

**T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**TAM SAYILAR HALKASINDA NİLPOTENT GRAFLARIN
LAPLASYAN SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ**

**Tezi Hazırlayan
Hatice Pınar CANTEKİN**

**Tez Danışmanı
Doç. Dr. Sezer SORGUN**

**Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi**

**Haziran 2017
NEVŞEHİR**

**T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**TAM SAYILAR HALKASINDA NİLPOTENT GRAFLARIN
LAPLASYAN SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ**

**Tezi Hazırlayan
Hatice Pınar CANTEKİN**

**Tez Danışmanı
Doç. Dr. Sezer SORGUN**

**Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi**

**Haziran 2017
NEVŞEHİR**

KABUL VE ONAY

Doç. Dr. Sezer SORGUN danışmanlığında **Hatice Pınar CANTEKİN** tarafından hazırlanan "**Tam Sayılar Halkasında Nilpotent Grafların Laplasyan Spektral Özellikleri**" başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

20/06/2017

JÜRİ

Başkan : (Doç. Dr. Halis BİLGİL)



Üye : (Doç. Dr. Sezer SORGUN)



Üye : (Yrd. Doç. Dr. Hatice TOPCU)



ONAY:

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun 22/06/2017 tarih ve 28-201 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Şahlan ÖZTÜRK
Enstitü Müdürü



TEZ BİLDİRİM

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada yer alan bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu ve bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Hatice Pınar CANTEKİN



TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimin ve tez çalışmam süresince karşılaştığım tüm zorluklarda yanımda olan, tüm bilgilerini benimle paylaşmaktan kaçınmayan, her türlü konuda desteğini benden esirgemeyen, tezimde büyük emeği olan, düşünce gücüme yenilik getiren ve aynı zamanda kişilik olarak da bana çok şey katan, bir teşekkürden çok fazlasını hak eden Sayın Hocam Doç. Dr. Sezer Sorgun'a,

Desteklerinden dolayı Yrd. Doç. Dr. Hatice Topcu' ya,

Bu süreçte maddi ve manevi olarak her zaman destek ve yardımlarını esirgemeyen annem ve babam, Hatice Cantekin ve Mehmet Cantekin' e tüm kalbimle teşekkür ederim.

TAM SAYILAR HALKASINDA NİLPOTENT GRAFLARIN LAPLASYAN SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Hatice Pınar CANTEKİN

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Haziran 2017

ÖZET

Spektral graf teori, graflara ilişkin matrislerin spektral özellikleri ile graf yapısı arasındaki ilişkileri inceleyen ve anlamlandıran bir disiplindir. İlk kez Chen 2003 de R bir halka ve $N(R)$ kümesi halkanın bütün nilpotent elemanların kümesi olmak üzere, R halkası üzerinde R' nin bütün elemanlarını noktalar kabul eden ve " x ve y noktalarının komşu olması için gerek ve yeter koşul $xy \in N(R)$ " önermesini sağlayacak şekilde yeni bir graf yapısı tanımlamıştır. Son yıllarda bu yapıya benzer graflar inşa edilerek kapsamlı çalışmalar yapılmıştır. Fakat bu graf yapılarının spektralleri üzerine hemen hemen hiç çalışma bulunmamaktadır.

Bu tez çalışmasında tam sayılar halkasında nilpotent grafların Laplasyan spektral incelemesi yapılmıştır. 2. bölümde graf parametreleri ve halka parametreleri ile ilgili temel tanım ve kavramlar derlenmiştir. 3. bölümde nilpotent graf yapısı ve nilpotent grafların bazı sınıflandırmalarına dair literatürde yer alan bilgiler verilmiştir. 4. bölümde ise tam sayılar halkası üzerinde inşa edilen nilpotent grafların Laplasyan spektral özellikleri ile ilgili bazı sonuçlar elde edilmiştir.

Anahtar kelimeler: *Graf, Nilpotent Graf, Laplasyan Matris, Spektrum*

Tez Danışman: Doç. Dr. Sezer SORGUN

Sayfa Adeti: 60

LAPLACIAN SPECTRAL PROPERTIES OF NILPOTENT GRAPHS ON INTEGER RINGS

(M. Sc. Thesis)

Hatice Pınar CANTEKİN

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

JUNE 2017

ABSTRACT

Spectral graph theory is a discipline that explores and makes sense of the relationship between the spectral properties of graph matrices and graph structures. Firstly in 2003, Chen has defined a new graph which all the elements of R are considered to be vertices on the ring and satisfied the proposition " $xy \in N(R)$ iff x and y are adjacent" such that R is a ring and $N(R)$ is a set of all nilpotent elements of the rings. In recent years, extensive studies have been done by constructed similar definitions. However, there is almost no study on the spectra of these graphs.

In this thesis, Laplacian spectral studies of the nilpotent graphs on the integer rings have been examined. In the second section, basic definitions and concepts related to graph parameters and ring parameters are compiled. In the third section, some informations on the nilpotent graph structure and some classifications of nilpotent graphs are given in the literature. In the last section, some results have been obtained about the Laplacian spectral properties of the nilpotent graphs built on the rings of integers.

