**T.C.**
**NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

# GENELLEŞTİRİLMİŞ FIBONACCI VE LUCAS MATRİS HİBRİNOMİYALLERİ

**Tezi Hazırlayan**
**Sefa YAZAN**

**Tez Danışmanı**
**Dr. Öğr. Üyesi Sure KÖME**

**Matematik Anabilim Dalı**
**Yüksek Lisans Tezi**

**Ocak 2023**
**NEVŞEHİR**

T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# GENELLEŞTİRİLMİŞ FIBONACCI VE LUCAS MATRİS HİBRİNOMİYALLERİ

Tezi Hazırlayan
Sefa YAZAN

Tez Danışmanı
Dr. Öğr. Üyesi Sure KÖME

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Ocak 2023
NEVŞEHİR

Dr. Öğr. Üyesi Sure KÖME danışmanlığında **Sefa YAZAN** tarafından hazırlanan **"Genelleştirilmiş Fibonacci Ve Lucas Matris Hibrinomiyalleri"** başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

25/01/2023

**JÜRİ**

Başkan :Prof. Dr. Yasin YAZLIK ………………………….

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Sure KÖME ………………………….

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Merve KARA ………………………….

ONAY

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun …. / …. /…… tarih ve ………… sayılı kararı ile onaylanmıştır.

…. /…. /….

Doç. Dr. Cemal ÇARBOĞA

Enstitü Müdürü

## TEZ BİLDİRİM SAYFASI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada yer alan bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu ve bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Sefa YAZAN

## TEŞEKKÜR

Bu tezin oluşum aşamasında benden destek ve emeklerini esirgemeyen, bana yol gösteren, sayın danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Sure KÖME 'ye,

Hayatımın en önemli kararlarında beni destekleyen yanımda olan değerli annem, babam ve kardeşlerime,

Ayrıca Matematik Bölüm Başkanlığı'na, Fen Edebiyat Fakültesi Dekanlığı'na ve Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Rektörlüğü'ne sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

**GENELLEŞTİRİLMİŞ FIBONACCI VE LUCAS MATRİS HİBRİNOMİYALLERİ**

**(Yüksek Lisans Tezi)**

**Sefa YAZAN**

**NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**Ocak 2023**

## ÖZET

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır.

Tezin ilk bölümünde, konu ile ilgili detaylı bir literatür taraması yapılmış olup temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

İkinci bölümde, genelleştirilmiş (iki periyotlu) Fibonacci matris hibrinomiyalinin tanımı, Binet formülü, üreteç fonksiyonu ve bazı önemli toplam formülleri ele alınmıştır.

Tezin üçüncü bölümünde, ilk olarak genelleştirilmiş (iki periyotlu) Lucas matris polinomu tanımlanmıştır ve bu matris polinomun Binet formülü, üreteç fonksiyonu ve bazı toplam formülleri elde edilmiştir. Daha sonra, genelleştirilmiş (iki periyotlu) Lucas matris hibrinomiyali tanımlanmıştır. Ayrıca, bu matris hibrinomiyalinin Binet formülü, üreteç fonksiyonu ve bazı toplam formülleri verilmiştir.

Dördüncü ve son bölümde ise sonuç ve öneriler bölümü yer almaktadır.

***Anahtar Kelimeler: Fibonacci matris polinomu, Lucas matris polinomu, Fibonacci matris hibrinomiyali, Lucas matris hibrinomiyali, Binet formülü, Üreteç fonksiyonu.***

**Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Sure KÖME**

**Sayfa Adedi: 41**

**GENERALIZED FIBONACCI AND LUCAS MATRIX HYBRINOMIALS**

**(M. Sc. Thesis)**

**Sefa YAZAN**

**NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ UNIVERSITY**
**GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES**

**January 2023**

## ABSTRACT

This thesis consists of four chapters.

In the first chapter, the literature review, basic definitions and theorems are given.

In the second chapter, the definition of generalized Fibonacci matrix hybrinomial, Binet formula, generating function and some summation formulas are examined.

In the third chapter, firstly, the generalized Lucas matrix polynomial is defined and the Binet formula, generating function, some summation formulas of this matrix polynomial is obtained. Later, the generalized Lucas matrix hybrinomial is defined. Also, The Binet formula, generating function and some summation formulas of this matrix hybrinomial is investigated.

In the fourth and final chapter, the conclusions and suggestions section is given.

***Keywords:* *Fibonacci matrix polynomial, Lucas matrix polynomial, Fibonacci matrix hybrinomial, Lucas matrix hybrinomial, Binet formula, Generating function*.**

**Thesis supervisor: Asst. Prof. Dr. Sure KÖME**

**Page Number: 41**

**İÇİNDEKİLER**

## SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

| | |
|---|---|
| $\mathbb{N}$ | Doğal sayılar kümesi |
| $\mathbb{R}$ | Reel sayılar kümesi |
| $\boldsymbol{Z}$ | Hibrit sayısı |
| $\boldsymbol{F_n}$ | Fibonacci sayı dizisi |
| $\boldsymbol{L_n}$ | Lucas sayı dizisi |
| $\boldsymbol{F_n(x)}$ | Fibonacci polinomu |
| $\boldsymbol{L_n(x)}$ | Lucas polinomu |
| $\boldsymbol{q_n(a,b,x)}$ | İki periyotlu Fibonacci polinomu |
| $\boldsymbol{l_n(a,b,x)}$ | İki periyotlu Lucas polinomu |
| $\boldsymbol{\mathcal{F}_n(a,b,x)}$ | İki periyotlu Fibonacci matris polinomu |
| $\boldsymbol{\mathcal{L}_n(a,b,x)}$ | İki periyotlu Lucas matris polinomu |
| $\boldsymbol{H\mathcal{F}_n(a,b,x)}$ | İki periyotlu Fibonacci matris hibrinomiyali |
| $\boldsymbol{H\mathcal{L}_n(a,b,x)}$ | İki periyotlu Lucas matris hibrinomiyali |
| $\lfloor \boldsymbol{n} \rfloor$ | Tam değer fonksiyonu |

# BÖLÜM 1

# GİRİŞ

Karmaşık sayılar, hiperbolik sayılar ve dual sayılar literatürde var olan ve iyi bilinen iki boyutlu sayı sistemleridir. Reel, kompleks, dual ve hiperbolik sayıların birlikte ele alınarak oluşturulan sayı sistemine ise hibrit sayıları denmektedir. Bugüne kadar pek çok araştırmacı tarafından çalışılan hibrit sayılarının geometrik ve fiziksel uygulamalarına sıklıkla rastlanılmasının yanı sıra, hibrit sayılarının özel bir uygulaması olan Fibonacci ve Lucas hibrit sayıları üzerine de pek çok çalışma mevcuttur.

Matematik, geometri, ekonomi, fizik gibi birçok alanda ortaya çıkan Fibonacci ve Lucas sayıları, keşfedilmeye ve araştırılmaya uygun olmasından dolayı geçmişten günümüze en çok ilgi duyulan konuların başında gelir. Fibonacci sayılarına bu kadar ilgi duyulmasının bir diğer sebebi ise bu sayıların, sayılar teorisinde farklı birçok kullanımının bulunmasıdır.

Fibonacci sayı dizisini bir tavşan probleminin çözümünden elde eden İtalyan matematikçi Leonardo Fibonacci' nin en ünlü kitabı "Liber Abaci" dir. Bahsedilen tavşan problemi, ergin bir tavşan çiftinin her ay yeni bir yavru çifti verdikleri ve yeni doğan bu tavşan çiftinin bir ay boyunca tam erginliğe eriştikleri kabulüyle, yavru olan bir tavşan çiftinden başlayarak bir yılda elde edilen tavşan çiftlerinin aylara göre sayısını araştıran bir problemdir. Bu problemin çözümü ise $"1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,\ldots"$ şeklinde devam eden bir sayı dizisini verir. Bu sayı dizisine "Fibonacci sayı dizisi" adı verilir. Fibonacci sayı dizisinin ardışık iki değerinden büyük olan sayının küçük olan sayıya oranı, sayılar büyüdükçe "Altın oran" a (1,618…) yaklaşır. Bu altın oran doğada, günlük hayatta karşılaşılan birçok olayda ve bilimsel gerçeklerde karşımıza çıkmaktadır. Altın oran' ı eski Mısırlılar ve Yunanlılar daha çok mimaride kullanmışlardır. Ayrıca insan vücudunun birçok bölümünde bulunan altın oran, resim ve heykellerde denge ve güzelliği ön plana çıkarmak amacıyla da kullanılmıştır.

## 1.1.Amaç ve Kapsam

Bu tez çalışmasındaki amaç öncelikle literatürde var olan iki periyotlu Fibonacci matris polinomlarını kullanarak iki periyotlu Fibonacci matris hibrinomiyallerinin nasıl elde edildiğini incelemektir. Buna ek olarak bilinen iki periyotlu Lucas polinomları kavramı yardımıyla iki periyotlu Lucas matris polinomları tanımlanıp, bu polinomların üreteç fonksiyonu, Binet formülü ve bazı toplam formülleri elde edilecektir. Son olarak elde edilen bu veriler kullanılarak iki periyotlu Lucas matris hibrinomiyalleri elde edilecektir.

## 1.2.Kaynak Araştırması

Literatürde bu zamana kadar sayı dizileri, Fibonacci ve Lucas polinomları, hibrit sayıları vb. hakkında birçok uygulama ve genellemeye yer verilmiştir. Bu bölümde tezin oluşum aşamasında yararlanılan çalışmalar hakkında bilgiler verilecektir.

Fibonacci, "Liber Abaci" adlı kitabında bir tavşan problemi üzerinde durarak, bu tavşan probleminin çözümünden elde edilen sayıların özellikleri ve uygulamalarına yer vermiştir [1].

Hoggart ve Bicknell, "Roots of Fibonacci polynomials" isimli çalışmasında, genellikle $n$ dereceli polinom denklemlerinin köklerini bulmanın $n$ arttıkça zor hale geldiğini, ancak belirli polinom sınıfları için köklerin, hiperbolik trigonometrik fonksiyonlar kullanılarak türetilebileceğini ifade etmişlerdir. Ayrıca burada, $n$ dereceli Fibonacci ve Lucas polinomlarının köklerini bulmuşlardır [2].

Koshy, "Fibonacci and Lucas numbers with applications, Volume 2" adlı çalışmasında Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas, Jacobsthal, Jacobsthal-Lucas vb. sayılarının bazı özdeşlikleri ve önemli uygulamalarını elde etmiştir [3].

Falcon ve Plaza, "On the Fibonacci $k-$numbers" isimli çalışmalarında yeni genelleştirilmiş $k-$Fibonacci dizilerini tanıtmışlar ve çalışmışlardır. Bu dizilerin özelliklerinin birçoğunu basit matris cebiri ile ispatlamışlardır [4].

Falcon ve Plaza, “The $k$ −Fibonacci sequence and the Pascal 2 −triangle” isimli çalışmalarında hem klasik Fibonacci dizisinin hem de Pell dizisinin genellemesi olan $k$ −Fibonacci dizisi hakkında farklı detaylı bilgiler sunmuşlardır. Ayrıca, bu dizilerin Binet formülü, üreteç fonksiyonu, Catalan özdeşliği ve bazı önemli toplam formüllerini ispatlamışlar ve Pascal 2 −üçgeni ile ilişkilendirmişlerdir [5].

Civciv ve Türkmen, “On the $(s,t)$ −Fibonacci and Fibonacci matrix sequences” adlı çalışmalarında Fibonacci sayılarının yeni bir matris genelleştirilmesini tanımlamışlardır. Ayrıca matris yaklaşımlarını kullanarak bu matris dizisinin bazı özelliklerini göstermişlerdir [6].

Edson ve Yayenie, “A New Generalization of Fibonacci Sequence & Extended Binet's Formula” isimli çalışmasında yeni bir genelleştirme olan, iki periyotlu Fibonacci dizisi $\{q_n\}$ tanımlamışlardır. Ayrıca bu yeni dizinin Binet formülü, Cassini, Catalan, d'Ocagne vs. gibi özdeşliklerini üretmişlerdir [7]

Nalli ve Haukkanen, “On generalized Fibonacci and Lucas polynomials” isimli çalışmalarında $h(x)$ reel katsayılı bir polinom olmak üzere, Fibonacci ve Lucas polinomlarının bir genelleştirmesi olan $h(x)$ −Fibonacci ve $h(x)$ −Lucas polinomlarını tanıtmışlardır [8].

Yayenie, “A note on generalized Fibonacci sequences” adlı çalışmasında iki periyotlu Fibonacci dizileri ile ilişkili yeni bir genelleme olan modifiye edilmiş genelleştirilmiş Fibonacci dizisini sunmuş ve bu dizinin pek çok önemli özelliğini ele almıştır [9].

Yazlık ve çalışma arkadaşları, “The Generalized $(s,t)$-Sequence and its Matrix Sequence” isimli çalışmalarında $(s,t)$ −Fibonacci ve $(s,t)$ −Lucas dizilerini genelleştiren yeni bir dizi tanımlamışlardır. Daha sonra bu diziyi kullanarak genelleştirilmiş $(s,t)$ −matris dizileri kurmuşlar ve son olarak, $(s,t)$ −Fibonacci ve $(s,t)$ −Lucas dizileri ve bunların matris dizileri arasındaki bazı önemli ilişkileri sunmuşlardır [10].

Güleç ve Taşkara, “On the $(s,t)$ −Pell and $(s,t)$ −Pell–Lucas sequences and their matrix representations” adlı çalışmalarında $(s,t)$ −Pell ve $(s,t)$ −Pell–Lucas dizilerini tanımlamışlardır. Bu diziler için matris dizilerini elde etmişler ve bazı özelliklerini incelemişlerdir [11].

Uslu ve Uygun, "The $(s,t)$ Jacobsthal and $(s,t)$ Jacobsthal-Lucas Matrix Sequences" isimli çalışmalarında $(s,t)$ Jacobsthal ve $(s,t)$ Jacobsthal-Lucas dizileri olarak adlandırılan yeni diziler tanımlamışlardır. Daha sonra bu dizileri kullanarak $(s,t)$ Jacobsthal ve $(s,t)$ Jacobsthal-Lucas matris dizilerini kurmuşlar ve son olarak, bu matris dizileri arasındaki bazı önemli ilişkileri sunmuşlardır [12].

Bilgici, "Two generalizations of Lucas sequence" isimli çalışmasında yeni bir genelleştirme olan, iki periyotlu Lucas dizisi $\{l_n\}$ tanımlamıştır. Ayrıca bu yeni dizinin Binet formülü, Cassini, Catalan, d'Ocagne vs. gibi özdeşliklerini sunmuştur. Bunun yanı sıra iki periyotlu Lucas dizileri ile ilişkili yeni bir genelleme olan modifiye edilmiş genelleştirilmiş Lucas dizisini sunmuş ve bu dizinin pek çok önemli özelliğini ele almıştır [13].

Bilgici, "New generalizations of Fibonacci and Lucas sequences" isimli çalışmasında $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{l_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ tarafından üretilen, Fibonacci ve Lucas dizilerinin farklı bir genelleştirmesini sunmuştur. Bu iki dizi için Binet formülleri ve bazı özdeşlikleri de elde etmiştir [14].

Coşkun ve Taşkara, "Bi-periodic Fibonacci matrix polynomial and its binomial transforms" isimli çalışmalarında, iki periyotlu Fibonacci matris polinomu kullanılarak elde edilen matris polinomunu ele almışlardır. Buna ek olarak, bu yeni matris polinomlarının Binet formülü, üreteç fonksiyonu, bazı özellikleri ve binom toplamlarını vermişlerdir [15].

Yılmaz ve çalışma arkadaşları, "On properties of bi-periodic Fibonacci and Lucas polynomials" adlı çalışmalarında iki periyotlu Fibonacci ve Lucas polinomlarını tanımlamışlardır. İki periyotlu Fibonacci ve Lucas sayılarının genelleştirilmesi olan bu polinomların özelliklerini araştırmışlardır [16].

Coşkun ve Taşkara, "A note on the bi-periodic Fibonacci and Lucas matrix sequences" isimli çalışmalarında öncelikle iki periyotlu Lucas matris dizisini tanıtmışlar ve bu genelleştirilmiş matris dizisinin bazı temel özelliklerini sunmuşlardır. Ayrıca iki periyotlu Fibonacci ve Lucas matris dizileri arasındaki önemli ilişkileri araştırmışlardır [17].

Özdemir, "Introduction to hybrid numbers" isimli çalışmada hibrit sayılar adı verilen değişmeli olmayan yeni bir sayı sistemini tanımlamıştır. Ayrıca, bu sayı kümesinin bazı cebirsel ve geometrik özelliklerini vermiş ve hibrit bir sayının köklerini türüne ve karakterine göre incelemiştir [18].

