T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LOKAL T_0 VE T_1 QUANTALE DEĞERLİ ÖNSIRALI UZAYLAR

(Yüksek Lisans Tezi)

Tezi Hazırlayan
Mesut GÜNEŞ

Tez Danışmanı
Dr. Öğr. Üyesi Samed ÖZKAN

Bu çalışma Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimince desteklenmiştir.
Proje Numarası: TEZ21F1

Eylül 2022
NEVŞEHİR

Dr. Öğr. Üyesi Samed ÖZKAN danışmanlığında **Mesut GÜNEŞ** tarafından hazırlanan **"Lokal T_0 ve T_1 Quantale Değerli Önsıralı Uzaylar"** başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

02/09/2022

JÜRİ :

Başkan : Prof. Dr. Muammer KULA

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Esma DEMİR ÇETİN

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Samed ÖZKAN

ONAY :

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun .... tarih ve .... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

.... / .... / ....

Prof. Dr. Şahlan ÖZTÜRK

Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİM SAYFASI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada yer alan bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu ve bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Mesut GÜNEŞ

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim ve tez çalışmam boyunca yardımlarını esirgemeyen beni yüreklendiren tez danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Samed ÖZKAN'a teşekkür ederim.

Yüksek lisans öğrenimim boyunca bana destek olan aileme teşekkür ederim.

Ayrıca desteklerinden dolayı Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi'ne teşekkür ederim.

Mesut GÜNEŞ

Eylül 2022, NEVŞEHİR

LOKAL T_0 VE T_1 QUANTALE DEĞERLİ ÖNSIRALI UZAYLAR

(Yüksek Lisans Tezi)

Mesut GÜNEŞ

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Eylül 2022

ÖZET

Bu tez çalışmasının temel amacı quantale değerli önsıralı uzaylar kategorisinde bir p noktasında T_0 ve T_1 objeleri karakterize ederek arasındaki ilişkiyi araştırmak ve bu objelerin kalıtsal ve çarpımsal olup olmadıklarını incelemektir. Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, literatür taraması yapılarak konunun kısa tarihçesi ve önemi üzerinde durulmuştur.

İkinci bölümde, tez çalışmasında kullanılacak olan temel kavramlar ve bunlarla ilgili bazı özellikler, örnekler ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, quantale kavramından bahsedilerek quantale değerli önsıralı uzayların tanımı verilmiştir. Bir topolojik kategori olan **L-Prord** kategorisinde başlangıç kaldırma yapısı, diskre ve indiskre objeler ifade edilmiştir.

Dördüncü bölümde, bir p noktasında wedge çarpım ve eksen dönüşümleri yardımıyla lokal T_0 ve lokal T_1 quantale değerli önsıralı uzaylar karakterize edilmiş ve arasındaki ilişki gösterilmiştir. Ayrıca bu objelerin kalıtsallık ve çarpımsallık özelliklerini sağladıkları ispatlanmıştır.

Son bölümde ise sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: *Topolojik kategori, Quantale değerli önsıralı uzay, Lokal T_0 ve T_1 L-önsıralı uzaylar, Kalıtsallık, Çarpımsallık.*

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Samed ÖZKAN

Sayfa Adeti: 53

LOCAL T_0 AND T_1 QUANTALE VALUED PREORDERED SPACES

(M.Sc. Thesis)

Mesut GÜNEŞ

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

September 2022

ABSTRACT

The main purpose of this thesis is to characterize T_0 and T_1 objects at a point p in the category of quantale-valued preordered spaces and to investigate the relationship between them and to examine whether these objects are hereditary and productive. This thesis consists of five chapters.

In the first chapter, the short history and importance of the subject are emphasized by making a literature review.

In the second chapter, the basic concepts that will be used in the thesis and some properties, examples and theorems related to them are given.

In the third chapter, the concept of quantale is mentioned and the definition of quantale-valued preordered spaces is given. In the category **L-Prord**, which is a topological category, the initial lift structure, discrete and indiscrete objects are expressed.

In the fourth chapter, with the help of wedge product and axis mappings at a point p, local T_0 and local T_1 quantale-valued preordered spaces are characterized and the relationship between them is shown. It has also been proven that these objects provide the hereditary and productive properties.

In the last chapter, conclusions and recommendations are given.

Keywords: *Topological category, Quantale valued preordered space, Local T_0 and T_1 L-preordered spaces, Hereditary, Productivity.*

Thesis Supervisor: Assist. Prof. Dr. Samed ÖZKAN
Number of Pages: 53

İÇİNDEKİLER

TABLOLAR LİSTESİ

ŞEKİLLER LİSTESİ

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

Set	Kümeler kategorisi
Top	Topolojik uzaylar kategorisi
Grp	Gruplar kategorisi
RRel	Yansımalı uzaylar kategorisi
Prord	Önsıralı bağıntı uzayları kategorisi
L-Prord	L-önsıralı uzaylar kategorisi
∞**qMet**	Genişletilmiş quasi metrik uzaylar kategorisi
ProbqMet	Olasılıksal quasi metrik uzaylar kategorisi
$\top$	Üst (top) eleman
$\bot$	Alt (bottom) eleman
$\bigvee$	Supremum
$\bigwedge$	Infimum
$(L, \leqslant, *)$	Quantale
$\lhd$	Tam latiste aşağı bağıntı
$\prec$	Tam latiste yukarı bağıntı
$Ob(\mathcal{K})$	$\mathcal{K}$ kategorisinin objeleri
$Mor(\mathcal{K})$	$\mathcal{K}$ kategorisinin morfizmleri
A_p	p noktasında temel eksen dönüşümü
S_p	p noktasında eğik eksen dönüşümü
∇_p	p noktasında katlama dönüşümü
$\vee_p$	p noktasında wedge çarpım
π_i	i-inci izdüşüm fonksiyonu

1. BÖLÜM

GİRİŞ

Matematiğin farklı dallarındaki uzmanlaşma ve farklılaşma nedeniyle ortak bir çalışma alanı bulma ihtiyacı ortaya çıkmıştır. Bu bağlamda kategori teorisi, farklı branşlarda ortak iletişim alanı sağlayan bir dil olarak 20. yüzyılın ortalarında Eilenberg ve Mac Lane [17] tarafından ortaya atılmıştır. Topoloji de matematiğin birçok dalında kullanım alanına sahip olduğundan topolojik kavramların kategorik olarak çalışılması sıklıkla tercih edilmiştir. Kategori teorisinin teorik altyapısı, bilgisayar bilimi, fizik ve mühendislik alanlarına uygulanmış ve son yıllarda uygulama alanı oldukça genişlemiştir. Örneğin kategori teorisi; bilgisayar, klimatoloji, malzeme, fizik, jeoloji gibi birçok bilim alanının yanında, özel olarak DNA ve RNA kodları konusunda, uzay gözlemlerinde, ulaşım haritaları oluşturmada, mukavemet alanında ve coğrafi bilgi sistemlerinde kullanılmaktadır. Kategoriyi gerçek dünyaya aktaran bu ve benzeri birçok önemli uygulamalar [45] de verilmiştir.

Topolojik uzaylar; yakınsak, bornolojik, limit ve önsıralama uzaylarını da kapsayacak şekilde Herrlich [23], Kent [32], Schwarz [42] ve Wyler [51] gibi birçok yazar tarafından genelleştirilerek topolojik kategori kavramı tanımlanmıştır. Bu genelleştirme farklı yollarla yapılmıştır. 1971'de Wyler [51] tam lattice kategorisindeki fanktora bağlı olarak, Herrlich [23] de 1974'te, başlangıç kaldırmalar yardımıyla topolojik kategoriyi tanımlamışlardır.

Genel Topoloji'deki ayırma aksiyomları, kompaktlık, bağlantılılık ve kapalılık gibi önemli kavramlar farklı yollarla topolojik kategoriye genişletilmiştir. Bu genişlemeler yapılırken birçoğunda kapanış operatörleri kullanılmıştır. Baran

[2] de kapanış operatörlerini kullanmadan, kümeler üzerinde tanımlı herhangi bir topolojik kategori için ilk olarak lokal olarak, yani bir p noktasında ayırma aksiyomlarını tanımlamıştır [5]. Ardından bu lokal tanımları topos teorideki üreteç eleman metodu [31] ile noktadan bağımsız tanımlara genelleştirmiştir. Bu genişlemeleri yapmanın bir amacı, Tietze genişleme teoremi, Tychonoff teoremi, Urysohn lemması, Urysohn metrikleşme teoremi gibi önemli teoremlerin ifadelerinde yer almalarıdır. Bir başka nedeni de topolojik kategorilerde kapalılık kavramının bir noktadaki ayırma aksiyomları yardımıyla tanımlanmış olmasıdır. Tüm bu nedenlerle sözü edilen bu kavramları farklı topolojik kategorilerde karakterize etmek de yararlı olmaktadır. Topolojik kavramları herhangi bir topolojik kategoriye genelleştirebilmek için bunların her birini başlangıç ve bitiş kaldırmalar, diskre ve indiskre objeler ile açıklayabilmek gerekmektedir.

Baran [2, 3] küme tabanlı topolojik kategorilerde kapalılık ve kuvvetli kapalılık kavramlarını tanımlamış ve bu kavramların bazı iyi bilinen topolojik kategorilerde Dikranjan ve Giuli anlamında [16] kapanış operatörü oluşturduğunu göstermiştir [11, 13]. Ayrıca bu kavramları kullanarak kompaktlık [8], Hausdorffluk [7] ve bağlantılılık [12] gibi önemli topolojik kavramları topolojik kategoriye genelleştirmiştir.

Ayırma aksiyomları farklı noktaları ve ayrık kapalı kümeleri, açık kümelerle ayırmayı sağlamakta ve bunun yanında birçok alanda kullanımı mevcuttur. Örneğin, cebirsel topolojide lokal yarı basit (semi-simple) örtüleri karakterize etmek için [26], bilgisayar alanında lamda kalkülüs ve programlama dilinin denotasyonel semantiğinde topolojik model olarak [41, 46], quantum mekaniğinde [49] ve dijital topolojide Khalimsky doğrusunu karakterize etmek için [22, 34] T_0 ayırma aksiyomu kullanılır. Ayrıca Baran [7] bir topolojik kategorideki Hausdorff objelerin çeşitli formlarını T_0 objeleri kullanarak tanımlamıştır. Yine keyfi bir topolojik kategoride kapalılık ve kuvvetli kapalılık kavramları bir noktadaki T_0 ve T_1 ayırma aksiyomları cinsinden tanımlanmıştır [3].

T_1 ayırma aksiyomu da cebirde maksimal idealler cinsinden Boolean latisi ve

Stone uzaylarında sıfır boyutlu uzayların bazını teorik olarak elde etmek için model olarak [18] kullanılır. Ayrıca keyfi bir topolojik kategoride T_3, T_4, regüler, tam regüler ve normal objelerin tanımlarında da yer almaktadır [9,10].

Farklı T_0 formları 1971'de Brümmer [14], 1973'te Marny [36], 1974'te Hoffmann [24], 1977'de Harvey [21] ve 1991'de Baran [2] tarafından topolojik kategoride tanımlanmıştır. Bu T_0 formları arasındaki ilişkiler 1991'de W. Schwarz [50] ve 1995'te Baran ve Altındiş [6] tarafından incelenmiştir. Ayrıca Baran [7], T_0 objeleri kullanarak bir topolojik kategorideki Hausdorff objelerin çeşitli formlarını tanımlamıştır.

1991 yılında Baran [2], "(X, τ) topolojik uzayının T_0 olması için gerek ve yeter koşul X^3 üzerindeki çarpım topolojisi τ_* olmak üzere $A : X^2 \vee_\Delta X^2 \to (X^3, \tau_*)$ ve $\nabla\colon X \vee_\Delta X \to (X, P(X))$ fonksiyonları tarafından üretilen başlangıç topolojisinin diskre olmasıdır" ve "(X, τ) topolojik uzayının T_1 olması için gerek ve yeter koşul X^3 üzerindeki çarpım topolojisi τ_* olmak üzere $S : X^2 \vee_\Delta X^2 \to (X^3, \tau_*)$ ve $\nabla\colon X \vee_\Delta X \to (X, P(X))$ fonksiyonları tarafından üretilen başlangıç topolojisinin diskre olmasıdır" ifadelerini ispatlamıştır. Burada A ve S sırasıyla temel ve eğik eksen dönüşümleridir. T_0 ve T_1 ayırma aksiyomlarını bu teoremler yardımıyla topolojik kategoriye genelleştirmiştir. Buna ek olarak 1998 yılında T_1 objeleri kullanarak herhangi bir topolojik kategorideki T_3, T_4 regüler, tam regüler ve normal objeleri tanımlamıştır [9,10].

Bilgisayar biliminin gelişmesi ile sonlu topolojik uzaylar büyük önem kazanmıştır. Sierpinski uzayı Scott topolojisindeki [20, 44] açık kümeleri karakterize ettiğinden semantik ve hesaplama teorisi ile ilişkisi vardır. Sonlu bir küme üzerinde T_0 topolojilerinin sayıları ile bu küme üzerindeki kısmi sıralama bağıntılarının sayıları eşittir [47,48].

Sonlu bir küme üzerinde sadece bir tane Haussdorff topoloji olmasına rağmen, bir çok T_0 topolojisi yazılabilir. Örneğin, iki elemanlı herhangi bir X kümesi üzerinde toplam 4 farklı topoloji mevcuttur. Bunlardan 3 tanesi T_0 topolojisi olup 2 tanesi de homeomorfik değildir. Dört elemanlı herhangi bir X kümesi üzerinde de 33 tanesi homeomorfik olmayan toplam 355 farklı topoloji yazılabilir, bunların da 16 tanesi homeomorfik olmayan toplam 219 tanesi T_0 topolojisidir.

Sıra (order) teorisi, ikili bağıntıların birçok çeşidi ile ilgilenen bir matematik dalıdır. Bu ikili bağıntılar, matematik alanında ve bilgisayar bilimi gibi matematikle yakın ilişkili alanlarda matematiksel sıralama kavramını oluşturur. Alan (domain) teorisi ise, matematik ve bilgisayar bilimi arasında bir arayüz olup, hızla gelişen bir daldır ve alanlar (domains) olarak bilinen bazı özel kısmi sıralı kümelerle (posets) ilgilenir. Bu nedenle alan teorisi, sıra teorisinin bir dalı olarak düşünülebilir. Bu tez çalışmasında sıra teorisinde önemli bir yer tutan önsıralı (preordered) uzaylar üzerinde durulmuştur.

Matematikte bir tam latis, tüm alt kümelerin hem bir supremuma hem de bir infimuma sahip olduğu, kısmi sıralı bir kümedir. Quantale kavramı da üzerinde tanımlanan bir $*$ işlemi ile yarı grup olan ve bu işlemin keyfi supremum operatörü (join) üzerine dağılma özelliğini sağlayan bir tam latis olarak tanımlanmıştır.

Latis teorisinin gelişmesiyle birlikte topolojik uzay, metrik uzay, yaklaşım (approach) uzayı, yakınsak uzay ve önsıralı uzay gibi birçok matematiksel yapı, latis ve quantale değerlerle donatılarak yeniden ele alınmış ve bazı ilginç sonuçlar elde edilmiştir [15, 27–30, 40]. Fakat aşağıda tanımı verilen quantale değerli önsıralı uzayların topolojik kategorisinde birçok önemli topolojik kavram henüz incelenmemiştir.

Tanım 1.0.1. [30, 52] X boştan farklı bir küme olmak üzere aşağıdaki şartları sağlayan bir $\mathcal{R} : X \times X \to \mathsf{L}$ dönüşümüne X üzerinde bir L-önsıralama bağıntısı, $(X, \mathcal{R})$ ikilisine de bir L-önsıralı uzay denir.

(i) Her $x \in X$ için $\mathcal{R}(x, x) = \top$ dir (yansıma özelliği).

(ii) Her $x, y, z \in X$ için $\mathcal{R}(x, y) * \mathcal{R}(y, z) \leq \mathcal{R}(x, z)$ dir (geçişme özelliği).

Tanım 1.0.2. [30, 52] $(X, \mathcal{R}_X)$ ve $(Y, \mathcal{R}_Y)$ L-önsıralı uzaylar olmak üzere, bir $f : (X, \mathcal{R}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{R}_Y)$ dönüşümü verilsin. Eğer her $x_1, x_2 \in X$ için $\mathcal{R}_X(x_1, x_2) \leqslant \mathcal{R}_Y(f(x_1), f(x_2))$ oluyorsa f dönüşümüne L-sıra koruyan dönüşüm denir.

