4.13) probleminin  $\varepsilon = 0.01$  için SCEM ve tam çözümünü kıyaslayan grafik



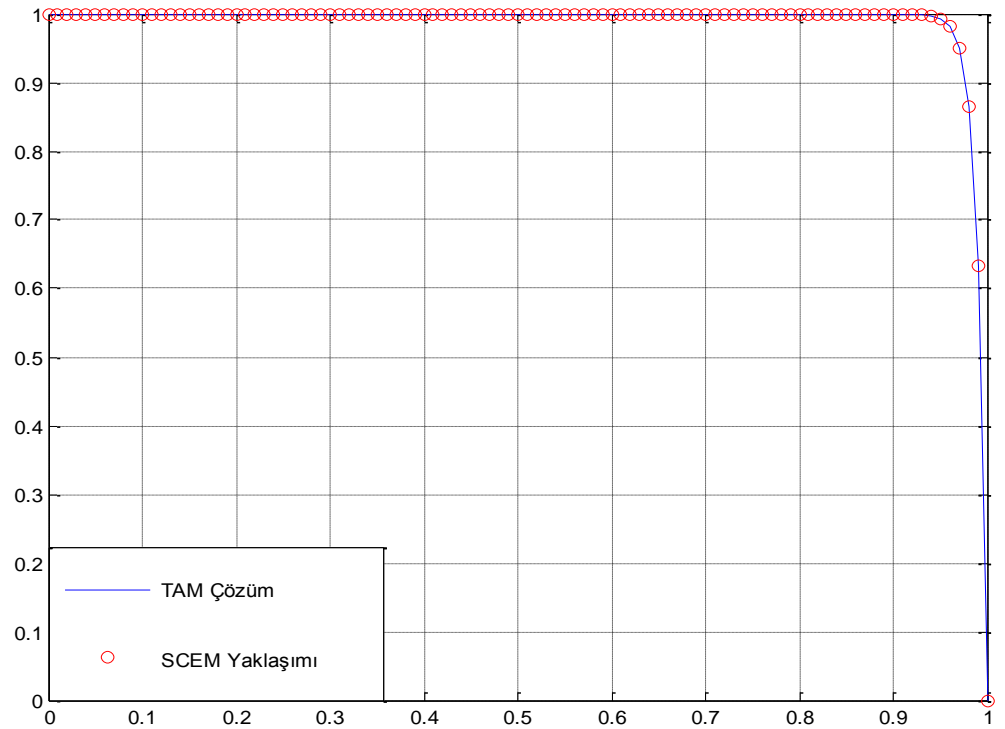
Şekil 4.4. (4.13) probleminin  $\varepsilon = 0.01$  için MMAE ve tam çözümünü kıyaslayan grafik



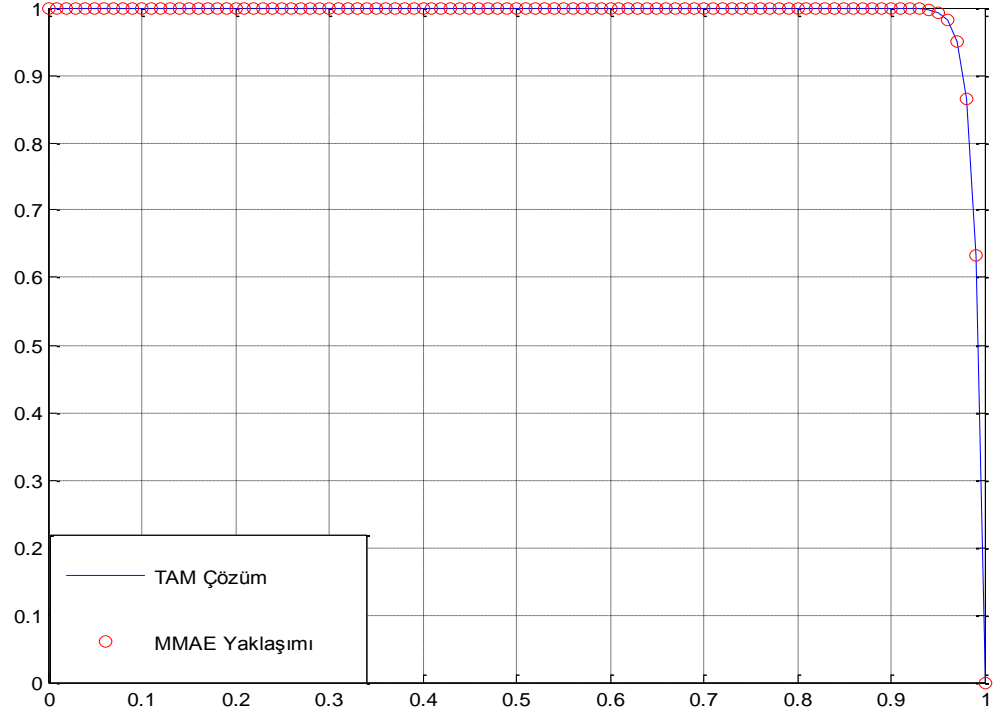
Şekil 4.5. (4.17) probleminin  $\varepsilon = 0.1$  için SCEM ve tam çözümünü kıyaslayan grafik



