

**T.C.
NEVŞEHİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**LİNEER VE LİNEER OLMAYAN İNTEGRAL
DENKLEMLERİN HOMOTOPİ ANALİZ METODU İLE
ÇÖZÜMÜ**

**Tezi Hazırlayan
Mustafa Asım CERAN**

**Tezi Yöneten
Yrd.Doç.Dr. Aytekin ERYILMAZ**

**Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi**

**Haziran 2012
NEVŞEHİR**

**T.C.
NEVŞEHİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**LİNEER VE LİNEER OLMAYAN İNTEGRAL
DENKLEMLERİN HOMOTOPİ ANALİZ METODU İLE
ÇÖZÜMÜ**

**Tezi Hazırlayan
Mustafa Asım CERAN**

**Tezi Yöneten
Yrd.Doç.Dr. Aytekin ERYILMAZ**

**Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi**

**Haziran 2012
NEVŞEHİR**

Yrd. Doç. Dr. Aytekin ERYILMAZ danışmanlığında **Mustafa Asım CERAN** tarafından hazırlanan “**Lineer ve Lineer Olmayan İntegral Denklemlerin Homotopi Analiz Metodu ile Çözümü**” adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

06.07.2012

JÜRİ:

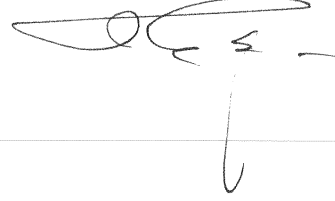
Başkan : Doç. Dr. Murat ERDURAN



Üye : Yrd. Doç. Dr. S. Battal Gazi KARAKOÇ



Üye : Yrd. Doç. Dr. Aytekin ERYILMAZ



ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulunun 31.07.2012 tarih ve 2012-46-1 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

01 / 08 / 2012

Prof. Dr. Selçuk KERVAN
Enstitü Müdürü



TEŞEKKÜR

Bu tez çalıőmasının gerçekleőmesinde, sahip olduğu bilgi birikimini benimle paylaőıp, bana yol gosteren ve katkılarıyla tezin bugunlere gelmesini sağlayan danıőmanım Yrd.Doç.Dr. Aytakin ERYILMAZ'a, bu zaman diliminde maddi ve manevi desteğini esirgemeyen aileme ve sevgili eőim Ayőe Seçkin CERAN'a teőekkürler...

LİNEER VE LİNEER OLMAYAN İNTEGRAL DENKLEMLERİN HOMOTOPI ANALİZ METODU İLE ÇÖZÜMÜ

Mustafa Asım CERAN

Nevşehir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü

Yüksek Lisans Tezi, Haziran 2012

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Aytekin ERYILMAZ

ÖZET

Mühendislik ve fizik problemlerinde karşılaşılan integral denklemlerin ve integral denklem sistemlerinin oldukça fazla çeşitlerine ve varyasyonlarıyla karşılaşmak mümkündür. Bu denklemlerin çözümü için birçok yöntem geliştirilmiştir.

Bu çalışmada lineer ve lineer olmayan integral denklemlerin çözümü için kullanışlı ve pratik bir yöntem olan Homotopi Analiz Metodunun uygulamaları incelenecektir. Ayrıca Mathematica programlama dili ile de bazı örneklerin çözümleri verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Lineer ve lineer olmayan integral denklem, homotopi analiz metodu, integro-diferansiyel denklemler.

**THE SOLUTION OF LINEER AND NONLINEER INTEGRAL EQUATIONS
BY HOMOTOPY ANALYSIS METHOD**

Mustafa Asım CERAN

Nevşehir Universty, Institute of Sciences

M. Sc. Thesis, june 2012

Thesis Supervisor: Asist. Prof. Dr. Aytekin ERYILMAZ

ABSTRACT

Integral equations encountered in engineering and physics problems and integral equations rather than on the kind of system to meet with and variations are possible. This equation was developed to solve a lot of ways.

This work fort he solution of some kind linear and nonlinear equations, which are usefull and practical method and the modified Homotopy Analysis Method of aplication. Moreover, some exemples of the mathematics program, solutions are given by Mathematica .

Keywords: Lineer and nonlinear integral equation, homotopy analysis method, integro-differential equations.

İÇİNDEKİLER

KABUL ve ONAY	i
TEŞEKKÜR.....	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT.....	iv
1.BÖLÜM	
GİRİŞ.....	1
2.BÖLÜM	
İNTEGRAL DENKLEMLER.....	2
2.1 Tanım.....	2
2.2 İntegral Denklem Çeşitleri.....	2
2.3 İntegro-Diferensiyel Denklemler.....	8
3.BÖLÜM	
HOMOTOPİ ANALİZ METODU.....	10
3.1 Sıfırıncı Mertebeden Deformasyon Denklemi.....	14
3.2 Yüksek Mertebeden Deformasyon Denklemi.....	17
4. BÖLÜM	
UYGULAMALAR.....	22
5. BÖLÜM	
TARTIŞMA ve SONUÇLAR.....	43
KAYNAKLAR.....	44
ÖZGEÇMİŞ.....	47

1.BÖLÜM

GİRİŞ

İntegral denklemler için genel bir tanım vermek mümkün olmamakla birlikte kabaca belirlenmek istenen bilinmeyen fonksiyonunun integral işaretinin altında olduğu denklemlere integral denklem denir. Bu tanım integral denklemlerin tüm çeşitlerini kapsar nitelikte bir teori oluşturmamızı sağlar. Bu nedenle integral denklemlerin farklı çeşitleri incelenmektedir.[27]

İntegral denklemlerle ilgili çalışmalar 19. yüzyılda da başlamıştır. İlk olarak 1823 yılında ABEL'in mekanik problemlerini incelediği sıralarda integral denklemlere rastladığı bilinmekle birlikte integral denklem deyimi Du Bois REYMOND'un 1888'de yayınladığı makalesinde kullanıldığı anlaşılmaktadır.[13]

İntegral denklemler konusu diferansiyel denklemler, operatörler teorisi gibi matematik konularıyla iç içe incelenmektedir. Fizik ve matematikteki bir çok denklem adi ve kısmi diferansiyel denklem olarak ifade edilebilir. Ayrıca matematiksel fizik ve uygulamalı matematikte bir çok alanda integral denklemler rol oynamaktadır. İntegral denklemler incelenirken lineer cebir ve fonksiyonel analiz konularından da faydalanılmaktadır. Örneğin lineer integral denklemlerin konusu içerisinde görülen özvektör, öz fonksiyon ve vektör uzayları kavramları aynı zamanda lineer cebirin de temel kavramlarındanıdır.

İntegral denklemlere çeşitli şekillerde rastlamak mümkündür. Bu çeşitlilik integral denklemlerin genel bir çözümünün bulunmasını zorlaştırmaktadır. Bu nedenle araştırmalar her bir integral denklem için ayrı ayrı çözüm yöntemleri geliştirmesi şeklinde yürütülmektedir.

Bu tezde integral denklemlerin homotopi analiz metodu ile çözümü araştırılmaktadır. İntegral denklemlerin çözümünü oldukça kolaylaştıran bu yöntem S.J. Liao tarafından geliştirilmiştir. Metodun integral denklemlere uygulanmasında Matlab ve Mathematica matematik yazılımları kullanılmıştır.

2. BÖLÜM

İNTEGRAL DENKLEMLER

2.1. Tanım

Bilinmeyen fonksiyonunun integral altında yer aldığı denklemlere integral denklemleri denir. Bu tip denklemlerin genel gösterimi aşağıdaki gibidir

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)y(t)dt. \quad (2.1)$$

Burada $y(x)$ bilinmeyen, $K(x,t)$ ve $f(x)$ bilinen fonksiyonlardır. x ve t reel değişkenler olup (a,b) aralığında değerler almaktadır. λ ise sayısal bir parametredir.

2.2. İntegral Denklemlerin Çeşitleri

2.2.1. Fredholm İntegral Denklemleri

a, b ve λ sabit sayılar olmak üzere;

$$\alpha(x).y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)y(t)dt \quad a \leq x, t \leq b \quad (2.2)$$

denklemine Fredholm integral denkleminin standart formu denir. Burada $K(x,t)$ fonksiyonuna integral denkleminin çekirdeği denir. $K(x,t)$ çekirdeği (x,t) düzleminin bir $A=\{a \leq x \leq b, a \leq t \leq b\}$ karesi üzerinde tanımlanmış olup karesi ile integrallenebilir bir fonksiyondur, yani

$$\int_a^b \int_a^b K^2(x,t) dxdt = B^2 < +\infty \quad (2.3)$$

sağlanacak şekilde bir B sayısı mevcuttur.

Eğer (2.2) denkleminde $\alpha(x)=0$ alınırsa

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)y(t)dt \quad (2.4)$$

denklemini elde edilir. Elde edilen bu denkleme I. türden Fredholm integral denklemi denir.

Eğer (2.2) denkleminde $\alpha(x)=1$ alınırsa

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)y(t)dt \quad (2.5)$$

denklemini elde edilir. Elde edilen bu denkleme II. türden Fredholm integral denklemi denir. Şimdi Fredholm integral denklemlerini lineer olma özelliklerine göre tanımlayalım.

2.2.2 Lineer Fredholm İntegral Denklemi

İntegral işaretinin altındaki $y(t)$ fonksiyonunun derecesi “1” ise (2.2) denkleminde lineer Fredholm integral denklemi denir. Lineer Fredholm denkleminde örnek olarak

$$y(x) = e^x + \lambda \int_1^2 (x^2 + y^2)y(t)dt \quad (2.6)$$

denklemini verebilir.

2.2.3 Lineer Olmayan Fredholm İntegral Denklemi

İntegral işareti altındaki bilinmeyen $y(t)$ fonksiyonunun derecesi “1” den farklı ise (2.2) denkleminde lineer olmayan Fredholm integral denklemi denir. Lineer olmayan Fredholm integral denkleminde örnek olarak

$$y(x) = e^{x^2+1} + \lambda \int_3^4 \sin(x^2 + y^2) y^2(t) dt \quad (2.7)$$

denklemini verebilir.

2.2.4 Volterra İntegral Denklemleri

λ sayısal bir parametre, $f(x)$ ve $K(x, t)$ bilinen fonksiyonlar $y(t)$ bilinmeyen fonksiyonu olmak üzere

$$\alpha(x).y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)y(t)dt \quad (2.8)$$

denklemine Volterra integral denklemleri denir. $K(x, t)$ fonksiyonuna Volterra denkleminin çekirdeği denir. İntegralin alt sınırı olan “ a ” değerini “0” olarak seçmek genelliği bozmaz. Volterra denkleminin Fredholm integral denkleminde tek farkı üst sınırının değişken olmasıdır. (2.8) denkleminde

1. $\alpha(x) = 0$ alınırsa

$$f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)y(t)dt = 0 \quad (2.9)$$

denklemini elde edilir. Buna I. tip Volterra integral denklemini denir.

2. $\alpha(x) = 1$ alınırsa

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)y(t)dt \quad (2.10)$$

denklemini elde edilir. Buna II. tip Volterra integral denklemini denir.

Teorem 2.1

$L_2(a, b)$ uzayı $\int_a^b f^2(x)dx$ integralinin mevcut olması halinde $[a, b]$ üzerinde $f(x)$ ' in kuadratik olarak integre edilebildiği uzay olmak üzere $A_0\{0 \leq x, t \leq a\}$ bölgesi olsun.

$K(x, t)$ çekirdeği $L_2(A_0)$ uzayına $f(x)$ fonksiyonu $L_2(0, a)$ uzayına ait olan ikinci tip Volterra integral denkleminin $L_2(0, a)$ uzayında bir ve yalnız bir tek çözümü vardır. Volterra integral denkleminde çözümün varlığı ve tekliği $f(x)$ ve $K(x, t)$ fonksiyonları üzerine yüklenen sürekli olma koşulundan daha genel varsayımlar altında gerçekleşir. Daha detaylı bilgi için Krasnov, Kiselev ve Makeronko [1] incelenebilir.

Örnek 2.1

$$y'' + xy' + y = 0$$

ile verilen diferansiyel denklemi

$$y(0)=1, \quad y'(0) = 0$$

başlangıç koşullarını dikkate alarak bir integral denklem oluşturalım

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \varphi(x) \tag{2.11}$$

yazalım. Bu taktirde

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \int_0^x \varphi(t) dt + y' = \int_0^x \varphi(t) dt, \\ y &= \int_0^x (x-t)\varphi(t) dt + 1 \end{aligned} \tag{2.12}$$

olur. (2.11) ve (2.12) ifadeleri, verilen diferansiyel denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \varphi(x) + \int_0^x \varphi(t) dt + \int_0^x (x-t)\varphi(t) dt + 1 &= 0 \\ \varphi(x) &= -1 - \int_0^x (2x-t)\varphi(t) dt \end{aligned}$$

Volterra integral denklemi sonucuna ulaşılır.

2.2.5 Lineer Volterra İntegral Denklemleri

İntegral işaretinin altındaki bilinmeyen $y(t)$ fonksiyonunun derecesi “1” ise lineer Volterra integral denklemi olarak adlandırılır. Lineer Volterra integral denkleme örnek olarak

$$y(x) = x^2 + \lambda \int_0^x e^{x+t} y(t) dt \quad (2.13)$$

denklemleri verilebilir.