Keywords: *Graph, Nilpotent Graphs, Laplacian Matrix, Spectrum*

Thesis Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Sezer SORGUN

Page Number: 60

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY SAYFASI.....	i
TEZ BİLDİRİM SAYFASI.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	v
İÇİNDEKİLER.....	vi
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	viii
TABLolar LİSTESİ.....	x
SİMGE VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	xi
1. BÖLÜM	
GİRİŞ.....	1
2. BÖLÜM	
TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR.....	3
2.1. <i>Halka Teorisi</i>	3
2.2. <i>Matris Teorisi</i>	9
2.3. <i>Graf Teorisi</i>	13
3. BÖLÜM	
NİLPOTENT GRAFLAR VE BAZI SINIFLANDIRMALARI.....	28
3.1. Γ_N' nin Temel Özellikleri.....	28
3.2. Γ_N' nin Çapı ve Çevresi.....	34
3.3. Γ_N' nin İzomorfizmaları.....	38
4. BÖLÜM	

\mathbb{Z} HALKASI ÜZERİNDE NİLPOTENT GRAFLARIN SPEKTRAL KARAKTERİZASYONU.....	42
4.1. \mathbb{Z}_n Halkası Üzerine Nilpotent Grafların Laplasyan Spektral Özellikleri....	42
5. BÖLÜM	
SONUÇ VE ÖNERİLER.....	57
KAYNAKLAR.....	58
ÖZGEÇMİŞ.....	60



ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.1.	Ayrık nokta ve sarkıt nokta örneği.....	13
Şekil 2.2.	İlmek ve katlı kenar örneği.....	14
Şekil 2.3.	Null graf örneği.....	15
Şekil 2.4.	Path graf örneği.....	15
Şekil 2.5.	Bağlantılı ve bağlantısız graf örneği.....	15
Şekil 2.6.	Etiketlenmiş ve etiketlenmemiş graf örneği.....	16
Şekil 2.7.	İki parçalı tam graf örneği.....	16
Şekil 2.8.	Yıldız, çift yıldız ve kuyruklu yıldız örneği.....	17
Şekil 2.9.	Basit ve karışık graf örneği.....	17
Şekil 2.10.	Regüler graf örneği.....	18
Şekil 2.11.	Tam graf örneği.....	18
Şekil 2.12.	Yürüyüş, yol, devir ve döngü örneği.....	19
Şekil 2.13.	Ağaç ve orman örneği.....	20
Şekil 2.14.	Sıfır bölen graf örneği.....	20
Şekil 2.15.	İzomorf graflar örneği.....	21
Şekil 2.16.	Hamilton graf örneği.....	22
Şekil 2.17.	Split graf örneği.....	22
Şekil 2.18.	Planar graf örneği.....	23
Şekil 2.19.	Eulerian graf örneği.....	23
Şekil 2.20.	Grafın derece matrisi örneği.....	24
Şekil 2.21.	Grafın komşuluk matrisi örneği.....	24
Şekil 2.22.	Graf parçalanışı örneği.....	26
Şekil 2.23.	Grafın Laplasyan matrisi örneği.....	27
Şekil 3.1.	Nilpotent graf örneği.....	28
Şekil 3.2.	Boş nilpotent graf örneği.....	29

Şekil 3.3.	Çap ve çevre örneği.....	30
Şekil 3.4.	$\Gamma_N(\mathbb{Z}_{35})$ iki parçalı tam graf örneği.....	32
Şekil 3.5.	$\Gamma_N(\mathbb{Z}_{10})$ star graf örneği.....	32
Şekil 3.6.	$\Gamma_N(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4)$ grafın çap ve çevre örneği.....	36
Şekil 3.7.	$\Gamma_N(\mathbb{Z}_{15})$ Eulerian graf örneği.....	37
Şekil 3.8.	$\Gamma_N(R) \cong \Gamma_N(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ graf örneği.....	38
Şekil 3.9.	$\Gamma_N(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2) \cong \Gamma_N(\mathbb{Z}_2[x]/[x^2] \times \mathbb{Z}_2)$ graf örneği.....	38
Şekil 3.10.	$\Gamma_N(\mathbb{Z}_4) \cong \Gamma_N(\mathbb{Z}_2[x]/[x^2])$ graf örneği.....	39
Şekil 3.11.	$\Gamma_N(\mathbb{Z}_9) \cong \Gamma_N(\mathbb{Z}_3[x]/[x^2])$ graf örneği.....	39
Şekil 3.12.	$\Gamma_N(\mathbb{Z}_8) \cong \Gamma_N(\mathbb{Z}_2[x]/[x^3]) \cong \Gamma_N(\mathbb{Z}_4[x]/[2x, x^2 - 2])$ graf örneği.....	40
Şekil 4.1.	Nilpotent grafın derece örneği.....	44
Şekil 4.2.	$\Gamma_N(\mathbb{Z}_{2^4})$ grafının özdeğeri örneği.....	46
Şekil 4.3.	$\Gamma_N(\mathbb{Z}_{3^3})$ grafının özdeğeri örneği.....	47
Şekil 4.4.	$\Gamma_N(\mathbb{Z}_{5^2})$ grafının özdeğeri örneği.....	47
Şekil 4.5.	$\Gamma_N(\mathbb{Z}_{7^2})$ grafının özdeğeri örneği.....	47
Şekil 4.6.	$\Gamma_N(\mathbb{Z}_{10})$ grafının izomorf graf örneği.....	48
Şekil 4.7.	$\Gamma_N(\mathbb{Z}_{15})$ grafının izomorf graf örneği.....	49
Şekil 4.8.	$\Gamma_N(\mathbb{Z}_{35})$ grafının izomorf graf örneği.....	49
Şekil 4.9.	$\Gamma_N(\mathbb{Z}_{42})$ grafının nokta sayısı örneği.....	50
Şekil 4.10.	$\Gamma_N(\mathbb{Z}_{63})$ grafının nokta sayısı örneği.....	51
Şekil 4.11.	$\Gamma_N(\mathbb{Z}_{60})$ grafının nokta sayısı örneği.....	51
Şekil 4.12.	$\Gamma_N(\mathbb{Z}_{20})$ grafının spektral inceleme örneği.....	54
Şekil 4.13.	$\Gamma_N(\mathbb{Z}_{20})$ grafının Laplasyan matris örneği.....	54

