

T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI ÖZEL MATRİSLERİN TERSLERİNİN
HESAPLANMASI VE UYGULAMALARI

Tezi Hazırlayan
Kadir HİLAL

Tez Danışmanı
Dr. Öğr. Üyesi Cahit KÖME

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Ağustos 2023

T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI ÖZEL MATRİSLERİN TERSLERİNİN
HESAPLANMASI VE UYGULAMALARI

Tezi Hazırlayan
Kadir HİLAL

Tez Danışmanı
Dr. Öğr. Üyesi Cahit KÖME

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Ağustos 2023

Dr. Öğr. Üyesi Cahit KÖME danışmanlığında **Kadir HİLAL** tarafından hazırlanan “**Bazı Özel Matrislerin Tersleri ve Uygulamaları**” başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

23/08/2023

JÜRİ

Başkan : Prof. Dr. Yasin YAZLIK

Üye : Doç. Dr. Nurettin IRMAK

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Cahit KÖME

ONAY

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun .../.../..... tarih ve kararı ile onaylanmıştır.

...../...../20.....

Doç. Dr. Cemal ÇARBOĞA

Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİM SAYFASI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada yer alan bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu ve bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Kadir HİLAL



TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim ve tez çalışmam süresince tüm bilgilerini benimle paylaşan ve tezimde büyük emeği olan danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Cahit KÖME'ye, bugünlere gelmemde büyük emekleri olan anne ve babama ve her zaman yanımda olan ve desteğini hiç esirgemeyen sevgili eşime teşekkürlerimi sunarım.



**BAZI ÖZEL MATRİSLERİN TERSLERİNİN HESAPLANMASI VE
UYGULAMALARI
(Yüksek Lisans Tezi)**

Cahit KÖME

**NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Ağustos 2023

ÖZET

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde literatür taraması, kaynak araştırması ve temel kavramlar verilmiştir.

İkinci bölümde, elemanları şartlı polinom dizilerinden oluşan üçgensel matrislerin tersleri ve bu matrislerin terslerini bulmakta kullanılacak olan bazı yardımcı teoremler elde edilmiştir.

Üçüncü bölümde, şartlı polinom matrisleri ile \mathcal{T} -binomiyel matrisleri arasındaki korelasyonlar incelenmiş olup bazı yeni özellikler elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde ise şartlı polinom matrislerinin terslerinin hesaplama esnasındaki performans kıyaslamaları yapılarak görsel ve sayısal veriler sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Şartlı polinom dizisi, Şartlı polinom matrisi, Matris Tersi, \mathcal{T} -binomiyel matrisi.

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Cahit KÖME

Sayfa Adeti: 46

INVERSION OF SOME SPECIAL MATRICES AND THEIR APPLICATIONS

(Msc Thesis)

Cahit KÖME

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

August 2023

ABSTRACT

This thesis consists of four chapters.

In the first section, literature review, resource survey and basic concepts are given.

In the second section, the inverses of triangular matrices whose elements are conditional polynomial sequences and some auxiliary theorems that will be used to find the inverses of these matrices are obtained.

In the third section, correlations between conditional polynomial matrices and \mathcal{T} -binomial matrices are examined and some new identities are obtained.

In the fourth section, graphical and numerical data are presented by comparing the performance of the inverses of conditional polynomial matrices during the calculation.

Keywords: Conditional polynomial sequence, Conditional polynomial matrix, Matrix Inverse, \mathcal{T} -nomial matrix.

Thesis Supervisor: Asst. Prof. Dr. Cahit KÖME

Page Number: 46

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY SAYFASI	i
TEZ BİLDİRİM SAYFASI	ii
TEŞEKKÜR	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
İÇİNDEKİLER	vi
TABLolar LİSTESİ	vii
ŞEKİLLER LİSTESİ	viii
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ	ix
1. BÖLÜM	
1.1. Genel Bilgiler	1
1.2. Amaç ve Kapsam	4
1.3. Kaynak Araştırması	4
1.4. Temel Kavramlar	7
2. BÖLÜM	
2.1. Şartlı Polinom Matrislerinin Tersleri	13
3. BÖLÜM	
3.1. Şartlı Polinom Matrisleri ve \mathcal{T} -Binomiyel Matrisleri	21
3.2. \mathcal{T} -Binomiyel Matrisleri Yoluyla Bazı Kombinatorik Özellikler	27
4. BÖLÜM	
4.1. Sayısal Sonuçlar	30
KAYNAKLAR	32
ÖZGEÇMİŞ	34

TABLÖLAR LİSTESİ

Tablo 1.1. Yetişkin, yavru ve toplam tavşan çifti sayısı	2
--	---



ŞEKİLLER LİSTESİ

- Şekil 2.1. Şartlı polinom dizilerinin özel durumları için grafikler 13
- Şekil 4.2. Şartlı polinom matrisinin tersleri için performans grafikleri 30



SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

- \mathbb{N} : Doğal sayılar kümesi
 \mathbb{N}^+ : Sayma sayıları kümesi
 \mathbb{R} : Reel sayılar kümesi
 \mathbb{C} : Kompleks sayılar kümesi
 F_n : n . Fibonacci sayısı
 L_n : n . Lucas sayısı
 U_n : n . İkinci mertebeden genelleştirilmiş rekürans sayısı
 q_n : n . İki periyotlu Fibonacci sayısı
 l_n : n . İki periyotlu Lucas sayısı
 $V_n(x, y)$: n . Genelleştirilmiş iki periyotlu Fibonacci polinomları
 $Q_n(x, y)$: n . Şartlı polinom dizisi
 \mathcal{P}_n : $n \times n$ tipinde Pascal matrisi
 \mathcal{F}_n : $n \times n$ tipinde Fibonacci matrisi
 \mathcal{L}_n : $n \times n$ tipinde Lucas matrisi
 \mathcal{U}_n : $n \times n$ tipinde Genelleştirilmiş Fibonacci matrisi
 $\mathcal{P}_n^{(1)}$: $n \times n$ tipinde 1. tip Pascal matrisi
 $\mathcal{P}_n^{(2)}$: $n \times n$ tipinde 2. tip Pascal matrisi

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1. Genel Bilgiler

Geçmişten günümüze yapılan bilimsel çalışmalar ve gözlemler, evrendeki nesnelere belirli bir düzene göre hareket ettiğini açıklamaktadır. Gözlemlenebilen evrende detaylar incelendikçe matematik biliminin her geçen gün daha da önemi ortaya çıkmaktadır. Antik yıllardaki ve günümüzdeki bazı bilim insanları ve felsefeciler, evrenin matematik dilinde yazıldığını ifade etmişlerdir. Doğada şimdiye kadar gözlemlenmiş birçok olay matematik biliminin alfabeleri olan sayılar ve matematiksel semboller ile ifade edilebilmektedir. İçinde bulunduğumuz evrende şimdiye kadar keşfedilmiş önemli bazı sayılar bulunmaktadır. Bu sayılardan en önemlilerinden birisi de Fibonacci sayıları olarak karşımıza çıkmaktadır.

Adını, 13. yüzyılın ünlü İtalyan matematikçisi Leonardo Fibonacci'den alan Fibonacci dizisi, matematiğin temel yapı taşlarından birini oluşturmakta ve doğada gözlemlenebilen birçok desenin ardındaki sırrı ortaya çıkarmaktadır.

Fibonacci sayıları ilk olarak Leonardo Fibonacci tarafından 1202 yılında keşfedilmiştir. Leonardo Fibonacci'nin "*Liber Abaci*" isimli kitabında tavşanlarla ilgili kurmuş olduğu problem aşağıdaki gibi verilmiştir [1]:

Biri erkek ve diğeri dişi olmak üzere bir çift yavru tavşan olmak üzere;

- *Bir ay sonra bu yavru çift erginleşmektedir,*
- *Erginleşen her çift tavşan bir ay sonra yeni bir çift yavru doğurmaktadır,*
- *Her yavru çift bir ay sonra erginleşmektedir,*
- *Hiç bir tavşanın ölmediğini ve her dişi tavşanın bir erkek bir dişi yavru doğurduğunu varsayalım.*

Bu şartlar altında bir yılın sonunda toplam kaç tane tavşan olur?

- *İlk ay, sadece bir çift tavşan vardır,*

- İkinci ay, bu tavşanlar erginleşir,
- Üçüncü ay, dişi bir çift yavru doğurur ve bir yavru çift tavşan vardır.

Yavru çiftler bu şekilde hesaplanmaya devam edilirse, Ocak ayından başlamak suretiyle yetişkin, yavru ve toplam tavşan çifti sayısı aşağıdaki tablo ile verilebilir:

Tablo 1.1. Yetişkin, yavru ve toplam tavşan çifti sayısı

Çift Sayısı	Ocak	Şubat	Mart	Nisan	Mayıs	Haziran	Temmuz	...
Yetişkin	0	1	1	2	3	5	8	...
Yavru	1	0	1	1	2	3	5	...
Toplam	1	1	2	3	5	8	13	...

Yukarıdaki tabloya dikkat edilirse toplam tavşan çifti sayıları belirli bir örüntüye göre artış göstermektedir. Bu sayılar arasındaki ilişkiye dikkat edilirse, ilk iki terimden sonraki sayılar kendisinden önceki iki terimin birbirine eklenmesi yoluyla elde edilmektedir. Elde edilen bu sayılara Fibonacci sayıları, bu sayıların oluşturduğu diziye ise Fibonacci dizisi denir. $n \rightarrow \infty$ için bu dizinin $(n + 1)$. teriminin n . terimine oranına “Altın oran” denir ve bu sayı $\Phi = 1,618033988749894\dots$ 'e denk gelmektedir [2]. Bu sayı farklı disiplinlerde birçok araştırmaya konu olmuş olup halen araştırılmaya devam edilmektedir. Günümüze kadar yapılan birçok araştırmacıya göre bir nesnenin altın orana benzerliği onun aynı zamanda estetik olarak güzelliğinin de bir ölçüsü olarak kabul edilmiştir. Fibonacci sayıları ve altın oranın doğada gözlemlendiği bazı yerler aşağıdaki gibidir [2]:

- Birçok bitki türünün yapraklarının dizilimi matematiksel olarak Altın Oran ile ilişkilidir.
- Bazı çiçeklerin yapraklarının sayıları sıklıkla Fibonacci sayılarıdır.
- Deniz kabukları, bitki dalları ve rüzgar türbinlerinin kanatları gibi birçok yapıda spiraller Altın Oran ile uyumlu olacak şekilde dizilime sahiptir.
- İnsan vücudu ve diğer canlı organizmaların bazı bölümlerinin boyutları ve oranları Altın Oran ile ilişkilendirilebilmektedir.
- Antik Yunan ve Roma mimarisinden Rönesans dönemine, sanat ve mimaride Altın Oran kullanımı oldukça yaygındır. Sanat eserlerinin boyutları ve oranları bu estetik kavrama uygun olarak tasarlanmıştır.

- Ünlü ressamların tablolarında ve heykellerde Altın Oran'ın izleri sıklıkla görülür. Kompozisyon ve oranlar, resimde denge ve estetik yakalamak için kullanılır.
- Antik Mısır'dan Gotik katedrallere kadar birçok yapıda Altın Oran'ın kullanıldığına dair kanıtlar vardır. Katedrallerin pencereleri, sütunları ve kubbeleri gibi unsurlar Altın Oran ile tasarlanmıştır.
- Özellikle bazı bestelerin yapılarında ve müziğin diziliminde matematiksel olarak Altın Oran kullanılabilir.
- Fraktal yapılar, matematiksel olarak tekrarlanan desenlerle tanımlanır ve Altın Oran'ın izleri bu tür yapıların içinde de bulunabilir.

Matrisler, günlük hayattaki problemleri daha kolay çözmek amacı ile oluşturulmuş satır ve sütunlardan oluşan ve belirli özelliklere sahip matematiksel yapılardır. Şimdiye kadar, gerçek hayat problemleri dahil olmak üzere birçok alanda sıkça kullanılmış ve halen yoğun bir şekilde kullanılmaya devam edilmektedir. Matrislerin günlük hayatta kullanıldığı bazı yerler aşağıdaki gibidir:

- Bilgisayar oyunları, animasyon filmleri ve diğer görsel efektler, matrislerin yaygın bir kullanım alanıdır. Özellikle 3D modellemeler ve dönüşümler matrislerle gerçekleştirilir. Bir cismin dönüşü, ölçeklendirilmesi veya konumlandırılması için de matrisler kullanılmaktadır.
- Mühendisler ve fizikçiler, matrisleri genellikle karmaşık sistemlerin modellenmesi ve çözümlemesi için kullanır. Elektrik devreleri, yapısal analiz, ısı transferi ve akışkan mekaniği gibi alanlarda matrislerin kullanımı yaygındır.
- Otomasyon sistemlerinde ve işlem kontrolünde matrisler, sensör verilerini işlemek, kontrol algoritmalarını uygulamak ve otomasyon işlemlerini optimize etmek için matrislerden faydalanılmaktadır.
- Finansal analizlerde matrisler, hisse senetleri ve varlık fiyatlarının ilişkilerini ve risklerini değerlendirmek için kullanılır. Portföy optimizasyonu, risk yönetimi ve ekonometrik modeller gibi finansal konularda matrisler sıkça kullanılır.