2.2.6 Lineer Olmayan Volterra İntegral Denklemi

İntegral işaretinin altındaki bilinmeyen $y(t)$ fonksiyonunun derecesi “1” den farklı ise lineer olmayan Volterra integral denklemi olarak adlandırılır. Lineer olmayan Volterra integral denkleme örnek olarak

$$y(x) = 1 + \lambda \int_1^x t y^2(t) dt \quad (2.14)$$

denklemleri verilebilir. Şimdi Volterra integral denklemlerine birkaç örnek verelim

Örnek 2.2

$\varphi_0(x) = 0$ başlangıç koşulunu kullanarak

$$\varphi(x) = 1 + \int_0^x \varphi(t) dt$$

integral denklemini çözelim. $\varphi_0(x) = 0$ dan dolayı $\varphi_1(x) = 0$ olacak ve

$$\varphi_2(x) = 1 + \int_0^x 1 dt = 1 + x$$

$$\varphi_3(x) = 1 + \int_0^x (1+t) dt = 1 + x + \frac{x^2}{2!}$$

$$\varphi_3(x) = 1 + \int_0^x \left(1 + t + \frac{t^2}{2}\right) dt = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

ve

$$\varphi_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

olarak bulunur.

$\varphi_n(x)$ fonksiyonu, $\sum_0^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ serisinin n nci kısmi toplamıdır ve dolayısıyla

$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = e^x$ olacaktır. Bu da integral denkleminin bir çözümüdür.

Örnek 2.3

$$\varphi(x) = x^2 + \lambda \int_0^1 e^{-x} y(t) dt$$

Fredholm integral denklemini çözelim.

$$\varphi(x) = x^2 + \lambda e^{-x} \int_0^1 y(t) dt, \quad \int_0^1 y(t) dt = c \text{ denilirse}$$

$$\varphi(x) = x^2 + \lambda e^{-x} c$$

olur. Şimdi her iki tarafın $[0,1]$ aralığında integrali alınırsa

$$\int_0^1 \varphi(x) dx = \int_0^1 x^2 dx + c \lambda \int_0^1 e^{-x} dx$$

bulunur.

$$c = \frac{1}{3} - c \lambda (e^{-x}) \Big|_0^1$$

olarak alınırsa,

$$c = \frac{1}{3} - c\lambda(e^{-1} - 1)$$

elde edilir. Burada

$$(1 - \lambda(e^{-1} - 1))c = \frac{1}{3}$$

$$(1 - \lambda(e^{-1} - 1)) \neq 0$$

Yani $\lambda \neq \frac{1}{e^{-1} - 1} = \frac{e}{1 - e}$ ise

$$c = \frac{1}{3}(1 - \lambda(e^{-1} - 1))$$

$$c = \frac{e - \lambda(1 - e)}{3e}$$

bulunur ve integral denkleminin çözümü

$$\varphi(x) = x^2 + \frac{e - \lambda(1 - e)}{3e} \lambda e^{-x}$$

olur.

2.3 İntegro-Diferansiyel Denklemler

Volterra, 1900'lü yılların başında nüfus büyümesini araştırırken yeni bir denklem ortaya çıkarmıştır. Bilinmeyen $u(x)$ denklemi eşitliğin bir tarafında türevli olarak, diğer tarafında integral işaretinin içinde bulunur. Bilim adamları ve araştırmacılar ısı transferi, genel difüzyon süreci, nötron difüzyonu ve üreme oranlarının artış ve azalışıyla biyolojik türlerin bir arada varlığı gibi birçok bilim uygulamaları üzerinde integro diferansiyel denklemleri araştırdılar.

İntegro-diferansiyel denklemlerde bilinmeyen $u(x)$ fonksiyonu veya türevleri integral işaretinin altında, diğer $u(x)$ fonksiyonu türevi ise integral işareti dışında bulunur. İntegro-diferansiyel denklemler Fredholm ve Volterra integro-diferansiyel denklemler

olarak ikiye ayrılır. Bu ayrım integrasyon limitlerine göre yapılır. Aşağıda bu konuyla ilgili örnekler verilmiştir.

$$1. \quad u''(x) = -x + \lambda \int_0^x (x-t)u(t)dt, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 1$$

$$2. \quad u'(x) = -\sin x - 1 + \int_0^x u(t)dt, \quad u(0) = 1$$

$$3. \quad u'(x) = 1 - \frac{1}{3}x + \int_0^1 xtu(t)dt, \quad u(0) = 1$$

$$4. \quad u''(x) = e^x - x + \int_0^1 xtu'(t)dt, \quad u(0) = 1, \quad u'(0) = 1$$

$$5. \quad u''(x) = -x - \frac{1}{2} + \int_0^x (x-t)u^2(t)dt, \quad u(0) = 1, \quad u'(0) = 1$$

$$6. \quad u'(x) = 1 - \frac{1}{3}x^2 + \int_0^1 xtu^3(t)dt, \quad u(0) = 1$$

Fredholm ve Volterra integro-diferansiyel denklemler integral denklemlerde olduğu gibi lineer olma özelliğine göre de ikiye ayrılır. Bu ayrım integral işareti altındaki bilinmeyen $u^n(t)$ fonksiyonunun derecesine göre yapılır. İntegral işareti altındaki bilinmeyen $u^n(t)$ fonksiyonunun derecesi “1” ise lineer Fredholm integro-diferansiyel denklemi ve lineer Volterra integro-diferansiyel denklem $u^n(t)$ fonksiyonunun derecesi $n \geq 2$ ise lineer olmayan Fredholm integro-diferansiyel denklem ve lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denklemi elde edilir.[27]

1, 2, 3, 4 ile verilen denklemler lineer olup, 5 ve 6 ile verilen denklemler ise lineer olmayan Fredholm, Volterra integro-diferansiyel denklemlerdir.

3.BÖLÜM

HOMOTOPİ ANALİZ METODU

Bu bölümde, Homotopi analiz metodu (HAM) tanıtılacaktır. HAM Liao tarafından çeşitli lineer ve lineer olmayan problemleri analiz etmek için geliştirilmiştir. Bu teknik son yüzyılda birçok lineer ve lineer olmayan problem için uygulanmıştır. Lineer olmayan diferansiyel ve integral denklemler bilim ve mühendisliğin sıvı dinamiği, katı alan, plazma alanı, matematiksel biyoloji, kimyasal kinetik, jeofizik, elektrik ve manyetik kinetik gaz teorisi, quantum mekaniği, matematiksel ekonomi gibi birçok alanında karşımıza çıkmaktadır.

HAM, ilk olarak lineer ve lineer olmayan Fredholm integral denkleminin en yakın çözümünü vermesiyle başarıyla kabul edildi. Lineer olmayan problemlerin analitik çözümlerini elde etmek genelde zordur. Yarı analitik yöntemlerde, çözüm serilerinin yakınsaklık bölgesi çoğu zaman fiziksel parametrelere bağlıdır. Bu yarı analitik yaklaşımlar, lineer olmayan denklemlerde çoğu zaman başarısız sonuçlar verir.[11] Bu tip problemlerin çözümleri için daha önceki tekniklerden farklı olarak, çözüm serilerinin yakınsaklık bölgesini ve hızını kontrol etme imkanı sağlayan “Homotopi Analiz Metodu (HAM)” 1992’de Liao tarafından verilmiştir. Bu metot aynı zamanda, Adomian ayrışım metodu, Lyapunov küçük yapay parametre metodu, δ -açılım metodu gibi önceden verilmiş pertürbatif olmayan metotların genel halidir.[9] Yani, önceki metotların genelleştirilmiş veya birleştirilmiş bir teorisi olarak düşünülebilir. Homotopi analiz metodu, farklı tipteki lineer olmayan denklemlerin seri çözümlerini elde etmek için kullanılan genel bir yarı analitik yaklaşımdır. Bu metot cebirsel denklemlerin, adi diferansiyel denklemlerin, integro-diferansiyel denklemlerin vb. çözümlerini bulmak için kullanılır. Pertürbasyon metotlarının aksine, homotopi analiz metodu küçük ve büyük fiziksel parametrelerden bağımsızdır ve metodun uygulanması için problemin küçük ve büyük fiziksel parametre içerip içermediği önemli değildir. Bütün pertürbasyon metotlarından ve klasik pertürbatif olmayan metotlardan farklı olarak, homotopi analiz metodu, çözüm serilerinin yakınsaklık bölgesini kontrol etme imkanı

sağlar.[10] Homotopi analiz metodu, homotopi pertürbasyon metoduna benzer biçimde, topolojinin temel kavramlarından biri olan homotopiyi kullanır. Bu metotta da ele alınan denklemin başlangıç yaklaşımından tam çözümüne götüren sürekli bir dönüşüm oluşturulur. Bu tip bir sürekli dönüşümü oluşturmak için bir yardımcı lineer operatör seçilir. Bulunan çözüm serisinin yakınsaklığını garantilemek için bir yardımcı parametre kullanılır. Bu metot, başlangıç yaklaşımı ve yardımcı lineer operatörlerin seçiminde serbestlik sağlar.

Örneğin aşağıdaki lineer olmayan cebirsel denklemini göz önüne alalım;

$$f(x) = 0 \quad (3.1)$$

x_0, x' 'in bir başlangıç yaklaşımı ve $q \in [0,1]$ homotopi parametresi olmak üzere;

$$H[x; q] = (1 - q)[f(x) - f(x_0)] + qf(x) \quad (3.2)$$

homotopisi kurulsun. $q=0$ ve $q=1$ iken,

$$H[x; 0] = f(x) - f(x_0) \text{ ve } H[x; 1] = f(x) \quad (3.3)$$

elde edilir. q parametresi 0'dan 1'e değiştiğinde, $H[x; q]$ homotopisi sürekli olarak $f(x) - f(x_0)$ 'dan $f(x)$ 'e değişir. Böyle sürekli değişim, topolojide deformasyon olarak adlandırılır. $H[x; q]=0$ alınarak

$$(1 - q)[f(x) - f(x_0)] + qf(x) = 0 \quad (3.4)$$

cebirsel denklemlerin bir ailesi bulunur. Bu cebirsel denklemler ailesinin bir çözümü, homotopi parametresi q 'ya bağlıdır. Bu yüzden denklemlerin ailesi

$$(1 - q)[f[\phi(q)] - f(x_0)] + qf(\phi(q)) = 0 \quad (3.5)$$

biçiminde tekrar yazılabilir. $q=0$ iken,

$$f[\phi(q)] - f(x_0) = 0; q=0 \quad (3.6)$$

bulunur.

Bu denklemin çözümü $\phi(0) = x_0$ dır. $q=1$ iken $f[\phi(q)] = 0$; $q=1$ denklemini başlangıçta alınan cebirsel denklem $f(x) = 0$ ile tam olarak aynıdır. Buradan $\phi(1) = x$ elde edilir. Yani homotopi parametresi q , 0'dan 1'e değıştikçe, $\phi(q)$ nun değeri başlangıç yaklaşımı x_0 'dan $f(x) = 0$ denklemin çözümü olan x e değışir. (3.1.1) tipindeki denklemlerin ailesine sıfırncı derece deformasyon denklemi denir. **Bu da homotopi pertürbasyon denkleminde homotopiye** denktir. Homotopi pertürbasyon metodu bu noktadan sonra farklılık göstermeye başlar. Burada $\phi(q)$, homotopi parametresi q nun bir fonksiyonu olduğu için pertürbasyon serisi yerine Taylor serisine açılarak ifade edilir. Böylece $\phi(0) = x_0$ olmak üzere

$$\phi(x; q) = x_0 + \sum_{k=0}^{+\infty} x_k q^k \quad (3.7)$$

bulunur. (3.7) serisinde x_k

$$x_k = \frac{1}{k!} \left. \frac{\partial^k \phi(q)}{\partial q^k} \right|_{q=0} = D_k(\phi)$$

biçimindedir.[28] Şimdi Aşağıdaki lineer olmayan denklemi ele alalım;