Şekil 4.6. (4.17) probleminin  $\varepsilon = 0.1$  için MMAE ve tam çözümünü kıyaslayan grafik



Şekil 4.7. (4.17) probleminin  $\varepsilon = 0.01$  için SCEM ve tam çözümünü kıyaslayan grafik



Şekil 4.8. (4.17) probleminin  $\varepsilon = 0.01$  için MMAE ve tam çözümünü kıyaslayan grafik

## 5. BÖLÜM

### TARTIŞMA, SONUÇ, ÖNERİLER

“*Singüler Pertürbasyon Problemlerinin Asimptotik Analizi*” isimli bu çalışmada geniş bir kaynak taraması yapılarak pertürbasyon problemleri incelenmiştir. Konunun daha anlaşılır olması amacıyla pertürbasyon problemleri öncelikle regüler formda incelenmiş ve bu ön bilgilerden sonra singüler pertürbasyon problemlerine geçilmiştir. Ayrıca tezin konusu ve amacı dışına çıkılmadan problemlere ait fiziksel anlamalara da değinilmiştir.

Bu çalışmada yer alan singüler pertürbasyon problemlerinin çözümünde genel olarak *Eşleştirilmiş Asimptotik Açılımlar Metodu* (The Method of Matched Asymptotic Expansions) adı verilen, uygulamalı matematik ve uygulamalı fiziğin temellerinden biri olarak kabul edilen metot kullanılmıştır. Bu metot dışında “*Ara Eşleştirme Metodu*” ve “*WKB Metodu*” olarak adlandırılan metotlara da değinilmiştir. Genel olarak lineer ve analitik çözüme sahip olan problemler incelenmiş, böylelikle *MATLAB R2012a* programının da yardımıyla bulunan sonuçlar grafiksel olarak kolaylıkla kıyaslanmıştır. Bu kıyaslamalardan da anlaşılacağı üzere tek terimli asimptotik açılımlarda bile oldukça iyi sonuçlar elde edilmiştir. Son olarak SCEM olarak adlandırılan *Ardışık Tamamlayıcı Açılımlar Metodu* incelenmiş ve bulunan sonuçlar MMAE ile kıyaslandığında daha iyi yaklaşımlar elde edildiği görülmüştür.

## KAYNAKLAR

1. Cousteix, J., Mauss J., “Asymptotic Analysis and Boundary Layers”, Scientific Computation Series, *Springer*, 2007.
2. Cousteix, J., Mauss J., “Approximations of the Navier-Stokes equations for high Reynolds number flows past a solid wall”, *Jour. Comp. and Appl. Math.* 166 (1):101-122, 2004.
3. Cousteix, J., Mauss J., “Uniformly valid approximation for singular perturbation problems and matching principle”, *C. R. Mecanique* 330, 697-702., 2002.
4. Van Dyke, M., “Perturbation Methods in Fluid Mechanics”, *Academic Press*, New York, 1964.
5. Geng, F., “A novel method for solving a class of singularly perturbed boundary value problems based on reproducing kernel method”, *Applied Mathematics and Computation*, 218 4211-4215, 2011.
6. Holmes, M. H., “Introduction to Perturbation Methods” Second Ed., Texts in Applied Mathematics, *Springer*, 2013.
7. Johnson, R. S., “Singular Perturbation Theory: Mathematical and Analytical Techniques with Applications to Engineering”, *Springer*, 2005.
8. Lagerstrom, P. A., “Matched Asymptotic Expansions, Ideas and Techniques”, in: *Appl. Math. Sci.*, Vol. 76, *Springer-Verlag*, 1988.
9. Kevorkian J., Cole J.D., “Perturbation Methods in Applied Mathematics”, *Springer-Verlag*, Applied Mathematical Sciences Vol. 34., 1985.
10. Mauss, J., “On matching principles”, in: *Lectures Notes in Math.*, Vol. 711, *Springer-Verlag*, pp. 1-18. , 1979.
11. O’Malley R.E., “Introduction to Singular Perturbations, Applied Mathematics and Mechanics”, vol. 14, *Academic Press*, New York, London, 1974.
12. Nayfeh, A. H., “Perturbation Methods”, *John Wiley & Sons*, New york, 425, 1973.
13. Farrell, P. A., Hegarty, A. F., Miller, J. J., O’Riordan, E., Shishkin, G. I., “Robust Computational Techniques For Boundary Layers”, *Charman & Hall/CRC*, Boca Raton, 254., 2000.

