T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GRAFLARIN SEIDEL ENERJİSİ

Tezi Hazırlayan
Duygu SAZAK

Tez Danışmanı
Doç. Dr. Sezer SORGUN

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Haziran 2017
NEVŞEHİR

T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GRAFLARIN SEIDEL ENERJİSİ

Tezi Hazırlayan
Duygu SAZAK

Tez Danışmanı
Doç. Dr. Sezer SORGUN

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Haziran 2017
NEVŞEHİR

KABUL VE ONAY

Doç. Dr. Sezer SORGUN danışmanlığında **Duygu SAZAK** tarafından hazırlanan **"Grafların Seidel Enerjisi"** başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

20/06/2017

JÜRİ

Başkan : (Doç. Dr. Halis BİLGİL)

Üye : (Doç. Dr. Sezer SORGUN)

Üye : (Yrd. Doç. Dr. Hatice TOPCU)

ONAY:

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun 22/06/2017 tarih ve 28-202 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

22/06/2017

Prof. Dr. Şahlan ÖZTÜRK

Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİM SAYFASI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada yer alan bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu ve bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Duygu SAZAK

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım esnasında çok yoğun programına rağmen bana her zaman vakit ayıran, birikimleri ile ufkumu açan, anlayışlı ve çok değerli hocam Doç. Dr. Sezer SORGUN'a teşekkür ediyorum. Ayrıca aileme (özellikle anneme ve babama) yanımda bulundukları ve bana her zaman destek verdikleri için çok teşekkür ediyorum.

GRAFLARIN SEIDEL ENERJİSİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Duygu SAZAK

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Haziran 2017

ÖZET

Graf spektrası, üzerinde tanımlanan M matrisinin öz değer çalışmalarıdır. Literatürde M-teori olarak da bilinir. Bu teoride graf enerjileri problemleri son yıllarda araştırmacıların ilgisini çekmiştir. Graf enerjisi; üzerinde tanımlanan graf matrislerine göre graf enerjisi isimlendirilmiş olup Seidel enerji çalışmaları ile ilgili ilk ciddi çalışma 2012 yılında Haemers tarafından yapılmıştır.

Bu tez çalışmasında W.H. Haemers'in "Seidel switching and graph energy" ve E. Ghorbani' nin "On eigenvalues of Seidel matrices and Haemers' conjecture" isimli makalelerden ilham alınarak Seidel enerji ile ilgili bu zamana kadar yapılan çalışmalar derlenmiştir.

Anahtar kelimeler: Graf, Seidel Enerji, Seidel Matrisi, Seidel Anahtarlama

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Sezer SORGUN

Sayfa Adeti: 34

SEIDEL ENERGY OF GRAPHS

(MsC. Thesis)

Duygu SAZAK

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

June 2017

ABSTRACT

Graf spectra is a study of eigenvalues related to M graph matrix. This theory is known as M-theory in literature. In this theory, the problems of graph energy have attracted the interest of researchers in recent years. Graph energy is named according to graph matrices such as ordinary (adjacency) energy, Laplacian energy, etc. Although there are many papers about these energies, the first critical study about Seidel energy has been done by Haemers in 2012.

In this thesis work, it has been compiled the studies related to Seidel energy taking inspiration from the papers by W.H.Haemers: "Seidel switching and graph energy" and by E. Ghorbani: "On eigenvalues of Seidel matrices and Haemers' conjecture".

Keywords: Graph, Seidel Energy, Seidel Matrix, Seidel Switching
Thesis Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Sezer SORGUN
Page Number: 34

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER LİSTESİ

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$G = (V, E)$	V noktalı E kenarlı bir G grafı
$i \sim j$	i noktasının j noktasına komşuluğu
$deg(v)$	Derece
K_n	Tam Graf
P_n	Yol Graf
C_n	Devirli Graf
S_n	Yıldız Graf
$K_{n,m}$	İki Parçalı Graf
$A(G)$	Komşuluk Matrisi
$S(G)$	Seidel Matrisi
$\varepsilon(S(G))$	Seidel Enerji
$\varepsilon(G)$	Enerji
$detS(G)$	Seidel Matrisinin determinantı
$M_n(\mathbb{R})$	Elemanları $\mathbb{R}$ cisminde olan $n \times n$ Tipinde Matris
$SM_n(\mathbb{R})$	Elemanları $\mathbb{R}$ cisminde olan $n \times n$ Tipinde Simetrik Matris
$\Delta(G)$	Maksimum Derece
$\delta(G)$	Minimum Derece
$\rho(A)$	A matrisinin spektral yarıçapı
Δ_A	Karakteristik polinom
λ_n	Bir G grafın komşuluk matrisinin n. öz değeri

$\boldsymbol{\theta_n}$	Bir G grafın Seidel matrisinin n. öz değeri
$\boldsymbol{\Lambda_\alpha(C)}$	Parametre
$\boldsymbol{\varepsilon_A(\lambda)}$	A matrisinin öz uzayı
$\boldsymbol{\overline{G}}$	G grafının tamamlayıcısı (complement)
$\boldsymbol{F[X]}$	Katsayıları F cisminde olan polinomların vektör uzayı
$\boldsymbol{\|A\|_1}$	Bir A matrisinin maksimum satır normu
$\boldsymbol{\|A\|_\infty}$	Bir A matrisinin maksimum sütun normu

1.BÖLÜM

GİRİŞ

G bir graf olmak üzere G nın komşuluk matrisine göre singüler değerlerinin toplamına grafın enerjisi denir. Grafların enerji tanımı 1978 yılında Ivan Gutman tarafından ortaya atılmıştır [1]. Enerji ile ilgili birçok problemleri de ortaya çıkarmıştır. Bu problemlerden en temel olanlarından biri de hangi türden grafların minimal enerjili veya maksimal enerjili olduğunun tespitidir [2]. Ayrıca literatürde graf enerjileri ile ilgili bir çok (alt veya üst) sınırlar da elde edilmiştir [3].

G bir graf olmak üzere G nin Seidel matrisi sırasıyla A komşuluk matrisi, J bütün elemanları 1 olan matris ve I birim matris olmak üzere

$$S(G) = I + 2A - J$$

biçiminde tanımlanır. G nin Seidel enerjisi $S\mathcal{E}(G)$, G nin Seidel matrisinin singüler değerlerinin toplamı olarak tanımlanır. Normal graf enerjisinde olduğu gibi hangi türden graflar için Seidel enerji maksimum ve minimum olur sorusu da geçerlidir. Seidel enerji ile çalışmalar çok az literatürde bulunmaktadır. Bu çalışmalardan en önemli olanı Haemers' in 2012 yılında yayınlanan makalesidir. Haemers [4] makalesinde minimum Seidel enerjili grafların tam graf olduğu varsayımında bulunmuştur. Ayrıca genel graflar için oldukça yakın bir alt sınır ve bir üst sınır da vermiştir. Konu ile şimdiye kadar pek az çalışma yer almaktadır. Her ne kadar Seidel matrisi ile ilgili çalışma yapılsa da Haemers' in varsayımı henüz ispatlanamamıştır. Ancak bazı özel koşullar altında varsayımın olumlu cevaba sahip olduğu gösterilmiştir. Ghorbani [5], G bir graf ve $S(G)$ Seidel matrisi olmak üzere $S(G)$ nin determinantının $n-1$ den büyük olması koşulu altına KKT (Karush-Kuhn-Tucker) metodundan yararlanarak varsayımı ispatlamıştır. Diğer durumlar hala açıktır.

Bu tezde Seidel enerji ile ilgili bu zamana kadar yapılan çalışmalar kapsamlı bir biçimde derlenecektir. Tezin 2. bölümünde, graf teorisinde bazı tanımlar, lineer cebir alt yapısı ve bazı iyi bilinen eşitsizliklere yer verilmiştir. 3. bölüm Seidel matrisi, Seidel anahtarlama ve uygulamaları kapsamaktadır. 4. bölümde Seidel enerji, normal enerji ve

Seidel enerji üzerine alt ve üst sınırlara yer verilmiştir. Son bölümde ise sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

2.BÖLÜM

ÖN BİLGİLER

2.1. Graf Teoride Bazı Kavramlar

Tanım 2.1.1. $G = (V, E)$ basit graf olsun. Sırasıyla $V(G)$ ve $E(G)$ tarafından G nin tüm noktalar ve kenarlar kümesini belirtmektedir. $u, v \in V(G)$ olsun. $e = uv$ olmak üzere u ve v bitiş noktaları ile G nin kenar noktaları anlamına gelir. G grafının mertebesi nokta sayısını gösterir. Üstelik $e = uv$ ise u noktası v noktasına komşudur denir ve $u{\sim}v$ ile gösterilir. Bir u noktasının komşuluk kümesi

$$N_u = \{v \in V : u{\sim}v\}$$

biçimindedir.