TABLULAR LİSTESİ

Tablo 4.1.	\mathbb{Z}_n halkası üzerindeki nilpotent grafların Laplasyan spektrumları.....	55
------------	---	----



SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$(R, +, \cdot)$	Halka
$\mathbf{1}_R$	Birim eleman
$A(R)$	Aritmetik birim kümesi
$\mathit{char}(R)$	Halka karakteristiği
I	İdeal
$\langle a \rangle$	Esas ideal
M	Maksimal ideal
(R, \mathfrak{m})	Lokal halka
φ	Homomorfizm
$R \cong S$	İzomorfizm
\mathbb{F}	Cisim
I	Birim matris
$K_A(\lambda)$	Karakteristik polinom
λ_i	Özdeğer
$G = (V, E)$	Graf
$\Delta(G)$	Maksimum derece
$\delta(G)$	Minimum derece
d_i	Grafın nokta derecesi

e	Grafın kenar sayısı
$diam(G)$	Grafın çapı
$gr(G)$	Grafın çevresi
N_n	Null graf
P_n	Path (yol) graf
$K_{n,m}$	İki parçalı tam graf
S_n	Yıldız graf
$P_{n,k}$	Kuyruklu yıldız graf
K_n	Tam graf
$N_G(v)$	Komşuluk kümesi
$Z(R)$	Sıfır bölen kümesi
CS	Tam bölünmüş graf
$D(G)$	Köşegen matrisi
$A(G)$	Komşuluk matrisi
$L(G)$	Laplasyan matrisi
$N(R)$	Nilpotent eleman kümesi
$\Gamma_N(R)$	Nilpotent graf
$\Gamma(R)$	Sıfır bölen graf
$\Gamma(R)^c$	Sıfır bölen grafın tümleyeni

$\mathbf{V}_N(\mathbf{R})^*$	Nilpotent grafin nokta kümesi
$\mathbf{S}(\Gamma_N(\mathbf{R}))$	Nilpotent grafin Laplasyan spektrumu
χ'	Grafin kromatik (renklendirilmiş) kenar sayısı
$\mathbf{J}(\mathbf{R})$	Halkanın jacobson radikali



1. BÖLÜM

GİRİŞ

1736' da İsviçreli matematikçi Leonhard Euler 'in " Yedi Köprü" problemi üzerine yayımladığı makalesiyle ortaya çıkan graf teori günümüzde önemli bir yere sahiptir. Günlük hayatta karşılaştığımız birçok durum graflarla ifade edilebilir. Bununla birlikte birçok problem için de graf teori çözüm üretmektedir. Örneğin "Antalya'dan Ankara'ya kaç farklı karayolu ile gidilebilir?" , "en kısa yol hangisidir?" gibi en basit problemler graf teori ile çözümlenmektedir. Türkiye üzerindeki karayolları, demir yolları ve iletişim ağları, bir arının on nesil önce kaç farklı arıdan gen aldığı, kimyasal molekül bağları, elektrik devreleri, DNA modellemeleri ya da bir şirketin içindeki kurumların birbiriyle olan ekonomik iletişimleri, transferleri v.b. birçok farklı konu graf teori ile ifade edilmektedir. Graf teori matematiğin ana bilim dalı olmasının yanı sıra bilgisayar, kimya, istatistik v.b. birçok alanda anahtar rol oynadığı kadar cebir alanında da pek çok yansımaları olması yönünden dikkat çekicidir. Özellikle son yıllarda spektral graf teorisi ve daha da geniş bir biçimi cebirsel graf teorisi olmak üzere iki önemli branş üzerine çalışmalar sıklıkla yapılmaktadır.

Spektral graf teori, graflara ilişkin matrislerin spektral özellikleri ile graf yapısı arasındaki ilişkileri incelemeye ve anlamlandırmaya çalışmaktadır. Günümüzde bilim ve teknoloji dünyası için hatırı sayılır öneme sahip bir branştır. Spektral graf teorisi özellikle lineer cebir konuları ile ilgilenir. Graf teorideki problemleri çözmek için lineer cebir metotlarını kullanan önemli bir multidisipliner bilimdir. Diğer taraftan spektral graf teorisi, kimya, bilgisayar bilimleri, fizik, operasyonel araştırma, kombinatoryal optimizasyon, biyoloji, biyoinformatik, coğrafya, ekonomik ve sosyal bilimler gibi alanlarda modelleme yapmak ve problemler sunmak için de kullanılır. Teorinin kimyaya klasik ve iyi belgelenmiş uygulamalarının dışında çeşitli incelemelerde bilgisayar biliminde graf öz değerleri ve öz vektörleri görülmektedir. Kimyada graf spektrasının temel uygulamalarından biri, Hückel moleküler yörünge teorisi olarak da bilinen doymamış konjuge edilmiş hidrokarbonların bir teorisi içindeki uygulamadır. Son on yıldır, bilgisayar bilimlerde graf spektrasının birkaç önemli uygulamalara sahip olduğu gösterildi. Graf spektrası internet teknolojilerinde görülmektedir. İstatistiksel veri setleri, numune tanıma v.b. gibi birçok alanda da görülebilir.

Son yıllarda grafların özellikleri kullanılarak cebirsel yapı kurma çalışmaları ilginç araştırma konularından biri haline gelmiştir. R bir halka ve $N(R)$ kümesi halkanın bütün nilpotent elemanların kümesi olmak üzere Chen (2003), R halkası üzerinde R' nin bütün elemanlarını noktalar kabul eden ve " x ve y noktalarının komşu olması için gerek ve yeter koşul $xy \in N(R)$ " önermesini sağlayacak şekilde yeni bir graf yapısı tanımlamıştır.