Szynal-Liana, "The Horadam hybrid numbers" adlı çalışmasında Horadam sayıları ile hibrit sayıları kavramlarını birleştirerek Horadam hibrit sayıları tanımını sunmuştur. Ayrıca bu sayıların Binet formülünü ve üreteç fonksiyonunu elde etmiş ve bazı önemli özdeşliklerini ispatlamıştır [19].

Szynal-Liana ve Włoch, "The Fibonacci hybrid numbers" isimli çalışmada Fibonacci hibrit sayılarını ele almışlar ve klasik Fibonacci özdeşliklerini kullanarak bazı özelliklerini elde etmişlerdir [20].

Özkan ve Altun, "Generalized Lucas polynomials and relationships between the Fibonacci polynomials and Lucas polynomials" adlı çalışmasında, iki matris kullanarak Lucas polinomlarının elemanlarını bulmuşlar ve $n-$adımlı Lucas polinomlarına kadar genişletmişlerdir. Ayrıca, Fibonacci polinomları ile Lucas polinomları arasındaki ilişkileri vermişlerdir [21].

Coşkun, "Bi-periyodik Fibonacci ve Lucas Matris Dizileri" isimli tez çalışmasında başlangıç şartları 2 boyutlu matrisler olan bi-periyodik Fibonacci ve Lucas matris dizilerini tanımlayarak çeşitli özelliklerini vermiştir. Aynı zamanda bu matris dizileri arasındaki ilişkileri de incelemiştir [22].

Kızılateş, "A new generalization of Fibonacci hybrid and Lucas hybrid numbers" isimli çalışmasında $q-$Fibonacci hibrit ve $q-$Lucas hibrit sayıları olarak adlandırılan hibrit sayılarının yeni bir genelleştirilmesini sunmuştur. Ayrıca bu sayıların bazı cebirsel özelliklerini de elde etmiştir [23].

Szynal-Liana ve Włoch, "Introduction to Fibonacci and Lucas hybrinomials" isimli çalışmalarında Fibonacci hibrit ve Lucas hibrit sayılarının bir genelleştirilmesi olan

Fibonacci hibrinomiyalleri ve Lucas hibrinomiyallerini ele almışlardır. Ayrıca Binet formülleri, üreteç fonksiyonları ve bazı önemli özdeşliklerini de sunmuşlardır [24].

Verma ve Bala, "On Properties of Generalized Bi-Variate Bi-Periodic Fibonacci Polynomials" adlı çalışmalarında iki değişkenli iki periyotlu Fibonacci polinomlarını tanımlamışlardır. Buna ek olarak, bu polinomların Catalan, Cassini, d'Ocagne, Gelin Cesaro özdeşliklerini elde etmişler ve üreteç fonksiyonu ile Binet formülünü sunmuşlardır [25].

Szynal-Liana ve Włoch, "Generalized Fibonacci-Pell Hybrinomials" adlı çalışmalarında Fibonacci-Pell hibrinomiyalleri olarak adlandırılan Fibonacci-Pell hibrit polinomlarını tanımlamış ve Binet formülü, üreteç fonksiyonu ve bazı önemli özdeşliklerini ispatlamışlardır [26].

Şentürk ve çalışma arkadaşları, "A study on Horadam hybrid numbers" isimli çalışmalarında, Horadam hibrit sayılarını incelemişler ve bu sayılar için üstel üreteç fonksiyonu, Poisson üreteç fonksiyonu, Vajda, Catalan, Cassini ve d'Ocagne özdeşliklerini vermişlerdir. Ek olarak, bu sayılar için Honsberger formülü ve bazı toplam formüllerini de incelemişlerdir [27].

Sevgi, "The Generalized Lucas Hybrinomıals With Two Variables" isimli çalışmasında iki değişkenli genelleştirilmiş Lucas hibrinomiyallerini tanıtarak, bu hibrinomiyallerin Binet formülü, üreteç fonksiyonu ve bazı önemli özdeşliklerini sunmuştur. Ayrıca matris teorisi yardımıyla, genelleşirilmiş Lucas hibrinomiyallerinin matris gösterimini elde etmiştir [28].

Bala ve Verma, "Some Properties of Bi-Variate Bi-Periodic Lucas Polynomials" adlı çalışmalarında iki değişkenli iki periyotlu Lucas polinomlarını tanımlamışlardır. Ayrıca, bu polinomların en bilinen özelliklerden olan Catalan, Cassini, d'Ocagne, özdeşliklerini elde etmişlerdir [29].

Kızılateş, "A Note on Horadam Hybrinomials" adlı çalışmasında Horadam polinomlarını kullanarak, Horadam hibrinomiyalleri olarak adlandırılan Horadam hibrit polinomlarını tanımlamıştır. Buna ek olarak Horadam hibrinomiyallerinin sırasıyla rekürans bağıntısı, üreteç fonksiyonu, üstel üreteç fonksiyonu, Binet formülü, toplam formülleri, Catalan özdeşliği, Cassini özdeşliği ve d'Ocagne özdeşliği gibi bazı özel durumları ve cebirsel özelliklerini elde etmiştir. Ayrıca matrislerde Horadam hibrinomiyalleri ile ilgili bazı uygulamalara da yer vermiştir [30].

## 1.3.Temel Kavramlar

Bu bölümde tez konusunu daha detaylı bir şekilde anlayabilmek için gereken ve tezin diğer bölümlerinde karşımıza çıkabilecek temel tanım ve teoremlere yer verilecektir.

**Tanım 1.3.1:** Fibonacci ve Lucas sayıları sırasıyla aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$F(0) = 0,\ F(1) = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n,\ n \epsilon \mathbb{N}_0 \tag{1.1}$$

$$L(0) = 2,\ L(1) = 1, \quad L_{n+2} = L_{n+1} + L_n,\ n \epsilon \mathbb{N}_0 \tag{1.2}$$

Fibonacci ve Lucas dizilerinin üreteç fonksiyonları sırasıyla,

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n\, x^n = \frac{x}{1-x-x^2} \tag{1.3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n\, x^n = \frac{2-x}{1-x-x^2} \tag{1.4}$$

şeklinde elde edilmiştir. Ayrıca Fibonacci ve Lucas dizilerinin Binet formülleri ise sırasıyla,

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \tag{1.5}$$

$$L_n = \alpha^n + \beta^n \tag{1.6}$$

şeklindedir. Burada $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ değerleri $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ karakteristik polinomunun kökleridir. Aynı zamanda $\alpha$ pozitif kökü, matematikte oldukça önemli bir yeri olan “altın oran” dır [3].

**Tanım 1.3.2:** Herhangi bir $x$ değişkeni için, Catalan tarafından çalışılan $F_n(x)$ Fibonacci polinomu, $F_0(x) = 0$ ve $F_1(x) = 1$ başlangıç şartları olmak üzere,

$$F_n(x) = xF_{n-1}(x) + F_{n-2}(x), \;\; n \geq 2 \tag{1.7}$$

ve Bicknell tarafından çalışılan $L_n(x)$ Lucas polinomu, $L_0(x) = 2$ ve $L_1(x) = x$ başlangıç şartları olmak üzere,

$$L_n(x) = xL_{n-1}(x) + L_{n-2}(x), \;\; n \geq 2 \tag{1.8}$$

şeklindedir. Burada $x = 1$ için Fibonacci ve Lucas polinomları sırasıyla Fibonacci ve Lucas sayılarını vermektedir. Daha sonra Fibonacci ve Lucas polinomları için Binet formülleri sırasıyla,

$$F_n(x) = \frac{\alpha^n(x)-\beta^n(x)}{\alpha(x)-\beta(x)} \tag{1.9}$$

$$L_n(x) = \alpha^n(x) + \beta^n(x) \tag{1.10}$$

şeklinde elde edilmiştir. Burada $\alpha(x) = \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2+4}\right)$ ve $\beta(x) = \frac{1}{2}\left(x - \sqrt{x^2+4}\right)$ $\lambda^2 - x\lambda - 1 = 0$ karakteristik denkleminin kökleridir [8].

**Tanım 1.3.3:** $a$ ve $b$ sıfırdan farklı herhangi iki reel sayı olmak üzere, iki periyotlu Fibonacci polinomları $\{q_n(a,b,x)\}_{n=0}^{\infty}$ aşağıdaki şekilde tanımlanır;

$$q_n(a,b,x) = \begin{cases} axq_{n-1}(a,b,x) + q_{n-2}(a,b,x), & n \text{ çift ise} \\ bxq_{n-1}(a,b,x) + q_{n-2}(a,b,x), & n \text{ tek ise} \end{cases} \;\; n \geq 2, \tag{1.11}$$

burada $q_0(a,b,x) = 0, q_1(a,b,x) = 1$ başlangıç şartlarıdır [16].

**Teorem 1.3.1:** İki periyotlu Fibonacci polinomu $\{q_n(a,b,x)\}_{n=0}^{\infty}$ ‘nin üreteç fonksiyonu,

$$\sum_{n=0}^{\infty} q_n(a,b,x)t^n = \frac{t+axt^2-t^3}{1-(abx^2+2)t^2+t^4} \tag{1.12}$$

şeklindedir [16].

**Teorem 1.3.2:** İki periyotlu Fibonacci polinomu $\{q_n(a,b,x)\}_{n=0}^{\infty}$ 'nin Binet formülü aşağıdaki gibi elde edilir.

$$q_n(a,b,x) = \frac{(ax)^{1-\xi(n)}}{(abx^2)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \left[\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right] \tag{1.13}$$

Burada $\alpha$ ve $\beta$, $\lambda^2 - (abx^2)\lambda - abx^2 = 0$ karakteristik denkleminin kökleridir. Burada $\xi(n) = n - 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ olduğu bilinmektedir. Yani $n$ çift ise $\xi(n) = 0$, $n$ tek ise $\xi(n) = 1$ olarak bulunur [25].

**Tanım 1.3.4:** $n \in \mathbb{N}$ ve $a$ ve $b$ sıfırdan farklı herhangi iki reel sayı olmak üzere, iki periyotlu Fibonacci matris polinomu $(\mathcal{F}_n(a,b,x))$;

$$\mathcal{F}_n(a,b,x) = \begin{cases} ax\mathcal{F}_{n-1}(a,b,x) + \mathcal{F}_{n-2}(a,b,x), & n \text{ çift ise} \\ bx\mathcal{F}_{n-1}(a,b,x) + \mathcal{F}_{n-2}(a,b,x), & n \text{ tek ise} \end{cases} \tag{1.14}$$

başlangıç şartları $\mathcal{F}_0(a,b,x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ve $\mathcal{F}_1(a,b,x) = \begin{pmatrix} bx & \frac{b}{a} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ile yukarıdaki şekilde tanımlanır. Buna ek olarak iki periyotlu Fibonacci matris polinomu $(\mathcal{F}_n(a,b,x))$

$$\mathcal{F}_n(a,b,x) = \begin{pmatrix} \left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(n)} q_{n+1}(a,b,x) & \left(\frac{b}{a}\right) q_n(a,b,x) \\ q_n(a,b,x) & \left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(n)} q_{n-1}(a,b,x) \end{pmatrix} \tag{1.15}$$

olarak ifade edilebilir. Burada $\xi(n) = n - 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ dir. Ayrıca $q_n(a,b,x)$, iki periyotlu Fibonacci polinomudur [15].

**Teorem 1.3.3:** İki periyotlu Fibonacci matris polinomları için üreteç fonksiyonu

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{F}_i(a,b,x)t^i = \frac{1}{1-(abx^2+2)t^2+t^4} \begin{pmatrix} 1 + bxt - t^2 & \frac{b}{a}t + bxt^2 - \frac{b}{a}t^3 \\ t + axt^2 - t^3 & 1 - (abx^2+1)t^2 + bxt^3 \end{pmatrix} \tag{1.16}$$

şeklindedir [15].

**Teorem 1.3.4:** Her $n \in \mathbb{N}$ için, iki periyotlu Fibonacci matris polinomlarının Binet formülü aşağıdaki şekildedir;

$$\mathcal{F}_n(a,b,x) = A_{\xi(n)}(\alpha^n - \beta^n) + B_{\xi(n)}\left(\alpha^{2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2} - \beta^{2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2}\right). \quad (1.17)$$

Burada $\alpha$ ve $\beta$ değerleri $\lambda^2 - (abx^2)\lambda - abx^2 = 0$ karakteristik denkleminin kökleridir. Ayrıca,

$$A_{\xi(n)} = \frac{1}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}(\alpha-\beta)x^{2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}} \times \{\mathcal{F}_1(a,b,x) - bx\mathcal{F}_0(a,b,x)\}^{\xi(n)}$$
$$\times \{ax\mathcal{F}_1(a,b,x) - \mathcal{F}_0(a,b,x) - abx^2\mathcal{F}_0(a,b,x)\}^{1-\xi(n)},$$

$$B_{\xi(n)} = \frac{b^{\xi(n)}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1}(\alpha-\beta)x^{n+2\xi(n+1)}} \times \mathcal{F}_0(a,b,x),$$

şeklindedir. Burada $\xi(n) = n - 2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$ dir [15].

Aşağıdaki sonuçta, iki periyotlu Fibonacci matris polinomları için bazı toplamların elde edilişleri gösterilmektedir.

**Sonuç 1.3.1: [15]** $k \geq 0$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

**i.** $$\sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{F}_k(a,b,x) = \left[\frac{a^{\xi(n)}b^{1-\xi(n)}\mathcal{F}_n + a^{1-\xi(n)}b^{\xi(n)}\mathcal{F}_{n-1} - a\mathcal{F}_1 + abx\mathcal{F}_0 - b\mathcal{F}_0}{abx}\right], \quad (1.18)$$

**ii.** $$\sum_{k=0}^{n}\mathcal{F}_k(a,b,x)t^{-k} = \frac{1}{1-(abx^2+2)t^2+t^4} \quad (1.19)$$
$$\times\left[\frac{\mathcal{F}_{n-1}}{t^{n-1}} - \frac{\mathcal{F}_{n+1}}{t^{n-3}} + \frac{\mathcal{F}_n}{t^n} - \frac{\mathcal{F}_{n+2}}{t^{n-2}} + t^4\mathcal{F}_0 + t^3\mathcal{F}_1 - t^2[(abx^2+1)\mathcal{F}_0 - ax\mathcal{F}_1] - t(\mathcal{F}_1 - bx\mathcal{F}_0)\right].$$

Burada eşitliklerin sağ taraflarında $\mathcal{F}_n(a,b,x) = \mathcal{F}_n$ olarak ele alınmıştır.

**Sonuç 1.3.2: [15]** $k \geq 0$ için (1.19) eşitliğinin bir sonucu olarak aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$\sum_{k=0}^{\infty}\mathcal{F}_k(a,b,x)t^{-k} = \frac{t}{1-(abx^2+2)t^2+t^4}\begin{pmatrix} t^3 + bxt^2 - t & \frac{b}{a}t^2 + bxt - \frac{b}{a} \\ t^2 + axt - 1 & t^3 - (abx^2+1)t + bx \end{pmatrix}. \quad (1.20)$$

**Tanım 1.3.5:** $a$ ve $b$ sıfırdan farklı herhangi iki reel sayı olmak üzere, iki periyotlu Lucas polinomları $\{l_n(a,b,x)\}_{n=0}^{\infty}$ aşağıdaki şekilde tanımlanır;

$$l_n(a,b,x) = \begin{cases} bxl_{n-1}(a,b,x) + l_{n-2}(a,b,x), & n \text{ çift ise} \\ axl_{n-1}(a,b,x) + l_{n-2}(a,b,x), & n \text{ tek ise} \end{cases} \quad n \geq 2, \tag{1.21}$$

burada $l_0(a,b,x) = 2$ ve $l_1(a,b,x) = ax$ başlangıç şartlarıdır [16].

**Teorem 1.3.5:** İki periyotlu Lucas polinomu $\{l_n(a,b,x)\}_{n=0}^{\infty}$ ‘nin üreteç fonksiyonu,

$$\sum_{n=0}^{\infty} l_n(a,b,x)t^n = \frac{2+axt-(abx^2+2)t^2+axt^3}{1-(abx^2+2)t^2+t^4} \tag{1.22}$$

şeklindedir [16].

**Teorem 1.3.6:** İki periyotlu Lucas polinomu $\{l_n(a,b,x)\}_{n=0}^{\infty}$ ‘nin Binet formülü aşağıdaki gibi elde edilir.

$$l_n(a,b,x) = \frac{(ax)^{\xi(n)}(\alpha^n+\beta^n)}{(abx^2)^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor}} \tag{1.23}$$

Burada $\alpha$ ve $\beta$, $\lambda^2 - (abx^2)\lambda - abx^2 = 0$ karakteristik denkleminin kökleridir. Burada $\xi(n) = n - 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ dir [29].