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t) u^n(t) dt \quad (3.8)$$

Bu denklemde, $K(x, t)$ denkleminin çekirdeği, $f(x)$ analitik fonksiyon, ve $u(x)$ bağımsız değışken x in bilinmeyen fonksiyonudur. $u_0(x)$, $u(x)$ çözümünün başlangıç tahmini olduğunu kabul edilsin. $\hbar \neq 0$ yakınsama kontrol parametresi, yardımcı görevdeki $H(x) \neq 0$ ve yardımcı lineer operatör L homotopi analiz metodunu yakınsama bölgesini çözüm için kontrol etmede ve ayarlama önemli bir rol oynar. Liao, $q \in [0, 1]$ gömme parametresini sıfırncı mertebeden deformasyon denklemini

$$(1 - q)L[\phi(x; q) - u_0(x)] = q\hbar H(x)N[\phi(x; q)] \quad (3.9)$$

oluşturmak için kurmuştur. [20] Burada

$$N[\phi(x; q)] = \frac{d}{dx} f(x) - \lambda \int_0^x K(x, t) u^n(t) dt \quad (3.10)$$

verilsin. $q=0$ olduğunda sıfıncı mertebeden deformasyon denklemi (2.2), $\phi(x; 0) = u_0(x)$ olur ve $q=1$ olduğunda ise sıfıncı mertebeden deformasyon denklemi (2.2), $L[\phi(x; 1)] = 0$ olur. q , 0'dan 1'e arttığında $\phi(x; q)$ nun çözümü ilk tahmin olan $u_0(x)$ 'e göre farklılık gösterir ve $u(x)$ olur. Bu durumda, $[\phi(x; 1)]$ (2.1) lineer olmayan denklemin kesin çözümüdür. $\phi(x; q)$ 'yu q 'ya göre Taylor serisine göre açılırsa, yardımcı lineer operatör, ilk tahmin fonksiyonu, \hbar yardımcı parametresi sonradan belirlenecektir. $\phi(x; q)$ 'nun kuvvet serisi $q=1$ 'e yakınsadığında, aşağıdaki çözüm serisi

$$u(x) = u_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x) \quad (3.11)$$

elde edilir. Burada $u_m(x)$ terimleri, yüksek mertebeden deformasyon denklemi ile tespit edilir. Şimdi

$$\bar{u} = \{u_0(x), u_1(x), \dots, u_m(x)\} \quad (3.12)$$

vektörü tanımlansın ve (2.2) denklemini gömme parametresine göre m kere türevi alınır ve $q=0$ alınarak $m!$ bölünürse m . mertebeden deformasyon denklemi

$$\mathcal{L} [u_m(x) - x_m u_{m-1}(x)] = \hbar H(x) R_m(u_{m-1}, x) \quad (3.13)$$

olarak elde edilir. Burada

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1, \\ 1, & m > 1 \end{cases} \quad (3.14)$$

ve

$$R_m(\bar{u}_{m-1}, x) = \frac{1}{(m-1)!} \left. \frac{\partial^{m-1} N[\phi(x; q)]}{\partial q^{m-1}} \right|_{q=0} \quad (3.15)$$

dir. İlk çözüm ifadesi ve katsayı ergodiklik kuralına uymak için, ilgili ve yardımcı görevler benzersiz şekilde $H(x) = 1$ olarak belirlenir.[9]

Verilen herhangi bir doğrusal olmayan N operatörü ve $R_m(\vec{u}_{m-1}, x)$ terimi, (2.12) ile kolayca ifade edilebilir. Bu sayede (2.9) yüksek mertebeden lineer deformasyon denklemi ile $u_1(x), u_2(x), \dots$ elde edilir. m . mertebeden $u(x)$ yaklaşımı

$$V(x) \cong U(x) = \sum_{m=0}^n u_m(x) \quad (3.16)$$

olarak bulunur. önceki yakın çözüm \hbar 'yi içermektedir. \hbar yakınsama serisini hızlıca belirlemede HAM' daki köşe taşlarından. [2.12] çözüm serisi oranını ve yakınsama bölgesini kontrol edip ayarlamamıza \hbar yardımcı parametresi sayesinde yapılabilir. \hbar 'ın geçerli bölgesini elde etmek için öncelikle $V'(0), V''(0)$ veya $V'(1), V''(1)$ ve dahası \hbar eğrilerini planlarız. Bu \hbar eğrilerine göre, \hbar 'nin geçerli bölgesini kolayca kanıtlayabiliriz. \hbar neredeyse yatay eksene paralel doğrulara karşılık gelir.

3.1 Sıfırıncı Mertebeden Deformasyon Denklemi

$V_0(t), V(t)$ nin bir başlangıç tahminini gösterebiliriz, yani,

$$V_0(0) = 0. \quad (3.17)$$

başlangıç koşulunu sağlar. $q \in [0, 1]$ bir parametre olsun. Homotopi analiz metodu $V(t) \rightarrow \phi(t; q)$ sürekli eşleşmesinin bir çeşidine dayanır öyle ki parametre q , 0 dan 1 e arttıkça, $\phi(t; q)$, başlangıç tahmini $V_0(t)$ den tam çözüm $V(t)$ ye gider. Bunu sağlamak için, bir yardımcı lineer operatörü

$$L[\phi(t; q)] = \gamma_1(t) \frac{\partial \phi(t; q)}{\partial t} + \gamma_2(t) \phi(t; q), \quad (3.18)$$

şeklinde seçelim. Burada $\gamma_1(t) \neq 0$ ve $\gamma_2(t)$ daha sonra belirlenecek reel fonksiyonlardır.

$$V(t) + V^2(t) = 1, \quad t \geq 0 \quad (3.19)$$

denklemden, aşağıdaki lineer olmayan operatörü tanımlıyoruz

$$N[\phi(t; q)] = \frac{\partial \phi(t; q)}{\partial t} + \phi^2(t; q) - 1. \quad (3.20)$$

$\hbar \neq 0$ ve $H(t) \neq 0$ sırasıyla yardımcı parametre ve yardımcı fonksiyonu gösterebiliriz. Parametre $q \in [0, 1]$ 'i kullanarak,

$$\phi(0; q) = 0 \quad (3.21)$$

başlangıç koşuluna bağlı olarak

$$(1 - q)L[\phi(t; q) - V_0(t)] = \hbar q H(t) N[\phi(t; q)] \quad (3.22)$$

denklemlerinin bir ailesini kuruyoruz.

Yardımcı parametre \hbar , yardımcı fonksiyon $H(t)$, başlangıç yaklaşımı $V_0(t)$ ve yardımcı lineer operatör L 'yi seçmek için büyük özgürlüğe sahibiz. Bu özgürlük daha sonra gösterildiği gibi, homotopi analiz metodunun geçerliliğinin ve esnekliğinin köşe taşıdır ve önemli roller oynar.

$q = 0$ iken, denklem (3.22)

$$\phi(0; 0) = 0 \quad (3.23)$$

olur. Başlangıç koşuluna bağlı olarak

$$L[\phi(t; 0) - V_0(t)] = 0, \quad t \geq 0 \quad (3.24)$$

olur.

(3.17) ve (3.18) denklemlerine göre, (3.23) ve (3.24) denklemlerinin çözümü basit olarak

$$\phi(t; 0) = V_0(t) \quad (3.25)$$

dir. $q = 1$ iken, denklem (3.22) den

$$\phi(0;1) = 0 \quad (3.26)$$

başlangıç koşuluna bağlı olarak

$$\hbar H(t)N[\phi(t;1)] = 0, \quad t \geq 0, \quad (3.27)$$

olur.

$\hbar \neq 0$, $H(t) \neq 0$ iken ve (3.20) tanımını ile, (3.26) ve (3.27) denklemleri (3.17) ve (3.19) denklemlerinin kendisine eşitir,

$$\phi(t;1) = V(t) \quad (3.28)$$

sağlanır.

Böylece (3.25) ve (3.28) denklemlerine göre, $\phi(t;q)$ parametre q , 0'dan 1'e arttıkça $V_0(t)$ başlangıç tahmininden tam çözüm $V(t)$ 'ye gider. Topolojide varyasyonun bu çeşidi deformasyon olarak adlandırılır, ayrıca (3.21) ve (3.22) denklemleri $\phi(t;q)$ homotopisini kurar. Kısaca, (3.21) ve (3.22) denklemleri **sıfıncı mertebeden deformasyon denklemleri** olarak adlandırılırlar.

Yardımcı parametre \hbar , yardımcı fonksiyon $H(t)$, başlangıç yaklaşımı $V_0(t)$ ve yardımcı lineer operatör L 'yi seçmek için özgürlüğe sahip olarak, $0 \leq q \leq 1$ için (3.21) ve (3.22) sıfıncı mertebeden deformasyon denklemlerinin $\phi(t;q)$ çözümünün mevcut olması için, onların tümünün uygun bir şekilde seçildiğini varsayabiliriz ve parametre q ile ilgili olarak m 'inci mertebeden türevinden başka yani,

$$V_0^{[m]}(t) = \left. \frac{\partial^m \phi(t;q)}{\partial q^m} \right|_{q=0} \quad (3.29)$$

mevcuttur burada $m=1,2,3,\dots$ 'dir. Kısaca, $V_0^{[m]}(t)$ m 'inci mertebeden deformasyon türevi olarak adlandırılır.

$$V_m(t) = \frac{V_0^{[m]}(t)}{m!} = \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \phi(t;q)}{\partial q^m} \right|_{q=0}. \quad (3.30)$$

Taylor teoremi ile $\phi(t; q)$ aşağıdaki gibi yardımcı parametre q nun bir kuvvet serisinde açılabilir:

$$\phi(t; q) = \phi(t; 0) + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \phi(t; q)}{\partial q^m} \right|_{q=0} q^m. \quad (3.31)$$

(3.25) ve (3.30) denklemlerinden, yukarıdaki kuvvet serisi

$$\phi(t; q) = V_0(t) + \sum_{m=1}^{+\infty} V_m(t) q^m. \quad (3.32)$$

olur.

Yardımcı parametre h , yardımcı fonksiyon $H(t)$, başlangıç yaklaşımı $V_0(t)$ ve yardımcı lineer operatör L 'nin öyle uygun bir şekilde seçildiğini varsayalım ki (3.32) serileri $q = 1$ 'de yakınsak olsun. O zaman, $q = 1$ de (3.32) serisi

$$\phi(t; 1) = V_0(t) + \sum_{m=1}^{+\infty} V_m(t) \quad (3.33)$$

olur. Böylece, (3.28) denklemini kullanarak,

$$V(t) = V_0(t) + \sum_{m=1}^{+\infty} V_m(t) \quad (3.34)$$

elde ederiz.

Yukarıdaki ifade řu ana kadar bilinmeyen başlangıç tahmini $V_0(t)$ ve tam çözüm $V(t)$ arasındaki ilişkiyi $V_m(t)$ ($m=1,2,3,\dots$) terimleri vasıtasıyla veriyor.

3.2 Yüksek Mertebeden Deformasyon Denklemi

$$\vec{V}_n = \{V_0(t), V_1(t), V_2(t), \dots, V_n(t)\}.$$

vektörü tanımlansın. (3.30) tanımına göre hakim olunan denklem ve $V_m(t)$ nin başlangıç koşulu (3.21) ve (3.22) sıfırncı mertebeden deformasyon denklemlerinden

çıkarılabilir. (3.21) ve (3.22) denklemlerini q parametresine bağlı olarak m kez diferansiyelleyerek sonra $q = 0$ alarak ve son olarak $m!$ ile bölerek,

$$V_m(0) = 0, \quad (3.35)$$

başlangıç koşuluna bağlı olarak

$$L[V_m(t) - \chi_m V_{m-1}(t)] = \hbar H(t) R_m(\vec{V}_{m-1}), \quad (3.36)$$

m 'inci mertebeden deformasyon denklemini elde ederiz. Burada

$$R_m(\vec{V}_{m-1}) = \frac{1}{(m-1)!} \left. \frac{\partial^{m-1} N[\Phi(t; q)]}{\partial q^{m-1}} \right|_{q=0} \quad (3.37)$$

ve

$$\chi_m = \begin{cases} 0 & m \leq 1, \\ 1 & m > 1, \end{cases} \quad (3.38)$$

dir. (3.20) ve (3.38) denklemlerinden

$$R_m(\vec{V}_{m-1}) = \vec{V}_{m-1}(t) + \sum_{j=0}^{m-1} V_j(t) V_{m-1-j}(t) - (1 - x_m). \quad (3.39)$$

ifadesini elde edilir.

Yukarıdaki ifade ile verilen $R_m(\vec{V}_{m-1})$ 'in sadece

$$V_0(t), V_1(t), V_2(t), \dots, V_{m-1}(t),$$

ifadesine bağlı olduğuna dikkat edilmelidir bunlar (3.35) ve (3.36) m 'inci mertebeden deformasyon denklemlerini çözerken bulunur. Böylece yardımcı operatör L 'nin (3.18) tanımına göre (3.36) denklemi (3.35) lineer başlangıç koşuluna bağlı bir lineer birinci mertebeden diferansiyel denklemdir. Bundan dolayı (3.35) ve (3.36) yüksek mertebeden deformasyon denklemlerinin $V_m(t)$ çözümü özellikle Mathematica, Maple, Matlab gibi hesaplama yazılımları yardımıyla kolaylıkla elde edilebilir.

$V(t)$ nin m 'inci mertebeden yaklaşımı

$$V(t) \approx \sum_{n=0}^m V_n(t) \quad (3.40)$$

ile verilir.

Teorem 3.1 Eğer seri $u_0(x) + \sum_{m=1}^{m=+\infty} u_m(x)$ işlemiyle $u(x)$ fonksiyonuna yakınsarsa, $u_m(x)$ yüksek mertebeden deformasyon

$$u_m(x) - x_m u_{m-1}(x) = c_0 R_m(\bar{u}_{m-1}, x)$$

ile

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1, \\ 1, & m > 1, \end{cases}$$

ve

$$\begin{aligned} R_m(\bar{u}_{m-1}, x) &= \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} N[\phi(x; p)]}{\partial p^{m-1}} \Big|_{p=0} \\ &= \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} N \left[\sum_{n=0}^{n=+\infty} u_n(x) p^n \right]}{\partial p^{m-1}} \Big|_{p=0} \end{aligned}$$

denklemleri kullanılarak bulunur. Bu $u(x)$ integralinin tam sonucudur.