Not 1.0.1. Objeleri L-önsıralı uzaylar, morfizmleri L-sıra koruyan dönüşümler olan kategoriye L-önsıralı uzaylar kategorisi denir ve **L-Prord** şeklinde gösterilir. **L-Prord** kategorisi **Set** (kümeler kategorisi) üzerinde bir topolojik kategoridir [25].

Bu tez çalışmasının temel amacı quantale değerli önsıralı uzaylar (**L-Prord**) kategorisinde bir p noktasında T_0 ve T_1 objeleri karakterize ederek arasındaki ilişkiyi araştırmak ve bu objelerin kalıtsal ve çarpımsal olup olmadıklarını incelemektir.

2. BÖLÜM

TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

Bu bölümde bağıntı kavramı ve çeşitleri, bazı özellikleri ile çeşitli örnekler verilmiştir. Kategori kavramından, bu teorideki temel kavramlardan ve bazı önemli teoremlerden ayrıntılı olarak bahsedilmiştir.

2.1. Bağıntılar

Tanım 2.1.1. [38] X ve Y boştan farklı kümeler olmak üzere $X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$ kümesine X ve Y nin kartezyen çarpımı ve $X \times Y$ nin herhangi bir alt kümesine X den Y ye bir bağıntı denir. Özel olarak $X \times X$ in bir alt kümelesine de X de bir bağıntı adı verilir.

Tanım 2.1.2. X boştan farklı küme ve R de X üzerinde bir bağıntı olmak üzere aşağıdaki özellikler verilsin.

(i) Her $x \in X$ için $(x, x) \in R$ dir (yansıma özelliği).

(ii) $(x, y) \in R$ iken $(y, x) \in R$ dir (simetri özelliği).

(iii) $(x, y) \in R$ iken $(y, x) \notin R$ dir (ters simetri özelliği).

(iv) Eğer $(x, y) \in R$ ve $(y, z) \in R$ ise $(x, z) \in R$ dir (geçişme özelliği).

Buna göre;

1. Eğer R bağıntısı (i) yansıma ve (iv) geçişme özellikleri sağlıyor ise R ye X de bir önsıralama bağıntısı denir.

2. Eğer R bağıntısı (i) yansıma, (iii) ters simetri ve (iv) geçişme özellikleri sağlıyor ise R ye X de bir kısmi sıralama bağıntısı denir. Üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı olan herhangi bir X kümesine de kısmi sıralı bir küme denir ve $(X, \leqslant)$ olarak ifade edilir. Burada $(x, y) \in R \iff x \leqslant y$ dir.

3. Eğer R bağıntısı (i) yansıma, (ii) simetri ve (iv) geçişme özellikleri sağlıyor ise R ye X de bir denklik bağıntısı denir.

Örnek 2.1.1. $X = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerinde

$$R_1 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(b,d),(a,d),(b,a)\}$$

$$R_2 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(b,d),(a,d)\}$$

$$R_3 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(b,d),(d,b),(b,a),(a,d),(d,a)\}$$

$$R_4 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(b,d),(b,a)\}$$

$$R_5 = \{(a,a),(b,b),(d,d),(a,c),(c,d),(a,d)\}$$

bağıntıları verilsin. Buna göre;

1. R_1 bağıntısı (i) yansıma ve (iv) geçişme özelliklerini sağladığı için X üzerinde bir önsıralama bağıntısıdır. Fakat $(a, b) \in R_1$ iken $(b, a) \in R_1$ olduğundan (iii) ters simetri özelliği sağlanmaz. Bu nedenle R_1 bağıntısı bir kısmi sıralama bağıntısı değildir. Benzer şekilde $(b, d) \in R_1$ iken $(d, b) \notin R_1$ olduğundan (ii) simetri özelliği de sağlanmaz. O halde R_1 bağıntısı bir denklik bağıntısı da değildir.

2. R_2 bağıntısı (i) yansıma, (iii) ters simetri ve (iv) geçişme özelliklerini sağladığı için X üzerinde hem bir önsıralama hem de bir kısmi sıralama bağıntısıdır. Fakat R_2 bir denklik bağıntısı değildir. Çünkü $(b, d) \in R_2$ iken $(d, b) \notin R_2$ olduğundan (ii) simetri özelliği sağlanmaz.

3. R_3 bağıntısı (i) yansıma, (ii) simetri ve (iv) geçişme özelliklerini sağladığı için X üzerinde hem bir önsıralama hem de bir denklik bağıntısıdır. Fakat R_3 bir kısmi sıralama bağıntısı değildir. Çünkü $(b, d) \in R_3$ iken $(d, b) \in R_3$ olduğundan (iii) ters simetri özelliği sağlanmaz.

4. R_4 bağıntısı için $(a,b) \in R_4$ ve $(b,d) \in R_4$ iken $(a,d) \notin R_4$ olduğundan (iv) geçişme özelliği sağlanmaz. Bu nedenle R_4 bağıntısı bir önsıralama, kısmi sıralama veya denklik bağıntısı değildir.

5. R_5 bağıntısı için $(c,c) \notin R_5$ olduğundan (i) yansıma özelliği sağlanmaz. Bu nedenle R_5 bağıntısı bir önsıralama bağıntısı değildir.

Tanım 2.1.3. [38] $(X, \leqslant)$ kısmi sıralı bir küme olsun. Eğer her $x, y \in X$ için ya $x \leqslant y$ ya da $y \leqslant x$ oluyorsa, diğer bir ifadeyle X in tüm elemanları karşılaştırılabilir ise, bu kısmi sıralama bağıntısına tam sıralama bağıntısı ve X kümesine de tam sıralı bir küme denir.

Örnek 2.1.2. [38] $(\mathbb{R}, \leqslant)$ reel sayılar kümesi tam sıralı bir kümedir. Fakat $\subseteq$ kapsama bağıntısı olmak üzere herhangi bir X kümesi için $(P(X), \subseteq)$ tam sıralı değildir. Çünkü $P(X)$ in bazı elemanları karşılaştırılamaz.

2.2. Önsıralı Uzaylar

Tanım 2.2.1. X boştan farklı küme ve R de X üzerinde bir önsıralama bağıntısı olmak üzere (X, R) ye bir önsıralı uzay denir.

Örnek 2.2.1. İki elemanlı bir $X = \{1, 2\}$ kümesi üzerinde yazılabilecek tüm önsıralama bağıntıları aşağıda verilmiştir.

$$\alpha_1 = \{(1,1), (2,2)\}$$

$$\alpha_2 = \{(1,1), (2,2), (1,2)\}$$

$$\alpha_3 = \{(1,1), (2,2), (2,1)\}$$

$$\alpha_4 = \{(1,1), (2,2), (1,2), (2,1)\}$$

Buna göre, $i = 1, 2, 3, 4$ için (X, α_i) bir önsıralı uzaydır.

Örnek 2.2.2. $A = \{x, y, z\}$ kümesi üzerinde aşağıdaki bağıntılar verilsin.

$$\beta_1 = \{(x,x), (y,y), (z,z)\}$$

$$\beta_2 = \{(x,x), (y,y), (z,y)\}$$

$\beta_3 = \{(x,x),(y,y),(z,z),(x,y)\}$

$\beta_4 = \{(x,x),(y,y),(z,z),(x,y),(y,z)\}$

$\beta_5 = \{(x,x),(y,y),(z,z),(x,y),(y,z),(x,z)\}$

$\beta_6 = \{(x,x),(y,y),(y,x),(x,z)\}$

Buna göre, $i = 1,3,5$ için (A,β_i) bir önsıralı uzaydır, fakat $j = 2,4,6$ için (A,β_j) bir önsıralı uzay değildir. Çünkü, β_2 bağıntısı için $(z,z) \notin \beta_2$ olduğundan yansıma özelliği sağlanmaz; β_4 bağıntısı için $(x,y),(y,z) \in \beta_4$ iken $(x,z) \notin \beta_4$ olduğundan geçişme özelliği sağlanmaz; β_6 bağıntısı için de hem $(z,z) \notin \beta_6$ olduğundan yansıma özelliği sağlanmaz, hem de $(y,x),(x,z) \in \beta_6$ iken $(y,z) \notin \beta_6$ olduğundan geçişme özelliği sağlanmaz.

2.3. Kategori

Tanım 2.3.1. [38] $Ob(\mathcal{K})$ objelerin bir sınıfını ve $\mathcal{K}(X,Y)$ da her bir $X,Y \in Ob(\mathcal{K})$ için X objesinden Y objesine tüm morfizmlerin sınıfını göstersin ve

$$Mor(\mathcal{K}) = \bigcup_{X,Y \in Ob(\mathcal{K})} \mathcal{K}(X,Y)$$

ile tanımlansın. $Mor(\mathcal{K})$ üzerinde her $X,Y,Z \in Ob(\mathcal{K})$ için

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}(Y,Z) \times \mathcal{K}(X,Y) & \longrightarrow & \mathcal{K}(X,Z) \\ (g,f) & \longmapsto & g \circ f \end{array}$$

ile tanımlı kısmi işlem aşağıdaki özellikleri sağlasın:

(1) Eğer $f \in \mathcal{K}(X,Y)$, $g \in \mathcal{K}(Y,Z)$ ve $h \in \mathcal{K}(Z,T)$ ise $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ dir.

(2) Her bir $X \in Ob(\mathcal{K})$ için $f \in \mathcal{K}(X,-)$ ve $g \in \mathcal{K}(-,X)$ iken $f \circ 1_X = f$ ve $1_X \circ g = g$ olacak şekilde bir $1_X \in \mathcal{K}(X,X)$ birim morfizmi mevcuttur.

Bu şekildeki yapıya bir kategori denir ve $\mathcal{K}$ ile gösterilir.

Örnek 2.3.1. Objeleri $X, Y, Z, ...$ gibi kümeler, morfizmleri kümeler arasındaki fonksiyonlar ve kısmi işlem de fonksiyonların bileşkesi olarak tanımlı yapı bir kategoridir ve bu kategoriye kümelerin kategorisi denir. $\mathcal{K} =$ **Set** ile gösterilir. Burada,

(1) $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ ve $h: Z \to T$ olmak üzere fonksiyonlarda $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ birleşme özelliği sağlanır.

(2) Her bir X kümesi için birim morfizm $1_X: X \to X$ birim fonksiyonudur. Ayrıca her $f: X \to Y$ fonksiyonu için $f \circ 1_X = f$ ve her $g: Y \to X$ fonksiyonu için $1_X \circ g = g$ dir.

Örnek 2.3.2. Objeleri $(X, \tau), (Y, \sigma), (Z, \delta), ...$ gibi topolojik uzaylar, morfizmleri topolojik uzaylar arasındaki sürekli fonksiyonlar ve kısmi işlem de fonksiyonların bileşkesi olarak tanımlı yapı bir kategoridir ve bu kategoriye topolojik uzayların kategorisi denir. $\mathcal{K} =$ **Top** ile gösterilir.

(1) $f: (X, \tau) \to (Y, \sigma)$, $g: (Y, \sigma) \to (Z, \delta)$ ve $h: (Z, \delta) \to (T, \mu)$ olmak üzere f, g ve h fonksiyonları sürekli olduklarından bunların bileşkeleri süreklidir ve $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ birleşme özelliği sağlanır.

(2) $(X, \tau) \to (X, \tau)$ olacak şekilde $1_X: X \to X$ birim fonksiyonu vardır ve süreklidir. Ayrıca her $f: (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ fonksiyonu için $f \circ 1_X = f$ ve her $g: (Y, \sigma) \to (X, \tau)$ fonksiyonu için $1_X \circ g = g$ dir.

Örnek 2.3.3. Objeleri $(G, \circ), (H, \triangle), ...$ gibi gruplar, morfizmleri grup homomorfizmleri ve kısmi işlem de grup homomorfizmlerinin bileşkesi olarak tanımlı yapı bir kategoridir ve bu kategoriye grupların kategorisi denir. $\mathcal{K} =$ **Grp** ile gösterilir.

Örnek 2.3.4. [38] Birimli bir yarı gruba monoid adı verilir. Bir M monoidi tek objeli bir $\mathcal{K}$ kategorisidir. Burada $Ob(\mathcal{K}) = \{*\}$ ve $Mor(\mathcal{K}) = \mathcal{K}(*, *) = M$ dir. Yani, her bir $m \in M$ elemanı $\mathcal{K}$ nin bir $m: * \to *$ morfizmi olarak alınır. $\mathcal{K}$ nin 1_* birim morfizmi $e \in M$ birim elemanı ve $\mathcal{K}$ kategorisinin kısmi işlemi ise monoidin işlemidir. Buradan kategori kavramının monoidin bir genelleştirmesi olduğu sonucunu çıkarabiliriz.

Tablo 2.1. Kategori Örnekleri

Kategori	Objeler	Morfizmler
Set	Kümeler	Fonksiyonlar
Top	Topolojik Uzaylar	Sürekli Dönüşümler
Grp	Gruplar	Grup Homomorfizmleri
Met	Metrik Uzaylar	Sürekli Dönüşümler
Vec	Vektör Uzayları	Lineer Dönüşümler
Rel	Bağıntılar	Monoton Dönüşümler
RRel	Yansımalı Bağıntılar	Monoton Dönüşümler
Prord	Önsıralı Bağıntılar	Sıra Koruyan Dönüşümler

Tanım 2.3.2. [38] $\mathcal{K}$ ve $\mathcal{L}$ iki kategori olmak üzere, aşağıdaki şartlar sağlanıyor ise $\mathcal{L}$ kategorisine $\mathcal{K}$ nin bir alt kategorisi denir.

(1) $Ob(\mathcal{L}) \subseteq Ob(\mathcal{K})$ dir.

(2) Her bir $X, Y \in Ob(\mathcal{L})$ için $\mathcal{L}(X, Y) \subseteq \mathcal{K}(X, Y)$ dir.

(3) $\mathcal{L}$ kategorisindeki morfizmlerin kısmi bileşke işlemi, $\mathcal{K}$ kategorisindeki morfizmlerin kısmi bileşke işlemi ile aynıdır.

(4) Her bir $X \in Ob(\mathcal{L})$ için $\mathcal{L}$ deki 1_X birim morfizmi, $\mathcal{K}$ deki birim morfizm ile aynıdır.

Tanım 2.3.3. [38] $\mathcal{L}$ kategorisi $\mathcal{K}$ nin bir alt kategorisi olmak üzere, her $X, Y \in Ob(\mathcal{L})$ obje çifti için,

(1) $\mathcal{L}(X, Y) = \mathcal{K}(X, Y)$ ise $\mathcal{L}$ ye dolu alt kategori,

(2) $Ob(\mathcal{L}) = Ob(\mathcal{K})$ ise $\mathcal{L}$ ye geniş alt kategori denir.

Örnek 2.3.5. **Top** ve **Grp** kategorileri **Set** kategorisinin alt kategorileridir. Ayrıca yansımalı uzaylar kategorisi **RRel** ve önsıralı bağıntı uzayları kategorisi **Prord**, **Rel** bağıntı uzayları kategorisinin dolu alt kategorileridir.

Tanım 2.3.4. [38] $\mathcal{K}$ bir kategori ve $A \in Ob(\mathcal{K})$ olsun.

(1) Her bir $X \in Ob(\mathcal{K})$ için $\mathcal{K}(A, X)$ sınıfı bir tek morfizme sahip ise A objesine $\mathcal{K}$ kategorisinin başlangıç objesi denir.

(2) Her bir $X \in Ob(\mathcal{K})$ için $\mathcal{K}(X, A)$ sınıfı bir tek morfizme sahip ise A objesine $\mathcal{K}$ kategorisinin bitiş objesi denir.

(3) Bir A objesi hem başlangıç hem de bitiş objesi ise A objesine $\mathcal{K}$ kategorisinin sıfır objesi denir.

Örnek 2.3.6. (1) **Set** kategorisinde başlangıç ve bitiş objeler sırasıyla boş küme ve bir tek nokta kümesidir. Çünkü boş kümeden herhangi bir kümeye giden bir tek fonksiyon boş fonksiyondur. Ayrıca her kümeden tek elemanlı bir kümeye giden bir tek fonksiyon sabit fonksiyondur.

(2) **Grp** kategorisinin başlangıç ve bitiş objesi aynı olduğundan sadece birim elemandan oluşan grup sıfır objedir.

Tablo 2.2. Bazı Kategorilerde Başlangıç ve Bitiş Objeler

Kategori	Başlangıç Objesi	Bitiş Objesi
Set	$\emptyset$	$\{*\}$
Top	$(\emptyset, \{\emptyset\})$	$(\{*\}, \{\emptyset, \{*\}\})$
Grp	$(\{e\}, \circ)$	$(\{e\}, \circ)$

Tanım 2.3.5. [1] $\mathcal{K}$ bir kategori ve $A, B \in Ob(\mathcal{K})$ olsun.