Tanım 2.1.2. $G = (V, E)$ bir graf ve $v \in V$ olsun. v noktasına komşu olan noktaların sayısına derece denir ve $deg(v)$ ya da d_v ile gösterilir. $v_1, v_2, \cdots, v_n$ noktaları $G = (V, E)$ grafının noktaları olmak üzere maksimum ve minimum dereceleri

$$\Delta(G) = max\{deg(v_i) : 1 \leq i \leq n\}$$

ve

$$\delta(G) = min\{deg(v_i) : 1 \leq i \leq n\}$$

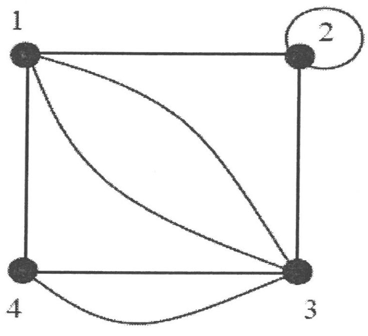
olarak tanımlanır. Bir grafın bütün noktalarının derecesi k olan grafa k-düzenli graf denir. n noktalı bir grafta $k = n - 1$ ise grafa tam graf denir.

Tanım 2.1.3. G ve H iki graf olsun. G ve H grafının kartezyen çarpımı

$$G{\times}H = \{(u, v) \,:\, u \in V(G) \; ve \; v \in V(H)\}$$

ile gösterilir. Burada, $(u, v){\sim}(u', v')$ komşu olması için gerek ve yeter koşul $u = u'$ ve $vv' \in E(H)$ veya $v = v'$ ve $uu' \in E(G)$ dir.

Tanım 2.1.4. İki noktayı birleştiren birden fazla kenar varsa bunlara çoklu kenar (multiple edge), bir noktayı kendine birleştiren bir kenara da ilmek (loop) denir. Bu iki tür kenarı olmayan grafa basit graf denir.



Şekil 2.1. Çoklu kenar ve döngüye sahip kenar

Tanım 2.1.5. Bir noktanın derecesi sıfır ise bu noktaya ayrık nokta (isolated vertex) ve derecesi 1 ise noktaya pendant nokta denir.

Tanım 2.1.6. Bir G grafının tamlayanı (complement) $\bar{G}$ ile gösterilir ve G de komşu olan (komşu olmayan) noktalar $\bar{G}$ de komşu olmayan (komşu olan) noktalardır.

Teorem 2.1.7. Bir G grafında d_i, i noktasının derecesi ve e , grafın kenar sayısı olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2e$$

dir [6].

Tanım 2.1.8. Herhangi iki noktası bir yol (path) oluşturan G grafına bağlantılı (connected) graf denir. En az bir nokta çifti arasında yol yoksa grafa bağlantısız graf denir.

Tanım 2.1.9. n noktalı k −düzenli boş ya da tam olmayan bir G grafı (n, k, s, r) parametreleriyle birlikte aşağıdaki koşulları sağlarsa güçlü düzenli (strongly regular) graf olarak isimlendirilir.

a. Birbirine komşu olacak biçimde tüm nokta çiftleri $s \geq 0$ adet aynı sayıda ortak komşuluğa sahiptir.

b. Birbirine komşu olmayan tüm nokta çiftleri de $r > 0$ adet aynı sayıda ortak komşuluğa sahiptir.

c. Eğer $r \geq 0$ ise G tam grafların ayrık birleşimidir. $r \neq 0$ ve G tam olmayan graf ise G nin öz değerleri k ve

$$x^2 + (r - s)x + (r - k) = 0 \tag{2.1}$$

kuadratik denkleminin kökleri olur.

Tanım 2.1.10. $\left(n, \frac{n-1}{2}, \frac{n-5}{4}, \frac{n-1}{4}\right)$ parametreye sahip güçlü düzenli grafa konferans (conference) graf denir.

Tanım 2.1.11. $\mathrm{V} = \{1, 2, 3, \ldots, \mathrm{n}\}$ ve $\mathrm{E} = \{\{1,2\}, \{2,3\}, \ldots, \{\mathrm{n}-1, \mathrm{n}\}, \{\mathrm{n}, 1\}\}$ olacak biçimdeki $C_n(V, E)$ grafına döngü (cycle) graf denir.

Tanım 2.1.12. G grafı n noktaya ve m kenara sahip bir graf olmak üzere

i. $m = n - 1$ ise G bir ağaç (tree)

ii. $m = n$ ise tek döngülü (unicyclic)

iii. $m = n + 1$ ise çift döngülü (bicyclic)

iv. En az iki ağacın ayrık birleşimlerine orman (forest) denir.

Tanım 2.1.13. G grafında alınan keyfi iki nokta çifti arasındaki maksimum uzaklığa G'nin çapı (diameter) denir ve $diam(G)$ biçiminde gösterilir. Bir u noktasının dış merkezliği $\varepsilon(u) = max_{v \in V} d(u, v)$ ve G' nin yarıçapı $r(G) = min_{u \in V} \varepsilon(u)$ ile gösterilir. Üstelik bir grafın merkezi $r(G)$' ye eşit olan graf dış merkezliklerinin kümesi olarak tanımlanır.

2.2. Lineer Cebir Alt Yapısı

Tanım 2.2.1. A matrisi F cismi üzerinde bir $n{\times}n$ matris olsun. I birim matris olmak üzere $xI - A$, matrisi A nın karakteristik matrisi ve $\Delta_A = det(xI - A)$ karakteristik polinomu olarak adlandırılır. $det(A - xI) = 0$ denkleminin köklerine A matrisinin öz değerleri denir. Bu tanım şu şekilde de ifade edilebilir:

$A \in M_n$ olmak üzere $AX = \lambda X$ denklemini sağlayan bir λ skaleri varsa $0 \neq X$ vektörüne A nın öz vektörü denir. λ skalerine de öz değer denir. Üstelik bir A matrisinin karakteristik polinomu

$$K_A(\lambda) = det(A - \lambda I)$$

dır [7].

Önerme 2.2.2. $A \in M_n$ kare matrisi ve öz değerleri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ olsun. Bu durumda

$$iz(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

ve

$$det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

dir [8].

Tanım 2.2.3. Eğer $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ ise, o zaman A^*A'nın öz değerleri $\lambda_j(A^*A)$ olmak üzere

$$\sqrt{\lambda_j(A^*A)} \qquad (j = 1,2,\dots,n)$$

sayılarına A matrisinin singüler değerleri denir ve σ_j ile gösterilir. Yani

$$\sigma_j = \sqrt{\lambda_j(A^*A)}$$

dır. Burada dikkat edilirse A^*A 'nın maksimum öz değerinin kareköküne A matrisinin spektral normu denir. Yani

$$\|A\|_s = \{A * A'\text{nın maksimum öz değeri}\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{max\lambda_j(A * A)}$$

biçiminde de ifade edebiliriz.

Tanım 2.2.4. A matrisi F cismi üzerinde herhangi bir $n\times n$ matris olsun. Bu durumda

i. $\Delta_A = X^n - tr(A)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n det(A)$.
ii. A ve A^t aynı karakteristik polinomlara sahiptir.
iii. F üzerinde herhangi $n\times n$ tipinde bir P matrisi için ters çevrilebilir, A matrisleri ve $P^{-1}AP$ aynı karakteristik polinomlara sahiptir [7].

Tanım 2.2.5. A matrisi F cismi üzerinde bir $n\times n$ matris olsun. Bir c öz değeri için,

$$(A - cI)X = 0$$

homojen sistemin çözüm uzayına c ye karşılık gelen öz uzay denir. Başka bir ifade ile A $n\times n$ tipinde matrisinin boş uzayı $Null(A) = \{x \in \mathbb{C}^n : Ax = 0\}$ ve λ, A matrisinin öz değeri olmak üzere A nın öz uzayı

$$\varepsilon_A(\lambda) = Null(A - \lambda I)$$

biçiminde de gösterilebilir [7].

Önerme 2.2.6. A matrisi bir F cismi üzerinde $n\times n$ matris olsun.

i. c, A nın bir öz değeri ise herhangi bir $f \in F[X]$ polinomu için $f(c)$ de $f(A)$ nın öz değeridir ve c ile ilişkilendirilmiş A nın keyfi bir öz vektörü $f(c)$ ile ilişkilendirilmiş $f(A)$ nın bir öz vektörüdür.
ii. A matrisi tersinir matris ise A nın her öz değeri sıfırdan farklıdır ve
   a. c nin A nın bir öz değeri olması için gerek ve yeter koşul c^{-1}, A^{-1} nin bir öz değeridir.
   b. X vektörünün c ile ilişkilendirilmiş A nın bir öz vektörü olması için gerek ve yeter koşul X, c^{-1} ile ilişkilendirilmiş A^{-1} nın bir öz vektörüdür [7].