- Matrisler, bilgi teknolojisi alanında birçok algoritmanın temelini oluşturur. Veri tabanları, görüntü işleme, veri analitiği, yapay zeka ve derin öğrenme gibi alanlarda matris operasyonları kullanılır.
- Sinyal işleme ve iletişim sistemlerinde, matrisler ses, görüntü ve veri iletimi için kullanılan algoritmaların temelini oluşturur.
- Matrisler, jeoloji ve haritalama alanlarında, karmaşık veri setlerini yönetmek ve analiz etmek için kullanılır. Topografik haritalar ve jeolojik veri analizi için matris operasyonları yaygın olarak kullanılır.
- Matrisler, DNA analizi, protein yapıları, genetik veri analizi ve biyoinformatikte kullanılır.
- Ulaşım şirketleri ve planlamacılar, matrisler kullanarak yolculuk süreleri, güzergahlar ve ulaşım ağı verilerini analiz ederler.
- Matrisler, müşteri segmentasyonu, sosyal ağ analizi ve pazarlama stratejileri gibi konularda kullanılır.

Matrisler ile ilgili daha detaylı bilgi için [3] numaralı kaynaktaki kitaptan faydalanılabilir.

1.2. Amaç ve Kapsam

Bu çalışmada, öncelikli olarak iki değişkenli şartlı polinom dizilerinin Binet formülleri elde edilecektir. Sonrasında ise elemanları şartlı polinom dizileri olan şartlı polinom matrisleri tanımlanacaktır. Elde edilen şartlı polinom matrislerinin tersleri bazı analitik yöntemler kullanılarak hesaplanacaktır. Ayrıca, şartlı polinom matrisleri ile 1. ve 2. tip \mathcal{T} -binomiyel matrisleri arasındaki korelasyonlar incelenecektir. Şartlı polinom dizileri ve \mathcal{T} -binomiyel matrisleri kullanılarak bazı kombinatoriyal özellikler elde edilecektir. Son olarak, şartlı polinom matrislerinin tersleri için paket yazılımlar ile bazı kıyaslamalar yapılarak performans testleri yapılacaktır.

1.3. Kaynak Araştırması

Bu bölümde tez içeriği ile ilgili literatür taraması ve kaynak araştırması hakkında bilgiler verilecektir.

Horadam (1965), "Basic properties of a certain generalized sequence of numbers" isimli çalışmasında ikinci dereceden bir sayı dizisini tanımlayarak ve bu diziye ait genel özellikleri incelemiştir [4].

Falcon ve Plaza (2007), "On the Fibonacci k -numbers" isimli çalışmalarında geometrik dönüşümlerin ardışık uygulamalarını kullanarak k -Fibonacci dizisini tanımlamışlardır. Ayrıca tanımladıkları bu sayı dizisi için Binet formülü, üreteç fonksiyonu ve bu diziye ait birçok temel özellikleri elde etmişlerdir [5].

Edson ve Yayenie (2009), "A New Generalization of Fibonacci Sequence & Extended Binet's Formula" isimli çalışmalarında iki periyotlu Fibonacci dizilerini tanımlayarak bu dizilere ait Binet formülünü, üreteç fonksiyonlarını ve bazı önemli özelliklerini elde etmişlerdir [6].

Falcon (2011), "On the k -Lucas numbers" isimli çalışmalarında k -Lucas dizisini tanımlayarak bu dizinin temel özelliklerini ve k -Fibonacci dizisi ile arasındaki ilişkileri incelemiştir [7].

Yayenie (2011), "A note on generalized Fibonacci sequences" isimli çalışmasında iki periyotlu Fibonacci sayılarının birçok özelliklerini incelemiş ve aynı zamanda genelleştirilmiş Lucas ve genelleştirilmiş Catalan özdeşliklerini de vermiştir. Ayrıca, modifiye edilmiş genelleştirilmiş Fibonacci sayı dizisini tanımlayarak bu dizinin bazı özelliklerini incelemiştir [8].

Irmak ve Szalay (2012), "On the k -periodic binary recurrences" isimli çalışmalarında k -periyotlu rekürans bağıntılarını tanımlayarak literatürde yapılmış olan dizilere kıyasla daha genel sonuçlar elde etmişlerdir [9].

Bilgici (2014), "Two generalizations of Lucas sequence" isimli çalışmasında iki periyotlu Lucas sayılarını tanımlamış ve iki periyotlu Fibonacci ve iki periyotlu Lucas dizileri arasında bazı bağıntılar elde etmiştir. Ayrıca, modifiye edilmiş genelleştirilmiş Lucas dizilerini tanımlayarak bu diziyle ilgili temel özellikleri vermiştir [10].

Ramirez (2016), "A q -Analogue of the Bi-Periodic Fibonacci Sequence" isimli çalışmasında iki periyotlu Fibonacci sayılarının q -analogunu tanımlayarak bazı toplam formüllerini, üreteç fonksiyonlarını ve bu dizinin bazı özelliklerini elde etmiştir [11].

Yazlık ve Köme (2018), "A new generalization of Fibonacci and Lucas p -numbers" isimli çalışmalarında iki periyotlu Fibonacci ve Lucas p -dizilerini tanımlayarak bu diziler ile ilgili bazı özellikleri elde etmişlerdir [12].

Tan ve Loung (2020), "A note on congruence properties of the generalized bi-periodic Horadam sequence" isimli çalışmalarında iki periyotlu genelleştirilmiş Horadam dizilerini tanımlayarak bu dizinin bazı kongrüans özelliklerini incelemişlerdir [13].

Verma ve Bala (2020), "On properties of generalized bi-variate bi-periodic Fibonacci polynomials" isimli çalışmalarında iki periyotlu genelleştirilmiş Fibonacci polinomlarını tanımlamışlardır. Ayrıca, bu polinomlar ile ilgili birçok önemli özdeşlikler elde etmişlerdir [14].

Miladinovic ve Stanimirovic (2011), "Singular case of generalized Fibonacci and Lucas matrices" isimli çalışmalarında elemanları genelleştirilmiş Fibonacci sayıları olan singüler tipte matrislerin terslerini hesaplamışlardır [15].

Lee ve Ark. (2003), "Some combinatorial identities via Fibonacci numbers" isimli çalışmalarında Fibonacci matrislerini kullanarak 1. ve 2. tipteki Stirling tipte matrisler ve Pascal matrisleri kullanarak bazı önemli özdeşlikler elde etmişlerdir [16].

Zhang ve Zhang (2007), "The Lucas matrix and some combinatorial identities" isimli çalışmalarında Lucas matrislerini tanımlayarak Lucas matrisleri ve bazı özel matrisleri kullanarak 1. ve 2. tipte Pascal matrislerini elde etmişlerdir [17].

Zhang ve Wang (2007), "A factorization of the symmetric Pascal matrix involving the Fibonacci matrix" isimli çalışmalarında Pascal matrislerinin ayrışmalarını Fibonacci matrislerini kullanarak incelemişlerdir [18].

Irmak ve Köme (2021), "Linear algebra of the Lucas matrix" isimli çalışmalarında simetrik Lucas matrislerinin Cholesky ayrışmalarını elde etmişlerdir. Ayrıca, bazı analitik teknikler kullanarak simetrik Lucas matrislerinin özdeğerleri için alt ve üst sınırlar elde etmişlerdir [19].

Stanimirovic ve Ark. (2008), "A generalization of Fibonacci and Lucas matrices" isimli çalışmalarında elemanları ikinci mertebeden genelleştirilmiş rekürans dizileri olan

matrislerin terslerini elde etmişlerdir. Ayrıca, 1. ve 2. tipte Pascal matrislerini kullanarak bazı kombinatorik özellikleri vermişlerdir [20].

Köme (2022), "Some combinatorial identities via k -order Fibonacci matrices" isimli çalışmasında elemanları k -mertebeli Fibonacci matrislerini kullanarak Pascal ve Stirling matrislerinin ayrışmalarını elde etmiştir. Ayrıca, ilgili matrisleri kullanarak bazı kombinatorik özellikler elde etmiştir [21].

Shen ve Liu (2016), "Inversion of lower Hessenberg matrix involving classical Horadam numbers" isimli çalışmalarında elemanları Horadam sayıları olan alt Hessenberg tipindeki matrislerin terslerini elde etmişlerdir [22].

1.4. Temel Kavramlar

Bu bölümde tez içerisinde kullanılacak olan genel tanımlar ve özellikler verilecektir.

Tanım 1.4.1 ([2]). $F_0 = 0, F_1 = 1$ başlangıç şartları ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad (1.2)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanan $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisine Fibonacci dizisi denir. Fibonacci dizisinin Binet formülü

$$F_n = \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2} \quad (1.3)$$

şeklinde olup λ_1 ve λ_2 değerleri $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ karakteristik denkleminin kökleridir.

Tanım 1.4.2 ([2]). $L_0 = 2, L_1 = 1$ başlangıç şartları ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n \quad (1.4)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanan $\{L_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisine Lucas dizisi denir. Lucas dizisinin Binet formülü

$$L_n = \lambda_1^n + \lambda_2^n \quad (1.5)$$

şeklindedir.

Tanım 1.4.3 ([4]). $W_0 = a, W_1 = b$ başlangıç şartları ve $a, b, p, q \in \mathbb{Z}$ olmak üzere,

$$W_{n+2} = pW_{n+1} - qW_n, n \in \mathbb{N}, \quad (1.6)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanan $\{W_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisine Horadam dizisi denir. Horadam dizisi için Binet formülü

$$W_n = Ar_1^n + Br_2^n \quad (1.7)$$

şeklinde olup $r_1 = \frac{p+\sqrt{p^2-4q}}{2}$ ve $r_2 = \frac{p-\sqrt{p^2-4q}}{2}$ değerleri $r^2 - pr + q = 0$ karakteristik denkleminin kökleri ve $A = \frac{b-ar_2}{r_1-r_2}$ ve $B = \frac{ar_1-b}{r_1-r_2}$ şeklindedir.

Tanım 1.4.4 ([23]). $H_{k,0} = a, H_{k,1} = b$ başlangıç şartları ile $k > 0, n \in \mathbb{N}, f(k)$ ve $g(k)$, k 'nin skaler değerli polinomları ve $f(k)^2 + 4g(k) > 0$ olmak üzere

$$H_{k,n+2} = f(k)H_{k,n+1} + g(k)H_{k,n}, \quad (1.8)$$

ile tanımlanan $\{H_{k,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisine genelleştirilmiş k -Horadam dizisi denir. Genelleştirilmiş k -Horadam sayısı için Binet formülü

$$H_{k,n} = \frac{Xt_1^n - Yt_2^n}{t_1 - t_2} \quad (1.9)$$

şeklinde olup $t_1 = \frac{f(k)+\sqrt{f(k)^2+4g(k)}}{2}$ ve $t_2 = \frac{f(k)-\sqrt{f(k)^2+4g(k)}}{2}$ değerleri $t^2 - f(k)t - g(k) = 0$ karakteristik denkleminin kökleri olup $X = b - at_2$ ve $Y = b - at_1$ şeklindedir.

Tanım 1.4.5 ([6]). $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $q_0 = 0$ ve $q_1 = 1$ başlangıç koşulları ve sıfırdan farklı herhangi a ve b reel sayıları için

$$q_{n+2} = \begin{cases} aq_{n+1} + q_n, & n \equiv 0 \pmod{2} \\ bq_{n+1} + q_n, & n \equiv 1 \pmod{2}, \end{cases} \quad (1.10)$$

şeklinde tanımlanan $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisine iki periyotlu Fibonacci dizisi denir. İki periyotlu Fibonacci sayısı için Binet formülü

$$q_n = \left(\frac{a^{1-\xi(n)}}{(ab)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \right) \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \quad (1.11)$$

şeklinde olup $\alpha = \frac{ab+\sqrt{a^2b^2+4ab}}{2}$, $\beta = \frac{ab-\sqrt{a^2b^2+4ab}}{2}$ değerleri $x^2 - abx - ab = 0$ karakteristik denkleminin kökleri ve $\xi(m) = m - 2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ şeklindedir. Karakteristik denklemin kökleri arasında

$$\bullet (\alpha + 1)(\beta + 1) = 1, \quad (1.12)$$

$$\bullet \alpha + \beta = ab, \quad (1.13)$$

$$\bullet \alpha\beta = -ab, \quad (1.14)$$

$$\bullet \alpha + 1 = \frac{\alpha^2}{ab}, \quad (1.15)$$

$$\bullet \beta + 1 = \frac{\beta^2}{ab}, \quad (1.16)$$

$$\bullet -\beta(\alpha + 1) = \alpha, \quad (1.17)$$

$$\bullet -\alpha(\beta + 1) = \beta \quad (1.18)$$

bağıntıları vardır [6].