(1) $f\colon X \to Y$ morfizmi bir monomorfizmdir ancak ve ancak f morfizmi soldan sadeleşme özelliğine sahiptir, yani verilen herhangi bir Z objesi ve $g, h\colon Z \to X$ morfizmleri için $f \circ g = f \circ h$ ise $g = h$ dir.

(2) $f\colon X \to Y$ morfizmi bir epimorfizmdir ancak ve ancak f morfizmi sağdan sadeleşme özelliğine sahiptir, yani verilen herhangi bir Z objesi ve $g, h\colon Y \to Z$ morfizmleri için $g \circ f = h \circ f$ ise $g = h$ dir.

(3) $f\colon X \to Y$ morfizmi bir bimorfizmdir ancak ve ancak f morfizmi soldan ve sağdan sadeleşme özelliğine sahiptir, yani f bir monomorfizm ve epimorfizmdir.

(4) $f\colon X \to Y$ morfizmi bir izomorfizmdir ancak ve ancak $g \circ f = 1_X$ ve $f \circ g = 1_Y$ olacak şekilde bir $g\colon Y \to X$ morfizmi mevcuttur.

Tablo 2.3. Özel Morfizmlerin **Set** ve **Top** Kategorilerindeki Karşılıkları

Kategori	**Set**	**Top**
Monomorfizm	Birebir Fonksiyon	Birebir ve Sürekli Fonksiyon
Epimorfizm	Örten Fonksiyon	Örten ve Sürekli Fonksiyon
Bimorfizm	Bijektif Fonksiyon	Bijektif ve Sürekli Fonksiyon
İzomorfizm	Bijektif Fonksiyon	Homeomorfizm

Tanım 2.3.6. [38] Bir $\mathcal{K}$ kategorisinde morfizmlerin bir

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "k"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ Z \arrow[r, "h"'] & T \end{tikzcd}$$

diyagramı verilsin. Eğer $g \circ f = h \circ k$ oluyorsa, yani başlangıç ve bitişleri aynı olan bileşke morfizmleri eşit ise bu diyagrama değişmeli diyagram denir.

Tanım 2.3.7. [38] Bir $\mathcal{K}$ kategorinde $f\colon X \to Y$ ve $g\colon X \to Z$ morfizmleri verilsin. Bir $P \in Ob(\mathcal{K})$ objesi ve $p_1\colon Y \to P$, $p_2\colon Z \to P$ morfizmleri için

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, "p_1"] \\ Z \arrow[r, "p_2"'] & P \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli ($p_1 \circ f = p_2 \circ g$) olmak üzere, herhangi bir

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, "t_1"] \\ Z \arrow[r, "t_2"'] & T \end{tikzcd}$$

değişmeli ($t_1 \circ f = t_2 \circ g$) diyagramı verildiğinde, $\theta \circ p_1 = t_1$ ve $\theta \circ p_2 = t_2$ olacak şekilde bir tek $\theta\colon P \to T$ morfizmi varsa, yani

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, "p_1"'] \arrow[ddr, bend left, "t_1"] & \\
Z \arrow[r, "p_2"] \arrow[drr, bend right, "t_2"'] & P \arrow[dr, dotted, "\theta"] & \\
& & T
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli oluyorsa

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, "p_1"] \\
Z \arrow[r, "p_2"'] & P
\end{tikzcd}$$

diyagramına f ve g nin pushoutu (ileri itmesi) denir.

Örnek 2.3.7. **Set** kategorisinde $f\colon X \to Y$ ve $g\colon X \to Z$ fonksiyonları verilsin. i_1 ve i_2 içine fonksiyonlar olmak üzere f ve g nin pushoutu aşağıdaki değişmeli $(i_1 \circ f = i_2 \circ g)$ diyagramdır.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, "i_1"] \\
Z \arrow[r, "i_2"'] & P
\end{tikzcd}$$

Burada P kümesi, ortak ters görüntülere sahip olan Y ve Z nin elemanlarını tek bir elemana götürecek şekilde tanımlı, Y ve Z kümelerinin ayrık birleşimidir. Diğer bir ifadeyle $\simeq$, her $x \in X$ için $f(x) \simeq g(x)$ olacak şekildeki en ince denklik bağıntısı olmak üzere $P = (Y \sqcup Z)/\simeq$ dir.

2.4. Fanktor

Bir kategoride morfizm kavramı, objeler arasında bir dönüşüm olarak tanımlandığı gibi fanktor kavramı da kategoriler arasında bir dönüşüm olarak tanımlanır.

Tanım 2.4.1. [38] $\mathcal{K}$ ve $\mathcal{L}$ kategorileri verilsin. $\mathcal{K}$ nin her bir X objesini $\mathcal{L}$ nin bir $F(X)$ objesine, $\mathcal{K}$ nin her bir $f\colon X \to Y$ morfizmini $\mathcal{L}$ nin bir $F(f)\colon F(X) \to F(Y)$ morfizmine dönüştüren ve aşağıdaki şartları sağlayan bir $F\colon \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ dönüşümüne fanktor denir.

(1) Her $X \in Ob(\mathcal{K})$ için $F(1_X) = 1_{F(X)}$ dır.

(2) $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ dir.

Örnek 2.4.1. [38] Bir $\mathcal{K}$ kategorisinde objeleri ve morfizmleri kendisine dönüştüren $F\colon \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ fanktoruna birim fanktor denir ve $I = 1_{\mathcal{K}}\colon \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ şeklinde gösterilir.

Örnek 2.4.2. **Top** kategorisinde her bir (X, τ) topolojik uzayını, üzerindeki topoloji yapısını unutarak sadece X kümesine ve her bir $f\colon (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ sürekli fonksiyonunu kümeler arasındaki $f\colon X \to Y$ fonksiyonuna dönüştüren $U\colon$ **Top** $\to$ **Set** bir fanktordur ve bu fanktora unutkan fanktor adı verilir. Burada;

(1) Her $(X,\tau) \in Ob(\mathbf{Top})$ için $U(1_{(X,\tau)}) = 1_{U(X,\tau)} = 1_X$ dir.

(2) $U(g) = g$ ve $U(f) = f$ olduğundan $U(g) \circ U(f) = g \circ f$ ve $U(g \circ f) = g \circ f$ dir. $U(g \circ f) = U(g) \circ U(f)$ olur.

$$\begin{array}{cccc} U_1 & : & \mathbf{Grp} & \longrightarrow & \mathbf{Set} \\ U_2 & : & \mathbf{Prord} & \longrightarrow & \mathbf{Set} \\ U_3 & : & \mathbf{TopGrp} & \longrightarrow & \mathbf{Grp} \end{array}$$

şeklinde farklı unutkan fanktorlar da tanımlanabilir.

Örnek 2.4.3. (1) **Set** kategorisinde her bir X kümesini, üzerine diskre topoloji yapısı eklenerek $(X, P(X))$ diskre topolojik uzayına ve her bir $f\colon X \to Y$ fonksiyonunu topolojik uzaylar arasındaki $D(f) = f\colon (X, P(X)) \to (Y, P(Y))$ sürekli fonksiyonuna dönüştüren $D\colon$ **Set** $\to$ **Top** dönüşümü bir fanktordur ve bu fanktora diskre fanktor adı verilir.

(2) **Set** kategorisinde her bir X kümesini, üzerine indiskre topoloji yapısı eklenerek $(X, \{\emptyset, X\})$ indiskre topolojik uzayına ve her bir $f\colon X \to Y$ fonksiyonunu topolojik uzaylar arasındaki $D^*(f) = f\colon (X, \{\emptyset, X\}) \to (Y, \{\emptyset, Y\})$ sürekli fonksiyonuna dönüştüren $D^*\colon$ **Set** $\to$ **Top** dönüşümü bir fanktordur ve bu fanktora indiskre fanktor adı verilir.

Tanım 2.4.2. [1] $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$ kategorileri ve $F\colon \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ fanktoru verilsin.

(1) Her $X, Y \in Ob(\mathcal{K})$ ve her $f\colon F(X) \to F(Y)$ morfizmi için $F(g) = f$ olacak şekilde en az bir $g\colon X \to Y$ morfizmi varsa F ye dolgun (full) fanktor adı verilir.

(2) Her $X, Y \in Ob(\mathcal{K})$ ve her $f, g\colon X \to Y$ morfizmleri için $F(f) = F(g)$ iken $f = g$ oluyorsa F ye düzenli (faithful) fanktor adı verilir.

(3) $f\colon X \to Y$ morfizmi için $F(f) = 1_{F(X)}$ ve f izomorfizm iken $f = 1_X$ oluyorsa F ye amnestik fanktor adı verilir.

(4) F fanktoru düzenli ve amnestik ise F ye belirli (concrete) fanktor adı verilir.

(5) Her $Y \in Ob(\mathcal{L})$ objesi için $F^{-1}(Y) = \{X \in Ob(\mathcal{K}) \mid F(X) = Y\}$ bir küme ise F ye küçük demetlere sahip fanktor adı verilir.

Fanktor kavramı kategoriler arasında bir dönüşüm olarak tanımlandığı gibi doğal dönüşüm kavramı da fanktorlar arasında bir dönüşüm olarak tanımlanır.

Tanım 2.4.3. [38] $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$ kategorileri ve $F, G\colon \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ fanktorları verilsin. Her $X \in Ob(\mathcal{K})$ objesini $\mathcal{L}$ nin bir $\alpha_X\colon F(X) \to G(X)$ morfizmine dönüştüren bir $\alpha\colon Ob(\mathcal{K}) \to Mor(\mathcal{L})$ dönüşümü verilsin. $\mathcal{K}$ kategorisindeki her bir $f\colon X \to Y$ morfizmi için

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\alpha_Y"'] & G(Y) \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli ise α ya F den G ye bir doğal dönüşüm denir ve $\alpha\colon F \to G$ şeklinde gösterilir.

Örnek 2.4.4. $F\colon \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ fanktoru verilsin. Her bir $A \in Ob(\mathcal{K})$ objesini $1_{F(A)}\colon F(A) \to F(A)$ birim morfizmine dönüştüren $1_F\colon F \to F$ doğal dönüşümüne birim doğal dönüşüm denir.

Örnek 2.4.5. $U\colon \textbf{Top} \to \textbf{Set}$ unutkan, $D\colon \textbf{Set} \to \textbf{Top}$ diskre ve $D^{*}\colon \textbf{Set} \to \textbf{Top}$ indiskre fanktorları verilsin.

(1) $\alpha\colon I \to U \circ D \quad (\textbf{Set} \to \textbf{Set})$

(2) $\beta\colon D \circ U \to I \quad (\textbf{Top} \to \textbf{Top})$

(3) $\gamma\colon I \to D^{*} \circ U \quad (\textbf{Top} \to \textbf{Top})$

(4) $\mu\colon U \circ D^{*} \to I \quad (\textbf{Set} \to \textbf{Set})$

dönüşümleri birer doğal dönüşümdür.

Tanım 2.4.4. [1] $\mathcal{K}$ ve $\mathcal{L}$ kategorileri, $F\colon \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ ve $G\colon \mathcal{L} \to \mathcal{K}$ fanktorları verilsin. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyor ise G ye F nin sol adjointi veya F ye G nin sağ adjointi denir.

(1) $\alpha\colon I \to F \circ G$ ve $\beta\colon G \circ F \to I$ doğal dönüşümler olmalıdır.

(2) $G \xrightarrow{G\alpha} G \circ F \circ G \xrightarrow{\beta G} G$ olmak üzere $(\beta G) \circ (G\alpha) = I$ ve
$F \xrightarrow{\alpha F} F \circ G \circ F \xrightarrow{F\beta} F$ olmak üzere $(F\beta) \circ (\alpha F) = I$
eşitlikleri sağlanmalıdır.

Örnek 2.4.6. **Top** ve **Set** kategorileri için $U\colon \textbf{Top} \to \textbf{Set}$ unutkan fanktor ve $D\colon \textbf{Set} \to \textbf{Top}$ diskre fanktor verilsin. Buna göre D, U nun sol adjointi ve U da D nin sağ adjointidir.

2.5. Topolojik Kategori

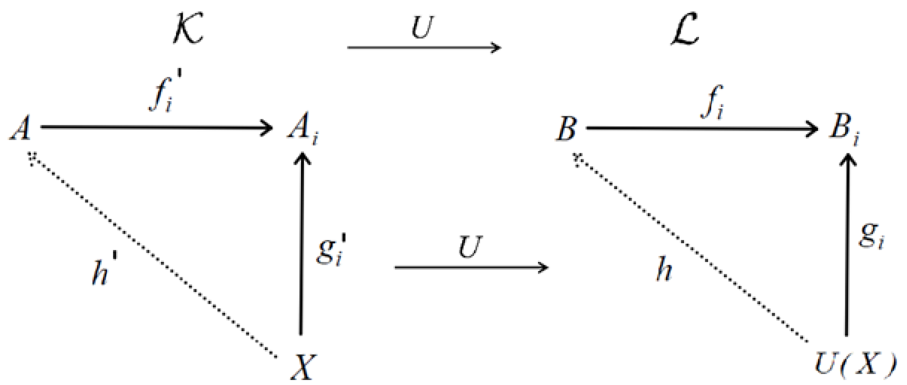
Tanım 2.5.1. [1] $\mathcal{K}$ bir kategori ve I bir indis kümesi olsun. $i \in I$ için X ve $X_i \in Ob(\mathcal{K})$ olmak üzere,

(1) $f_i\colon X \to X_i$ morfizmleri için $(X, \{f_i\}_{i\in I})$ ikilisine bir kaynak adı verilir.

(2) $g_i\colon X_i \to X$ morfizmleri için $(\{g_i\}_{i\in I}, X)$ ikilisine bir kavşak adı verilir.

Tanım 2.5.2. $\mathcal{K}$ ve $\mathcal{L}$ kategoriler olmak üzere bir $U\colon \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ fanktoru verilsin. $i \in I$ için $A_i \in Ob(\mathcal{K})$ ve $f_i\colon B \to B_i = U(A_i)$ morfizmleri $\mathcal{L}$ kategorisinde bir U-kaynağı olsun. $\{f_i\}_{i\in I}$ ailesinin bir başlangıç kaldırmasının (initial lift) $A \in Ob(\mathcal{K})$, $U(A) = B$ ve $U(f_i') = f_i$ olacak şekildeki $f_i'\colon A \to A_i$ morfizmler ailesi olması için aşağıdaki şart sağlanmalıdır:

$g_i'\colon X \to A_i$, $\mathcal{K}$ kategorisinde morfizmlerin bir ailesi ve $U(g_i') = g_i$ olmak üzere her $i \in I$ için $f_i \circ h = g_i$ olacak şekilde bir $h\colon U(X) \to B$ morfizmi varsa her $i \in I$ için $f_i' \circ h' = g_i'$ olacak şekilde en az bir $h'\colon X \to A$ morfizmi vardır.



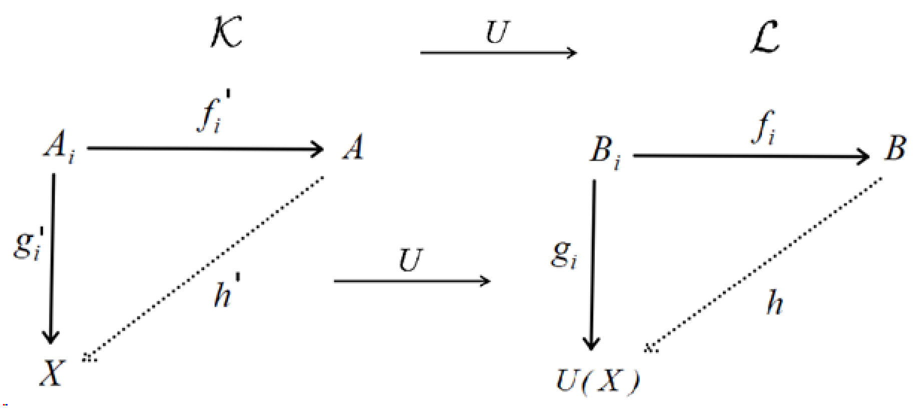
Şekil 2.1. Başlangıç Kaldırma

Eğer $f_i'\colon A \to A_i$ bir başlangıç kaldırma ise A üzerindeki yapıya f_i' morfizmleri tarafından A_i objelerinden elde edilen yapı denir.