Tanım 2.2.7. A matrisinin bir λ öz değerinin geometrik katlılığı $\varepsilon_A(\lambda)$ nın boyutudur. A matrisinin bir λ öz değerinin cebirsel katlılığı p_A karakteristik polinomunun kökü olarak λ nın sayısıdır.

Örnek 2.2.8.

$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ matrisini alalım. $p_A = det(A - \lambda I_2) = (\lambda - 1)^2$ olup A matrisi 2 katlı bir öz değerine sahiptir. O halde bu öz değerin cebirsel katı 2 dir.

$$A - (1)I_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

matrisi alınıp bu matrisin boş uzayı tek $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektörü tarafından üretilir. Dolayısıyla,

$$Null(A - (-1)I_2) = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

dir ve böylece geometrik katı 1 dir.

Teorem 2.2.9. λ, A nın bir öz değeri olsun. O zaman λ nın geometrik katlılığı cebirsel katlılığını aşamaz [7].

İspat: λ nın geometrik katlılığı r olsun. O zaman E_λ öz uzayı r tane $v_1, \dots, v_r$ lineer bağımsız öz vektör kapsar. Bu $\{v_i\}$ bazını, V nin bir bazını $\{v_1, \dots, v_{r,} w_1, \dots, w_r\}$ bazına tamamlanarak

$$\begin{aligned}
&T(v_1) = \lambda v_1 \\
&T(v_2) = \lambda v_2 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&T(v_r) = \lambda v_r \\
&T(w_1) = a_{11}v_1 + \dots + a_{1r}v_r + b_{11}w_1 + \dots + b_{1s}w_s \\
&T(w_2) = a_{21}v_1 + \dots + a_{2r}v_r + b_{21}w_1 + \dots + b_{2s}w_s \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&T(w_s) = a_{s1}v_1 + \dots + a_{sr}v_r + b_{s1}w_1 + \dots + b_{ss}w_s
\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki baza göre T nin matrisi, $A = (a_{ij})^T$ ve $B = (b_{ij})^T$ olmak üzere

$$M=\begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & | & a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{s1} \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & | & a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{s2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & | & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & | & a_{1r} & a_{2r} & \cdots & a_{sr} \\ - & - & - & - & | & - & - & - & - \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & | & b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{r1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & | & b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{r2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & | & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & | & b_{1s} & b_{2s} & \cdots & b_{rs} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda I_r & A \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

biçimindedir.

M bir blok üçgensel matris olduğundan λI_r nin öz polinomu, M blok matrisinin polinomunu ve dolayısıyla T nin polinomunu böler. O halde, T operatörü için λ nın cebirsel katlılığı en az r dir.

Teorem 2.2.10. Farklı öz değerlere karşılık gelen öz vektörler lineer bağımsızdır [7].

Tanım 2.2.11. $A \in M_n$ olmak üzere

$$\rho(A) = max\{|\lambda| : \lambda,\ A'nın\ özdeğeri\}$$

kümesine A matrisinin spektral yarıçapı denir.

Tanım 2.2.12. Bir $A = (a_{ij})$ matrisi verilsin

i) Eşlenik transpozu $A^* = \overline{a}_{ij}$

ii) Hermit transpozu $A^H = \overline{A}^T$

iii) $A^*A = AA^*$ ise A ya normal matris denir.

iv) B matrisi aynı boyutta bir matris olmak üzere $B = P^{-1}AP$ olacak biçimde tersinir bir P matrisi varsa A ve B' ye benzerdir denir [9].

Teorem 2.2.13. A ve B normal matrisler olmak üzere $AB = BA$ ise buradan U birimsel matris olacak biçimde U^*AU ve U^*BU köşegen matrisleri vardır [9].

Teorem 2.2.14. $A = (a_{ij}) \in M_n$ matrisinin öz değerleri $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

i. A normal matris

ii. A birimsel köşegenleştirilebilir

iii. $\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^2 = \sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2$

iv. A matrisinin n öz vektörlerinin bir ortonormal kümesi vardır [9].

2.3. Bazı Önemli Eşitsizlikler ve Matris Eşitsizlikleri

Teorem 2.3.1. (Rayleigh Prensibi)

A $n\times n$ tipinde bir simetrik matris ve öz değerleri $\rho_1 \geq \rho_2 \geq \cdots \geq \rho_n$ biçiminde sıralansın. Belirli bir x vektörü için Rayleigh oranı tüm $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ için

$$R_A(x) = \frac{xAx^t}{xx^t}$$

olmak üzere

$\rho_1 \geq R_A(x) \geq \rho_n$

dir [10].

Teorem 2.3.2. (Arada olma) Eğer $B_{m\times m}$ matrisi öz değerleri $\lambda_1 \geq \lambda_2 \dots \geq \lambda_n$ öz değerleri ile A' nın bir alt matrisi olmak üzere $k = 1, \dots, n$ için

$\rho_k \geq \lambda_k \geq \rho_{n-m+k}$

dir [11].

Teorem 2.3.3. (Ky Fan Eşitsizliği)

A, B ve C $n\times n$ kare matrisler ve $A + B = C$ olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{n} s_i(A) + \sum_{i=1}^{n} s_i(B) \geq \sum_{i=1}^{n} s_i(C)$$

dır. Eşitsizliğin sağlanması için ancak ve ancak P ortogonal bir matris olmak üzere, PA ve PB her ikisi de pozitif yarı tanımlı (semi definite) matristir [12].

Teorem 2.3.4. $n\times m$ tipinde reel bir Q matrisi ve $n\times n$ tipinde reel, simetrik bir A matrisi verilsin. $Q^TQ=I$ olsun. A matrisinin öz değerleri $\alpha_1\geq\cdots\geq\alpha_n$ ve Q^TAQ matrisinin öz değerleri $\beta_1\geq\cdots\geq\beta_m$ ise $\forall i\in\{1,\dots,m\}$ için

$$\alpha_{n-m+i}\leq\beta_i\leq\alpha_i$$

eşitsizlikleri sağlanır [13].

Teorem 2.3.5. $i\in 1,\dots,n$ için $x_i\geq 0$, Varsayalım ki bazı $x_i>0$ ve $\alpha_i>0$ için $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}=1$ sağlansın. O halde,

$$exp\left[2\left(1-\frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i^{\frac{1}{2}}}{(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i)^{\frac{1}{2}}}\right)\right]\prod_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\leq\sum\nolimits_{i=1}^{n}\alpha_i x_i$$

Hipotez $i\in 1,\dots,n$ için $n\geq 2$, $x_i\geq 0$ ve $\alpha_i>0$, $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$ daha fazla bahsedilmeden bu not boyunca sağlanır [14].

Teorem 2.3.6. (AM-QM eşitsizliği) Aritmetik ortalama ve kuadratik ortalama arasında

$$\frac{\rho_1+\rho_2+\cdots+\rho_n}{n}\leq\sqrt{\frac{{\rho_1}^2+{\rho_2}^2\ldots+{\rho_n}^2}{n}}$$

eşitsizliği sağlanır [15].

Tanım 2.3.7. (Discrete Hölder eşitsizliği) Eğer $p>1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ise;

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k b_k|\leq\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^q\right)^{1/q}$$

dır [15].

Tanım 2.3.8. (Cauchy-Schwarz eşitsizliği) $a_1,a_2,\dots,a_n,b_1,b_2,\dots,b_n$ reel sayılar için,

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k b_k|\leq\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|b_k|^2}$$

dır [15].

Tanım 2.3.9. (Chebysev eşitsizliği) $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ ve $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$ olsun.

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \geq \frac{(\sum_{k=1}^{n} |a_k|)(\sum_{k=1}^{n} |b_k|)}{n}$$

$a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ ve $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$ ancak ve ancak her iki eşitlik geçerlidir [15].

Tanım 2.3.10. (Logaritma eşitsizliği) $x > 0$ olmak üzere;

$$\mathrm{lnx} \leq x - 1$$

dir [15].

Tanım 2.3.11. (Kuvvet-Ortalama eşitsizliği) k_1 , k_2 reel sayılar ve $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitif reel sayılar olmak üzere $k_1 < k_2$ için;

$$\sqrt[k_1]{\frac{{a_1}^{k_1} + {a_2}^{k_1} + \cdots + {a_n}^{k_1}}{n}} \leq \sqrt[k_2]{\frac{{a_1}^{k_2} + {a_1}^{k_2} + \cdots + {a_1}^{k_2}}{n}}$$

dir [15].

