T.C.
NEVŞEHİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KAPANIŞ UZAYLARI

Tezi Hazırlayan
Buket ALTUNTAŞ

Tezi Yöneten
Yrd. Doç. Dr. Deniz TOKAT

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Temmuz 2012
NEVŞEHİR

Yrd. Doç. Dr. Deniz TOKAT danışmanlığında **Buket ALTUNTAŞ** tarafından hazırlanan **"Kapanış Uzayları"** adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

23.07.2012

JÜRİ:

Başkan : Prof. Dr. Selçuk KERVAN

Üye : Doç Dr. Hacı AKTAŞ

Üye : Yrd. Doç. Dr. Deniz TOKAT

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulunun 31.07.2012 tarih ve 2012-46-1 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

01/08/2012

Prof. Dr. Selçuk KERVAN
Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

Tez çalışmalarım süresince desteğini esirgemeyen, sabırla yol gösteren değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Deniz Tokat'a teşekkür ederim.

Bana olan inançlarını yitirmeyen ve her zaman teşvik eden aileme ve dostlarıma teşekkürler.

KAPANIŞ UZAYLARI

Buket ALTUNTAŞ
Nevşehir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Yüksek Lisans Tezi, Temmuz 2012
Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Deniz Tokat

ÖZET

Topolojik uzay kavramının pek çok genelleştirilmesi vardır. Bu genelleştirmeler farklı alanlarda birçok uygulama sahası bulmuştur.

Bu tezde topolojik uzayların bir genelleştirilmesi olan kapanış uzayları incelenmiştir. Kapanış uzaylarının topolojik uzaylara benzer şekilde kapanış operatörü, iç operatör ve komşuluk kavramıyla da tanımlanması mümkündür. Ayrıca bu çalışmada, kapanış uzaylarının ayırma aksiyomları, regüler ve normalliğinin yanısıra bağlantılılığı araştırılmıştır.

Tezin son bölümünde kapanış uzayları kategori teorik açıdan ele alınmıştır.

Anahtar Kelimeler: Kapanış uzayı; izotonik uzaylar; ayırma aksiyomları; topolojik kategori.

CLOSURE SPACES

Buket ALTUNTAŞ
Nevşehir University, Graduate School of Natural and Applied Sciences
M. Sc. Thesis, July 2012
Thesis Supervisor: Asst. Prof. Dr. Deniz TOKAT

ABSTRACT

There are various generalizations of the notion of topological space. These generalizations takes place in different fields.

In this thesis, closure spaces which are a generalization of topological spaces were investigated. Similar to topological spaces, it is also possible to define closure spaces can also be defined using the notions of closure operator, interior operator and neighbourhood. Moreover, in this work, seperation axioms, regularity and normality of closure spaces, and connnectedness are examined.

In the last chapter, closure spaces are handled from the category theoretic point of view.

Keywords: Closure space; isotonic space; seperation axioms; topological category.

İÇİNDEKİLER

1. BÖLÜM

GİRİŞ

Kapanış operatörleri ilk defa Moore [1] ve Riesz [2] tarafından analizde kullanılmış olmasına rağmen sonraları daha çok mantık [3,4], cebir [5,6] ve topoloji [7,8] gibi matematiğin diğer dallarında uygulama alanı bulmuştur. Bunların dışında Canter ve Wille [9] veri analizinde ve bilgi temsilinde, Aumann [10] da sosyal bilimler alanında kapanış operatörlerini kullanmıştır. Son yıllarda ise kapanışlar kuantum mantığı ve fiziksel sistemlerin temsili teorisinde kullanılmaya başlanmıştır [11-12].

1940 yılında Birkhoff'un [13] kapanış üzerinde çalışmasının bir nedeni de bir kapanış uzayının kapalı cümlelerinin sınıfının bir tam (complete) latis oluşturduğunu görmüş olmasıdır. Kapanışlar ile tam latisler arasındaki ilişki pek çok yazar tarafından incelenmiştir. Bu konunun genel bir değerlendirmesini Erné yapmıştır [14]. Hem latis teorisindeki kapanış operatörleri hemde kategori teorisindeki kapanış operatörleri teorik bilgisayar çalışmalarında çok önemli rol oynar.

Çalışmalarımızda temel olarak [15] makalesinden yararlanılmıştır. Ayrıca kategori teorindeki temel kavramlar [28] dan alınmıştır.

X herhangi bir cümle ve $C \subset P(X)$ olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa (X,C) ikilisine kapanış uzayı denir.

i. $X, \emptyset \in C$ olur.

ii. Her $i \in I$ için, $U_i \in C$ ise $\bigcup_{i \in I} U_i \in C$ olur.

Burada topolojik uzaylar için gerekli olan sonlu kesişim, yani, $U_1, U_2, \ldots, U_n \in C$ ise $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in C$ şartının bulunmadığına dikkat edelim.

Bu tezin ikinci bölümünde, kapanış uzayı kavramı tanımlanmış ve bununla ilgili temel kavramlar açıklanmıştır.

Üçüncü bölümde ise topolojik uzayların farklı bir genelleştirmesi olan izotonik uzaylardan bahsedilmiş ve bazı özellikleri üzerinde durulmuştur.

Dördüncü bölümde, kapanış uzaylarının simetri ve ayırma aksiyomları ile bağlantılılıkları incelenmiştir.

Son bölümde ise, kapanış uzayları kategori teorisi açısından ele alınmış ve kapanış uzaylarının kategorisinin bazı özellikleri incelenmiştir.

2. BÖLÜM

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, kapanış operatörlerinin tanımlanışı ve kapanış uzaylarının denk tanımları üzerinde durulmuştur. Daha sonrasında topolojik uzaylarda da temel kavramlar olan iç, komşuluk, yakınsaklık, limit noktaları, süreklilik kavramlarının kapanış uzayları ile bağlantıları ve kapanış uzaylarının karşılaştırılmasına yer verilmiştir.

2.1. Kapanış Uzayı

X bir cümle olsun. cl : $P(X) \longrightarrow P(X)$ operatörü aşağıdaki şartları sağlıyorsa cl ye kapanış operatörü ve (X,cl) ye kapanış uzayı denir. A ve B, X in alt cümleleri olmak üzere,

i. $cl(\emptyset) = \emptyset$
ii. $A \subset B$ ise $cl(A) \subset cl(B)$
iii. $A \subset cl(A)$
iv. $cl(\,cl(A)\,) = cl(A)$

Örnek 2.1.1. $X = \{a,b,c,d,e\}$ ve $\tau = \{\, X,\emptyset,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e\}\, \}$ olsun.

(X,τ) uzayının bütün kapalı kümeleri, $\emptyset$, $X,\{b,c,d,e\},\{a,b,d\},\{b,e\},\{a\}$ dir.

$cl(A) = \{\, x \in X \mid \forall U \in \tau$ ve $x \in X$ için $U \cap A \neq \emptyset\, \}$ şeklinde elde edilir.

$X,\{b\},\{a,c\},\{b,d\},\{a,c,d,e\},\{b,d,e\},\{a,c,e\}$ kümelerinin kapanışlarını bulalım.

$cl(X) = X$, $cl(\{b\}) = \{b,e\}$, $cl(\{a,c\}) = X$, $cl(\{b,d\}) = \{b,c,d,e\}$, $cl(\{a,c,d,e\}) = X$

$cl(\{b,d,e\}) = \{b,c,d,e\}$, $cl(\{a,c,e\}) = X$ dir.

Şimdi kapanış uzayı olma şartlarını inceleyelim.

i. $cl(\emptyset) = \emptyset$

ii. $\{b\} \subseteq \{b,d\}$ olmak üzere $cl(\{b\}) = \{b,e\} \subseteq cl(\{b,d\}) = \{b,c,d,e\}$ dir.

$\{a,c\} \subseteq \{a,c,d,e\}$ olmak üzere $cl(\{a,c\}) = X \subseteq cl\{a,c,d,e\} = X$ dir.

$\{b\} \subseteq \{b,d,e\}$ olmak üzere $cl(\{b\}) = \{b,e\} \subseteq cl(\{b,d,e\}) = \{b,c,d,e\}$ dir.

iii. $\{a,c\} \subseteq cl(\{a,c\})$ olduğunu görelim. $\{a,c\} \subseteq cl(\{a,c\}) = X$ dir.

$\{b\} \subseteq cl(\{b\}) = \{b,e\}$ dir.

$\{b,d\} \subseteq cl(\{b,d\}) = \{b,c,d,e\}$ dir.

$\{b,d,e\} \subseteq cl(\{b,d,e\}) = \{b,c,d,e\}$ dir.

$\{a,c\} \subseteq cl(\{a,c\}) = X$

$\{a,c,d,e\} \subseteq cl(\{a,c,d,e\}) = X$

$\{a,c,e\} \subseteq cl(\{a,c,e\}) = X$

iv. $cl(cl(\{b\}) = cl(\{b,e\}) = \{b,e\} = cl(\{b\})$

2.2. İç Nokta

Kapanış fonksiyonunun eşi int : $P(X) \longrightarrow P(X)$ iç fonksiyonudur ve aşağıdaki gibi tanımlanır :

$$int(A) = (\ cl(A)^{\prime}\ )^{\prime} \qquad (2.1)$$

verilen iç fonksiyonu $cl(A) = (\ int(A)^{\prime}\ )^{\prime}$ olarakta açıkça düzenlenir. $A \in P(X)$ eğer $A = cl(A)$ ise kapalı, eğer $A = int(A)$ ise açıktır.

Örnek 2.2.1 $X = \{a,b,c,d,e\}$ ve $\tau = \{\ X,\emptyset,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e\}\ )$ olsun.

Kapalıları : $\emptyset$, X, $\{b,c,d,e\},\{a,b,e\},\{b,e\},\{a\}$ dir.

$\{b\}$ ve $\{a,c,d,e\}$ kümelerini inceleyerek $int(A) = (cl(A)^{\prime})^{\prime}$ olduğunu görelim.

$A = \{b\}$ olsun. Buradan,

int({b}) = ∅   (I)

cl({b}^{1})^{1} = cl({a,c,d,e})^{1} = (X)^{1} = ∅   (II)

(I) ve (II) nin eşitliğinden int({b}) = cl({b}^{1})^{1} olduğu görülür.

A = {a,c,d,e} olsun. Buradan,

int({a,c,d,e}) = {a,c,d}   (I)

cl({a,c,d,e}^{1})^{1} = cl({b})^{1} = {b,e}^{1} = {a,c,d}   (II)

(I) ve (II) nin eşitliğinden int({a,c,d,e}) = cl({a,c,d,e}^{1})^{1} olduğu görülür.

2.3. Komşuluk

Kapanış uzayları noktaların komşuluk sınıfları ile de tanımlanabilir. Şimdi bunu görelim. X bir cümle ve x ∈ X olmak üzere,

$\mathcal{N}$: x ⟶ P(P(X)) dönüşümü aşağıdaki şartları sağlarsa $\mathcal{N}$(x) e x in komşuluk ailesi ve (X , $\mathcal{N}$) ye komşuluk uzayı denir.

i. X ∈ $\mathcal{N}$(x) dir.
ii. N ∈ $\mathcal{N}$(x) ve N ⊂ N$'$ ise N$'$ ∈ $\mathcal{N}$(x) dir.
iii. N ∈ $\mathcal{N}$(x) ise x ∈ N dir.
iv. N ∈ $\mathcal{N}$(x) ise her y ∈ N$'$ için N ∈ $\mathcal{N}$(y) olacak şekilde bir N$'$ ∈ $\mathcal{N}$(x) vardır. Yani N, x noktasına yeteri kadar yakın noktaların komşuluğudur.

Örnek 2.3.1 X = {a,b,c,d} ve τ = { ∅, X, {a},{b},{a,b},{a,c},{a,b,c} } olsun.

a noktasının komşuluklar kümesi, $\mathcal{N}$(a) = { X,{a},{a,b},{a,c},{a,b,c} } dir.

N = {a,b} ve N$'$ = {a,b,c} olsun. N ⊆ N$'$ olacak şekilde seçtiğimizde N ∈ $\mathcal{N}$(a) olduğu açıktır.

2.4. Yakınsaklık

cl kapanış fonksiyonu ve int onun X deki eş iç fonksiyon olsun. O zaman $\mathcal{N} : X \longrightarrow P(P(X))$ komşuluk fonksiyonu ve $\mathcal{N}^* : X \longrightarrow P(P(X))$ yakınsaklık fonksiyonudur. Aşağıdaki kümeler her $x \in X$ için sırasıyla komşuluğu ve yakınsaklığı verir.

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{N}(x) &= \{N \in P(X) : x \in \mathrm{int}(N)\} \\ \mathcal{N}^*(x) &= \{Q \in P(X) : x \in \mathrm{cl}(Q)\} \end{aligned}\right\} \quad (2.2)$$

Örnek 2.4.1 $X = \{a,b,c,d\}$ ve $\tau = \{ \emptyset, X, \{a\},\{b\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,b,c\} \}$ olsun.

c noktasının komşuluklar kümesi, $\mathcal{N}(c) = \{ X,\{a,c\},\{a,b,c\})$ dir.

$\mathcal{N}(c) = \{ N \in P(X) \mid c \in \mathrm{int}(N) \}$ olduğunu görelim.

$N = \{a,b,c\}$ olsun. $\mathrm{int}(N) = \{a,c\}$ ve $c \in \{a,c\}$ dir. O halde $c \in \mathrm{int}(N)$ dir.

Teorem 2.4.2 $Q \in \mathcal{N}^*(x)$ dir ancak ve ancak $(Q)^t \notin \mathcal{N}(x)$ dir.

İspat. $N \in \mathcal{N}(x)$ dir ancak ve ancak $x \in \mathrm{int}(N) = (\mathrm{cl}(N)^t)^t$ dir. Bu durumda $x \notin \mathrm{cl}(N)^t$ olur ve $x \in (\mathrm{cl}(N)^t)^t = \mathrm{int}\,(N) \in \mathcal{N}(x)$ dir ancak ve ancak $(N)^t \in \mathcal{N}^*(x)$ dir. Son olarak komşuluğun tanımı kullanılarak $N \in \mathcal{N}(x)$ dir ancak ve ancak $(N)^t \notin \mathcal{N}^*(x)$ elde edilir.

Diğer taraftan, $Q \in \mathcal{N}^*(x)$ olsun. $Q \in \mathcal{N}^*(x)$ olabilmesi için gerek ve yeter şart $x \in \mathrm{cl}(Q)$ olmasıdır. Böylece $x \notin \mathrm{cl}(N)^t$ ancak ve ancak $(N)^t \in \mathcal{N}^*(x)$ dir. Yani, $(N)^t \notin \mathcal{N}(x)$ dir.

Teorem 2.4.3 N, eşitlik (2.2) de tanımlanan komşuluk fonksiyonu olsun. O zaman,

i. $x \in \mathrm{cl}(A)$ ancak ve ancak $(A)^t \notin \mathcal{N}(x)$ dir.
ii. $x \in \mathrm{int}(A)$ ancak ve ancak $(A)^t \in \mathcal{N}^*(x)$ dir.

İspat.

i. $x \in \mathrm{cl}(A)$ olsun. $x \in \mathrm{cl}(A) = \mathrm{cl}\,((A)^t)^t$ olduğundan,

$(A)^t \in \{ N \mid x \in cl(N)^t \}$gerektirir. Ayrıca,

$(A)^t \notin \{ N \mid x \notin cl(N)^t \} = \{ N \mid x \in (cl(N)^t)^t \}$

$= \{ N \mid x \in int(N) \} = \mathcal{N}(x)$

Yani, $x \in cl(A)$ ise $(A)^t \notin \mathcal{N}(x)$ dir.

$(A)^t \notin \mathcal{N}(x)$ olsun. $\mathcal{N}(x) = \{ N \in P(X) \mid x \in int(N) \}$ ve $int(N) = (cl(N)^t)^t$ eşitliğinden, $\mathcal{N}(x) = \{ N \mid x \in (cl(N)^t)^t \}$ elde ederiz. $x \in (cl(N)^t)^t$ olması $x \notin cl(N)^t$ olduğunu gösterir. Yani, $(A)^t \notin \{ N \mid x \notin cl(N)^t \}$ dir. Bu durumda $x \in cl((A)^t)^t$ dan $x \in cl(A)$ dır.

ii. $x \in int(A) = int(A^t)^t$ olsun. Yani $(A)^t \in \{ N \in P(X) \mid x \in int(N)^t \}$ gerektirir. Ayrıca $(A)^t \notin \{ N \in P(X) \mid x \notin int(N)^t \} = \{ N \in P(X) \mid x \in (int(N)^t)^t \}$

$= \{ N \in P(X) \mid x \in cl(N) \} = \mathcal{N}^*(x)$

Yani, $x \in int(A)$ ise $(A)^t \in \mathcal{N}^*(x)$ dir.

$(A)^t \notin \mathcal{N}^*(x) = \{ N \in P(X) \mid x \in cl(N) \}$ dir. $cl(N) = (int(N)^t)^t$ bağıntısından $\mathcal{N}^*(x) = \{ N \in P(X) \mid x \in (int(N)^t)^t \}$ yazarız. Yani, $x \notin int(N)^t$ ve $(A)^t \notin int(N)^t$ dir. Bu durumda, $x \in int(A^t)^t$ den $x \in int(A)$ dır.