Tanım 2.5.3. $\mathcal{K}$ ve $\mathcal{L}$ kategoriler olmak üzere bir $U\colon \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ fanktoru verilsin. $i \in I$ için $A_i \in Ob(\mathcal{K})$ ve $f_i\colon U(A_i) = B_i \to B$ morfizmleri $\mathcal{L}$ kategorisinde bir U-kavşağı olsun. $\{f_i\}_{i\in I}$ ailesinin bir bitiş kaldırmasının (final lift) $A \in Ob(\mathcal{K})$, $U(A) = B$ ve $U(f_i') = f_i$ olacak şekildeki $f_i'\colon A_i \to A$ morfizmler ailesi olması için aşağıdaki şart sağlanmalıdır:

$g_i'\colon A_i \to X$, $\mathcal{K}$ kategorisinde morfizmlerin bir ailesi ve $U(g_i') = g_i$ olmak üzere her $i \in I$ için $h \circ f_i = g_i$ olacak şekilde bir $h\colon B \to U(X)$ morfizmi varsa her $i \in I$ için $h' \circ f_i' = g_i'$ olacak şekilde en az bir $h'\colon A \to X$ morfizmi vardır.

Eğer $f_i'\colon A_i \to A$ bir bitiş kaldırma ise A üzerindeki yapıya f_i' morfizmleri tarafından A_i objelerinden elde edilen yapı denir.



Şekil 2.2. Bitiş Kaldırma

Not 2.5.1. Topolojik kategorilerde keyfi bir U-kavşağının bitiş kaldırmasının varlığı, keyfi bir U-kaynağının başlangıç kaldırmasının varlığına denktir. Bu kavramlar birbirinin dualidir.

Tanım 2.5.4. [1] $\mathcal{K}$ ve $\mathcal{L}$ kategoriler olmak üzere bir $U\colon \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ fanktoru verilsin. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyor ise U ya bir topolojik fanktor veya $\mathcal{K}$ kategorisine $\mathcal{L}$ üzerinde bir topolojik kategori denir.

(1) U fanktoru belirli, yani düzenli ve amnestik olmalıdır.

(2) U fanktoru küçük demetlere sahip olmalıdır.

(3) Her U-kaynağı bir başlangıç kaldırmaya sahip olmalıdır.

Tanım 2.5.5. $\mathcal{K}$ ve $\mathcal{L}$ kategoriler olmak üzere bir $U\colon \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ topolojik fanktorunda her $a \in \mathcal{L}$ sabiti için $U^{-1}(a)$ tek bir yapıya sahip ise U ya normalleştirilmiş topolojik fanktor adı verilir. Burada bitiş objenin alt objeleri sabit olarak adlandırılır.

Örnek 2.5.1. [39] **Top** ve **Set** kategorileri verildiğinde $U(X, \tau) = X$ şeklinde tanımlı $U\colon$ **Top** $\to$ **Set** unutkan fanktoru normalleştirilmiş bir topolojik fanktordur. Gösterelim:

(1) U fanktorunun düzenli ve amnestik olduğunu gösterelim.

(A, τ), (B, τ') topolojik uzaylar ve $f, g\colon (A, \tau) \to (B, \tau')$ sürekli iki fonksiyon olmak üzere $U(f) = U(g)$ olsun. U fanktorunun tanımından

$U(f) = f$ ve $U(g) = g$ dir. Böylece $f = g$ elde edilir. Dolayısıyla U düzenlidir.

$f\colon (A,\tau) \to (B,\tau')$ fonksiyonu sürekli, $U(f) = 1_A$ ve f homeomorfizm olsun. $U(f) = f = 1_A$ olduğundan $A = B$ dir. Dolayısıyla $f\colon (A,\tau) \to (A,\tau')$ olur. Bu durumda $\tau = \tau'$ olduğunu göstermeliyiz.

f sürekli olduğundan $f^{-1}(\tau') \subseteq \tau$ dur. $f(f^{-1}(\tau')) \subseteq f(\tau)$ dan $\tau' \subseteq f(\tau)$ olur. f birim olduğundan $\tau' \subseteq \tau$ bulunur. Tersine, $g\colon (A,\tau') \to (A,\tau)$ olmak üzere g sürekli olduğundan $g^{-1}(\tau) \subseteq \tau'$ dür. $g(g^{-1}(\tau)) \subseteq g(\tau')$ den $\tau \subseteq g(\tau')$ olur. $f^{-1} = g$ birim olduğundan $\tau \subseteq \tau'$ bulunur. O halde U amnestiktir.

(2) U fanktorunun küçük demetlere sahip olduğunu gösterelim.

$U^{-1}(A) = \{(A,\tau) \mid U(A,\tau) = A, \tau \subseteq P(A)$ ve $f\colon (A,\tau) \to (A,\tau')$ sürekli fonksiyonu için $U(f) = 1_A\colon A \to A\}$ olmak üzere her $A \in Ob(\mathbf{Set})$ için $U^{-1}(A)$ nın bir küme olduğunu göstermeliyiz.

$\Delta = \{\tau \mid \tau, A$ üzerinde bir topoloji $\}$ olsun. $\Phi\colon U^{-1}(A) \to \Delta$, $\Phi(A,\tau) = \tau$ şeklinde tanımlansın. Φ birebir ve örten olduğundan $U^{-1}(A) \cong \Phi \subseteq P(A)$ olur. Dolayısıyla $U^{-1}(A)$ bir kümedir.

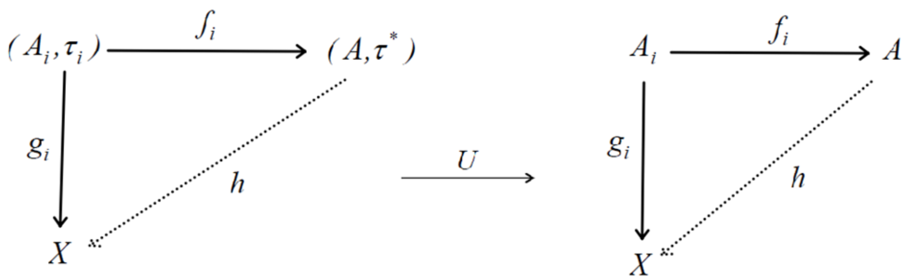
(3) Her U-kaynağının bir başlangıç kaldırmaya sahip olduğunu gösterelim.

$\{f_i\colon A \to U(A_i,\tau_i) = A_i \mid i \in I\}$ ailesi **Set** kategorisinde herhangi bir U-kaynağı ve τ_* başlangıç topolojisi (bkz. [38] s. 160) olsun. Buna göre U-kaynağının başlangıç kaldırması $f_i\colon (A,\tau_*) \to (A_i,\tau_i)$ ailesidir.

$$\begin{tikzcd}
(A,\tau_*) \arrow[r, "f_i"] & (A_i,\tau_i) & & A \arrow[r, "f_i"] & A_i \\
& (X,\sigma) \arrow[ul, dotted, "h"] \arrow[u, "g_i"'] \arrow[r, phantom, "\xrightarrow{U}"] & & & X \arrow[ul, dotted, "h"] \arrow[u, "g_i"']
\end{tikzcd}$$

Şekil 2.3. $U\colon$ **Top** $\to$ **Set** için Başlangıç Kaldırma

Benzer şekilde $\{f_i \colon U(A_i, \tau_i) = A_i \to A \mid i \in I\}$ ailesi **Set** kategorisinde herhangi bir U-kavşağı ve τ^* bitiş topolojisi (bkz. [38] s. 164) olsun. Buna göre U-kavşağının bitiş kaldırması $f_i \colon (A_i, \tau_i) \to (A, \tau^*)$ ailesidir.



Şekil 2.4. $U\colon$ **Top** $\to$ **Set** için Bitiş Kaldırma

Son olarak U fanktorunun normalleştirilmiş olduğunu gösterelim.

$1 = \{x\}$ tek nokta kümesi **Set** kategorisinde bitiş obje olduğundan bunun alt objeleri $a = \emptyset$ ve $a = \{x\}$ dir.

$U^{-1}(\emptyset) = (\emptyset, \{\emptyset\})$ ve $U^{-1}(\{x\}) = (\{x\}, \{\emptyset, \{x\}\})$ dir. Böylece tek nokta kümesi ve boş küme üzerinde sadece tek bir topoloji mevcuttur. O halde $U\colon$ **Top** $\to$ **Set** fanktoru normalleştirilmiştir.

Not 2.5.2. Topolojik kategori kavramı, topolojik uzaylar kategorisinin genelleştirilmesidir.

Tanım 2.5.6. [37] $\mathcal{K}$ herhangi bir kategori olmak üzere $U\colon \mathcal{K} \to$ **Set** topolojik fanktoru verilsin.

(1) U fanktoru bir $D\colon$ **Set** $\to \mathcal{K}$ sol adjointine sahip olup, bu sol adjointe diskre fanktor ve $X = D(U(X))$ objesine de $\mathcal{K}$ kategorisinde diskre obje adı verilir.

(2) U fanktoru bir $D^*\colon$ **Set** $\to \mathcal{K}$ sağ adjointine sahip olup, bu sağ adjointe indiskre fanktor ve $X = D^*(U(X))$ objesine de $\mathcal{K}$ kategorisinde indiskre obje adı verilir.

Lemma 2.5.1. [37] $\mathcal{K}$ bir topolojik kategori olmak üzere $U\colon \mathcal{K} \to$ **Set** verilsin.

(1) $X \in Ob(\mathcal{K})$ objesi diskredir ancak ve ancak her $Y \in Ob(\mathcal{K})$ için her $U(X) \to U(Y)$ morfizmi $X \to Y$ morfizmine kaldırılabilirdir.

(2) $X \in Ob(\mathcal{K})$ objesi indiskredir ancak ve ancak her $Y \in Ob(\mathcal{K})$ için her $U(Y) \to U(X)$ morfizmi $Y \to X$ morfizmine kaldırılabilirdir.

Örnek 2.5.2. Değer kümesi indiskre topolojik uzay ya da tanım kümesi diskre topolojik uzay olan her fonksiyon sürekli olduğundan $\mathcal{K} =$ **Top** için indiskre obje indiskre topolojik uzay, diskre obje de diskre topolojik uzay olur.

3. BÖLÜM

QUANTALE DEĞERLİ ÖNSIRALI UZAYLAR

Bu bölümde ilk olarak quantale kavramı ve bazı özelliklerinden bahsedilerek quantale değerli önsıralı uzaylar tanımı verilmiştir. Objeleri quantale değerli önsıralı uzaylar, morfizmleri L-sıra koruyan dönüşümler olan **L-Prord** kategorisinin bir topolojik kategori olduğu gösterilmiştir. Ayrıca bu kategoride başlangıç kaldırma yapısı, diskre ve indiskre objeler ifade edilmiştir.

3.1. Quantale

Tanım 3.1.1. [29] $(L, \leqslant)$ kısmi sıralı bir küme olmak üzere, eğer L nin tüm alt kümeleri hem supremuma ($\bigvee$) hem de infimuma ($\bigwedge$) sahip ise $(L, \leqslant)$ ya bir tam latis adı verilir. Herhangi bir tam latiste üst (top) eleman ve alt (bottom) eleman sırasıyla $\top$ ve $\perp$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.2. $(L, \leqslant)$ bir tam latis olsun. $\lhd$ ile gösterilen aşağı (well-bellow) bağıntı ve $\prec$ ile gösterilen yukarı (well-above) bağıntı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

(1) $\beta \leqslant \bigvee A$ olacak şekildeki her $A \subseteq L$ alt kümesi için $\alpha \leqslant \delta$ ifadesini sağlayan bir $\delta \in A$ mevcut ise $\alpha \lhd \beta$ dir.

(2) $\bigwedge A \leqslant \alpha$ olacak şekilde her $A \subseteq L$ alt kümesi için $\delta \leqslant \beta$ ifadesini sağlayan bir $\delta \in A$ mevcut ise $\alpha \prec \beta$ dir.

Tanım 3.1.3. [29] $(L, \leqslant)$ bir tam latis olmak üzere, eğer herhangi bir $\alpha \in L$ için $\alpha = \bigvee\{\beta : \beta \lhd \alpha\}$ oluyorsa $(L, \leqslant)$ ye bir tam dağılımlı (completely distributive) latis adı verilir.

Tanım 3.1.4. [25] Aşağıdaki şartları sağlayan $(L, \leqslant, *)$ üçlüsüne bir quantale denir.

(i) $(L, \leqslant)$ bir tam latis olmalıdır.

(ii) $(L, *)$ bir yarı grup olmalıdır.

(iii) $*$ yarıgrup işlemi, keyfi supremum operatörü (join) üzerinde dağılma özelliğine sahip olmalıdır. Yani, her $\alpha_i, \beta \in L$ için

$(\bigvee_{i\in I} \alpha_i) * \beta = \bigvee_{i\in I}(\alpha_i * \beta)$ ve $\beta * (\bigvee_{i\in I} \alpha_i) = \bigvee_{i\in I}(\beta * \alpha_i)$ dir.

Tanım 3.1.5. [29] $(L, \leqslant, *)$ bir quantale olsun. Buna göre;

(1) $(L, \leqslant)$ değişmeli bir yarı grup ise $(L, \leqslant, *)$ ye değişmeli quantale denir.

(2) Her $\alpha \in L$ için $\alpha * \top = \top * \alpha = \alpha$ ise $(L, \leqslant, *)$ ye integral quantale denir.

(3) $(L, \leqslant)$ tam dağılımlı bir latis ve her $\alpha, \beta < \top$ için $\alpha \vee \beta < \top$ ise $(L, \leqslant, *)$ ye değer (value) quantale denir.

(4) Her $\alpha, \beta \in L$ için $\alpha \leqslant \beta$ veya $\beta \leqslant \alpha$ oluyorsa $(L, \leqslant, *)$ ye doğrusal sıralı (linearly ordered) quantale denir.

Not 3.1.1. $(L, \leqslant)$ tam dağılımlı bir latis olmak üzere, değişmeli ve integral quantale yapılarını $\mathsf{L} = (L, \leqslant, *)$ ile göstereceğiz.

3.2. Quantale Değerli Önsıralı Uzaylar

Tanım 3.2.1. [30, 52] X boştan farklı bir küme olmak üzere şağıdaki şartları sağlayan bir $\mathcal{R} : X \times X \to \mathsf{L}$ dönüşümüne X üzerinde bir L-önsıralama bağıntısı, $(X, \mathcal{R})$ ikilisine de bir L-önsıralı uzay denir.

(i) Her $x \in X$ için $\mathcal{R}(x, x) = \top$ dir (yansıma özelliği).

(ii) Her $x, y, z \in X$ için $\mathcal{R}(x, y) * \mathcal{R}(y, z) \leq \mathcal{R}(x, z)$ dir (geçişme özelliği).

Bir $\mathcal{R}$ L-önsıralama bağıntısı, eğer

(iii) Her $x, y \in X$ için $\mathcal{R}(x,y) = \mathcal{R}(y,x)$ (simetri özelliği)

şartını da sağlarsa L-denklik bağıntısı adını alır. Ayrıca, $\mathcal{R}(x,y) = \top$ iken $x = y$ oluyorsa $(X, \mathcal{R})$ ye ayrılmış (separated) L-önsıralı uzay denir.

Örnek 3.2.1. [43] Bir t-norm (üçgensel norm) $[0,1]$ birim aralığı üzerinde birleşmeli, değişmeli, azalmayan ve birimi 1 olan bir $*$ ikili işlemi olarak tanımlanır. $*$ t-normu sol-sürekli olmak üzere $\mathsf{L} = ([0,1], \leqslant, *)$ üçlüsü bir quantale olarak düşünülebilir. En yaygın olarak kullanılan üç t-norm aşağıda verilmiştir.

(i) Minimum t-norm : $\alpha * \beta = \alpha \wedge \beta$

(ii) Çarpım t-norm : $\alpha * \beta = \alpha \cdot \beta$

(iii) Lukasiewicz t-norm : $\alpha * \beta = (\alpha + \beta - 1) \vee 0$

Örnek 3.2.2. $*$ ikili işlemi, $[0,1]$ üzerinde tanımlı minimum, çarpım veya Lukasiewicz t-normlarından biri olmak üzere $\mathsf{L} = ([0,1], \leqslant, *)$ quantale yapısı verilsin. Burada alt eleman $\bot = 0$ ve üst eleman $\top = 1$ dir. $X = \{a, b, c\}$ olmak üzere aşağıdaki şekilde tanımlı bir $\mathcal{R} : X \times X \to \mathsf{L}$ dönüşümü bir L-önsıralı bağıntı, $(X, \mathcal{R})$ uzayı da bir L-önsıralı uzaydır.

$$\mathcal{R}(x,y) = \begin{cases} 1, & x = y \\ \dfrac{1}{2}, & x = a \neq y \\ \dfrac{1}{3}, & x = b \neq y \\ \dfrac{1}{4}, & x = c \neq y \end{cases}$$

Burada her $x \in X$ için $\mathcal{R}(x,x) = 1$ olup $\mathcal{R}$ yansımalıdır. Ayrıca $x, y, z \in X$ için,

$$\mathcal{R}(x,y) * \mathcal{R}(y,z) \leqslant \mathcal{R}(x,z)$$

olduğundan $\mathcal{R}$ geçişmelidir.