Li (2010), " R birimli bir halka olmak üzere R' nin nilpotent grafini genişleterek aşağıdaki gibi tanımlamıştır:

$\Gamma_N(R)$ nilpotent grafi, $0 \neq y \in R$ için $V_N(R)^* = \{0 \neq x \in R \mid xy \in N(R)\}$ grafin noktalar kümesi olmak üzere " x ve y farklı iki noktası komşudur ancak ve ancak $xy \in N(R)$ " önermesini sağlayan bir yapıdır.

Bir G grafi için komşuluk, Laplasyan vb. matrisler tanımlanır. G 'nin spektrumu, tanımlanan matrisin spektrumudur ve komşuluk spektrumu, Laplasyan spektrumu vb. olarak isimlendirilir. Genelde grafların spektral karakterizasyon problemi, cebirsel graf teorisi alanında zor problemlerden biridir. Kısaca açıklamak gerekirse herhangi bir G grafinin öz değerlerini (spektrumunu) hesaplamak kolay olmasına rağmen herhangi bir spektruma göre grafların belirlenebileceğini tahmin etmek oldukça zordur. Özellikle nilpotent grafların graf çapı, dış merkezliği, girth vb. parametreleri ile ilgili çok az sayıda çalışma bulunmaktadır. Fakat spektral karakterizasyonları ile ilgili herhangi bir çalışma olmaması bu konuyu daha ilgi çekici hale getirmiştir.

Bu çalışmanın 2. bölümünde hem lisans hem de lisansüstü öğrencilerin faydalanacağı şekilde temel bilgilerden ve kavramlardan bahsedilmektedir. 3. bölümünde ise Nilpotent grafların yapısal özellikleri ve bazı sınıflandırmaları anlatılmaktadır. 4. bölümde bazı özel halka yapılarının nilpotent graflarının spektral karakterizasyonu yapılmaktadır.

2.BÖLÜM

TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Bu bölümde verilen temel tanım, kavram ve teoremler birçok graf ve cebir kitaplarında bulunmasına karşılık lisans ve lisansüstü öğrencilerin yararlanması amacıyla bilimsel disiplin gözetilerek verilmiştir.

2.1. Halka Teorisi

Tanım 2.1.1. [1] Boştan farklı bir R kümesi üzerinde toplama (+) ve çarpma (\cdot) denilen iki ikili işlem tanımlanmış olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa o zaman $(R, +, \cdot)$ cebirsel yapısına bir halka denir.

- $(R, +)$ değişmeli bir gruptur.
- R kümesi çarpma işlemine göre kapalıdır. Yani $\forall a, b \in R$ için $ab \in R$ dir.
- R kümesi çarpma işlemine göre birleşme özelliğine sahiptir. Yani $\forall a, b, c \in R$ için $a(bc) = (ab)c$ dir.
- Çarpma işleminin toplama işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılma özelliği vardır. Yani $\forall a, b, c \in R$ için;

$$a(b + c) = ab + ac \quad (2.1)$$

ve

$$(b + c)a = ba + ca \quad (2.2)$$

dır.

Tanım 2.1.2. [1] $(R, +, \cdot)$ cebirsel yapısı bir halka olmak üzere çarpma işlemine göre değişmeli ise yani $\forall a, b \in R$ için $ab = ba$ ise o takdirde $(R, +, \cdot)$ halkasına değişmeli halka denir.

Tanım 2.1.3. [1] $(R, +, \cdot)$ cebirsel yapısı çarpma işlemine göre birim elemana sahip ise yani $\forall a \in R$ için;

$$a1_R = 1_R a = a \quad (2.3)$$

olacak şekilde bir $1_R \in R$ varsa o zaman $(R, +, \cdot)$ halkasına birimli halka denir.

Örnek 2.1.4. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ cebirsel yapıları birer halkadır.

Örnek 2.1.5. R bir halka olmak üzere $M_n(R)$ elemanları R halkasına ait olan bütün $n \times n$ karesel matrislerin kümesi olsun. O takdirde bu küme üzerinde toplama işlemi olarak matrislerin bilinen toplama işlemi ve çarpma işlemi olarak da bilinen matris çarpımını göz önüne alınırsa o zaman $(M_n(R), +, \cdot)$ cebirsel yapısı birimli fakat değişmeli olması gerekmeyen bir halka teşkil eder. Buna göre $M_n(\mathbb{Z})$, $M_n(\mathbb{Q})$, $M_n(\mathbb{R})$ ve $M_n(\mathbb{C})$ kümeleri de birer halkadır.

Tanım 2.1.6. [1] $(R, +, \cdot)$ birimli bir halka olmak üzere bir $a \in R$ nin çarpmaya göre tersi varsa o zaman a elemanına tersinirdir denir. $a \in R$ tersinir ise a 'nın tersi a^{-1} ile gösterilir.

Tanım 2.1.7. [1] R birimli bir halka olmak üzere R 'nin merkezi $M(R)$ şeklinde gösterilir ve

$$M(R) = \{x \in R : ax = xa, \forall a \in R \text{ için}\} \quad (2.4)$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.1.8. [3] R bir halka ve $a \in R$ için $a^n = 0$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ varsa a 'ya R halkasının nilpotent elemanı denir.

Örnek 2.1.9. $\mathbb{Z}_8 = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ halkasının elemanlarına bakılırsa;

$$2^3 = 0, 4^2 = 0, 6^3 = 0$$

\mathbb{Z}_8 halkasının sıfırdan farklı 3 tane $\{2,4,6\}$ nilpotent elemanı vardır.