Tanım 2.3.12. (Cauchy eşitsizliği) Tüm a ve b reel sayıları için,

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$

dir [15].

3.BÖLÜM

SEIDEL MATRİSİ VE SEIDEL ANAHTARLAMA

3.1. Seidel Matrisi

Tanım 3.1.1. $G = (V, E)$ bir graf olmak üzere elemanları

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, & i \sim j \\ 0, & diğer \quad durumlarda \end{cases}$$

biçiminde tanımlı $A(G) = (a_{i,j})$ matrisine grafın komşuluk matrisi denir.

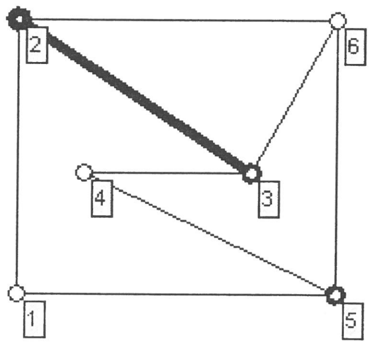
G nin $S(G) = (s_{i,j})$ Seidel matrisi; elemanları

$$s_{i,j} = \begin{cases} 0 & ; i = j \\ 1 & ; i \sim j \\ -1 & ; i \nsim j \end{cases}$$

olan $n \times n$ biçiminde matristir. Diğer bir ifadeyle, J bütün elemanları 1 olan matris ve I birim matris olmak üzere

$$S(G) = I + 2A - J = A(\bar{G}) - A(G)$$

biçiminde de tanımlanabilir [16].



Şekil 3.1.

Yukarıdaki figür için Seidel matrisi

$$S(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

biçimindedir.

Not 3.1.2. G grafının tamamlayıcısı (complement) da aynı matristir.

Not 3.1.3. G bir graf olmak üzere G nin öz değerleri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ biçiminde gösterilip $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ biçiminde sıralanır.

Diğer taraftan G nin Seidel matrisine göre öz değerleri de $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ Seidel öz değerleri olarak tanımlanır ve $\theta_1 \geq \theta_2 \geq \cdots \geq \theta_n$ şeklinde gösterilir.

Not 3.1.4. G grafının λ keyfi bir öz değerleri olmak üzere $|\lambda| \leq \Delta(G)$ eşitsizliği iyi bilinir.

Tanım 3.1.5. G grafı n noktalı bir graf ve A komşuluk matrisi olsun. A nın öz değerleri $\lambda_1 \geq \lambda_2 \dots \geq \lambda_n$ olduğunu kabul edelim. G grafının (normal) enerjisi

$$\mathcal{E}(\mathrm{G}) = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|$$

olarak tanımlanır. Benzer bir tanım $S(\mathrm{G})$ matrisinin öz değerleri $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ olmak üzere Seidel enerji

$$S\mathcal{E}(\mathrm{G}) = \sum_{i=1}^{n} |\theta_i|$$

olarak tanımlanır.

Normal enerji için literatürde yer alan bazı sınırlar aşağıda verilmiştir:

1- m kenarlı bir G grafı için

$$2\sqrt{m} \leq \mathcal{E}(G) \leq 2m \tag{3.1}$$

dir. Soldaki eşitlik için ancak ve ancak G' nin $ab = m$ olacak biçimde bir $K_{a,b}$ keyfi izole noktaları içeren iki parçalı tam graf olmasıdır. Sağdaki eşitlik için ancak ve ancak G nin bazı izole noktalar ile birlikte K_2 tam grafının m adet kopyasıdır [17].

2- $G,$ n noktalı bir graf olsun. Bu durumda

$$\mathcal{E}(G) \leq \frac{n}{2}\left(\sqrt{n}+1\right) \tag{3.2}$$

dir. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul G' nin $\left(n, \frac{n+\sqrt{n}}{2}, \frac{n+2\sqrt{n}}{4}, \frac{n+2\sqrt{n}}{4}\right)$ parametrelere sahip güçlü düzenli bir graf olmasıdır [3].

3- . (Koolen--Moulton) G bir graf olsun. $2m \geq n$ olmak üzere

$$\mathcal{E}(\mathrm{G}) \leq \frac{2m}{n} + \sqrt{(n-1)(2m - \left(\frac{2m}{n}\right)^2)} \tag{3.3}$$

eşitsizliği sağlanır [3].

3.2. Seidel Anahtarlama ve Uygulamaları

Tanım 3.2.1. G grafının nokta kümesine X diyelim ve $Y \subset X$ olsun. Y ye uygun Seidel anahtarlama Y ve $X \setminus Y$ arasında komşu olan ve komşu olmayan noktaları değiştirilerek elde edilen işlemdir ki burada Y ve $X \setminus Y$ içinde komşuluklar değişmeyecektir [5].

Tanım 3.2.2. Simetrik bir A matrisinin satır ve sütunları bir V kümesi ile indekslenmiş olsun. Kabul edelim ki V kümesi $V_1, V_2, \ldots, V_m$ olan m −sınıfa parçalanmış olsun. Bu durumda V nin uygun sıralanması ile her bir $A_{i,i}$ köşegen bloğu simetrik olacak biçimde

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1} & \cdots & A_{m,m} \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

matrisi yazılabilir. (3.4) de ki parçalanma için her bir $A_{i,j}$ bloğu sabit bir satır ve sütun toplamına sahipse parçalanmaya adil (equitable) parçalanış denir. $b_{i,j}$, verilen parçalanmaya göre $A_{i,j}$ blokları için satır toplamlarını göstermek üzere $B = (b_{i,j})$ matrisine bölüm matrisi denir [4].

Tanım 3.2.3. Bir A matrisinin uygun adil parçalanması ile elde edilen bölüm matrisi $B = (b_{i,j})$ olmak üzere B matrisinin spektrumu A nın spektrumu tarafından kapsanır [4].

Not 3.2.4. V, G nin nokta kümesi olsun. V iki U_1 ve U_2 alt kümelerine parçalansın. $\{U_1, U_2\}$' e uygun Seidel anahtarlama V üzerinde U_2' yi sabit bırakan ve U_1 ile üretilen alt graf alınarak uygulanan bir işlemdir. Burada U_1 ve U_2 arasındaki tüm kenarları silinir ve grafta mevcut olmayan tüm kenarlar U_1 ve U_2 arasında eklenir. Böylece

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ {A_2}^T & A_3 \end{bmatrix}$$

matrisi G nin komşuluk matrisi olmak üzere Seidel anahtarlamadan sonra grafın komşuluk matrisi

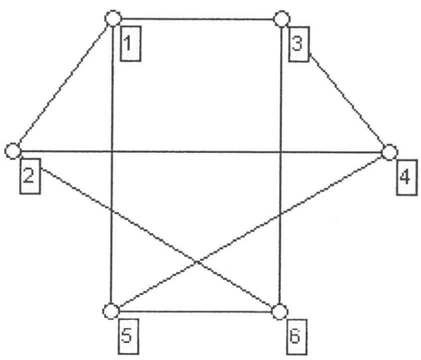
$$A' = \begin{bmatrix} A_1 & J - A_2 \\ J - {A_2}^T & A_3 \end{bmatrix}$$

biçiminde olur [4].

Not 3.2.5. Seidel anahtarlama graflar üzerinde bir denklik bağıntısıdır [4].

Sonuç 3.2.6. $\{U_1, U_2\}$' nin adil parçalama olduğunu varsayalım. Eğer U_1' deki her nokta U_2' deki noktaların tam olarak yarısına komşu ise B ve B' bölüm matrisleri eşittir. Yani A ve A' matrislerinin aynı öz değerlere sahiptir [4].

Örnek 3.2.7.