2.5. Ön Yakınsama

Ön yakınsama $P(P(X)) \times X$ teki aşağıdaki q bağıntısının sağlanmasıdır.

(C0) $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ ve $(\mathcal{F}, x) \in q$ ise $(\mathcal{G}, x) \in q$ dur.

Genellikle $(\mathcal{F}, x) \in q$ yerine $\mathcal{F} \longrightarrow x$ yazılır ve sembol " X in alt kümelerinin $\mathcal{F}$ toplanması x e yakınsar " diye yorumlanır. (C0) aksiyomu böylece " $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ ve $\mathcal{F} \longrightarrow x$ ise $\mathcal{G} \longrightarrow x$ " dir.

- **Ön yakınsamanın iç ve kapanış ilişkisi**

q ile ilişkili doğal cq ve iq, kapanış ve iç operatörleri vardır :

$iq(A) = \{ x \in X \mid \mathcal{F} \longrightarrow x \text{ ise } A \in \mathcal{F} \}$

$cq(A) = \{ x \in X \mid \exists F \in \mathcal{F} : \mathcal{F} \longrightarrow x \text{ ve } (A)^t \notin \mathcal{F} \}$ (2.3)

- **cq ve iq operatörlerinin eşliği**

$x \notin cq(A)^t$ ancak ve ancak $\mathcal{F} \longrightarrow x$ olmalıdır. Bu da $(A^t)^t = A \in \mathcal{F}$ olduğunu gösterir.

- **q komşuluğu**

$x \in X$ noktasının q-komşuluğunu aşağıdaki gibi tanımlarız :

$\mathcal{N}_q(x) = \bigcup \{ \mathcal{F} : \mathcal{F} \longrightarrow x \}$ (2.4)

Açıkça $\mathcal{F} \longrightarrow x$ ise $\mathcal{N}_q(x) \subseteq \mathcal{F}$ dir. Ayrıca eğer, $\mathcal{N}_q(x) \longrightarrow x$ ise $\mathcal{F} \longrightarrow x$ ancak ve ancak $\mathcal{N}_q(x) \subseteq \mathcal{F}$ dir.

2.6. İdeal Ön Yakınsama

Ön yakınsama q eğer,

(C^*) Her $x \in X$ için, $\mathcal{N}_q(x) \longrightarrow x$

ise idealdir.

- **İdeal ön yakınsamanın iç ve kapanış ile ilişkisi**

İç operatörünün tanımı ideal ön yakınsama durumunda,

$iq(A) = \{ x \mid A \in \mathcal{N}_q(x) \}$ e indirgenir.

Kapanış tanımı ideal ön yakınsama durumunda,

$cq(A) = \{ x \mid (A)^t \notin \mathcal{N}_q(x) \}$ şeklinde elde edilir. Yani, $\mathcal{N}_q^*(x)$ q komşuluk fonksiyonunun eşi olduğunda, $cq(A) = \{ x \mid A \in \mathcal{N}_q^*(x) \}$ elde edilir.

Böylece iç, kapanış, komşuluk ve yakınsaklık denk bir şekilde ideal ön yakınsama kapsamında tanımlanır.

2.7. Süreklilik

f : (X,cl) $\longrightarrow$ (Y,cl) fonksiyonu,

Eğer her A $\in$ P(X) için f(cl(A)) $\subseteq$ cl (f (A)) olduğunda kapanış koruyandır.

Eğer her B $\in$ P(Y) için cl(f^{-1}(B)) $\subseteq$ f^{-1}(cl(B)) olduğunda süreklidir.

ι : (X,cl) $\longrightarrow$ (X,cl) : x $\longmapsto$ x özdeşliğinin,

ι(cl(A)) = cl(A) $\subseteq$ cl(A) = cl(ι(A)) oldukça hem kapanış koruyan hemde sürekli olduğu açıktır. Ayrıca, f : X $\longrightarrow$ Y ve g : Y $\longrightarrow$ Z kapanış koruyan (sürekli) fonksiyonlarının h = g(f) birleşmesi de yine kapanış koruyandır (süreklidir) :

$$h(\,cl(A)\,) = g(\,f(\,cl(A)\,)\,) \subseteq g(\,cl(\,f(A)\,)\,) \subseteq cl(\,g(\,f(x)\,)\,) = cl(\,h(x)\,)$$

$$cl(\,h^{-1}(B)\,) = cl(\,f^{-1}(\,g^{-1}(B)\,)\,) \subseteq f^{-1}(cl(\,g^{-1}(B)\,)\,)$$

$$\subseteq f^{-1}(\,g^{-1}(\,cl(B)\,)\,) = h^{-1}(\,cl(B)\,) \qquad (2.5)$$

f ve g nin sürekliliğinin bir sonucu olarak elde edilir.

- (X,cl) ve (Y,cl) keyfi kapanış operatörleri ile iki küme olsun. O zaman her B $\in$ P(Y) için B $\in$ $\mathcal{N}$(f(x)) den f^{-1}(B) $\in$ $\mathcal{N}$(x) (veya f^{-1}(B) $\in$ $\mathcal{N}^*$(x) den B $\in$ $\mathcal{N}^*$(f(x)) dir.) elde edilir ise f : X $\longrightarrow$ Y fonksiyonu x te süreklidir.

Teorem 2.7.1 (X,cl) ve (Y,cl) keyfi kapanış fonksiyonları ile iki küme ve f : X $\longrightarrow$ Y olsun. O zaman aşağıdaki koşullar süreklilik için denktir :

i. Her B $\in$ P(Y) için cl(f^{-1} (B)) $\subseteq$ f^{-1} (cl(B))
ii. Her B $\in$ P(Y) için f^{-1} (int(B)) $\subseteq$ int(f^{-1}(B))
iii. Her B $\in$ P(Y) ve her x $\in$ X için B $\in$ $\mathcal{N}$(f(x)) ise f^{-1}(B) $\in$ $\mathcal{N}$(x)
iv. Her B $\in$ P(Y) ve her x $\in$ X için f^{-1}(B) $\in$ $\mathcal{N}^*$(x) ise B $\in$ $\mathcal{N}^*$(f(x))

(iii) ve (iv) koşullar her x $\in$ X için denktir.

İspat : (i $\Longrightarrow$ ii) olduğunu gösterelim.

$f^{-1}(U) = (f^{-1}(U^t))^t$ özdeşliği ve $A \subseteq A'$ ile $(A')^t \subseteq (A)^t$ denkliğini kullanarak istenileni elde edeceğiz.

$$f^{-1}(\,\mathrm{int}(B)\,) = (\, f^{-1}(\,\mathrm{int}(B)\,)^t\,)^t$$

$$= (\, f^{-1}(\mathrm{cl}(B)^t)\,)^t \subseteq (\,\mathrm{cl}(\, f^{-1}(B)^t\,)\,)^t$$

$$= (\,\mathrm{cl}(\, f^{-1}(B)\,)^t\,)^t$$

$$= \mathrm{int}(\, f^{-1}(B)\,).$$

$$\mathrm{cl}(\, f^{-1}(B)\,) = (\mathrm{cl}(\, f^{-1}(B)\,)^t\,)^t$$

$$= (\,\mathrm{int}(\, f^{-1}(B)\,)^t\,)^t$$

$$= (\,\mathrm{int}(\, f^{-1}(B)^t\,)\,)^t \subseteq (\, f^{-1}(\,\mathrm{int}(B)^t\,)\,)^t$$

$$= (\, f^{-1}(\,\mathrm{cl}(B)\,)\,)^t$$

$$= f^{-1}(\mathrm{cl}(B)\,).$$

Tanımı kullanılarak aşağıdaki denklemleri elde ederiz :

$$\mathrm{int}(\, f^{-1}(B)\,) = \{\, x \in X \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{N}(x)\,\}$$

$$f^{-1}(\,\mathrm{int}(B)\,) = \{\, x \in X \mid B \in \mathcal{N}(f(x))\,\}$$

$$\mathrm{cl}\,(\, f^{-1}(B)\,) = \{\, x \in X \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{N}^*(x)\,\}$$

$$f^{-1}(\,\mathrm{cl}(B)\,) = \{\, x \mid B \in \mathcal{N}^*(f(x))\,\} \tag{2.6}$$

f süreklidir ancak ve ancak $x \in f^{-1}(\mathrm{int}(B))$ ve bu her $B \in P(Y)$ ve $x \in X$ için $x \in \mathrm{int}(\, f^{-1}(B)\,)$ olduğunu gösterir.

(ii $\Longrightarrow$ iii) olduğunu gösterelim.

f süreklidir. Bu durumda, $f^{-1}(\,\mathrm{int}(B)\,) = \{\, x \in X \mid B \in \mathcal{N}(\, f(x)\,)\,\}$ ve

$\mathrm{int}(f^{-1}(B)) = \{ x \in X \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{N}(x) \}$ dir. Yani, $B \in \mathcal{N}(f(x))$ ise $f^{-1}(B) \in \mathcal{N}(x)$ dir.

(iii $\Longrightarrow$ iv) olduğunu gösterelim.

$x \in X$ için, $f^{-1}(B) \in \mathcal{N}^*(x)$ den $B \in \mathcal{N}^*(f(x))$ elde edilir. Ayrıca, $B \notin \mathcal{N}(f(x))$ den $f^{-1}(B) \notin \mathcal{N}^*(x)$ olduğunu görürüz. Aynı şekilde her $B \in P(Y)$ için koşullar olduğunda, $(B)^t \notin \mathcal{N}(f(x))$ den $f^{-1}(B)^t = (f^{-1}(B))^t \in \mathcal{N}(x)$ elde edilir. Yakınsaklığın ve komşuluğun denkliği kullanılarak $B \in \mathcal{N}(f(x))$ den her $B \in P(Y)$ için $f^{-1}(B) \in \mathcal{N}(x)$ denklik koşulu elde edilir.

(iv $\Longrightarrow$ i) olduğunu gösterelim.

Her $B \in P(Y)$ ve her $x \in X$ için $f^{-1}(B) \in \mathcal{N}(x)$ ise $B \in \mathcal{N}^*(f(x))$ dir. $f^{-1}(\mathrm{cl}(B)) = \{ x \mid B \in \mathcal{N}^*(f(x)) \}$ eşitliğini biliyoruz. İncelenen denklikler süreklilik altında denk olduğundan, her $B \in P(Y)$ için $\mathrm{cl}(f^{-1}(B)) \subseteq f^{-1}(\mathrm{cl}(B))$ olduğunda süreklidir ifadesinden,

$\mathrm{cl}(f^{-1}(B)) \subseteq f^{-1}(\mathrm{cl}(B)) = f^{-1}(\mathrm{cl}(B)) = \{ x \mid B \in \mathcal{N}^*(f(x)) \}$ elde edilir.

Sonuç 2.7.2 (X,cl) ve (Y,cl) keyfi kapanış fonksiyonları ile iki küme olsun. O zaman

$f : X \longrightarrow Y$ süreklidir ancak ve ancak her $x \in X$ için x te süreklidir.

2.8. Limit Noktalar

p noktası eğer $N \in \mathcal{N}(p)$ nin her komşuluğu, $N \cap (A \setminus \{ p \}) \neq \emptyset$ yi sağlıyor ise $A \subseteq X$ in limit noktasıdır. A nın her limit noktasının,

$$A^{\blacktriangledown} = \{ x \in X \mid \forall N \in \mathcal{N}(x) : N \cap (A \setminus \{ p \}) \neq \emptyset \} \qquad (2.7)$$

kümesine A nın türetilmiş kümesi denir.

Türetilmiş kümeler genelleştirilmiş topolojilerin [23] Sierpiñski'nin sunumunun temelindedir. Eğer x in hiçbir komşuluğu yoksa, $\mathcal{N}(x) = \emptyset$, o zaman her $A \subseteq X$ kümeleri için $x \in \mathrm{cl}(A)$ ve $x \in A^{\blacktriangledown}$ dır. Ayrıca,

$$\emptyset^{\blacktriangledown} = \{ x \in X \mid \mathcal{N}(x) = \emptyset \} \quad (2.8)$$

Tanımdan doğrudan aşağıdaki durum çıkarılır :

$x \in A^{\blacktriangledown}$ ise $x \in (A \setminus \{ x \})^{\blacktriangledown}$ dır.

Eğer $B \subseteq A$ ise $N \cap (B \setminus \{ p \}) \neq \emptyset$ den açıkça $N \cap (A \setminus \{ p \}) \neq \emptyset$ elde edildiği sürece $B^{\blacktriangledown} \subseteq A^{\blacktriangledown}$ elde edilir. Bu özellik izoni adını alır ve bir sonraki bölümün odak noktasıdır.

Tanım 2.8.1 $A \subseteq X$ kümesi eğer $A \subseteq A^{\blacktriangledown}$ ise kendi içinde yoğundur.

2.9. Kümelerin Komşuluğu

Tek bir nokta için komşuluğun gösterimi doğal olarak kümelere genişletilebilir.

$A \in P(X)$ olsun. V kümesi A nın komşuluğundadır yani, her $x \in A$ için $V \in \mathcal{N}(A)$ ise $V \in \mathcal{N}(x)$ dir. Açık olarak $\mathcal{N}(\{x\}) = \mathcal{N}(x)$ dir.

Lemma 2.9.1 Her $V,A \in P(X)$ için $V \in \mathcal{N}(A)$ dır ancak ve ancak

$A \subseteq int(V)$ dir.

İspat. $V \in \mathcal{N}(A)$ dır ancak ve ancak her $x \in A$, $V \in \mathcal{N}(x)$ ve her $x \in A$ için $x \in int(V)$ dir yani $x \in A$ olması durumundan $x \in int(V)$ olması elde edilir.

2.10. Kapanış Uzaylarının Karşılaştırılması

c' ve c'', X kümesinde iki genelleştirilmiş kapanış operatörü olsun. Eğer $A \in P(X)$ için $c'(A) \subseteq c''(A)$ ise c', c'' den daha ince, $c' \geq c''$ veya c'', c' den daha kaba denir.

Teorem 2.10.1 c' ve c'', X te iki kapanış fonksiyonu olsun. Birbiriyle ilişkili iç, komşuluk ve yakınsaklık fonksiyonları sırasıyla, i', ii', $\mathcal{N}'$, $\mathcal{N}''$, $\mathcal{N}^{*'}$ ve $\mathcal{N}^{*''}$ ile gösterelim. O zaman aşağıdaki durumlar denktir :

i. Her $A \in P(X)$ için $c'(A) \subseteq c''(A)$

ii. Her $A \in P(X)$ için $i''(A) \subseteq i'(A)$

iii. Her $x \in X$ için $\mathcal{N}''(x) \subseteq \mathcal{N}'(x)$

iv. Her $x \in X$ için $\mathcal{N}^{*'}(x) \subseteq \mathcal{N}^{*''}(x)$

İspat. (i $\Leftrightarrow$ ii) olduğunu gösterelim.

Her $A \in P(X)$ için, $c'(A)^t \subseteq c''(A^t)$ ancak ve ancak $i''(A) = (c''(A)^t)^t = i'(A)$ buradan $i''(A) \subseteq i'(A)$ dır. Yani, $c'(A) \subseteq c''(A)$ ancak ve ancak $i''(A) \subseteq i'(A)$ dır.

(i $\Leftrightarrow$ iii) olduğunu gösterelim.

Her $A \in P(X)$ için $c'(A) \subseteq c''(A)$ ise $x \in c'(A)$ ve $x \in c''(A)$ dır. $(A)^t \notin \mathcal{N}'(x)$ ise $(A)^t \notin \mathcal{N}''(x)$ ya da $(A)^t \in \mathcal{N}''(x)$ ise $(A)^t \in \mathcal{N}''(x)$ dir. Yani, $A \in \mathcal{N}''(x)$ ise $A \in \mathcal{N}'(x)$ dir.

(ii $\Leftrightarrow$ iv) olduğunu gösterelim.

$c'(A) \subseteq c''(A)$ ancak ve ancak $i''(A) \subseteq i'(A)$ dir. Teorem 2.4.3 den, $x \in int(A)$ olduğunda $(A)^t \in \mathcal{N}^*(x)$ dir, o halde $(A)^t \notin \mathcal{N}(x)$ dir. Bunu ifadeye uyarlarsak, $x \in i''(A)$ ise $x \in i'(A)$ dır. O zaman $(A)^t \in \mathcal{N}^{*'}$ dir aynı zamanda $(A)^t \in \mathcal{N}^{*''}(x)$ dir. Bu durumda $\mathcal{N}^{*'}(x) \subseteq \mathcal{N}^{*''}(x)$ elde edilir.

Eğer Teorem 2.10.1 deki dört denk durumdan birini sağlanıyorsa, (X,c'), (X,c'') den daha güçlü ve (X,c''), (X,c') den daha zayıf denir ve $(X,c') \geq (X,c'')$ veya $(X,c'') \leq (X,c')$ şeklinde yazılır.

Teorem 2.10.2 (X,c'), (X,c'') den daha güçlü, $(X,c') \geq (X,c'')$ ancak ve ancak $\iota : (X,c') \longrightarrow (X,c'')$ süreklidir.

İspat. ($\Longrightarrow$) : (X,c'), (X,c'') den daha güçlü ise $(X,c') \geq (X,c'')$ olur. Bu durumda her

$B \in P(X)$ için, $c'(B) \subseteq c''(B)$ olur. Tanımlanan $\iota : (X,c') \longrightarrow (X,c'')$ fonksiyonu süreklidir.