Son olarak hibrit sayılarının tanımından bahsedilecektir.

**Tanım 1.3.6:** $Z$ hibrit sayılarının bir kümesi $\mathbb{K}$ olsun. Bu durumda $Z$ hibrit sayısı,

$$Z = a + b\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{\varepsilon} + d\boldsymbol{h} \tag{1.24}$$

şeklinde verilmiştir. Burada ise $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ ve ayrıca $\boldsymbol{i},\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{h}$ operatörlerinin kendileri ile çarpılması sonucu $\boldsymbol{i}^2 = -1,\ \boldsymbol{\varepsilon}^2 = 0,\ \boldsymbol{h}^2 = 1$ olduğu bilinmektedir [18].

# BÖLÜM 2

## GENELLEŞTİRİLMİŞ FIBONACCI MATRİS HİBRİNOMİYALLERİ

Bu bölümde genelleştirilmiş (iki periyotlu) Fibonacci matris hibrinomiyalleri ve bu matris hibrinomiyallerinin Binet formülü, üreteç fonksiyonu ve bazı toplam formülleri ele alınacaktır. Bu bölümde elde edilen tüm veriler “On the Generalized Fibonacci and Lucas Matrix Hybrinomials” isimli çalışmada verilmiş olup bu makale henüz hakem incelemesindedir [32].

Aşağıdaki tanım iki periyotlu Fibonacci matris hibrinomiyallerini ifade etmektedir.

**Tanım 2.1:** $x$ herhangi bir değişken, $a$ ve $b$ sayıları $\mathbb{R}-\{0\}$ a ait herhangi iki sayı olmak üzere, iki periyotlu Fibonacci matris hibrinomiyali;

$$H\mathcal{F}_n(a,b,x)=\mathcal{F}_n(a,b,x)+\boldsymbol{i}\mathcal{F}_{n+1}(a,b,x)+\boldsymbol{\varepsilon}\mathcal{F}_{n+2}(a,b,x)+\boldsymbol{h}\mathcal{F}_{n+3}(a,b,x), n\in\mathbb{N}_0 \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\mathcal{F}_n(a,b,x)$, iki periyotlu Fibonacci matris polinomudur [32].

**Teorem 2.1:** (2.1) bağıntısında verilen $H\mathcal{F}_n(a,b,x)$, tüm pozitif tamsayılar için aşağıdaki eşitliği sağlar.

$$H\mathcal{F}_n(a,b,x)=\begin{pmatrix}\tilde{\mathcal{F}}_{1,1}(n;a,b,x) & \tilde{\mathcal{F}}_{1,2}(n;a,b,x)\\ \tilde{\mathcal{F}}_{2,1}(n;a,b,x) & \tilde{\mathcal{F}}_{2,2}(n;a,b,x)\end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Burada,

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{F}}_{1,1}(n;a,b,x)=&\left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(n)}q_{n+1}(a,b,x)+\boldsymbol{i}\left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(n+1)}q_{n+2}(a,b,x)\\ &+\boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(n)}q_{n+3}(a,b,x)+\boldsymbol{h}\left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(n+1)}q_{n+4}(a,b,x)\end{aligned}$$

$$\tilde{\mathcal{F}}_{1,2}(n;a,b,x)=\frac{b}{a}\left(q_n(a,b,x)+\boldsymbol{i}q_{n+1}(a,b,x)+\boldsymbol{\varepsilon}q_{n+2}(a,b,x)+\boldsymbol{h}q_{n+3}(a,b,x)\right)$$

$$\tilde{\mathcal{F}}_{2,1}(n;a,b,x)=q_n(a,b,x)+\boldsymbol{i}q_{n+1}(a,b,x)+\boldsymbol{\varepsilon}q_{n+2}(a,b,x)+\boldsymbol{h}q_{n+3}(a,b,x)$$

$$\tilde{\mathcal{F}}_{2,2}(n;a,b,x) = \left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(n)} q_{n-1}(a,b,x) + \boldsymbol{i}\left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(n+1)} q_n(a,b,x)$$
$$+\boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(n)} q_{n+1}(a,b,x) + \boldsymbol{h}\left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(n+1)} q_{n+2}(a,b,x)$$

şeklindedir. Burada $\xi(n) = n - 2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$ dir [32].

*İspat:* İki periyotlu Fibonacci matris hibrinomiyallerinin tanımından,

$$H\mathcal{F}_n(a,b,x) = \mathcal{F}_n(a,b,x) + \boldsymbol{i}\mathcal{F}_{n+1}(a,b,x) + \boldsymbol{\varepsilon}\mathcal{F}_{n+2}(a,b,x) + \boldsymbol{h}\mathcal{F}_{n+3}(a,b,x)$$

olduğu açıktır. Bu tanımda (1.15) eşitliği yerlerine yazılırsa,

$$H\mathcal{F}_n(a,b,x) = \begin{pmatrix} \left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(n)} q_{n+1}(a,b,x) & \frac{b}{a} q_n(a,b,x) \\ q_n(a,b,x) & \left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(n)} q_{n-1}(a,b,x) \end{pmatrix}$$
$$+\boldsymbol{i}\begin{pmatrix} \left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(n+1)} q_{n+2}(a,b,x) & \frac{b}{a} q_{n+1}(a,b,x) \\ q_{n+1}(a,b,x) & \left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(n+1)} q_n(a,b,x) \end{pmatrix}$$
$$+\boldsymbol{\varepsilon}\begin{pmatrix} \left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(n+2)} q_{n+3}(a,b,x) & \frac{b}{a} q_{n+2}(a,b,x) \\ q_{n+2}(a,b,x) & \left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(n+2)} q_{n+1}(a,b,x) \end{pmatrix}$$
$$+\boldsymbol{h}\begin{pmatrix} \left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(n+3)} q_{n+4}(a,b,x) & \frac{b}{a} q_{n+3}(a,b,x) \\ q_{n+3}(a,b,x) & \left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(n+3)} q_{n+2}(a,b,x) \end{pmatrix}$$

elde edilir. Sonuç olarak basit cebirsel işlemler yapılarak ispat tamamlanır.■

Aşağıdaki teorem iki periyotlu Fibonacci matris hibrinomiyalleri için üreteç fonksiyonunu ifade etmektedir.

**Teorem 2.2:** İki periyotlu Fibonacci matris hibrinomiyali için üreteç fonksiyonu;

$$\sum_{n=0}^{\infty} H\mathcal{F}_n(a,b,x)t^n = \frac{1+\boldsymbol{i}\frac{1}{t}+\boldsymbol{\varepsilon}\frac{1}{t^2}+\boldsymbol{h}\frac{1}{t^3}}{1-(abx^2+2)t^2+t^4}\begin{pmatrix} 1+bxt-t^2 & \frac{b}{a}(t+axt^2-t^3) \\ t+axt^2-t^3 & 1-(abx^2+1)t^2+bxt^3 \end{pmatrix}$$
$$-\boldsymbol{i}\frac{1}{t}\mathcal{F}_0(a,b,x)-\boldsymbol{\varepsilon}\frac{1}{t^2}\mathcal{F}_0(a,b,x)-\boldsymbol{\varepsilon}\frac{1}{t}\mathcal{F}_1(a,b,x)$$
$$-\boldsymbol{h}\frac{1}{t^3}\mathcal{F}_0(a,b,x)-\boldsymbol{h}\frac{1}{t^2}\mathcal{F}_1(a,b,x)-\boldsymbol{h}\frac{1}{t}\mathcal{F}_2(a,b,x) \qquad (2.3)$$

şeklindedir [32].

*İspat:* İlk olarak ispat boyunca $\mathcal{F}_n(a,b,x)=\mathcal{F}_n$ alınacaktır. Öncelikle iki periyotlu Fibonacci matris hibrinomiyalinin tanımı kullanılarak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} H\mathcal{F}_n(a,b,x)t^n = \sum_{n=0}^{\infty}(\mathcal{F}_n+\boldsymbol{i}\mathcal{F}_{n+1}+\boldsymbol{\varepsilon}\mathcal{F}_{n+2}+\boldsymbol{h}\mathcal{F}_{n+3})t^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{F}_n t^n+\boldsymbol{i}\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{F}_{n+1}t^n+\boldsymbol{\varepsilon}\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{F}_{n+2}t^n+\boldsymbol{h}\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{F}_{n+3}t^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{F}_n t^n+\boldsymbol{i}\frac{1}{t}\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{F}_n t^n-\boldsymbol{i}\frac{1}{t}\mathcal{F}_0$$
$$+\boldsymbol{\varepsilon}\frac{1}{t^2}\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{F}_n t^n-\boldsymbol{\varepsilon}\frac{1}{t^2}\mathcal{F}_0-\boldsymbol{\varepsilon}\frac{1}{t}\mathcal{F}_1$$
$$+\boldsymbol{h}\frac{1}{t^3}\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{F}_n t^n-\boldsymbol{h}\frac{1}{t^3}\mathcal{F}_0-\boldsymbol{h}\frac{1}{t^2}\mathcal{F}_1-\boldsymbol{h}\frac{1}{t}\mathcal{F}_2$$

elde edilir. (1.16) bağıntısı yerine yazılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} H\mathcal{F}_n(a,b,x)t^n = \frac{1}{1-(abx^2+2)t^2+t^4}\begin{pmatrix} 1+bxt-t^2 & \frac{b}{a}(t+axt^2-t^3) \\ t+axt^2-t^3 & 1-(abx^2+1)t^2+bxt^3 \end{pmatrix}$$
$$+\boldsymbol{i}\frac{1}{t(1-(abx^2+2)t^2+t^4)}\begin{pmatrix} 1+bxt-t^2 & \frac{b}{a}(t+axt^2-t^3) \\ t+axt^2-t^3 & 1-(abx^2+1)t^2+bxt^3 \end{pmatrix}-\boldsymbol{i}\frac{1}{t}\mathcal{F}_0$$
$$+\boldsymbol{\varepsilon}\frac{1}{t^2(1-(abx^2+2)t^2+t^4)}\begin{pmatrix} 1+bxt-t^2 & \frac{b}{a}(t+axt^2-t^3) \\ t+axt^2-t^3 & 1-(abx^2+1)t^2+bxt^3 \end{pmatrix}-\boldsymbol{\varepsilon}\frac{1}{t^2}\mathcal{F}_0-\boldsymbol{\varepsilon}\frac{1}{t}\mathcal{F}_1$$
$$+\boldsymbol{h}\frac{1}{t^3(1-(abx^2+2)t^2+t^4)}\begin{pmatrix} 1+bxt-t^2 & \frac{b}{a}(t+axt^2-t^3) \\ t+axt^2-t^3 & 1-(abx^2+1)t^2+bxt^3 \end{pmatrix}$$

$$-\boldsymbol{h}\frac{1}{t^3}\mathcal{F}_0-\boldsymbol{h}\frac{1}{t^2}\mathcal{F}_1-\boldsymbol{h}\frac{1}{t}\mathcal{F}_2$$

bulunur. Sonuç olarak $\mathcal{F}_n=\mathcal{F}_n(a,b,x)$ yazılırsa aşağıdaki bağıntı elde edilir.

$$\sum_{n=0}^{\infty}H\mathcal{F}_n(a,b,x)t^n=\frac{1+\boldsymbol{i}\frac{1}{t}+\boldsymbol{\varepsilon}\frac{1}{t^2}+\boldsymbol{h}\frac{1}{t^3}}{1-(abx^2+2)t^2+t^4}\begin{pmatrix}1+bxt-t^2 & \frac{b}{a}(t+axt^2-t^3)\\ t+axt^2-t^3 & 1-(abx^2+1)t^2+bxt^3\end{pmatrix}$$
$$-\boldsymbol{i}\frac{1}{t}\mathcal{F}_0(a,b,x)-\boldsymbol{\varepsilon}\frac{1}{t^2}\mathcal{F}_0(a,b,x)-\boldsymbol{\varepsilon}\frac{1}{t}\mathcal{F}_1(a,b,x)$$
$$-\boldsymbol{h}\frac{1}{t^3}\mathcal{F}_0(a,b,x)-\boldsymbol{h}\frac{1}{t^2}\mathcal{F}_1(a,b,x)-\boldsymbol{h}\frac{1}{t}\mathcal{F}_2(a,b,x)$$

Böylece ispat tamamlanır. ■

Aşağıdaki teorem iki periyotlu Fibonacci matris hibrinomiyalleri için Binet formülünü ifade etmektedir.

**Teorem 2.3:** Her $n\in\mathbb{N}$ için, iki periyotlu Fibonacci matris hibrinomiyalinin Binet formülü aşağıdaki şekildedir;

$$H\mathcal{F}_n(a,b,x)=A_{\xi(n)}\left(\alpha^n\underline{\alpha}-\beta^n\underline{\beta}\right)+B_{\xi(n)}\left(\alpha^{2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2}\underline{\alpha}-\beta^{2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2}\underline{\beta}\right)$$
$$+A_{\xi(n+1)}\left(\alpha^{n+1}\underline{\underline{\alpha}}-\beta^{n+1}\underline{\underline{\beta}}\right)+B_{\xi(n+1)}\left(\alpha^{2\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor+2}\underline{\underline{\alpha}}-\beta^{2\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor+2}\underline{\underline{\beta}}\right). \quad (2.4)$$

Burada $\alpha$ ve $\beta$ değerleri $\lambda^2-(abx^2)\lambda-abx^2=0$ karakteristik denkleminin kökleridir. Ayrıca,

$$A_{\xi(n)}=\frac{1}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}(\alpha-\beta)x^{2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}}\times\{\mathcal{F}_1(a,b,x)-bx\mathcal{F}_0(a,b,x)\}^{\xi(n)}$$
$$\times\{ax\mathcal{F}_1(a,b,x)-\mathcal{F}_0(a,b,x)-abx^2\mathcal{F}_0(a,b,x)\}^{1-\xi(n)},$$

$$B_{\xi(n)}=\frac{b^{\xi(n)}}{(ab)^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1}(\alpha-\beta)x^{n+2\xi(n+1)}}\times\mathcal{F}_0(a,b,x),$$

$\underline{\alpha}=1+\varepsilon\alpha^2$, $\underline{\beta}=1+\varepsilon\beta^2$, $\underline{\underline{\alpha}}=i+h\alpha^2$, $\underline{\underline{\beta}}=i+h\beta^2$ şeklindedir. Burada

$\xi(n)=n-2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$ dir [32].

*İspat:* Binet formülünün ispatı için $n$ ‘in çift ve tek olması durumları ayrı ayrı incelenecektir. Bunun için (1.17) ile verilen iki periyotlu Fibonacci matris polinomunun Binet formülü kullanılacaktır.

**$n = 2k$ (çift) olması durumu:**

$k \in \mathbb{N}_0$ için,

$$H\mathcal{F}_{2k}(a,b,x) = \mathcal{F}_{2k}(a,b,x) + \boldsymbol{i}\,\mathcal{F}_{2k+1}(a,b,x) + \boldsymbol{\varepsilon}\mathcal{F}_{2k+2}(a,b,x) + \boldsymbol{h}\mathcal{F}_{2k+3}(a,b,x)$$

$$\begin{aligned} H\mathcal{F}_{2k}(a,b,x) = {} & A_0(\alpha^{2k} - \beta^{2k}) + B_0(\alpha^{2k+2} - \beta^{2k+2}) \\ & +\boldsymbol{i}\Big(A_1(\alpha^{2k+1} - \beta^{2k+1}) + B_1(\alpha^{2k+2} - \beta^{2k+2})\Big) \\ & +\boldsymbol{\varepsilon}\Big(A_0(\alpha^{2k+2} - \beta^{2k+2}) + B_0(\alpha^{2k+4} - \beta^{2k+4})\Big) \\ & +\boldsymbol{h}\Big(A_1(\alpha^{2k+3} - \beta^{2k+3}) + B_1(\alpha^{2k+4} - \beta^{2k+4})\Big) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H\mathcal{F}_{2k}(a,b,x) = {} & A_0\alpha^{2k}(1 + \boldsymbol{\varepsilon}\alpha^2) - A_0\beta^{2k}(1 + \boldsymbol{\varepsilon}\beta^2) + B_0\alpha^{2k+2}(1 + \boldsymbol{\varepsilon}\alpha^2) \\ & -B_0\beta^{2k+2}(1 + \boldsymbol{\varepsilon}\beta^2) + A_1\alpha^{2k+1}(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{h}\alpha^2) - A_1\beta^{2k+1}(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{h}\beta^2) \\ & +B_1\alpha^{2k+2}(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{h}\alpha^2) - B_1\beta^{2k+2}(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{h}\beta^2) \end{aligned}$$

Burada $\underline{\alpha}$, $\underline{\beta}$, $\underline{\underline{\alpha}}$ ve $\underline{\underline{\beta}}$ ifadeleri aşağıdaki gibi seçilirse,

$$\underline{\alpha} = 1 + \boldsymbol{\varepsilon}\alpha^2,\ \underline{\beta} = 1 + \boldsymbol{\varepsilon}\beta^2,\ \underline{\underline{\alpha}} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{h}\alpha^2,\ \underline{\underline{\beta}} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{h}\beta^2$$

olur. Buradan sonuç olarak

$$\begin{aligned} H\mathcal{F}_{2k}(a,b,x) = {} & A_0(\alpha^{2k}\underline{\alpha} - \beta^{2k}\underline{\beta}) + B_0(\alpha^{2k+2}\underline{\alpha} - \beta^{2k+2}\underline{\beta}) \\ & +A_1(\alpha^{2k+1}\,\underline{\underline{\alpha}} - \beta^{2k+1}\underline{\underline{\beta}} + B_1(\alpha^{2k+2}\,\underline{\underline{\alpha}} - \beta^{2k+2}\underline{\underline{\beta}}) \end{aligned} \tag{2.5}$$

elde edilir. Benzer şekilde $H\mathcal{F}_{2k+1}(a,b,x)$ ifadesi de elde edilmelidir.