Not 3.2.1. Örnek 3.2.2 de verilen $(X, \mathcal{R})$ L-önsıralı uzayı ayrılmıştır. Çünkü, burada $\mathcal{R}(x,y) = 1 = \top \iff x = y$ dir.

Örnek 3.2.3. $*$ Lukasiewicz t-norm olmak üzere $\mathsf{L} = ([0,1], \leqslant, *)$ quantale yapısı verilsin. $X = \{a,b,c\}$ olmak üzere bir $\mathcal{R} : X \times X \to \mathsf{L}$ dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\mathcal{R}(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{3}, & (x,y) = (a,b) \text{ veya } (x,y) = (b,c) \\ \frac{1}{4}, & (x,y) = (a,c) \\ 1, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

Buna göre $\mathcal{R}$ bir L-önsıralama bağıntısı değildir. Çünkü,

$$\mathcal{R}(a,b) * \mathcal{R}(b,c) \leqslant \mathcal{R}(a,c)$$

sağlanmaz ve $\mathcal{R}$ geçişmeli olmaz. Burada

$$\frac{2}{3} * \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3} - 1\right) \vee 0 = \frac{1}{3} \vee 0 = \frac{1}{3} \nleq \frac{1}{4}$$

olur.

Tanım 3.2.2. [30, 52] $(X, \mathcal{R}_X)$ ve $(Y, \mathcal{R}_Y)$ L-önsıralı uzaylar olmak üzere, bir $f : (X, \mathcal{R}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{R}_Y)$ dönüşümü verilsin. Eğer her $x_1, x_2 \in X$ için $\mathcal{R}_X(x_1, x_2) \leqslant \mathcal{R}_Y(f(x_1), f(x_2))$ oluyorsa f dönüşümüne L-sıra koruyan dönüşüm denir.

3.3. L-Prord Kategorisi

Tanım 3.3.1. Objeleri L-önsıralı uzaylar, morfizmleri L-sıra koruyan dönüşümler olan kategoriye L-önsıralı uzaylar kategorisi denir ve **L-Prord** şeklinde gösterilir.

Örnek 3.3.1. (i) Önsıralı uzaylar ve sıra koruyan dönüşümlerinin kategorisi **Prord** ile gösterilsin. Buna göre, $\mathsf{L} = \mathbf{2} = (\{0,1\}, \leqslant, \wedge)$ için **2-Prord** $\cong$ **Prord** olur.

(ii) Genişletilmiş quasi metrik uzaylar ve büzülme dönüşümlerinin kategorisi ∞**qMet** ile gösterilsin [35]. Buna göre, $\mathsf{L} = ([0,\infty], \geqslant, +)$ (Lawvere's quantale) için $[0,\infty]$**-Prord** $\cong$ ∞**qMet** olur.

(iii) Olasılıksal quasi metrik uzaylar ve büzülme dönüşümlerinin kategorisi **ProbqMet** ile gösterilsin. Buna göre, $\mathsf{L} = (\triangle^+, \leqslant, *)$ (mesafe dağılım fonksiyonlu quantale [29]) için $\triangle^+$**-Prord** $\cong$ **ProbqMet** olur [19].

Not 3.3.1. U : **L-Prord** $\to$ **Set** unutkan fanktoru bir topolojik fanktordur [25]. Ayrıca U fanktoru normalleştirilmiştir, gösterelim:

Set kategorisinde bitiş obje $\{*\}$ tek nokta kümesi olduğundan bunun alt objeleri olan sabitler $\alpha = \emptyset$ ve $\alpha = \{*\}$ dir.

$\mathcal{R} : \emptyset \times \emptyset \to$ L boş dönüşüm olmak üzere $U^{-1}(\emptyset) = (\emptyset, \mathcal{R})$ dir.

$U^{-1}(\{*\}) = (\{*\}, \mathcal{R})$ dir, burada $\{*\}$ üzerindeki $\mathcal{R}$ L-önsıralama bağıntısı $\mathcal{R}(*, *) = \top$ şeklinde tanımlı olup $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{dis} = \mathcal{R}_{ind}$ dir.

O halde boş küme ve tek nokta kümesi üzerinde sadece bir tek L-önsıralama bağıntısı yazılabilir ve U : **L-Prord** $\to$ **Set** normalleştirilmiştir.

3.4. Başlangıç Kaldırma, Diskre ve İndiskre Yapılar

Lemma 3.4.1. [25] $(X_i, \mathcal{R}_i)$ L-önsıralı uzayların bir sınıfı olsun. $\{f_i : (X, \mathcal{R}) \to (X_i, \mathcal{R}_i)\}_{i \in I}$ kaynağı **L-Prord** kategorisinde bir başlangıç kaldırma olması için gerek ve yeter koşul her $x, y \in X$ için

$$\mathcal{R}(x, y) = \bigwedge_{i \in I} \mathcal{R}_i(f_i(x), f_i(y))$$

olmasıdır.

İspat: Yansıma özelliğinin sağlandığı açıktır. Geçişme özelliğinin sağlandığını gösterelim. Her $x, y, z \in X$ için,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(x, y) * \mathcal{R}(y, z) &= \bigwedge_{i \in I} \mathcal{R}_i(f_i(x), f_i(y)) * \bigwedge_{i \in I} \mathcal{R}_i(f_i(y), f_i(z)) \\ &\leqslant \bigwedge_{i \in I} (\mathcal{R}_i(f_i(x), f_i(y)) * \mathcal{R}_i(f_i(y), f_i(z))) \\ &\leqslant \bigwedge_{i \in I} (\mathcal{R}_i(f_i(x), f_i(z)) = \mathcal{R}(x, z). \end{aligned}$$

elde edilir.

Her $i \in I$ için $\mathcal{R}(x, y) \leqslant \mathcal{R}_i(f_i(x), f_i(y))$ olduğundan $f_i : (X, \mathcal{R}) \to (X_i, \mathcal{R}_i)$ fonksiyonu bir L-sıra koruyan dönüşümdür.

Bir $f : (Z, \mathcal{R}_Z) \to (X, \mathcal{R})$ dönüşümü verilsin. Buna göre aşağıdaki ifadeyi göstermeliyiz:

f bir L-sıra koruyan dönüşümdür ancak ve ancak her $i \in I$ için $f_i \circ f$ bir L-sıra koruyan dönüşümdür.

L-sıra koruyan dönüşümlerin bileşkeleri yine bir L-sıra koruyan dönüşüm olduğundan gereklilik sağlanır.

Tersine, kabul edelim ki her $i \in I$ için $f_i \circ f$ bir L-sıra koruyan dönüşüm olsun. O zaman $x, y \in Z$ için,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_Z(x,y) &\leqslant \bigwedge_{i \in I} \mathcal{R}_i((f_i \circ f)(x), (f_i \circ f)(y)) \\ &= \bigwedge_{i \in I} \mathcal{R}_i(f_i(f(x)), f_i(f(y))) \\ &= \mathcal{R}(f(x), f(y)). \end{aligned}$$

elde edilir. O halde f bir L-sıra koruyan dönüşümdür.

Lemma 3.4.2. [25] X boştan farklı bir küme olmak üzere X üzerindeki diskre L-önsıralama bağıntısı, her $x, y \in X$ için

$$\mathcal{R}_{dis}(x,y) = \begin{cases} \top, & x = y \\ \bot, & x \neq y \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Lemma 3.4.3. [25] X boştan farklı bir küme olmak üzere X üzerindeki indiskre L-önsıralama bağıntısı, her $x, y \in X$ için

$$\mathcal{R}_{ind}(x,y) \quad = \quad \top$$

şeklinde tanımlanır.

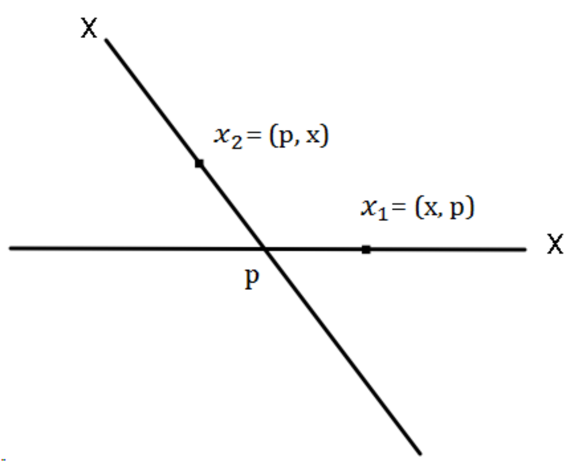
4. BÖLÜM

LOKAL T_0 VE T_1 QUANTALE DEĞERLİ ÖNSIRALI UZAYLAR

Bu bölümde öncelikle bir p noktasında wedge çarpım ve eksen dönüşümleri verilmiştir. Bu dönüşümler yardımıyla, küme tabanlı keyfi bir topolojik kategoride lokal $\overline{T}_0$ ve lokal T_1 ayırma aksiyomları ifade edilerek, **L-Prord** kategorisinde karakterize edilmiştir. Ayrıca arasındaki ilişki incelenerek, lokal $\overline{T}_0$ ve lokal T_1 L-önsıralı uzayların kalıtsal ve çarpımsal oldukları gösterilmiştir.

4.1. Bir p Noktasında Wedge Çarpım ve Eksen Dönüşümleri

Tanım 4.1.1. X bir küme, $p \in X$ ve X in iki ayrık kopyası $X \coprod X$ şeklinde ifade edilsin. X in p noktasındaki wedge çarpımı $X \coprod X$ nin p de çakışmasıdır ve $X \vee_p X$ şeklinde gösterilir. $X \vee_p X$ teki bir x noktası birinci bileşende ise x_1, ikinci bileşende ise x_2 olarak gösterilecektir. Ayrıca $x = p$ ise $x_1 = x_2$ dir, yani $p_1 = p_2$ olur.



Şekil 4.1. p Noktasında Wedge Çarpım

Not 4.1.1. X bir küme, $p \in X$ ve $X \vee_p X$ de X kümesinin p noktasındaki wedge çarpımı olsun. $\{*\}$, **Set** kategorisinde bitiş objesi ve $i_1, i_2 \colon X \to X \vee_p X$ dönüşümleri de sırasıyla birinci ve ikinci içerme dönüşümleri (inclusion maps) olmak üzere; değişmeli diyagramı bir pushout diyagramıdır.

$$\begin{tikzcd}
\{*\} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "i_1"] \\
X \arrow[r, "i_2"'] & X \vee_p X
\end{tikzcd}$$

$id \colon X \to X$ birim dönüşüm ve $f \colon X \to X$ de p ye giden sabit dönüşüm olmak üzere; $A_p i_1 = (id, f) \colon X \to X^2$, $A_p i_2 = (f, id) \colon X \to X^2$, $S_p i_1 = (id, id) \colon X \to X^2$, $S_p i_2 = (f, id) \colon X \to X^2$ ve $\nabla_p i_1 = \nabla_p i_2 = id \colon X \to X$ dönüşümleri yukarıda verilen pushout diyagramına uygulandığında sadece Tanım 4.1.2 ile verilen A_p, S_p ve ∇_p dönüşümleri elde edilir.

Örneğin A_p dönüşümünün elde edilişi aşağıda verilmiştir:

$$\begin{tikzcd}
\{*\} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "i_1"] \\
X \arrow[r, "i_2"'] & X \vee_p X
\end{tikzcd}$$

ve

$$\begin{tikzcd}
\{*\} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "A_p i_1"] \\
X \arrow[r, "A_p i_2"'] & X^2
\end{tikzcd}$$

değişmeli diyagramları için

$$
\begin{tikzcd}
\{*\} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "i_1"] \arrow[ddr, "A_p i_1"] & \\
X \arrow[r, "i_2"] \arrow[drr, "A_p i_2"'] & X \vee_p X \arrow[dr, "A_p"] & \\
& & X^2
\end{tikzcd}
$$

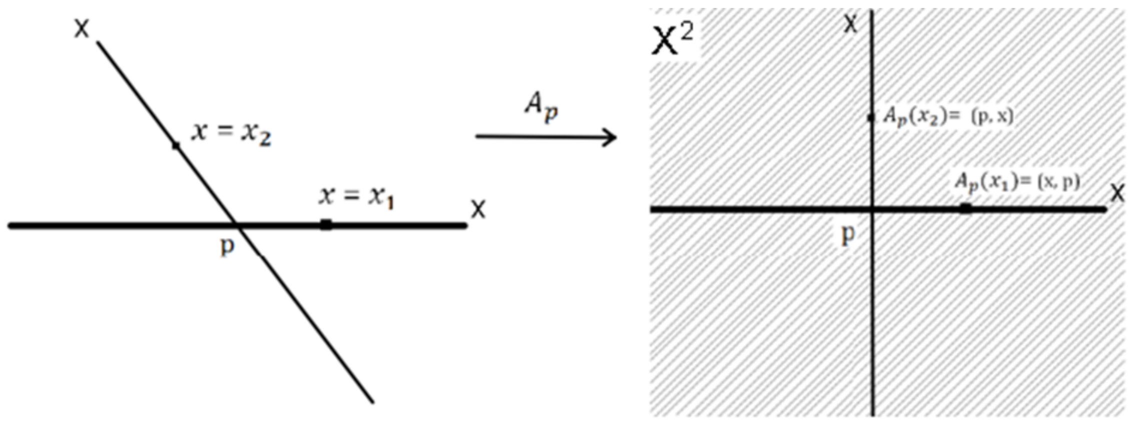
$A_p i_1 f = A_p i_2 f = (f, f)$, yani diyagram değişmeli olduğundan bir tek $A_p\colon X \vee_p X \to X^2$ morfizmi vardır.

Tanım 4.1.2. [2] X bir küme, $p \in X$ ve $X^2 = X \times X$ de X in kendisi ile kartezyen çarpımı olsun. Buna göre A_p, S_p ve ∇_p dönüşümleri aşağıdaki şekilde tanımlanır.

(1) p Noktasında Temel Eksen Dönüşümü:

$$A_p\colon X \vee_p X \to X^2$$

$$A_p(x_i) = \begin{cases} (x, p) & , \quad i = 1 \\ (p, x) & , \quad i = 2 \end{cases}$$

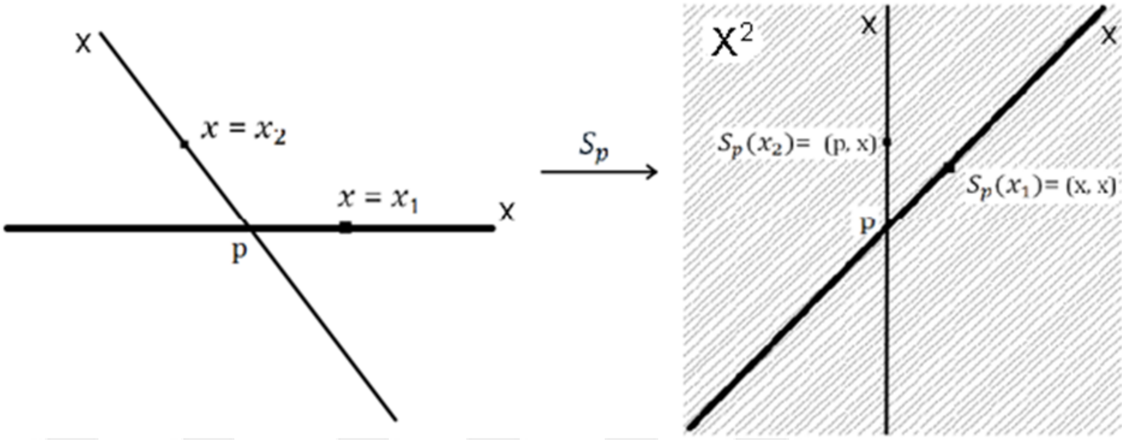


Şekil 4.2. p Noktasında Temel Eksen Dönüşümü

(2) p Noktasında Eğik Eksen Dönüşümü:

$$S_p\colon X \vee_p X \to X^2$$

$$S_p(x_i) = \begin{cases} (x,x) & , \quad i = 1 \\ (p,x) & , \quad i = 2 \end{cases}$$