Tanım 2.1.10. [1] R bir halka ve $0 \neq a \in R$ olmak üzere $ab = 0$ olacak şekilde $0 \neq b \in R$ varsa a elemanına sol sıfır bölen denir. Yine $0 \neq a \in R$ olmak üzere $ba = 0$ olacak şekilde $0 \neq b \in R$ varsa a elemanına sağ sıfır bölen denir. Eğer a elemanı hem sağ sıfır bölen hem de sol sıfır bölen ise kısaca a 'ya sıfır bölen denir.

Örnek 2.1.11. $(M_2(\mathbb{Z}), +, \cdot)$ halkasında;

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

elemanları göz önüne alındığında $A \neq 0$ ve $B \neq 0$ olmasına karşılık $AB = 0$ dir. Gerçekten;

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O halde A matrisi sol sıfır bölen B matrisi sağ sıfır bölen olur.

Tanım 2.1.12. [3] R bir halka olsun. p , halkanın ne tersinir ne de sıfır bölen olan bir elemanı olsun. Her x, y için $p = xy$ eşitliği x ya da y ' nin tersinir olmasını gerektiriyorsa, o zaman p ' ye indirgenemez denir. Bu bir anlamda p elemanı gerçekten başka elemanların çarpımı olarak yazılamıyor demektir.

Tanım 2.1.13. [1] Birimli, değişmeli ve sıfır bölensiz bir halkaya tamlık bölgesi denir. Bu tanıma göre bir tamlık bölgesindeki bir çarpımda sadece çarpanlardan biri sıfır olduğunda çarpım sıfırdır yani sadece $a = 0$ ya da $b = 0$ olduğunda $ab = 0$ dir.

Örnek 2.1.14. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ tam sayılar halkası, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ rasyonel sayılar halkası ve $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ kompleks sayılar halkası birer tamlık bölgesidir.

Örnek 2.1.15. p asal sayı olmak üzere $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ halkası da bir tamlık bölgesidir.

Tanım 2.1.16. [19] R bir tamlık bölgesi olmak üzere $a \in R$ için $ab = 1$ şartına karşılık $b \in R$ varsa a elemanına R ' nin bir aritmetik birimi denir. Buna göre R ' nin bütün aritmetik birimlerinden oluşan küme $A(R)$ ile gösterilirse;

$$a \in A(R) \Leftrightarrow a|1 \tag{2.5}$$

elde edilmiş olur.

Tanım 2.1.17. [4] R bir halka olsun. Her $a \in R$ için $axa = a$ olacak şekilde bir $x \in R$ varsa R halkasına bir (von Neumann) regüler halka denir.

Tanım 2.1.18. [1] Birimli ve değişmeli bir halkanın sıfırdan farklı her elemanının çarpma işlemine göre bir tersi varsa o zaman bu halkaya bir cisim denir ve genel olarak \mathbb{F} ile gösterilir.

Örnek 2.1.19. $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ cebirsel yapıları bir cisim olmasına karşılık $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ halkası bir cisim değildir. Gerçekten; $2 \in \mathbb{Z}$ ' nin çarpmaya göre tersi $\frac{1}{2}$ olup $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ olduğundan $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ halkası bir cisim olamaz.

Sonuç 2.1.20. [1] Her cisim bir tamlık bölgesidir.

Teorem 2.1.21. [1] Her sonlu tamlık bölgesi bir cisimdir.

Sonuç 2.1.22. [1] p asal sayı olmak üzere $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ halkası bir cisimdir.

İspat. p asal olmak üzere \mathbb{Z}_p birimli, değişmeli ve sıfır bölensiz olduğundan bir tamlık bölgesidir. Aynı zamanda sonlu olduğundan Teorem 2.1.21.'den \mathbb{Z}_p cisimdir.

Tanım 2.1.23. [1] R bir halka olmak üzere her $a \in R$ için $na = 0$ olacak şekilde bir n pozitif tamsayısı varsa o takdirde bu özelliği sağlayan en küçük pozitif tamsayıya halkanın karakteristiği denir. Eğer böyle bir pozitif tamsayı yoksa yani her $a \in R$ için $na = 0$ olması $n = 0$ olmasını gerektiriyorsa o zaman R halkasının karakteristiği sıfırdır denir. Bir R halkasının karakteristiğini kısaca $char(R)$ ile gösterilmektedir.

Örnek 2.1.24. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ halkalarının karakteristikleri sıfırdır. Yani;

$$char(\mathbb{Z}) = char(\mathbb{Q}) = char(\mathbb{R}) = char(\mathbb{C}) = 0$$

dır.

Örnek 2.1.25. \mathbb{Z}_n halkasının karakteristiği n 'dir. Yani $char(\mathbb{Z}_n) = n$ 'dir.

Tanım 2.1.26. [1] R bir halka ve I, R' nin bir alt halkası olmak üzere her $r \in R \forall a \in I$ için $ra \in I$ ve $ar \in I$ ise o takdirde I' ya R halkasının bir ideali denir. Böylece I, R' nin bir alt halkası olmak üzere her $r \in R$ için $rI \subseteq I$ ve $Ir \subseteq I$ ise o zaman I, R' nin bir idealidir. $rI \subseteq I$ ise I' ya R' nin sol ideali $Ir \subseteq I$ ise I' ya R' nin sağ ideali denir.

Tanım 2.1.27. [1] R bir halka ve I, R' nin bir ideali olmak üzere I, R' nin hakiki bir alt kümesi ise yani $I \subset R$ ise o zaman I' ya R' nin bir hakiki ideali denir.