**$n = 2k+1$ (tek) olması durumu:**

$k \in \mathbb{N}_0$ için,

$$H\mathcal{F}_{2k+1}(a,b,x) = \mathcal{F}_{2k+1}(a,b,x) + \boldsymbol{i}\,\mathcal{F}_{2k+2}(a,b,x) + \boldsymbol{\varepsilon}\mathcal{F}_{2k+3}(a,b,x) + \boldsymbol{h}\mathcal{F}_{2k+4}(a,b,x)$$

$$
\begin{aligned}
H\mathcal{F}_{2k+1}(a,b,x) = {} & A_1(\alpha^{2k+1}-\beta^{2k+1}) + B_1(\alpha^{2k+2}-\beta^{2k+2}) \\
& +\boldsymbol{i}\Big(A_0(\alpha^{2k+2}-\beta^{2k+2}) + B_0(\alpha^{2k+4}-\beta^{2k+4})\Big) \\
& +\boldsymbol{\varepsilon}\Big(A_1(\alpha^{2k+3}-\beta^{2k+3}) + B_1(\alpha^{2k+4}-\beta^{2k+4})\Big) \\
& +\boldsymbol{h}\Big(A_0(\alpha^{2k+4}-\beta^{2k+4}) + B_0(\alpha^{2k+6}-\beta^{2k+6})\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H\mathcal{F}_{2k+1}(a,b,x) = {} & A_1\alpha^{2k+1}(1+\boldsymbol{\varepsilon}\alpha^2) - A_1\beta^{2k+1}(1+\boldsymbol{\varepsilon}\beta^2) + B_1\alpha^{2k+2}(1+\boldsymbol{\varepsilon}\alpha^2) \\
& -B_1\beta^{2k+2}(1+\boldsymbol{\varepsilon}\beta^2) + A_0\alpha^{2k+2}(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{h}\alpha^2) - A_0\beta^{2k+2}(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{h}\beta^2) \\
& +B_0\alpha^{2k+4}(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{h}\alpha^2) - B_0\beta^{2k+4}(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{h}\beta^2)
\end{aligned}
$$

Burada $\underline{\alpha}$, $\underline{\beta}$, $\underline{\underline{\alpha}}$ve $\underline{\underline{\beta}}$ ifadeleri aşağıdaki gibi seçilirse,

$$\underline{\alpha} = 1+\boldsymbol{\varepsilon}\alpha^2,\ \ \underline{\beta} = 1+\boldsymbol{\varepsilon}\beta^2,\ \underline{\underline{\alpha}} = \boldsymbol{i}+\boldsymbol{h}\alpha^2,\ \ \underline{\underline{\beta}} = \boldsymbol{i}+\boldsymbol{h}\beta^2$$

olur. Buradan sonuç olarak

$$
\begin{aligned}
H\mathcal{F}_{2k+1}(a,b,x) = {} & A_1\left(\alpha^{2k+1}\underline{\alpha}-\beta^{2k+1}\underline{\beta}\right) + B_1\left(\alpha^{2k+2}\underline{\alpha}-\beta^{2k+2}\underline{\beta}\right) \\
& +A_0(\alpha^{2k+2}\,\underline{\underline{\alpha}}-\beta^{2k+2}\underline{\underline{\beta}}) + B_0(\alpha^{2k+4}\,\underline{\underline{\alpha}}-\beta^{2k+4}\underline{\underline{\beta}}). \qquad (2.6)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Sonuç olarak elde edilen Denklem (2.5) ve Denklem (2.6) ‘daki eşitlikler tek bir eşitlik ile ifade edilmek istenirse,

$$
\begin{aligned}
H\mathcal{F}_{n}(a,b,x) = {} & A_{\xi(n)}\left(\alpha^{n}\underline{\alpha}-\beta^{n}\underline{\beta}\right) + B_{\xi(n)}\left(\alpha^{2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2}\underline{\alpha}-\beta^{2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2}\underline{\beta}\right) \\
& +A_{\xi(n+1)}\left(\alpha^{n+1}\underline{\underline{\alpha}}-\beta^{n+1}\underline{\underline{\beta}}\right) + B_{\xi(n+1)}\left(\alpha^{2\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor+2}\underline{\underline{\alpha}}-\beta^{2\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor+2}\underline{\underline{\beta}}\right)
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir ki bu da ispatı tamamlar. ■

Aşağıdaki sonuçta, iki periyotlu Fibonacci matris hibrinomiyalleri için bazı toplamların elde edilişleri gösterilmektedir.

**Sonuç 2.1: [32]** $k \geq 0$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

**i.** $\sum_{k=0}^{n-1} H\mathcal{F}_k(a,b,x) = (1+\boldsymbol{i}+\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{h})\left[\frac{a^{\xi(n)}b^{1-\xi(n)}\mathcal{F}_n + a^{1-\xi(n)}b^{\xi(n)}\mathcal{F}_{n-1} - a\mathcal{F}_1 + abx\mathcal{F}_0 - b\mathcal{F}_0}{abx}\right]$

$-(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{h})(\mathcal{F}_0 - \mathcal{F}_n) - (\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{h})(\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_{n+1}) - \boldsymbol{h}(\mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_{n+2}),$

**ii.** $\sum_{k=0}^{n} H\mathcal{F}_k(a,b,x)t^{-k} = \frac{(1+\boldsymbol{i}t+\boldsymbol{\varepsilon}t^2+\boldsymbol{h}t^3)}{1-(abx^2+2)t^2+t^4}$

$\times\left[\frac{\mathcal{F}_{n-1}}{t^{n-1}} - \frac{\mathcal{F}_{n+1}}{t^{n-3}} + \frac{\mathcal{F}_n}{t^n} - \frac{\mathcal{F}_{n+2}}{t^{n-2}} + t^4\mathcal{F}_0 + t^3\mathcal{F}_1 - t^2[(abx^2+1)\mathcal{F}_0 - ax\mathcal{F}_1] - t(\mathcal{F}_1 - bx\mathcal{F}_0)\right]$

$-(\boldsymbol{i}t+\boldsymbol{\varepsilon}t^2+\boldsymbol{h}t^3)\left(\mathcal{F}_0 - \mathcal{F}_{n+1}t^{-(n+1)}\right) - (\boldsymbol{\varepsilon}t^2+\boldsymbol{h}t^3)\left(\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_{n+2}t^{-(n+2)}\right)$

$-\boldsymbol{h}t^3\left(\mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_{n+3}t^{-(n+3)}\right),$

**iii.** $\sum_{k=0}^{\infty} H\mathcal{F}_k(a,b,x)t^{-k} = \frac{t(1+\boldsymbol{i}t+\boldsymbol{\varepsilon}t^2+\boldsymbol{h}t^3)}{1-(abx^2+2)t^2+t^4}\begin{pmatrix} t^3+bxt^2-t & \frac{b}{a}t^2+bxt-\frac{b}{a} \\ t^2+axt-1 & t^3-(abx^2+1)t+bx \end{pmatrix}$

$-(\boldsymbol{i}t+\boldsymbol{\varepsilon}t^2+\boldsymbol{h}t^3)\mathcal{F}_0 - (\boldsymbol{\varepsilon}t+\boldsymbol{h}t^2)\mathcal{F}_1 - \boldsymbol{h}t\mathcal{F}_2.$

*İspat:* Öncelikle (i) maddesinin ispatı ile başlanacaktır. İspat boyunca $\mathcal{F}_k(a,b,x) = \mathcal{F}_k$ alınacaktır. İki periyotlu Fibonacci matris hibrinomiyallerin tanımından faydalanarak ve bazı cebirsel işlemler yardımıyla,

$$\sum_{k=0}^{n-1} H\mathcal{F}_k(a,b,x) = \sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{F}_k + \boldsymbol{i}\sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{F}_{k+1} + \boldsymbol{\varepsilon}\sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{F}_{k+2} + \boldsymbol{h}\sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{F}_{k+3}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{F}_k + \boldsymbol{i}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{F}_k - \mathcal{F}_0 + \mathcal{F}_n\right)$$

$$+\boldsymbol{\varepsilon}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{F}_k - \mathcal{F}_0 - \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_n + \mathcal{F}_{n+1}\right)$$

$$+\boldsymbol{h}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{F}_k - \mathcal{F}_0 - \mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_n + \mathcal{F}_{n+1} + \mathcal{F}_{n+2}\right)$$

$$= (1+\boldsymbol{i}+\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{h})\sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{F}_k - (\boldsymbol{i}+\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{h})(\mathcal{F}_0 - \mathcal{F}_n)$$

$$-(\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{h})(\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_{n+1}) - \boldsymbol{h}(\mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_{n+2})$$

elde edilir. Sonuç olarak $\sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{F}_k = \frac{a^{\xi(n)}b^{1-\xi(n)}\mathcal{F}_n + a^{1-\xi(n)}b^{\xi(n)}\mathcal{F}_{n-1} - a\mathcal{F}_1 + abx\mathcal{F}_0 - b\mathcal{F}_0}{abx}$ ifadesi yerine yazılırsa (i) maddesinin sağlandığı açıkça görülür. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi (ii) maddesinin ispatı ele alınacaktır. Yine (i) maddesine benzer şekilde, iki periyotlu Fibonacci matris hibrinomiyallerin tanımından faydalanarak ve bazı cebirsel işlemler yardımıyla,

$$\sum_{k=0}^{n} H\mathcal{F}_k(a,b,x)t^{-k} = \sum_{k=0}^{n}\mathcal{F}_k t^{-k} + \boldsymbol{i}\sum_{k=0}^{n}\mathcal{F}_{k+1}t^{-k} + \boldsymbol{\varepsilon}\sum_{k=0}^{n}\mathcal{F}_{k+2}t^{-k}$$

$$+\boldsymbol{h}\sum_{k=0}^{n}\mathcal{F}_{k+3}t^{-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\mathcal{F}_k t^{-k} + \boldsymbol{i}\mathrm{t}\sum_{k=0}^{n}\mathcal{F}_{k+1}t^{-(k+1)} + \boldsymbol{\varepsilon}t^2\sum_{k=0}^{n}\mathcal{F}_{k+2}t^{-(k+2)}$$

$$+\boldsymbol{h}t^3\sum_{k=0}^{n}\mathcal{F}_{k+3}t^{-(k+3)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\mathcal{F}_k t^{-k} + \boldsymbol{i}t\left(\sum_{k=0}^{n}\mathcal{F}_k t^{-k} - \mathcal{F}_0 + \mathcal{F}_{n+1}t^{-(n+1)}\right)$$

$$+\boldsymbol{\varepsilon}t^2(\sum_{k=0}^{n}\mathcal{F}_k t^{-k} - \mathcal{F}_0 - \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_{n+1}t^{-(n+1)} + \mathcal{F}_{n+2}t^{-(n+2)})$$

$$+\boldsymbol{h}t^3(\sum_{k=0}^{n}\mathcal{F}_k t^{-k} - \mathcal{F}_0 - \mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2)$$

$$+\boldsymbol{h}t^3(\mathcal{F}_{n+1}t^{-(n+1)} + \mathcal{F}_{n+2}t^{-(n+2)} + \mathcal{F}_{n+3}t^{-(n+3)})$$

$$= (1 + \boldsymbol{i}t + \boldsymbol{\varepsilon}t^2 + \boldsymbol{h}t^3)(\sum_{k=0}^{n}\mathcal{F}_k t^{-k}) - (\boldsymbol{i}t + \boldsymbol{\varepsilon}t^2 + \boldsymbol{h}t^3)\left(\mathcal{F}_0 - \mathcal{F}_{n+1}t^{-(n+1)}\right)$$

$$-(\boldsymbol{\varepsilon}t^2 + \boldsymbol{h}t^3)\left(\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_{n+2}t^{-(n+2)}\right) - \boldsymbol{h}t^3\left(\mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_{n+3}t^{-(n+3)}\right),$$

Sonuç olarak $\sum_{k=0}^{n}\mathcal{F}_k t^{-k} = \frac{1}{1-(abx^2+2)t^2+t^4}\left[\frac{\mathcal{F}_{n-1}}{t^{n-1}} - \frac{\mathcal{F}_{n+1}}{t^{n-3}} + \frac{\mathcal{F}_n}{t^n} - \frac{\mathcal{F}_{n+2}}{t^{n-2}} + t^4\mathcal{F}_0 + t^3\mathcal{F}_1 - t^2[(abx^2+1)\mathcal{F}_0 - ax\mathcal{F}_1] - t(\mathcal{F}_1 - bx\mathcal{F}_0)\right]$ ifadesi yerine yazılırsa (ii) maddesinin sağlandığı açıkça görülür. Böylece ispat tamamlanır.

Son olarak (iii) maddesinin ispatı verilecektir. İki periyotlu Fibonacci matris hibrinomiyallerin tanımından faydalanarak ve bazı cebirsel işlemler yardımıyla,

$$\sum_{k=0}^{\infty} H\mathcal{F}_k(a,b,x)t^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty}(\mathcal{F}_k + \boldsymbol{i}\mathcal{F}_{k+1} + \boldsymbol{\varepsilon}\mathcal{F}_{k+2} + \boldsymbol{h}\mathcal{F}_{k+3})t^{-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\mathcal{F}_k t^{-k} + \boldsymbol{i}\sum_{k=0}^{\infty}\mathcal{F}_{k+1}t^{-k} + \boldsymbol{\varepsilon}\sum_{k=0}^{\infty}\mathcal{F}_{k+2}t^{-k}$$

$$+\boldsymbol{h}\sum_{k=0}^{\infty}\mathcal{F}_{k+3}t^{-k}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\mathcal{F}_{k}t^{-k}+\boldsymbol{it}\sum_{k=0}^{\infty}\mathcal{F}_{k+1}t^{-(k+1)}+\boldsymbol{\varepsilon}t^{2}\sum_{k=0}^{\infty}\mathcal{F}_{k+2}t^{-(k+2)}$$

$$+\boldsymbol{h}t^{3}\sum_{k=0}^{\infty}\mathcal{F}_{k+3}t^{-(k+3)}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\mathcal{F}_{k}t^{-k}+\boldsymbol{it}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\mathcal{F}_{k}t^{-k}-\mathcal{F}_{0}\right)$$

$$+\boldsymbol{\varepsilon}t^{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\mathcal{F}_{k}t^{-k}-\mathcal{F}_{0}-\mathcal{F}_{1}t^{-1}\right)$$

$$+\boldsymbol{h}t^{3}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\mathcal{F}_{k}t^{-k}-\mathcal{F}_{0}-\mathcal{F}_{1}t^{-1}-\mathcal{F}_{2}t^{-2}\right)$$

$$=(1+\boldsymbol{i}t+\boldsymbol{\varepsilon}t^{2}+\boldsymbol{h}t^{3})\sum_{k=0}^{\infty}\mathcal{F}_{k}t^{-k}-(\boldsymbol{i}t+\boldsymbol{\varepsilon}t^{2}+\boldsymbol{h}t^{3})\mathcal{F}_{0}-(\boldsymbol{\varepsilon}t+\boldsymbol{h}t^{2})\mathcal{F}_{1}-\boldsymbol{h}t\mathcal{F}_{2}.$$

Sonuç olarak

$$\sum_{k=0}^{\infty}\mathcal{F}_{k}t^{-k}=\frac{\mathrm{t}}{1-(abx^{2}+2)t^{2}+t^{4}}\begin{pmatrix} t^{3}+bxt^{2}-t & \frac{b}{a}t^{2}+bxt-\frac{b}{a} \\ t^{2}+axt-1 & t^{3}-(abx^{2}+1)t+bx \end{pmatrix}$$

ifadesi yerine yazılırsa ispat tamamlanır. ■

## BÖLÜM 3

## GENELLEŞTİRİLMİŞ LUCAS MATRİS HİBRİNOMİYALLERİ

Bu bölümde genelleştirilmiş (iki periyotlu) Lucas matris hibrinomiyalleri ve bu matris hibrinomiyallerinin Binet formülü, üreteç fonksiyonu ve bazı önemli toplam formülleri ele alınacaktır. Fakat bu matris hibrinomiyallerini tanımlayabilmek için öncelikle iki periyotlu Lucas matris polinomlarını tanımlamak gerekmektedir. Bu bölümde elde edilen tüm veriler “On the Generalized Fibonacci and Lucas Matrix Hybrinomials” isimli çalışmada verilmiş olup bu makale henüz hakem incelemesindedir [32].