Tanım 1.4.6 ([10]). $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $l_0 = 2$ ve $l_1 = a$ başlangıç şartları ve sıfırdan farklı herhangi a ve b reel sayıları için

$$l_{n+2} = \begin{cases} bl_{n+1} + l_n, & n \equiv 0 \pmod{2} \\ al_{n+1} + l_n, & n \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}, \quad (1.19)$$

şeklinde tanımlanan $\{l_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisine iki periyotlu Lucas dizisi denir. İki periyotlu Lucas sayısı için Binet formülü ise

$$l_n = \left(\frac{a^{\xi(n)}}{(ab)^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}} \right) (\alpha^n + \beta^n) \quad (1.20)$$

şeklindedir.

Tanım 1.4.7 ([14]). $n \geq 2$ olmak üzere $V_0(x, y) = a_0$ ve $V_1(x, y) = a_1$ başlangıç şartları ve sıfırdan farklı herhangi p, q, r ve s reel sayıları için

$$V_n(x, y) = \begin{cases} pxV_{n-1}(x, y) + qyV_{n-2}(x, y), & n \equiv 0 \pmod{2} \\ rxV_{n-1}(x, y) + syV_{n-2}(x, y), & n \equiv 1 \pmod{2}, \end{cases} \quad (1.21)$$

şeklinde tanımlanan $\{V_n(x, y)\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisine iki değişkenli genelleştirilmiş iki periyotlu Fibonacci polinomları denir.

Tanım 1.4.8 ([16]). $1 \leq i$ ve $j \leq n$ olmak üzere,

$$p_{i,j} = \begin{cases} \binom{i-1}{j-1} & , i \geq j \\ 0 & , i < j \end{cases} \quad (1.22)$$

olmak üzere $n \times n$ tipinde tanımlanan $\mathcal{P}_n = [p_{ij}]$ matrisine Pascal matrisi denir.

Tanım 1.4.9 ([16]). F_n , n . Fibonacci sayısı olmak üzere,

$$f_{i,j} = \begin{cases} F_{i-j+1} & , i \geq j \\ 0 & , i < j \end{cases} \quad (1.23)$$

şeklinde tanımlanan $n \times n$ tipindeki $\mathcal{F}_n = [f_{ij}]$ matrisine Fibonacci matrisi denir.

Tanım 1.4.10 ([17]). L_n , n . Lucas sayısı olmak üzere,

$$l_{i,j} = \begin{cases} L_{i-j+1} & , i \geq j \\ 0 & , i < j \end{cases} \quad (1.24)$$

şeklinde tanımlanan $n \times n$ tipindeki $\mathcal{L}_n = [l_{ij}]$ matrisine Lucas matrisi denir.

Tanım 1.4.11 ([20]). U_n , ikinci mertebeden bir sayı dizisi olmak üzere,

$$u_{i,j} = \begin{cases} U_{i-j+1} & , i \geq j \\ 0 & , i < j \end{cases} \quad (1.25)$$

şeklinde tanımlanan $n \times n$ tipindeki $\mathcal{U}_n = [u_{ij}]$ matrisine genelleştirilmiş Fibonacci matrisi denir. Burada $U_0 = a$ ve $U_1 = b$ başlangıç şartları olmak üzere $U_n = AU_{n-1} + BU_{n-2}$ şeklinde verilmiştir. $n = 4$ için genelleştirilmiş Fibonacci matrisi

$$\mathcal{U}_4 = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 & 0 \\ aB + Ab & b & 0 & 0 \\ aAB + A^2b + bB & aB + Ab & b & 0 \\ AB(aA + 2b) + aB^2 + A^3b & aAB + A^2b + bB & aB + Ab & b \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

Tanım 1.4.12 ([20]). $i, j = 1, 2, \dots, n$ için

$$p_{i,j}^{(1)} = \begin{cases} x^{i-j} \binom{i-1}{j-1} & , i \geq j \\ 0 & , i < j \end{cases} \quad (1.26)$$

şeklinde tanımlanan $n \times n$ tipindeki $\mathcal{P}_n^{(1)}[x] = [p_{ij}^{(1)}]$ matrisine 1.tip Pascal matrisi denir.

$n = 5$ için 1. tip Pascal matrisi

$$\mathcal{P}_5^{(1)}[x] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x^2 & 2x & 1 & 0 & 0 \\ x^3 & 3x^2 & 3x & 1 & 0 \\ x^4 & 4x^3 & 6x^2 & 4x & 1 \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

Tanım 1.4.13 ([20]). $i, j = 1, 2, \dots, n$ için

$$p_{i,j}^{(2)} = \begin{cases} x^{i+j-2} \binom{i-1}{j-1} & , i \geq j \\ 0 & , i < j \end{cases} \quad (1.27)$$

şeklinde tanımlanan $n \times n$ tipindeki $\mathcal{P}_n^{(2)}[x] = [p_{ij}^{(2)}]$ matrisine 2.tip Pascal matrisi denir.

$n = 5$ için 2. tip Pascal matrisi

$$\mathcal{P}_5^{(2)}[x] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & x^2 & 0 & 0 & 0 \\ x^2 & 2x^3 & x^4 & 0 & 0 \\ x^3 & 3x^4 & 3x^5 & x^6 & 0 \\ x^4 & 4x^5 & 6x^6 & 4x^7 & x^8 \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

Tanım 1.4.14 ([24]). $n \geq 1$ için $n_{\mathcal{T}}$ ifadesi açık bir şekilde aşağıdaki gibi verilir:

$$[n]_{\mathcal{T}} = \begin{cases} \frac{q^n - p^n}{q - p} & , q \neq p \\ nq^{n-1} & , q = p \end{cases} \quad (1.28)$$

Daha farklı olarak yukarıdaki formül

$$[n]_{\mathcal{T}} = \sum_{i=1}^n q^{(n-i)} p^{(i-1)} \quad (1.29)$$

şeklinde de elde edilir.

Tanım 1.4.15 ([24]). $p, q \in \mathbb{R}$ olmak üzere \mathcal{T} -binomiyel katsayıları için açık bir formül

$$\binom{n}{k}_{\mathcal{T}} = \begin{cases} \prod_{i=1}^k \frac{(p^{n-i+1} - q^{n-i+1})}{(p^i - q^i)}, & p \neq q \\ \binom{n}{k} p^{k(n-k)}, & q = p \end{cases} \quad (1.30)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.4.16 ([24]). $n, k \in \mathbb{N}$ için, \mathcal{T} -binomiyel katsayılar için aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\binom{n}{k}_{\mathcal{T}} = p^{n-k} \binom{n-1}{k-1}_{\mathcal{T}} + q^k \binom{n-1}{k}_{\mathcal{T}}. \quad (1.31)$$

Burada $\binom{n}{0}_{\mathcal{T}} = \binom{n}{n}_{\mathcal{T}} = 1$ şeklindedir.



BÖLÜM 2

Bu bölümde, elemanları şartlı polinom dizilerinden oluşan alt üçgensel matrislerin tersleri ve bu matrislerin terslerini bulmakta kullanılacak olan bazı yardımcı teoremler elde edilecektir.

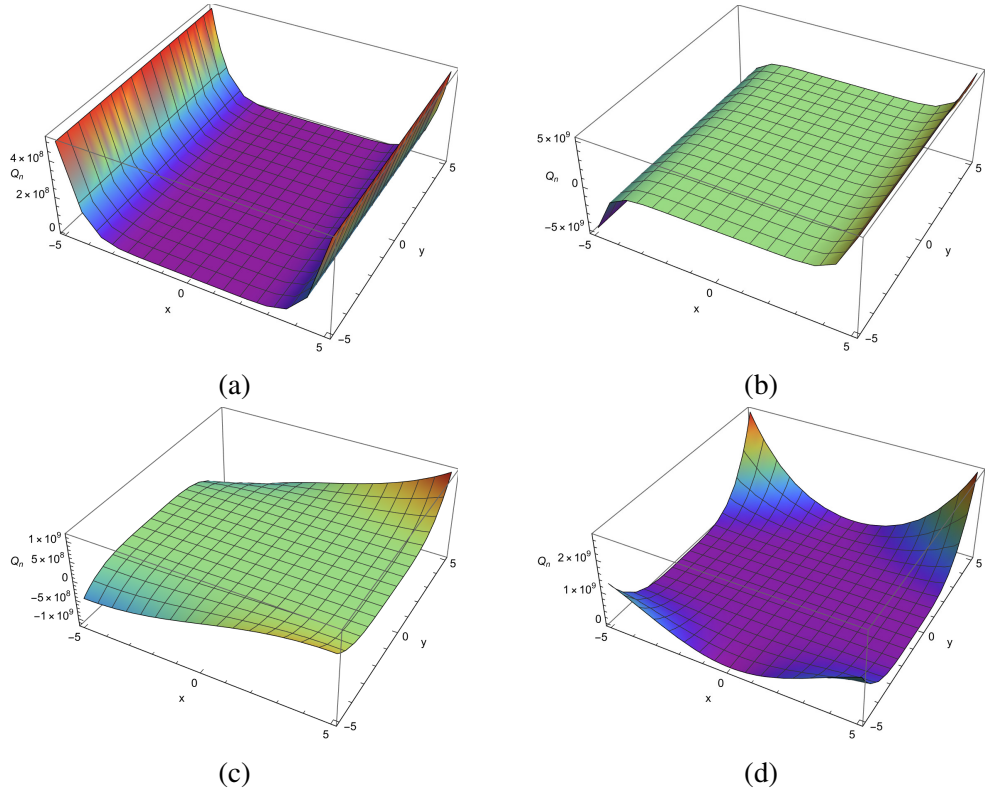
2.1. Şartlı Polinom Matrislerinin Tersleri

Tanım 2.1.1 ([14]). $n \geq 2$ olmak üzere herhangi a, b ve c pozitif reel sayıları ve keyfi $Q_0(x, y)$ ve $Q_1(x, y) \neq 0$ başlangıç şartları ile verilen iki değişkenli şartlı polinom dizileri

$$Q_n(x, y) = \begin{cases} axQ_{n-1}(x, y) + cyQ_{n-2}(x, y), & n \text{ çift ise} \\ bxQ_{n-1}(x, y) + cyQ_{n-2}(x, y), & n \text{ tek ise} \end{cases} \quad (2.1)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır.

Tanım 2.1.1'den de görüleceği üzere şartlı polinom dizileri $a, b, c, x, y, Q_0(x, y)$ ve $Q_1(x, y) \neq 0$ katsayılarının farklı değerleri için birçok diziye indirgenebilmektedir.



Şekil 2.1. Şartlı polinom dizilerinin özel durumları için grafikler

Yukarıda $x, y \in [-5, 5]$ aralığında a, b, c, Q_0 ve Q_1 değerlerinin

- **a)** $Q_0 = 0, Q_1 = 1, a = 2, b = 3, c = 0.1$ ve $n = 10$
- **b)** $Q_0 = 0, Q_1 = 1, a = 2, b = 3, c = 0.1$ ve $n = 9$
- **c)** $Q_0 = 2, Q_1 = x, a = 0.1, b = 3, c = 10$ ve $n = 9$
- **d)** $Q_0 = x, Q_1 = y, a = 0.1, b = 3, c = 10$ ve $n = 9$.

durumları için farklı grafikler elde edilmiştir.

Fransız matematikçi Jacques–Marie Binet, 1843 yılında Fibonacci dizisinin açık bir formülünü buldu ve bu keşfinden sonra bu formül Binet formülü olarak isimlendirildi.

Sıradaki tanımda $\{Q_n(x, y)\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin Binet formülü elde edilecektir. Ayrıca, gerek Binet formülünün elde edilmesi gerek ise tez içerisindeki yardımcı özelliklerde kullanılacak olması nedeniyle $\xi(n) = n - 2 \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, $\Delta(x, y) = a^2b^2x^2 + 4abcy > 0$, $\alpha(x, y) + \beta(x, y) = abx$, $\alpha(x, y) - \beta(x, y) = \sqrt{a^2b^2x^2 + 4abcy}$ ve $\alpha(x, y)\beta(x, y) = -abcy$ olarak kullanılacaktır.