($\Longleftarrow$) : ι süreklidir. Her $B \in P(Y)$ için,

$c'(\iota^{-1}(B)) \subseteq \iota^{-1}(c''(B))$ ve $\iota(x) = \iota^{-1}(x) = x$ oldukça $c'(B) \subseteq c''(B)$ yi verir. Bu da

$(X,c') \geq (X,c'')$ nün tanımını görmemizi sağlar.

3. BÖLÜM

İZOTONİK UZAYLAR

Topolojik yapısını geliştirmek için hemen hemen her yaklaşım kapanış fonksiyonlarını izotonik olarak ifade eder. Ayrıca buna denk olarak bir noktanın komşuluklarının da " yığın " oluşturduğu gösterilmiştir.

Birinci bölümde verdiğimiz komşuluğun terimlerinde ve yakınsak fonksiyonlarda izotonik tanımına denk durumlar olduğunu ek olarak bölüm sonunda kapanış uzayları için aksiyom sistemleri ve temel aksiyomlar başlıkları altında bölümü özetler nitelikte bağıntılara yer verilmiştir.

3.1. İzotoni ve Yığınlar

Lemma 3.1.1 Keyfi $cl : P(X) \longrightarrow P(X)$ fonksiyonları için aşağıdaki durumlar denktir :

(K1) Her $A,B \in P(X)$ için $A \subseteq B$ ise $cl(A) \subseteq cl(B)$

($K1^{1}$) Her $A,B \in P(X)$ için $cl(A) \cup cl(B) \subseteq cl(A \cup B)$

($K1^{11}$) $cl(A \cap B) \subseteq cl(A) \cap cl(B)$

İspat. (K1) $\Longrightarrow$ ($K1^{1}$) olduğunu gösterelim.

$A \subseteq B$ ise $cl(A) \subseteq cl(B)$ olsun. O zaman her A,B için $A,B \subseteq A \cup B$ ise $cl(A) \subseteq cl(A \cup B)$ ve $cl(B) \subseteq cl(A \cup B)$ dir. Bu nedenle, $cl(A) \cup cl(B) \subseteq cl(A \cup B)$ dir.

(K1) $\Longrightarrow$ ($K1^{11}$) olduğunu gösterelim.

$A \subseteq B$ ise $cl(A) \subseteq cl(B)$ olsun. $A \cap B \subseteq A,B$ ise, $cl(A \cap B) \subseteq cl(A) \cap cl(B)$ dir.

$(K1^{I}) \Longrightarrow (K1)$ olduğunu gösterelim.

$cl(A) \cup cl(B) \subseteq cl(A \cup B)$ olduğunu ve $A \subseteq B$ olduğunu kabul edelim. O zaman,

$cl(A) \subseteq cl(A) \cup cl(B) \subseteq cl(A \cup B) = cl(B)$ dir. Yani $cl(A) \subseteq cl(B)$ dir.

$(K1^{I}) \Longrightarrow (K1^{II})$ olduğunu gösterelim.

$cl(A) \cup cl(B) \subseteq cl(A \cup B)$ olsun. $A,B \subseteq A \cup B$ olduğunu biliyoruz. Aynı şekilde,

$A \cap B \subseteq A,B \subseteq A \cup B$ olduğundan $cl(A \cap B) \subseteq cl(A) \cap cl(B)$ dir.

$(K1^{II}) \Longrightarrow (K1)$ olduğunu gösterelim.

$cl(A \cap B) \subseteq cl(A) \cap cl(B)$ ve $A \subseteq B$ olsun. Bu durumda $A = A \cap B$ olur. Buradan yola çıkılarak, $cl(A) = cl(A \cap B) \subseteq cl(A) \cap cl(B) \subseteq cl(B)$ elde edilir.

Örnek 3.1.2 $X = \{a,b,c,d,e\}$ ve $\tau = \{ X,\emptyset,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e\} \}$ olsun.

$\{b\},\{a,c\},\{a,c,d,e\},\{b,d,e\},\{a,c,e\}$ kümelerini ele alalım.

(X,τ) uzayının kapalıları, $\emptyset,X,\{b,c,d,e\},\{a,b,e\},\{b,e\},\{a\}$ kümeleridir.

(K1) için, $\{b\} \subseteq \{b,d,e\}$ olacak şekilde $A = \{b\}$ ve $B = \{b,d,e\}$ alalım. $cl(A) \subseteq cl(B)$ olduğunu görelim.

$cl(A) = \{b,e\} \subseteq cl(B) = \{b,c,d,e\}$ dir.

$(K1^{'})$ için, $\{a,c\} \subseteq \{a,c,d,e\}$ olacak şekilde $A = \{a,c\}$ ve $B = \{a,c,d,e\}$ alalım.

$cl(A) = X$, $cl(B) = X$, $cl(A \cup B) = X$ dir buradan $X \cup X \subseteq X$ sağlandığı görülür.

$(K1^{''})$ için, $A = \{b\}$ ve $B = \{b,d,e\}$ kümeleri seçelim. $A \cap B = \{b\}$ dir.

$cl(A) = \{b,e\}$, $cl(B) = \{b,c,d,e\}$, $cl(A \cap B) \subseteq cl(A) \cap cl(B)$ olduğu görülür.

Lemma 3.1.3 Keyfi int : P(X) $\longrightarrow$ P(X) fonksiyonu için aşağıdaki durumlar denktir :

(K1^{III}) Her A,B $\in$ P(X) ve A $\subseteq$ B ise int(A) $\subseteq$ int(B)

(K1^{Iv}) Her A,B $\in$ P(X), int(A) $\cup$ int(B) $\subseteq$ int(A $\cup$ B)

(K1^{v}) Her A,B $\in$ P(X), int(A $\cap$ B) $\subseteq$ int(A) $\cap$ int(B)

İspat. (K1^{III}) $\Longrightarrow$ (K1^{Iv}) olduğunu gösterelim.

Her A,B $\in$ P(X) ve A $\subseteq$ B olmak üzere, int(A) $\subseteq$ int(B) olsun. Bu durumda,

A $\subseteq$ A $\cup$ B ise int(A) $\subseteq$ int(A $\cup$ B) ve B $\subseteq$ A $\cup$ B ise int(B) $\subseteq$ A $\cup$ B olur. Birleşimden,

int(A) $\cup$ int(B) $\subseteq$ int(A $\cup$ B) elde edilir.

(K1^{Iv}) $\Longrightarrow$ (K1^{v}) olduğunu gösterelim.

Her A,B $\in$ P(X) için int(A) $\cup$ int(B) $\subseteq$ int(A $\cup$ B) olsun. Bu durumda (K1^{Iv}) gereğince, A $\cap$ B $\subseteq$ A ise int(A $\cap$ B) $\subseteq$ int(A) ve A $\cap$ B $\subseteq$ B ise int(A $\cap$ B) $\subseteq$ int(B) bulunur. Kesişimden, int(A $\cap$ B) $\subseteq$ int(A) $\cap$ int(B) elde edilir.

(K1^{v}) $\Longrightarrow$ (K1^{III}) olduğunu gösterelim.

Her A,B $\in$ P(X) olmak üzere, int(A $\cap$ B) $\subseteq$ int(A) $\cap$ int(B) ve A $\subseteq$ B olsun.

A $\cap$ B = A ve A $\cup$ B = B olur. int(A) $\subseteq$ int(A) $\cup$ int(B) $\subseteq$ int(A $\cup$ B) = int(B),

yani int(A) $\subseteq$ int(B) elde edilir.

Örnek 3.1.4 X = {a,b,c,d,e} ve τ = { X,$\emptyset$,{a},{c,d},{a,c,d},{b,c,d,e} } olsun.

(K1$'''$) için, A,B $\in$ P(X), A $\subseteq$ B olacak şekilde A = {a,c,e} ve B = {a,c,d,e} alalım.

int(A) = {a} ve int(B) = {a,c,d} dir. Buradan int(A) $\subseteq$ int(B) olduğu görülür.

(K1^{Iv}) için, A,B $\in$ P(X), A = {b} ve B = {a,c,d,e} alalım.

int(A) = {a,c,d}, int(B) = ∅, int(A ∪ B) = X dir. Buradan, int(A) ∪ int(B) ⊆ int(A ∪ B) olduğu görülür.

(K1^{v}) için, A,B ∈ P(X) ve A = {d,e}, B = {a,c,d,e}, A ∩ B = {d,e} olsun.

int(A) = ∅, int(B) = {a,c,d} ve int(A ∩ B) = ∅ dir. Buradan, int(A ∩ B) ⊆ int(A) ∩ int(B) olduğu görülür.

3.2. Yığın

Eğer F ∈ $\mathcal{F}$ ve F ⊆ G olduğunda G ∈ $\mathcal{F}$ ise (boş olmayan) $\mathcal{F}$ ⊆ P(X) koleksiyonu bir yığındır. Tüm yığınların kümesini $\mathfrak{S}$(X) şeklinde yazalım. ∅ ∈ P(X) boş kümesi ile ∅ ⊆ P(X) boş yığınını ayırt etmek önemlidir.

Komşuluğun terimlerinde ve yakınsak fonksiyonlarda (K1) ’e denk durumlar vardır.

Lemma 3.2.1. cl kapanış fonksiyonu izotoniktir ancak ve ancak,

(K1^{vi}) Her x ∈ X için $\mathcal{N}$(x) bir yığındır.

(K1^{vii}) Her x ∈ X için $\mathcal{N}^*$(x) bir yığındır.

İspat. N ∈ $\mathcal{N}$(x) olması için gerek ve yeter şart x ∈ int(N)olmasıdır. Eğer $\mathcal{N}$(x) izotonik ise N' ∈ $\mathcal{N}$(x) elde edilir ve bundan dolayı N yi kapsayan her N' için x ∈ int(N') olur. Buradan da N ⊂ N' ise int(N) ⊂ int(N') elde edilir.

Tersini görmek için $\mathcal{N}$(x) in izotonik olduğunu, A ⊆ B ve x ∈ cl(A) ise x ∉ cl(B) olduğunu varsayalım. $\mathcal{N}$(x) in izotonisi böylece $(A)^t$ ∈ $\mathcal{N}$(x) elde ederiz ki bu çelişkidir. Böylece A ⊆ B ise cl(A) ⊆ cl(B) dir. Sonuç olarak $\mathcal{N}$(x) bir yığındır ancak ve ancak $\mathcal{N}^*$(x) bir yığındır.

- Ön topolojik uzaylarda c(A) kapanışı keyfi kapanış uzaylarında anlamlıdır ve aşağıdaki iyi bilinen formülü ile tanımlanır :

$$c(A) = \{ x \in X \mid \forall N \in \mathcal{N}(x) : A \cap N \neq \emptyset \} \qquad (3.1)$$

Bu tanımdan aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.2.2. (X,cl) keyfi bir kapanış uzayı olsun.

i. Her $A \in P(X)$ için $c(A) \subseteq cl(A)$
ii. $c : P(X) \longrightarrow P(X)$ izotoniktir.
iii. $c(A) = cl(A)$ ancak ve ancak $cl : P(X) \longrightarrow P(X)$ izotoniktir.

İspat. i. $N \in \mathcal{N}(x)$ ancak ve ancak $x \in int(N)$ dir. Bu aynı zamanda,

$N \in \mathcal{N}(x)$ ancak ve ancak $x \in (cl(N)^{t})^{t}$ demektir. Böylece, $x \in c(A)$ dır yani " $N \in \mathcal{N}(x)$ ise $N \cap A \neq \emptyset$ olması halinde $x \in cl(A)^{t}$ dır. " ifadesine denktir. Şimdi $B = (N)^{t}$ ile değiştirilince $(B)^{t} \cap A = \emptyset$ ifadesi $A \subseteq B$ ile denk olduğu gözlenir. Böylece $x \in c(A)$ dır ancak ve ancak A nın kapsadığı her B kümesi için $x \in cl(B)$ dir yani,

$$c(A) = \bigcup_{B:A\subseteq B} cl(B) \qquad (3.2)$$

elde edilir. Yani, $c(A) \subseteq cl(A)$ olduğu açıktır.

ii. (i) de elde edilen $A \subseteq B$ ise $c(A) \subseteq cl(A)$ ifadesi c(A) nın izotonik olma şartını sağladığını gösterir.

iii. (i) de $A \subseteq B$ olması halinde $c(A) \subseteq cl(A)$ olduğunu gördük. Elde edilen bu sonuç c(A) nın izotonik olduğunu göstermiştir. Aynı şekilde $cl : P(X) \longrightarrow P(X)$ kapanış fonksiyonunun izotonik olması için gerek ve yeter şart her $A \subseteq B$ için $cl(A) \subseteq c(A)$ olmasıdır. Bu durumda, (i) den $c(A) \subseteq cl(A)$ ve $cl(A) \subseteq c(A)$ dan, $c(A) = cl(A)$ elde edilir. Bu eşitliğin oluşabilmesi içinde gerek ve yeter şart cl nin izotonik olmasıdır.

- **İzotonik Uzaylarda yakınsama ve komşuluk**

İzotonik uzaylarda yakınsama ve komşuluk arasındaki ilişki,

$$sec\mathcal{F} = \{ G \in P(X) \mid \forall F \in \mathcal{F} : G \cap F \neq \emptyset \} \qquad (3.3)$$

olarak ifade edilir.

Teorem 3.2.3 (X,cl) izotonik uzaydır. O zaman,

$$\mathcal{N}^*(x) = \sec \mathcal{N}(x) \text{ ve } \mathcal{N}(x) = \sec \mathcal{N}^*(x)$$

İspat. $N \in \mathcal{N}(x)$ dir ancak ve ancak $x \in int(N)$ olduğunu biliyoruz. Aynı zamanda, $N \in \mathcal{N}(x)$ dir ancak ve ancak $x \in (cl(N)^t)^t$ demektir. Buradan, $N \in \mathcal{N}(x)$ ise $N \cap A \neq \emptyset$ olması halinde $x \in cl(A)^t$ dir. O halde,

$\sec \mathcal{N}(x) = \{ A \in P(X) \mid \forall N \in \mathcal{N}(x) : A \cap N \neq \emptyset \}$

ve $\mathcal{N}^*(x) = \{ A \in P(X) \mid x \in cl(A) \}$ den $\sec \mathcal{N}(x) = \mathcal{N}^*(x)$ elde edilir.

Şimdi, $\mathcal{N}(x) = \sec \mathcal{N}^*(x)$ olduğunu görelim.

$x \in (cl(A)^t)^t = int(A) \in \mathcal{N}(x)$ dir ancak ve ancak $(A)^t \in \mathcal{N}^*(x)$ dir.

Bu durumda,

$\sec \mathcal{N}^*(x) = \{ A \in P(X) \mid \forall G \in \mathcal{N}^*(x) : A \cap G \neq \emptyset \}$

$\mathcal{N}(x) = \{ N \in P(X) \mid x \in int(A) \}$ den $\mathcal{N}(x) = \sec \mathcal{N}^*(x)$ elde edilir.

Lemma 3.2.4 $A^{\blacktriangledown} \subseteq cl(A)$ ve $A^{\blacktriangledown} - A = cl(A) - A$.

İspat. Genellikle $N \cap (A - \{p\}) \neq \emptyset$ ise $N \cap A \neq \emptyset$ dir bu yüzden $p \in A^{\blacktriangledown}$ ise $p \in cl(A)$ elde edilir. Elde edilen bu veri $A^{\blacktriangledown} \subseteq cl(A)$ olduğunu gösterir.

$p \notin A$ olduğunu varsayalım. $p \in A^{\blacktriangledown}$ dır ancak ve ancak her $N \in \mathcal{N}(p)$ dir : $N \cap (A - \{p\}) = N \cap A \neq \emptyset$ yani ancak ve ancak $p \in cl(A)$ elde edilir. Bu da bize ikinci ifadeyi ispatlar.

3.3. Yığın Yakınsak

$\mathcal{G}(X) \times X$ te q nun kısıtlı yakınsamasında, $q \subseteq \mathcal{G}(X) \times X$ ise (X,q) bir yığın yakınsama uzayıdır. Buradan da,

(C0) $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ ve $(\mathcal{F},x) \in q$ ise $(\mathcal{G},q) \in q$ sağlanır.

(C^*) Her $x \in X$ için $\mathcal{N}_q(x) \longrightarrow x$ ise (X,q) ideal yığın yakınsama uzayıdır.

Açıkça eğer (X,q) ideal yığın yakınsama uzayı ise $\mathcal{N}_q(x)$ q-komşulukları yığın oluşturur. Tersine eğer (X,cl) bir izotonik uzay ise $(\mathcal{F},x) \in qc$ dir ancak ve ancak $\mathcal{N}(x) \subseteq \mathcal{F}$ düzenlemesi ile qc yığın yakınsama ilişkisi tanımlanabilir.

Böylece $(\mathcal{F},x) \in q$ olduğundan $\mathcal{N}_q(x) \subseteq \mathcal{F}$ ve $(\mathcal{F},x) \in qc$ dir ve $\mathcal{N}_{qc}(x) \subseteq \mathcal{F}$ elde edilir. İzotonik uzayları ile ideal yakınsama uzayları belirlenmiş olur.