Teorem 2.1.28. [1] R bir halka ve I, R' nin boştan farklı herhangi bir alt kümesi olsun. Buna göre eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa o takdirde I, R halkasının bir idealidir.

- $\forall a, b \in I$ için $a - b \in I$
- $\forall a \in I$ ve $\forall r \in R$ için $ar \in I$ ve $ra \in I$ dir.

Örnek 2.1.29. R bir halka olmak üzere $\{0\}$ ve R' nin kendisi R halkasının birer ideali olup bu ideallere aşikar ideal denir.

Örnek 2.1.30. $I = \{0,3,6,9\}$ alt halkası \mathbb{Z}_{12} halkasının bir idealidir.

Tanım 2.1.31. [1] R birimli, değişmeli bir halka ve $a \in R$ olsun. Bu durumda;

$$\langle a \rangle = \{ra : r \in R\} \quad (2.6)$$

kümesi R halkasının bir ideali olup bu ideale a elemanı tarafından üretilen esas ideal denir.

Teorem 2.1.32. [1] $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ halkasının her ideali bir esas idealdir.

Tanım 2.1.33. [1] R bir halka ve I, R' nin bir ideali olmak üzere $(R/I, +, \cdot)$ halkasına R' nin I' ya göre bölüm halkası denir.

Örnek 2.1.34. $5\mathbb{Z} = \{5k : k \in \mathbb{Z}\}$ kümesi \mathbb{Z} tamsayılar halkasının bir ideali olup $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ bölüm halkasından söz edilebilir. Burada;

$$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{0 + 5\mathbb{Z}, 1 + 5\mathbb{Z}, 2 + 5\mathbb{Z}, 3 + 5\mathbb{Z}, 4 + 5\mathbb{Z}\}$$

$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ bölüm halkasının toplama işlemine göre birim elemanı $0 + 5\mathbb{Z} = 5\mathbb{Z}$ ve çarpma işlemine göre birim elemanı $1 + 5\mathbb{Z}$ ' dir.

Tanım 2.1.35. [1] R değişmeli bir halka ve I, R' nin hakiki bir ideali olmak üzere $xy \in I$ olması $x \in I$ ya da $y \in I$ olmasını gerektiriyorsa bu durumda I' ya R' nin bir asal ideali denir.

Örnek 2.1.36. \mathbb{Z} tamsayılar halkası ve p asal bir tamsayı olmak üzere $p\mathbb{Z}$ ideali \mathbb{Z} halkasının bir asal idealidir. Yani $xy \in p\mathbb{Z}$ ise o takdirde ya $x \in p\mathbb{Z}$ ya da $y \in p\mathbb{Z}$ ' dir. Gerçekten $xy \in p\mathbb{Z}$ ise bu durumda $pt = xy$ olacak şekilde $t \in \mathbb{Z}$ vardır. Buradan $p|xy$.

Halbuki p asal olduğundan $p|x$ ya da $p|y$ olmalıdır. Böylece x ya da y , p ' nin bir katıdır. Bundan dolayı ya $x \in p\mathbb{Z}$ ya da $y \in p\mathbb{Z}$ olur ki bu da asal ideal tanımından $p\mathbb{Z}$ ' nin \mathbb{Z} tamsayılar halkasının asal ideali olduğunu gösterir.

Tanım 2.1.37.

- a) [1] M değişmeli olması gerekmeyen herhangi bir R halkasının bir hakiki ideali olsun. Bu durumda $M \subseteq I \subseteq R$ olacak şekilde R ' nin bir ideali olduğunda ya $I = M$ ya da $I = R$ oluyorsa o zaman M idealine R ' nin maksimal ideali denir.
- b) [3] R halkasının bütün maksimal ideallerinin kesişimine Jacobson radikal denir. $J(R) = \bigcap M$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.38. [5] R bir halka ve \mathfrak{m} maksimal ideali olmak üzere tek maksimal ideali olan halkalara lokal halka denir. (R, \mathfrak{m}) ile gösterilir.

Tanım 2.1.39. [1] Her ideali esas ideal olan değişmeli bir halkaya esas ideal halkası denir.

Tanım 2.1.40. [1] Her ideali esas ideal olan (yani bir tek eleman tarafından üretilen) bir tamlık bölgesine esas ideal bölgesi denir.

Tanım 2.1.41. [1] $(R, +, \cdot)$ ve $(S, +, \cdot)$ iki halka olmak üzere

$$\varphi: R \rightarrow S$$

dönüşümü aşağıdaki şartları sağlarsa φ ' ye bir halka homomorfizmi denir.

- $\forall x, y \in R$ için $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$
- $\forall x, y \in R$ için $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$.

Tanım 2.1.42. [1] $\varphi: R \rightarrow S$, $1 \rightarrow 1$ ve üzerine bir halka homomorfizmi ise o zaman φ ' ye bir halka izomorfizmi denir. Bu durumda R ve S halkalarına izomorftur (ya da izomorftir) denir ve $R \cong S$ ile gösterilir.

2.2. Matris Teorisi

Tanım 2.2.1. [2] F bir cisim ve $a_{ij} \in F$ ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$) olmak üzere;

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

şeklindeki dikdörtgen tabloya matris denir. $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ile gösterilir. $i = 1, 2, \dots, m$ için;

$$r_i = [a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}] \quad (2.8)$$

ifadesine matrisin satırları ve $j = 1, 2, \dots, n$ için;

$$c_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

ifadesine de matrisin sütunları denir.

Tanım 2.2.2. [2] Bir matrisin bütün elemanları sıfır ise bu matrise sıfır matrisi denir. Genel elemanı a_{ij} olan A matrisi her i, j için $a_{ij} = 0$ şeklinde yazılır.