Verma ve Bala [14] numaralı çalışmalarında, iki periyotlu genelleştirilmiş Fibonacci polinomları için bir Binet formülü elde etmişlerdir. Bu çalışmada kullanılmak üzere daha farklı bir Binet formülü aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

Teorem 2.1.1. $\{Q_n(x, y)\}_{n=0}^{\infty}$ şartlı polinom dizisinin Binet formülü aşağıdaki gibidir:

$$Q_n(x, y) = \frac{a^{\xi(n+1)}}{(ab)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} (A\alpha^n(x, y) - B\beta^n(x, y)). \quad (2.2)$$

Denklem (2.2)'de $A = \frac{Q_1(x, y) - \frac{\beta(x, y)}{a}Q_0(x, y)}{\alpha(x, y) - \beta(x, y)}$, $B = \frac{Q_1(x, y) - \frac{\alpha(x, y)}{a}Q_0(x, y)}{\alpha(x, y) - \beta(x, y)}$ şeklinde, $\alpha(x, y)$ ve $\beta(x, y)$ değerleri $\lambda^2 - \lambda abx - abcy = 0$ karakteristik denkleminin kökleri olup $\alpha(x, y) = \frac{abx + \sqrt{a^2b^2x^2 + 4abcy}}{2}$ ve $\beta(x, y) = \frac{abx - \sqrt{a^2b^2x^2 + 4abcy}}{2}$ şeklindedir.

İspat. Teorem n üzerinden tümevarım yoluyla kanıtlanacaktır. Denklem (2.2) $n = 0$ ve $n = 1$ için sağlanır. Şimdi, sonucun n 'den küçük veya eşit olan tüm pozitif tam sayılar için doğru olduğunu varsayalım. Denklem (2.1) ve tümevarım hipotezini kullanarak, durumun $n + 1$ için de geçerli olduğunu göstermemiz gerekir. Bu nedenle $\alpha(x, y)x + cy = \frac{\alpha^2(x, y)}{ab}$ ve $\beta(x, y)x + cy = \frac{\beta^2(x, y)}{ab}$ eşitlikleri kullanılarak

$$Q_{n+1}(x, y) = a^{1-\xi(n+1)}b^{\xi(n+1)}xQ_n(x, y) + cyQ_{n-1}(x, y)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a^{1-\xi(n+1)}(ab)^{\xi(n+1)}}{(ab)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} x (A\alpha^n(x, y) - B\beta^n(x, y)) \\
&\quad + \frac{a^{\xi(n)}}{(ab)^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}} cy (A\alpha^{n-1}(x, y) - B\beta^{n-1}(x, y)) \\
&= a^{1-\xi(n+1)} A\alpha^{n-1}(x, y) \left(\frac{\alpha^2(x, y)}{(ab)^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}} \right) \\
&\quad - a^{1-\xi(n+1)} B\beta^{n-1}(x, y) \left(\frac{\beta^2(x, y)}{(ab)^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}} \right) \\
&= \frac{a^{\xi(n+2)}}{(ab)^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}} (A\alpha^{n+1}(x, y) - B\beta^{n+1}(x, y))
\end{aligned}$$

elde edilir ki bu da denklem (2.2)'nin $n+1$ için de doğru olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanmış olur. \square

Tanım 2.1.2. s -tipi şartlı polinom matrisi aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$\mathbb{Q}_n^{(s)}[x, y] = [q_{ij}^{(s)}] = \begin{cases} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(i-j)}{2}} Q_{i-j+1}(x, y) & , i - j + s \geq 0 \\ 0 & , i - j + s < 0 \end{cases}. \quad (2.3)$$

Burada $\{Q_n(x, y)\}_{n=0}^{\infty}$ şartlı polinom dizisi ve s değeri ana köşegen altında kalan sıfır köşegenleri temsil etmektedir. Tez boyunca kullanılacak matrislerdeki oluşabilecek tekillikleri kaldırmak amacıyla $s = 0$ olarak alınacaktır. Ayrıca karmaşık ifadelerden kaçınmak amacıyla $\mathbb{Q}_n^{(0)}[x, y]$ yerine $\mathbb{Q}_n[x, y] = [q_{ij}]$ olarak kullanılacaktır.

Örnek 2.1.1. 3×3 tipindeki şartlı polinom matrisleri aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\mathbb{Q}_3[x, y] = \begin{pmatrix} Q_1(x, y) & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{b}(aQ_1(x, y)x + cQ_0(x, y)y)}{\sqrt{a}} & Q_1(x, y) & 0 \\ Q_1(x, y)(abx^2 + cy) + bcQ_0(x, y)xy & \frac{\sqrt{b}(aQ_1(x, y)x + cQ_0(x, y)y)}{\sqrt{a}} & Q_1(x, y) \end{pmatrix}.$$

Lemma 2.1.1. $Q_1(x, y) \neq 0$ ve $i \geq j + 2$ için aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\begin{aligned}
\Theta(x, y) &\sum_{k=j+2}^i \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(i-k)}{2}} Q_{i-k+1}(x, y) (-1)^{k-j} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k-j}{2}} \frac{Q_0^{k-j-2}(x, y) (cy)^{k-j-1}}{Q_1^{k-j+1}(x, y)} \\
&= \frac{bcyQ_0(x, y)}{aQ_1^2(x, y)} \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{\xi(i-j)}{2}} Q_{i-j}(x, y) - \frac{cy}{Q_1(x, y)} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(i-j)}{2}} Q_{i-j-1}(x, y).
\end{aligned} \quad (2.4)$$

Burada $\Theta(x, y) = \frac{abxQ_0(x,y)Q_1(x,y) - aQ_1^2(x,y) + bcyQ_0^2(x,y)}{b}$ şeklindedir.

İspat.

$$\gamma(x, y) = \sum_{k=j+2}^i \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(i-k)}{2}} Q_{i-k+1}(x, y) (-1)^{k-j} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k-j}{2}} \frac{Q_0^{k-j-2}(x, y) (cy)^{k-j-1}}{Q_1^{k-j+1}(x, y)}$$

olsun. Denklem (2.2) kullanılarak ve bazı cebirsel işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} \gamma(x, y) &= \sum_{k=j+2}^i \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\xi(i-k)}{2}} (-1)^{k-j} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k-j}{2}} \frac{Q_0^{k-j-2}(x, y) (cy)^{k-j-1}}{Q_1^{k-j+1}(x, y)} \\ &\quad \times \left(\frac{a^{\xi(i-k+2)}}{(ab)^{\lfloor \frac{i-k+1}{2} \rfloor}} (A\alpha^{i-k+1}(x, y) - B\beta^{i-k+1}(x, y)) \right) \\ &= \sum_{k=j+2}^i \frac{1}{(ab)^{\frac{i-j}{2}}} (A\alpha^{i-k+1}(x, y) - B\beta^{i-k+1}(x, y)) \times (-b)^{k-j} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k-j}{2}} \frac{Q_0^{k-j-2}(x, y) (cy)^{k-j-1}}{Q_1^{k-j+1}(x, y)} \\ &= \frac{b^2cy}{Q_1^3(x, y) (ab)^{\frac{i-j}{2}}} \sum_{k=j+2}^i \left[A\alpha^{i-j-1}(x, y) \left(\frac{bcyQ_0(x, y)}{\alpha(x, y)Q_1(x, y)} \right)^{k-j-2} \right. \\ &\quad \left. - B\beta^{i-j-1}(x, y) \left(\frac{bcyQ_0(x, y)}{\beta(x, y)Q_1(x, y)} \right)^{k-j-2} \right] \\ &= \frac{b^2cy}{Q_1^3(x, y) (ab)^{\frac{i-j}{2}}} \left[A\alpha^{i-j-1}(x, y) \frac{1 - \left(\frac{bcyQ_0(x, y)}{\alpha(x, y)Q_1(x, y)} \right)^{i-j-1}}{1 + \frac{bcyQ_0(x, y)}{\alpha(x, y)Q_1(x, y)}} \right. \\ &\quad \left. - B\beta^{i-j-1}(x, y) \frac{1 - \left(\frac{bcyQ_0(x, y)}{\beta(x, y)Q_1(x, y)} \right)^{i-j-1}}{1 + \frac{bcyQ_0(x, y)}{\beta(x, y)Q_1(x, y)}} \right] \\ &= \frac{b^2cy}{Q_1^3(x, y) (ab)^{\frac{i-j}{2}}} \left[A \frac{\alpha^{i-j}(x, y) - \alpha(x, y) \left(\frac{bcyQ_0(x, y)}{Q_1(x, y)} \right)^{i-j-1}}{\alpha(x, y) + \frac{bcyQ_0(x, y)}{Q_1(x, y)}} \right. \\ &\quad \left. - B \frac{\beta^{i-j}(x, y) - \beta(x, y) \left(\frac{bcyQ_0(x, y)}{Q_1(x, y)} \right)^{i-j-1}}{\beta(x, y) + \frac{bcyQ_0(x, y)}{Q_1(x, y)}} \right] \\ &= \frac{b^2cy}{Q_1^3(x, y) (ab)^{\frac{i-j}{2}}} \left[\frac{A(\beta(x, y) + F(x, y)) \left(\alpha^{i-j}(x, y) - \alpha(x, y) (-F(x, y))^{i-j-1} \right)}{(\alpha(x, y) + F(x, y)) (\beta(x, y) + F(x, y))} \right. \\ &\quad \left. - \frac{B(\alpha(x, y) + F(x, y)) \left(\beta^{i-j}(x, y) - \beta(x, y) (-F(x, y))^{i-j-1} \right)}{(\alpha(x, y) + F(x, y)) (\beta(x, y) + F(x, y))} \right], \end{aligned}$$

olup burada $F(x, y) = \frac{bcyQ_0(x,y)}{Q_1(x,y)}$ şeklindedir. $\alpha(x, y)\beta(x, y) = -abcy$ ve $\alpha(x, y) + \beta(x, y) = abx$ eşitlikleri kullanılarak,

$$\begin{aligned} D(x, y) &= \left(\alpha(x, y) + \frac{bcyQ_0(x, y)}{Q_1(x, y)} \right) \left(\beta(x, y) + \frac{bcyQ_0(x, y)}{Q_1(x, y)} \right) \\ &= \frac{bcy(abxQ_0(x, y)Q_1(x, y) - aQ_1^2(x, y) + bcyQ_0^2(x, y))}{Q_1^2(x, y)} \end{aligned}$$

elde edilir. Denklem (2.2) kullanılarak ve bazı cebirler işlemler neticesinde

$$\begin{aligned}
\gamma(x, y) &= \frac{b^2cy}{Q_1^3(x, y) (ab)^{\frac{i-j}{2}} D(x, y)} \left(\begin{array}{l} A \left(\beta(x, y)\alpha(x, y)^{i-j} - \alpha(x, y)\beta(x, y) (-F(x, y))^{i-j-1} \right) \\ + \alpha(x, y)^{i-j} (F(x, y)) + \alpha(x, y) (-F(x, y))^{i-j} \\ - B \left(\alpha(x, y)\beta(x, y)^{i-j} - \beta(x, y)\alpha(x, y) (-F(x, y))^{i-j-1} \right) \\ + \beta(x, y)^{i-j} (F(x, y)) + \beta(x, y) (-F(x, y))^{i-j} \end{array} \right) \\
&= \frac{b^3Q_0(x, y)c^2y^2}{aQ_1^4(x, y)D(x, y)} \left(\frac{a}{(ab)^{\frac{i-j}{2}}} (A\alpha(x, y)^{i-j} - B\beta(x, y)^{i-j}) \right) \\
&\quad + \frac{b^2cy}{Q_1^3(x, y) (ab)^{\frac{i-j}{2}} D(x, y)} (-F(x, y))^{i-j} Q_1(x, y) \\
&\quad - \frac{b^2c^2y^2}{Q_1^3(x, y)D(x, y)} \left(\frac{\sqrt{ab}}{(ab)^{\frac{i-j-1}{2}}} (A\alpha(x, y)^{i-j-1} - B\beta(x, y)^{i-j-1}) \right) \\
&\quad + \frac{b^3c^2y^2}{Q_1^3(x, y)(ab)^{\frac{i-j}{2}} D(x, y)} (-F(x, y))^{i-j-1} Q_0(x, y) \\
&= \frac{b^3Q_0(x, y)c^2y^2}{aQ_1^4(x, y)D(x, y)} \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{\xi(i-j)}{2}} Q_{i-j}(x, y) - \frac{b^2c^2y^2}{Q_1^3D(x, y)} \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{\xi(i-j)}{2}} Q_{i-j-1}(x, y)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\Theta(x, y)\gamma(x, y) = \frac{bcyQ_0(x, y)}{aQ_1^2(x, y)} \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{\xi(i-j)}{2}} Q_{i-j}(x, y) - \frac{cy}{Q_1(x, y)} \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{\xi(i-j)}{2}} Q_{i-j-1}(x, y)$$

olarak elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. \square

Lemma 2.1.1 içerisinde, $a = b = A$, $c = B$, $Q_0(x, y) = a$, $Q_1(x, y) = b$ ve $x = y = 1$ olarak alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.1.1 ([20]). $\{U_n^{(a,b)}\}$ genelleştirilmiş Fibonacci dizisi olmak üzere, $b \neq 0$ ve $i \geq j + 2$ için aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$(a^2B + abA - b^2) \sum_{k=j+2}^i (-1)^{k-j} \frac{a^{k-j-2} B^{k-j-1}}{b^{k-j+1}} U_{i-k+1}^{(a,b)} = \frac{aB}{b^2} U_{i-j}^{(a,b)} - \frac{B}{b} U_{i-j-1}^{(a,b)}.$$