- (X,x) ve (Y,y) yığın uzayları ve $f : X \longrightarrow Y$ olsun. Bununla ilişkili $f : \mathcal{G}(X) \longrightarrow \mathcal{G}(Y)$ dönüşümü tanımlanır.

$$f(\mathcal{F}) = \{ G \in P(Y) \mid \exists F \in \mathcal{F} : f(F) \subseteq G \} \qquad (3.4)$$

$f(\mathcal{F})$ in gerçekten Y de yığın olduğu açıktır. Ayrıca $f(P(X)) = P(Y)$ ve $f(\emptyset) = \emptyset$ elde edilir.

3.4. Yığın Süreklilik

(X,x) ve (X,y) iki yığın-yakınsama uzayları olsun. O zaman $f : X \longrightarrow Y$ fonksiyonu x için yığın süreklidir eğer,

$$\mathcal{F} \rightarrow_x x \quad \text{ise} \quad f(\mathcal{F}) \rightarrow_y f(x) \qquad (3.5)$$

Her $x \in X$ için x te f yığın sürekli ise $f : X \longrightarrow Y$ fonksiyonu yığın süreklidir.

Teorem 3.4.1 (X,x) ve (X,y) ideal yakınsama uzayları olsun. O zaman $f : X \longrightarrow Y$ fonksiyonu x te q-süreklidir ancak ve ancak

$$\mathcal{N}_Y(\,f(x)\,) \subseteq f\,(\,\mathcal{N}_X(x)\,) \qquad (3.6)$$

İspat. f : X ⟶ Y fonksiyonu x te q-sürekli olsun. Teorem 2.10.1 ve yığın sürekliliğin tanımından, $\mathcal{N}_X(x) \subseteq \mathcal{F}$ ise $\mathcal{N}_Y(\,f(x)\,) \subseteq f\,(\mathcal{F})$ formunda yeniden yazılabilir. $\mathcal{F}$ yerine $\mathcal{N}_X(x)$ olarak ve $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ ise $f\,(\,\mathcal{F}\,) \subseteq f\,(\,\mathcal{F}\,)$ durumu kullanılarak $\mathcal{N}_X(x) \subseteq F$ olduğunda $\mathcal{N}_Y(\,f(x)\,) \subseteq f\,(\mathcal{N}_X(x)) \subseteq f\,(F)$ formu elde edilir.

(X,x) ve (X,y) ideal ön yakınsama uzayları olsun. f : X ⟶ Y fonksiyonu için $\mathcal{N}_Y(\,f(x)\,) \subseteq f\,(\mathcal{N}_X(x))$ olsun. $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ ise, $(\mathcal{F},x) \longrightarrow q$ ve $(\mathcal{G},x) \longrightarrow q$ olur. Ayrıca $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ ise $f(\mathcal{F}) \subseteq f(\mathcal{F})$ durumundan $\mathcal{N}_X(x) \subseteq \mathcal{F}$ olduğundan, f fonksiyonu x te q - süreklidir.

Teorem 3.4.2 (X,cl) ve (Y,cl) izotonik uzaylar ve f : X ⟶ Y bir fonksiyon olsun. O zaman aşağıdaki özellikler denktir :

i. f, x te süreklidir.
ii. f, x te yığındır.

İspat. (i ⟹ ii) olduğunu gösterelim. f, x te sürekli olsun. $B \in \mathcal{N}(f(x))$ ise $f^{-1}(B) \in \mathcal{N}(x)$ dir. O zaman, $A \subseteq f^{-1}(B)$ olacak şekilde bir $A \in \mathcal{N}(x)$ vardır. Bu şekilde $f(A) \subseteq f(\,f^{-1}(B)\,) \subseteq f(\,\mathcal{N}(x))$ elde edilir. $B \in f(\mathcal{N}(x))$ şartı izotoniden dolayı sağlandığı için $\mathcal{N}(f(x)) \subseteq f(\mathcal{N}(x))$ bulunur. Bu sonuçta f in x te yığın sürekli olduğunu kanıtlar.

(ii ⟹ i) olduğunu gösterelim. f, x te yığın sürekli olsun. Bu durumda, $B \in \mathcal{N}(f(x))$ ise $f(A) \subseteq B$ olacak şekilde bir $A \in \mathcal{N}(x)$ vardır. Buradan da, $A \subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}(B)$ elde edilir ve bundan dolayı $f^{-1}(B) \in \mathcal{N}(x)$ olur. Yani f fonksiyonu, x te süreklidir.

Teorem 3.4.3 (X,cl) ve (Y,cl) izotonik uzaylar olsun. O zaman aşağıdaki özellikler birbirine denktir :

i. f : X → Y süreklidir.
ii. f : X → Y kapanış korumasıdır.
iii. Her $A \in P(X)$ ve her $B \in P(Y)$ için $f(A) \subseteq B$ ise $f\,(\,cl(A)\,) \subseteq cl(B)$.
iv. f : X →Y fonksiyonu yığın süreklidir.

İspat. (i $\Longrightarrow$ ii) olduğunu gösterelim. f : (X,cl) $\longrightarrow$ (Y,cl) fonksiyonu sürekli ve cl izotonik olsun. Her A $\in$ P(X) için f(cl(A)) $\subseteq$ cl(f(A)) olduğunda kapanış koruyandır. (ii $\Longrightarrow$ i) olduğunu gösterelim. f : (X,cl) $\longrightarrow$ (Y,cl) fonksiyonu kapanış koruyan ve cl izotonik olsun. Her B $\in$ P(Y) için cl(f^{-1}(B)) $\subseteq$ f^{-1}(cl(B)) olduğunda f fonksiyonu süreklidir.

(i $\Longrightarrow$ iii) olduğunu gösterelim. f fonksiyonunun sürekli ve cl nin izotonik olduğunu varsayalım. O zaman f(A) $\subseteq$ B ise, A $\subseteq$ f^{-1}(f(A)) $\subseteq$ f^{-1}(B) ise cl(A) $\subseteq$ cl(f^{-1}(B)) $\subseteq$ f^{-1}(cl(B)) olur. Daha sonrasında f altında, f(cl(A)) $\subseteq$ f(cl(f^{-1}(B)) $\subseteq$ cl(B) olur. Buradan (iii) maddesi olan f(cl(A)) $\subseteq$ cl(B) elde edilir.

(iii $\Longrightarrow$ i) olduğunu gösterelim. Her A $\in$ P(X) ve her B $\in$ P(Y) için f(A) $\subseteq$ B ise, f(cl(A)) $\subseteq$ cl(B) dir. Bu durumda,

f^{-1}(f(A)) $\subseteq$ f^{-1}(B) ise A $\subseteq$ f^{-1}(B) dir. A $\subseteq$ f^{-1}(B) den f(f^{-1}(B)) $\subseteq$ B olur.

cl(f^{-1}(B)) $\subseteq$ f^{-1}(f(cl(f^{-1}(B)))) $\subseteq$ f^{-1}(cl(B)) elde edilir. Bu durumda f süreklidir.

(iii $\Longrightarrow$ ii) olduğunu gösterelim. Her A $\in$ P(X) ve her B $\in$ P(Y) için f(A) $\subseteq$ B ise f(cl(A)) $\subseteq$ cl(B) olsun. B = f(A) alalım. f(A) $\subseteq$ f(A) olduğu sürece f (cl(A)) $\subseteq$ cl(f(A)) sonucuna varırız. Bu da f in kapanış koruması olduğunu gösterir.

(ii $\Longrightarrow$ iii) olduğunu gösterelim. f : X $\longrightarrow$ Y fonksiyonu kapanış koruması ve cl izotonik ise f(A) $\subseteq$ B olması halinde f(cl(A)) $\subseteq$ cl(f(A)) $\subseteq$ cl(B) olur. (iii) sağlanmış olur.

(ii $\Longrightarrow$ iv) olduğunu gösterelim. f : X $\longrightarrow$ Y kapanış koruması olsun. Bu durumda, f(A) $\subseteq$ B ise f(cl(A)) $\subseteq$ cl(f(A)) $\subseteq$ cl(B) olur. f^{-1}(f(A)) $\subseteq$ f(f^{-1}(B)) $\subseteq$ B olur. f:X $\longrightarrow$ Y fonksiyonu yığın süreklidir.

(i $\Longrightarrow$ iv) olduğunu gösterelim. f : X $\longrightarrow$ Y fonksiyonu sürekli olsun. B $\in$ $\mathcal{N}$(f(x)) ise f^{-1}(B) $\in$ $\mathcal{N}$(x) dir. O zaman A $\subseteq$ f^{-1}(B) olacak şekilde bir A $\in$ $\mathcal{N}$(x) vardır. Böylece f(A) $\subseteq$ f(f^{-1}(B)) $\subseteq$ B ve izotoniden dolayı B $\in$ f($\mathcal{N}$(x)) dir yani $\mathcal{N}$(f(x)) $\subseteq$ f($\mathcal{N}$(x)) elde edilir. Bu sonuç f : X $\longrightarrow$ Y fonksiyonunun yığın sürekli olduğunu gösterir.

(iv $\Longrightarrow$ i) olduğunu gösterelim. f : X $\longrightarrow$ Y fonksiyonu yığın sürekli olsun. O zaman, B $\in \mathcal{N}($ f(x)) ise f(A) $\subseteq$ B olacak şekilde bir A $\in \mathcal{N}$(x) vardır. Buradan da, A $\subseteq f^{-1}($ f(A)) $\subseteq f^{-1}$(B) elde edilir ve bundan dolayı f^{-1}(B) $\in \mathcal{N}$(x) dir. Bu da f fonksiyonunun x te sürekli olduğunu gösterir.

3.5. Kapanış Uzayları İçin Aksiyom Sistemleri

(X,cl) genelleştirilmiş kapanış uzayı olsun. Her A,B $\in$ P(X) için kapanış fonksiyonlarının aşağıdaki özelliklerini göz önünde bulunduralım.

(K0) cl($\emptyset$) = $\emptyset$

(K1) A $\subseteq$ B ise cl(A) $\subseteq$ cl(B) (izotonik)

(K2) A $\subseteq$ cl(A)

(K3) cl(A$\cup$B) $\subseteq$ cl(A) $\cup$ cl(B) (birleşme)

(K4) cl(cl(A)) = cl(A) (eş güçlü)

(K5) $\bigcap_{i\in I} \mathrm{cl}(A_i) = \mathrm{cl}(\bigcap_{i\in I} A_i)$ (toplamsal)

3.5.1 Temel Aksiyomlar

Aşağıdaki özellikler her A,B $\in$ P(X) ve her x $\in$ X için geçerlidir.

- **(K0′)** için,

Kapanış : $\exists$A : x $\notin$ cl(A)

İç : $\exists$A : x $\in$ int(A)

Komşuluk: $\mathcal{N}$(x) $\neq \emptyset$

Yakınsaklık: $\mathcal{N}^*$(x) $\neq$ P(X)

- **(K0)** için,

Kapanış : $cl(\emptyset) = \emptyset$

İç : $int(X) = X$

Komşuluk : $X \in \mathcal{N}(x)$

Yakınsaklık : $\emptyset \notin \mathcal{N}^*(x)$

- **(K1)** için,

Kapanış : $A \subseteq B$ ise $cl(A) \subseteq cl(B)$

$cl(A \cap B) \subseteq cl(A) \cap cl(B)$

$cl(A) \cup cl(B) \subseteq cl(A \cup B)$

İç : $A \subseteq B$ ise $int(A) \subseteq int(B)$

$int(A) \cup int(B) \subseteq int(A \cup B)$

$int(A \cap B) \subseteq int(A) \cap int(A)$

Komşuluk : $N \in \mathcal{N}(x)$ ve $N \subseteq N'$ ise $N' \in \mathcal{N}(x)$ dir.

Yakınsaklık : $Q \in \mathcal{N}^*(x)$ ve $Q \subseteq Q'$ ise $Q' \in \mathcal{N}^*(x)$ dir.

- **(KA)** için,

Kapanış : $cl(X) = X$

İç : $int(\emptyset) = \emptyset$

Komşuluk : $\emptyset \notin \mathcal{N}(x)$

Yakınsaklık : $X \in \mathcal{N}^*(x)$ dir.

- **(KB)** için,

Kapanış : $A \cup B = X$ ise $cl(A) \cup cl(B) = X$

İç : $A \cap B = \emptyset$ ise $int(A) \cap int(B) = \emptyset$

Komşuluk : $N', N'' \in \mathcal{N}(x)$ ise $N' \cap N'' \neq \emptyset$

Yakınsaklık : $Q' \cup Q'' = X$ ise $Q' \in \mathcal{N}^*(x)$ veya $Q'' \in \mathcal{N}^*(x)$ dir.

- **(K2) (genişleyen)** için,

Kapanış : $A \subseteq cl(A)$

İç : $int(A) \subseteq int(A)$

Komşuluk : $N \in \mathcal{N}(x)$ ise $x \in N$ dir.

Yakınsaklık : $x \in Q$ ise $Q \in \mathcal{N}^*(x)$ dir.

- **(K3) (alt-lineer)** için,

Kapanış : $cl(A \cup B) \subseteq cl(A) \cup cl(B)$

İç : $int(A) \cap int(B) \subseteq int(A \cup B)$

Komşuluk : $N', N'' \in \mathcal{N}(x)$ ise $N' \cap N'' \in \mathcal{N}(x)$ dir.

Yakınsaklık : $Q' \cup Q'' \in \mathcal{N}^*(x)$ ise $Q' \in \mathcal{N}^*(x)$ dir veya $Q'' \in \mathcal{N}^*(x)$ dir.

- **(K4)(eşgüçlü)** için,

Kapanış : $cl(\, cl(A)\,) = cl(A)$

İç : $int(\, int(A)\,) = int(A)$

Komşuluk : $N \in \mathcal{N}(x)$ ise $int(N) \in \mathcal{N}(x)$ dir.

Yakınsaklık : $Q \in \mathcal{N}^*(x)$ dir ancak ve ancak $cl(Q) \in \mathcal{N}(x)$ dir.

- **(K5) (toplamsal)** için,

Kapanış : $\bigcup_{i\in I} cl(A_i) = cl(\bigcup_{i\in I} A_i)$

İç : $\bigcap_{i\in I} int(A_i) = int(\bigcap_{i\in I} A_i)$

Komşuluk : $\mathcal{N}(x) = \emptyset$ veya $\exists N(x)$: $N \in \mathcal{N}(x)$ dir ancak ve ancak $N(x) \subseteq N$ dir.

Teorem 3.5.2 Temel aksiyomlarda her madde için kapanış, iç, komşuluk ve yakınsaklık denktir.

İspat. K0′. $\mathcal{N}(x) \neq \emptyset$ olması için gerek ve yeter şart $(A)^t \in \mathcal{N}(x)$ olacak şekilde bir A kümesi vardır. Yani $x \notin cl(A)$ dır. Bu durumda $x \in (cl(A))^t = int(A)^t$ elde edilir.

K0. Her $x \in X$ için $X \in \mathcal{N}(x)$ dir ancak ve ancak $x \in int(X) = (\ cl(X)^t\ )^t = (\ cl(\emptyset)\ )^t$ dir. Buradan $x \notin cl(\emptyset)$ elde edilir.

K1. İzotoninin denk tanımları bu bölümde tartışıldı.

KA. $X = C(X) = (\ int(X)^t\ )^t = (\ int(\emptyset)\ )^t$ olmas için gerek ve yeter şart $int(\emptyset) = \emptyset$ olmasıdır. $\emptyset \in \mathcal{N}(x)$ ise $x \in int(\emptyset)$ olduğunu biliyoruz yani, her $x \in X$ için $\emptyset \in \mathcal{N}(x)$ dir ve $int(\emptyset) = \emptyset$ dir.

KB. İlk önce $A \cup B = X$ ancak ve ancak $(A)^t \cap (B)^t = \emptyset$ olduğunu hatırlayalım. Bundan dolayı $A \cap B = \emptyset$ ise $(\ cl(A)^t\ )^t \cap (\ cl(B)^t\ )^t = \emptyset$, yani, $int(A) \cap int(B) = \emptyset$ dir. $x \in cl(A)$ olması için gerek ve yeter şart $A \in \mathcal{N}^*(x)$ olmasıdır. $A \cup B = X$ olsun. O zaman $cl(A) \cup cl(B) = X$, her $x \in X$ için $x \in cl(A)$ veya $x \in cl(B)$ elde edilir ve denk olarak $A \in \mathcal{N}^*(x)$ ve $B \in \mathcal{N}^*(x)$ dir.

K2. $A \subseteq cl(A)$ ancak ve ancak $(A)^t \subseteq cl(A)^t$ ancak ve ancak $int(A) = (\ cl(A)^t\ )^t \subseteq (\ (A)^t\ )^t = A$ dır. Bundan dolayı, $N \in \mathcal{N}(x)$ ise $x \in int(N) \subseteq N$, yani, $x \in N$ dir. Diğer taraftan, her $N \in \mathcal{N}(x)$ için $x \in N$ ve $x \in A$ göz önüne alalım. O zaman $x \notin (A)^t$ ve bundan dolayı $(A)^t \notin \mathcal{N}(x)$ yani $x \in cl(A)$ dır.