Bu bölümde asıl incelecek olan iki periyotlu Lucas matris hibrinomiyalleri tanımına geçmeden önce genelleştirilmiş (iki periyotlu) Lucas matris polinomları hakkında bilgi verilmelidir.

### 3.1. Genelleştirilmiş Lucas Matris Polinomları

İlk olarak iki periyotlu Lucas matris polinomunun tanımı verilecektir.

**Tanım 3.1.1:** $n \in \mathbb{N}$ ve $a$ ve $b$ sıfırdan farklı herhangi iki reel sayı olmak üzere, iki periyotlu Lucas matris polinomu $(\mathcal{L}_n(a,b,x))$;

$$\mathcal{L}_n(a,b,x) = \begin{cases} bx\mathcal{L}_{n-1}(a,b,x) + \mathcal{L}_{n-2}(a,b,x), & n \text{ çift ise} \\ ax\mathcal{L}_{n-1}(a,b,x) + \mathcal{L}_{n-2}(a,b,x), & n \text{ tek ise} \end{cases} \tag{3.1}$$

başlangıç şartları $\mathcal{L}_0(a,b,x) = \begin{pmatrix} ax & 2 \\ 2\frac{a}{b} & -ax \end{pmatrix}$ ve $\mathcal{L}_1(a,b,x) = \begin{pmatrix} (ax)^2 + 2\frac{a}{b} & ax \\ \frac{a^2x}{b} & 2\frac{a}{b} \end{pmatrix}$ ile yukarıdaki şekilde tanımlanır. Buna ek olarak iki periyotlu Lucas matris polinomu $(\mathcal{L}_n(a,b,x))$

$$\mathcal{L}_n(a,b,x) = \begin{pmatrix} \left(\frac{a}{b}\right)^{\xi(n)} l_{n+1}(a,b,x) & l_n(a,b,x) \\ \left(\frac{a}{b}\right) l_n(a,b,x) & \left(\frac{a}{b}\right)^{\xi(n)} l_{n-1}(a,b,x) \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

olarak ifade edilebilir. Burada $l_n(a,b,x)$ ile gösterilen ifade (1.21) bağıntısında verilen iki periyotlu Lucas polinomudur. Burada $\xi(n) = n - 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ dir [32].

**Teorem 3.1.1:** İki periyotlu Lucas matris polinomları için Binet formülü aşağıdaki gibidir.

$$\mathcal{L}_n(a,b,x) = \frac{\alpha^{n-1}\,\bar{A}_{\xi(n)} + \beta^{n-1}\bar{B}_{\xi(n)}}{(abx^2)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}}. \tag{3.3}$$

Burada

$$\bar{A}_{\xi(n)} = \begin{pmatrix} (ax)^{\xi(n+1)}\left(\frac{a}{b}\right)^{\xi(n)}\frac{\alpha^2}{abx^2} & \left(\frac{ax}{abx^2}\right)^{\xi(n)}\alpha \\ \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{ax}{abx^2}\right)^{\xi(n)}\alpha & (ax)^{\xi(n+1)}\left(\frac{a}{b}\right)^{\xi(n)} \end{pmatrix}$$

ve

$$\bar{B}_{\xi(n)} = \begin{pmatrix} (ax)^{\xi(n+1)}\left(\frac{a}{b}\right)^{\xi(n)}\frac{\beta^2}{abx^2} & \left(\frac{ax}{abx^2}\right)^{\xi(n)}\beta \\ \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{ax}{abx^2}\right)^{\xi(n)}\beta & (ax)^{\xi(n+1)}\left(\frac{a}{b}\right)^{\xi(n)} \end{pmatrix}$$

olarak verilmiştir. Ayrıca $\alpha$ ve $\beta$, $\lambda^2 - (abx^2)\lambda - abx^2 = 0$ karakteristik denkleminin kökleridir. Burada $\xi(n) = n - 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ dir [32].

*İspat:* Binet formülünün ispatı için $n$ 'in çift ve tek olması durumları ayrı ayrı incelenecektir. Bunun için denklem (3.1)'de verilen iki periyotlu Lucas polinomunun Binet formülü kullanılacaktır.

**$n = 2k$ (çift) olması durumu:**

$k \in \mathbb{N}_0$ için,

$$\mathcal{L}_{2k}(a,b,x) = \begin{pmatrix} \left(\frac{a}{b}\right)^{\xi(2k)} l_{2k+1}(a,b,x) & l_{2k}(a,b,x) \\ \left(\frac{a}{b}\right) l_{2k}(a,b,x) & \left(\frac{a}{b}\right)^{\xi(2k)} l_{2k-1}(a,b,x) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \left(\frac{a}{b}\right)\frac{(ax)^{\xi(2k+1)}(\alpha^{2k+1}+\beta^{2k+1})}{(abx^2)^{\left\lfloor \frac{2k+2}{2} \right\rfloor}} & \frac{(ax)^{\xi(2k)}(\alpha^{2k}+\beta^{2k})}{(abx^2)^{\left\lfloor \frac{2k+1}{2} \right\rfloor}} \\ \left(\frac{a}{b}\right)\frac{(ax)^{\xi(2k)}(\alpha^{2k}+\beta^{2k})}{(abx^2)^{\left\lfloor \frac{2k+1}{2} \right\rfloor}} & \left(\frac{a}{b}\right)\frac{(ax)^{\xi(2k-1)}(\alpha^{2k-1}+\beta^{2k-1})}{(abx^2)^{\left\lfloor \frac{2k}{2} \right\rfloor}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \left(\frac{a}{b}\right)\frac{(ax)(\alpha^{2k+1}+\beta^{2k+1})}{(abx^2)^{k+1}} & \frac{(\alpha^{2k}+\beta^{2k})}{(abx^2)^k} \\ \left(\frac{a}{b}\right)\frac{(\alpha^{2k}+\beta^{2k})}{(abx^2)^k} & \left(\frac{a}{b}\right)\frac{(ax)(\alpha^{2k-1}+\beta^{2k-1})}{(abx^2)^k} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\alpha^{2k-1}}{(abx^2)^k}\begin{pmatrix} \frac{(ax)\alpha^2}{abx^2} & \alpha \\ \left(\frac{a}{b}\right)\alpha & ax \end{pmatrix} + \frac{\beta^{2k-1}}{(abx^2)^k}\begin{pmatrix} \frac{(ax)\beta^2}{abx^2} & \beta \\ \left(\frac{a}{b}\right)\beta & ax \end{pmatrix}$$

bulunur. Burada $\bar{A}_0 = \begin{pmatrix} \frac{(ax)\alpha^2}{abx^2} & \alpha \\ \left(\frac{a}{b}\right)\alpha & ax \end{pmatrix}$ ve $\bar{B}_0 = \begin{pmatrix} \frac{(ax)\beta^2}{abx^2} & \beta \\ \left(\frac{a}{b}\right)\beta & ax \end{pmatrix}$ olarak seçilirse

$$\mathcal{L}_{2k}(a,b,x) = \frac{\alpha^{2k-1}\bar{A}_0+\beta^{2k-1}\bar{B}_0}{(abx^2)^k} \tag{3.4}$$

elde edilir.

<u>$\boldsymbol{n = 2k+1}$ $\boldsymbol{(tek)}$ ***olması durumu***:</u>

$k \in \mathbb{N}_0$ için,

$$\mathcal{L}_{2k+1}(a,b,x) = \begin{pmatrix} \left(\frac{a}{b}\right)^{\xi(2k+1)} l_{2k+2}(a,b,x) & l_{2k+1}(a,b,x) \\ \left(\frac{a}{b}\right) l_{2k+1}(a,b,x) & \left(\frac{a}{b}\right)^{\xi(2k+1)} l_{2k}(a,b,x) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \left(\frac{a}{b}\right)\frac{(ax)^{\xi(2k+2)}(\alpha^{2k+2}+\beta^{2k+2})}{(abx^2)^{\left\lfloor\frac{2k+3}{2}\right\rfloor}} & \frac{(ax)^{\xi(2k+1)}(\alpha^{2k+1}+\beta^{2k+1})}{(abx^2)^{\left\lfloor\frac{2k+2}{2}\right\rfloor}} \\ \left(\frac{a}{b}\right)\frac{(ax)^{\xi(2k+1)}(\alpha^{2k+1}+\beta^{2k+1})}{(abx^2)^{\left\lfloor\frac{2k+2}{2}\right\rfloor}} & \left(\frac{a}{b}\right)\frac{(ax)^{\xi(2k)}(\alpha^{2k}+\beta^{2k})}{(abx^2)^{\left\lfloor\frac{2k+1}{2}\right\rfloor}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \left(\frac{a}{b}\right)\frac{(\alpha^{2k+2}+\beta^{2k+2})}{(abx^2)^{k+1}} & \frac{(ax)(\alpha^{2k+1}+\beta^{2k+1})}{(abx^2)^{k+1}} \\ \left(\frac{a}{b}\right)\frac{(ax)(\alpha^{2k+1}+\beta^{2k+1})}{(abx^2)^{k+1}} & \left(\frac{a}{b}\right)\frac{(\alpha^{2k}+\beta^{2k})}{(abx^2)^k} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\alpha^{2k}}{(abx^2)^k}\begin{pmatrix} \left(\frac{a}{b}\right)\frac{\alpha^2}{abx^2} & \frac{(ax)\alpha}{abx^2} \\ \left(\frac{a}{b}\right)\frac{(ax)\alpha}{abx^2} & \left(\frac{a}{b}\right) \end{pmatrix} + \frac{\beta^{2k}}{(abx^2)^k}\begin{pmatrix} \left(\frac{a}{b}\right)\frac{\beta}{abx^2} & \frac{(ax)\beta}{abx^2} \\ \left(\frac{a}{b}\right)\frac{(ax)\beta}{abx^2} & \left(\frac{a}{b}\right) \end{pmatrix}$$

bulunur. Burada $\bar{A}_1 = \begin{pmatrix} \left(\frac{a}{b}\right)\frac{\alpha^2}{abx^2} & \frac{(ax)\alpha}{abx^2} \\ \left(\frac{a}{b}\right)\frac{(ax)\alpha}{abx^2} & \left(\frac{a}{b}\right) \end{pmatrix}$ ve $\bar{B}_1 = \begin{pmatrix} \left(\frac{a}{b}\right)\frac{\beta}{abx^2} & \frac{(ax)\beta}{abx^2} \\ \left(\frac{a}{b}\right)\frac{(ax)\beta}{abx^2} & \left(\frac{a}{b}\right) \end{pmatrix}$ olarak seçilirse

$$\mathcal{L}_{2k+1}(a,b,x) = \frac{\alpha^{2k}\bar{A}_1+\beta^{2k}\bar{B}_1}{(abx^2)^k} \tag{3.5}$$

elde edilir.

Sonuç olarak elde edilen Denklem (3.4) ve Denklem (3.5) ‘deki eşitlikler tek bir eşitlik ile ifade edilmek istenirse, iki periyotlu Lucas matris polinomları için Binet formülü,

$$\mathcal{L}_n(a,b,x) = \frac{\alpha^{n-1}\,\bar{A}_{\xi(n)}+\beta^{n-1}\bar{B}_{\xi(n)}}{(abx^2)^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}},$$

şeklinde elde edilir. Burada

$$\bar{A}_{\xi(n)} = \begin{pmatrix} (ax)^{\xi(n+1)}\left(\frac{a}{b}\right)^{\xi(n)}\frac{\alpha^2}{abx^2} & \left(\frac{ax}{abx^2}\right)^{\xi(n)}\alpha \\ \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{ax}{abx^2}\right)^{\xi(n)}\alpha & (ax)^{\xi(n+1)}\left(\frac{a}{b}\right)^{\xi(n)} \end{pmatrix}$$

ve

$$\bar{B}_{\xi(n)} = \begin{pmatrix} (ax)^{\xi(n+1)}\left(\frac{a}{b}\right)^{\xi(n)}\frac{\beta^2}{abx^2} & \left(\frac{ax}{abx^2}\right)^{\xi(n)}\beta \\ \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{ax}{abx^2}\right)^{\xi(n)}\beta & (ax)^{\xi(n+1)}\left(\frac{a}{b}\right)^{\xi(n)} \end{pmatrix}$$

olarak verilmiştir. Böylece ispat tamamlanmıştır. ■

**Teorem 3.1.2:** İki periyotlu Lucas matris polinomları için üreteç fonksiyonu

$$\sum_{i=0}^{\infty}\mathcal{L}_i(a,b,x)t^i = \frac{1}{1-(abx^2+2)t^2+t^4}$$

$$\times\begin{pmatrix} ax+\left(a^2x^2+2\frac{a}{b}\right)t+axt^2-2\frac{a}{b}t^3 & 2+axt-(abx^2+2)t^2+axt^3 \\ 2\frac{a}{b}+\frac{a^2x}{b}t-\left(a^2x^2+2\frac{a}{b}\right)t^2+\frac{a^2x}{b}t^3 & -ax+2\frac{a}{b}t+(3ax+a^2bx^3)t^2-t^3\left(a^2x^2+2\frac{a}{b}\right) \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

şeklindedir [32].

*İspat:* İki periyotlu Lucas matris polinomları için üreteç fonksiyonu $F(t)$ olsun. Bu durumda

$$(1-axt-t^2)F(t) = \mathcal{L}_0(a,b,x)+t(\mathcal{L}_1(a,b,x)-ax\mathcal{L}_0(a,b,x)) + \sum_{i=2}^{\infty}(\mathcal{L}_i(a,b,x)-ax\mathcal{L}_{i-1}(a,b,x)-\mathcal{L}_{i-2}(a,b,x))t^i$$

elde edilir. $\mathcal{L}_{2i+1}(a,b,x)=ax\mathcal{L}_{2i}(a,b,x)+\mathcal{L}_{2i-1}(a,b,x)$ bağıntısından

$$\begin{aligned}(1-axt-t^2)F(t) &= \mathcal{L}_0(a,b,x)+t(\mathcal{L}_1(a,b,x)-ax\mathcal{L}_0(a,b,x)) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{\infty}(\mathcal{L}_{2i}(a,b,x)-ax\mathcal{L}_{2i-1}(a,b,x)-\mathcal{L}_{2i-2}(a,b,x))t^{2i} \\ &= \mathcal{L}_0(a,b,x)+t(\mathcal{L}_1(a,b,x)-ax\mathcal{L}_0(a,b,x)) \\ &\quad +(b-a)xt\sum_{i=1}^{\infty}\mathcal{L}_{2i-1}(a,b,x)t^{2i-1}.\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi

$f(t)=\sum_{i=1}^{\infty}\mathcal{L}_{2i-1}(a,b,x)t^{2i-1}$

ifadesini ele alalım.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{2i+1}(a,b,x) &= ax\mathcal{L}_{2i}(a,b,x)+\mathcal{L}_{2i-1}(a,b,x) \\ &= ax(bx\mathcal{L}_{2i-1}(a,b,x)+\mathcal{L}_{2i-2}(a,b,x))+\mathcal{L}_{2i-1}(a,b,x) \\ &= (abx^2+1)\mathcal{L}_{2i-1}(a,b,x)+ax\mathcal{L}_{2i-2}(a,b,x) \\ &= (abx^2+1)\mathcal{L}_{2i-1}(a,b,x)+\mathcal{L}_{2i-1}(a,b,x)-\mathcal{L}_{2i-3}(a,b,x) \\ &= (abx^2+2)\mathcal{L}_{2i-1}(a,b,x)-\mathcal{L}_{2i-3}(a,b,x),\end{aligned}$$

elde edilir.

$$(1-(abx^2+2)t^2+t^4)f(t)=\mathcal{L}_1(a,b,x)t+\mathcal{L}_3(a,b,x)t^3-(abx^2+2)\mathcal{L}_1(a,b,x)t^3$$

Buradan,

$$\begin{aligned}f(t) &= \frac{\mathcal{L}_1(a,b,x)t+\mathcal{L}_3(a,b,x)t^3-(abx^2+2)\mathcal{L}_1(a,b,x)t^3}{1-(abx^2+2)t^2+t^4} \\ &= \frac{\mathcal{L}_1(a,b,x)t+(ax\mathcal{L}_0(a,b,x)-\mathcal{L}_1(a,b,x))t^3}{1-(abx^2+2)t^2+t^4}\end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak elde edilen tüm veriler yerlerine yazılırsa;

$$F(t)=\frac{\mathcal{L}_0(a,b,x)+t\mathcal{L}_1(a,b,x)+t^2\left(bx\mathcal{L}_1(a,b,x)-\mathcal{L}_0(a,b,x)-abx^2\mathcal{L}_0(a,b,x)\right)+t^3(ax\mathcal{L}_0(a,b,x)-\mathcal{L}_1(a,b,x))}{1-(abx^2+2)t^2+t^4}$$

bulunur. $\mathcal{L}_0(a,b,x)=\begin{pmatrix} ax & 2 \\ 2\frac{a}{b} & -ax \end{pmatrix}$ ve $\mathcal{L}_1(a,b,x)=\begin{pmatrix} (ax)^2+2\frac{a}{b} & ax \\ \frac{a^2x}{b} & 2\frac{a}{b} \end{pmatrix}$ değerleri yerlerine yazılırsa ispat tamamlanır. ■

Aşağıdaki sonuçta, iki periyotlu Fibonacci matris polinomları için bazı toplamların elde edilişleri gösterilmektedir.