Lemma 2.1.1 içerisinde, $a = b = 1$, $c = 1$, $Q_0(x, y) = a$, $Q_1(x, y) = b$ and $x = y = 1$ olarak alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.1.2 ([20]). $\{F_n^{(a,b)}\}$ genelleştirilmiş Fibonacci dizisi olmak üzere, $b \neq 0$ ve

$i \geq j + 2$ için aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$(a^2 + ab - b^2) \sum_{k=j+2}^i (-1)^{k-j} \frac{a^{k-j-2}}{b^{k-j+1}} F_{i-k+1}^{(a,b)} = \frac{a}{b^2} F_{i-j}^{(a,b)} - \frac{1}{b} F_{i-j-1}^{(a,b)}.$$

Lemma 2.1.1 içerisinde, $a = b = 1$, $c = 1$, $Q_0(x, y) = 2$, $Q_1(x, y) = 1$ and $x = y = 1$ olarak alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.1.3 ([17]). $\{L_n\}$ Lucas dizisi olmak üzere, $i \geq j + 2$ için aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$5 \sum_{k=j+2}^i (-1)^{k-j} 2^{k-j-2} L_{i-k+1} = 2L_{i-j} - L_{i-j-1}.$$

Teorem 2.1.2. $Q_1(x, y) \neq 0$ için şartlı polinom matrislerinin tersi, $\mathbb{Q}_n^{-1}[x, y] = [q'_{ij}]$, aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$q'_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i-j} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{i-j}{2}} \Theta(x, y) \frac{Q_0^{i-j-2}(x, y)(cy)^{i-j-1}}{Q_1^{i-j+1}(x, y)} & , i \geq j + 2 \\ -\frac{\sqrt{b}(aQ_1(x, y)x + cQ_0(x, y)y)}{\sqrt{a}Q_1^2(x, y)} & , i = j + 1 \\ \frac{1}{Q_1(x, y)} & , i = j \\ 0 & , i < j \end{cases}. \quad (2.5)$$

Burada $\Theta(x, y) = \frac{abxQ_0(x, y)Q_1(x, y) - aQ_1^2(x, y) + bcyQ_0^2(x, y)}{b}$ şeklindedir.

İspat. $\sum_{k=1}^n q_{i,k} q'_{k,j} = \chi_{i,j}$ olarak tanımlansın. $i < j$ durumu için Teorem 2.1.2 yoluyla $\chi_{i,j} = 0$ olduğu görülmektedir. $i = j$ durumu için

$$\chi_{i,i} = q_{i,i} q'_{i,i} = Q_1(x, y) \frac{1}{Q_1(x, y)} = 1$$

elde edilir. $i = j + 1$ durumu için

$$\begin{aligned} \chi_{j+1,j} &= q_{j+1,j} q'_{j,j} + q_{j+1,j+1} q'_{j+1,j} \\ &= \frac{\sqrt{b}(aQ_1(x, y)x + cQ_0(x, y)y)}{\sqrt{a}} \frac{1}{Q_1(x, y)} \\ &\quad + Q_1(x, y) \left(-\frac{\sqrt{b}(aQ_1(x, y)x + cQ_0(x, y)y)}{\sqrt{a}Q_1^2(x, y)} \right) \end{aligned}$$

$$= 0$$

elde edilir. Son durum olarak $i \geq j + 2$ için ise Lemma 2.1.1 kullanılarak

$$\begin{aligned}
\chi_{i,j} &= \sum_{k=1}^n q_{i,k} q'_{k,j} \\
&= q_{i,j} q'_{j,j} + q_{i,j+1} q'_{j+1,j} + \sum_{k=j+2}^i q_{i,k} q'_{k,j} \\
&= \frac{1}{Q_1(x,y)} \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{\xi(i-j)}{2}} Q_{i-j+1}(x,y) - \frac{\sqrt{b}(aQ_1(x,y)x + cQ_0(x,y)y)}{\sqrt{a}Q_1^2(x,y)} \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{\xi(i-j-1)}{2}} Q_{i-j}(x,y) \\
&\quad + \Theta(x,y) \sum_{k=j+2}^i \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{\xi(i-k)}{2}} Q_{i-k+1}(x,y) (-1)^{k-j} \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{k-j}{2}} \frac{Q_0^{k-j-2}(x,y) (cy)^{k-j-1}}{Q_1^{k-j+1}(x,y)} \\
&= \frac{1}{Q_1(x,y)} \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{\xi(i-j)}{2}} Q_{i-j+1}(x,y) - \left(\frac{b}{a} \right) \left(\frac{aQ_1(x,y)x}{Q_1^2(x,y)} \right) \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{\xi(i-j)}{2}} Q_{i-j}(x,y) \\
&\quad - \left(\frac{b}{a} \right) \left(\frac{Q_0(x,y)cy}{Q_1^2(x,y)} \right) \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{\xi(i-j)}{2}} Q_{i-j}(x,y) + \frac{bcyQ_0(x,y)}{aQ_1^2(x,y)} \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{\xi(i-j)}{2}} Q_{i-j}(x,y) \\
&\quad - \frac{cy}{Q_1(x,y)} \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{\xi(i-j)}{2}} Q_{i-j-1}(x,y) \\
&= \frac{1}{Q_1(x,y)} \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{\xi(i-j)}{2}} Q_{i-j+1}(x,y) - \frac{bx}{Q_1(x,y)} \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{\xi(i-j)}{2}} Q_{i-j}(x,y) \\
&\quad - \frac{cy}{Q_1(x,y)} \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{\xi(i-j)}{2}} Q_{i-j-1}(x,y) \\
&= \frac{\left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{\xi(i-j)}{2}}}{Q_1(x,y)} \left(\underbrace{Q_{i-j+1}(x,y) - bx \left(\frac{a}{b} \right)^{\xi(i-j)} Q_{i-j}(x,y) - cy Q_{i-j-1}(x,y)}_0 \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, \mathbb{I}_n $n \times n$ tipinde birim matris olmak üzere $\mathbb{Q}_n[x,y] \mathbb{Q}_n^{-1}[x,y] = \mathbb{I}_n$ elde edilir. Benzer şekilde $\mathbb{Q}_n^{-1}[x,y] \mathbb{Q}_n[x,y] = \mathbb{I}_n$ elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur. \square

Örnek 2.1.2. $n = 3$ için $\mathbb{Q}_4[x,y]$ matrisinin tersi aşağıdaki gibidir:

$$\mathbb{Q}_3^{-1}[x,y] = \begin{pmatrix} \frac{1}{Q_1(x,y)} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{b}(aQ_1(x,y)x + cQ_0(x,y)y)}{\sqrt{a}Q_1^2(x,y)} & \frac{1}{Q_1(x,y)} & 0 \\ \frac{cy(abQ_1(x,y)Q_0(x,y)x - aQ_1^2(x,y) + bcQ_0^2(x,y)y)}{aQ_1^3(x,y)} & -\frac{\sqrt{b}(aQ_1(x,y)x + cQ_0(x,y)y)}{\sqrt{a}Q_1^2(x,y)} & \frac{1}{Q_1(x,y)} \end{pmatrix}.$$

Teorem 2.1.2 içerisinde, $a = b = A$, $c = B$, $Q_0 = a$, $Q_1 = b$ ve $x = y = 1$ olarak alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.1.4 ([20]). $\mathcal{U}_n^{(a,b,0)} = [u_{i,j}^{(a,b,0)}]$ ($b \neq 0$) matrisinin tersi $\mathcal{U}_n^{-1(a,b,0)} = [u'_{i,j}^{(a,b,0)}]$ aşağıdaki gibidir:

$$u'_{i,j}^{(a,b,0)} = \begin{cases} (-1)^{i-j} \cdot \frac{a^2B+abA-b^2}{b^{i-j+1}} a^{i-j-2} B^{i-j-1}, & i \geq j + 2, \\ -\frac{aB+bA}{b^2}, & i = j + 1 \\ \frac{1}{b}, & i = j, \\ 0, & i < j \end{cases}. \quad (2.6)$$

BÖLÜM 3

3.1. Şartlı Polinom Matrisleri ve \mathcal{T} -Binomiyel Matrisleri

Bu bölümde, şartlı polinom matrisleri ile \mathcal{T} -binomiyel matrisleri arasındaki korelasyonlar incelenecek olup bazı yeni özellikler elde edilecektir. Ayrıca tez boyunca, $k = 0$ durumu dahil olmak üzere $k > n$ için $0^0 = 1$ ve $\binom{n}{k} = 0$ olarak kabul edilecektir.

Tanım 3.1.1. $1 \leq i, j \leq n$ olmak üzere 1.tip \mathcal{T} -binomiyel matrisi

$$\mathbb{T}_n[t] = [\tau_{i,j}(t)] = \begin{cases} t^{i-j} \begin{bmatrix} i-1 \\ j-1 \end{bmatrix}_{\mathcal{T}}, & i-j \geq 0 \\ 0, & i-j < 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanır.

Aşağıdaki teoremden, $\mathbb{Q}_n[x, y]$ ve $\mathbb{T}_n[t]$ matrisleri arasındaki bazı korelasyonlar elde edilecektir.

Teorem 3.1.1. $\mathbb{W}_n[t, x, y] = [\omega_{i,j}(t, x, y)]_{n \times n}$ matrisi

$$\omega_{i,j}(t, x, y) = t^{-j} \left[\frac{t^i}{Q_1(x, y)} \begin{bmatrix} i-1 \\ j-1 \end{bmatrix}_{\mathcal{T}} - \frac{t^{i-1} \left(\sqrt{b} (aQ_1(x, y)x + cQ_0(x, y)y) \right)}{\sqrt{a}Q_1^2(x, y)} \begin{bmatrix} i-2 \\ j-1 \end{bmatrix}_{\mathcal{T}} \right. \\ \left. + \Theta(x, y) \sum_{k=j}^{i-2} \frac{t^k \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{i-k}{2}} \left((-1)^{i-k} Q_0^{i-k-2}(x, y) (cy)^{i-k-1} \right)}{Q_1^{i-k+1}(x, y)} \begin{bmatrix} k-1 \\ j-1 \end{bmatrix}_{\mathcal{T}} \right], \quad (3.2)$$

olarak verilsin. Burada $\Theta(x, y) = \frac{abxQ_0(x, y)Q_1(x, y) - aQ_1^2(x, y) + bcyQ_0^2(x, y)}{b}$ şeklindedir. Bu durumda \mathcal{T} -binomiyel matrisi aşağıdaki ayrışımaya sahiptir:

$$\mathbb{T}_n[t] = \mathbb{Q}_n[x, y] \mathbb{W}_n[t, x, y]. \quad (3.3)$$

İspat. $\mathbb{Q}_n[x, y]$ matrisi tersinebilir bir matris olduğundan $\mathbb{Q}_n^{-1}[x, y] \mathbb{T}_n[t] = \mathbb{W}_n[t, x, y]$ eşitliğinin doğru olduğunun kanıtlanması yeterlidir. $i < j$ durumu için $\omega_{i,j}(t, x, y) = 0$ olduğu açıktır. $i = j$ durumu için

$$\omega_{j,j}(t, x, y) = q'_{j,j} \tau_{j,j}(t) = \frac{1}{Q_1(x, y)} = t^{-j} \frac{1}{Q_1(x, y)} t^j \begin{bmatrix} j-1 \\ j-1 \end{bmatrix}_{\mathcal{T}}$$