K3. Bu aksiyom $x \in cl(A \cup B)$ ise $x \in cl(A)$ veya $x \in cl(B)$ olarak da ifade edilebilir. Eşdeğer olarak, $x \notin cl(A)$ ve $x \notin cl(B)$ ise $x \notin cl(A \cup B)$ dir. Ayrıca $(A)^t \in \mathcal{N}(x)$ ve $(B)^t \in \mathcal{N}(x)$ ise, $(A \cup B)^t = (A^t) \cap (B^t) \in \mathcal{N}(x)$ dir. A ve B yi sırasıyla $(A)^t$ ve $(B)^t$ ile yer değiştirerek ispatı tamamlarız.

K4. $int(A) = int(\ (cl(A)^t)^t\ ) = (cl(\ [\ (\ cl(A)^t\ )^t\ ]^t\ )\ )^t = (\ cl(\ cl(A)^t\ )\ )^t$ ifadesini biliyoruz. Böylece $cl(\ cl(A)^t\ ) = cl(A)^t$ ise $int(\ int(A)\ ) = (cl(A)^t)^t = int(A)$ dır.

Diğer taraftan, $int(\ int(A)\ ) = int(A)$ ise $(\ cl(\ cl(A)\ )\ )^t = (\ cl(A)^t\ )^t$ ve $cl(\ cl(A)\ ) = cl(A)$ dır.Genelde $x \in int(\ int(A)\ ) = (\ (cl(\ cl(A)^t\ )\ )^t$ ancak ve ancak $x \notin cl(\ cl(A)^t\ )$ dır yani, $(\ cl((A)^t)\ )^t = int(A) \in \mathcal{N}(x)$ elde edilir. Böylece K4, $x \in int(A)$ ise $int(A) \in \mathcal{N}(x)$ durumuna denktir. Diğer taraftan $x \in int(A)$ ise $A \in \mathcal{N}(x)$ dir. Bu iki durumu da birleştirerek $A \in \mathcal{N}(x)$ olması için gerek ve yeter şart $int(A) \in \mathcal{N}(x)$ olması durumu elde edilir.

K5. K1 den K5 e kadar sağladıkça Her $N \in \mathcal{N}(x)$ için $x \in cl(A)$ dır ancak ve ancak $N \cap A \neq \emptyset$ dir. Bu yüzden $y \in N$ ve her $N \in \mathcal{N}(x)$ için $x \in cl(\{y\})$ dir. Buradan $y \in \mathcal{N}(x)$ dir. $cl(A) = \bigcup_{y \in A} cl(\{y\})$,eşitliğinden $int(A) = (\ (cl(A)^t\ )^t = \bigcup_{y \in (A)^t} cl(\{y\}) = \bigcap_{y \in (A)^t} (cl(\{y\})^t$ bulunur. Böylece $x \in int(N)$ olması için gerek ve yeter şart $x \notin cl(\{y\})$ olmasıdır. Ayrıca her $y \in N$ için $y \notin N(x)$ olması durumunda $N(x) \subseteq N$ dir. Denklikleri toplayarak $N \in \mathcal{N}(x)$ olması için gerek ve yeter şart $N(x) \subseteq N$ olmasıdır sonucuna ulaşılır.

(K0) ise (K0$'$) olduğunu gösterelim.

Her $x \in X$ olması için gerek ve yeter şart $x \in int(X) = (\ cl(X)^t\ )^t = (\ cl(\emptyset)\ )^t$ olmasıdır. Buna bağlı olarak $x \in (\ cl(\emptyset)\ )^t$ ise $x \notin cl(\emptyset)$ dir. Buradan, $\mathcal{N}(x) \neq \emptyset$ ve $(A)^t \in \mathcal{N}(x)$ olmak üzere $x \notin cl(A)$ olduğunda $x \in (cl(A))^t = int(A)^t$ elde edilir. Bu durumda (K0$'$) sağlanmış olur.

4. BÖLÜM

KAPANIŞ UZAYLARININ ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde ağırlıklı olarak simetri ve ayırma aksiyomları üzerinde duracağız. Simetri ve ayırma aksiyomları her zaman x in her noktasının etrafındaki komşuluklar ile ele alınmaktadır.

Ayırma aksiyomları bir kümenin noktaları veya kapalı alt kümelerinin topolojik olarak birbirinden ayrılabilmesidir. M.H.Stone'nun bir teoremine göre her uzay noktalarının uygun bir tanımlaması ile uzay ayırma aksiyomunun en zayıfı olan T_0 özelliğini sağlar [28]. T_0 aksiyomu T_1,T_2,T_3,$T_{3\frac{1}{2}}$ ve T_4 aksiyomlarından daha sonra 1935 yılında ilk defa Alexandroff ve Hopf tarafından ortaya atılmıştır [28]. T_1 aksiyomu 1906 yılında Hausdorff ve aynı yıl bağımsız olarak Root tarafından tanımlanmıştır [28]. T_3 aksiyomu 1921 yılında Vietoris, $T_{3\frac{1}{2}}$ aksiyomu 1925 yılında Urysohn formüle etmiş ve $T_{3\frac{1}{2}}$ uzayları sınıfı üzerindeki önemli çalışmaları 1930 yılında Tychonoff yapmıştır [28]. T_4 aksiyomunu 1923 yılında Tietze tanımlanmış ve ayırma aksiyomu terimi ilk defa kullanılmıştır [28]. T harfleri Almanca ayırma aksiyomu olan " Trennungsaxiom " kelimesinden kaynaklanmaktadır [28]. Topolojik uzaylarda çok değişik şekillerde tanımlanmış ayırma aksiyomları vardır.

Bölümde ayırma aksiyomlarının kapanış uzayları ile bağıntılı tanımlarını ele alıp komşulukları üzerine yorum yapacağız. Son olarakta regülerlik benzeri aksiyomlar ve normallik tanımı ile izotonik uzayların bu bölümdeki fonksiyonuna yer vereceğiz.

4.1. Simetri Aksiyomu

Simetri ve ayırma aksiyomu her zaman X in her noktasının etrafındaki komşuluklarının varlığı ile ele alınır. Bundan dolayı $\mathcal{N}(x) \neq \emptyset$ yani ($K0'$) yı kabul edebiliriz.

Komşuluk açısından iki en önemli simetri özellikleri ve onların kapanış karşılıkları,

(R0) Eğer x, y nin her komşuluğunda varsa o zaman y de x in her komşuluğuna vardır.

(R0c) $x \in cl(\{y\})$ ise $y \in cl(\{x\})$ dir.

(wS) Eğer x, y nin her komşuluğunda varsa $\mathcal{N}(x) \subseteq \mathcal{N}(y)$ tir.

(cS) $cl(A) \cap cl(\{x\}) \neq \emptyset$ ise $x \in cl(A)$ dır.

(S) Eğer x, y nin her komşuluğunda varsa $\mathcal{N}(x) = \mathcal{N}(y)$ dir.

(RE) Eğer $N_x \cap N_y \neq \emptyset$ için her $N_x \in \mathcal{N}(x)$ ve her $N_y \in \mathcal{N}(y)$ ise $\mathcal{N}(x) = \mathcal{N}(y)$ dir.

Lemma 4.1.1

i. Eğer (X,cl) genişletilmiş topoloji ise (R0) ve (R0c) denktir.
ii. Eğer (X,cl) komşuluk uzayı ise (wS) den (R0) elde edilir.
iii. Eğer (X,cl) komşuluk uzayı ise (RE) her zaman (S) yi gerektirir.

İspat. i. $N(x) = \cap\{ N \mid N \in \mathcal{N}(x) \}$ kümesi x in bir komşuluğu olsun. O zaman (R0) " $y \in N(x)$ ise $x \in N(y)$ dir " şeklinde yazılabilir. İzotonik uzayda,

$$cl(\{x\}) = \{ y \mid \forall N \in \mathcal{N}(y) : N \cap \{x\} \neq \emptyset \} = \{ y \mid x \in N(x) \}$$

yani, $x \in N(y)$ dir ancak ve ancak $y \in cl(\{x\})$ dir. Bu da (R0c) yi verir.

ii. $x \in N(x)$ olsun. O zaman (wS) ise $\mathcal{N}(x) \subseteq \mathcal{N}(y)$, yani, $U \in \mathcal{N}(x)$ ise $U \in \mathcal{N}(y)$ dir. Denk olarak, $x \notin cl(U)^t$ ise $y \notin cl(U)^t$ ve bundan dolayı her A için $y \in cl(A)$ ise $x \in cl(A)$ dır. Şimdi $x \in N(y)$, yani, $y \in cl(\{x\})$ ve (K2) yi kullanarak $y \in cl(\{y\})$ ise $x \in cl(\{y\})$ dir. Bu da $y \in N(x)$ olduğunu gösterir.

Ayrıca $y \in N(x)$ ve (K2) yi kullanarak $y \in N(y)$ elde edilir, o zaman $N(x) \cap N(y) \neq \emptyset$ ve olduğundan her $N_x \in \mathcal{N}(x)$ ve $N_y \in \mathcal{N}(y)$ için $N_x \cap N_y \neq \emptyset$ olur. (RE) ifadesinden $\mathcal{N}(x) = \mathcal{N}(y)$ elde edilir. Bu durumda da (S) de sağlanmış olur.

Teorem 4.1.2

i. İzotonik uzaylarda (S) şartı (cS) yi bu da (wS) yi gerektirir.
ii. Bir izotonik (R0) uzayında (wS), (cS) ve (S) denktir.
iii. Eğer (X,cl) komşuluk uzayı ise (wS), (cS) ve (S) denktir.

İspat. i. $x \in N(y)$ ise $y \in cl(\{x\})$ dir buna bağlı olarak $N \in \mathcal{N}(x)$ ve $N \in \mathcal{N}(y)$ olur. Denk olarak $x \notin cl\ (N)^t$ ancak ve ancak $y \notin cl(N)^t$ dir. Bu durumda $x \in cl(N)^t$ dir ancak ve ancak $y \in cl(N)^t$ elde edilir. O halde $x \in cl(A)$ olması $A \in P(X)$ için $y \in cl(A)$ olmasıdır. Sonuç olarakta $y \in cl(\{x\})$ ve $y \in cl(A)$ ise $x \in cl(A)$ dır.

$cl(\{x\}) \cap cl(A) \neq \emptyset$ ise $x \in cl(A)$ dır. Bu ifadenin olumsuzu da (cS) yi verir. Şimdi $x \in N(y)$ olsun. Yani $y \in cl(\{x\})$ ve $U \in \mathcal{N}(x)$ dir. Bu da $x \notin cl\ (U)^t$ olduğunu gösterir. (cS) den $cl(\{x\}) \cap cl(U)^t = \emptyset$ elde edilir. Bundan dolayı $y \in cl(\{x\})$ ise $y \notin cl(U)^t$ dir. Diğer taraftan $y \in int(U)$ ve buna bağlı olarak $U \in \mathcal{N}(y)$ dir. Böylece $\mathcal{N}(x) \subseteq \mathcal{N}(y)$ elde edilir. (wS) sağlanmıştır.

ii. (wS) özelliğinden $x \in cl(\{y\})$ ise $\mathcal{N}(y) \subseteq \mathcal{N}(x)$ dir. Aynı zamanda (R0) izotonik uzayından $y \in cl(\{x\})$ dir. (wS) özelliği tekrar uygulandığında $\mathcal{N}(x) \subseteq \mathcal{N}(y)$ elde edilir. Buradan $\mathcal{N}(x) = \mathcal{N}(y)$ bulunur. Bu da (S) özelliğinin (wS) özelliğine denk olduğunu gösterir.

Şimdi de (cS) nin (wS) ye denk olduğunu görelim. $x \in N(y)$ olmak üzere,

$y \in cl(\{x\})$ ve $U \in \mathcal{N}(x)$ dir. Bu durumda $x \notin cl(U)^t$ dir. (cS) den $cl(\{x\}) \cap cl(U)^t = \emptyset$ elde edilir. Bundan dolayı $y \in cl(\{x\})$ ise $y \notin cl(U)^t$ elde edilir. Daha net olarak, $y \in int(U)$ dur ve buradan $U \in \mathcal{N}(y)$ dir. Böylece $\mathcal{N}(x) \subseteq \mathcal{N}(y)$ sonucuna ulaşırız.

iii. Lemma 4.1.1 in (ii) maddesinden (X,cl) uzayı komşuluk uzayı ise (wS) den (R0) elde edilir. Öncelikle bunu görelim.

$x \in N(x)$ olsun. O zaman (wS) ise $\mathcal{N}(x) \subseteq \mathcal{N}(y)$ olur yani $U \in \mathcal{N}(x)$ ise $U \in \mathcal{N}(y)$ dir. Denk olarak $x \notin cl(U)^t$ ise $y \notin cl(U)^t$ dir. Bundan dolayı, her A için $y \in cl(A)$ ise $x \in cl(A)$ dır. $x \in N(y)$ ise $y \in cl(\{x\})$ olur ve (K2) den $y \in cl(\{y\})$ ise $x \in cl(\{y\})$ buradan $x \in N(x)$ dir. Böylece (wS) den (R0) elde edilmiş olur.

Buna bağlı olarak Teorem 4.1.2 nin (ii) maddesinden (X,cl) uzayının komşuluk uzayı olması koşulunda elde edilen (R0) uzayında (wS), (cS) ve (S) nin denk olduğunu biliyoruz. Bu da ispatı tamamlar.

4.2. Alt Ayırma Aksiyomları

(T_0) ve (T_1) aksiyomları, yukarıdaki (R0) simetri aksiyomu yardımıyla topolojik uzaylarda olduğu gibi açıklanabilir :

(T_0) Her $x,y \in X$ için $x \neq y$ olmak üzere, $y \notin N'$ olacak şekilde bir $N' \in \mathcal{N}(x)$ vardır

veya $x \notin N''$ olacak şekilde bir $N'' \in \mathcal{N}(y)$ vardır.

(T_1) $x,y \in X$ için $x \neq y$ olmak üzere, $x \notin N''$ ve $y \notin N'$ olacak şekilde bir $N' \in \mathcal{N}(x)$ ve $N'' \in \mathcal{N}(y)$ vardır.

($K0'$) ı kabul ederek (T_0) ve (T_1), N(x) türünden yeniden ifade edilebilir. Bu gösterim kapanış fonksiyonları türünden ilgili aksiyomları verir.

(T_0) $x \neq y : y \notin N(x)$ ya da $x \notin N(y)$

(cT_0) $x \neq y : y \notin cl(\{x\})$ ya da $x \notin cl(\{y\})$

(T_1) $N(x) \subseteq \{x\}$

(cT_1) $cl(x) \subseteq \{x\}$

Teorem 4.2.1

i. (T_1) olması için gerek ve yeter şart (T_0) ve (R0) olmasıdır.
ii. (cT_1) olması için gerek ve yeter şart (cT_0) ve (R0c) olmasıdır.
iii. (X,cl) genişletilmiş topolojik uzay, (T_0) olması için gerek ve yeter şart (cT_0) olmasıdır ve buradan (T_1) olması için gerek yeter şart (cT_1) olmasıdır.

İspat. i. (T_1) ise (T_0) ve (R0) tanımdan elde edilir.Yani, $N(x) \subseteq \{x\}$ olduğunu kabul edelim. $x \neq y$ olmak üzere $x \notin N(y)$ olur. Bu da (T_0) ve (R0) ı sağlar. Tersine (X,cl) uzayı, (T_0) ve (R0) olsun. Fakat (T_1) olmasın. O zaman $x_0 \neq y_0 \in X$ olmak üzere $y_0 \in N(x_0)$ olur. Bu da çelişkidir. O halde (T_1) uzayı sağlanmalıdır.

ii. (cT_1) ise (cT_0) ve (cR0) tanımdan sağlanır. Yani, $cl(x) \subseteq \{x\}$ ifadesinin kabul edelim. Bu durumda, $x \neq y$ olmak üzere, $y \notin cl(\{x\})$ ya da $x \notin cl(\{y\})$ olduğunu gösterir. O halde (cT_0) ve (R0c) yi sağlar. Tersine, (X,cl) uzayı (cT_0) ve (R0) olsun. Fakat cT_1 olmasın. O zaman $x_0 \neq y_0 \in X$ olmak üzere, $y \notin cl(\{x\})$ ya da $x \notin cl(\{y\})$ olur. Bu durumda $cl(\{x\}) \subseteq \{x\}$ olmalıdır. Bu da çelişkidir. O halde (cT_1) olmalıdır.

iii. $(T_0) \Leftrightarrow (cT_0)$ olduğunu gösterelim.

Tanımdan dolayı $x \in N(y)$ dir ancak ve ancak $y \in cl(\{x\})$ dir. Aynı şekilde $y \in N(x)$ ise $x \in cl(\{y\})$ dir. O halde (T_0) da $y \notin N(x)$ ise $x \notin cl(\{y\})$ ya da $x \notin N(y)$ ise $y \notin cl(\{x\})$ dir. Böylece (cT_0) sağlanmış olur.

$(T_1) \Leftrightarrow (cT_1)$ olduğunu gösterelim.

$x \in N(x)$ ise $x \notin cl(x)^t$ dir bu durumda $x \in cl(x)$ dir. $x \in N(x) \subseteq \{x\}$ olduğundan $x \in cl(x) \subseteq \{x\}$ elde edilir.

4.3.Hausdorff Benzeri Aksiyomlar

(T_2) $x \neq y$ ise, $N' \cap N'' = \emptyset$ olacak şekilde $N' \in \mathcal{N}(x)$ ve $N'' \in \mathcal{N}(y)$ vardır.