14. Shivamoggi, B. K., “Perturbation Methods for Differential Equations” , *Birkhäuser* Boston, Springer Science+Business Media New York, 2003
15. Verhulst, F., “Methods and Applications of Singular Perturbations: Boundary Layers and Multiple Timescale Dynamics” , Texts in Applied Mathematics, Vol. 50, *Springer*, 2005.
16. Skinner, L. A.,” Singular Perturbation Theory” , *Springer*, New York, 2011.
17. Eckhaus, W., “Asymptotic analysis of singular perturbations” , Studies in Mathematics and its Applications, vol. 9., *North-Holland, Amsterdam*, 1979.

## EKLER

### EK-1 MATLAB PROGRAM KODLARI

Program 1.1. *Örnek 2.3.5.* ' te verilen  $f$  fonksiyonunun  $\varepsilon = 10^{-2}$  parametre değeri için asimptotik yaklaşımı olan  $\varphi(x) = x$  fonksiyonu ile kıyaslayan yapan program

```
x=.0000001:.0000001:.999999;  
eps=10^(-2);  
fx=x+exp(-x/eps);  
plot(x,fx,'b'), hold on  
plot(x,x,'r')  
xlabel x, ylabel f(x)  
legend('f Fonksiyonu','Asimptotik Yaklaşım',4),  
title('Belirli Bir Parametre Değeri İçin f Fonksiyonu İle Asimptotik Yaklaşımın  
Kıyaslanması')  
grid on
```

Program 1.2. *Örnek 2.4.1.* ' deki cebirsel denklemin köklerini bulan program

```
>> format long  
>> roots([1 .002 -1])  
  
ans =  
  
x1 = 0.999000499999875...  
x2 = -1.001000499999875...
```

Program 1.3. *Örnek 2.4.1.* ' deki  $\varepsilon$  ' un farklı değerleri için asimptotik yaklaşımlar ile gerçek (tam) çözümleri karşılaştıran grafiği üreten program

```
for eps=0:0.001:1  
asymptol1=1-eps;  
asymptol2=-1-eps;  
semilogx(eps,asymptol1,',' , 'markersize',5,'MarkerEdgeColor','r')  
hold on  
semilogx(eps,asymptol2,',' , 'markersize',5,'MarkerEdgeColor','r')  
hold on  
r=roots([1 2*eps -1]);  
semilogx(eps,r,'o',' , 'markersize',5,'MarkerEdgeColor','b')  
hold on  
end
```



## EK-1 MATLAB PROGRAM KODLARI (Devam)

```
legend('ASİMPOTİK YAKLAŞIM(kök1)', 'ASİMPOTİK  
YAKLAŞIM(kök2)', 'TAM ÇÖZÜMLER', 3),  
title(' Parametre Değerleri İçin Tam Çözümler İle Asimptotik Çözümlerin  
Kıyaslanması')  
grid on  
ylabel('ÇÖZÜMLER')  
xlabel('PARAMETRE DEĞERİ')
```

Program 1.4. *Örnek 2.4.2.*' deki denkleminin parametresinin farklı değerleri için asimptotik ve gerçek çözümlerini veren ve karşılaştıran grafiği veren program

```
for eps=0:0.023:1  
r=roots([eps*1 2 -1]);  
semilogx(eps,r,'o','markersize',8,'MarkerEdgeColor','g')  
hold on  
asymptotic1=.5-eps/8;  
asymptotic2=(-2/eps)-.5;  
semilogx(eps,asymptotic1,'+','markersize',5,'MarkerEdgeColor','r')  
hold on  
semilogx(eps,asymptotic2,'!','markersize',5,'MarkerEdgeColor','b')  
end  
legend('TAM ÇÖZÜMLER','1. KÖK İÇİN ASİMPOTİK YAKLAŞIM','2.  
KÖK İÇİN ASİMPOTİK YAKLAŞIM',4);  
title(' Parametre Değerleri İçin Tam Çözümler İle Asimptotik Çözümlerin  
Kıyaslanması')  
ylabel('ÇÖZÜMLER')  
xlabel('PARAMETRE DEĞERİ')
```