İspat: Şimdi teoremi ispat etmek için

$$H_m(x) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m N \left[\sum_{n=0}^{n=+\infty} u_n(x) p^n \right]}{\partial p^m} \Big|_{p=0} \quad (3.41)$$

tanımlanırsa ve burada N operatörünün daraldığını düşünelim. Şimdi eğer $\sum_{m=1}^{m=+\infty} H_m(x)$

serisi $u(x)$ e yaklaşırsa $\sum_{m=1}^{m=+\infty} H_m(x)$ serisi $N[u(x)]$ e yaklaşır. Şimdi $\sum_{m=1}^{m=+\infty} u_m(x)$ yaklaşımından

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u_m(x) = 0, \quad a < x < b \quad (3.42)$$

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1, \\ 1, & m > 1 \end{cases}$$

tanımını kullanarak

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^n [u_m(x) - x_m u_{m-1}(x)] &= u_1(x) + [u_2(x) - u_1(x)] + [u_3(x) - u_2(x)] + \dots \\ &+ [u_n(x) - u_{n-1}(x)] = u_n(x) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklem (3.41)'den

$$\sum_{m=1}^n [u_m(x) - x_m u_{m-1}(x)] = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = 0 \quad (3.43)$$

elde edilir. Şimdi (3.42) ve

$$u_m(x) - x_m u_{m-1}(x) = c_0 R_m(\vec{u}_{m-1}, x)$$

dan

$$\hbar \sum_{m=1}^{+\infty} [R_m(\vec{u}_{m-1}, x)] = \sum_{m=1}^{+\infty} [u_m(x) - x_m u_{m-1}(x)] = 0 \quad (3.44)$$

elde ederiz. $\hbar \neq 0$ alınırsa (3.44) dan

$$\sum_{m=1}^{+\infty} [R_m(\vec{u}_{m-1}, x)] = 0 \quad (3.45)$$

bulunur. Şimdi (3.45) denklemini devam ettirirsek

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{+\infty} [R_m(\bar{u}_{m-1}, x)] &= \sum_{m=1}^{+\infty} \left[-\int_a^b K(x, t) \left[L[u_{m-1}(t)] + \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} N \left[\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(t) p^k \right]}{\partial p^{m-1}} \right]_{p=0} \right] dt \\
&= \sum_{m=1}^{+\infty} \left[u_{m-1}(x) - (1-x_m) f(x) - \int_a^b K(x, t) [L[u_{m-1}(t)] + H_{m-1}(t)] dt \right] \\
&= \sum_{m=1}^{+\infty} [u_{m-1}(x)] - f(x) - \int_a^b K(x, t) \left[L \left[\sum_{m=1}^{+\infty} u_{m-1}(t) \right] + \sum_{m=1}^{+\infty} H_{m-1}(t) \right] dt \\
&= \sum_{m=0}^{+\infty} [u_m(x)] - f(x) - \int_a^b K(x, t) \left[L \left[\sum_{m=0}^{+\infty} u_m(t) \right] + \sum_{m=0}^{+\infty} H_m(t) \right] dt \\
&= u(x) - f(x) - \int_a^b K(x, t) [L[u(t)] + N[u(t)]] dt \tag{3.46}
\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemde L lineer operatörü ve $\sum_{m=0}^{m=+\infty} u_m(x)$ ve $\sum_{m=0}^{m=+\infty} H_m(x)$ serileri $u(x)$ ve $N[u(x)]$ yaklaşır. Şimdi (3.45) ve (3.46)'yi kullanarak

$$u(x) - f(x) - \int_a^b K(x, t) [L[u(t)] + N[u(t)]] dt \tag{3.47}$$

elde edilir. Bundan dolayı $u(x)$ Fredholm integral denklemi

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t) [L[u(t)] + N[u(t)]] dt$$

Fredholm integral denklemi tam çözümdür. Bu da ispatı tamamlar.

4. BÖLÜM

UYGULAMALAR

Bu bölümde, Fredholm ve Volterra ikinci tür integral denklemlerinin lineer ve lineer olmayan 5 örneğinin HAM ile çözümlerini inceleyeceğiz.

Örnek 4.1

$$u(x) = \sqrt{x} - \int_0^1 \sqrt{xt}u(t)dt \quad (4.1)$$

Lineer Fredholm integral denklemini alalım[32] Bu problemin tam çözümü ,

$$u(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x} \quad (4.2)$$

dir. Kolaylık için ilk yaklaşım olarak $u_0(x) = 0$ i seçilir ve $N[\phi(x; p)]$ 'nin aşağıdaki gibi açıklanabilmesi için

$$H_m(x) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m N[\sum_{n=0}^{n=+\infty} u_n(x)p^n]}{\partial p^m} \Big|_{p=0}$$

denklemleri gereklidir. Buradan

$$N[\phi(x; p)] = \phi(x; p) - \sqrt{x} + \int_0^1 \sqrt{xt}p(t; p)$$

elde edilir. Şimdi

$$\begin{aligned} R_m(\bar{u}_{m-1}, x) &= \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} N[\phi(x; p)]}{\partial p^{m-1}} \Big|_{p=0} \\ &= \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} N\left[\sum_{n=0}^{n=+\infty} u_n(x)p^n\right]}{\partial p^{m-1}} \Big|_{p=0} \end{aligned}$$

denkleme dönüşür. Burada

$$\begin{aligned} R_m(\bar{u}_{m-1}, x) &= \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} [\sum_{n=0}^{n=+\infty} u_n(x) p^n]}{\partial p^{m-1}} \Big|_{p=0} \\ &= u_{m-1}(x) - (1-x_m)\sqrt{x} + \int_0^1 \sqrt{xt} u_{m-1}(t) dt \end{aligned}$$

olur. m nci mertebeden deformasyon denklemi aşağıdaki gibidir.

$$u_m(x) = x_m u_{m-1}(x) + \hbar [u_{m-1}(x) - (1-x_m)\sqrt{x} + \int_0^1 \sqrt{xt} u_{m-1}(t) dt] \quad (4.3)$$

$u_0(x) = 0$ seçerek (4.3) denklemiyle ardışık olarak $u_i(x)$, $i = 1, 2, 3, \dots$ aşağıdaki gibi elde edilir

$$u_1(x, \hbar) = u_0(x) + u_1(x) = -\hbar\sqrt{x}$$

$$u_2(x, \hbar) = -\frac{1}{2}\hbar(4 + 3\hbar)\sqrt{x}$$

$$u_3(x, \hbar) = -\frac{3}{4}\hbar(4 + 6\hbar + 3\hbar^2)\sqrt{x}$$

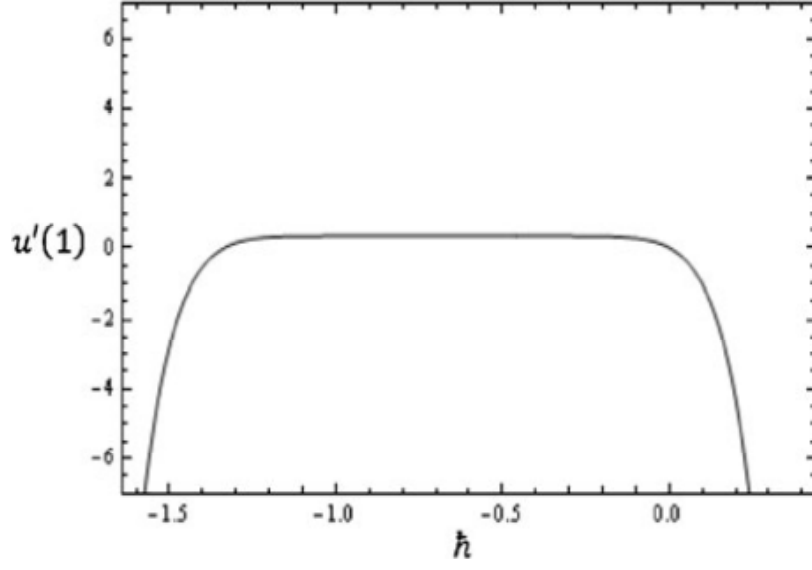
$$u_4(x, \hbar) = -\frac{1}{8}\hbar(32 + 72\hbar + 72\hbar^2 + 27\hbar^3)\sqrt{x}$$

⋮

Burada uygun bir \hbar yakınsama parametresi seçilerek $u_M(x) = \sum_{m=0}^M u_m(x)$ toplamı elde edilir ki bu olası analitik çözümdür.

$$u(x) \approx U_M(x, \hbar) = u_0(x) + \sum_{m=1}^M u_m(x)$$

\hbar ' in uygun aralığına bulmak için,



Şekil 1: h eğrisinin grafiği

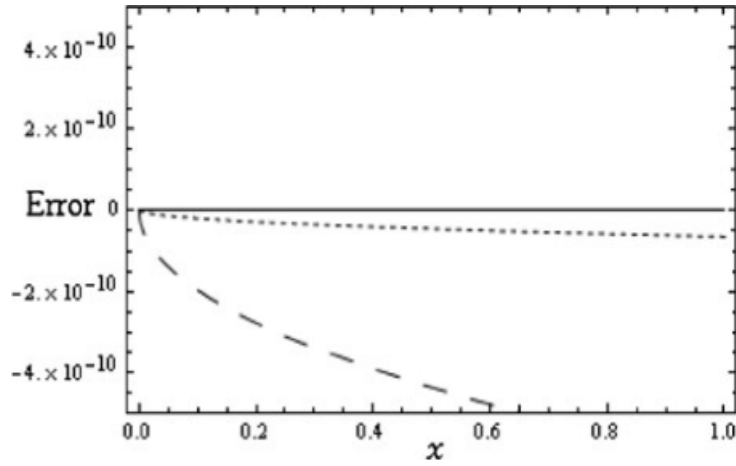
Şekil 1 deki $u'(1, h)$ ile h eğrisini çizeriz. Burada h $[-1.2, -0.1]$ şeklinde elde edilir.

$$U_M(x) = \sum_{m=0}^m u_m(x)$$

Yaklaşık çözümünün hata fonksiyonu

$$|U_M(x) - \frac{2}{3}\sqrt{x}|$$

ile gösterilir. Hata fonksiyonunun grafiğini ise aşağıdaki gibi çizeriz.



Örnek 4.2

Aşağıdaki lineer Fredholm integral denklemini ele alalım.[32]

$$u(x) = x + \int_{-1}^1 xtu(t)dt \quad (4.4)$$

Bu problemin tam çözümü

$$u(x) = 3x$$

dir. Şimdi kolaylık için ilk yaklaşım olarak $u_0(x) = 0$ i seçilir. Buradan m nci mertebeden deformasyon denklemini aşağıdaki gibidir.

$$u_m(x) - x_m u_{m-1}(x) = \hbar [u_{m-1}(x) - (1 - x_m)x - \int_{-1}^1 xtu_{m-1}(t)dt] \quad (4.5)$$

Başlangıç yaklaşımı $u_0(x) = 0$ seçerek ve

$$u_m(x) = x_m u_{m-1}(x) + \hbar [u_{m-1}(x) - (1 - x_m)x - \int_{-1}^1 xtu_{m-1}(t)dt]$$

denklemini kullanarak mathematica yardımıyla $u_i(x, \hbar)$ $i=1,2,\dots$ aşağıdaki gibi elde edilir.

$$u_1(x, \hbar) = -\hbar x$$

$$u_2(x, \hbar) = -\frac{1}{3} \hbar (6 + \hbar)x$$

$$u_3(x, \hbar) = -\frac{1}{9} \hbar (27 + 9\hbar + \hbar^2)x$$

$$u_4(x, \hbar) = -\frac{1}{27} \hbar (108 + 54\hbar + 12\hbar^2 + \hbar^3)x$$

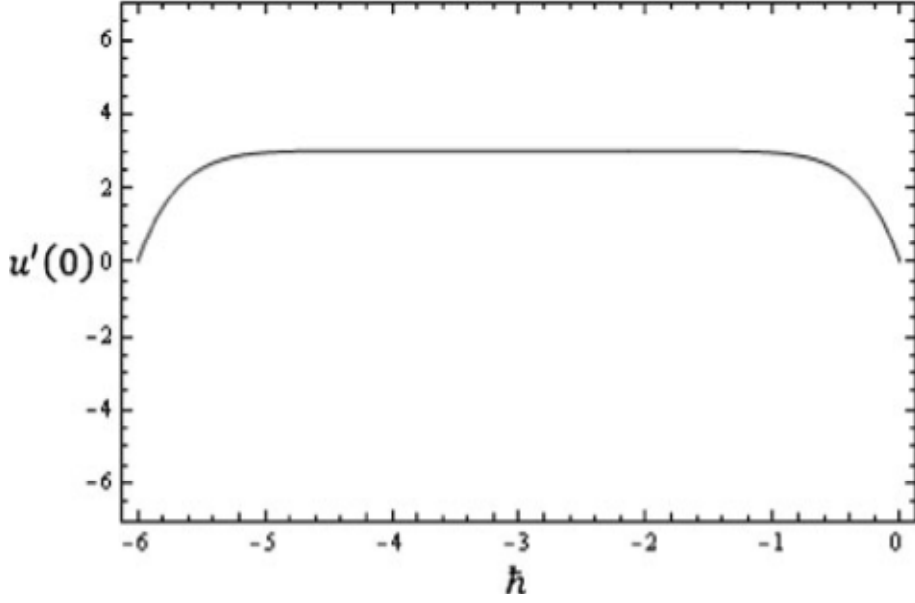
$$u_5(x, \hbar) = -\frac{1}{81} \hbar (405 + 270\hbar + 90\hbar^2 + 15\hbar^3 + \hbar^4)x$$

⋮

Burada uygun bir \hbar yakınsama parametresi seçilerek $u_M(x) = \sum_{m=0}^M u_m(x)$ toplamı elde edilir ki bu olası analitik çözümdür.