(H) Bir öz ön-süzgeç en çok bir noktaya yakınsar.

$(T_{2\frac{1}{2}})$ $x \neq y$ ise, $cl(N') \cap cl(N'') = \emptyset$ olacak şekilde $N' \in \mathcal{N}(x)$ ve $N'' \in \mathcal{N}(y)$ vardır.

Lemma 4.3.1

i. Genelde (T_2), (RE) yi gerektirir.
ii. Komşuluk uzaylarında, $(T_{2\frac{1}{2}})$ ise (T_2) dir.
iii. Komşuluk uzaylarında, (T_2) olması için gerek ve yeter şart (T_0) ve (RE) olmasıdır.
iv. Komşuluk uzaylarında (T_0) ve (RE) ise (T_1) dir.

İspat. i. (T_2) ise (RE) dir görelim. $x \neq y$ olmak üzere, her $N' \in \mathcal{N}(x)$ ve $N'' \in \mathcal{N}(y)$ için, $N' \cap N'' \neq \emptyset$ ise $\mathcal{N}(x) = \mathcal{N}(y)$ dir. Bu da (RE) yi verir.

ii. ($T_{2\frac{1}{2}}$) ise (T_2) dir. $x \neq y$ ise $cl(N') \cap cl(N'') \neq \emptyset$ olacak şekilde $N' \in \mathcal{N}(x)$ ve $N'' \in \mathcal{N}(y)$ vardır. Ayrıca $cl(N') \cap cl(N'') \neq \emptyset$ ise $N' \cap N'' \neq \emptyset$ dir. Bu da (T_2) yi sağlar.

iii. (RE) sağlandığını varsayalım ama (T_2) sağlanmasın. O zaman $x \neq y$ olmak üzere, öyleki her $N' \in \mathcal{N}(x)$ ve her $N'' \in \mathcal{N}(y)$ için $N' \cap N'' \neq \emptyset$. (RE) kullanılarak $\mathcal{N}(x) = \mathcal{N}(y)$ elde edilir. Ayrıca (K2) den her $N \in \mathcal{N}(x)$, $N \in \mathcal{N}(y)$ ve $x,y \in N$ için $\mathcal{N}(x) = \mathcal{N}(y)$ elde edilir. Bu (T_2) ve (T_0) ile çelişir.

iv. (T_0) ve (RE) ise (T_1) direkt tanımdan elde edilir.

Teorem 4.3.2 (X,cl) komşuluk uzayı olmak üzere, (H) olması için gerek ve yeter şart (T_2) olmasıdır.

İspat. Bir komşuluk uzayında her $\mathcal{N}(x)$ komşuluk sistemi uygun bir ön süzgeçtir. İki uygun ön süzgecin $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ birleşimi uygun bir ön süzgeç olmas için gerek ve yeter şart her $F \in \mathcal{F}$ ve $G \in \mathcal{G}$ için $F \cap G \neq \emptyset$ olmasıdır.

(T_2) ise (H) dır. $\mathcal{F}$, hem x hemde y ye yakınsayan uygun ön süzgeç olsun. Diğer bir ifadeyle, $\mathcal{N}(x) \cup \mathcal{N}(y) \subseteq \mathcal{F}$ dir. Eğer $x \neq y$ ise (T_2) maddesi kullanılarak $N' \in \mathcal{N}(x)$ ve $N'' \in \mathcal{N}(y)$ olmak üzere $N' \cap N'' = \emptyset$ dir. Yani $\mathcal{F}$ uygun bir ön süzgeç değildir. O halde, x=y elde edilir (H) maddesi sağlanmıştır.

(H) ise (T_2) dir. (H) maddesi “ eğer $x \neq y$ ise $\mathcal{N}(x) \cup \mathcal{N}(y)$ birleşiminden daha ince uygun bir ön süzgeç vardır ve buna eşdeğer olarak $\mathcal{N}(x) \cup \mathcal{N}(y)$ birleşiminin kendisi uygun bir ön süzgeç değildir.” şeklinde yeniden ifade edilebilir. O halde, $N', N'' \in \mathcal{N}(x) \cup \mathcal{N}(y)$ olmak üzere, $N' \cap N'' = \emptyset$ dir. Hem $\mathcal{N}(x)$ hemde $\mathcal{N}(y)$ uygun ön süzgeç oldukça, $N' \in \mathcal{N}(x)$ ve $N'' \in \mathcal{N}(y)$ seçilmelidir. Bu durumda, $N', N'' \in \mathcal{N}(x) \cup \mathcal{N}(y)$ olmak üzere, $N' \cap N'' = \emptyset$ dir. (T_2) sağlanmış olur.

4.4. Regülerlik Benzeri Aksiyomlar

Teorem 4.4.1 Bir izotonik uzayda aşağıdaki durumlar denktir :

(R) Her $x \in X$ ve her $N \in \mathcal{N}(x)$ için cl (U) $\subseteq$ N olacak şekilde $U \in \mathcal{N}(x)$ vardır.

(R′) Her $x \in X$ ve her boş olmayan $A \in P(X)$ için $x \notin$ cl (A) olmak üzere, $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $U \in \mathcal{N}(x)$ ve $V \in \mathcal{N}(A)$ vardır.

İspat. (R) ise (R′) olduğunu gösterelim. $N \in \mathcal{N}(x)$ olsun. O zaman cl (U) $\subseteq$ N olacak şekilde $U \in \mathcal{N}(x)$ vardır. $V = (N)^t$ ve $A = (N)^t$ alalım. Bu durumda $(N)^t = A \subseteq (\mathrm{cl}(U))^t = (\mathrm{cl}(V)^t)^t = \mathrm{int}(V)$ elde edilir. Daha açık olarak $A \in \mathcal{N}(V)$ ve $U \cap V = \emptyset$ dir. Son olarak $N \in \mathcal{N}(x)$ olması durumunda $x \in \mathrm{cl}(A)$ dır bu da ispatı tamamlar.

(R′) ise (R) olduğunu gösterelim. Keyfi $x \in X$ ve $N \in \mathcal{N}(x)$ seçilsin ve $A = (N)^t$ alınsın. O zaman $x \notin$ cl (A) olması için gerek ve yeter şart $(A)^t = N \in \mathcal{N}(x)$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca $U \cap V = \emptyset$ olması halinde $U \subseteq (V)^t$ ve izotoni kullanılarak $\mathrm{cl}(U) \subseteq \mathrm{cl}(V)^t$ bulunur. Sonuçta da $\mathrm{int}(V) = (\mathrm{cl}(V)^t)^t \subseteq (\mathrm{cl}(U))^t$ elde edilir.Lemma.2.9.1 kullanılarak $A \subseteq \mathrm{int}(V)$, $A \subseteq \mathrm{cl}(U)$ ve $\mathrm{cl}(U) \subseteq (A)^t = N$ bulunur. Böylece (R) sağlanmış olur.

4.5. Regülerlik

Teorem 4.4.1 teki koşullardan biri sağlanıyorsa izotonik uzay regülerdir. Daha güçlü bir özellik,

(tR) Her $x \in X$ ve $\emptyset \neq A = \mathrm{cl}(A) \in P(X)$ kapalı kümeleri için, $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $U \in \mathcal{N}(x)$ ve $V \in \mathcal{N}(A)$ vardır.

Eğer cl eş güçlü ise (R) ve (tR) denktir.

- Bir kapalı uzay eğer (R) ve (T_0) ı sağlıyorsa (T_3) tür.

Lemma 4.5.1 (X,cl) komşuluk uzayı, (T_3) şartı ($T_{2\frac{1}{2}}$) şartını bu da (T_2) yi gerektirir.

İspat. (T_3) ise (T_2) olduğunu gösterelim. (R′) ile başlayalım ve $A = \{y\}$ olsun. (R), (R0) ı gerektirdikçe bir (T_3) uzayının (T_1) uzayı olduğunu biliyoruz. Bundan dolayı cl(A) =

$cl(\{y\}) = \{y\}$ dir. Böylece (R'), $N' \in \mathcal{N}(x)$ ve $N'' \in \mathcal{N}(y)$ olacak şekilde $N' \cap N'' = \emptyset$ olur. Böylece (T_2) ye ulaşılır.

(T_3) ise $(T_{2\frac{1}{2}})$ olduğunu gösterelim. (R) ile başlayalım. $U' \in \mathcal{N}(x)$ ve $U'' \in \mathcal{N}(y)$ olacak şekilde $cl(U') \subseteq N'$ ve $cl(U'') \subseteq N$ dir. Böylece $cl(U') \cap cl(U'') = \emptyset$ dir. $(T_{2\frac{1}{2}})$ sağlanır.

4.6. Normallik

(X,cl) izotonik uzay olsun. Uzay,

(QN) Eğer her $A,B \neq \emptyset$, $cl(A) \cap cl(B) = \emptyset$ ise $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{N}(A)$ ve $V \in \mathcal{N}(B)$ vardır. Bu ifade yarı normal tanımını verir.

(N) Boş olmayan her $A = cl\,(A) \neq \emptyset$ kapalı kümeleri ve her $N \in \mathcal{N}(A)$ için $cl(U) \subseteq N$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{N}(A)$ vardır. Bu ifade normallik tanımını verir.

(TN) Normal, boş olmayan her $A = cl(A) \neq \emptyset$ kapalı kümeleri ve $N \in \mathcal{N}(A)$ için ,$cl(U) \subseteq N$ olacak şekilde bir $U = cl(U) \in \mathcal{N}(A)$ kapalı kümesi vardır.

(QTN) Eğer her boş olmayan parçalanmış kapalı kümeler için,

$A = cl(A) \neq \emptyset$, $B = cl(B) \neq \emptyset$, $A \cap B \neq \emptyset$ ise $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{N}(A)$ ve $V \in \mathcal{N}(B)$ vardır. Bu ifade yarı t-normal tanımını verir.

Lemma 4.6.1 (X,cl) komşuluk uzayı olsun. O zaman,

i. (QN) ise (N) ise (QTN), ve (TN) ise (N).
ii. Eğer cl eş güçlü ise o zaman (QN), (TN), (N) ve (QTN) denktir.

İspat. i. (QN) ise (N) dir. $Q = cl(Q) \neq \emptyset$ ve $W \in \mathcal{N}(Q)$, yani, $Q \in int(W)$ olsun. $Q = cl(Q)$ ve $(int(W))^t = cl(W)^t$ kullanılarak $cl(Q) \cap cl(W)^t = \emptyset$ elde edilir. Ayrıca (QN) tarafından $U \cap N = \emptyset$ olacak şekilde $U \in \mathcal{N}(Q)$ ve $V \in (W)^t$ vardır. Böylece, $(W)^t \subseteq int(V) = (\,cl(V)^t\,)^t$ ifadesinden $cl(V)^t \subseteq W$ ve $U \subseteq (V)^t$ elde edilir. Son olarak $U \in \mathcal{N}(Q)$ ve $U \subseteq (V)^t$ ise $(V)^t \in \mathcal{N}(Q)$ ve $cl\,(V^t) \subseteq W$ olduğunu biliyoruz. Böylece (N) sağlanır.

(QN) ise (QTN) dir. Her A,B $\neq \emptyset$ ve cl(A) $\cap$ cl(B) = $\emptyset$ olmak üzere U $\in \mathcal{N}$(A) ve V $\in$ $\mathcal{N}$(B) vardır. (QN) nin (N) yi sağlamasından A = cl(A) $\neq \emptyset$ ve B = cl(B) $\neq \emptyset$ durumundan A $\cap$ B $\neq \emptyset$ dir. Bu durumda U $\cap$ V = $\emptyset$ dir. Bu da (QTN) i sağlar.

(TN) ise (N) dir. A = cl(A) $\neq \emptyset$ kapalı kümeleri ve her N $\in \mathcal{N}$(A) için cl(U) $\subseteq$ N olacak şekilde bir U = cl(U) $\in \mathcal{N}$(A) kümesi vardır. Bu durum (N) maddesini aynen sağlar.

(N) ve (TN) in denkliğini bir önceki maddede açıkça gördük. İspat (i) maddesinde açıkça tamamlanmıştır.

- (X,cl) kapanış uzayı eğer (T_1) ve (QN) sağlanırsa (T_4) tür.

Lemma 4.6.2 Eğer (X,cl) komşuluk uzayı ise o zaman (T_4), (T_3) ü gerektirir.

İspat. x noktası ve A kümesini x $\notin$ cl(A) olacak şekilde göz önüne alalım. (T_1) ve (K2) den cl({x}) = {x} elde edilir. Bundan dolayı cl({x}) $\cap$ cl(A) = $\emptyset$ olur. Böylece (QN) ise N $\cup$ U = $\emptyset$ olacak şekilde N $\in \mathcal{N}$(x) ve U $\in \mathcal{N}$(A) vardır. Yani (R') sağlanmış olur. Sonuç olarak (R') ve (T_0) tüm izotonik uzaylarda (T_3) e denktir.

4.7. Bağlantılılık

Bağlantılılık kavramı ayrılma ile sıkı ilişkilidir. A,B $\in$ P(X) kümesi yarı ayrılmıştır. Eğer $N' \in \mathcal{N}$(A) ve $N'' \in \mathcal{N}$(B) komşulukları varsa A $\cap$ N'' = N' $\cap$ B = $\emptyset$ dir ayrılmıştır (ayrıktır). Daha açık bir ifadeyle $N' \in \mathcal{N}$(A) ve $N'' \in \mathcal{N}$(B) komşulukları varsa, $N' \cap N''$ = $\emptyset$ dir.

Lemma 4.7.1 (X,cl) izotonik uzay ise A ve B yarı-ayrılmıştır ancak ve ancak cl(A) $\cap$ B = A $\cap$ cl(B) = $\emptyset$ dir.

İspat. Kümelerin komşuluklarının tanımı kullanılarak, A ve B yarı ayrıktır ancak ve ancak A $\subseteq$ int(U) ve B $\subseteq$ int(V) olacak şekilde U ve V kümeleri vardır. A $\cap$ V = $\emptyset$ ise V $\in$ $(A)^t$ dir. Bundan dolayı B $\subseteq$ int(V) $\subseteq$ int $(A)^t$ dir. Burada cl nin izotoni olduğu kullanılmıştır. Tümleyenleri yer değiştirilerek cl(A) = A - int$(A)^t$ $\subseteq$ $(B)^t$ elde edilir yani cl(A) $\cap$ B = $\emptyset$ dir. Benzer olarak cl(B) $\subseteq$ $(A)^t$ olduğunu görülür. Şimdi cl(A) $\cap$ B = A $\cap$ cl(B) = $\emptyset$ olsun. Böylece B $\subseteq$ (cl(A) $)^t$ = int$(A)^t$ ifadesinden V = $(A)^t \in \mathcal{N}$(B) dir. Bu yüzden $A \cap V = \emptyset$ dir. Aynı şekilde $U = (B)^t$ eşitliğinden A nın komşuluğu olduğu $U \subseteq cl(A) = int(A)$ durumundan görülür.

- $Z \in P(X)$ kümesi, $A, Z - A, A \neq \emptyset$, Z kümelerinin sıfıra eşit olmayan yarı-ayrılmış çiftlerinin ayrık birleşimi değilse (X,cl) de bağlantılıdır.

Tanımı kullanarak $Z = \{z\}$ 1-noktalı kümesi bağlantılıdır. Eğer X, (X,cl) de bağlantılı ise (X,cl) bağlantılı deriz. Bu tanım aşağıdaki gibi yeniden ifade edilebilir.

Teorem 4.7.2 $Z \in P(X)$, (X,cl) izotonik uzayında bağlantılıdır ancak ve ancak her uygun $A \subseteq Z$ alt kümesi için aşağıdaki sağlanırsa,

$$[\, cl(A) \cap (Z \setminus A)] \cup [\, cl(Z \setminus A) \cap A \,] \neq \emptyset \qquad (4.1)$$

Eşitlik (4.1) Hausdorff-Lennes durumu olarak bilinir.

Lemma 4.7.3 Eğer X ve Y, (X,cl) izotonik uzayında bağlantılı ve $X \cap Y \neq \emptyset$ ise o zaman $X \cup Y$ bağlantılıdır.

İspat. Hausdorff – Lennes durumunu kullanacağız :

$$[\, cl(A) \cap (Y \cup Z) \setminus A) \cup (A \cap cl((Y \cup Z) \setminus A) \,] =$$

$$[\, cl(A) \cap (Y \setminus A) \,] \cup [\, cl(A) \cap (Z \setminus A) \,] \cup [\, A \cap cl((Y \setminus A) \cup (Z \setminus A)) \,] \supseteq$$

$$\{[\, cl(A) \cap (Y \setminus A) \,] \cup [\, A \cap cl(Y \setminus A) \,]\} \cup \{[\, A \cap cl(Z \setminus A) \,] \cup [\, cl(A) \cap (Z \setminus A) \,]\}$$
(4.2)

Eğer $A \cap Y$ veya $A \cap Z$, Y nin veya Z nin uygun alt kümesi ise sırasıyla boş küme olmayan ifadelerin bir tanesidir. İki ifade de boştur ancak ve ancak ya $A = Z$ ve $A \cap Y = \emptyset$ ya da $A \cap Z = \emptyset$ ve $A = Y$ dir. $Y \cap Z \neq \emptyset$ olması ise imkânsızdır.