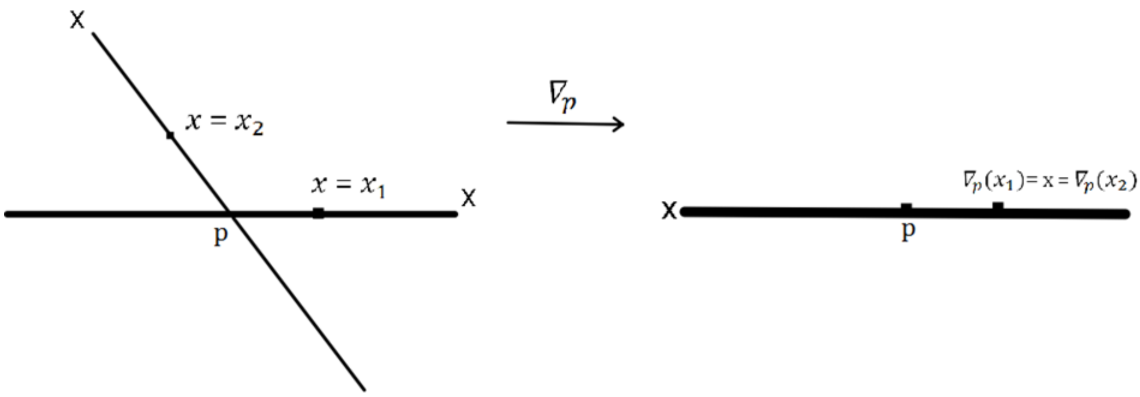


Şekil 4.3. p Noktasında Eğik Eksen Dönüşümü

(3) p Noktasında Katlama Dönüşümü:

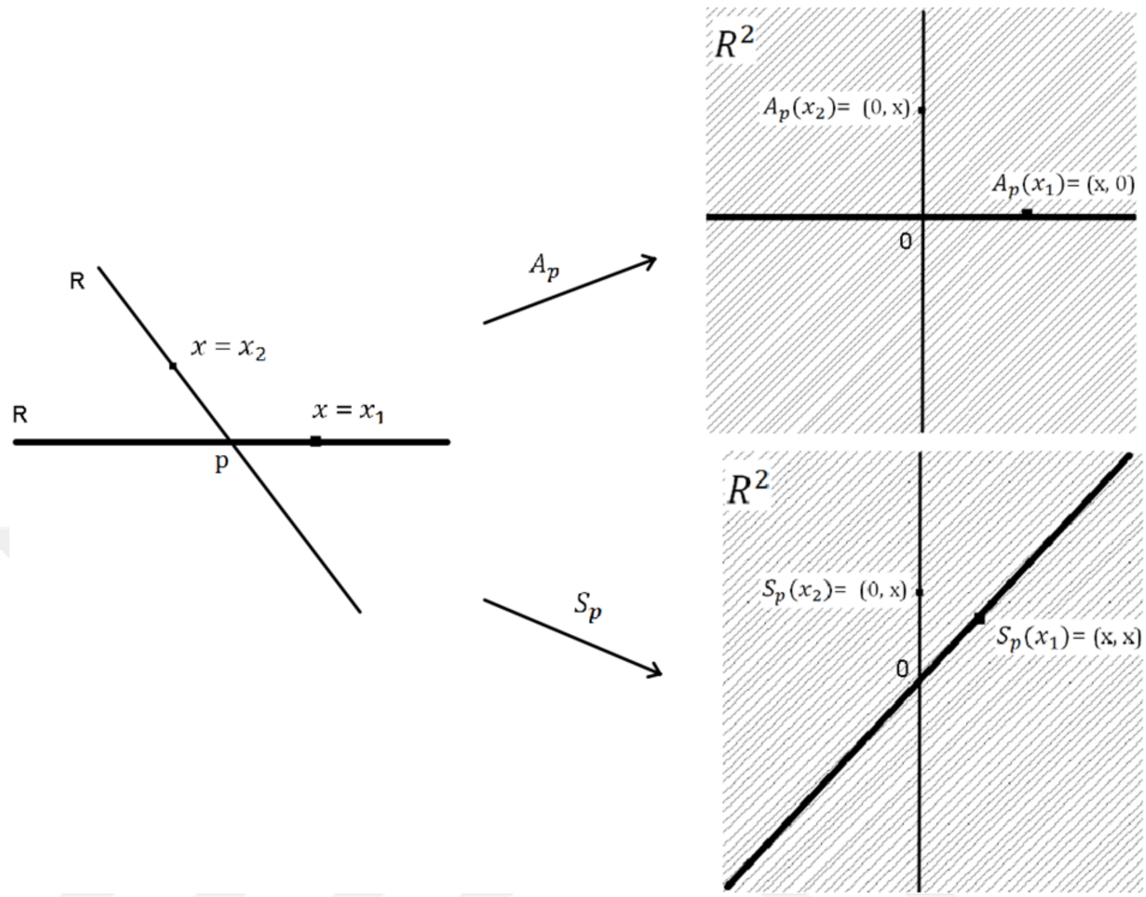
$$\nabla_p \colon X \vee_p X \to X$$

$$\nabla_p(x_i) = x, \quad i = 1, 2$$



Şekil 4.4. p Noktasında Katlama Dönüşümü

Örnek 4.1.1. Eğer $X = \mathbb{R}$ reel sayılar kümesi ve $p = 0$ noktası seçilirse p noktasında eğik eksen dönüşümünün görüntüsü $y = x$ doğrusu ile y ekseninin birleşimi, p noktasında temel eksen dönüşümünün görüntüsü de x ve y eksenlerinin birleşimi olur.



Şekil 4.5. $X = \mathbb{R}$ için $p = 0$ da Temel ve Eğik Eksen Dönüşümleri

Topolojik uzaylarda lokal T_0 ve T_1 ayırma aksiyomları aşağıda verilmiştir.

Tanım 4.1.3. (X, τ) bir topolojik uzay ve $p \in X$ olsun.

1. (X, τ) uzayı p de T_0 olması için gerek ve yeter koşul her $p \neq q$ için $q \notin N_p$ olacak şekilde p nin en az bir N_p komşuluğunun veya $p \notin N_q$ olacak şekilde q nun en az bir N_q komşuluğunun var olmasıdır.

2. (X, τ) uzayı p de T_1 olması için gerek ve yeter koşul her $p \neq q$ için $q \notin N_p$ olacak şekilde p nin en az bir N_p komşuluğunun ve $p \notin N_q$ olacak şekilde q nun en az bir N_q komşuluğunun var olmasıdır.

Teorem 4.1.1. [4] (X, τ) bir topolojik uzay ve $p \in X$ olsun. (X, τ) uzayı p de T_0 olması için gerek ve yeter koşul X^2 üzerindeki çarpım topolojisi τ_* olmak üzere $A_p \colon X \vee_p X \to (X^2, \tau_*)$ ve $\nabla_p \colon X \vee_p X \to (X, P(X))$ fonksiyonları tarafından üretilen başlangıç topolololjisinin diskre olmasıdır.

Örnek 4.1.2. $X = \{p, q\}$ kümesi üzerinde ve $\tau = \{\emptyset, X, \{q\}\}$ topolojisi verilsin. (X, τ) uzayı p noktasında T_0 dır. Bunu Teorem 4.1.1 yardımıyla ispatlayalım:

$$\begin{tikzcd}
\{*\} \arrow[r] \arrow[d] & X_1=\{p, q\} \arrow[d] \\
X_2=\{p, q\} \arrow[r] & X \vee_p X=\{p, q_1, q_2\}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
X \vee_p X \arrow[r, "A_p"] \arrow[dr, "\nabla_p"'] & (X^2, \tau_*) \\
& (X, P(X))
\end{tikzcd}$$

X in kuvvet kümesi:

$$P(X) = \{X, \emptyset, \{p\}, \{q\}\}$$

$\nabla_p \colon X \vee_p X \to (X, P(X))$ için ∇_p^{-1} ters görüntüler:

$$\nabla_p^{-1}(X) = X \vee_p X$$

$$\nabla_p^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

$$\nabla_p^{-1}(\{p\}) = \{p\}$$

$$\nabla_p^{-1}(\{q\}) = \{q_1, q_2\}$$

X^2 üzerindeki τ_* çarpım topolojisi:

$$\tau_* = \{X^2, \emptyset, \{(p, q), (q, q)\}, \{(q, p), (q, q)\}, \{(q, q)\}\}$$

$A_p \colon X \vee_p X \to (X^2, \tau_*)$ için A_p^{-1} ters görüntüler:

$$A_p^{-1}(X^2) = X \vee_p X$$

$$A_p^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

$$A_p^{-1}(\{p, q\}, \{q, q\}) = \{q_2\}$$

$A_p^{-1}(\{q,p\},\{q,q\}) = \{q_1\}$

$A_p^{-1}(\{q,q\}) = \emptyset$

τ başlangıç topolojisi:

$\delta = \{A_p^{-1}(G) \mid G \in \tau_*\} \cup \{\nabla_p^{-1}(H) \mid H \in P(X)\}$

$\delta = \{X \vee_p X, \emptyset, \{p\}, \{q_1\}, \{q_2\}, \{q_1, q_2\}\}$

$\beta = \{X \vee_p X, \emptyset, \{p\}, \{q_1\}, \{q_2\}, \{q_1, q_2\}\}$

$\tau = \{X \vee_p X, \emptyset, \{p\}, \{q_1\}, \{q_2\}, \{q_1, q_2\}, \{p, q_1\}, \{p, q_2\}\}$

Dolayısıyla A_p ve ∇_p tarafından üretilen topoloji diskre olup (X,τ) uzayı p noktasında T_0 dır.

Teorem 4.1.2. [4] (X,τ) bir topolojik uzay ve $p \in X$ olsun. (X,τ) uzayı p de T_1 olması için gerek ve yeter koşul X^2 üzerindeki çarpım topolojisi τ_* olmak üzere $S_p \colon X \vee_p X \to (X^2, \tau_*)$ ve $\nabla_p \colon X \vee_p X \to (X, P(X))$ fonksiyonları tarafından üretilen başlangıç topolololojisinin diskre olmasıdır.

Örnek 4.1.3. $X = \{p,q\}$ kümesi üzerinde ve $\tau = P(X)$ diskre topolojisi verilsin. (X,τ) uzayı p noktasında T_1 dir. Bunu Teorem 4.1.2 yardımıyla ispatlayalım:

X in kuvvet kümesi:

$P(X) = \{X, \emptyset, \{p\}, \{q\}\}$

$\nabla_p \colon X \vee_p X \to (X, P(X))$ için ∇_p^{-1} ters görüntüler:

$\nabla_p^{-1}(X) = X \vee_p X$

$\nabla_p^{-1}(\emptyset) = \emptyset$

$\nabla_p^{-1}(\{p\}) = \{p\}$

$\nabla_p^{-1}(\{q\}) = \{q_1, q_2\}$

X^2 üzerindeki τ_* çarpım topolojisi:

$\tau_* = \{X^2, \emptyset, \{(p,p)\}, \{(p,q)\}, \{(q,p)\}, \{(q,q)\}, \{(p,p),(p,q)\},$

$$\{(p,p),(q,p)\},\{(p,q),(q,q)\},\{(q,p),(q,q)\}\}$$

$S_p\colon X \vee_p X \to (X^2, \tau_*)$ için S_p^{-1} ters görüntüler:

$$S_p^{-1}(X^2) = X \vee_p X$$

$$S_p^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

$$S_p^{-1}(\{p,p\}) = \{p\}$$

$$S_p^{-1}(\{p,q\}) = \{q_2\}$$

$$S_p^{-1}(\{q,p\}) = \emptyset$$

$$S_p^{-1}(\{q,q\}) = \{q_1\}$$

$$S_p^{-1}(\{p,p\},\{p,q\}) = \{p,q_2\}$$

$$S_p^{-1}(\{p,p\},\{q,p\}) = \{p\}$$

$$S_p^{-1}(\{p,q\},\{q,q\}) = \{q_2,q_1\}$$

$$S_p^{-1}(\{q,p\},\{q,q\}) = \{q_1\}$$

τ başlangıç topolojisi:

$$\delta = \{S_p^{-1}(G) \mid G \in \tau_*\} \cup \{\nabla_p^{-1}(H) \mid H \in P(X)\}$$

$$\delta = \{X \vee_p X, \emptyset, \{p\}, \{q_1\}, \{q_2\}, \{p,q_2\}, \{q_1,q_2\}\}$$

$$\beta = \{X \vee_p X, \emptyset, \{p\}, \{q_1\}, \{q_2\}, \{p,q_2\}, \{q_1,q_2\}\}$$

$$\tau = \{X \vee_p X, \emptyset, \{p\}, \{q_1\}, \{q_2\}, \{q_1,q_2\}, \{p,q_1\}, \{p,q_2\}\}$$

O halde S_p ve ∇_p tarafından üretilen topoloji diskre olup (X,τ) uzayı p noktasında T_1 dir.

Baran [2] topolojik uzaylardaki lokal T_0 ve T_1 ayırma aksiyomlarını Tanım 4.1.2 deki dönüşümler yardımıyla herhangi bir topolojik kategoriye aşağıdaki tanımla genelleştirmiştir.

Tanım 4.1.4. [2] $U : \mathcal{K} \to$ **Set** bir topolojik fanktor, $U(X) = B$ olmak üzere X, $\mathcal{K}$

nin bir objesi ve $p \in X$ olsun.

1. X objesinin p noktasında $\overline{T}_0$ olması için gerek ve yeter koşul $\{A_p : B \vee_p B \to U(X^2) = B^2$ ve $\nabla_p : B \vee_p B \to UD(B) = B\}$ U-kaynağının başlangıç kaldırmasının diskre olmasıdır. Burada D, U nun sol adjointi olan diskre fanktordur.

2. X objesinin p noktasında T_1 olması için gerek ve yeter koşul $\{S_p : B \vee_p B \to U(X^2) = B^2$ ve $\nabla_p : B \vee_p B \to UD(B) = B\}$ U-kaynağının başlangıç kaldırmasının diskre olmasıdır.

4.2. Lokal T_0 Quantale Değerli Önsıralı Uzaylar

Teorem 4.2.1. $(X, \mathcal{R})$ bir L-önsıralı uzay ve $p \in X$ olsun. $(X, \mathcal{R})$ p noktasında $\overline{T_0}$ dır ancak ve ancak $x \neq p$ olmak üzere her $x \in X$ için $\mathcal{R}(x,p) \wedge \mathcal{R}(p,x) = \perp$ dır.

İspat: Kabul edelim ki $(X, \mathcal{R})$ uzayı p noktasında $\overline{T_0}$ olsun. $x \neq p$ olacak şekilde $x \in X$ verilsin. $\mathcal{R}_{dis}$, X üzerinde diskre L-önsıralama bağıntısı ve $\pi_i : X^2 \to X$, $i = 1, 2$, izdüşüm fonksiyonları olsun. $x_1, x_2 \in X \vee_p X$ için;

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(\pi_1 A_p(x_1), \pi_1 A_p(x_2)) &= \mathcal{R}(\pi_1(x,p), \pi_1(p,x)) = \mathcal{R}(x,p) \\
\mathcal{R}(\pi_2 A_p(x_1), \pi_2 A_p(x_2)) &= \mathcal{R}(\pi_2(x,p), \pi_2(p,x)) = \mathcal{R}(p,x) \\
\mathcal{R}_{dis}(\nabla_p(x_1), \nabla_p(x_2)) &= \mathcal{R}_{dis}(x,x) = \top
\end{aligned}$$

$x_1 \neq x_2$ ve $(X, \mathcal{R})$ p noktasında $\overline{T_0}$ olduğundan Tanım 4.1.4, Lemma 3.4.1 ve 3.4.2 gereğince,

$$\begin{aligned}
\perp &= \bigwedge \{\mathcal{R}(\pi_1 A_p(x_1), \pi_1 A_p(x_2)), \mathcal{R}(\pi_2 A_p(x_1), \pi_2 A_p(x_2)), \mathcal{R}_{dis}(\nabla_p(x_1), \nabla_p(x_2))\} \\
&= \bigwedge \{\mathcal{R}(x,p), \mathcal{R}(p,x), \top\} \\
&= \mathcal{R}(x,p) \wedge \mathcal{R}(p,x)
\end{aligned}$$

olur. Böylece $\mathcal{R}(x,p) \wedge \mathcal{R}(p,x) = \perp$ elde edilir.

Tersine $\mathcal{R}$, $A_p : X \vee_p X \to U(X^2, \mathcal{R}^2) = X^2$ ve $\nabla_p : X \vee_p X \to U(X, \mathcal{R}_{dis}) = X$ dönüşümleri tarafından üretilen $X \vee_p X$ üzerindeki başlangıç L-önsıralama bağıntısı olsun. Burada $\mathcal{R}^2$, π_1 ve π_2 izdüşüm fonksiyonları tarafından üretilen X^2 üzerindeki çarpım yapısıdır. Kabul edelim ki şart sağlansın. Yani $x \neq p$ olacak şekilde her $x \in X$ için $\mathcal{R}(x,p) \wedge \mathcal{R}(p,x) = \perp$ olsun. v ve w da herhangi iki nokta olsun. Buna göre;

1. Eğer $v = w$ ise $\mathcal{R}(v,w) = \top$ dır.

2. Eğer $v \neq w$ ve $\nabla_p v \neq \nabla_p w$ ise o zaman $\mathcal{R}_{dis}(\nabla_p v, \nabla_p w) = \perp$ elde edilir. Lemma 3.4.1 den,

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(v,w) &= \bigwedge \{\mathcal{R}(\pi_1 A_p v, \pi_1 A_p w), \mathcal{R}(\pi_2 A_p v, \pi_2 A_p w), \mathcal{R}_{dis}(\nabla_p v, \nabla_p w)\} \\ &= \perp\end{aligned}$$

   bulunur.