$$u(x) \approx U_M(x, \hbar) = u_0(x) + \sum_{m=1}^M u_m(x)$$

\hbar 'in uygun aralığına bulmak için,



Şekil 2: \hbar eğrisinin grafiği

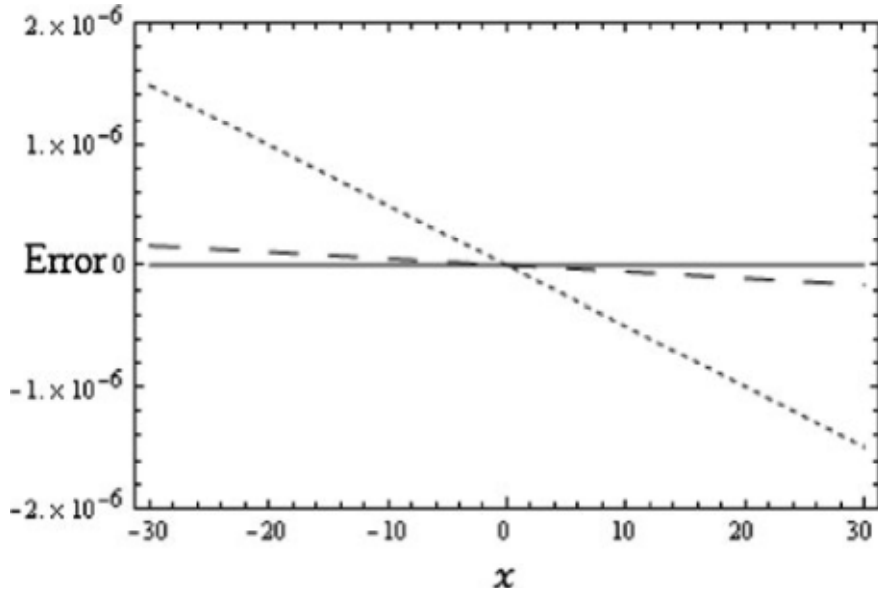
Şekil 2 deki $u'(0, \hbar)$ \hbar eğrisini çizeriz. Burada \hbar $[-5, -1]$ şeklinde elde edilir.

$$U_M(x) = \sum_{m=0}^m u_m(x)$$

Yaklaşık çözümünün hata fonksiyonu

$$|U_M(x) - 3x|$$

ile gösterilir. Hata fonksiyonun grafiğini ise aşağıdaki gibi çizeriz



Örnek 4.3

Aşağıdaki lineer olmayan Fredholm integral denklemini ele alalım [32]

$$u(x) = \frac{8}{3}x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_0^1 (t-x)u^2(t)dt \quad (4.6)$$

Bu problemin tam çözümü

$$u(x) = 2x$$

dir. Kolaylık için $u_0(x)=0$ seçilir. Buradan , m nci mertebeden deformasyon denklemini aşağıdaki gibidir

$$u_m(x) - x_m u_{m-1}(x) = \hbar [u_{m-1}(x) - (1-x_m) \left(\frac{8}{3}x - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \int_0^1 (t-x) \left(\sum_{j=0}^{m-1} u_j(t) u_{m-1-j}(t) \right) dt]$$

başlangıç yaklaşımı $u_0(x) = 0$ seçerek ve

$$u_m(x) = x_m u_{m-1}(x) + \hbar [u_{m-1}(x) - (1-x_m) \left(\frac{8}{3}x - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \int_0^1 (t-x) \left(\sum_{j=0}^{m-1} u_j(t) u_{m-1-j}(t) \right) dt]$$

denklemini kullanarak mathematica yardımıyla $u_i(x, \hbar)$ $i=1,2,\dots$ aşağıdaki gibi elde edilir.

$$u_1(x, \hbar) = \hbar \left(\frac{1}{2} - \frac{8x}{3} \right)$$

$$u_2(x, \hbar) = -\frac{1}{6} \hbar (2 + \hbar) (-3 + 16x)$$

$$u_3(x, \hbar) = -\frac{1}{432} \hbar (216(-3 + 16x) + 216\hbar(-3 + 16x) + \hbar^2(3 + 874x))$$

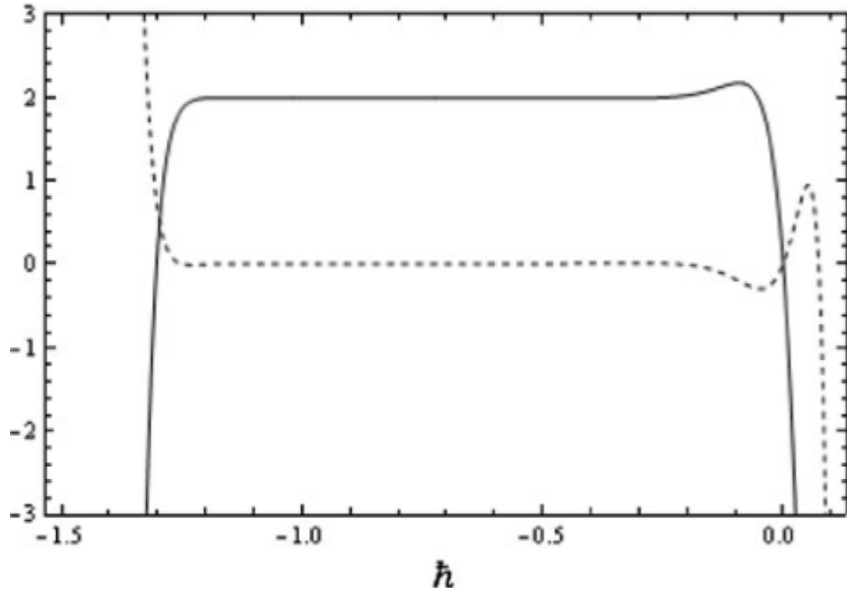
$$u_4(x, \hbar) = -\frac{1}{432} \hbar (288(-3 + 16x) + 432\hbar(-3 + 16x) + \hbar^3(441 + 318x) + 4\hbar^2(3 + 874x))$$

⋮

Burada uygun bir \hbar yakınsama parametresi seçilerek $u_M(x) = \sum_{m=0}^M u_m(x)$ toplamı elde edilir ki bu olası analitik çözümdür.

$$u(x) \approx U_M(x, \hbar) = u_0(x) + \sum_{m=1}^M u_m(x)$$

\hbar ' in uygun aralığına bulmak için,



Şekil 3: h eğrisinin grafiği

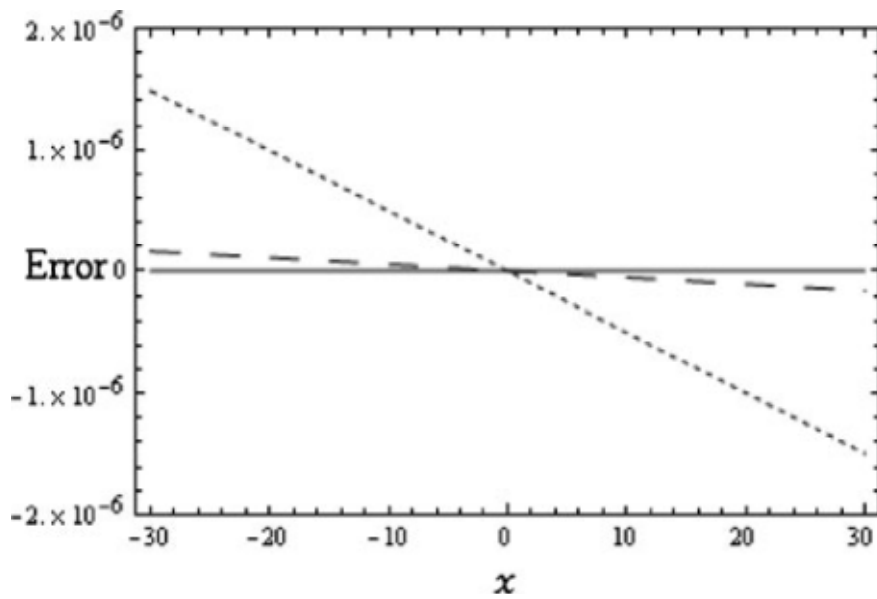
Şekil 3 deki $u(0, h)$ ve $u'(0, h)$ ile h eğrisini çizeriz. Burada h $[-1.2, 0.2]$ şeklinde elde edilir.

$$U_M(x) = \sum_{m=0}^m u_m(x)$$

Yaklaşık çözümünün hata fonksiyonu

$$|U_M(x) - 2x|$$

ile gösterilir. Hata fonksiyonun grafiğini ise aşağıdaki gibi çizeriz.



Örnek 4.4

Aşağıdaki lineer Fredholm integral denklemini ele alalım

$$u(x) = \sin x + x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} xtu(t)dt$$

bu problemin tam çözümü

$$u(x) = \sin x$$

dir. Şimdi bu problemin m nci mertebeden deformasyon denklemini aşağıdaki gibidir.

$$u_m(x) - x_m u_{m-1}(x) = \hbar [u_{m-1}(x) - (1 - x_m)(\sin x + x) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} xtu_{m-1}(t)dt]$$

Başlangıç yaklaşımı $u_0(x) = 0$ seçerek ve

$$u_m(x) = x_m u_{m-1}(x) + \hbar [u_{m-1}(x) - (1 - x_m)(\sin x + x) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} xtu_{m-1}(t)dt]$$

denklemini kullanarak mathematica yardımıyla $u_i(x, \hbar)$ $i=1,2,\dots$ aşağıdaki gibi elde edilir

$$u_1(x, \hbar) = -\hbar(x + \sin x)$$

$$u_2(x, \hbar) = -\frac{1}{24} \hbar((48 + \hbar(48 + \pi^3))x + 24(2 + \hbar)\sin x)$$

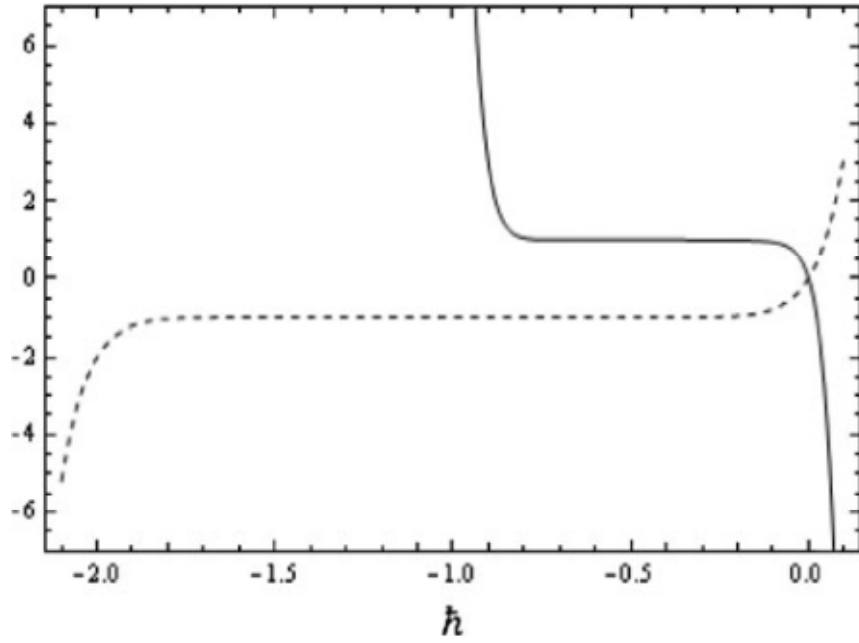
$$u_3(x, \hbar) = -\frac{1}{576} \hbar(1728 + 72\hbar(48 + \pi^3) + \hbar^2(1728 + 72\hbar^2 + \pi^6))x - \hbar(3 + 3\hbar + \hbar^2)\sin x$$

⋮

Burada uygun bir \hbar yakınsama parametresi seçilerek $u_M(x) = \sum_{m=0}^M u_m(x)$ toplamı elde edilir ki bu olası analitik çözümdür.

$$u(x) \approx U_M(x, \hbar) = u_0(x) + \sum_{m=1}^M u_m(x)$$

\hbar 'ın uygun aralığına bulmak için,



Şekil 4: \hbar eğrisinin grafiği

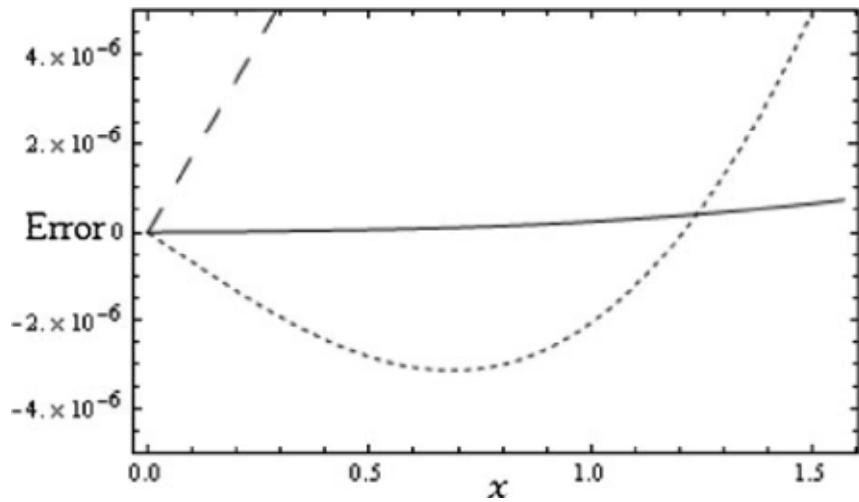
Şekil 4 deki $u(0, \hbar)$ ve $u'(0, \hbar)$ ile \hbar eğrisini çizeriz. Burada \hbar $[-0.8, -0.1]$ şeklinde elde edilir.

$$U_M(x) = \sum_{m=0}^m u_m(x)$$

Yaklaşık çözümünün hata fonksiyonu

$$|U_M(x) - \sin x|$$

ile gösterilir. Hata fonksiyonun grafiğini ise aşağıdaki gibi çizeriz.