Teorem 4.7.4 (X,cl) komşuluk uzayı ise o zaman Z bağlantılı olduğunda cl(Z) de bağlantılıdır.

İspat. $A' = Z \cap A$ ve $A'' = A \setminus Z$ olsun. Haussdorff- Lennes durumunu kullanırız.

$[\, cl(A) \cap (cl(Z) \setminus A)\,] \cup [cl(cl(Z) \setminus A) \cap A] \supseteq$

$[\, (\, cl(A^{'}) \cup cl(A^{''})\,) \cap (\, Z \setminus A^{'}\,)\,] \cup [\, cl(\, Z - A^{'}\,) \cap (A^{'} \cup A^{''}\,)\,] \supseteq$

$$\{\, [\, cl(A^{'}) \cap (Z \setminus A^{'})\,] \cup [\, cl(Z \setminus A^{'}) \cap A^{'}\,]\, \}[\, cl(Z - A^{'}) \cap A^{''}\,] \qquad (4.3)$$

Burada $Z - A^{'} \subseteq (cl(Z) \setminus A^{''}) \setminus A^{'}$ sadece (K2) sağlandığında kullanıyoruz. Eğer $A^{'} \neq \emptyset$ ise o zaman boş küme olmayan terimlerdir, çünkü Z varsayımdan bağlantılıdır. Eğer $A^{'} = \emptyset$ ise o zaman $A^{''} \subseteq cl(Z) \setminus Z$ boş küme değildir ve bundan dolayı $cl(\, Z \setminus A^{'}\,) \cap A^{''} = cl(Z) \cap A^{''} \neq \emptyset$. Böylece cl(Z) bağlantılıdır.

Lemma 4.7.5 Komşuluk uzaylarında $f : (X,cl) \longrightarrow (Y,cl)$ sürekli olsun ve $A,B \subseteq X$ yarı ayrılmış olduğunu kabul edelim. O zaman $f^{-1}(A)$ ve $f^{-1}(B)$ yarı ayrılmıştır.

İspat : $cl(A) \cap B = \emptyset$ olsun. O zaman $f^{-1}(cl(A)) \cap f^{-1}(B) = \emptyset$ dir. Süreklilik $cl(\, f^{-1}(A)\,) \subseteq f^{-1}(cl(A))$ demektir, bundan dolayı $cl(\, f^{-1}(A)\,) \cap f^{-1}(B) = \emptyset$ dir. Aynı durum ile $cl(B) \cap A = \emptyset$ ise $cl(\, f^{-1}(B)\,) \cap f^{-1}(A) = \emptyset$ olduğundan $f^{-1}(A)$ ve $f^{-1}(B)$ yarı ayrılmıştır.

Teorem 4.7.6 Eğer $f : (X,cl) \longrightarrow (Y,cl)$ komşuluk uzayları arasında sürekli fonksiyon ve A, X te bağlantılı ise o zaman f(A), Y de bağlantılıdır.

İspat. f(A) bağlantısız olsun. O zaman U ve V yarı ayrılmış ve boş olmadığından $f(A) = U \cap V$ dir. Böylece $f^{-1}(U)$ ve $f^{-1}(V)$ yarı ayrılmıştır. Açıkça $A^{'} = A \cap f^{-1}(U)$ ve $A^{''} = A \cap f^{-1}(V)$ nin ikisi de boş değildir ve yarı ayrılmıştır. Ayrıca $A^{'} \cup A^{''} = A$, bundan dolayı A bağlantılı değildir. Buradan f(A) bağlantılı değilse A da bağlantılı değildir sonucuna ulaşırız. O halde A bağlantılı ise f(A) da bağlantılıdır.

5. BÖLÜM

KAPANIŞ UZAYLARININ KATEGORİSİ

Bu bölümde öncelikle kategori teorinin temel kavramları verilmiştir. Sonrasında kapanış uzaylarının birinci bölümde verilmiş olan denk 2 tanımından başka 3. denk tanımı da ifade edilmiştir.

Kategori teorisindeki kapanış operatörlerinin pek çok kullanım alanı vardır. Temelleri Samuel [16], Baurbaki [17] ve Sonner [18] tarafından atılan kategori teorisinde yansıtılan alt kategori kavramı kullanılarak latis teorisindeki kapanış operatörü kavramı elde edilmiştir. [20-21]. Grothendieck topoloji ve Lawvere-Tierney topoloji kavramları Sheaf ve Topos teorisinde önemli olup, en uygun şekilde özel kapanış operatörleri ile tanımlanırlar [22,23].

5.1.Kategori Teori Temel Kavramlar

Tanım 5.1.1. [28] K bir sınıf olsun. K nın kategori olması için K daki tüm nesnelerin (object), tüm dönüşümlerin sınıfı (morfizm) ve verilen iki dönüşüm için bunların bileşkesi tanımlanmalıdır. Bunlar aynı zamanda şu şartları sağlamalıdır :

i. K daki her A nesnesi için $1_A : A \longrightarrow A$ birim dönüşümü vardır öyleki her $f : A \longrightarrow B$ dönüşümü için $f \circ 1_A = f$ ve her $g : B \longrightarrow A$ dönüşümü için $1_A \circ g = g$ olmalıdır.
ii. $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$, $h : C \longrightarrow D$ olmak üzere " $\circ$ " bileşke işlemi birleşme özelliğine sahip olmalıdır. Yani,

$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

sağlanmalıdır.

$$\text{Hom}(A, B) = \{ f \mid f : A \longrightarrow B \text{ dönüşüm} \}$$

$$\circ : \text{Hom}(A, B) \times \text{Hom}(B, C) \longrightarrow \text{Hom}(A, C)$$

Örnek 5.1.2 Tüm kümelerin sınıfı bir kategori oluşturur.

Nesneleri A,B,C,... kümeleridir.

Morfizmleri $f : A \longrightarrow B$ ve $g : B \longrightarrow C$ .. fonksiyonlarıdır.

Morfizmlerin bileşkesi fonksiyonların bileşkesidir.

1. Her A kümesi için $1_A : A \longrightarrow A$ birim fonksiyonu vardır. Ayrıca her $f : A \longrightarrow B$ fonksiyonu için $f \circ 1_A = f(1_A) = f$ olur. Bunun yanında $g : B \longrightarrow A$ için $1_A \circ g = g$ dir.

2. $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$, $h : C \longrightarrow D$ fonksiyonları için,

$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ olur. $a \in A$ olsun.

$h \circ (g(f(a)) = ((h \circ g) \circ f)(a)$

Dolayısıyla tüm kümeler ve bunlar arasındaki fonksiyonların sınıfı bir kategori olur. **Set** ile gösterilir.

Örnek 5.1.3. Tüm topolojik uzayların sınıfı bir kategoridir.

Nesneleri (X,τ), (Y,Γ) ... topolojik uzaylardır.

Morfizmleri $f : (X,\tau) \longrightarrow (Y,\Gamma)$ şeklindeki sürekli dönüşümler

Bileşke işlemi fonksiyonların bileşkesi olur.

1. $1_X : (X,\tau) \longrightarrow (X,\tau)$ birim fonksiyon olsun. Bu fonksiyon süreklidir. Bu fonksiyon süreklidir. Bu fonksiyon her $f : (X,\tau) \longrightarrow (Y,\Gamma)$ sürekli fonksiyonu için $f \circ 1_X = f(1_X) = f$ olur.

$U \in \Gamma$ olsun. $f^{-1}(U) \in \tau$ olur. Çünkü f sürekli, $1_X^{-1}(f^{-1}(U)) \in \tau$ olur. 1_X de süreklidir. O halde $1_X^{-1}(f^{-1}(U)) = (f \circ 1_X)^{-1}(U) \in \tau$ olur.

2. $f : (X,\tau) \longrightarrow (Y,\Gamma)$, $g : (Y,\Gamma) \longrightarrow (Z,\delta)$ ve $h : (Z,\delta) \longrightarrow (W,\Psi)$ sürekli fonksiyonları için $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ olur.

Sürekli fonksiyonların bileşkeleri de sürekli olduğundan bileşke işlemi tanımlanır. Topolojik uzayların kategorisi **Top** ile gösterilir.

Örnek 5.1.4 Tüm grupların sınıfı bir kategoridir.

Nesneleri gruplar,

Morfizmleri grup homomorfizmleri,

Bileşke işlemi grup homomorfizmlerin bileşkesi olur. Grupların kategorisi **Grp** ile gösterilir.

Benzer şekilde halkalar ve halka homomorfizmleri de bir kategori oluşturur. **Rng** ile gösterilir. Cisimler ve cisim homomorfizmleri de bir kategori oluşturur. **Fld** ile gösterilir [28].

Tanım 5.1.5. K bir kategori olsun. Bir C kategorisinin nesne ve dönüşümleri K nın bazı nesne ve dönüşümlerinden oluşuyorsa ve K daki işlem C ye kısıtlandığında kategori için gerekli şartlar sağlanıyorsa C ye K nın alt kategorisi denir.

Örnek 5.1.6 Sonlu kümeler ve bunlar arasındaki bire bir fonksiyonlar **Set** in bir alt kategorisidir.

Örnek 5.1.7 Hausdorff uzaylar ve örten fonksiyonlar **Top** ın bir alt kategorisidir [28].

Tanım 5.1.8. Eğer nesnelerde kısıtlama olup dönüşümlerde kısıtlama olmuyorsa C ye K nın dolgun (full) alt kategorisi denir [28].

Tanım 5.1.9. K bir kategori, i ve t, K nın nesneleri olsun. K nın her A nesnesi için,

K(i,A) = { i den A ya dönüşümlerin sınıfı } tek nokta cümlesi ise i ye K nın başlangıç (initial) nesnesi denir [28].

Tanım 5.1.10. K nın her A nesnesi için

K(A,t) = { A dan t ye dönüşümlerin sınıfı }

tek nokta cümlesi ise t ye K nın son (terminal) nesnesi denir.

Örnek 5.1.11. **Set** kategorisi için i = ∅ ve t = {x} tek nokta cümlesidir. Çünkü her A kümesi için f : ∅ ⟶ A boş fonsiyonudur ve f : A ⟶ {x} sabit fonksiyondur.

Örnek 5.1.12. **Top** kategorisi için i = { ∅ , {∅} } ve t = { {x}, { {x},∅ } dir. Çünkü her (X,τ) topolojik uzayı için f : i ⟶ (X,τ) boş fonksiyondur ve süreklidir. Her (X,τ) topolojik uzayı için f : (X,τ) ⟶ t sabit fonksiyonu süreklidir.

Tanım 5.1.13. K bir kategori ve A,B ∈ K olsun [28].

1. f : A ⟶ B izomorfizmdir ancak ve ancak g : B ⟶ A morfizmi vardır öyleki g ∘ f = 1_A ve f ∘ g = 1_B dir. (Homeomorfizm)
2. f : A ⟶ B monomofizmdir ancak ve ancak verilen herhangi bir C nesnesi ve g , h : C ⟶ A iki dönüşümü için f ∘ g = f ∘ h ise g = h dır. (Birebir)
3. f : A ⟶ B epimorfizmdir ancak ve ancak herhangi bir C nesnesi ve g , h : B ⟶ C iki dönüşümü için g ∘ f = h ∘ f ise g = h dır. (Örten)

Örnek 5.1.14. K kategorisi **Set** ve **Grp** olduğunda izomorfizm birebirlik ve örtenliğe denktir. **Top** olduğunda ise izomorfizm homemorfizme karşılık gelir.

Tanım 5.1.15. K ve K' iki kategori olsun. Eğer K daki her A nesnesi için F(A) K nın bir nesnesi ve K daki her f : A ⟶ B dönüşümü F(f) : F(A) ⟶ F(B) K' nın bir dönüşümü oluyorsa ve,

1. K nın her A nesnesi için $F(1_A) = 1_{F(A)}$
2. F(g ∘ f) = F(g) ∘ F(f)

şartları sağlanıyorsa F : K ⟶ K' ne bir fanktör denir [28].

Örnek 5.1.16. K bir kategori ve A ∈ K olsun. K(A,-) : K ⟶ **Set** her B ∈ K için K(A,B) = A dan B ye giden dönüşümlerin kümesi **Set** in elemanıdır. Ayrıca her f : B ⟶ C ve g : A ⟶ B dönüşümleri için,

K(A,f)(g) = f ∘ g : A ⟶ C bir dönüşümdür. Buna göre, K(A,-) : K ⟶ **Set** bir fanktördür.

1. 1_B : B ⟶ B, f : A ⟶ B ve g : B ⟶ C olsun. K(A,1_B) (f) = 1_B ∘ f = f ve K(A,1_B)(f) = $1_{K(A,A)}$ ∘ f dir.

2. K(A,g∘f) = K(A,g) ∘ K(A,f) olduğunu gösterelim. f : B ⟶ C, g : C ⟶ D fonksiyonları olsun. Her h ∈ K(A,B) için,

K(A,g∘f) (h) = (g ∘ f) (h) ve K(A,g) ∘ K(A,g)(h) = K(A,g) (f ∘ h) = g ∘ (f ∘ h)

olduğundan (g ∘ f) ∘ h = g ∘ (f ∘ h) = g ∘ (f ∘ h) olur. Dolayısıyla,

K(A,g ∘ f) = K(A,g) ∘ K(A,f) elde edilir.

Örnek 5.1.17. $\mathcal{U}$: **Top** ⟶ **Set**, $\mathcal{U}(X,\tau) = X$ ve f : $(X,\tau) \longrightarrow (Y,\Gamma)$ için $\mathcal{U}(f) = f : X \longrightarrow Y$ olarak tanımlansın. $\mathcal{U}$ bir fanktör olur.

1. $\mathcal{U}(1_{(X,\tau)}) = 1_{u(X,\tau)} = 1_X$

2. $\mathcal{U}$(g ∘ f) = g ∘ f için $\mathcal{U}$(g) = g ve $\mathcal{U}$(f) = f olduğundan $\mathcal{U}$(g) ∘ $\mathcal{U}$(f) = g ∘ f olur. Dolayısıyla $\mathcal{U}$ bir fanktördür. Buna unutkan fanktör denir.

Tanım 5.1.18. F : K ⟶ K' bir fanktör olsun.

Her A,B ∈ K ve her f : F(A) ⟶ F(B) dönüşümü için en az bir g : A ⟶ B dönüşümü var ve F(g) = f ise F ye dolgun (full) fanktör denir [28].

Tanım 5.1.19. F : K ⟶ K' bir fanktör olsun. Eğer her A,B ∈ K ve her f , g : A ⟶ B dönüşümleri için F(f) = F(g) olduğunda f = g oluyorsa F ye düzenli (faithful) fanktör denir [28] .

Tanım 5.1.20. F ye amnestik fanktör denir ancak ve ancak $f : A \longrightarrow A$ izomorfizmi için eğer $F(f) = 1_{F(A)}$ ise $f = 1_A$ olmalıdır.

Tanım 5.1.21. F hem düzenli hemde amnestik ise F ye belirli (concrete) fanktör denir.

Tanım 5.1.22. $\{ A_i, \tau_i : i \in I \}$ topolojik uzaylarında herhangi bir topluluğu ve $A \neq \emptyset$ olsun.

$f_i : A \longrightarrow A_i$ fonksiyonlar olmak üzere f_i lerin sürekli olacağı topolojiyi belirleyelim. Bunun için,

$$S = \bigcup_{i \in I} \{ f_i^{-1}(H) : H \in \tau_i \}$$

alt bazı tarafından oluşturulan topolojiye üretilen (induced) topoloji denir ve τ_* olarak gösterilir. Bu topoloji f_i leri sürekli kılan en küçük (kaba) topolojidir.

Tanım 5.1.23. $f_i : (A_i, \tau_i) \longrightarrow A$ fonksiyonları için,

$$\tau^* = \{ U \subset A \mid f_i(U) \in \tau_i, \text{ her } i \in I \}$$

A üzerinde bir topolojidir. Buna zayıf (ince) topoloji denir. Bu topoloji f_i leri sürekli kılan en büyük topolojidir. Buna coinduced topoloji denir [28].

Tanım 5.1.24. $\mathcal{E}$ ve $\mathcal{B}$ iki kategori ve $\mathcal{U} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{B}$ bir fanktör olsun.

1. $\{ X_i \mid i \in I \}$ $\mathcal{E}$ nin nesneleri ve $f_i : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}_i = \mathcal{U}(X_i)$, $\mathcal{B}$ de $\mathcal{U}$ kaynağı olsun.

   $\{ f_i : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}_i = \mathcal{U}(X_i) \}$ ailesinin bir başlangıç kaldırmasının $\mathcal{X} \in \mathcal{E}$ nesnesi ve $\mathcal{U}(\overline{f}_i) = f_i$ ve $\mathcal{U}(X) = \mathcal{B}$ olacak şekilde $\overline{f}_i : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}_i$ dönüşümleri ailesi olması için aşağıdaki şart sağlanmalıdır.

   - Eğer $\overline{g}_i : Y \longrightarrow \mathcal{X}_i$, $\mathcal{E}$ deki dönüşümlerin bir ailesi ve her $i \in I$ için $f_i \circ h = g_i (= \mathcal{U}(\overline{g}_i))$ olacak şekilde bir $h : \mathcal{U}(Y) \longrightarrow \mathcal{B}$ dönüşümü olacak şeilde en az bir $\overline{h} : Y \longrightarrow \mathcal{X}$ vardır.