Şekil 3.2. G grafı ve iki adil parçalanış

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ matirisi G grafının komşuluk matrisidir. Yukarıda verilen G grafının iki adil parçalanışı; $\prod : \{1,3\}, \{2,4\}, \{5,6\}$ ve $\prod' : \{1,2\}, \{3,4,5,6\}$ olur. Bu parçalanışların bölüm matrisleri;

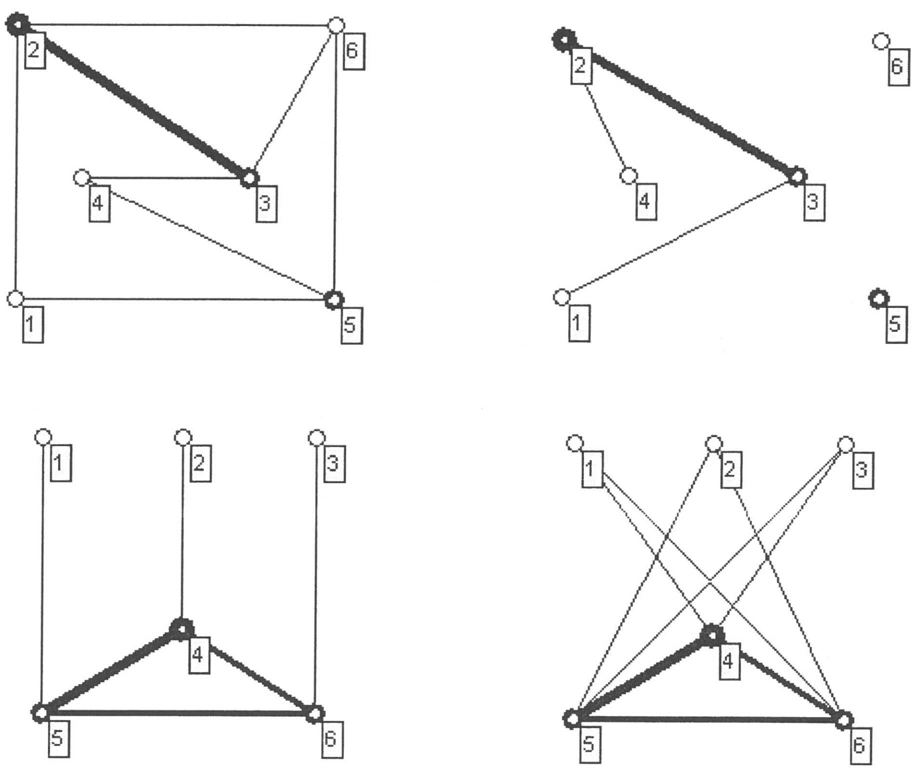
$$B_{\prod} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$ ve $B_{\prod'} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ şeklinde bölüm matrisleri elde edilir.

A matrisinin spektrumları; 0., 0., 0., 0., 3., -3. tür.

$B_{\prod}$ matrisinin spektrumları; 0., 0., 3. tür. $B_{\prod'}$ matrisinin spektrumları; 0., 3. tür.

O halde örnekte de görüldüğü gibi A matrisinin spektrumu $B_{\prod}$ ve $B_{\prod'}$ matrislerinin spektrumunu kapsar.

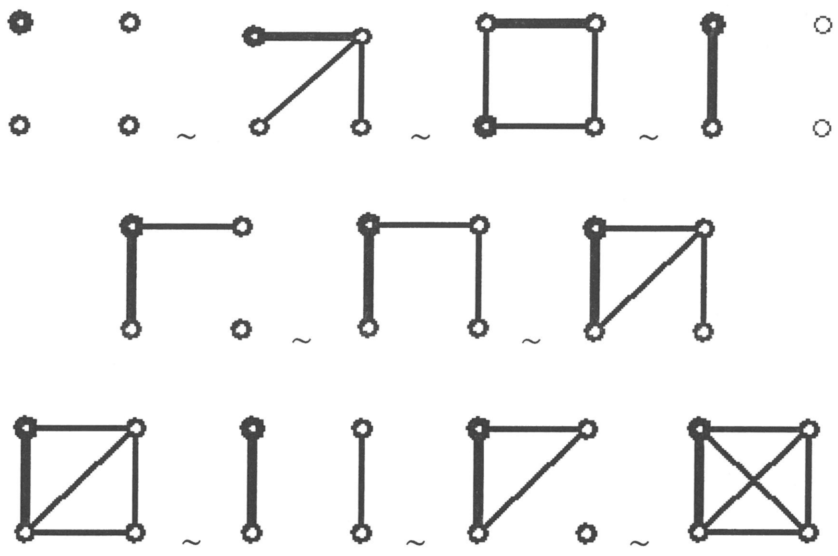
Örnek 3.2.7.



Şekil 3.3. Seidel Anahtarlama Örnekleri

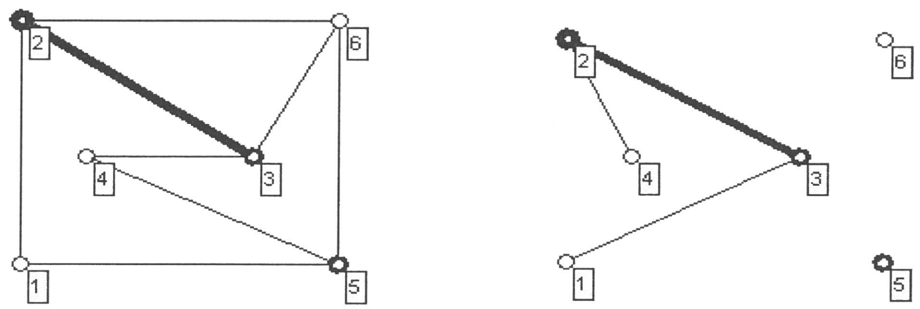
Seidel anahtarlama tarafından ilgili olan bir denklik ilişkisi olduğunu ve denklik sınıflarına anahtarlama sınıfları denir.

4 noktalar üzerinde grafların sınıflarını anahtarlama:



Şekil 3.4. Denklik Sınıflarında Seidel Anahtarlama

Sonuç olarak; anahtarlama altında eş değer graflar aynı Seidel öz değerlere sahiptir [16].



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Şekil 3.5. Seidel Anahtarlama ve Seidel Matrisi

4.BÖLÜM

SEIDEL ENERJİ ÜZERİNE

Teorem 4.1. G bir graf olmak üzere

$$S\mathcal{E}(G) > \sqrt{2n(n-1)} \tag{4.1}$$

dir [4].

Teorem 4.2. G bir graf olmak üzere

$$S\mathcal{E}(G) \leq n\sqrt{n-1} \tag{4.2}$$

dir [4].

Teorem 4.3. G n noktalı m kenarlı bir graf ve $P = |detS(G)|$ olsun. Buradan

$$\sqrt{(n^2-n)+n(n-1)P^{\frac{2}{n}}} \leq S\mathcal{E}(G) \leq \sqrt{n(n^2-n)} \tag{4.3}$$

dır [4].

Varsayım 4.4. Her G grafı için,

$$S\mathcal{E}(G) \geq S\mathcal{E}(K_n) \tag{4.4}$$

dir [4]

Yukarıdaki varsayımı şu şekilde de ifade etmek mümkündür:

K_n tam graf olmak üzere minimum Seidel enerjili graflar tam graflardır. $S(K_n) = I - J$ olup $Spec(S(K_n)) = \{1-n, \underbrace{1,1,\dots,1}_{n-1}\}$ olduğunu görmek kolaydır. O halde (4.4) eşitsizliğini $S\mathcal{E}(G) \geq 2n-2$ biçiminde de gösterebiliriz.

Ghorbani [5], Karush-Kuhn Tucker (KKT) metodunu kullanarak aşağıdaki teoremi ispat etmiştir.

Teorem 4.5. [5] G n noktalı bir graf olsun. $S(G)$ matrisinin öz değerleri $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ dir. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

1- $|detS(G)| \geq n-1$

2- Herhangi $0 < \alpha < 2$ için

$$|\theta_1|^\alpha + \cdots + |\theta_n|^\alpha \geq (n-1)^\alpha + (n-1)$$

3- $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} \left(\frac{|\theta_1|^\alpha + \cdots + |\theta_n|^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = |\theta_1 \ldots \theta_n|^{\frac{1}{n}}$

Bu teorem ile (4.4) deki konjektürün Seidel determinantı n-1 den büyük olması koşulu altında ispat edilmiş olur. Ancak diğer kısım hala açık bir problemdir.

Sonuç 4.6. G bir graf olmak üzere, Teorem 4.5. deki 1. ve 2. durumlarından açıkça görülüyor. $|detS(G)| \geq n-1$ ise

$$S\mathcal{E}(G) \geq 2n-2 \tag{4.5}$$

dir [4].

Dolayısıyla $|detS(G)| < n-1$ için problem açıktır.

Lemma 4.7. n noktalı herhangi bir G grafı için

1- $\theta_1(\mathrm{G})^2 + \cdots + \theta_n(\mathrm{G})^2 = (n-1)^2 + (n-1)$ (4.6)

2- $\theta_1(\mathrm{G})^4 + \cdots + \theta_n(\mathrm{G})^4 \leq \theta_1(\mathrm{K_n})^4 + \cdots + \theta_n(\mathrm{K_n})^4$

$$= (n-1)^4 + (n-1)$$

3- $\max\limits_{1 \leq i \leq n} \theta_i(\mathrm{G})^2 \leq \max\limits_{1 \leq i \leq n} \theta_i(\mathrm{K_n})^2 = (n-1)^2$

sağlanır [5].