elde edilir. $i = j + 1$ durumu için

$$\begin{aligned}\omega_{j+1,j}(t, x, y) &= q'_{j+1,j}\tau_{j,j}(t) + q'_{j+1,j+1}\tau_{j+1,j}(t) \\ &= -\frac{\sqrt{b}(aQ_1(x, y)x + cQ_0(x, y)y)}{\sqrt{a}Q_1^2(x, y)} + \frac{t[j]_{\mathcal{T}}}{Q_1(x, y)} \\ &= t^{-j} \left[\frac{1}{Q_1(x, y)} t^{j+1} \begin{bmatrix} j \\ j-1 \end{bmatrix}_{\mathcal{T}} - \frac{\sqrt{b}(aQ_1(x, y)x + cQ_0(x, y)y)}{\sqrt{a}Q_1^2(x, y)} t^j \begin{bmatrix} j-1 \\ j-1 \end{bmatrix}_{\mathcal{T}} \right].\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Son olarak $i \geq j + 2$ durumu için Teorem 2.1.2 kullanılarak

$$\begin{aligned}\omega_{i,j}(t, x, y) &= q'_{i,i}\tau_{i,j}(x) + q'_{i,i-1}\tau_{i-1,j}(t) + \sum_{k=j}^{i-2} q'_{i,k}\tau_{k,j}(t) \\ &= \left[\frac{t^{i-j}}{Q_1(x, y)} \begin{bmatrix} i-1 \\ j-1 \end{bmatrix}_{\mathcal{T}} - \frac{t^{i-j-1}(\sqrt{b}(aQ_1(x, y)x + cQ_0(x, y)y))}{\sqrt{a}Q_1^2(x, y)} \begin{bmatrix} i-2 \\ j-1 \end{bmatrix}_{\mathcal{T}} \right. \\ &\quad \left. + \Theta(x, y) \sum_{k=j}^{i-2} \frac{t^{k-j} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{i-k}{2}} \left((-1)^{i-k} Q_0^{i-k-2}(x, y)(cy)^{i-k-1}\right)}{Q_1^{i-k+1}(x, y)} \begin{bmatrix} k-1 \\ j-1 \end{bmatrix}_{\mathcal{T}} \right],\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur. \square

Denklem (2.1)'de $a = b = A$, $c = B$, $Q_0 = a$, $Q_1 = b$, $x = y = 1$ ve Denklem (3.1)'de $p = q = 1$ alınırsa genelleştirilmiş Fibonacci matrisleri için aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1.1 ([20]). Elemanları aşağıdaki gibi tanımlanan $\mathcal{G}_n[t; a, b](t \neq 0, b \neq 0)$ matrisi

$$\begin{aligned}g_{i,j}(t; a, b) &= t^{-j} \left[\frac{1}{b} t^i \begin{bmatrix} i-1 \\ j-1 \end{bmatrix} - \frac{aB + bA}{b^2} t^{i-1} \begin{bmatrix} i-2 \\ j-1 \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=j}^{i-2} (-1)^{i-k} \frac{a^2 B + abA - b^2}{b^{i-k+1}} a^{i-k-2} B^{i-k-1} t^k \begin{bmatrix} k-1 \\ j-1 \end{bmatrix} \right] \quad (3.4)\end{aligned}$$

verilsin. Bu takdirde aşağıda verilen eşitlik sağlanır:

$$\mathcal{P}_n[t] = \mathcal{U}_n^{(a,b,0)} \mathcal{G}_n[t; a, b]. \quad (3.5)$$

Denklem (2.1)'de $a = b = A$, $c = B$, $Q_0 = 0$, $Q_1 = 1$, $x = y = 1$ ve Denklem (3.1)'de $p = q = t = 1$ alınırsa Fibonacci matrisleri için aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1.2 ([16]). Elemanları aşağıdaki gibi tanımlanan \mathcal{M}_n matrisi

$$m_{ij} = \begin{bmatrix} i-1 \\ j-1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} i-2 \\ j-1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} i-3 \\ j-1 \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

verilsin. Bu takdirde aşağıda verilen eşitlik sağlanır:

$$\mathcal{P}_n = \mathcal{F}_n \mathcal{M}_n \quad (3.7)$$

elde edilir. Burada \mathcal{P}_n Pascal matrisi ve \mathcal{F}_n Fibonacci matrisidir.

Denklem (2.1)'de $a = b = A$, $c = B$, $Q_0 = 2$, $Q_1 = 1$, $x = y = 1$ ve Denklem (3.1)'de $p = q = 1$ alınrsa genelleştirilmiş Fibonacci matrisleri için aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1.3 ([17]). $\mathcal{P}_n[t]$ 1. tip Pascal matrisi ve \mathcal{L}_n Lucas matrisi olmak üzere aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\mathcal{P}_n[t] = \mathcal{L}_n \mathcal{G}_n[t; 2, 1]. \quad (3.8)$$

Burada $\mathcal{G}_n[t; 2, 1]$ matrisinin elemanları aşağıdaki gibidir:

$$g_{i,j}(t; 2, 1) = t^{-j} \left[t^i \binom{i-1}{j-1} - 3t^{i-1} \binom{i-2}{j-1} + 5(-1)^i 2^{i-2} \sum_{k=j}^{i-2} (-1)^k \binom{k-1}{j-1} \left(\frac{t}{2}\right)^k \right].$$

Sonuç 3.1.4. $Q_1(x, y) \neq 0$ ve elemanları aşağıdaki şekilde tanımlanan $\mathbb{W}_n \left[-\sqrt{\frac{b}{a}} \frac{cQ_0(x, y)y}{Q_1(x, y)}, x, y \right]$ matrisi

$$\begin{aligned} \omega_{i,j} \left(-\sqrt{\frac{b}{a}} \frac{cQ_0(x, y)y}{Q_1(x, y)}, x, y \right) &= \frac{\left(-\sqrt{bc}Q_0(x, y)y \right)^{i-j-2}}{\left(\sqrt{a}Q_1(x, y) \right)^{i-j+1}} \sqrt{abcy} \left[cQ_0(x, y)^2 y \begin{bmatrix} i-1 \\ j-1 \end{bmatrix}_{\mathcal{T}} \right. \\ &\quad \left. + Q_0(x, y) (aQ_1(x, y)x + cQ_0(x, y)y) \begin{bmatrix} i-2 \\ j-1 \end{bmatrix}_{\mathcal{T}} \right. \\ &\quad \left. + \Theta(x, y) \sum_{k=j}^{i-2} \begin{bmatrix} k-1 \\ j-1 \end{bmatrix}_{\mathcal{T}} \right] \end{aligned}$$

verilsin. Bu durumda aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\mathbb{T}_n \left[-\sqrt{\frac{b}{a}} \frac{cQ_0(x, y)y}{Q_1(x, y)} \right] = \mathbb{Q}_n[x, y] \mathbb{W}_n \left[-\sqrt{\frac{b}{a}} \frac{cQ_0(x, y)y}{Q_1(x, y)}, x, y \right]. \quad (3.9)$$

İspat. Teorem 3.1.1 içerisinde $t = -\sqrt{\frac{b}{a}} \frac{cQ_0(x, y)y}{Q_1(x, y)}$ alınarak ispat tamamlanabilir. \square

Aşağıda verilen teoremden şartlı polinom matrisleri ile birinci tip \mathcal{T} -binomiyel matrisleri arasındaki korelasyonlar incelenecektir.

Teorem 3.1.2. Elemanları aşağıdaki şekilde tanımlanan $\mathbb{H}_n[t, x, y] = [h_{i,j}(t, x, y)]_{n \times n}$ matrisi verilsin.

$$h_{i,j}(t, x, y) = t^i \left[\frac{t^{-j}}{Q_1(x, y)} \begin{bmatrix} i-1 \\ j-1 \end{bmatrix}_{\mathcal{T}} - \frac{t^{-j-1} \left(\sqrt{b} (aQ_1(x, y)x + cQ_0(x, y)y) \right)}{\sqrt{a}Q_1^2(x, y)} \begin{bmatrix} i-1 \\ j \end{bmatrix}_{\mathcal{T}} + \Theta(x, y) \sum_{k=j+2}^i \frac{t^{-k} \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{k-j}{2}} \left((-1)^{k-j} Q_0^{k-j-2}(x, y) (cy)^{k-j-1} \right)}{Q_1^{k-j+1}(x, y)} \begin{bmatrix} i-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_{\mathcal{T}} \right], \quad (3.10)$$

Böylece birinci tip \mathcal{T} -binomiyel matrisi aşağıdaki ayrışımaya sahiptir:

$$\mathbb{T}_n[t] = \mathbb{H}_n[t, x, y] \mathbb{Q}_n[x, y]. \quad (3.11)$$

İspat. İspat, Teorem 3.1.1'in ispatına benzer şekilde yapılabilir. \square

Denklem (2.1)'de $a = b = A$, $c = B$, $Q_0 = a$, $Q_1 = b$, $x = y = 1$ ve Denklem (3.1)'de $p = q = 1$ alınırsa genelleştirilmiş Fibonacci matrisleri için aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1.5 ([20]). Elemanları aşağıdaki gibi tanımlanan $\mathcal{H}_n[x; a, b]$, ($b \neq 0$) matrisi verilsin.

$$h_{i,j}(t; a, b) = t^i \left[\frac{1}{b} t^{-j} \begin{bmatrix} i-1 \\ j-1 \end{bmatrix} - \frac{aB + bA}{b^2} t^{-j-1} \begin{bmatrix} i-1 \\ j \end{bmatrix} + \sum_{k=j+2}^i (-1)^{k-j} \frac{a^2 B + abA - b^2}{b^{k-j+1}} a^{k-j-2} B^{k-j-1} t^{-k} \begin{bmatrix} i-1 \\ k-1 \end{bmatrix} \right]. \quad (3.12)$$

Böylece aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$\mathcal{P}_n[t] = \mathcal{H}_n[t; a, b] \mathcal{U}_n^{(a,b,0)}. \quad (3.13)$$

Denklem (2.1)'de $a = b = A$, $c = B$, $Q_0 = 2$, $Q_1 = 1$, $x = y = 1$ ve Denklem (3.1)'de $p = q = 1$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1.6 ([17]). Elemanları aşağıdaki gibi tanımlanan $\mathcal{H}_n[x; 2, 1]$ matrisi verilsin.

$$h_{i,j}(x; 2, 1) = x^{i-j-1} \left[x \begin{bmatrix} i-1 \\ j-1 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} i-1 \\ j \end{bmatrix} + (-1)^j \frac{5x^{j+1}}{2^{j+2}} \sum_{k=j+2}^i (-1)^k \begin{bmatrix} i-1 \\ k-1 \end{bmatrix} 2^k x^{-k} \right].$$

Bu durumda aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\mathcal{P}_n[x] = \mathcal{H}_n[x; 2, 1] \mathcal{L}_n. \quad (3.14)$$

Tanım 3.1.2. İkinci tip \mathcal{T} -binomiyel matrisi aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır.

$$\mathbb{S}_n[t] = [s_{i,j}(t)] = \begin{cases} t^{i+j-2} \begin{bmatrix} i-1 \\ j-1 \end{bmatrix}_{\mathcal{T}}, & i-j \geq 0 \\ 0, & i-j < 0 \end{cases}. \quad (3.15)$$

Aşağıdaki teoremda $\mathbb{Q}_n[x, y]$ ve $\mathbb{S}_n[t]$ matrisleri arasındaki bazı korelasyonlar incelenecektir.