3. Kabul edelim ki $v \neq w$ ve $\nabla_p v = \nabla_p w$ olsun. Buradan $x \neq p$ olacak şekilde herhangi bir $x \in X$ noktası için $\nabla_p v = x = \nabla_p w$ bulunur. $v \neq w$ olduğundan $v = x_1$ ve $w = x_2$ veya $v = x_2$ ve $w = x_1$ dir.

   (a) Eğer $v = x_1$ ve $w = x_2$ ise o zaman

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(\pi_1 A_p v, \pi_1 A_p w) &= \mathcal{R}(x,p) \\ \mathcal{R}(\pi_2 A_p v, \pi_2 A_p w) &= \mathcal{R}(p,x) \\ \mathcal{R}_{dis}(\nabla_p v, \nabla_p w) &= \mathcal{R}_{dis}(x,x) = \top\end{aligned}$$

   olur ve buradan

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(v,w) &= \bigwedge \{\mathcal{R}(\pi_1 A_p v, \pi_1 A_p w), \mathcal{R}(\pi_2 A_p v, \pi_2 A_p w), \mathcal{R}_{dis}(\nabla_p v, \nabla_p w)\} \\ &= \bigwedge \{\mathcal{R}(x,p), \mathcal{R}(p,x), \top\} \\ &= \mathcal{R}(x,p) \wedge \mathcal{R}(p,x)\end{aligned}$$

   bulunur. Kabulden $\mathcal{R}(v,w) = \perp$ elde edilir.

   (b) Benzer şekilde, eğer $v = x_2$ ve $w = x_1$ ise yine $\mathcal{R}(v,w) = \perp$ elde edilir.

Sonuç olarak $X \vee_p X$ wedge çarpımdaki her v, w elemanı için

$$\mathcal{R}(v,w) = \begin{cases} \top, & v = w \\ \perp, & v \neq w \end{cases}$$

bulunur. Lemma 3.4.2 den $\mathcal{R}$, $X \vee_p X$ üzerinde diskre L-önsıralama bağıntısı olur. O halde Tanım 4.1.4 den $(X, \mathcal{R})$ uzayının p noktasında $\overline{T_0}$ olduğu elde edilir.

4.3. Lokal T_1 Quantale Değerli Önsıralı Uzaylar

Teorem 4.3.1. $(X, \mathcal{R})$ bir L-önsıralı uzay ve $p \in X$ olsun. $(X, \mathcal{R})$ p noktasında T_1 dir ancak ve ancak $x \neq p$ olmak üzere her $x \in X$ için $\mathcal{R}(x, p) = \perp = \mathcal{R}(p, x)$ dir.

İspat: Kabul edelim ki $(X, \mathcal{R})$ uzayı p noktasında T_1 olsun. $x \neq p$ olacak şekilde $x \in X$ verilsin. $v = x_1$, $w = x_2 \in X \vee_p X$ olsun.

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(\pi_1 S_p v, \pi_1 S_p w) &= \mathcal{R}(\pi_1(x, x), \pi_1(p, x)) = \mathcal{R}(x, p) \\
\mathcal{R}(\pi_2 S_p v, \pi_2 S_p w) &= \mathcal{R}(\pi_2(x, x), \pi_2(p, x)) = \mathcal{R}(x, x) = \top \\
\mathcal{R}_{dis}(\nabla_p v, \nabla_p w) &= \mathcal{R}_{dis}(x, x) = \top
\end{aligned}$$

dir. Burada $\mathcal{R}_{dis}$, X üzerinde diskre L-önsıralama bağıntısı ve $\pi_i : X^2 \to X$, $i = 1, 2$, izdüşüm fonksiyonları olsun. $v \neq w$ ve $(X, \mathcal{R})$ p noktasında T_1 olduğundan Tanım 4.1.4, Lemma 3.4.1 ve 3.4.2 gereğince,

$$\begin{aligned}
\perp &= \bigwedge \{\mathcal{R}(\pi_1 S_p v, \pi_1 S_p w), \mathcal{R}(\pi_2 S_p v, \pi_2 S_p w), \mathcal{R}_{dis}(\nabla_p v, \nabla_p w)\} \\
&= \bigwedge \{\mathcal{R}(x, p), \top\} \\
&= \mathcal{R}(x, p)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer şekilde, eğer $v = x_2$, $w = x_1 \in X \vee_p X$ ise o zaman Lemma 3.4.1 den

$$\perp = \bigwedge \{\mathcal{R}(p, x), \top\} = \mathcal{R}(p, x)$$

bulunur.

Tersine $\mathcal{R}$, $S_p : X \vee_p X \to U(X^2, \mathcal{R}^2) = X^2$ and $\nabla_p : X \vee_p X \to U(X, \mathcal{R}_{dis}) = X$, dönüşümleri tarafından üretilen $X \vee_p X$ üzerindeki başlangıç L-önsıralama bağıntısı olsun. Burada $\mathcal{R}^2$, π_1 ve π_2 izdüşüm fonksiyonları tarafından üretilen X^2 üzerindeki çarpım yapısıdır.

Kabul edelim ki $x \neq p$ olmak üzere her $x \in X$ için $\mathcal{R}(x,p) = \bot = \mathcal{R}(p,x)$ olsun. $X \vee_p X$ de herhangi v ve w noktaları verilsin. Buna göre;

1. Eğer $v = w$ ise $\mathcal{R}(v,w) = \top$ dir.

2. Eğer $v \neq w$ ve $\nabla_p v \neq \nabla_p w$ ise o zaman $\mathcal{R}_{dis}$ diskre yapı olduğundan $\mathcal{R}_{dis}(\nabla_p v, \nabla_p w) = \bot$ elde edilir. Lemma 3.4.1 den

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(v,w) &= \bigwedge \{\mathcal{R}(\pi_1 S_p v, \pi_1 S_p w), \mathcal{R}(\pi_2 S_p v, \pi_2 S_p w), \mathcal{R}_{dis}(\nabla_p v, \nabla_p w)\} \\ &= \bot\end{aligned}$$

   bulunur.

3. Kabul edelim ki $v \neq w$ ve $\nabla_p v = \nabla_p w$ olsun. Buradan $v \neq w$ olduğundan $v = x_1$ ve $w = x_2$ veya $v = x_2$ ve $w = x_1$ dir.

   Eğer $v = x_1$ ve $w = x_2$ ise o zaman Lemma 3.4.1 den

$$\mathcal{R}(v,w) = \bigwedge \{\mathcal{R}(x,p), \top\} = \mathcal{R}(x,p)$$

   bulunur.

   Kabulden $\mathcal{R}(x,p) = \bot = \mathcal{R}(p,x)$ olduğundan $\mathcal{R}(v,w) = \bot$ elde edilir.

   Benzer şekilde, $v = x_2$ ve $w = x_1$ durumunda da $\mathcal{R}(v,w) = \bot$ elde edilir.

Böylece $X \vee_p X$ wedge çarpımdaki her v, w için

$$\mathcal{R}(v,w) = \begin{cases} \top, & v = w \\ \bot, & v \neq w \end{cases}$$

bulunur. Lemma 3.4.2 den $\mathcal{R}$, $X \vee_p X$ üzerinde diskre L-önsıralama bağıntısı olur. Sonuç olarak, Tanım 4.1.4 den $(X, \mathcal{R})$ uzayının p noktasında T_1 olduğu elde edilir.

Örnek 4.3.1. X boştan farklı bir küme olsun ve keyfi bir $p \in X$ noktası verilsin. X üzerindeki diskre L-önsıralama bağıntısı $\mathcal{R}_{dis}$ ve indiskre L-önsıralama bağıntısı $\mathcal{R}_{ind}$ olmak üzere, $(X, \mathcal{R}_{dis})$ uzayı hem p de $\overline{T_0}$ hem de p de T_1 dir, fakat $(X, \mathcal{R}_{ind})$ uzayı ne p de $\overline{T_0}$ ne de p de T_1 dir.

Örnek 4.3.2. $*$ ikili işlemi her $\alpha, \beta \in [0,1]$ için $\alpha * \beta = (\alpha + \beta - 1) \vee 0$ (Lukasiewicz t-norm [33]) şeklinde tanımlı olmak üzere $\mathsf{L} = ([0,1], \leqslant, *)$ quantale yapısı verilsin. Burada alt eleman $\perp = 0$ ve üst eleman $\top = 1$ dir. $X = \{a, b, c\}$ olmak üzere bir $\mathcal{R} : X \times X \to \mathsf{L}$, L-önsıralama bağıntısı aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$\mathcal{R}(x,y) = \begin{cases} 1, & x = y \\ \dfrac{1}{2}, & (x,y) = (a,c) \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

Buna göre $(X, \mathcal{R})$ nin bir L-önsıralı uzay olduğu kolayca görülebilir. Teorem 4.2.1 dan her $p \in X$ için $(X, \mathcal{R})$ uzayı p noktasında $\overline{T}_0$ dir. Ayrıca Teorem 4.3.1 den $(X, \mathcal{R})$ uzayı $p = b$ noktasında T_1 dir, fakat $p = a$ ve $p = c$ noktalarında T_1 değildir.

Not 4.3.1. Teorem 4.2.1 ve 4.3.1 den, eğer bir $(X, \mathcal{R})$ L-önsıralı uzayı p noktasında T_1 ise p noktasında $\overline{T}_0$ dir. Fakat bu ifadenin tersi genelde doğru değildir (Örnek 4.3.2 ye bakınız).

4.4. Alt Uzaylar ve Çarpımlar

Bu bölümde lokal $\overline{T}_0$ ve T_1 L-önsıralı uzayların kalıtsal ve çarpımsal oldukları gösterilmiştir.

Tanım 4.4.1. $(X, \mathcal{R})$ bir L-önsıralı uzay ve $A \subset X$ olsun. Her $x, y \in A$ için $\mathcal{R}_A(x,y) = \mathcal{R}(x,y)$ ise $(A, \mathcal{R}_A)$ L-önsıralı uzayına $(X, \mathcal{R})$ uzayının alt uzayı denir. Burada $\mathcal{R}_A$ bağıntısı, $i : A \to X$ içerme dönüşümü tarafından üretilen, A üzerindeki başlangıç L-önsıralama yapısıdır.

Teorem 4.4.1. $(X, \mathcal{R})$ bir L-önsıralı uzay, $A \subset X$ ve $p \in A$ olsun.

(i) Eğer $(X, \mathcal{R})$ uzayı p noktasında $\overline{T}_0$ ise $(A, \mathcal{R}_A)$ alt uzayı da p noktasında $\overline{T}_0$ dir. Yani, **L-Prord** kategorisinde $\overline{T}_0$ olma özelliği kalıtsaldır.

(ii) Eğer $(X, \mathcal{R})$ uzayı p noktasında T_1 ise $(A, \mathcal{R}_A)$ alt uzayı da p noktasında T_1 dir. Yani, **L-Prord** kategorisinde T_1 olma özelliği kalıtsaldır.

İspat:

(i) Kabul edelim ki $p \in A$ ve $(X, \mathcal{R})$ uzayı p noktasında $\overline{T}_0$ olsun. Teorem 4.2.1 den $x \neq p$ olmak üzere her $x \in A \subset X$ için $\mathcal{R}(x,p) \wedge \mathcal{R}(p,x) = \perp$ olur. $x, p \in A \subset X$ olduğundan alt uzay tanımı gereği $\mathcal{R}_A(x,p) = \mathcal{R}(x,p)$ ve $\mathcal{R}_A(p,x) = \mathcal{R}(p,x)$ dir. Buradan $\mathcal{R}_A(x,p) \wedge \mathcal{R}_A(p,x) = \perp$ elde edilir. O halde Teorem 4.2.1 den $(A, \mathcal{R}_A)$ alt uzayı p noktasında $\overline{T}_0$ dır.

(ii) Kabul edelim ki $p \in A$ ve $(X, \mathcal{R})$ uzayı p noktasında T_1 olsun. Teorem 4.3.1 den ve alt uzay tanımından $x \neq p$ olmak üzere her $x, p \in A \subset X$ için $\mathcal{R}_A(x,p) = \mathcal{R}(x,p) = \perp = \mathcal{R}(p,x) = \mathcal{R}_A(p,x)$ elde edilir. Dolayısıyla Teorem 4.3.1 den $(A, \mathcal{R}_A)$ alt uzayı p noktasında T_1 dir.

Teorem 4.4.2. Her $i \in I$ için $(X_i, \mathcal{R}_i)$ bir L-önsıralı uzay, $X = \prod_{i \in I} X_i$ ve her $x, y \in X$ için $R(x,y) = \bigwedge_{i \in I} R_i(\pi_i(x), \pi_i(y))$ olmak üzere $(X, \mathcal{R})$, $\{(X_i, \mathcal{R}_i) \colon i \in I\}$ uzaylarının kartezyen çarpımı olsun. Buna göre, her $i \in I$ için $(X_i, \mathcal{R}_i)$ uzayı $(X, \mathcal{R})$ çarpım uzayının bir alt uzayına izomorf olur.

İspat: $j \neq i$ olmak üzere her $j \in I$ için sabit bir $z_j \in X_j$ noktası seçelim. $A = \{z_1\} \times \{z_2\} \times ... \times \{z_{i-1}\} \times X_i \times \{z_{i+1}\} \times ... \subset X$ olsun. Her $x, y \in A$ için $\mathcal{R}_A(x,y) = \mathcal{R}(x,y)$ olmak üzere $(A, \mathcal{R}_A)$ uzayı $(X, \mathcal{R})$ çarpım uzayının bir alt uzayıdır. $a_i \in X_i$ için $\pi_i(z_1, z_2, ..., z_{i-1}, a_i, z_{i+1}, ...) = a_i$ şeklinde tanımlı $\pi_i : (A, \mathcal{R}_A) \to (X_i, \mathcal{R}_i)$ $i.$ izdüşüm fonksiyonu bijektiftir. Her $(z_1, z_2, ..., z_{i-1}, a_i, z_{i+1}, ...), (z_1, z_2, ..., z_{i-1}, b_i, z_{i+1}, ...) \in A$ için

$$\begin{aligned}
& \mathcal{R}_A((z_1, z_2, ..., z_{i-1}, a_i, z_{i+1}, ...), (z_1, z_2, ..., z_{i-1}, b_i, z_{i+1}, ...)) \\
= \; & \mathcal{R}((z_1, z_2, ..., z_{i-1}, a_i, z_{i+1}, ...), (z_1, z_2, ..., z_{i-1}, b_i, z_{i+1}, ...)) \\
= \; & \bigwedge_{j \neq i} \{\mathcal{R}_i(a_i, b_i), \mathcal{R}_j(z_j, z_j) = \top\} \\
\leqslant \; & \mathcal{R}_i(a_i, b_i) \\
= \; & \mathcal{R}_i(\pi_i(z_1, z_2, ..., z_{i-1}, a_i, z_{i+1}, ...), \pi_i(z_1, z_2, ..., z_{i-1}, b_i, z_{i+1}, ...))
\end{aligned}$$

elde edilir ve π_i bir L-sıra koruyan dönüşümdür.

Diğer yandan her $a_i \in X_i$ için $f(a_i) = (z_1, z_2, ..., z_{i-1}, a_i, z_{i+1}, ...)$ ile tanımlı bir

$f:(X_i,\mathcal{R}_i)\to(A,\mathcal{R}_A)$ fonksiyonu verilsin.

$$\begin{aligned}(\pi_i\circ f)(a_i) &= \pi_i(f(a_i))\\ &= \pi_i(z_1,z_2,...,z_{i-1},a_i,z_{i+1},...)\\ &= a_i\\ &= 1_{X_i}(a_i)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(f\circ\pi_i)(z_1,z_2,...,z_{i-1},a_i,z_{i+1},...) &= f(\pi_i(z_1,z_2,...,z_{i-1},a_i,z_{i+1},...))\\ &= f(a_i)\\ &= (z_1,z_2,...,z_{i-1},a_i,z_{i+1},...)\\ &= 1_A(z_1,z_2,...,z_{i-1},a_i,z_{i+1},...)\end{aligned}$$

dir. $\pi_i\circ f=1_{X_i}$ ve $f\circ\pi_i=1_A$ olduğundan $f=(\pi_i)^{-1}$ elde edilir.