Örnek 4.5

Aşağıdaki lineer olmayan Fredholm integral denklemini ele alalım.[32]

$$u(x) = \sin x + \frac{\pi}{4}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} xu^2(t)dt \quad (4.7)$$

Bu problemin tam çözümü

$$u(x) = \sin x$$

dir. İlk yaklaşım olarak $u_0(x) = 0$ seçilir. Bu problem için m nci mertebeden deformasyon denklemini aşağıdaki gibi elde edilir.

$$u_m(x) - x_m u_{m-1}(x) = \hbar [u_{m-1}(x) - (1 - x_m)(\sin x + \frac{\pi}{4}x) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x (\sum_{j=0}^{m-1} u_j(t) u_{m-i-j}(t)) dt] \quad (4.8)$$

başlangıç yaklaşımı $u_0(x) = 0$ seçerek ve

$$u_m(x) = x_m u_{m-1}(x) + \hbar [u_{m-1}(x) - (1 - x_m)(\sin x + \frac{\pi}{4}x) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x (\sum_{j=0}^{m-1} u_j(t) u_{m-i-j}(t)) dt]$$

denklemini kullanarak mathematica yardımıyla $u_i(x, \hbar)$ $i=1,2,\dots$ aşağıdaki gibi elde ederiz.

$$u_1(x, \hbar) = -\frac{1}{4} \hbar (\pi x + 4 \sin x)$$

$$u_2(x, \hbar) = -\frac{1}{4} \hbar (2 + \hbar) (\pi x + 4 \sin x)$$

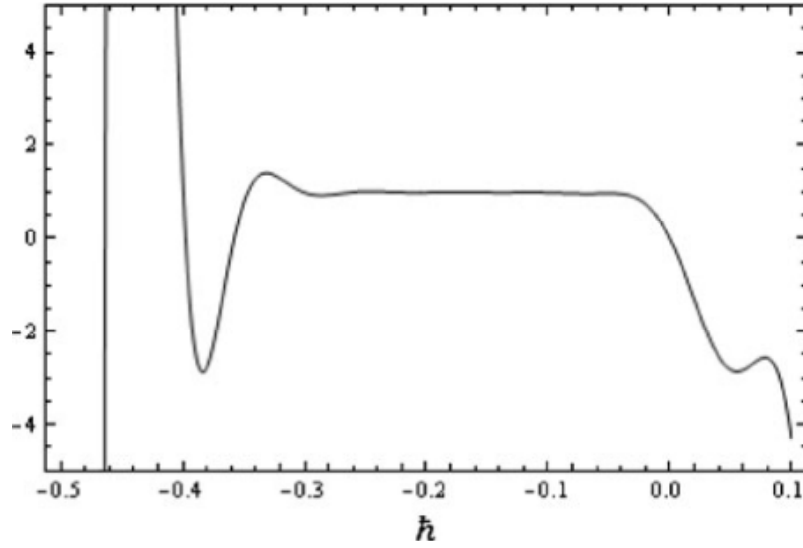
$$u_3(x, \hbar) = -\frac{1}{384} \hbar x (-288 - 288\hbar + \hbar^2 (192 + \pi^4)) x - \hbar (3 + 3\hbar + \hbar^2) \sin x$$

⋮

Burada uygun bir \hbar yakınsama parametresi seçilerek $u_M(x) = \sum_{m=0}^M u_m(x)$ toplamı elde edilir ki bu olası analitik çözümdür.

$$u(x) \approx U_M(x, \hbar) = u_0(x) + \sum_{m=1}^M u_m(x)$$

\hbar 'in uygun aralığına bulmak için,



Şekil 5: \hbar eğrisinin grafiği

Şekil 5 deki $u'(0, \hbar)$ ile \hbar eğrisini çizeriz. Burada \hbar $[-0.3, 0.05]$ şeklinde elde edilir.

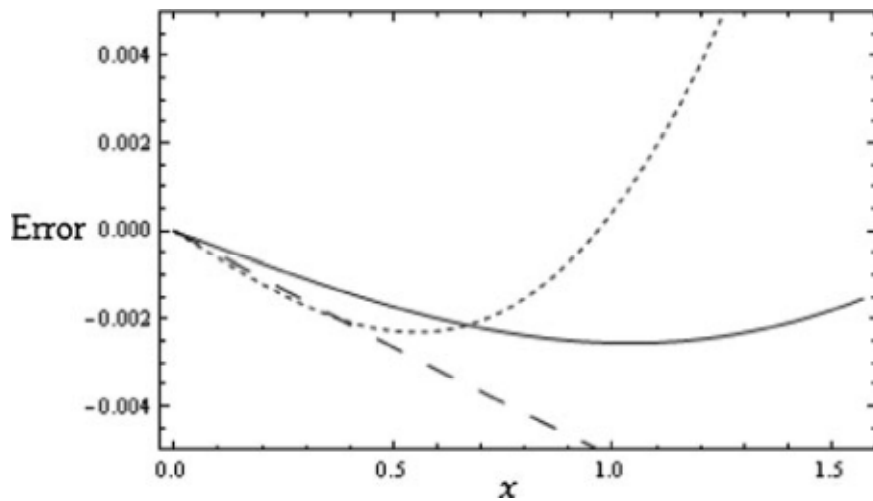
$$U_M(x) = \sum_{m=0}^m u_m(x)$$

Yaklaşık çözümünün hata fonksiyonu

$$|U_M(x) - \sin x|$$

ile gösterilir.

Hata fonksiyonun grafiğini ise aşağıdaki gibi çizeriz.



Örnek 4.6

$$u(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{x^2} \int_0^x \sqrt{xt} u(x) dt$$

Volterra integral denkleminin tam sonucu aşağıdaki

$$u(x) = \frac{2}{3} \sqrt{x}$$

dir.[31] $u_0(x) = 0$ geçerli en yakın tahmin olarak seçelim ve

$$N[\varphi(x; p)] = \varphi(x; p) - f(x) - \int_0^x K(x, t) [L[\varphi(t; p)] + N[\varphi(t; p)]] dt$$

denklemini tanımlayabilmek için $N[\varphi(x; p)]$ alalım.

$$N[\varphi(x; p)] = \varphi(x; p) - \sqrt{x} + \frac{1}{x^2} \int_0^x \sqrt{xt} \varphi(t; p) dt$$

Şimdi

$$R_m(\bar{u}_{m-1}, x) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} N[\varphi(x; p)]}{\partial p^{m-1}} \Big|_{p=0} = \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} N \left[\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) p^n \right]}{\partial p^{m-1}} \Big|_{p=0}$$

denklemini ve

$$u_m(x) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \varphi(x; p)}{\partial p^m} \Big|_{p=0}, m = 0, 1, 2, \dots$$

tanımının yardımıyla

$$\begin{aligned}
R_m(\vec{u}_{m-1}, x) &= \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} N[\varphi(x; p)]}{\partial p^{m-1}} \Big|_{p=0} \\
&= \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} N\left[\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) p^n\right]}{\partial p^{m-1}} \Big|_{p=0} \\
&= u_{m-1}(x) - (1-x)\sqrt{x} + \frac{1}{x^2} \int_0^x \sqrt{xt} u_{m-1}(t) dt
\end{aligned}$$

haline gelir. Bundan dolayı,

$$u_m(x) - x_m u_{m-1}(x) = c_0 R_m(\vec{u}_{m-1}, x)$$

yüksek mertebeden deformasyon denklemi aşağıdaki gibidir.

$$u_m(x) - x_m u_{m-1}(x) = c_0 \left[u_{m-1}(x) - (1-x_m)\sqrt{x} + \frac{1}{x^2} \int_0^x \sqrt{xt} u_{m-1}(t) dt \right]$$

$u_0(x) = 0$ alınarak ve

$$u(x) \approx U_M(x, c_0) = u_0(x) + \sum_{m=1}^M u_m(x)$$

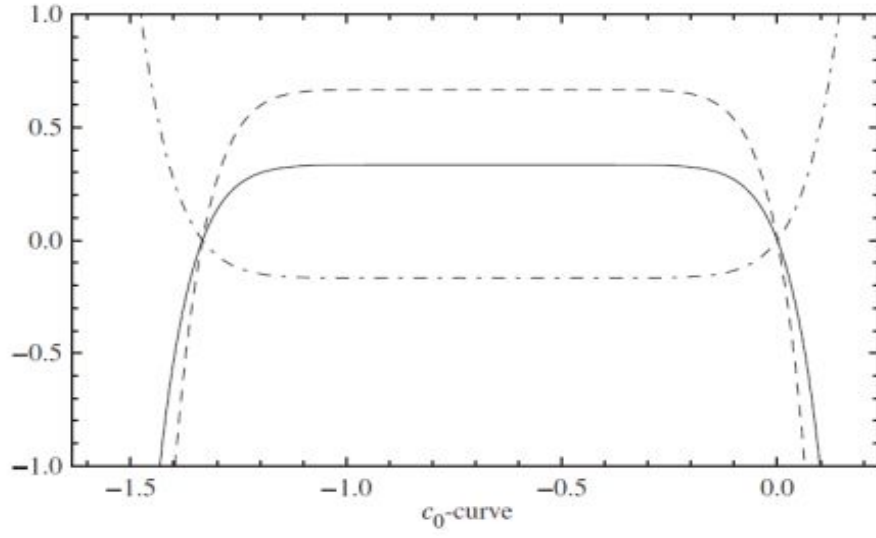
denklemini kullanarak

$$\begin{aligned}
U_1(x, c_0) &= u_0(x) + u_1(x) = -c_0 \sqrt{x}, \\
U_2(x, c_0) &= -\frac{1}{2} c_0 (4 + 3c_0) \sqrt{x}, \\
U_3(x, c_0) &= -\frac{3}{4} c_0 (4 + 6c_0^2) \sqrt{x} \\
U_4(x, c_0) &= -\frac{1}{8} c_0 (32 + 72c_0 + 72c_0^2 + 27c_0^3) \sqrt{x}, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu yolla $u_i(x), i = 1, 2, 3, \dots$ parametresi c_0 'ı seçerek $U_M(x) = \sum_{m=0}^M u_m(x)$ 'e

varırız.[31] Bu yakın analitik çözümdür. c_0 'ın geçerli alanını almak için, yakınsama

$U_m(x)$ 'te M sonsuza gider. $u(1), u'(1)$ ve $u''(1)$ aşağıda grafik de gösterelim.

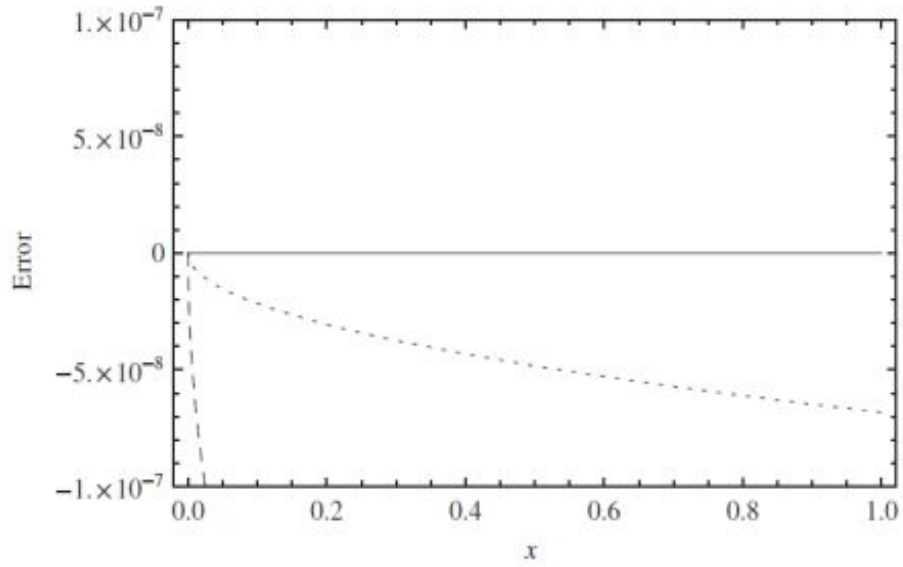


Şekil 6: c_0 eğrisinin grafiği

Grafik ten c_0 için geçerli bölgeyi belirlemek kolaydır. Ayrıca

$$U_m(x) = \sum_{m=0}^m u_m(x)$$

hatası aşağıda grafik te gösterilir.