Teorem 3.1.3. Elemanları aşağıdaki gibi olan $\mathbb{K}_n[t, x, y] = [\kappa_{i,j}(t, x, y)]_{n \times n}$ matrisi verilsin:

$$\begin{aligned} \kappa_{i,j}(t, x, y) = & t^j \left[\frac{t^{i-2}}{Q_1(x, y)} \begin{bmatrix} i-1 \\ j-1 \end{bmatrix}_{\mathcal{T}} - \frac{t^{i-3} \left(\sqrt{b} (aQ_1(x, y)x + cQ_0(x, y)y) \right)}{\sqrt{a}Q_1^2(x, y)} \begin{bmatrix} i-2 \\ j-1 \end{bmatrix}_{\mathcal{T}} \right. \\ & \left. + \Theta(x, y) \sum_{k=j}^{i-2} \frac{t^{k-2} \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{i-k}{2}} \left((-1)^{i-k} Q_0^{i-k-2}(x, y) (cy)^{i-k-1} \right)}{Q_1^{i-k+1}(x, y)} \begin{bmatrix} k-1 \\ j-1 \end{bmatrix}_{\mathcal{T}} \right]. \end{aligned}$$

Bu durumda \mathcal{T} -binomiyel matrisi aşağıdaki ayrışımaya sahiptir.

$$\mathbb{S}_n[t] = \mathbb{Q}_n[x, y] \mathbb{K}_n[t, x, y]. \quad (3.16)$$

İspat. Teoremi ispatlamak için $\mathbb{Q}_n^{-1}[x, y] \mathbb{S}_n[t] = \mathbb{K}_n[t, x, y]$ olduğunu göstermek yeterlidir. $i < j$ durumu için $\kappa_{i,j}(t, x, y) = 0$ olduğu açıktır. $i = j$ durumu için

$$\kappa_{j,j}(t, x, y) = q'_{j,j} s_{j,j}(t) = \frac{t^{2j-2}}{Q_1(x, y)} = t^j \frac{1}{Q_1(x, y)} t^{j-2} \begin{bmatrix} j-1 \\ j-1 \end{bmatrix}_{\mathcal{T}}.$$

elde edilir. $i = j + 1$ durumu için

$$\begin{aligned} \kappa_{j+1,j}(t, x, y) &= q'_{j+1,j} s_{j,j}(t) + q'_{j+1,j+1} s_{j+1,j}(t) \\ &= - \frac{\sqrt{b} (aQ_1(x, y)x + cQ_0(x, y)y)}{\sqrt{a}Q_1^2(x, y)} t^{2j-2} + \frac{t^{2j-1} [j]_{\mathcal{T}}}{Q_1(x, y)} \\ &= t^j \left[\frac{1}{Q_1(x, y)} t^{j-1} \begin{bmatrix} j \\ j-1 \end{bmatrix}_{\mathcal{T}} - \frac{\sqrt{b} (aQ_1(x, y)x + cQ_0(x, y)y)}{\sqrt{a}Q_1^2(x, y)} t^{j-2} \begin{bmatrix} j-1 \\ j-1 \end{bmatrix}_{\mathcal{T}} \right]. \end{aligned}$$

elde edilir. Son durum olarak $i \geq j + 2$ durumu için ise Teorem 2.1.2 kullanılarak

$$\begin{aligned} \kappa_{i,j}(t, x, y) &= q'_{i,i} s_{i,j}(t) + q'_{i,i-1} s_{i-1,j}(t) + \sum_{k=j}^{i-2} q'_{i,k} s_{k,j}(t) \\ &= \left[\frac{t^{i+j-2}}{Q_1(x, y)} \begin{bmatrix} i-1 \\ j-1 \end{bmatrix}_{\mathcal{T}} - \frac{t^{i+j-3} \left(\sqrt{b} (aQ_1(x, y)x + cQ_0(x, y)y) \right)}{\sqrt{a}Q_1^2(x, y)} \begin{bmatrix} i-2 \\ j-1 \end{bmatrix}_{\mathcal{T}} \right. \end{aligned}$$

$$+\Theta(x, y) \sum_{k=j}^{i-2} \frac{t^{k+j-2} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{i-k}{2}} \left((-1)^{i-k} Q_0^{i-k-2}(x, y)(cy)^{i-k-1}\right)}{Q_1^{i-k+1}(x, y)} \begin{bmatrix} k-1 \\ j-1 \end{bmatrix}_{\mathcal{T}},$$

elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur. \square

Sonuç 3.1.7. $Q_1(x, y) \neq 0$ için elemanları aşağıdaki gibi tanımlanan $\mathbb{K}_n \left[-\sqrt{\frac{b}{a}} \frac{cQ_0(x, y)y}{Q_1(x, y)}, x, y \right]$ matrisi verilsin.

$$\begin{aligned} \kappa_{i,j} \left(-\sqrt{\frac{b}{a}} \frac{cQ_0(x, y)y}{Q_1(x, y)}, x, y \right) &= \frac{\left(-\sqrt{bc}Q_0(x, y)y\right)^{i+j-4}}{\left(\sqrt{a}Q_1(x, y)\right)^{i+j-1}} \sqrt{abcy} \begin{bmatrix} cQ_0(x, y)^2y \\ j-1 \end{bmatrix}_{\mathcal{T}} \\ &\quad + Q_0(x, y) (aQ_1(x, y)x + cQ_0(x, y)y) \begin{bmatrix} i-2 \\ j-1 \end{bmatrix}_{\mathcal{T}} \\ &\quad + \Theta(x, y) \sum_{k=j}^{i-2} \begin{bmatrix} k-1 \\ j-1 \end{bmatrix}_{\mathcal{T}} \end{aligned}$$

Bu durumda aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\mathbb{S}_n \left[-\sqrt{\frac{b}{a}} \frac{cQ_0(x, y)y}{Q_1(x, y)} \right] = \mathbb{Q}_n[x, y] \mathbb{K}_n \left[-\sqrt{\frac{b}{a}} \frac{cQ_0(x, y)y}{Q_1(x, y)}, x, y \right]. \quad (3.17)$$

İspat. İspat Teorem 3.1.3 içerisinde $t = -\sqrt{\frac{b}{a}} \frac{cQ_0(x, y)y}{Q_1(x, y)}$ alınarak yapılabilir. \square

Teorem 3.1.4. Elemanları aşağıdaki gibi tanımlanan $\mathbb{L}_n[t, x, y] = [\ell_{i,j}(t, x, y)]_{n \times n}$ matrisi verilsin:

$$\begin{aligned} \ell_{i,j}(t, x, y) &= t^i \begin{bmatrix} t^{j-2} \\ Q_1 \\ j-1 \end{bmatrix}_{\mathcal{T}} - \frac{t^{j-1} \left(\sqrt{b}(aQ_1(x, y)x + cQ_0(x, y)y)\right)}{\sqrt{a}Q_1^2(x, y)} \begin{bmatrix} i-1 \\ j \end{bmatrix}_{\mathcal{T}} \\ &\quad + \Theta(x, y) \sum_{k=j+2}^i \frac{t^{k-2} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k-j}{2}} \left((-1)^{k-j} Q_0^{k-j-2}(x, y)(cy)^{k-j-1}\right)}{Q_1^{k-j+1}(x, y)} \begin{bmatrix} i-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_{\mathcal{T}}. \end{aligned}$$

Bu durumda \mathcal{T} -binomiyel matrisi aşağıdaki ayrışımına sahiptir:

$$\mathbb{S}_n[t] = \mathbb{L}_n[t, x, y] \mathbb{Q}_n[x, y]. \quad (3.18)$$

İspat. İspat Teorem 3.1.3'e benzer şekilde yapılabilir. \square

Denklem (2.1)'de $a = b = A$, $c = B$, $Q_0 = a$, $Q_1 = b$, $x = y = 1$ ve Denklem (3.15)'de $p = q = 1$ alınırsa genelleştirilmiş Fibonacci matrisleri için aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1.8 ([20]). Elemanları aşağıdaki şekilde tanımlanan $\mathcal{S}_n[x; a, b] = [s_{i,j}(x; a, b)]$ ve $\mathcal{T}_n[x; a, b] = [t_{i,j}(x; a, b)]$, $i, j = 1, \dots, n$, ($b \neq 0$) matrisleri verilsin.

$$s_{i,j}(x; a, b) = x^j \left[\frac{1}{b} x^{i-2} \binom{i-1}{j-1} - \frac{aB + bA}{b^2} x^{i-3} \binom{i-2}{j-1} + \sum_{k=j}^{i-2} (-1)^{i-k} \frac{a^2 B + abA - b^2}{b^{i-k+1}} a^{i-k-2} B^{i-k-1} x^{k-2} \binom{k-1}{j-1} \right],$$

$$t_{i,j}(x; a, b) = x^i \left[\frac{1}{b} x^{j-2} \binom{i-1}{j-1} - \frac{aB + bA}{b^2} x^{j-1} \binom{i-1}{j} + \sum_{k=j+2}^i (-1)^{k-j} \frac{a^2 B + abA - b^2}{b^{k-j+1}} a^{k-j-2} B^{k-j-1} x^{k-2} \binom{i-1}{k-1} \right]$$

Bu durumda aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$\mathcal{Q}_n[x] = \mathcal{U}_n^{(a,b,0)} \mathcal{S}_n[x; a, b] \quad (3.19)$$

$$\mathcal{Q}_n[x] = \mathcal{T}_n[x; a, b] \mathcal{U}_n^{(a,b,0)}. \quad (3.20)$$

3.2. \mathcal{T} -Binomiyel Matrisleri Yoluyla Bazı Kombinatorik Özellikler

Bu bölümde, \mathcal{T} -binomiyel matrisleri ve şartlı polinom dizileri kullanılarak bazı kombinatorik özellikler elde edilecektir.

Teorem 3.2.1. i ve j , $i \geq j + 2$ şartını sağlayan pozitif tam sayılar olmak üzere ve $Q_1(x, y) \neq 0$ için aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\begin{aligned} & \left(-\sqrt{\frac{b}{a}} \frac{cyQ_0(x, y)}{Q_1(x, y)} \right)^{i-j} \begin{bmatrix} i-1 \\ j-1 \end{bmatrix}_{\mathcal{T}} \\ &= \frac{Q_{i-j+1}(x, y)}{Q_1(x, y)} - Q_{i-j}(x, y) \frac{\sqrt{b}(Q_1(x, y)ax + Q_0(x, y)cy(p+q+1))}{\sqrt{a}Q_1^2(x, y)} \\ &+ \sum_{k=j+2}^i Q_{i-k+1}(x, y) \frac{(-Q_0(x, y)\sqrt{b}cy)^{k-j-2}}{(Q_1(x, y)\sqrt{a})^{k-j+1}} \sqrt{abcy} \left[cQ_0^2(x, y)y \begin{bmatrix} k-1 \\ j-1 \end{bmatrix}_{\mathcal{T}} \right. \\ &\quad \left. + Q_0(x, y)(aQ_1(x, y)x + cQ_0(x, y)y) \begin{bmatrix} k-2 \\ j-1 \end{bmatrix}_{\mathcal{T}} + \Theta(x, y) \sum_{m=j}^{k-2} \begin{bmatrix} m-1 \\ j-1 \end{bmatrix}_{\mathcal{T}} \right]. \end{aligned}$$

İspat. Sonuç 3.1.4 kullanılarak aşağıdaki eşitlikler elde edilebilir:

$$\omega_{j,j} \left(-\sqrt{\frac{b}{a}} \frac{cyQ_0(x,y)}{Q_1(x,y)}, x, y \right) = \frac{1}{Q_1(x,y)},$$

$$\omega_{j+1,j} \left(-\sqrt{\frac{b}{a}} \frac{cyQ_0(x,y)}{Q_1(x,y)}, x, y \right) = -\frac{\sqrt{b}(Q_1(x,y)ax + Q_0(x,y)cy(p+q+1))}{\sqrt{a}Q_1^2(x,y)}.$$

$i \geq j + 2$ durumu için ise gerekli işlemler yapılarak

$$\begin{aligned} & \left(-\sqrt{\frac{b}{a}} \frac{cyQ_0(x,y)}{Q_1(x,y)} \right)^{i-j} \begin{bmatrix} i-1 \\ j-1 \end{bmatrix}_{\mathcal{T}} \\ &= q_{i,j} \omega_{j,j} \left(-\sqrt{\frac{b}{a}} \frac{cyQ_0(x,y)}{Q_1(x,y)}, x, y \right) + q_{i,j+1} \omega_{j+1,j} \left(-\sqrt{\frac{b}{a}} \frac{cyQ_0(x,y)}{Q_1(x,y)}, x, y \right) \\ & \quad + \sum_{k=j}^{i-2} q_{i,k} \omega_{k,j} \left(-\sqrt{\frac{b}{a}} \frac{cyQ_0(x,y)}{Q_1(x,y)}, x, y \right). \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur. \square

Teorem 3.2.2. i ve j , $i \geq j + 2$ şartını sağlayan pozitif tam sayılar olmak üzere ve $Q_1(x,y) \neq 0$ için aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\begin{aligned} & \left(-\sqrt{\frac{b}{a}} \frac{cyQ_0(x,y)}{Q_1(x,y)} \right)^{i+j-2} \begin{bmatrix} i-1 \\ j-1 \end{bmatrix}_{\mathcal{T}} \\ &= Q_{i-j+1}(x,y) \frac{bc^2 Q_0^2(x,y)y^2}{aQ_1^3(x,y)} - Q_{i-j}(x,y) \frac{b^{3/2}(cyQ_0(x,y))^2 (aQ_1(x,y)x + cQ_0(x,y)y(p+q+1))}{a^{3/2}Q_1^4(x,y)} \\ & \quad + \sum_{k=j+2}^i Q_{i-k+1}(x,y) \frac{(-Q_0(x,y)\sqrt{b}cy)^{k+j-4}}{(Q_1(x,y)\sqrt{a})^{k+j-1}} \sqrt{abcy} \left[cQ_0^2(x,y)y \begin{bmatrix} k-1 \\ j-1 \end{bmatrix}_{\mathcal{T}} \right. \\ & \quad \left. + Q_0(x,y) (aQ_1(x,y)x + cQ_0(x,y)y) \begin{bmatrix} k-2 \\ j-1 \end{bmatrix}_{\mathcal{T}} + \Theta(x,y) \sum_{m=j}^{k-2} \begin{bmatrix} m-1 \\ j-1 \end{bmatrix}_{\mathcal{T}} \right]. \end{aligned}$$