Program 1.5. *Örnek 2.5.2.*' nin nümerik çözümü ile 2 terimli asimptotik yaklaşımını karşılaştıran grafiği veren program

```
%epsilon parametresinin eps=0.1 değeri için  
%MATLAB özel fonksiyonu olan "ode45" ten yararlanan  
%böylece nümerik çözüm ile asimptotik yaklaşımları  
%kıyaslama imkanı sunan Matlab programı  
%-----  
function ydot = r(t,y)  
eps=0.1;  
ydot(1) = y(2);  
ydot(2) = -(1+eps*y(1))(-2);
```

## EK-1 MATLAB PROGRAM KODLARI (Devam)

```
ymdot = [ymdot(1); ymdot(2)];
%-----
[t, y] = ode45(@r, [0, 2], [0, 1]);
plot(t,y(:,1),'o','markersize',5,'MarkerEdgeColor','r'),grid on
hold on
ylabel('y-ekseni(ÇÖZÜMLER) ')
xlabel('t-ekseni')
title(' 1/10 Parametre Değeri İçin Nümerik Çözüm İle Asimptotik Yaklaşımın
Kıyaslanması')
asymptoticsol=(t-t.^2/2)+(1/30)*t.^3-(1/120).*(t.^4);
plot(t,asymptoticsol,'b')
legend('NÜMERİK ÇÖZÜM','2 TERİMLİ ASİMPOTİK YAKLAŞIM',4);
maxhata=max(abs(asymptoticsol-y(:,1)))
```

Program 1.6.  $\varepsilon = 0.1$  ve  $\varepsilon = 0.01$  için (3.2.1) denkleminin tek terimli asimptotik ve tam çözümlerini kıyaslayan grafiği veren program

```
% Bu MATLAB programı epsilon parametresinin eps=0.1 ve
% eps=0.1 değerleri için asimptotik yaklaşım ile
% tam çözümü kıyaslamaktadır
x=0:0.000001:1;% x değerlerinin hassaslığını gösterir
eps=(1/10);%epsilon(parametre) değeri
% Tam çözüm analitik olarak elde edildi
A=1/(exp((1/eps)*(-1+sqrt(1-2*eps)))-exp((1/eps)*(-1-sqrt(1-2*eps))));
% A katsayısı sınır değer probleminin çözümünden gelen sabit
tamcozum=A*exp((x/eps)*(-1+sqrt(1-2*eps)))-A*exp((x/eps)*(-1-sqrt(1-
2*eps)));
%grafik çizimi(tam çözüm)
asymptoticcozum=exp(1-x)-exp(1-2*x./eps);
plot(x,tamcozum,'b',x,asymptoticcozum,'r');%grafik çizimi (asimptotik
yaklaşım)
axis([0 1 0 3]);
legend('TAM ÇÖZÜM','ASİMPOTİK YAKLAŞIM',4);
title('eps=0.1 Parametre Değeri İçin Tam Çözüm İle Asimptotik Çözümün
Kıyaslanması')
grid on
ylabel('ÇÖZÜMLER')
xlabel('x-ekseni')
```

## EK-1 MATLAB PROGRAM KODLARI (Devam)

Program 1.7.  $\varepsilon = 0.1$  ve  $\varepsilon = 0.01$  için (3.2.5.11) 2 terimli asimptotik yaklaşımının grafiğe dökülmesini sağlayan program

```
% Bu MATLAB programı epsilon parametresinin eps=0.1 ve
% eps=0.01 değerleri için asimptotik yaklaşım ile
% tam çözümü kıyaslamaktadır
x=0:0.000001:1;% x değerlerinin hassaslığını gösterir
eps=(1/10);%epsilon(parametre) değeri
% Tam çözüm analitik olarak elde edildi
A=1/(exp((1/eps)*(-1+sqrt(1-2*eps)))-exp((1/eps)*(-1-sqrt(1-2*eps))));
% A katsayısı sınır değer probleminin çözümünden gelen sabit
tamcozum=A*exp((x/eps)*(-1+sqrt(1-2*eps)))-A*exp((x/eps)*(-1-sqrt(1-
2*eps)));
%grafik çizimi(tam çözüm)
asymptoticcozum=exp(1-x)+(eps/2).*(1-x).*exp(1-x)+exp(1)-exp(1-
2.*x./eps)+(eps*exp(1)/2).*(1-exp(-2.*x/eps))-x.*exp(1).*(1+exp(-2.*x/eps))-
exp(1)*eps/2-exp(1)+x.*exp(1);
maxhata=max(abs(tamcozum-asymptoticcozum))
plot(x,tamcozum,x,asymptoticcozum,'r');%grafik çizimi (asimptotik yaklaşım)
axis([0 1 0 3]);
legend('TAM ÇÖZÜM','2 TERİMLİ ASİMPOTİK YAKLAŞIM',4);
title('eps=0.1 Parametre Değeri İçin Tam Çözüm İle 2 Terimli Asimptotik
Çözümün Kıyaslanması')
grid on
ylabel('ÇÖZÜMLER')
xlabel('x-ekseni')
```