Örnek 4.7

Son olarak, aşağıdaki lineer olmayan volterra integral denklemini ele alalım.[31]

$$u(x) = \int_0^x \sin x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \int_0^x u^2(t)dt$$

$u(x) = \sin x$ tam sonucudur. Bu durumda, yüksek mertebeden deformasyon denklemini

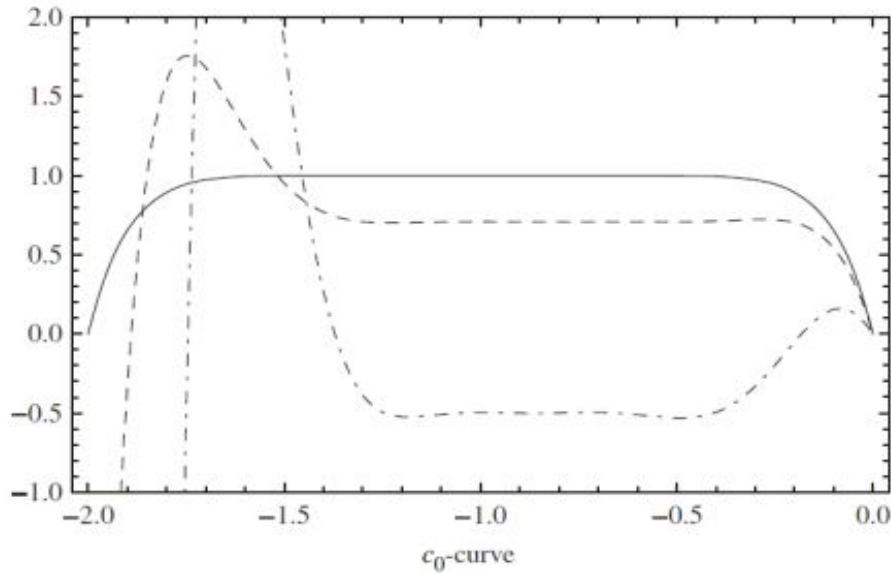
$$u_m(x) - x_m u_{m-1}(x) = C_0 \left[\begin{array}{l} u_{m-1}(x) - (1 - x_m) \left(\sin x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x \right) \\ + \int_0^x \left(\sum_{j=0}^{m-1} u_j(t) u_{m-1-j}(t) \right) dt \end{array} \right]$$

dir. $u_0(x) = 0$ i diğer örneklerde olduğu gibi alırsak

$$U_1(x, c_0) = \frac{1}{4}c_0(-2x - 4\sin x + \sin 2x),$$

$$U_2(x, c_0) = \frac{1}{4}c_0(2 + c_0)(-2x - 4\sin x + \sin 2x),$$

elde edilir. Buda aşağıda grafik de c_0 eğrisini $u(\pi/4), u'(0)$ ve $u''(\pi/6)$ değerleri için çizilmiştir.

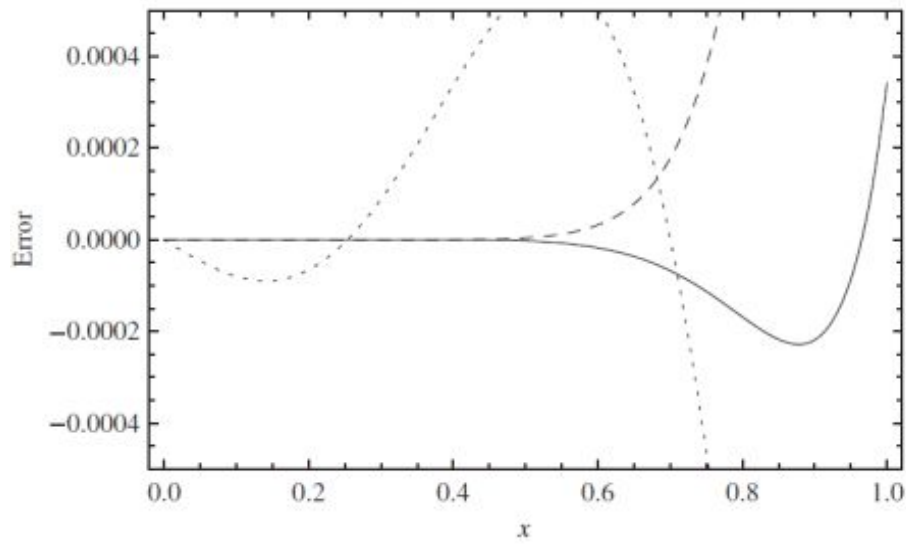


Şekil 7: c_0 eğrisinin grafiği

c_0 yakınsama parametresi $[-1.2, -0.5]$ elde edilir.

$$|U_M(x) - \sin x|$$

denkleminde $M=10$ seçip, c_0 yakınsama parametresi ile hata grafiğini aşağıda grafik de gösterelim.



Örnek 4.8

Aşağıdaki ikinci türden lineer Fredholm integral denklemini tam sonucu ile ele alalım.[30]

$$u_1(x) = x^2 \quad \text{ve} \quad u_2(x) = -x + x^2 + x^3$$

$$u_1(x) = g_1(x) + \int_0^1 (x-t)^3 u_1(t) dt + \int_0^1 (x-t)^2 u_2(t) dt$$

$$u_2(x) = g_2(x) + \int_0^1 (x-t)^4 u_1(t) dt + \int_0^1 (x-t)^3 u_2(t) dt$$

Buradan

$$g_1(x) = \frac{1}{20} - \frac{11}{30}x + \frac{5}{3}x^2 - \frac{1}{3}x^3$$

ve

$$g_2(x) = -\frac{1}{30} - \frac{41}{60}x + \frac{3}{20}x^2 + \frac{23}{12}x^3 - \frac{1}{3}x^4$$

elde edilir.

Örnek 4.9

Aşağıdaki ikinci türden lineer Volterra integral denklem sistemini ele alalım.[30] Bu sistemin tam çözümleri $u_1(x) = x$, $u_2(x) = x^2 - 1$, $u_3(x) = 2x^2 + 3$ ve $u_4(x) = x^3 - 5$ dir. Buradan

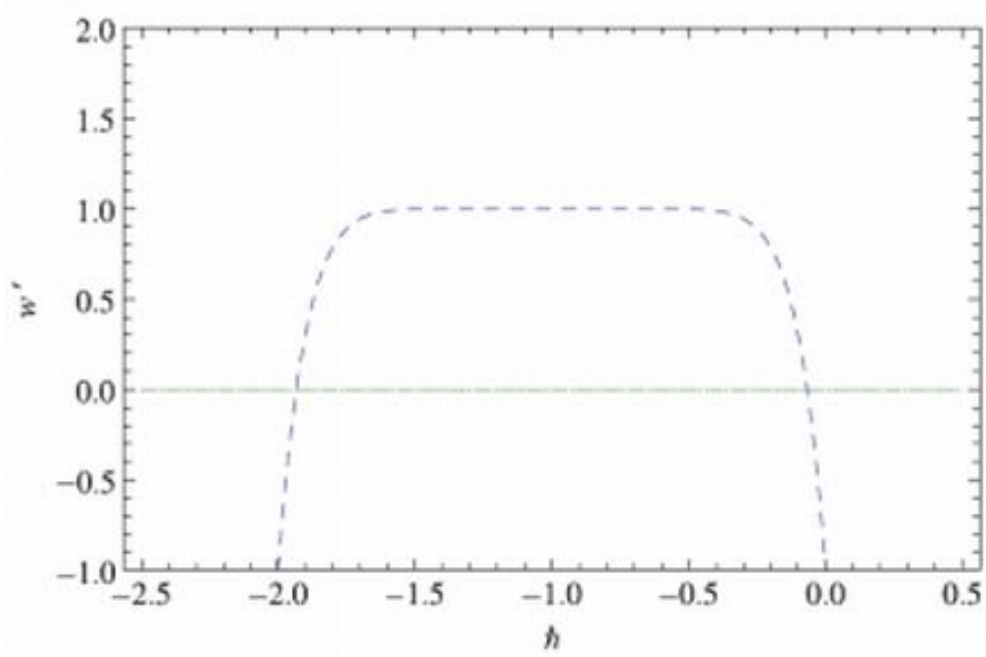
$$u_1(x) = -x^3 - x + \int_0^x (u_2(t) + u_3(t)) dt$$

$$u_2(x) = \frac{1}{4}x^5 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 - 1 + \int_0^x ((x-1)u_1(t) + tu_2(t) - xu_4(t)) dt$$

$$u_3(x) = \frac{1}{2}x^6 - \frac{31}{6}x^3 + 2x^2 + 3 + \int_0^x ((x-t)u_1(t) - 3t^2u_4(t)) dt$$

$$u_4(x) = x^3 - 5 + \int_0^x (2x - 3t)u_1(t) dt$$

elde edilir. Bu denklem sisteminin sonuçları aşağıda Grafik 2, Tablo 2 te sunulmuştur.



Grafik 2. 10. yaklaşımın HAM çözümünün h grafiği

x_i	$\ \tilde{u}_{1,10}(x_i; -1.001)\ $	$\ \tilde{u}_{2,10}(x_i; -1.001)\ $	$\ \tilde{u}_{3,10}(x_i; -1.001)\ $	$\ \tilde{u}_{4,10}(x_i; -1.001)\ $
0.1	2.13718×10^{-15}	3.33067×10^{-15}	4.44089×10^{-16}	0
0.2	2.55906×10^{-14}	2.75335×10^{-14}	2.22045×10^{-15}	0
0.3	3.97460×10^{-14}	1.08802×10^{-14}	4.88498×10^{-15}	1.77636×10^{-15}
0.4	3.57381×10^{-13}	2.38143×10^{-13}	7.81597×10^{-14}	7.28306×10^{-14}
0.5	2.45137×10^{-12}	9.09495×10^{-13}	1.02318×10^{-12}	6.37712×10^{-13}
0.6	1.29829×10^{-11}	1.20726×10^{-12}	8.66995×10^{-12}	1.29408×10^{-12}
0.7	5.76846×10^{-11}	1.57367×10^{-11}	5.89857×10^{-11}	1.55573×10^{-11}
0.8	1.47747×10^{-10}	1.38427×10^{-10}	3.62262×10^{-10}	1.80762×10^{-10}
0.9	1.38152×10^{-10}	7.39339×10^{-10}	1.83268×10^{-09}	1.28539×10^{-09}
1	4.18663×10^{-09}	2.71490×10^{-09}	7.25203×10^{-09}	7.51965×10^{-09}

Tablo 2 Örnek 2'nin HAM çözümüyle elde edilen mutlak hataları

Örnek 4.10

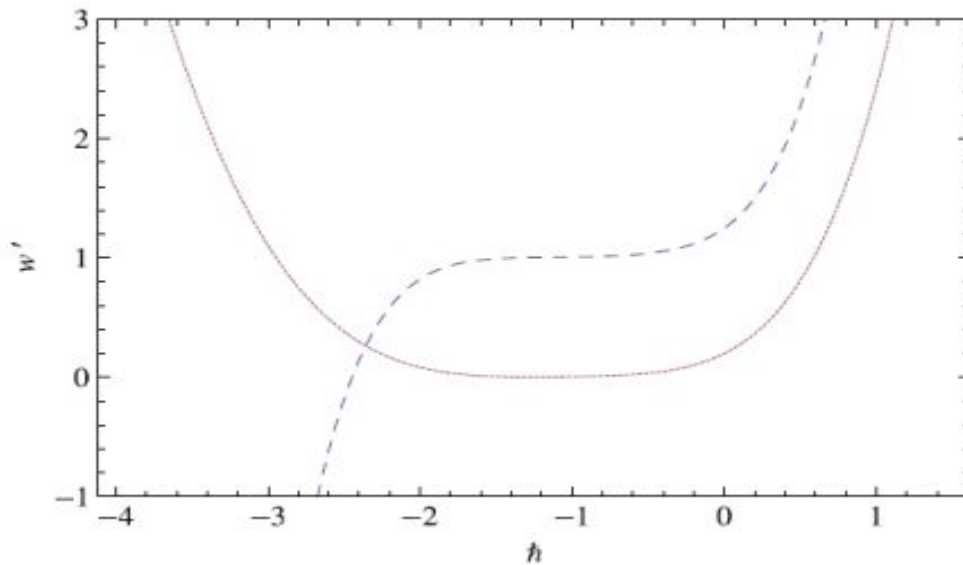
Aşağıdaki ikinci türden lineer olmayan Fredholm integral denklemini ele alalım

$$u_1(x) = x \text{ ve } u_3(x) = x^2$$

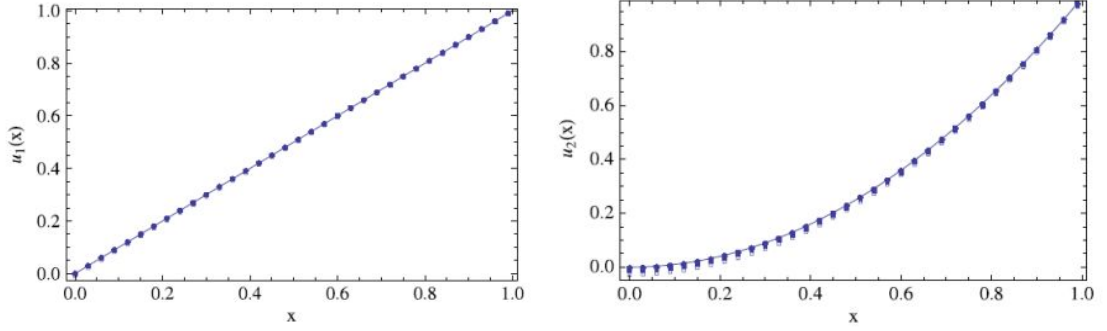
$$u_1(x) = x - \frac{1}{4}e^{-x} + \int_0^1 e^{-x} u_1(t) u_2(t) dt$$

$$u_2(x) = x^2 - \frac{1}{5}e^{-x} + \int_0^1 e^{-x} u_1^2(t) u_2(t) dt$$

Sonuçlar grafik 3 ve 4 ve tablo 4 te gösterilmiştir.[30]