Tanım 4.8. Her $C \in M_n(\mathbb{R})$ matrisi için, $\Lambda_\alpha(C)$ ifadesi

$$\Lambda_\alpha(C) = \textstyle\sum_\lambda |\lambda|^\alpha \tag{4.7}$$

olarak tanımlanır [18].

Teorem 4.9. [18] G, n noktalı p-düzenli grafı (-1,0) aralığında hiçbir komşuluk öz değeri bulunmayan bir graf olsun. $p \neq \frac{n-1}{2}$. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

i. Eğer $0 \leq \alpha \leq 2$ ise $\Lambda_\alpha(S(G)) \geq \Lambda_\alpha(S(K_n)) = (n-1)^\alpha + (n-1)$.
ii. Eğer $2 \leq \alpha \leq 4$ ise $\Lambda_\alpha(S(G)) \leq \Lambda_\alpha(S(K_n)) = (n-1)^\alpha + (n-1)$.

Sonuç 4.10. G, n noktalı p-düzenli graf ve $p \neq \frac{n-1}{2}$ olsun. Eğer G grafı (-1,0) aralığında hiçbir komşuluk öz değere sahip değilse (4.1) varsayımı doğrudur [18].

Not 4.11. G, n noktalı bir p-düzenli graf olsun. Varsayalım ki $Spec(G) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ ve $Spec(\bar{G}) = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}$ olsun. Teorem 4.9' dan , $2 \leq i \leq n$ için $\lambda_1 = p$, $\mu_1 = n-p-1$ ve $\mu_i = -1-\lambda_i$ eşitlikleri görülür. $S(G) = A(\bar{G}) - A(G)$ olduğundan $Spec\big(S(G)\big) = \{n-2p-1, -2\lambda_2 - 1, \dots, -2\lambda_n - 1\}$. Üstelik $0 \in Spec(S(G))$ olması için gerek ve yeter koşul $p = \frac{n-1}{2}$ olmasıdır. Böylece $p = \frac{n-1}{2}$, her α için $\Lambda_\alpha(S(G))$ olarak tanımlayabiliriz [18].

Varsayım 4.12. Her G grafı için, $S\mathcal{E}(G) \geq \mathcal{E}(G)$ dir [18].

Teorem 4.13. G, n noktalı bir p-düzenli graf olsun. Eğer $S\mathcal{E}(G) \geq \mathcal{E}(K_n)$ ise $S\mathcal{E}(G) \geq \mathcal{E}(G)$ dir [18].

Sonuç 4.14. G, n noktalı bir p-düzenli graf ve $p \neq \frac{n-1}{2}$ olsun. Eğer G grafı (-1,0) aralığında hiçbir komşuluk öz değere sahip değilse $S\mathcal{E}(G) \geq \mathcal{E}(G)$ dir [18].

Teorem 4.15. G, n noktalı bir p-düzenli graf ve $p \leq \frac{n-2}{4}$ olsun. Eğer G grafı $(-1, -\frac{1}{3})$ aralığında hiçbir komşuluk öz değere sahip değil ve G grafının her öz değeri sıfırdan farklı ise

$$S\mathcal{E}(G) \geq \mathcal{E}(G)$$

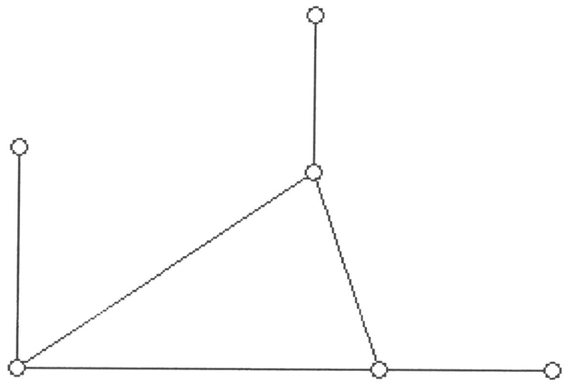
dir [18].

Teorem 4.16. G, n noktalı ve m kenarlı bağlantılı bir graf ise, eşitsizliği

$$S\mathcal{E}(G) \leq \left|n-1-\frac{4m}{n}\right| + \sqrt{(n-1)\left(n^2-n-\left(n-1-\frac{4m}{n}\right)^2\right)} \tag{4.8}$$

alınır [19].

Bu teoremde ifade edilen üst sınırın doğru olmadığı [20] da aşağıdaki belirtildiği gibi gösterilerek düzeltilmiştir. Örneğin,



Şekil 4.1.

Şekildeki grafın Seidel enerjisi $\approx 13{,}416$ iken, (4.8) de verilen üst sınır $\approx 13{,}041$ dir.

Lemma 4.17. G n noktalı m kenarlı bir graf ve özdeğerleri $\theta_1 \geq \theta_2 \geq \cdots \geq \theta_n$ olsun.

$$\theta_n \leq n - 1 - \frac{4m}{n} \leq \theta_1 \tag{4.9}$$

dir [20].

Teorem 4.18. G n noktalı m kenarlı bir graf olsun.

$$S\mathcal{E}(G) \leq (n-1) + \sqrt{n-1}\sqrt{(n-1)^2 + (n-1) - \left(n - 1 - \frac{4m}{n}\right)^2} \tag{4.10}$$

eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul $G \cong K_n$ dir [20].

Teorem 4.19. G n noktalı m kenarlı bir graf olsun.

$$|S\mathcal{E}(G) - \mathcal{E}(G)| \geq \sqrt{n(n-1) + 2m - 2\sqrt{2mn(n-1)}} \tag{4.11}$$

eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul $G \cong K_n$ dir [20].

Lemma 4.20. A keyfi dikdörtgensel bir matris ve singüler değerleri $\sigma_1(A) \geq \cdots \geq \sigma_n(A)$ sıralanmış olsun. Bu durumda

$$\sigma_1(A) \geq \left(\frac{1}{n} tr(A^T A)\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.12}$$

eşitsizliği sağlanır [9].

Lemma 4.21. S Seidel matrisi ve öz değerleri $\theta_1, \dots, \theta_n$ olmak üzere $\theta = \max_i\{|\theta_i|\}$ alalım. Bu durumda

$$\sqrt{n-1} \leq \theta \leq n-1 \tag{4.13}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: (4.12) eşitsizliğinden ve Seidel matrisin tanımından alt sınır kolayca elde edilir. Diğer taraftan keyfi bir A matrisinin spektral yarıçapı ρ olmak üzere $\rho \leq \|A\|$ eşitsizliği iyi bilinir. S için maksimum satır normu alınırsa bu eşitsizlik kullanılarak üst sınırda kolaylıkla elde edilir.

Bu kısımdan sonra her ne kadar literatürdeki alt veya üst sınırlardan çok daha iyi olmamasına karşılık temel eşitsizlikler kullanılarak aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Teorem 4.22. S, bir G bir grafının Seidel matrisi ve $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ öz değerleri verilsin. $\theta = \max_i|\theta_i|$ alalım. Bu durumda

$$S\mathcal{E}(G) \leq n-1+\sqrt{n(n-1)-n-1}\sqrt{n-1} \tag{4.14}$$

dir.

İspat: Seidel enerji tanımından

$$S\mathcal{E}(G) = \sum_{i=1}^{n}|\theta_i|$$

$$= \theta + \sum_{i=2}^{n}|\theta_i|$$

Cauchy Schwarz eşitsizliğinden

$$S\mathcal{E}(G) \leq \theta + \sqrt{n-1}\sqrt{\textstyle\sum_{i=2}^{n}|\theta_i|^2} \tag{4.15}$$

eşitsizliği elde edilir. (4.6) da ki eşitsizlikten,

$$S\mathcal{E}(G) \leq \theta + (n(n-1) - \theta^2)\sqrt{n-1}$$

elde edilir. Böylece (4.13) eşitsizliklerinden

$$S\mathcal{E}(G) \leq n - 1 + \sqrt{n(n-1) - n - 1}\sqrt{n-1}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.23. G n noktalı m kenarlı bir graf olmak üzere

$$S\mathcal{E}(G) \leq n - 1 + \frac{(n-1)}{n}\sqrt{\frac{n^2(n-1)+8mn(n-1)-16m^2}{(n-1)}} \tag{4.16}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: (4.15) eşitsizliğini düşünerek Lemma 4.17 ve Lemma 4.21 deki eşitsizlikleri kullanarak,

$$S\mathcal{E}(G) \leq n - 1 + \sqrt{n(n-1) - \left(n - 1 - \frac{4m}{n}\right)^2}\sqrt{n-1}$$

$$= n - 1 + \sqrt{n(n-1) - \left[(n-1)^2 - \frac{8m(n-1)}{n} + \frac{16m^2}{n^2}\right]}\sqrt{n-1}$$

$$= n - 1 + (n-1)\sqrt{\frac{n}{n-1} - 1 + \frac{8m}{n(n-1)} + \frac{16m^2}{n^2(n-1)^2}}\sqrt{n-1}$$

$$= n - 1 + (n-1)\sqrt{n - (n-1) + \frac{8m}{n} + \frac{16m^2}{n^2(n-1)}}$$

$$= n - 1 + \frac{(n-1)}{n}\sqrt{\frac{n^2(n-1)+8mn(n-1)-16m^2}{(n-1)}}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.24. G n noktalı bir graf ve spektral yarıçapı θ olmak üzere

$$S\mathcal{E}(G) \geq \sqrt{n-1} + \sqrt{\frac{detS}{\theta_1}} \tag{4.17}$$

dir.