Program 1.8. (3.3.1) denkleminin  $\varepsilon = 0.1$  ve  $\varepsilon = 0.01$  parametreleri için nümerik ve asimptotik çözümünü kıyaslayan grafiği veren program

```
% Bu MATLAB programı epsilon parametresinin eps=0.1
% ve eps=0.01 değerleri için nümerik çözümler ile asimptotik
% çözümleri kıyaslamaktadır
%-----
function spp = twoode(x,y)
    spp = [ y(2) 10000*y(1)-100*x*y(2)-10000*exp(x)];
%-----
function res = twobc(ya,yb)
    res = [ ya(1)-2 yb(1)-1];
%-----
solinit = bvpinit(linspace(0,1,1000),[0 1]);
sol = bvp4c(@spp,@res,solinit);
x = linspace(0,1);
```

## EK-1 MATLAB PROGRAM KODLARI (Devam)

```
y = deval(sol,x);
plot(x,y(1,:), 'r');
grid on
axis([-0.005 1.005 .95 2.6]);
hold on
x=0:.0001:1;
asymptoticyaklasim=exp(x)+exp(-x/.01)+(1-exp(1))*exp(((sqrt(5)-1)/0.02)*(x-1));
plot(x,asymptoticyaklasim)
legend('TAM ÇÖZÜM','TEK TERİMLİ ASİMPOTİK YAKLAŞIM',4);
title('eps=0.01 Parametre Değeri İçin Nümerik Çözüm İle Tek Terimli Asimptotik Çözümün Kıyaslanması')
grid on
ylabel('ÇÖZÜMLER')
xlabel('x-ekseni')
```

Program 1.9. *Örnek 3.4.1.*' de bulunan dış açılım için transandantal olarak küçük terimlerin etkisini gösteren grafiği veren program

```
eps=.01;
x=0:0.000001:1;
disacilim1=2*x-1;
disacilim2=2*x-1+exp(-x./eps)-exp(-1/eps);
plot(x,disacilim1), hold on
plot(x,disacilim2,'r')
grid on
legend('yo','yo+zo',4);
title('DIŞ AÇILIM İÇİN TRANSANDANTAL TERİMİN ETKİSİNİ GÖSTEREN GRAFİK')
ylabel('ÇÖZÜMLER')
xlabel('x-ekseni')
```

## ÖZGEÇMİŞ

Süleyman CENGİZCİ 1989 yılı Temmuz ayında Antalya’ da doğdu. İlköğrenimini 2003 yılında *Antalya Başöğretmen Atatürk İlköğretim Okulu*’ nda, lise eğitimini 2007 yılında *Antalya Metin – Nuran Çakallıklı Anadolu Lisesi*’ nde, lisans eğitimini 2012 yılında *Niğde Üniversitesi Matematik Bölümü*’ nde ve yüksek lisans eğitimini 2014 yılında *Orta Doğu Teknik Üniversitesi Mühendislik Bilimleri Bölümü*’ nden aldığı derslerle birlikte *Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Matematik Bölümü Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı*’ nda tamamlamıştır. Aynı zamanda 2014 senesi içerisinde *Akdeniz Üniversitesi Eğitim Fakültesi*’ nden *Pedagojik Formasyon Sertifikası* almış ve *Orta Doğu Teknik Üniversitesi Uygulamalı Matematik Enstitüsü Bilimsel Hesaplama Bölümü* doktora programına kabul edilmiştir. Akademik çalışmalarına *bilimsel hesaplama, mühendislik bilimleri ve uygulamalı matematik* alanlarında devam etmektedir.

İletişim:

e-mail: scengizci@hotmail.com

Adres: Orta Doğu Teknik Üniversitesi Uygulamalı Matematik Enstitüsü Bilimsel Hesaplama Bölümü, ANKARA