Her $a_i,b_i\in X_i$ için

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_i(a_i,b_i) &= \mathcal{R}((z_1,z_2,...,z_{i-1},a_i,z_{i+1},...),(z_1,z_2,...,z_{i-1},b_i,z_{i+1},...))\\ &= \bigwedge_{j\neq i}\{\mathcal{R}_i(a_i,b_i),\mathcal{R}_j(z_j,z_j)=\top\}\\ &= \mathcal{R}(f(a_i),f(b_i))\\ &= \mathcal{R}_A(f(a_i),f(b_i))\leqslant\mathcal{R}_A(f(a_i),f(b_i))\end{aligned}$$

elde edilir ve f bir L-sıra koruyan dönüşümdür.

O halde $(X_i,\mathcal{R}_i)$ ve $(A,\mathcal{R}_A)$ uzayları izomorftur.

Teorem 4.4.3. $\{(X_i,\mathcal{R}_i)\colon i\in I\}$ L-önsıralı uzayların bir sınıfı, $X=\prod_{i\in I}X_i$ ve her $x,y\in X$ için $R(x,y)=\bigwedge_{i\in I}R_i(\pi_i(x),\pi_i(y))$ olmak üzere $(X,\mathcal{R})$ çarpım uzayı verilsin ve $p=(p_i)_{i\in I}$ olsun. Buna göre,

(i) $(X,\mathcal{R})$ uzayının p noktasında $\overline{T}_0$ olması için gerek ve yeter koşul her bir $i\in I$ için $(X_i,\mathcal{R}_i)$ uzayının p_i noktasında $\overline{T}_0$ L-önsıralı uzay olmasıdır.

(ii) $(X,\mathcal{R})$ uzayının p noktasında T_1 olması için gerek ve yeter koşul her bir $i\in I$ için $(X_i,\mathcal{R}_i)$ uzayının p_i noktasında T_1 L-önsıralı uzay olmasıdır.

İspat:

(i) Her $i \in I$ için Teorem 4.4.2 den $(X_i, \mathcal{R}_i)$ uzayı $(X, \mathcal{R})$ çarpım uzayının bir alt uzayına izomorf ve çarpım uzayı da p noktasında $\overline{T}_0$ olduğundan her $i \in I$ için $(X_i, \mathcal{R}_i)$ uzayı p_i noktasında $\overline{T}_0$ dir.

Diğer yandan kabul edelim ki her $i \in I$ için $(X_i, \mathcal{R}_i)$ L-önsıralı uzayı p_i noktasında $\overline{T}_0$ olsun ve $x \neq p = (p_i)_{i \in I}$ olmak üzere $x = (x_i)_{i \in I}$ verilsin. $x \neq p$ olduğundan $x_{i_0} \neq p_{i_0}$ olacak şekilde en az bir $i_0 \in I$ vardır. $(X_{i_0}, \mathcal{R}_{i_0})$ L-önsıralı uzayı $\overline{T}_0$ olduğundan $\mathcal{R}_{i_0}(x_{i_0}, p_{i_0}) \wedge \mathcal{R}_{i_0}(p_{i_0}, x_{i_0}) = \perp$ elde edilir.

$$\mathcal{R}(x,p) = \bigwedge_{i \in I} \{\mathcal{R}_i(x_i, p_i)\} \leqslant \mathcal{R}_{i_0}(x_{i_0}, p_{i_0})$$

ve

$$\mathcal{R}(p,x) = \bigwedge_{i \in I} \{\mathcal{R}_i(p_i, x_i)\} \leqslant \mathcal{R}_{i_0}(p_{i_0}, x_{i_0})$$

bulunur. Buradan $\mathcal{R}_{i_0}(x_{i_0}, p_{i_0}) \wedge \mathcal{R}_{i_0}(p_{i_0}, x_{i_0}) = \perp$ olduğundan $\mathcal{R}(x,p) \wedge \mathcal{R}(p,x) = \perp$ elde edilir. Teorem 4.2.1 den $(X, \mathcal{R})$ çarpım uzayı p noktasında $\overline{T}_0$ dır.

(ii) Her $i \in I$ için Teorem 4.4.1 den $(X_i, \mathcal{R}_i)$ uzayı $(X, \mathcal{R})$ çarpım uzayının bir alt uzayına izomorf ve çarpım uzayı da p noktasında T_1 olduğundan her $i \in I$ için $(X_i, \mathcal{R}_i)$ uzayı p_i noktasında T_1 dir.

Diğer yandan kabul edelim ki her $i \in I$ için $(X_i, \mathcal{R}_i)$ L-önsıralı uzayı p_i noktasında T_1 olsun ve $x \neq p$ olmak üzere $x \in X$ verilsin. $x \neq p$ olduğundan $x_{i_0} \neq p_{i_0}$ olacak şekilde en az bir $i_0 \in I$ vardır. $(X_{i_0}, \mathcal{R}_{i_0})$ L-önsıralı uzayı T_1 olduğundan $\mathcal{R}_{i_0}(x_{i_0}, p_{i_0}) = \mathcal{R}_{i_0}(p_{i_0}, x_{i_0}) = \perp$ elde edilir.

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(x,p) &= \bigwedge \{\mathcal{R}_1(x_1,p_1), \mathcal{R}_2(x_2,p_2), ..., \mathcal{R}_{i_0-1}(x_{i_0-1}, p_{i_0-1}), \\
&\qquad \mathcal{R}_{i_0}(x_{i_0}, p_{i_0}) = \perp, \mathcal{R}_{i_0+1}(x_{i_0+1}, p_{i_0+1}), ...\} \\
&= \perp
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(p,x) &= \bigwedge\{\mathcal{R}_1(p_1,x_1),...,\mathcal{R}_{i_0}(p_{i_0},x_{i_0})=\perp,...\}\\ &= \perp\end{aligned}$$

bulunur. O halde $(X,\mathcal{R})$ çarpım uzayı p noktasında T_1 dir.

5. BÖLÜM

SONUÇ VE ÖNERİLER

5.1. Sonuç

Matematikte bir tam latis, tüm alt kümelerin hem bir supremuma hem de bir infimuma sahip olduğu, kısmi sıralı bir kümedir. Quantale kavramı da, bazı özel özellikleri sağlayan bir tam latis olarak tanımlanmıştır. Latis teorisinin gelişmesiyle birlikte topolojik uzay, metrik uzay, yaklaşım uzayı, yakınsak uzay ve önsıralı uzay gibi birçok matematiksel yapı, latis ve quantale değerlerle donatılarak yeniden ele alınmış ve bazı ilginç sonuçlar elde edilmiştir [15, 27–30, 40]. Bu tez çalışmasında temel olarak quantale değerli önsıralı uzaylar kategorisinde bazı lokal ayırma aksiyomları ele alınmıştır.

İlk olarak quantale kavramı ve bazı özelliklerinden bahsedilerek quantale değerli önsıralı uzaylar tanımı verilmiştir. Objeleri quantale değerli önsıralı uzaylar, morfizmleri sıra koruma dönüşümleri olan **L-Prord** kategorisinin bir topolojik kategori olduğu gösterilmiştir. Ayrıca bu kategoride başlangıç kaldırma yapısı, diskre ve indiskre objeler ifade edilmiştir.

Ardından bir p noktasında wedge çarpım ve eksen dönüşümleri yardımıyla keyfi bir topolojik kategori için gerekli tanım ve teoremler kullanılarak lokal T_0 ve lokal T_1 quantale değerli önsıralı uzaylar karakterize edilmiştir. Arasındaki ilişki incelenmiştir. Buna göre, p noktasında T_1 olan her $(X, \mathcal{R})$ L-önsıralı uzayının p noktasında $\overline{T}_0$ olduğu elde edilmiş ve bu ifadenin tersinin genelde doğru olmadığı örnek yardımıyla gösterilmiştir. Ayrıca elde edilen bu objelerin kalıtsallık ve çarpımsallık özelliklerini de sağladıkları sonucu elde edilmiştir.

5.2. Öneriler

Bundan sonraki çalışmalar için **L-Prord** kategorisi ile alakalı aşağıda sıralanan öneriler dikkate alınabilir.

1. Bitiş kaldırma yapısı elde edilerek bir p noktasında T_0' objeler karakterize edilebilir.

2. Daha önce karakterizasyonu verilen lokal ve genel ayırma aksiyomlarının aralarındaki ilişkiler incelenebilir.

3. Kapalılık, bağlantılılık, kompaktlık gibi önemli topolojik kavramlar, **L-Prord** topolojik kategorisinde karakterize edilebilir.

4. Ayırma aksiyomları yardımıyla dolu alt kategoriler oluşturularak bu kategorilerin çeşitli özellikleri incelenebilir.

5. Quantale değerli önsıralı uzaylar genelleştirilerek quantale değerli yansımalı uzaylar ve quantale değerli bağıntı uzayları tanımlanabilir. Bu uzaylar kategorik olarak incelenebilir ve birer topolojik kategori olup olmadıkları araştırılabilir.

KAYNAKLAR

1. Adámek, J., Herrlich, H., Strecker, G.E., "Abstract and Concrete Categories", *Wiley*, New York, 1990.

2. Baran, M., "Separation Properties", *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 23 (5), 333–341, 1992.

3. Baran, M., "The Notion of Closedness in Topological Categories", *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 34 (2), 383–395, 1993.

4. Baran, M., Şimşek, H., "p de Ayrılma Aksiyomları", *Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 10 (1-2), 55–69, 1993.

5. Baran, M., "Generalized Local Separation Properties", *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 25 (6), 615–620, 1994.

6. Baran, M., Altındiş, H., "T_0-objects in Topological Categories", *The Journal of the University of Kuwait (Science)*, 22 (2), 123–127, 1995.

7. Baran, M., Altındiş, H., "T_2-objects in Topological Categories", *Acta Mathematica Hungarica*, 71 (1-2) 41–48, 1996.

8. Baran, M., "A notion of compactness in topological categories", *Publ. Math. Debrecen*, 50 (3-4), 221–234, 1997.

9. Baran, M., "T_3 and T_4-objects in Topological Categories", *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 29, 59–69, 1998.

10. Baran, M., "Completely Regular Objects and Normal Objects in Topological Categories", *Acta Mathematica Hungarica*, 80 (3), 211–224, 1998.

11. Baran, M., "Compactness, Perfectness, Separation, Minimality and Closedness with Respect to Closure Operators", *Applied Categorical Structures*, 10, 403–415, 2002.

12. Baran, M., Kula, M., "A note on connectedness", *Publ. Math. Debrecen*, 68 (3-4), 489–501, 2006.

13. Baran, M., Al-Safar, J., "Quotient-reflective and bireflective subcategories of the category of preordered sets", *Topology Appl.*, 158 (15), 2076-2084, 2011.

14. Brümmer, G.C., "A categorial study of initiality in uniform topology", *Ph.D. Thesis, University of Cape Town*, 1971.

15. Denniston, J.T., Melton, A., Rodabaugh, S.E., Solovyov, S.A., "Lattice-valued preordered sets as lattice-valued topological systems", *Fuzzy Sets and Systems*, 259, 89–110, 2015.

16. Dikranjan, D., Giuli, E., "Closure Operators I", *Topology and its Applications*, 27, 129–143, 1987.

17. Eilenberg, S., Mac Lane, S., "General Theory of Natural Equivalences", *Transactions of the American Mathematical Society*, 58 (2), 231–294, 1945.

18. Erné, M., "Algebraic models for T_1-spaces", *Topology and its Applications*, 158 (7), 945-962, 2011.

19. Flagg, R.C., "Quantales and continuity spaces". *Algebra Universalis*, 37 (3), 257–276, 1997.

20. Gierz, G., Hofmann, K.H., Keimel, K., Lawson, J.D., Mislove, M.W., Scott, D.S., "Continuous lattices and Domains", *Cambridge University Press*, Cambridge, 2003.

21. Harvey, J., "T_0-separation in topological categories", *Quaestiones Mathematicae*, 2 (1-3), 177-190, 1997.

22. Herman, G.T., "On topology as applied to image analysis", *Computer Vision, Graphigs, and Image Processing*, 52 (3), 409–415, 1990.

23. Herrlich, H., "Topological Functors", *General Topology and its Applications*, 4 (2), 125–142, 1974.

24. Hoffmann, R.E., "(E, M)-universally topological functors", *Habilitationssschrift, Universitat Düsseldorf*, 1974.

25. Hofmann, D., Seal, G.J., Tholen, W., "Monoidal Topology: A Categorical Approach to Order, Metric, and Topology", *Cambridge University Press*, Cambridge, 2014.

26. Janelidze, G., "Light morphisms for generalized T_0-reflections", *Topology and its Applications*, 156 (12), 2109–2115, 2009.

27. Jäger, G., "A category of L-fuzzy convergence spaces", *Quaest. Math.*, 24 (4), 501–517, 2001. https://doi.org/10.1080/16073606.2001.9639237

28. Jäger, G., "Probabilistic approach spaces", *Math. Bohem.*, 142 (3), 277–298, 2017. https://doi.org/10.21136/MB.2017.0064-15

29. Jäger, G., Yao, W., "Quantale-valued gauge spaces", *Iran. J. Fuzzy Syst.*, 15 (1), 103–122, 2018. https://doi.org/10.22111/IJFS.2018.3581

30. Jäger, G., "The Wijsman structure of a quantale-valued metric space", *Iran. J. Fuzzy Syst.*, 17 (1), 171–184, 2020.

31. Johnstone, P. T., "Topos Theory", London Mathematical Society Monographs, Vol. 10, *Academic Press*, London-New York, 1977.

32. Kent, D. C., "Convergence Quotient Maps", *Fundamenta Mathematicae*, 165, 197–205, 1969.

33. Klement, E.P., Mesiar, R., Pap, E., "Triangular Norms", *Springer*, Dordrecht, 2000.

34. Kovalevsky, V.A., Kopperman, R., "Some Topology-based Image Processing Algorithms", *Ann. N. Y. Acad. Sci.*, 728 (1), 174–182, 1994.

35. Lowen, R., "Approach Spaces: The Missing Link in the Topology-Uniformity-Metric Triad", *Oxford University Press*, 1997.

36. Marny, T., "Rechts-bikategoriestrukturen in topologischen Kategorien", *Dissertation, Freie Universitat*, Berlin, 1973.

37. Mielke, M.V., "Geometric Topological Completions with Universal Final Lifts", *Top. and Appl.*, 9, 277-293, 1985.

38. Mucuk, O., "Topoloji ve Kategori", *Nobel Yayın Dağıtım*, Ankara, 2010.

39. Özkan, S., "Hausdorff ve Regüler Proximity Uzaylar", *Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi*, Kayseri, 2018.

40. Qasim, M., Özkan, S., "The notions of closedness and D-connectedness in quantale-valued approach spaces", *Categ. Gen. Algebr. Struct. Appl.*, 12 (1), 149–173, 2020. https://doi.org/10.29252/CGASA.12.1.149

41. Salibra, A., "A continuum of theories of lambda calculus without semantics", *Proceedings 16th Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science*, 334–343, 2001.

42. Schwarz, F., "Connections Between Convergence and Nearness", Lecture Notes in Mathematics, *Springer*, 719, 345–425, 1978.

43. Schweizer, B., Sklar, A., "Probabilistic metric spaces", *North Holland*, New York, 1983.

44. Scott, D., "Continuous lattices. In Lawvere, Bill. Toposes, Algebraic Geometry and Logic", Lecture Notes in Mathematics, *Springer-Verlag*, 1972.

45. Spivak, D.I., "Category Theory for Scientists", *MIT press*, Cambridge, 2013.

46. Stoy, J.E., "Denotational semantics: the Scott-Strachey approach to programming language theory", *MIT press*, Cambridge, 1977.

47. Stong. R.E., "Finite topological spaces", *Transactions of the American Mathematica*, 123 (2), 325–340, 1966.

48. Thurston, W.P., "On Proof and Progress in Mathematics", *Bulletin of the American Mathematical Society*, 30, 161–177, 1994.

49. Van Steirteghem, B., "T_0 separation in axiomatic quantum mechanics", *International Journalof Theoretical Physics*, 39 (3), 955–962, 2000.

50. Weck-Schwarz, S., "T_0-objects and separated objects in topological categories", *Quaestiones Mathematicae*, 14 (3), 315–325, 1991.

51. Wyler, O., “Top Categories And Categorical Topology”, *Gen. Top. Appl.*, 11, 17–28, 1971.

52. Zhang, Q. Y., Fan, L., “Continuity in quantitative domains”, *Fuzzy Sets and Systems*, 154 (1), 118–131, 2005. https://doi.org/10.1016/j.fss.2005.01.007