**Sonuç 3.1.1: [32]** $k \geq 0$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır. Burada eşitliklerin sağ taraflarında $\mathcal{L}_n(a,b,x)=\mathcal{L}_n$ olarak alınmıştır. Ayrıca $\xi(n)=n-2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$ dir.

**i.** $\sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{L}_k(a,b,x)=\left[\frac{a^{\xi(n)}b^{1-\xi(n)}\mathcal{L}_{n-1}+a^{1-\xi(n)}b^{\xi(n)}\mathcal{L}_n-b\mathcal{L}_1+abx\mathcal{L}_0-a\mathcal{L}_0}{abx}\right],$ (3.7)

**ii.** $\sum_{k=0}^{n}\mathcal{L}_k(a,b,x)t^{-k}=\frac{1}{1-(abx^2+2)t^2+t^4}$ (3.8)

$\times\left[\frac{\mathcal{L}_{n-1}}{t^{n-1}}-\frac{\mathcal{L}_{n+1}}{t^{n-3}}+\frac{\mathcal{L}_n}{t^n}-\frac{\mathcal{L}_{n+2}}{t^{n-2}}+t^4\mathcal{L}_0+t^3\mathcal{L}_1-t^2[(abx^2+1)\mathcal{L}_0-bx\mathcal{L}_1]-t(\mathcal{L}_1-ax\mathcal{L}_0)\right].$

*İspat:* Öncelikle (i) maddesinin ispatı ile başlanacaktır. İki periyotlu Lucas matris polinomlarının tanımından faydalanarak ve bazı cebirsel işlemler yardımıyla,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{L}_k(a,b,x)&=\mathcal{L}_0(a,b,x)+\mathcal{L}_1(a,b,x)+\mathcal{L}_2(a,b,x)+\cdots+\mathcal{L}_{n-2}(a,b,x)+\mathcal{L}_{n-1}(a,b,x)\\
&=\mathcal{L}_0(a,b,x)+\frac{\mathcal{L}_2(a,b,x)-\mathcal{L}_0(a,b,x)}{bx}+\frac{\mathcal{L}_3(a,b,x)-\mathcal{L}_1(a,b,x)}{ax}+\cdots\\
&\quad+\frac{\mathcal{L}_{n-1}(a,b,x)-\mathcal{L}_{n-3}(a,b,x)}{a^{1-\xi(n)}b^{\xi(n)}x}+\frac{\mathcal{L}_n(a,b,x)-\mathcal{L}_{n-2}(a,b,x)}{a^{\xi(n)}b^{1-\xi(n)}x}\\
&=\mathcal{L}_0(a,b,x)-\frac{\mathcal{L}_0(a,b,x)}{bx}-\frac{\mathcal{L}_1(a,b,x)}{ax}+\frac{\mathcal{L}_{n-1}(a,b,x)}{a^{1-\xi(n)}b^{\xi(n)}x}+\frac{\mathcal{L}_n(a,b,x)}{a^{\xi(n)}b^{1-\xi(n)}x}\\
&=\frac{a^{\xi(n)}b^{1-\xi(n)}\mathcal{L}_{n-1}+a^{1-\xi(n)}b^{\xi(n)}\mathcal{L}_n-b\mathcal{L}_1+abx\mathcal{L}_0-a\mathcal{L}_0}{abx}\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. Benzer şekilde, iki periyotlu Lucas matris dizilerinin Binet formülü yardımıyla (ii) maddesinin ispatı kolaylıkla yapılabilir. ■

**Sonuç 3.1.2: [32]** $k \geq 0$ için (3.8) eşitliğinin bir sonucu olarak aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}_k(a,b,x)t^{-k} = \frac{t}{1-(abx^2+2)t^2+t^4} \begin{pmatrix} axt^3 + \left(a^2x^2 + 2\frac{a}{b}\right)t^2 + axt - 2\frac{a}{b} & 2t^3 + axt^2 - (abx^2+2)t - ax \\ 2\frac{a}{b}t^3 + \frac{a^2x}{b}t^2 - \left(a^2x^2 + 2\frac{a}{b}\right)t - \frac{a^2x}{b} & -axt^3 + 2\frac{a}{b}t^2 + (3ax + a^2bx^3)t - \left(a^2x^2 + 2\frac{a}{b}\right) \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Aşağıdaki teoremde iki periyotlu Fibonacci matris polinomu ile iki periyotlu Lucas polinomu arasındaki bağıntılar verilecektir.

**Teorem 3.1.3:** İki periyotlu Fibonacci matris polinomu $\mathcal{F}_n(a,b,x)$ ile iki periyotlu Lucas matris polinomu $\mathcal{L}_k(a,b,x)$ arasında aşağıdaki bağıntılar sağlanır [32].

**i.** $$\mathcal{L}_0(a,b,x)\mathcal{F}_n(a,b,x) = \left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(n)} \mathcal{L}_n(a,b,x) = \left(\frac{a}{b}\right)^{\xi(n+1)} (\mathcal{F}_{n-1}(a,b,x) + \mathcal{F}_{n+1}(a,b,x)),$$

**ii.** $$\mathcal{F}_n(a,b,x)\mathcal{L}_0(a,b,x) = \mathcal{L}_0(a,b,x)\mathcal{F}_n(a,b,x) = \left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(n)} \mathcal{L}_n(a,b,x),$$

**iii.** $$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(a,b,x)\mathcal{L}_n(a,b,x) &= \mathcal{L}_n(a,b,x)\mathcal{F}_1(a,b,x) \\ &= \left(\frac{a}{b}\right)^{\xi(n)} \left(\mathcal{F}_{n+2}(a,b,x) + \mathcal{F}_n(a,b,x)\right) \\ &= \left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(n+1)} \mathcal{L}_{n+1}(a,b,x). \end{aligned}$$

*İspat:* Teoremin ispatı, (1.15), (3.2) denklemleri ve $l_n(a,b,x) = q_{n-1}(a,b,x) + q_{n+1}(a,b,x)$ ile $(abx^2+4)q_n(a,b,x) = l_{n-1}(a,b,x) + l_{n+1}(a,b,x)$ özdeşlikleri yardımıyla kolaylıkla yapılabilir. ■

### 3.2. Genelleştirilmiş Lucas Matris Hibrinomiyalleri

Bu alt bölümde iki periyotlu Lucas matris hibrinomiyallerinin tanımı, Binet formülü, üreteç fonksiyonu ve bazı toplam formülleri sunulacaktır. İlk olarak, iki periyotlu Lucas matris hibrinomiyalinin tanımı verilecektir.

**Tanım 3.2.1:** $x$ herhangi bir değişken, $a$ ve $b$ sayıları $\mathbb{R}-\{0\}$ a ait herhangi iki sayı olmak üzere, iki periyotlu Lucas matris hibrinomiyali;

$$H\mathcal{L}_n(a,b,x)=\mathcal{L}_n(a,b,x)+\boldsymbol{i}\mathcal{L}_{n+1}(a,b,x)+\boldsymbol{\varepsilon}\mathcal{L}_{n+2}(a,b,x)+\boldsymbol{h}\mathcal{L}_{n+3}(a,b,x), n\in\mathbb{N}_0 \quad (3.10)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\mathcal{L}_n(a,b,x)$, iki periyotlu Lucas matris polinomudur [32].

**Teorem 3.2.1:** (3.10) bağıntısında verilen $H\mathcal{L}_n(a,b,x)$, tüm pozitif tamsayılar için aşağıdaki eşitliği sağlar.

$$H\mathcal{L}_n(a,b,x)=\begin{pmatrix}\tilde{\mathcal{L}}_{1,1}(n;a,b,x) & \tilde{\mathcal{L}}_{1,2}(n;a,b,x)\\ \tilde{\mathcal{L}}_{2,1}(n;a,b,x) & \tilde{\mathcal{L}}_{2,2}(n;a,b,x)\end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Burada,

$$\tilde{\mathcal{L}}_{1,1}(n;a,b,x)=\left(\frac{a}{b}\right)^{\xi(n)}l_{n+1}(a,b,x)+\boldsymbol{i}\left(\frac{a}{b}\right)^{\xi(n+1)}l_{n+2}(a,b,x)$$
$$+\boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{a}{b}\right)^{\xi(n+2)}l_{n+3}(a,b,x)+\boldsymbol{h}\left(\frac{a}{b}\right)^{\xi(n+3)}l_{n+4}(a,b,x)$$

$$\tilde{\mathcal{L}}_{1,2}(n;a,b,x)=l_n(a,b,x)+\boldsymbol{i}l_{n+1}(a,b,x)+\boldsymbol{\varepsilon}l_{n+2}(a,b,x)+\boldsymbol{h}l_{n+3}(a,b,x)$$

$$\tilde{\mathcal{L}}_{2,1}(n;a,b,x)=\frac{a}{b}\left(l_n(a,b,x)+\boldsymbol{i}l_{n+1}(a,b,x)+\boldsymbol{\varepsilon}l_{n+2}(a,b,x)+\boldsymbol{h}l_{n+3}(a,b,x)\right)$$

$$\tilde{\mathcal{L}}_{2,2}(n;a,b,x)=\left(\frac{a}{b}\right)^{\xi(n)}l_{n-1}(a,b,x)+\boldsymbol{i}\left(\frac{a}{b}\right)^{\xi(n+1)}l_n(a,b,x)$$
$$+\boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{a}{b}\right)^{\xi(n+2)}l_{n+1}(a,b,x)+\boldsymbol{h}\left(\frac{a}{b}\right)^{\xi(n+3)}l_{n+2}(a,b,x)$$

şeklindedir. Burada $\xi(n)=n-2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$ dir ve $l_n(a,b,x)$ iki periyotlu Lucas matris polinomudur [32].

*İspat:* İki periyotlu Lucas matris hibrinomiyallerinin tanımından,

$$H\mathcal{L}_n(a,b,x) = \mathcal{L}_n(a,b,x) + \boldsymbol{i}\mathcal{L}_{n+1}(a,b,x) + \boldsymbol{\varepsilon}\mathcal{L}_{n+2}(a,b,x) + \boldsymbol{h}\mathcal{L}_{n+3}(a,b,x)$$

olduğu açıktır. Bu tanımda (3.2) eşitliği yerlerine yazılırsa,

$$H\mathcal{L}_n(a,b,x) = \begin{pmatrix} \left(\frac{a}{b}\right)^{\xi(n)} l_{n+1}(a,b,x) & l_n(a,b,x) \\ \frac{a}{b} l_n(a,b,x) & \left(\frac{a}{b}\right)^{\xi(n)} l_{n-1}(a,b,x) \end{pmatrix}$$

$$+\boldsymbol{i}\begin{pmatrix} \left(\frac{a}{b}\right)^{\xi(n+1)} l_{n+2}(a,b,x) & l_{n+1}(a,b,x) \\ \frac{a}{b} l_{n+1}(a,b,x) & \left(\frac{a}{b}\right)^{\xi(n+1)} l_{n}(a,b,x) \end{pmatrix}$$

$$+\boldsymbol{\varepsilon}\begin{pmatrix} \left(\frac{a}{b}\right)^{\xi(n+2)} l_{n+3}(a,b,x) & l_{n+2}(a,b,x) \\ \frac{a}{b} l_{n+2}(a,b,x) & \left(\frac{a}{b}\right)^{\xi(n+2)} l_{n+1}(a,b,x) \end{pmatrix}$$

$$+\boldsymbol{h}\begin{pmatrix} \left(\frac{a}{b}\right)^{\xi(n+3)} l_{n+4}(a,b,x) & l_{n+3}(a,b,x) \\ \frac{a}{b} l_{n+3}(a,b,x) & \left(\frac{a}{b}\right)^{\xi(n+3)} l_{n+2}(a,b,x) \end{pmatrix}$$

elde edilir. Sonuç olarak basit cebirsel işlemler yapılarak ispat tamamlanır.■

Aşağıdaki teorem iki periyotlu Lucas matris hibrinomiyalleri için üreteç fonksiyonunu ifade etmektedir.

**Teorem 3.2.2:** İki periyotlu Lucas matris hibrinomiyali için üreteç fonksiyonu;

$$\sum_{n=0}^{\infty} H\mathcal{L}_n(a,b,x)t^n = \frac{1+\boldsymbol{i}\frac{1}{t}+\boldsymbol{\varepsilon}\frac{1}{t^2}+\boldsymbol{h}\frac{1}{t^3}}{1-(abx^2+2)t^2+t^4}$$
$$\times\begin{pmatrix} ax+\left(a^2x^2+2\frac{a}{b}\right)t+axt^2-2\frac{a}{b}t^3 & 2+axt-(abx^2+2)t^2+axt^3 \\ 2\frac{a}{b}+\frac{a^2x}{b}t-\left(a^2x^2+2\frac{a}{b}\right)t^2+\frac{a^2x}{b}t^3 & -ax+2\frac{a}{b}t+(3ax+a^2bx^3)t^2-t^3\left(a^2x^2+2\frac{a}{b}\right) \end{pmatrix}$$
$$-\boldsymbol{i}\frac{1}{t}\mathcal{L}_0(a,b,x)-\boldsymbol{\varepsilon}\frac{1}{t^2}\mathcal{L}_0(a,b,x)-\boldsymbol{\varepsilon}\frac{1}{t}\mathcal{L}_1(a,b,x)$$
$$-\boldsymbol{h}\frac{1}{t^3}\mathcal{L}_0(a,b,x)-\boldsymbol{h}\frac{1}{t^2}\mathcal{L}_1(a,b,x)-\boldsymbol{h}\frac{1}{t}\mathcal{L}_2(a,b,x) \tag{3.12}$$

şeklindedir. [32].