İspat: Enerji tanımından

$$S\mathcal{E}(G) = \sum_{i=1}^{n} |\theta_i|$$

$$= \theta_1 + \sum_{i=2}^{n} |\theta_i|$$

olarak yazılabilir. Geometrik-Aritmetik Ortalama (GM- AM) eşitsizliğinden ve Lemma 4.21 den yararlanılarak

$$S\mathcal{E}(G) \geq \sqrt{n-1} + \sqrt[n-1]{\prod_{i=2}^{n} \theta_i}$$

$$\geq \sqrt{n-1} + \sqrt{\frac{detS}{\theta_1}}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.25. G bir graf olmak üzere $|detS(G)| \geq n-1$ olsun. Bu durumda

$$\frac{(\sqrt{n-1}+\mathrm{n}-1)^2}{\mathrm{n}} \leq S\mathcal{E}(\mathrm{G}) \tag{4.18}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat:

Kuvvet Ortalama eşitsizliğinden

$$\left(\frac{|\theta_1|^{\frac{1}{2}}+|\theta_2|^{\frac{1}{2}}+\cdots+|\theta_n|^{\frac{1}{2}}}{n}\right)^2 \leq \frac{|\theta_1|+|\theta_2|+\cdots+|\theta_n|}{n}$$

yazabiliriz. Böylece grafın Seidel enerji tanımından ve Teorem 4.5 den

$$\frac{(\sqrt{n-1}+\mathrm{n}-1)^2}{\mathrm{n}} \leq S\mathcal{E}(\mathrm{G})$$

eşitsizliği kolaylıkla elde edilir.

Bir G grafı için normal enerji ve Seidel enerji aralarındaki ilişkiler aşağıdadır:

Teorem 4.26. A, bir G grafının n noktalı m kenarlı bir komşuluk matrisi ve $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ öz değerleri olsun ve S, bir G grafının n kenarlı bir Seidel matrisi ve $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ öz değerleri verilsin. Buradan $S\mathcal{E}(G)$ ve $\mathcal{E}(G)$ toplamının üst sınırı için

$$S\mathcal{E}(G) + \mathcal{E}(G) \leq \sqrt{\mathrm{n}^2(n-1)} + \sqrt{2mn} \tag{4.19}$$

eşitsizlik elde edilir.

İspat: Kuadratik-Aritmetik Ortalama (QM-AM) eşitsizliklerini taraf tarafa toplayarak

$$\sqrt{\frac{{\theta_1}^2 + {\theta_2}^2 + \cdots + {\theta_n}^2}{n}} + \sqrt{\frac{{\lambda_1}^2 + {\lambda_2}^2 + \cdots + {\lambda_n}^2}{n}} \geq \frac{|\theta_1| + |\theta_2| + \cdots + |\theta_n| + |\lambda_1| + |\lambda_2| + \cdots + |\lambda_n|}{n}$$

eşitsizliği elde edilir ve Teorem 4.5 deki ve (3.1) deki eşitsizliklerden yararlanılarak aşağıdaki eşitsizliğe geçiş yapılır.

$$\frac{S\mathcal{E}(G)+\mathcal{E}(G)}{n} \leq \sqrt{n-1} + \sqrt{\frac{2m}{n}}$$

ve

$$S\mathcal{E}(G) + \mathcal{E}(G) \leq \mathrm{n}\left(\frac{\sqrt{\mathrm{n}(n-1)}+\sqrt{2m}}{\sqrt{\mathrm{n}}}\right) = \sqrt{\mathrm{n}^2(n-1)} + \sqrt{2mn}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.27. $S\mathcal{E}(G)$ ve $\mathcal{E}(G)$ sırasıyla n noktalı m kenarlı bir G grafının Seidel enerjisi ve normal enerjisi olsun. Bu durumda

$$S\mathcal{E}(G) + \mathcal{E}(G) \leq \frac{n}{2}\left[\sqrt{2m}\sqrt{n-1} + \mathrm{n}(\mathrm{n}-1)\right] \tag{4.20}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Cauchy eşitsizliğinden,

$$|\lambda_1\theta_1| \leq \frac{{\lambda_1}^2}{2} + \frac{{\theta_1}^2}{2}$$

$$|\lambda_2\theta_2| \leq \frac{\lambda_2{}^2}{2} + \frac{\theta_2{}^2}{2}$$

$$\vdots$$

$$|\lambda_n\theta_n| \leq \frac{\lambda_n{}^2}{2} + \frac{\theta_n{}^2}{2}$$

eşitsizlikleri taraf tarafa toplandığında,

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i\theta_i| \leq \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 + \sum_{i=1}^{n} |\theta_i|^2\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i\theta_i| \leq \frac{1}{2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2} \sqrt{n-1} + \frac{\mathrm{n(n-1)}}{2}$$

eşitsizliğinde Chebysev's eşitsizliğinden, (3.1) deki ve Lemma 4.21 deki eşitsizliklerden yararlanılarak

$$\frac{S\mathcal{E}(G) + \mathcal{E}(G)}{n} \leq \frac{1}{2}\sqrt{2m}\sqrt{n-1} + \frac{\mathrm{n(n-1)}}{2}$$

ve böylece

$$S\mathcal{E}(G) + \mathcal{E}(G) \leq \frac{n}{2}\left[\sqrt{2m}\sqrt{n-1} + \mathrm{n(n-1)}\right]$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.28. $S\mathcal{E}(G)$ ve $\mathcal{E}(G)$ sırasıyla n $n$oktalı m kenarlı bir G grafının Seidel enerjisi ve normal enerjisi olsun. Bu durumda

$$S\mathcal{E}(G)\mathcal{E}(G) \leq n\sqrt{2mn(n-1)} \qquad (4.21)$$

ifade edilir.

İspat: Discrete Hölder eşitsizliğinden;

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i\theta_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\theta_i|^2}$$

ve Chebysev's eştsizliğinden;

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}|\theta_i|\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|}{n} \leq \sum_{i=1}^{n}|\lambda_i\theta_i|$$

elde edilir. Buradan da

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}|\theta_i|\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|}{n} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|\theta_i|^2}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikler düzenlenerek

$$\frac{|\theta_1|+|\theta_2|+\cdots+|\theta_n|+|\lambda_1|+|\lambda_2|+\cdots+|\lambda_n|}{n} \leq \sqrt{2mn(n-1)}$$

ve böylece

$$S\mathcal{E}(G)\mathcal{E}(G) \leq n\sqrt{2mn(n-1)}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.29. $S\mathcal{E}(G)$, n noktalı m kenarlı bir G grafının Seidel enerjisi olmak üzere;

$$\ln(|detS|) + n \leq S\mathcal{E}(G) \tag{4.22}$$

dir.

İspat: Logaritma eşitsizliğinden;

$$\ln(|\theta_1|) \leq |\theta_1| - 1$$

$$\ln(|\theta_2|) \leq |\theta_2| - 1$$

$$\vdots$$

$$\ln(|\theta_n|) \leq |\theta_n| - 1$$

eşitsizlikleri taraf tarafa toplanırsa;

$$\ln(|\theta_1|) + \ln(|\theta_2|) + \cdots + \ln(|\theta_n|) \leq |\theta_1| + |\theta_2| + \cdots + |\theta_n| - n$$

ve logaritma kuralından

$$\ln(|\theta_1||\theta_2|\dots|\theta_n|) \leq \sum_{i=1}^{n}|\theta_i| - n$$

dir. Böylece

$$\ln(\prod_{i=1}^{n}\theta_i) \leq S\mathcal{E}(G) - n \text{ ise } \ln(|detS|) + n \leq S\mathcal{E}(G)$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.30. *G n n*oktalı *m* kenarlı bir graf olmak üzere;

$$\sqrt{n-1}\left[1 + \frac{1}{n}\ln\Delta - \ln(n-1)\right] \leq S\mathcal{E}(G) \tag{4.23}$$

dir.