İspat. Sonuç 3.1.7 kullanılarak aşağıdaki eşitlikler elde edilebilir:

$$\kappa_{j,j} \left(-\sqrt{\frac{b}{a}} \frac{cyQ_0(x,y)}{Q_1(x,y)}, x, y \right) = \frac{bc^2 Q_0^2(x,y)y^2}{aQ_1^3(x,y)},$$

$$\kappa_{j+1,j} \left(-\sqrt{\frac{b}{a}} \frac{cyQ_0(x,y)}{Q_1(x,y)}, x, y \right) = -\frac{b^{3/2}(cyQ_0(x,y))^2 (aQ_1(x,y)x + cQ_0(x,y)y(p+q+1))}{a^{3/2}Q_1^4(x,y)}.$$

$i \geq j + 2$ durumu için ise gerekli işlemler yapılarak

$$\begin{aligned} & \left(-\sqrt{\frac{b}{a}} \frac{cyQ_0(x, y)}{Q_1(x, y)} \right)^{i-j+2} \begin{bmatrix} i-1 \\ j-1 \end{bmatrix}_{\mathcal{T}} \\ &= q_{i,j} \kappa_{j,j} \left(-\sqrt{\frac{b}{a}} \frac{cyQ_0(x, y)}{Q_1(x, y)}, x, y \right) + q_{i,j+1} \kappa_{j+1,j} \left(-\sqrt{\frac{b}{a}} \frac{cyQ_0(x, y)}{Q_1(x, y)}, x, y \right) \\ & \quad + \sum_{k=j}^{i-2} q_{i,k} \kappa_{k,j} \left(-\sqrt{\frac{b}{a}} \frac{cyQ_0(x, y)}{Q_1(x, y)}, x, y \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur. \square

Sonuç 3.2.1. $1 \leq r \leq n$ ve $Q_1(x, y) \neq 0$ olmak üzere, aşağıdaki eşitlik sağlanır:

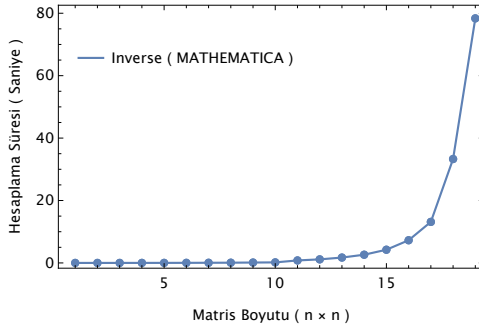
$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n-1 \\ r-1 \end{bmatrix}_{\mathcal{T}} &= \sum_{l=r}^n Q_{n-l+1}(x, y) \left[\frac{1}{Q_1(x, y)} \begin{bmatrix} l-1 \\ r-1 \end{bmatrix}_{\mathcal{T}} - \frac{(\sqrt{b}(aQ_1(x, y)x + cQ_0(x, y)y))}{\sqrt{a}Q_1^2(x, y)} \begin{bmatrix} l-2 \\ r-1 \end{bmatrix}_{\mathcal{T}} \right. \\ & \quad \left. + \Theta(x, y) \sum_{k=r}^{l-2} \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{l-k}{2}} ((-1)^{l-k} Q_0^{l-k-2}(x, y)(cy)^{l-k-1})}{Q_1^{l-k+1}(x, y)} \begin{bmatrix} k-1 \\ r-1 \end{bmatrix}_{\mathcal{T}} \right]. \end{aligned}$$

BÖLÜM 4

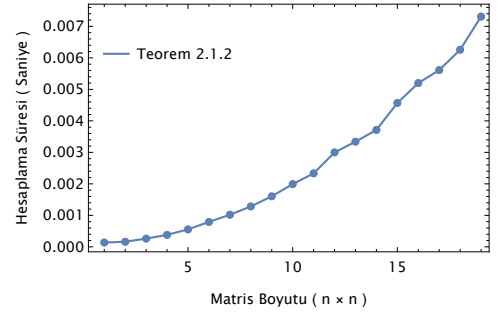
4.1. Sayısal Sonuçlar

Tekil olmayan bir kare matrisin tersi, MATHEMATICA'daki “Inverse” fonksiyonu ile kolaylıkla hesaplanabilir. Bu yöntem birçok hesaplamada hızlı ve güvenilir sonuçlar verse de, matrisin boyutu büyüdükçe “Inverse” fonksiyonunun hesaplama hızı da önemli ölçüde azalmaktadır. Bu bölümde, şartlı polinom matrislerinin terslerinin elde edilmesi ile ilgili bazı sayısal sonuçlar gösterilecektir. Teorem 2.1.2'de elde edilen analitik sonuçlar ve “Inverse” fonksiyonunda elde edilen sonuçların matrislerin boyutları büyüdükçe vermiş olduğu sonuçlar incelenecektir. Bu tezde yapılan tüm hesaplamalar aşağıdaki donanım özellikleri kullanılarak gerçekleştirilmiştir:

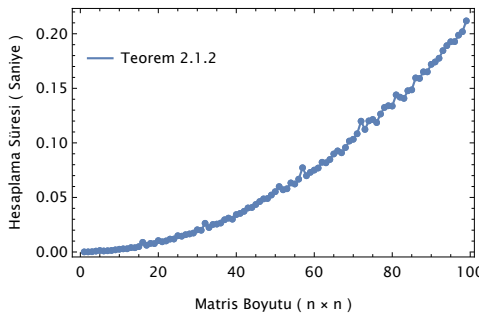
- Intel(R) Core(TM) i5-4590 CPU @ 3.30GHz İşlemci
- 8 GB DDR4 RAM
- 64-bit Windows 11 Education İşletim Sistemi



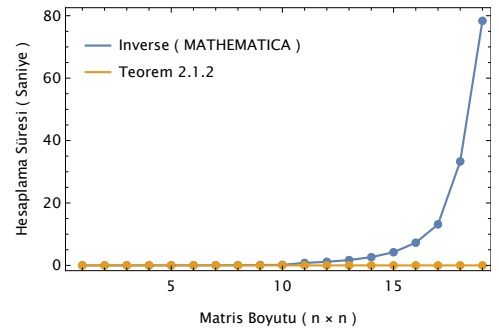
(a)



(b)



(c)



(d)

Şekil 4.2. Şartlı polinom matrisinin tersleri için performans grafikleri

Şekil 4.2. (a)'da verilen sonuçlar incelendiğinde, $n = 10$ değerinden sonra MATHEMATICA'nın "Inverse" fonksiyonu ile yapılan hesaplama sürelerinde çok hızlı bir artış olduğu gözlemlenmektedir. Özel olarak, $n = 20$ için $\mathbb{Q}_{20}[x, y]$ matrisinin tersi "Inverse" fonksiyonu ile 78.356 saniyede hesaplanmıştır. Öte yandan Teorem 2.1.2 kullanılarak Şekil 4.2. (b) ve (c)'de $n = 20$ ve $n = 100$ için sonuçlar verilmiştir. "Inverse" fonksiyonuna kıyasla Teorem 2.1.2 kullanılarak $n = 20$ için yapılan hesaplamalarda $\mathbb{Q}_{20}[x, y]$ matrisinin tersi 0.0073115 saniyede hesaplanmıştır. Şekil 4.2. (d)'de verilen sonuçlarda ise "Inverse" fonksiyonu ve Teorem 2.1.2 ile yapılan hesaplamaların sonuçlarının performansları incelenmiştir. Böylece, verilen sonuçlar incelendiğinde $\mathbb{Q}_n[x, y]$ matrisinin tersi hesaplanırken analitik bir yöntem olması sebebiyle Teorem 2.1.2 ile yapılan hesaplamalar MATHEMATICA'nın "Inverse" fonksiyonu ile $n = 20$ için yapılan hesaplamalara göre yaklaşık olarak 10^4 kat daha iyi sonuç vermektedir. Matrisin boyutu büyüdükçe aradaki performans farkı da ciddi oranda büyümektedir. Böylece, tezde elde edilen sonuçlar şartlı polinom matrislerinin terslerinin hesaplanmasındaki zorlukları büyük ölçüde kolaylaştırmaktadır.

KAYNAKÇA

1. Fibonacci, L., “Liber Abaci”, 1202.
2. Koshy, T., “Fibonacci and Lucas numbers with applications”, *Wiley*, 2001.
3. Golub, G. H., van Loan, C. F., “Matrix computations”, *Matrix computations/Gene H. Golub*, 1996.
4. Horadam, A., “Basic properties of a certain generalized sequence of numbers”, *The Fibonacci Quarterly*, 3 (3), 161–176, 1965.
5. Falcon, S., Plaza, A., “On the Fibonacci k –numbers”, *Chaos, Solitons & Fractals*, 32 (5), 1615–1624, 2007.
6. Edson, M., Yayenie, O., “A New Generalization of Fibonacci Sequence & Extended Binet’s Formula”, *Integers*, 9 (6), 639–654, 2009.
7. Falcon, S., “The k –Fibonacci matrix and the Pascal matrix”, *Open Mathematics*, 9 (6), 1403–1410, 2011.
8. Yayenie, O., “A note on generalized Fibonacci sequences”, *Applied Mathematics and Computation*, 217 (12), 5603–5611, 2011.
9. Irmak, N., Szalay, L., “On the k –periodic binary recurrences”, *Annales Mathematicae et Informaticae*, 40, 25–35, 2012.
10. Bilgici, G., “Two generalizations of Lucas sequence”, *Applied Mathematics and Computation*, 245, 526–538, 2014.
11. Ramirez, J. L., Sirvent, V. F., “A q –Analogue of the Bi-Periodic Fibonacci Sequence”, *Journal of Integer Sequences*, 19 (2), 3, 2016.
12. Yazlik, Y., Köme, C., Madhusudanan, V., “A new generalization of Fibonacci and Lucas p –numbers”, *Journal of Computational Analysis and Applications*, 25 (4), 657–669, 2018.
13. Elif, T., Leung, H. H., “A note on congruence properties of the generalized bi–periodic Horadam sequence”, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 49 (6), 2084–2093.
14. Verma, A. B., Bala, A., “On properties of generalized bi–variate bi–periodic Fibonacci polynomials”, *International journal of Advanced science and Technology*, 29 (3), 8065–8072, 2020.

15. Miladinovic, M., Stanimirovic, P., “Singular case of generalized Fibonacci and Lucas matrices”, *Journal of the Korean Mathematical Society*, 48 (1), 33–48, 2011.
16. Lee, G.-Y., Kim, J.-S., Cho, S.-H., “Some combinatorial identities via Fibonacci numbers”, *Discrete Applied Mathematics*, 130 (3), 527–534, 2003.
17. Zhang, Z., Zhang, Y., “The Lucas matrix and some combinatorial identities”, *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 38 (5), 457, 2007.
18. Zhang, Z., Wang, X., “A factorization of the symmetric Pascal matrix involving the Fibonacci matrix”, *Discrete Applied Mathematics*, 155 (17), 2371–2376, 2007.
19. Irmak, N., Köme, C., “Linear algebra of the Lucas matrix”, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 50 (2), 549–558, 2021.
20. Stanimirović, P., Nikolov, J., Stanimirović, I., “A generalization of Fibonacci and Lucas matrices”, *Discrete Applied Mathematics*, 156 (14), 2606–2619, 2008.
21. Köme, C., “Some combinatorial identities via k –order Fibonacci matrices”, *Miskolc Mathematical Notes*, 23 (1), 281–294, 2022.
22. Shen, S.-Q., Liu, W.-J., “Inversion of lower Hessenberg matrix involving classical Horadam numbers”, *International Journal of Algebra*, 10 (7), 343–350, 2016.
23. Yazlik, Y., Taskara, N., “A note on generalized k –Horadam sequence”, *Computers & Mathematics with Applications*, 63 (1), 36–41, 2012.
24. Dziemianczuk, M., “Generalization of Fibonomial coefficients”, *arXiv preprint arXiv:0908.3248*, 2009.