*İspat:* İlk olarak ispat boyunca $\mathcal{L}_n(a,b,x)=\mathcal{L}_n$ olarak alıncaktır. zÖncelikle iki periyotlu Lucas matris hibrinomiyalinin tanımı kullanılarak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} H\mathcal{L}_n(a,b,x)t^n = \sum_{n=0}^{\infty}(\mathcal{L}_n+\boldsymbol{i}\mathcal{L}_{n+1}+\boldsymbol{\varepsilon}\mathcal{L}_{n+2}+\boldsymbol{h}\mathcal{L}_{n+3})t^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{L}_n t^n+\boldsymbol{i}\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{L}_{n+1}t^n+\boldsymbol{\varepsilon}\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{L}_{n+2}t^n+\boldsymbol{h}\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{L}_{n+3}t^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{L}_n t^n+\boldsymbol{i}\frac{1}{t}\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{L}_n t^n-\boldsymbol{i}\frac{1}{t}\mathcal{L}_0$$

$$+\boldsymbol{\varepsilon}\frac{1}{t^2}\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{L}_n t^n-\boldsymbol{\varepsilon}\frac{1}{t^2}\mathcal{L}_0-\boldsymbol{\varepsilon}\frac{1}{t}\mathcal{L}_1$$

$$+\boldsymbol{h}\frac{1}{t^3}\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{L}_n t^n-\boldsymbol{h}\frac{1}{t^3}\mathcal{L}_0-\boldsymbol{h}\frac{1}{t^2}\mathcal{L}_1-\boldsymbol{h}\frac{1}{t}\mathcal{L}_2$$

elde edilir. (3.6) bağıntısı yerine yazılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} H\mathcal{L}_n(a,b,x)t^n =$$

$$\frac{1}{1-(abx^2+2)t^2+t^4}\begin{pmatrix} ax+\left(a^2x^2+2\frac{a}{b}\right)t+axt^2-2\frac{a}{b}t^3 & 2+axt-(abx^2+2)t^2+axt^3 \\ 2\frac{a}{b}+\frac{a^2x}{b}t-\left(a^2x^2+2\frac{a}{b}\right)t^2+\frac{a^2x}{b}t^3 & -ax+2\frac{a}{b}t+(3ax+a^2bx^3)t^2-t^3\left(a^2x^2+2\frac{a}{b}\right) \end{pmatrix}$$

$$+\boldsymbol{i}\frac{1}{1-(abx^2+2)t^2+t^4}\begin{pmatrix} ax+\left(a^2x^2+2\frac{a}{b}\right)t+axt^2-2\frac{a}{b}t^3 & 2+axt-(abx^2+2)t^2+axt^3 \\ 2\frac{a}{b}+\frac{a^2x}{b}t-\left(a^2x^2+2\frac{a}{b}\right)t^2+\frac{a^2x}{b}t^3 & -ax+2\frac{a}{b}t+(3ax+a^2bx^3)t^2-t^3\left(a^2x^2+2\frac{a}{b}\right) \end{pmatrix}$$

$$-\boldsymbol{i}\frac{1}{t}\mathcal{L}_0$$

$$+\boldsymbol{\varepsilon}\frac{1}{1-(abx^2+2)t^2+t^4}\begin{pmatrix} ax+\left(a^2x^2+2\frac{a}{b}\right)t+axt^2-2\frac{a}{b}t^3 & 2+axt-(abx^2+2)t^2+axt^3 \\ 2\frac{a}{b}+\frac{a^2x}{b}t-\left(a^2x^2+2\frac{a}{b}\right)t^2+\frac{a^2x}{b}t^3 & -ax+2\frac{a}{b}t+(3ax+a^2bx^3)t^2-t^3\left(a^2x^2+2\frac{a}{b}\right) \end{pmatrix}$$

$$-\boldsymbol{\varepsilon}\frac{1}{t^2}\mathcal{L}_0-\boldsymbol{\varepsilon}\frac{1}{t}\mathcal{L}_1$$

$$+\boldsymbol{h}\frac{1}{1-(abx^2+2)t^2+t^4}\begin{pmatrix} ax+\left(a^2x^2+2\frac{a}{b}\right)t+axt^2-2\frac{a}{b}t^3 & 2+axt-(abx^2+2)t^2+axt^3 \\ 2\frac{a}{b}+\frac{a^2x}{b}t-\left(a^2x^2+2\frac{a}{b}\right)t^2+\frac{a^2x}{b}t^3 & -ax+2\frac{a}{b}t+(3ax+a^2bx^3)t^2-t^3\left(a^2x^2+2\frac{a}{b}\right) \end{pmatrix}$$

$$-\boldsymbol{h}\frac{1}{t^3}\mathcal{L}_0-\boldsymbol{h}\frac{1}{t^2}\mathcal{L}_1-\boldsymbol{h}\frac{1}{t}\mathcal{L}_2$$

olur. Sonuç olarak $\mathcal{L}_n = \mathcal{L}_n(a,b,x)$ ifadesi yerine yazılırsa aşağıdaki bağıntı elde edilir.

$$\sum_{n=0}^{\infty} H\mathcal{L}_n(a,b,x)t^n = \frac{1+\boldsymbol{i}\frac{1}{t}+\boldsymbol{\varepsilon}\frac{1}{t^2}+\boldsymbol{h}\frac{1}{t^3}}{1-(abx^2+2)t^2+t^4}$$
$$\times\begin{pmatrix} ax+\left(a^2x^2+2\frac{a}{b}\right)t+axt^2-2\frac{a}{b}t^3 & 2+axt-(abx^2+2)t^2+axt^3 \\ 2\frac{a}{b}+\frac{a^2x}{b}t-\left(a^2x^2+2\frac{a}{b}\right)t^2+\frac{a^2x}{b}t^3 & -ax+2\frac{a}{b}t+(3ax+a^2bx^3)t^2-t^3\left(a^2x^2+2\frac{a}{b}\right)\end{pmatrix}$$
$$-\boldsymbol{i}\frac{1}{t}\mathcal{L}_0(a,b,x)-\boldsymbol{\varepsilon}\frac{1}{t^2}\mathcal{L}_0(a,b,x)-\boldsymbol{\varepsilon}\frac{1}{t}\mathcal{L}_1(a,b,x)$$
$$-\boldsymbol{h}\frac{1}{t^3}\mathcal{L}_0(a,b,x)-\boldsymbol{h}\frac{1}{t^2}\mathcal{L}_1(a,b,x)-\boldsymbol{h}\frac{1}{t}\mathcal{L}_2(a,b,x)$$

Böylece ispat tamamlanır.■

Aşağıdaki teorem iki periyotlu Lucas matris hibrinomiyalleri için Binet formülünü ifade etmektedir.

**Teorem 3.2.3:** Her $n \in \mathbb{N}$ için, iki periyotlu Lucas matris hibrinomiyalinin Binet formülü aşağıdaki şekildedir;

$$H\mathcal{L}_n(a,b,x) = \frac{\bar{A}_{\xi(n)}\alpha^{n-1}\bar{\alpha}+\bar{B}_{\xi(n)}\beta^{n-1}\bar{\beta}}{(abx^2)^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}} + \frac{\bar{A}_{\xi(n+1)}\alpha^{n}\bar{\bar{\alpha}}+\bar{B}_{\xi(n+1)}\beta^{n}\bar{\bar{\beta}}}{(abx^2)^{\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor}}. \tag{3.13}$$

Burada $\alpha$ ve $\beta$ değerleri $\lambda^2-(abx^2)\lambda-abx^2=0$ karakteristik denkleminin kökleridir. Ayrıca,

$$\bar{A}_{\xi(n)} = \begin{pmatrix} (ax)^{\xi(n+1)}\left(\frac{a}{b}\right)^{\xi(n)}\frac{\alpha^2}{abx^2} & \left(\frac{ax}{abx^2}\right)^{\xi(n)}\alpha \\ \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{ax}{abx^2}\right)^{\xi(n)}\alpha & (ax)^{\xi(n+1)}\left(\frac{a}{b}\right)^{\xi(n)}\end{pmatrix},$$

$$\bar{B}_{\xi(n)} = \begin{pmatrix} (ax)^{\xi(n+1)}\left(\frac{a}{b}\right)^{\xi(n)}\frac{\beta^2}{abx^2} & \left(\frac{ax}{abx^2}\right)^{\xi(n)}\beta \\ \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{ax}{abx^2}\right)^{\xi(n)}\beta & (ax)^{\xi(n+1)}\left(\frac{a}{b}\right)^{\xi(n)}\end{pmatrix},$$

$\bar{\alpha} = 1+\frac{\varepsilon\alpha^2}{abx^2}$, $\bar{\beta} = 1+\frac{\varepsilon\beta^2}{abx^2}$, $\bar{\bar{\alpha}} = i+\frac{h\alpha^2}{abx^2}$, $\bar{\bar{\beta}} = i+\frac{h\beta^2}{abx^2}$ şeklindedir. Burada $\xi(n) = n-2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$ dir [32].

*İspat:* Binet formülünün ispatı için $n$ 'in çift ve tek olması durumları ayrı ayrı incelenecektir. Bunun için (3.3) ile verilen iki periyotlu Lucas matris polinomunun Binet formülü kullanılacaktır.

**$n = 2k$ (çift) olması durumu:**

$k \in \mathbb{N}_0$ için,

$$H\mathcal{L}_{2k}(a,b,x) = \mathcal{L}_{2k}(a,b,x) + \boldsymbol{i}\,\mathcal{L}_{2k+1}(a,b,x) + \boldsymbol{\varepsilon}\mathcal{L}_{2k+2}(a,b,x) + \boldsymbol{h}\mathcal{L}_{2k+3}(a,b,x)$$

$$H\mathcal{L}_{2k}(a,b,x) = \frac{A_0\alpha^{2k-1}+B_0\beta^{2k-1}}{(abx^2)^k} + \boldsymbol{i}\frac{A_1\alpha^{2k}+B_1\beta^{2k}}{(abx^2)^k} + \boldsymbol{\varepsilon}\frac{A_0\alpha^{2k+1}+B_0\beta^{2k+1}}{(abx^2)^{k+1}} + \boldsymbol{h}\frac{A_1\alpha^{2k+2}+B_1\beta^{2k+2}}{(abx^2)^{k+1}}$$

$$H\mathcal{L}_{2k}(a,b,x) = \frac{A_0\alpha^{2k-1}}{(abx^2)^k}\left(1+\frac{\boldsymbol{\varepsilon}\alpha^2}{abx^2}\right) + \frac{B_0\beta^{2k-1}}{(abx^2)^k}\left(1+\frac{\boldsymbol{\varepsilon}\beta^2}{abx^2}\right) + \frac{A_1\alpha^{2k}}{(abx^2)^k}\left(\boldsymbol{i}+\frac{\boldsymbol{h}\alpha^2}{abx^2}\right)$$
$$+ \frac{B_1\beta^{2k}}{(abx^2)^k}\left(\boldsymbol{i}+\frac{\boldsymbol{h}\beta^2}{abx^2}\right)$$

Burada $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\bar{\alpha}}$ ve $\bar{\bar{\beta}}$ ifadeleri aşağıdaki gibi seçilirse,

$$\bar{\alpha} = 1+\frac{\varepsilon\alpha^2}{abx^2},\ \bar{\beta} = 1+\frac{\varepsilon\beta^2}{abx^2},\ \bar{\bar{\alpha}} = i+\frac{h\alpha^2}{abx^2},\ \bar{\bar{\beta}} = i+\frac{h\beta^2}{abx^2}$$

olur. Buradan sonuç olarak

$$H\mathcal{L}_{2k}(a,b,x) = \frac{A_0\alpha^{2k-1}\bar{\alpha}+B_0\beta^{2k-1}\bar{\beta}+A_1\alpha^{2k}\bar{\bar{\alpha}}+B_1\beta^{2k}\bar{\bar{\beta}}}{(abx^2)^k} \qquad (3.14)$$

elde edilir. Benzer şekilde $H\mathcal{L}_{2k+1}(a,b,x)$ ifadesi de elde edilmelidir.

**$n = 2k+1$ (tek) olması durumu:**

$k \in \mathbb{N}_0$ için,

$$H\mathcal{L}_{2k+1}(a,b,x) = \mathcal{L}_{2k+1}(a,b,x) + \boldsymbol{i}\,\mathcal{L}_{2k+2}(a,b,x) + \boldsymbol{\varepsilon}\mathcal{L}_{2k+3}(a,b,x) + \boldsymbol{h}\mathcal{L}_{2k+4}(a,b,x)$$

$$H\mathcal{L}_{2k+1}(a,b,x) = \frac{A_1\alpha^{2k}+B_1\beta^{2k}}{(abx^2)^k} + \boldsymbol{i}\frac{A_0\alpha^{2k+1}+B_0\beta^{2k+1}}{(abx^2)^{k+1}} + \boldsymbol{\varepsilon}\frac{A_1\alpha^{2k+2}+B_1\beta^{2k+2}}{(abx^2)^{k+1}} + \frac{A_0\alpha^{2k+3}+B_0\beta^{2k+3}}{(abx^2)^{k+2}}$$

$$H\mathcal{L}_{2k+1}(a,b,x) = \frac{A_1\alpha^{2k}}{(abx^2)^k}\left(1+\frac{\boldsymbol{\varepsilon}\alpha^2}{abx^2}\right) + \frac{B_1\beta^{2k}}{(abx^2)^k}\left(1+\frac{\boldsymbol{\varepsilon}\beta^2}{abx^2}\right) + \frac{A_0\alpha^{2k+1}}{(abx^2)^{k+1}}\left(\boldsymbol{i}+\frac{\boldsymbol{h}\alpha^2}{abx^2}\right)$$
$$+ \frac{B_0\beta^{2k+1}}{(abx^2)^{k+1}}\left(\boldsymbol{i}+\frac{\boldsymbol{h}\beta^2}{abx^2}\right)$$

Burada $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\bar{\alpha}}$ ve $\bar{\bar{\beta}}$ ifadeleri aşağıdaki gibi seçilirse,

$\bar{\alpha} = 1 + \frac{\varepsilon\alpha^2}{abx^2},\ \bar{\beta} = 1 + \frac{\varepsilon\beta^2}{abx^2},\ \bar{\bar{\alpha}} = i + \frac{h\alpha^2}{abx^2},\ \bar{\bar{\beta}} = i + \frac{h\beta^2}{abx^2}$

olur. Buradan sonuç olarak

$$H\mathcal{L}_{2k+1}(a,b,x) = \frac{A_1\alpha^{2k}\bar{\alpha} + B_1\beta^{2k}\bar{\beta}}{(abx^2)^k} + \frac{A_0\alpha^{2k+1}\bar{\bar{\alpha}} + B_0\beta^{2k+1}\bar{\bar{\beta}}}{(abx^2)^{k+1}} \tag{3.15}$$

elde edilir.

Sonuç olarak elde edilen Denklem (3.14) ve Denklem (3.15) ‘deki eşitlikler tek bir eşitlik ile ifade edilmek istenirse,

$$H\mathcal{L}_n(a,b,x) = \frac{A_{\xi(n)}\alpha^{n-1}\bar{\alpha} + B_{\xi(n)}\beta^{n-1}\bar{\beta}}{(abx^2)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} + \frac{A_{\xi(n+1)}\alpha^{n}\bar{\bar{\alpha}} + B_{\xi(n+1)}\beta^{n}\bar{\bar{\beta}}}{(abx^2)^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}}$$

olarak elde edilir ki bu da ispatı tamamlar. ■

Aşağıdaki sonuçta, iki periyotlu Lucas matris hibrinomiyalleri için bazı toplamların elde edilişleri gösterilmektedir.

**Sonuç 3.2.1: [32]** $k \geq 0$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır. Burada eşitliklerin sağ taraflarında $\mathcal{L}_n(a,b,x) = \mathcal{L}_n$ olarak alınacaktır.

**i.** $\sum_{k=0}^{n-1} H\mathcal{L}_k(a,b,x) = (1 + \boldsymbol{i} + \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{h})\left[\frac{a^{\xi(n)}b^{1-\xi(n)}\mathcal{L}_{n-1} + a^{1-\xi(n)}b^{\xi(n)}\mathcal{L}_n - b\mathcal{L}_1 + abx\mathcal{L}_0 - a\mathcal{L}_0}{abx}\right]$

$-(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{h})(\mathcal{L}_0 - \mathcal{L}_n) - (\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{h})(\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_{n+1}) - \boldsymbol{h}(\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_{n+2}),$

**ii.** $\sum_{k=0}^{n} H\mathcal{L}_k(a,b,x)t^{-k} = \frac{(1 + \boldsymbol{i}t + \boldsymbol{\varepsilon}t^2 + \boldsymbol{h}t^3)}{1 - (abx^2 + 2)t^2 + t^4}$

$\times\left[\frac{\mathcal{L}_{n-1}}{t^{n-1}} - \frac{\mathcal{L}_{n+1}}{t^{n-3}} + \frac{\mathcal{L}_n}{t^n} - \frac{\mathcal{L}_{n+2}}{t^{n-2}} + t^4\mathcal{L}_0 + t^3\mathcal{L}_1 - t^2[(abx^2 + 1)\mathcal{L}_0 - bx\mathcal{L}_1] - t(\mathcal{L}_1 - ax\mathcal{L}_0)\right]$

$-(\boldsymbol{i}t + \boldsymbol{\varepsilon}t^2 + \boldsymbol{h}t^3)(\mathcal{L}_0 - \mathcal{L}_{n+1}t^{-(n+1)}) - (\boldsymbol{\varepsilon}t^2 + \boldsymbol{h}t^3)(\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_{n+2}t^{-(n+2)})$

$-\boldsymbol{h}t^3(\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_{n+3}t^{-(n+3)})$

**iii.** $\sum_{k=0}^{\infty} H\mathcal{L}_k(a,b,x)t^{-k} = \frac{t(1+\boldsymbol{i}t+\boldsymbol{\varepsilon}t^2+\boldsymbol{h}t^3)}{1-(abx^2+2)t^2+t^4}$

$$\times \begin{pmatrix} axt^3 + \left(a^2x^2 + 2\frac{a}{b}\right)t^2 - axt + 2\frac{a}{b} & 2t^3 + axt^2 + (abx^2+2)t + ax \\ 2\frac{a}{b}t^3 + \frac{a^2x}{b}t^2 + \left(a^2x^2 + 2\frac{a}{b}\right)t + \frac{a^2x}{b} & -axt^3 + 2\frac{a}{b}t^2 - (3ax + a^2bx^3)t + \left(a^2x^2 + 2\frac{a}{b}\right) \end{pmatrix}$$

$$-(\boldsymbol{i}t + \boldsymbol{\varepsilon}t^2 + \boldsymbol{h}t^3)\mathcal{L}_0 - (\boldsymbol{\varepsilon}t + \boldsymbol{h}t^2)\mathcal{L}_1 - \boldsymbol{h}t\mathcal{L}_2.$$