Grafik 3 10. yaklaşımın HAM çözümünün h grafiği



Grafik 4 Örnek 3 ün HAM çözümünün $\hbar = -1.355$ göre sonuçlarının karşılaştırılması.

x_i	$\ \tilde{u}_{1,5}(x_i; -1.355)\ $	$\ \tilde{u}_{2,5}(x_i; -1.355)\ $	$\ \tilde{u}_{1,5}(x_i; -1)\ $	$\ \tilde{u}_{2,5}(x_i; -1)\ $
0.1	2.67453×10^{-07}	3.40009×10^{-03}	5.88009×10^{-03}	5.53505×10^{-03}
0.2	2.42009×10^{-07}	3.07653×10^{-03}	5.32053×10^{-03}	5.00832×10^{-03}
0.3	2.18975×10^{-07}	2.78376×10^{-03}	4.81421×10^{-03}	4.53171×10^{-03}
0.4	1.98139×10^{-07}	2.51885×10^{-03}	4.35608×10^{-03}	4.10046×10^{-03}
0.5	1.79280×10^{-07}	2.27915×10^{-03}	3.94154×10^{-03}	3.71025×10^{-03}
0.6	1.62219×10^{-07}	2.06226×10^{-03}	3.56646×10^{-03}	3.35718×10^{-03}
0.7	1.46785×10^{-07}	1.86601×10^{-03}	3.22706×10^{-03}	3.03770×10^{-03}
0.8	1.32818×10^{-07}	1.68844×10^{-03}	2.91997×10^{-03}	2.74862×10^{-03}
0.9	1.20179×10^{-07}	1.52776×10^{-03}	2.64210×10^{-03}	2.48706×10^{-03}
1	1.08739×10^{-07}	1.38237×10^{-03}	2.39067×10^{-03}	2.25038×10^{-03}

Tablo4 Örnek 3 ün mutlak hata tablosu

Örnek 4.11

Aşağıdaki lineer olmayan ikinci türden Volterra integral denklemlerinin

$$u_1(x) = Ln(x), u_2(x) = x \text{ ve } u_3(x) = x^2$$

tam sonuçlarını ele alalım.[30] Bu denklemlerden

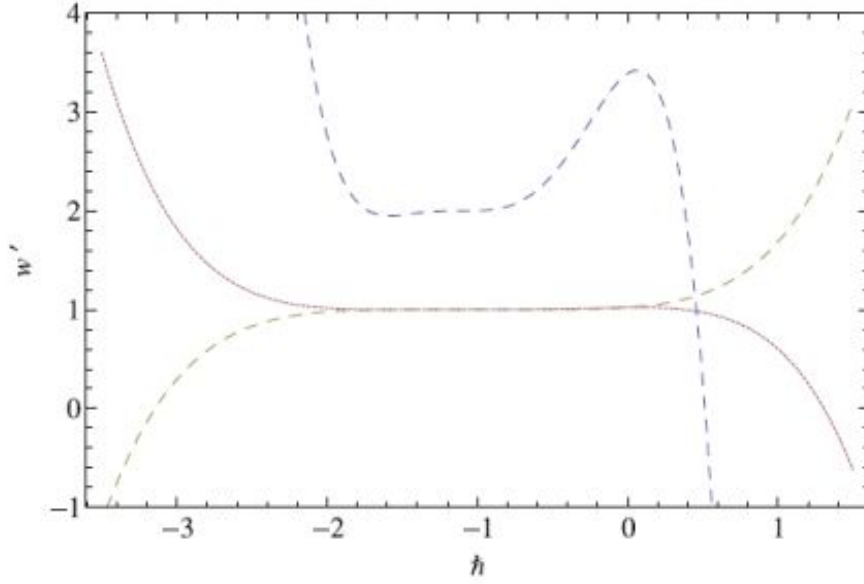
$$u_1(x) = Ln(x) - 2x^2 Ln(x) + \int_0^x u_1(t)u_2(t)dt$$

$$u_2(x) = x + \frac{1}{36}x^6(1 - 6Ln(x)) + \int_0^x tu_1(t)u_3^2(t)dt$$

$$u_3(x) = x^2 + \frac{1}{15}x^5 - \frac{1}{3} \int_0^x tu_2(t)u_3(t)dt$$

elde edilir.[30]

Bu sonuçları grafik 5 te gösterelim



Grafik 5 10. yaklaşımın HAM çözümünün h grafiği

x_i	$\ \tilde{u}_{1,10}(x_i; -1)\ $	$\ \tilde{u}_{2,10}(x_i; -1)\ $	$\ \tilde{u}_{3,10}(x_i; -1)\ $	$\ \tilde{u}_{4,10}(x_i; -1)\ $
0.1	4.03982×10^{-10}	2.10248×10^{-09}	3.43268×10^{-11}	1.33485×10^{-10}
0.2	4.23078×10^{-08}	9.35693×10^{-08}	3.46880×10^{-09}	1.37972×10^{-08}
0.3	5.64349×10^{-07}	6.61253×10^{-07}	3.67270×10^{-08}	1.80500×10^{-07}
0.4	3.09836×10^{-06}	1.96274×10^{-06}	4.75655×10^{-08}	9.65807×10^{-07}
0.5	9.89704×10^{-06}	3.19568×10^{-06}	1.10633×10^{-06}	3.02059×10^{-06}
0.6	2.07576×10^{-05}	4.03034×10^{-06}	9.19497×10^{-06}	6.64654×10^{-06}
0.7	2.91081×10^{-05}	1.13632×10^{-05}	4.14368×10^{-05}	1.37740×10^{-05}
0.8	3.05208×10^{-05}	4.34294×10^{-05}	1.29228×10^{-04}	4.33171×10^{-05}
0.9	7.91326×10^{-05}	9.14178×10^{-05}	2.89402×10^{-04}	1.87052×10^{-04}
1	4.65729×10^{-04}	7.00103×10^{-05}	3.79938×10^{-04}	7.62014×10^{-04}

Tablo3 Örnek 4 ün mutlak hata tablosu

5.BÖLÜM

TARTIŞMA VE SONUÇLAR

Bu çalışmada lineer ve lineer olmayan integral denklemlerin çözümleri bulunurken Homotopi Analiz Metodu (HAM) ile gerçek çözüme yaklaşık çözümler bulunduğu gösterildi. Ayrıca integral denklem çeşitleri ve integral denklemlerin çözüm yolları incelenmiştir.

Homotopi Analiz Metodunda bulunan sonuçlar, gerçek çözümler ve hata analizi tabloları halinde verilerek daha kolay karşılaştırma yapılması sağlanmıştır. Tablolar incelendiğinde birbirine çok yakın sonuçlar elde edildiği görülmektedir.

Sonuç olarak Homotopi Analiz Metoduyla çözülen lineer ve lineer olmayan integral denklemlerin çözümünün de gerçek çözümlere oldukça yaklaşıldığı gözlemlenmiştir.

KAYNAKLAR

1. Krasnov, M., Kiselef, A. Ve Makeronko, G., (Çeviren: C. CERİT), İntegral Denklemler, İstanbul, 1976.
2. Yalcinbas, S., and Sezer, M., The approximate solution of high-order linear Volterra- Fredholm integrodiferential equations in terms of Taylor polynomials, Appl. Math. Comput. 112,291-308,2000.
3. Maleknejad, K. And Mahmoudi, Y., Numerical Solution of linear Fredholm integral equation by using hybrid Taylor and block- pulse functions, Appl. Math. Comput. 149,799-806,2004.
4. Rashed, M.T., Numerical Solution of functionel differential, integral and integro differential equations, Appl, Numer. Math. 156,485-492, 2004.
5. Wang, W., An algorithm for solving the higher-order nonlinear Volterra-Fredholm integro- differential equation with mechanization, Appl. Math. Comput. 172,1-23, 2006.
6. Vosughi, H., Shivanian, E., and Abbasbandy, S., A new analytical technique to solve Volterra's integral equations, Math. Meth. Appl. 34, 1243-1253, 2011.
7. Abbasbandy S., Numerical solutions of the integral equations: Homotopy perturbation method and Adomian's decomposition method, Applied Mathematics and Computation, 173, 493-500. 2006.
8. Abbasbandy, S., Application of He's homotopy perturbation method for Laplace transform, Chaos Solitons & Fractals, 30, 1206-1212. 2006.
9. Liao S.J., Beyond perturbation: Introduction to the homotopy analysis method, Boca Raton:Chapman&Hall/CRC Press. 2003.
10. Liao S.J., Homotopy analysis method: a new analytic method for nonlinear problems, Appl. Math. Mech. (English-Ed.) 19 (10), 957-962. 1998.
11. Liao S.J., Homotopy analysis method: a new analytical method for nonlinear problems without small parameters, in: The 3rd International Conference on Nonlinear Mechanics, Shanghai, 829-833.1998.
12. Liao S.J., Chwang AT, General boundary element method for nonlinear problems, Int. J Numer Meth Fluids, 23, 467-83. 1996.

13. Liao S.J., "Notes on the homotopy analysis method: Some definitions and theorems", *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, 14, 983-997. 2009.
14. Song H, Tao L., Homotopy analysis of 1D unsteady, nonlinear groundwater flow through porous media. *J Coastal Res .*, 50, 292–295. 2007.
15. Molabahrami A, Khani F., The homotopy analysis method to solve the Burgers–Huxley equation. *Nonlinear Anal B: Real World Appl*, 10,2,589-600. 2009,
16. Bataineh AS, Noorani MSM, Hashim I., Solutions of time-dependent Emden–Fowler type equations by homotopy analysis method. *Phys Lett A*, 371:72–82. 2007,
17. Wang Z, Zou L, Zhang H., Applying homotopy analysis method for solving differential-difference equation. *Phys Lett A* , 369, 77–84. 2007.
18. Abbasbandy S., "The application of the homotopy analysis method to nonlinear equations arising in heat transfer", *Physics Letters A*, 360, 109-113.2006.
19. He J.H., Comparison of homotopy perturbation method and homotopy analysis method, *Applied Mathematics and Computation*, 156(2), 527-539. 2004.
20. Liao S.J., Comparison between the homotopy analysis method and homotopy perturbation method, *Appl. Math. Comput.*, 169, 1186–1194. 2005.
21. Sajid M., Hayat T., Comparison of HAM and HPM solutions in heatradiation equations, *Int. Communications in Heat and Mass Transfer*, 36, 59-62. 2009.
22. Liang S., Jeffrey D.J., 2009, Comparison of homotopy analysis method andhomotopy perturbation method through an evolution equation, *Commun. Nonliner. Sci.Numer. Simulat.*, doi:10.1016/j.cnsns.2009.02.016.
23. Biazar J., Hosseini K., Gholamin P., Homotopy Perturbation Method Fokker-Planck Equation, *International Mathematical Forum*, 3-19, 945-954. 2008.
24. Gray B., *Homotopy Theory: An Introduction to Algebraic Topology*Academic Pr , ISSN: 0122960505. 1975.
25. Liao S.J., Tan Y., A general Approach to obtain series solutions of nonlinear differential equations, *Studies in Applied Mathematics*, 119, 297-354. 2007.
26. Biazar J., Ghazvini H., Convergence of the homotopy perturbation method for partial differential equations, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 10(5), 2633-2640. 2009.

27. Aşlama R, Lineer ve Lineer Olmayan İntegral Denklemlerin ve İntegro-Diferansiyel Denklemlerin Çözümlerinin Varyasyonel İterasyon Metodu İle Hesaplanması, Yüksek Lisans Tezi, Niğde Üniversitesi, Niğde, 2011
28. Ağırseven D., Lineer ve Lineer Olmayan Problemlerin Homotopi Pertürbasyon Metodu ve Homotopi Analiz Metodu İle Hesaplanması, Doktora Tezi, Trakya Üniversitesi, 2003
29. Şeber Y., Homotopi Pertürbasyon Metodu İle İntegral Denklemlerin Çözümü, Yüksek Lisans Tezi, Dumlupınar Üniversitesi, Kütahya, 2009
30. Shidfar A., MolabrahmiA., Solving a sytem of integral eguations by an analytic method, Mathematical and Computer Modelling, 54(2011) 828-835, 2011.
31. Vosughi H., Shivanian E., Abbasbandy S., A new analytical technique to solve Volterra's integral equations, Math. Meth. Appl. Sci. 2011, 34 1243-1253, 2011
32. Abbasbandy S., Shivanian E., A new analytical technique to solve Fredholm's integral equations, Numer Algor (2011) 56: 27-43, 2010.

ÖZGEÇMİŞ

Mustafa Asım CERAN 1982 yılında Nevşehir’de doğdu. İlk ve orta öğretimini Nevşehir’de tamamladı. 2004 yılında Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’nden mezun oldu. 2011’e kadar çeşitli özel kurumlarda çalıştı. 2011 yılında Altınyıldız Kolejinde göreve başladı ve aynı yıl Nevşehir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalında Yüksek Lisansa başladı. Halen Altınyıldız Kolejinde görev yapmaktadır. Evli ve bir çocuk babasıdır.

Tel no: 05418200770

e-posta: asim_ceran@hotmail.com