Tanım 2.2.3. [2] $A = (a_{ij})_{n \times n}$ bir kare matris olmak üzere eğer $i \neq j$ için her zaman $a_{ij} = 0$ oluyorsa o takdirde A matrisine köşegen matris denir ve $diag(A)$ şeklinde gösterilir. Örneğin;

$$diag(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Tanım 2.2.4. [2] Köşegen üzerindeki elemanları eşit olan köşegen matrise skaler matris denir.

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Eğer $A = (a_{ij})$, $n \times n$ tipinde bir matris ise o zaman $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ elemanlarının teşkil ettiği köşegene A matrisinin esas köşegeni denir.

Tanım 2.2.5. [2] Esas köşegen üzerindeki bütün elemanları "1" diğer tüm elemanları "0" olan bir kare matrise birim matris denir. I ile gösterilir. A herhangi bir kare matris olmak üzere;

$$A I = A \text{ ve } I A = A \quad (2.11)$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde verilir.

Tanım 2.2.6. [2] Bir kare matrisin transpozunu alarak elde edilen matris, verilen matrisin kendisine eşit oluyorsa bu matrise simetrik denir. $A = (a_{ij})$ kare matrisi için

$$A^T = A \quad (2.12)$$

ise bu matrise simetrik matris denir. Eğer A matrisi simetrik ise o takdirde

$$a_{ij} = a_{ji} \quad (2.13)$$

şartı sağlanır. Üçüncü mertebeden bir simetrik matris

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & b & c \\ b & a_{22} & d \\ c & d & a_{33} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

şeklindedir.

Tanım 2.2.7. [2] Herhangi bir $A = (a_{ij})$ kare matrisi için

$$A^T = -A \quad (2.15)$$

şartı sağlanıyorsa A matrisine ters simetrik matris denir. Ters simetrik matrisin genel terimi

$$a_{ij} = -a_{ji} \quad (2.16)$$

şartını sağlamalıdır. Buradan her $i = j$ için $a_{ij} = 0$ olmaktadır. Buradan ters simetrik matrisin esas köşegen elemanları sıfırdır. Üçüncü mertebeden bir ters simetrik matris

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

şeklindedir.

Tanım 2.2.8. [2] A , $n \times n$ tipinde bir kare matris ve I , $n \times n$ tipinde birim matris olmak üzere

$$AB = BA = I \quad (2.18)$$

olacak şekilde bir $n \times n$ B matrisi varsa o zaman B matrisine A matrisinin tersi denir. $B = A^{-1}$ ile gösterilir. Tersi olan matrislere de ters çevrilebilir (düzgün, tekil olmayan) matrisler denir.

Tanım 2.2.9. [2] A sıfır olmayan bir $n \times n$ kare matris olmak üzere

$$AB = 0 \quad (2.19)$$

olacak şekilde sıfırdan farklı bir B , $n \times n$ kare matrisi varsa o zaman A matrisine sol sıfır bölen matrisi denir. Yine A sıfırdan farklı bir $n \times n$ kare matris olmak üzere

$$CA = 0 \quad (2.20)$$

olacak şekilde sıfırdan farklı bir C , $n \times n$ kare matrisi varsa o zaman A matrisine sağ sıfır bölen denir. A matrisi hem sağ sıfır bölen matris hem de sol sıfır bölen matris ise o zaman A matrisine sadece sıfır bölen matris denir.

Tanım 2.2.10. [2] A bir $n \times n$ kare matris ve k pozitif bir tam sayı olmak üzere $A^k = 0$ ve $A^{k-1} \neq 0$ ise o zaman A matrisine nilpotent matris denir. $A^k = 0$ şartını sağlayan minimum k sayısına nilpotentlik indeksi denir.

Tanım 2.2.11. [20] Elemanlarının en az biri sıfırdan farklı olan simetrik bir A matrisi ile bunun dışında tamamen keyfi bir $y \neq 0$ sütun vektörü verilsin.

$$P = y^T A y \quad (2.21)$$

çarpımı sabit bir sayı olur. Eğer

- $P > 0$ ise A matrisi pozitif tanımlıdır
- $P < 0$ ise A matrisi negatif tanımlıdır
- $P \geq 0$ ise A matrisi yarı pozitif tanımlıdır
- $P \leq 0$ ise A matrisi yarı negatif tanımlıdır

denir.

Tanım 2.2.12. [6] A bir $n \times n$ kare matris ve X bir $n \times 1$ sütun vektörü olmak üzere $AX = \lambda X$ denklemini sağlayan bir λ skaleri varsa sıfır olmayan X vektörüne A kare matrisinin öz vektörü denir. λ skalerine de öz değer denir. Ayrıca bir A matrisinin karakteristik polinomu

$$K_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) \quad (2.22)$$

dır. Bu denklemin kökleri matrisin öz değerlerini verir.

Tanım 2.2.13. [2] Karakteristik denklemin kökleri λ_i ' nin değeri k -kez tekrarlanacak şekilde ise o takdirde λ_i ' ye k -katlı bir öz değer denir. Eğer λ_i sadece bir kez tekrarlanırsa o zaman λ_i ' ye basit öz değer denir.

2.3. Graf Teorisi

Tanım 2.3.1. [7] $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ noktalar kümesini ve $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ kenarlar kümesini oluşturmak üzere bir G grafi, $G = (V, E)$ sıralı ikilisi şeklinde tanımlanır. Burada E kümesindeki bir kenar, V kümesindeki noktaların sıralı ikilisidir. $|V| = n$ ve $|E| = m$ ise G' ye n -noktalı ve m -kenarlı bir graf denir. Nokta sayısına kısaca G' nin mertebesi denir.