*İspat:* Öncelikle (i) maddesinin ispatı ile başlanacaktır. İki periyotlu Lucas matris hibrinomiyallerin tanımından faydalanarak ve bazı cebirsel işlemler yardımıyla,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} H\mathcal{L}_k(a,b,x) &= \sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{L}_k + \boldsymbol{i}\sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{L}_{k+1} + \boldsymbol{\varepsilon}\sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{L}_{k+2} + \boldsymbol{h}\sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{L}_{k+3} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{L}_k + \boldsymbol{i}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{L}_k - \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_n\right) \\ &\quad +\boldsymbol{\varepsilon}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{L}_k - \mathcal{L}_0 - \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_n + \mathcal{L}_{n+1}\right) \\ &\quad +\boldsymbol{h}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{L}_k - \mathcal{L}_0 - \mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_n + \mathcal{L}_{n+1} + \mathcal{L}_{n+2}\right) \\ &= (1+\boldsymbol{i}+\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{h})\sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{L}_k - (\boldsymbol{i}+\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{h})(\mathcal{L}_0 - \mathcal{L}_n) \\ &\quad -(\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{h})(\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_{n+1}) - \boldsymbol{h}(\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_{n+2}) \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak $\sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{L}_k = \frac{a^{\xi(n)}b^{1-\xi(n)}\mathcal{L}_{n-1} + a^{1-\xi(n)}b^{\xi(n)}\mathcal{L}_n - b\mathcal{L}_1 + abx\mathcal{L}_0 - a\mathcal{L}_0}{abx}$ ifadesi yerine yazılırsa (i) maddesinin sağlandığı açıkça görülür. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi (ii) maddesinin ispatı ele alınacaktır. Yine (i) maddesine benzer şekilde, iki periyotlu Lucas matris hibrinomiyallerinin tanımından faydalanarak ve bazı cebirsel işlemler yardımıyla,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} H\mathcal{L}_k(a,b,x)t^{-k} &= \sum_{k=0}^{n}\mathcal{L}_k t^{-k} + \boldsymbol{i}\sum_{k=0}^{n}\mathcal{L}_{k+1}t^{-k} + \boldsymbol{\varepsilon}\sum_{k=0}^{n}\mathcal{L}_{k+2}t^{-k} \\ &\quad +\boldsymbol{h}\sum_{k=0}^{n}\mathcal{L}_{k+3}t^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\mathcal{L}_k t^{-k} + \boldsymbol{i}t\sum_{k=0}^{n}\mathcal{L}_{k+1}t^{-(k+1)} + \boldsymbol{\varepsilon}t^2\sum_{k=0}^{n}\mathcal{L}_{k+2}t^{-(k+2)} \\ &\quad +\boldsymbol{h}t^3\sum_{k=0}^{n}\mathcal{L}_{k+3}t^{-(k+3)} \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \mathcal{L}_k t^{-k} + \boldsymbol{i}t\left(\sum_{k=0}^{n} \mathcal{L}_k t^{-k} - \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{n+1} t^{-(n+1)}\right)$$

$$+\boldsymbol{\varepsilon}t^2\left(\sum_{k=0}^{n} \mathcal{L}_k t^{-k} - \mathcal{L}_0 - \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_{n+1} t^{-(n+1)} + \mathcal{L}_{n+2} t^{-(n+2)}\right)$$

$$+\boldsymbol{h}t^3\left(\sum_{k=0}^{n} \mathcal{L}_k t^{-k} - \mathcal{L}_0 - \mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2\right)$$

$$+\boldsymbol{h}t^3\left(\mathcal{L}_{n+1} t^{-(n+1)} + \mathcal{L}_{n+2} t^{-(n+2)} + \mathcal{L}_{n+3} t^{-(n+3)}\right)$$

$$= (1 + \boldsymbol{i}t + \boldsymbol{\varepsilon}t^2 + \boldsymbol{h}t^3)\left(\sum_{k=0}^{n} \mathcal{L}_k t^{-k}\right) - (\boldsymbol{i}t + \boldsymbol{\varepsilon}t^2 + \boldsymbol{h}t^3)\left(\mathcal{L}_0 - \mathcal{L}_{n+1} t^{-(n+1)}\right)$$

$$-(\boldsymbol{\varepsilon}t^2 + \boldsymbol{h}t^3)\left(\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_{n+2} t^{-(n+2)}\right) - \boldsymbol{h}t^3\left(\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_{n+3} t^{-(n+3)}\right),$$

Sonuç olarak $\sum_{k=0}^{n} \mathcal{L}_k t^{-k} = \frac{1}{1-(abx^2+2)t^2+t^4}\Big[\frac{\mathcal{L}_{n-1}}{t^{n-1}} - \frac{\mathcal{L}_{n+1}}{t^{n-3}} + \frac{\mathcal{L}_n}{t^n} - \frac{\mathcal{L}_{n+2}}{t^{n-2}} + t^4\mathcal{L}_0 + t^3\mathcal{L}_1 - t^2[(abx^2+1)\mathcal{L}_0 - bx\mathcal{L}_1] - t(\mathcal{L}_1 - ax\mathcal{L}_0)\Big]$ ifadesi yerine yazılırsa (ii) maddesinin sağlandığı açıkça görülür. Böylece ispat tamamlanır.

Son olarak (iii) maddesinin ispatı verilecektir. İki periyotlu Lucas matris hibrinomiyallerin tanımından faydalanarak ve bazı cebirsel işlemler yardımıyla,

$$\sum_{k=0}^{\infty} H\mathcal{L}_k(a,b,x)t^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty}(\mathcal{L}_k + \boldsymbol{i}\mathcal{L}_{k+1} + \boldsymbol{\varepsilon}\mathcal{L}_{k+2} + \boldsymbol{h}\mathcal{L}_{k+3})t^{-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}_k t^{-k} + \boldsymbol{i}\sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}_{k+1} t^{-k} + \boldsymbol{\varepsilon}\sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}_{k+2} t^{-k}$$

$$+\boldsymbol{h}\sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}_{k+3} t^{-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}_k t^{-k} + \boldsymbol{i}t\sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}_{k+1} t^{-(k+1)} + \boldsymbol{\varepsilon}t^2\sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}_{k+2} t^{-(k+2)}$$

$$+\boldsymbol{h}t^3\sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}_{k+3} t^{-(k+3)}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}_k t^{-k} + \boldsymbol{i}t\left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}_k t^{-k} - \mathcal{L}_0\right)$$

$$+\boldsymbol{\varepsilon}t^2\left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}_k t^{-k} - \mathcal{L}_0 - \mathcal{L}_1 t^{-1}\right)$$

$$+\boldsymbol{h}t^3\left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}_k t^{-k} - \mathcal{L}_0 - \mathcal{L}_1 t^{-1} - \mathcal{L}_2 t^{-2}\right)$$

$$= (1 + \boldsymbol{i}t + \boldsymbol{\varepsilon}t^2 + \boldsymbol{h}t^3)\sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}_k t^{-k} - (\boldsymbol{i}t + \boldsymbol{\varepsilon}t^2 + \boldsymbol{h}t^3)\mathcal{L}_0 - (\boldsymbol{\varepsilon}t + \boldsymbol{h}t^2)\mathcal{L}_1 - \boldsymbol{h}t\mathcal{L}_2.$$

Sonuç olarak

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}_k t^{-k} = \frac{\mathrm{t}}{1-(abx^2+2)t^2+t^4}$$

$$\begin{pmatrix} axt^3 + \left(a^2x^2 + 2\frac{a}{b}\right)t^2 - axt + 2\frac{a}{b} & 2t^3 + axt^2 + (abx^2 + 2)t + ax \\ 2\frac{a}{b}t^3 + \frac{a^2x}{b}t^2 + \left(a^2x^2 + 2\frac{a}{b}\right)t + \frac{a^2x}{b} & -axt^3 + 2\frac{a}{b}t^2 - (3ax + a^2bx^3)t + \left(a^2x^2 + 2\frac{a}{b}\right) \end{pmatrix}$$

ifadesi yerine yazılırsa ispat tamamlanır. ■

## BÖLÜM 4

## TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde Hibrit sayılarına yer verilmiş ayrıca Fibonacci ve Lucas dizilerinin tarihsel gelişimi detaylı bir şekilde ele alınmıştır. Ayrıca tezin ilerleyen kısımlarında kullanılacak olan temel tanım ve teoremlere de bu bölümde yer verilmiştir. İkinci bölümde iki periyotlu Fibonacci matris hibrinomiyalleri tanımlanmış ve bu matris hibrinomiyallerin Binet formülü, üreteç fonksiyonu ve bazı önemli toplam formülleri sunulmuştur. Üçüncü bölümde ilk olarak iki periyotlu Lucas matris polinomu tanımına yer verilmiştir. Bu polinomun Binet formülü ve üreteç fonksiyonu elde edildikten sonra bazı toplam formülleri de burada sunulmuştur. Daha sonra iki periyotlu Lucas matris hibrinomiyali tanımı elde edilmiştir. Bu matris hibrinomiyallerin Binet formülü, üreteç fonksiyonu ve bazı toplam formülleri bu bölümde sunulmuştur. Son bölümde ise tezin literatüre olan katkısından bahsedilmiştir.

Sonuç olarak bu tez çalışmasında iki periyotlu Fibonacci ve Lucas matris polinomları yardımıyla hibrinomiyallerin yeni bir genellemesi olan iki periyotlu Fibonacci ve Lucas matris hibrinomiyalleri elde edilmiştir.

[33] numaralı kaynakta iki periyotlu Jacobsthal polinomları hakkında bilgi verilmiştir. [34] numaralı kaynakta ise iki değişkenli iki periyotlu Jacobsthal matris polinomları üzerine çalışılmıştır. Bu iki çalışmayı göz önüne alarak ve bu tez çalışmasında elde edilen sonuçlardan yola çıkarak iki periyotlu Jacobsthal matris hibrinomiyallerinin elde edilip edilmeyeceği araştırılıp bu matris hibrinomiyalleri için de benzer bir çalışma yapılabilir.

## KAYNAKLAR


**1.** Fibonacci, L., “Liber Abaci”,1202.

**2.** Hoggatt, Jr.V.E., Bicknell, M., “Roots of Fibonacci polynomials”, *Fibonacci Quart*., 11(3), 271–274, 1973.

**3.** Koshy, T., “Fibonacci and Lucas numbers with applications, Volume 2”, *John Wiley and Sons.*, New York, 2019.

**4.** Falcon,S., Plaza, A., “On the Fibonacci $k-$numbers”, *Chaos, Solitons & Fractals*, 32(5), 1615-1624, 2007.

**5.** Falcon, S., Plaza, A., “The $k-$ Fibonacci sequence and the Pascal $2-$triangle”, *Chaos, Solitons & Fractals,* 33(1), 38-49, 2007.

**6.** Civciv, H., Türkmen, R., “On the $(s,t)-$Fibonacci and Fibonacci matrix sequences”, *Ars Combinatoria*, 87, 161-174, 2008.

**7.** Edson, M., Yayenie, O., “A new generalization of Fibonacci sequence & extended Binet’s formula”, *Integers*, 9(6), 639-654, 2009.

**8.** Nalli, A., Haukkanen, P., “On generalized Fibonacci and Lucas polynomials”, *Chaos, Solitons & Fractals,* 42(5), 3179-3186, 2009.

**9.** Yayenie, O., “A note on generalized Fibonacci sequences”, *Applied Mathematics and Computation*, 217(12), 5603-5611, 2011.

**10.** Yazlık, Y., Taşkara, N., Uslu, K., Yılmaz, N., “The Generalized $(s,t)$-Sequence and its Matrix Sequence”, In *AIP Conference Proceedings*, *American Institute of Physics*, 1389(1), 381-384, 2011.

**11.** Güleç, H. H., Taşkara, N., “On the $(s,t)-$Pell and $(s,t)-$Pell–Lucas sequences and their matrix representations”, *Applied Mathematics Letters*, 25(10), 1554-1559, 2012.

**12.** Uslu, K., Uygun, S., “The (s, t) Jacobsthal and $(s,t)-$Jacobsthal-Lucas Matrix Sequences”, *Ars Comb.*, 108, 13-22, 2013.

**13.** Bilgici, G., “Two generalizations of Lucas sequence”, *Applied Mathematics and Computation*, 245, 526-538, 2014.

**14.** Bilgici, G., “New generalizations of Fibonacci and Lucas sequence”, *Applied Mathematical Sciences*, 8(29), 1429-1437, 2014.

**15.** Coşkun, A., Taşkara, N., "Bi-periodic Fibonacci matrix polynomial and its binomial transforms", *arXiv preprint arXiv:1705.05128*, 2017.

**16.** Yılmaz, N., Coşkun, A., Taşkara, N., "On properties of bi-periodic Fibonacci and Lucas polynomials", In *AIP Conference Proceedings, AIP Publishing LLC*, 1863(1), 310002, 2017.

**17.** Coşkun, A., Taşkara, N., "A note on the bi-periodic Fibonacci and Lucas matrix sequences", *Applied Mathematics and Computation, 320*, 400-406, 2018.

**18.** Özdemir, M., "Introduction to hybrid numbers", *Advances in Applied Clifford Algebras*, 28(1), 1-32, 2018.

**19.** Szynal-Liana, A., "The Horadam Hybrıd Numbers", *Discussiones Mathematicae: General Algebra & Applications*, 38(1), 2018.

**20.** Szynal-Liana, A., Włoch, I., "The Fibonacci hybrid numbers", *Utilitias Mathematica*, 110, 3–10, 2019.

**21.** Özkan, E., Altun, İ., "Generalized Lucas polynomials and relationships between the Fibonacci polynomials and Lucas polynomials", *Communications in Algebra*, 47(10), 4020-4030, 2019.

**22.** Coşkun, A., "Bi-periyodik Fibonacci ve Lucas Matris Dizileri", *Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, *Doktora Tezi*, Konya, 2019.

**23.** Kızılateş, C., "A new generalization of Fibonacci hybrid and Lucas hybrid numbers", *Chaos, Solitons & Fractals*,130, 109449, 2020.

**24.** Szynal-Liana, A., Włoch, I., "Introduction to Fibonacci and Lucas hybrinomials", *Complex Variables and Elliptic Equantions*, 65(10), 1736-1747, 2020.

**25.** Verma, V., Bala, A., "On Properties of Generalized Bi-Variate Bi-Periodic Fibonacci Polynomials", *International Journal of Advanced Science and Technology*, 29(3), 8065-8072, 2020.

**26.** Szynal-Liana, A., Włoch, I., "Generalized Fibonacci-Pell Hybrinomials", *Online Journal of Analytic Combinatorics*, 15, 1-12, 2020.

**27.** Şentürk, T. D., Bilgici, G., Daşdemir, A., Ünal, Z., "A study on Horadam hybrid numbers", *Turkish Journal of Mathematics*, 44(4), 1212-1221, 2020.

**28.** Sevgi, E., "The Generalized Lucas Hybrinomials With Two Variables", *Communications Faculty Of Sciences University Of Ankara Series A1 Mathematics And Statistics*, 70(2), 622-630, 2021.

**29.** Bala, A., Verma, V., "Some properties of bi-variate bi-periodic Lucas polynomials", *Annals of the Romanian Society for Cell Biology*, 8778-8784, 2021.

**30.** Kızılateş, C., "A Note on Horadam Hybrinomials", *Fundamental Journal of Mathematics and Applications*, *5*(1), 1-9, 2022.

**31.** Köme, S., Yazan, S., "On The Generalized Fibonacci Matrix Hybrinomials", *4th International Conference on Applied Engineering and Natural Sciences*, Konya, TURKEY, 2022.

**32.** Köme, S., Yazan, S., "On the Generalized Fibonacci and Lucas Matrix Hybrinomials", *Under review*, 2023.

**33.** Bala, A., Verma, V., "A new generalization of bi-periodic Jacobsthal polynomials", *In Journal of Physics: Conference Series*, 1531(1), 012071, IOP Publishing, 2020.

**34.** Bala, A., Verma, V., "Matrix Representation of Bivariate Bi-Periodic Jacobsthal Polynomials", *European Journal of Molecular & Clinical Medicine*, 7(8), 2020.