İspat: Teorem 2.3.5 den $i = 1,2,\dots,n$ $x_i \geq 0$, $\alpha_i > 0$ ve $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 1$ için

$$exp\left[2\left(1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i^{\frac{1}{2}}}{(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i)^{\frac{1}{2}}}\right)\right]\prod_{i=1}^{n}\alpha_i x_i \leq \sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i$$

eşitsizliği sağlanıyordu. Burada $\alpha_i = \frac{1}{n}$ ve $x_i = |\theta_i|$ alınırsa,

$$exp\left[2 - \frac{\frac{2}{n}S\mathcal{E}(G)}{\sqrt{n-1}}\right]\Delta^{\frac{2}{n}} \leq \frac{1}{n}n(n-1)$$

$$\Rightarrow \ln e^{2-\frac{\frac{2}{n}S\mathcal{E}(G)}{\sqrt{n-1}}} + \frac{2}{n}\ln\Delta \leq \ln(n-1)$$

$$\Rightarrow 2 - \frac{\frac{2}{n}S\mathcal{E}(G)}{\sqrt{n-1}} + \frac{2}{n}\ln\Delta \leq \ln(n-1)$$

$$\Rightarrow 2 + \frac{2}{n}\ln\Delta - \ln(n-1) \leq \frac{\frac{2}{n}S\mathcal{E}(G)}{\sqrt{n-1}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{n-1}\left[1 + \frac{1}{n}\ln\Delta - \ln(n-1)\right] \leq S\mathcal{E}(G)$$

eşitsizliği elde edilir.

5. BÖLÜM

TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde giriş ve özette de belirtildiği gibi literatürde pek az çalışmaları bulunan Seidel enerji ile ilgili incelemeler yapılmıştır. Bu çalışmalardan en önemli olanı W.H. Haemers' in 2012 yılında yayınlanan "Seidel switching and graph energy" isimli makalesidir [4]. Haemers tarafından ortaya atılan bir varsayım bazı özel koşullar altında olumlu cevaba sahip olsa da varsayım hala açık bir problemdir. Bu tez çalışmasında asıl amaç şimdiye kadar yapılan çalışmaların derlenmesidir. Ayrıca E. Ghorbani' nin [5] "On eigenvalues of Seidel matrices and Haemers' conjecture" ve M.R. Oboudi' nin [18] " Energy and Seidel energy of graphs" isimli makalelerinden de ilginç sonuçlar derlenmiştir.

İlk olarak W.H. Haemers'in [4] makalesinde Seidel anahtarlama, G grafının kenar kümesinde yapılan bir işlemdir. Bazı özel durumlarda Seidel anahtarlama spektrumları farklı da olsa enerjiyi değiştirmez. Yani, bir G grafının Seidel enerjisi yani $SE(\mathrm{G})$, Seidel anahtarlama ve tamamlayıcısı (complement) altında değişmezdir. Ayrıca bu çalışmada minimum Seidel enerjili grafların tam graflar olduğu varsayımında bulunulmuştur.

İkinci olarak E. Ghorbani'nin [5] makalesinde bir G grafı için S(G), G grafının Seidel matrisi ve S(G) grafının öz değerleri $\theta_1(G), \ldots, \theta_n(G)$ olsun. G grafının Seidel enerjisi $|\theta_1(G)| + \cdots + |\theta_n(G)|$ olarak tanımlanır. Ghorbani, "herhangi bir α ile $0 \leq \alpha \leq 2$, $|\theta_1|^\alpha + |\theta_2|^\alpha + \cdots + |\theta_n|^\alpha \geq (n-1)^\alpha + (n-1)$ olması için gerek ve yeter şart $|detS(G)| \geq n-1$" önermesini ispat ederek Haemers'ın varsayımının, yani tüm G graflar için $|detS(G)| \geq n-1$ olması durumunda doğru olduğunu göstermiştir. Ancak $|detS(G)| < n-1$ için hala açık bir problemdir.

Üçüncü olarak M.R. Oboudi' nin [18] makalesinde G grafı n noktalı basit bir graf, G nin komşuluk matrisi ve Seidel matrisi sırasıyla $A(G)$ ve S(G) olmak üzere $\mathcal{E}(S(G)) \geq \mathcal{E}(G)$ olduğunda Haemers varsayımının doğru olduğunu göstermiştir. Ayrıca p-düzenli graflar için bazı kısıtlar altında varsayımın doğru olduğunu da iddia etmiştir.

Bu üç makale ayrı ayrı incelendikten sonra E. Ghorbani ve M.R. Oboudi makalelerinin Haemers varsayımının doğru olduğunu kanıtlar niteliktedir. Bu tezde konu ile ilgili dikkate değer birçok açık problemlere de değinilmektedir. Ayrıca Seidel enerji için yakın alt veya üst sınırlar bulunması (ki şimdiye kadar bulunan en yakın alt ve üst sınır Haemers [4] sınırlarıdır.) literatüre kazandırılması açısından özgün bir değer olacaktır.

KAYNAKLAR

1. Gutman, I., “The energy of a graph”, *Berichte der Mathematisch–Statistischen Sektion im Forschungszentrum Graz* 103, 1–22, 1978.
2. I. Gutman, “The energy of a graph: Old and new results, in: A. Betten, A. Kohner, R. Laue, A. Wassermann (Eds.)”, *Algebraic Combinatorics and Applications*, *Springer*, Berlin, pp. 196–211, 2001.
3. Koolen, J. H., Moulton, V., “Maximal energy graphs”, *Adv. Appl. Math.*, 26, 47-52, 2001.
4. Haemers, W. H., “Seidel switching and graph energy”, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 68, 653-659, 2012.
5. Ghorbani, E., “On eigenvalues of Seidel matrices and Haemers’ conjecture”, Tehran, İran, 2013.
6. Pena, I, Rada, J., “Energy of digraphs”, *Linear and Multilinear Algebra*, 56(5), 565–579, 2008.
7. Koç, C., “Topics in linear algebra”, *Doğuş university*, Ankara, s. 34-35, 50, 54, 57, 2012.
8. Taşçı, D., “Lineer Cebir, 4.baskı”, *Ofset Hazırlık & Baskı Öziş*, Ankara, 2011.
9. Horn, R., Johnson, C., “Matrix Analysis”, *Cambridge University Press*, London, 1989.
10. Barrett, W., “Handbook of linear algebra”, *chapter 8. Chapman and Hall/CRC*, 2007.
11. Cvetkovi’c, D., Doob, M., Sachs, H., “Spectra of graphs”, *Theory and Application Academic*, New York, 1980.
12. So, W., Robbiano, M., Abreu, N. M. M., Gutman, I., “Applications of a theorem by Ky Fan in the theory of graph energy”, *Lin. Algebra Appl.*, 432, 2163-2169, 2010.
13. Cvetkovic D., Rowlinson P., Simic S., “An Introduction to the Theory of Graph Spectra”, *Cambridge University Press*, 2010.
14. Aldaz, J. M., “A refınement of the ınequalıty between arıthmetıc and geometrıc means”, *Journal of Mathematical Inequalities*, Vol. 2, s. 4, 473-477, 2008.
15. Steele, J. M., “The Cauchy Schwartz master class”, *Cambridge University Press*, London, 2004.

16. Brouwer, A.E., Haemers, W.H., “Spectra of graphs”, *Sprinter*, New York, etc., ISBN 978-1-4614-1938-9, 2012.
17. Gutman, I., “The energy of a graph: old and new results”, *Algebraic Combinatorics and Applications*, 196-211, 2001.
18. Oboudi, M. R., “Energy and Seidel Energy of Graphs”, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* 75, 291-303, 2016.
19. Nageswari, P., Sarasija, P. B., “Seidel Energy and its Bounds”, *International Journal of Mathematical Analysis Vol. 8*, no. 58, 2869-2871, 2014.
20. Sorgun, S., “On some bounds for Seidel energy of a graph”, *TWMS J. Pure Apple. Math.*, V.XX, N.XX, 20XX, pp.XX-XX, 2017.

ÖZGEÇMİŞ

Duygu SAZAK 1992 yılında İstanbul'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Alanya'da tamamladı. 2010'da kazandığı Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2014 yılında mezun oldu. 2015' de Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalında Yüksek Lisansa başladı. 2015 den beri halen özel okulda Matematik öğretmenliği yapmaktadır.

e-posta : duygu_sazak@outlook.com