Eğer $f_i : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}_i$ bir başlangıç kaldırması ise $\mathcal{X}$ deki yapıya f_i ler tarafından $\mathcal{X}_i$ lere elde edilen yapı denir [28].

2. $\mathcal{E}$ ve $\mathcal{B}$ iki kategori ve $\mathcal{U} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{B}$ bir fanktör olsun. $\{ \mathcal{X}_i \mid i \in I \}$ $\mathcal{E}$ nin nesneleri ve $f_i : \mathcal{U}(\mathcal{X}_i) = \mathcal{B}_i \longrightarrow \mathcal{B}$, $\mathcal{B}$ de $\mathcal{U}$-kavşağı olsun. $\{ f_i : \mathcal{U}(\mathcal{X}_i) = \mathcal{B}_i \longrightarrow \mathcal{B} \}$ ailesinin bir bitiş kaldırmasının $\mathcal{U}(\overline{f}_i) = f_i$ ve $\mathcal{U}(\mathcal{X}) = \mathcal{B}$ olacak şekildeki $\overline{f}_i : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}_i$ dönüşümler ailesi olması için aşağıdaki şart sağlanmalıdır :

- Eğer $\overline{g}_i : \mathcal{X}_i \longrightarrow$ Y, $\mathcal{E}$ deki dönüşümlerin bir ailesi ve her $i \in I$ için $h \circ f_i = g_i(=\mathcal{U}(\overline{g}_i))$ olacak şekilde bir dönüşümü için her $i \in I$ için $\overline{h} \circ \overline{f}_i = \overline{g}_i$ olacak şekilde en az bir $\overline{h} : \mathcal{X} \longrightarrow$ Y vardır.

Eğer $f_i : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}_i$ bir bitiş kaldırması ise $\mathcal{X}$ deki yapıya f_i ler tarafından $\mathcal{X}_i$ lere elde edilen yapı denir [28].

5.2. Kapanış Uzaylarının Kategorisi

Tanım 5.2.1. X bir cümle ve $C \subset P(X)$ olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa (X,C) ikilisine kapanış uzayı denir [28].

iii. $X, \emptyset \in C$ dir.

iv. Her $i \in I$ için, $U_i \in C$ ise $\bigcup_{i \in I} U_i \in C$ dir.

Tanım 5.2.2. (X,C) ve (Y,D) kapanış uzayları $f : (X,C) \longrightarrow (Y,D)$ bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter şart her $U \in D$ için $f^{-1}(U) \in C$ olmasıdır. Nesneleri kapanış uzayları dönüşümleri sürekli fonksiyonlar olan kategoriye kapanış uzayları kategorisi denir ve **Cls** ile gösterilir.

Tanım 5.2.3. Eğer $\mathcal{U} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{B}$ fanktörü belirli, küçük demetlere sahip ve B deki her $f_i : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{U}(X_i)$ ailesi $\mathcal{E}$ de bir başlangıç kaldırmaya sahipse $\mathcal{U}$ ya topolojik fanktör veya $\mathcal{E}$ ye $\mathcal{B}$ üzerinde topolojik kategori denir.

Örnek 5.2.4. Aşağıdakiler topolojik kategoriye örnektir:

i. Kümeler ve fonksiyonların **Set** kategorisi

ii. Topolojik uzaylar ve sürekli fonksiyonların **Top** kategorisi

Lemma 5.2.5 Top topolojik uzaylar kategorisi, **Cls** kapanış uzayları kategorisinin bir dolgun alt kategorisidir.

İspat. (X,C) bir kapanış uzayı olmak üzere, X,∅ ∈ C ve her i ∈ I için, U_i ∈ C ise $\bigcup_{i \in I} U_i \in$ C dir. Fakat $\bigcap_{i=1}^{n} U_i$ nin C nin elemanı olması gerekmez. Dolayısıyla nesnelerde kısıtlama olup da dönüşümlerde kısıtlama olmadığından **Top**, **Cls** nin dolgun (full) kategorisidir.

Teorem 5.2.6. $\mathcal{U}$: **Top** ⟶ **Set** bir topolojik fanktördür [28].

İspat. 1. $\mathcal{U}$ nun belirli olduğunu gösterelim. $\mathcal{U}$ unutkan fanktör olduğundan f,g : (A,τ) ⟶ (B,τ') sürekli iki fonksiyon ve $\mathcal{U}$(f) = f ve $\mathcal{U}$(g) = g olduğundan f = g dir. Dolayısıyla $\mathcal{U}$ düzenlidir.

f : (A,τ) ⟶ (B,τ') sürekli $\mathcal{U}$(f) = 1_A ve f homeomorfizm olsun. $\mathcal{U}$(f) = f = 1_A olduğundan A = B dir. Dolayısıyla f : (A,τ) ⟶ (A,τ') olur. $\tau = \tau^{\infty}$olduğunu gösterelim. f sürekli olduğundan f in tersi altında $f^{-1}(\tau') \subset \tau$ olur. $(f \circ f^{-1})(\tau') \subset f(\tau)$ olduğundan ve f = 1_A olduğundan $\tau^{\infty} \subset \tau$ olur.

g : (A,τ') ⟶ (A,τ) sürekli fonksiyon olsun. $g^{-1}(\tau) \subset \tau^{\infty}$olur. ($g \circ g^{-1}$)(τ) ⊂ $g(\tau')$ olduğundan $\tau \subset$ g(τ') olur. f^{-1} = g = 1 olduğundan $\tau \subset \tau^{\infty}$olur. Dolayısıyla $\tau = \tau^{\infty}$elde edilir. O halde $\mathcal{U}$ amnestiktir.

2. $\mathcal{U}^{-1}$(A) = { (A,τ) | $\mathcal{U}$(A,τ) = A , $\tau \subset$ P(A) ve f : (A,τ) ⟶ (A,τ') sürekli ve $\mathcal{U}$(f) = 1_A : A ⟶ A } ise her A ∈ **Set** için $\mathcal{U}^{-1}$(A) nın bir küme olduğunu göstereceğiz. $\mathcal{U}^{-1}$(A) **Top** ın bir alt kategorisidir.

φ : { | τ A nın bir topolojisi }

θ : $\mathcal{U}^{-1}$(A) ⟶ φ olsun. θ(A,τ) = τ olacak şekilde tanımlanırsa θ bire bir ve örten olur.

$\mathcal{U}^{-1}$(A) = θ ⊂ P(P(A)) olduğundan $\mathcal{U}^{-1}$(A) bir kümedir.

3. Eğer $\{ f_i : A \longrightarrow \mathcal{U}(A,\tau_i) = A_i , i \in I \}$ **Set** de herhangi bir $\mathcal{U}$ kaynağı ve τ_* üretilen bir topoloji olsun. $f_i : (A, \tau_*) \longrightarrow (A,\tau_i)$ kaynağı bir başlangıç kaldırmadır. Benzer şekilde,

$\{ f_i : \mathcal{U}(A_i,\tau_i) = A_i \longrightarrow A , i \in I \}$ **Set** de herhangi bir kavşağı ve τ^* eş üretilen topoloji olsun. $f_i : (A_i,\tau_i) \longrightarrow (A,\tau^*)$ kavşağı bitiş kaldırmadır. Dolayısıyla : **Top** $\longrightarrow$ **Set** topolojik fanktördür.

Teorem 5.2.7. Her $(X,C) \in$ **Cls** için $\mathcal{U}(X,C) = X$ şeklinde tanımlı unutkan fanktör topolojik fanktördür [24].

İspat. 1. $\mathcal{U}$ nun belirli fanktör olduğunu gösterelim. $f,g : (X,C) \longrightarrow (Y,D)$ iki sürekli dönüşüm $\mathcal{U}(f) = \mathcal{U}(g)$ olsun. $\mathcal{U}(f) = f$ ve $\mathcal{U}(g) = g$ olduğundan $f = g$ dir. O halde $\mathcal{U}$ düzenlidir.

$f : (X,C) \longrightarrow (Y,D)$ bir sürekli dönüşüm $\mathcal{U}(f) = 1_X$ ve f bir izomorfizm olsun. $\mathcal{U}(f) = f = 1_X$ olduğundan $X = Y$ dir. Dolayısıyla $f : (X,C) \longrightarrow (X,D)$ olur. $C = D$ olduğunu gösterelim. f sürekli olduğundan $f^{-1}(D) = 1_X(D) = D \subset C$ dir. Benzer şekilde f izomorfizm ve f^{-1} sürekli olduğundan $f^{-1}(C) = 1_X(C) = C \subset D$ olur. O halde $C = D$ ve $f = 1_{(X,C)}$ dir. Dolayısıyla, $\mathcal{U}$ amnestiktir.

Sonuç olarak $\mathcal{U}$ hem düzenli hemde amnestik olduğundan belirlidir.

2. $\mathcal{U}^{-1}(X) = \{ (X,C) : \mathcal{U}(X,C) = X \}$ sınıfının her X nesnesi için bir cümle olduğunu gösterelim. $K = \{ C : C$, X üzerinde bir kapanış yapı $\}$ olsun.

$\theta = \mathcal{U}^{-1}(X) \longrightarrow K$ dönüşümü $\theta(X,C) = C$ şeklinde tanımlansın. θ nın bire bir olduğunu gösterelim. $\theta(X,C) = \theta(X,D)$ olsun. $C = D$ olduğundan $(X,C) = (X,D)$ olur. O halde θ birebirdir. Diğer taraftan $C \in K$ olsun. $(X,C) \in$ **Cls** ve $\mathcal{U}(X,C) = C$ olduğundan $(X,C) \in \mathcal{U}^{-1}(X)$ dir. Dolayısıyla θ örtendir. Buradan $\mathcal{U}^{-1}(X) \approx K \subset P(P(X))$ olur. Yani, $\mathcal{U}^{-1}(X)$ bir cümledir. O halde $\mathcal{U}$ küçük demetlere sahiptir.

3. X boştan farklı bir cümle ve $i \in I$ olmak üzere, (X_i,C_i) kapanış uzayları ve

$f_i : X \longrightarrow X_i$ fonksiyonlar olsun. $C = \{ U \subset X : U = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_i),\ U_i \in C_i \}$ olmak üzere

(X,C) nin bir kapanış uzayı olduğunu göstereceğiz.

$\emptyset \in C_i$ ve $f_i(\emptyset) = \emptyset$ olduğundan $\emptyset \in C$ dir. Ayrıca $X_i \in C_i$ ve $f_i^{-1}(X_i) = X$ olduğundan X $\in C$ dir. i,j $\in$ I olmak üzere $U_{ij} \in C_i$ olmak üzere ,

$U_j = \bigcup_{i \in I} f_{ij}^{-1}(U_{ij})$ şeklinde tanımlansın. Daha açık bir ifadeyle,

$\bigcup_{j \in I} U_j = \bigcup_{j \in I} \bigcup_{i \in I} f_{ij}^{-1}(U_{ij}) = \bigcup_{i \in I} (f_{1j}^{-1}(U_{1j}) \cup f_{2j}^{-1}(U_{2j}) \cup \ldots)$ şeklindedir. Burada,

$V_1 = f_{11}^{-1}(U_{11}) \cup f_{12}^{-1}(U_{12}) \cup f_{13}(U_{13}) \cup \ldots$ biçiminde tanımlandığında

$V_j = \bigcup_{i \in I} U_{ij} = U_{1j} \cup U_{2j} \cup U_{3j} \cup \ldots$ şeklinde olur. Dolayısıyla,

$\bigcup_{j \in I} U_i = \bigcup_{j \in I} f_j^{-1}(V_j) \in C$ elde edilir.

(Y,D) bir kapanış uzayı olmak üzere $g_i : (Y,D) \longrightarrow (X,C)$ sürekli fonksiyonlar ve $f_i \circ h = g_i$ olacak şekilde h : $\mathcal{U}$(Y,D) $\longrightarrow$ X fonksiyonu için en az bir h : (Y,D) $\longrightarrow$ (X,C) sürekli fonksiyonu mevcut olduğunu göstermeliyiz. i $\in$ I olmak üzere her $U_i \in C_i$ için $g_i(U_i) \in D$ olur. (Y,D) kapanış uzayı olduğundan $\bigcup_{i \in I} g_i^{-1}(U_i) \in D$ dir. Şimdi $h^{-1}(\bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(U_i)) \in D$ olduğunu göstereceğiz.

$h^{-1}(\bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(U_i)) = \bigcup_{i \in I} (h^{-1} \circ f_i^{-1})(U_i) = \bigcup_{i \in I} (f_i \circ h)^{-1}(U_i) = \bigcup_{i \in I} g_i^{-1}(U_i) \in D$ dir.

O halde h süreklidir. Dolayısıyla $C = \{ U \subset X_i : U = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_i), U_i \in C \}$ olur. Sonuç olarak $\mathcal{U}$ kaynağının bir başlangıç kaldırması vardır.

O halde $\mathcal{U}$: **Cls** $\longrightarrow$ **Set** bir topolojik fanktördür ve **Cls**, **Set** üzerinde bir topolojik kategoridir.

KAYNAKLAR

1. Moore, E. H., On a form of general analysis, with applications to linear differential and integral equations, in: Atti. del IV Congr. Int. Di Mat. II, Rome, 98-114, 1909.
2. Riesz, F., Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre, in:Atti del IV Congr. Int. Di Math., II, Roma, 18-24, 1909.
3. Hertz, P., Über Aximoensysteme für beliebige Satzsysteme. Teil I, Math. Ann. 87, 246-269, 1922.
4. Tarski, A., Remarques sur les notions fundamentales de la méthodologie des mathématiques, Ann. Soc. Math. Polon. 7, 270-272, 1929.
5. Birkhoff, G., The meaning of completeness, Ann. Math., 38, 57-60, 1937.
6. Pierce, R., Closure spaces with applications to ring theory, in : Lecture Notes in Math. 246, Springer, Berlin, 1972.
7. Kuratowski, K., Sur l'operation –A de l'Analysis Situs, Fund. Math. 3,182-199,1922.
8. Čech, E., On bicompact spaces, Ann. Math., 38, 823-844, 1937.
9. Ganter B. and Wille, R., Formal Concept Analysis, Springer-Verlag, Berlin, 1998.
10. Auman,G., Kontaktrelationen, Bayer. Akad. Wiss. Math. Nt. Kl. Sitzungsber, 67–77, 1970.
11. Moore, D.J., Categories of representations of physical systems, Gen. Topology Appl., 10(2), 175-181, 1979.
12. Aerts, D., Colebunders, E., Van der Voorde, A. and Van Steirteghem, B., State property systems and closure spaces: a study of categorical equivalence, Int. J.Theoret. Phys., 38(1), 359-385, 1999.
13. Birkhoff, G., Lattice Theory, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., Providence, 1940.
14. Erné, M., Lattice representations for categories of closure operators, Categorical Topology, Heldermann Verlag, Berlin, 197-222, 1983.
15. Stadler, B.M.R. and Stadler, P.F., Basic Properties of Closure Spaces, J. Chemical Inf. Comp. Sci., 42, 577-585, 2002.
16. Samuel, P., On universal mappings and free topological groups, Bull. Amer. Math. Soc., 54, 591-598, 1948.

17. Bourbaki, N., Topologie générale, Hermann, Paris, 1957.
18. Sonner, J., Universal and special problems, Math Z., 82, 200-211, 1963.
19. Freyd, P., Abelian Categories, Harper and Row, New York, 1964.
20. Herrlich, H., Topologische Reflexionen und Coreflexionen, Lecture Notes in Math.,78, Springer, Berlin, 1968.
21. Johnstone, P., Topos Theory, L.M.S. Mathematical monographs 10 Academic Press, New York, 1977.
22. Mac Lane, S. and Moerdijk, I., Sheaves in Geometry and Logic, A First Introductionto Topos Theory, Springer, New York, 1992.
23. Sierpiňski, W. General Topolgy. Univ. Toronto Press, Toronto, 1956
24. Dikranjan, D., Giuli, E. and Tozzi, A., Topological categories and closure operators, Quaestiones Math., 11, 323-337, 1988.
25. Koçak, M., Genel Topolojiye Giriş ve Çözümlü Alıştırmalar, Furkan Ofset, Eskişehir,2009.
26. Mucuk, O.,Topoloji ve Kategori, Nobel Yayın Dağıtım , Ankara,2010.
27. Yüksel, Ş.,Genel Topoloji,Selçuk Üniversitesi Basımevi,Konya,2000. Adámek,
28. J., Herrlich, H. and Strecker, G.E., Abstract and Concrete Categories, Wiley, New York, 1990.

ÖZGEÇMİŞ

Buket ALTUNTAŞ, 1987 yılında Kırşehir'de doğdu. İlk ve orta öğrenimini Ankara Çankaya İlçesinde tamamladı. Ardından Ahi Evran Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2010 yılında mezun oldu. Daha sonra Nevşehir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans öğrenimine başladı. Aynı yıl içinde Ahi Evran Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi'nde pedagojik formasyon eğitimine başladı ve 2011 yılında bu eğitimi tamamladı.

Adres : Şeyh Şamil mah. İlkdoğuş Sitesi
3.etap 5A-10. Eryaman/ ANKARA
Tel : 0507 661 90 30
e-posta : cagan2009@windowslive.com