Tanım 2.3.2. [6] $G = (V, E)$ bir graf ve $v \in V$ olsun. Bir v noktasının derecesi, v noktasına komşu olan noktaların sayısıdır. $deg(v)$ ya da $d(v)$ ile gösterilir. $G = (V, E)$ grafının noktaları v_1, v_2, \dots, v_n olsun. Buna göre bu grafın maksimum ve minimum dereceleri sırasıyla

$$\Delta(G) = \max\{deg(v_i): 1 \leq i \leq n\} \quad (2.23)$$

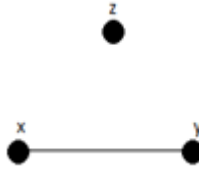
ve

$$\delta(G) = \min\{deg(v_i): 1 \leq i \leq n\} \quad (2.24)$$

olarak tanımlanır. $v_i \in V$ olmak üzere v_i ye komşu olan noktaların derecelerinin ortalaması m_i ile gösterilir. Ayrıca m_i , V' nin ortalama 2-derecesi olarak da bilinir.

Tanım 2.3.3. Derecesi sıfır olan noktaya ayırık nokta (isolated vertex) ve derecesi bir olan noktaya sarkıt nokta (pendant vertex) ve bu noktaya bağlanan kenara sarkıt kenar (pendant edge) denir.

Örnek 2.3.4.



Şekil 2. 1. z noktası ayırık nokta, x ve y sarkıt nokta

Tanım 2.3.5. [6] Bir grafın derecelerinin azalan biçimde sıralandırılmasıyla oluşturulan diziyeye derece dizisi denir.

Teorem 2.3.6. [8] Bir grafın derecelerinin toplamı kenarlarının iki katına eşittir. Yani, d_i , i noktasının derecesi ve e , grafın kenar sayısı olmak üzere

$$\sum_{i=1}^n d_i = 2e \quad (2.25)$$

eşitliği sağlanır.

Tanım 2.3.7. [6] $G = (V, E)$ bir graf ve $u, v \in V$ olsun. Eğer $e = \{V\}$ olacak biçimde bir $e \in E$ varsa e' ye bir ilmek (loop) denir. Eğer E kümesinde $g = \{u, v\} = f$ olacak biçimde farklı iki g ve f kenarı varsa bu kenarlara katlı kenar (multiple edge) denir.

Örnek 2.3.8.



Şekil 2. 2. İlmek ve katlı kenar

Tanım 2.3.9. G grafında alınan herhangi iki nokta çifti arasındaki en büyük uzaklığa G 'nin çapı (diameter) denir ve $diam(G)$ biçiminde gösterilir.

$$diam(G) = \sup \{d(x, y) \mid x, y \in G\} \quad (2.26)$$

Tanım 2.3.10. G grafında alınan herhangi iki nokta çifti arasındaki en kısa döngü uzunluğuna G 'nin çevresi (girth) denir. $gr(G)$ ile gösterilir. Eğer G grafi döngü içermiyorsa $gr(G) = \infty$ ' dur.

Tanım 2.3.11. [7] $G = (V, E)$ grafına; $V = \emptyset$ ise boş graf, $|V| = 1$ ise aşkar graf, $E = \emptyset$ ise sıfır (null) graf denir. N_n ile gösterilir.

Örnek 2.3.12.



Şekil 2. 3. N_1, N_2, N_3, N_4

Tanım 2.3.13. Bir yol (path), x_i ' ler birbirinden farklı olmak üzere $V = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ ve $E = \{x_0x_1, x_1x_2, \dots, x_{k-1}x_k\}$ formunda boştan farklı graftır. P_n ile gösterilir. G ' de alınan i, j noktalarının uzaklığı G ' de en kısa $i - j$ yol uzunluğudur ve $d_G(i, j)$ olarak gösterilir.

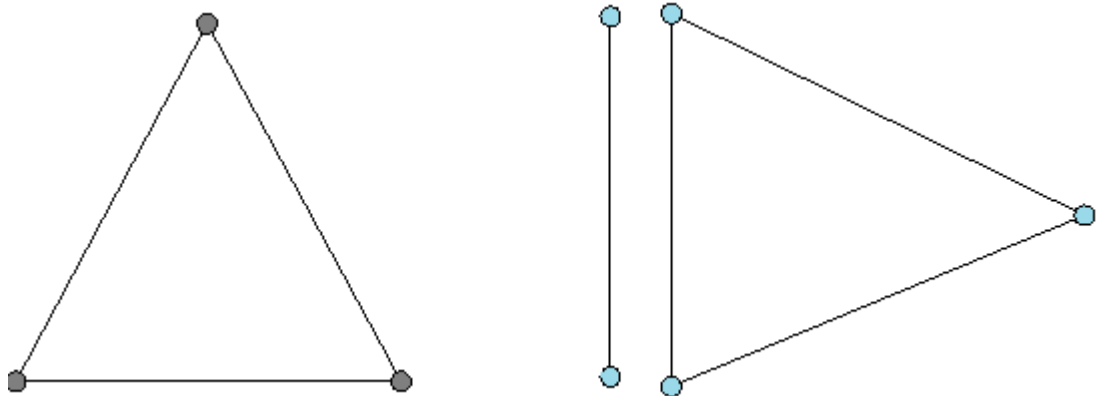
Örnek 2.3.14.



Şekil 2. 4. P_1, P_2, P_3, P_4, P_5

Tanım 2.3.15. [6] G boştan farklı bir graf olmak üzere G ' nin herhangi iki noktası bir yol (path) oluşturuyorsa G ' ye bağlantılı (connected) graf denir. Bağlantılı olmayan grafa bağlantısız graf denir.

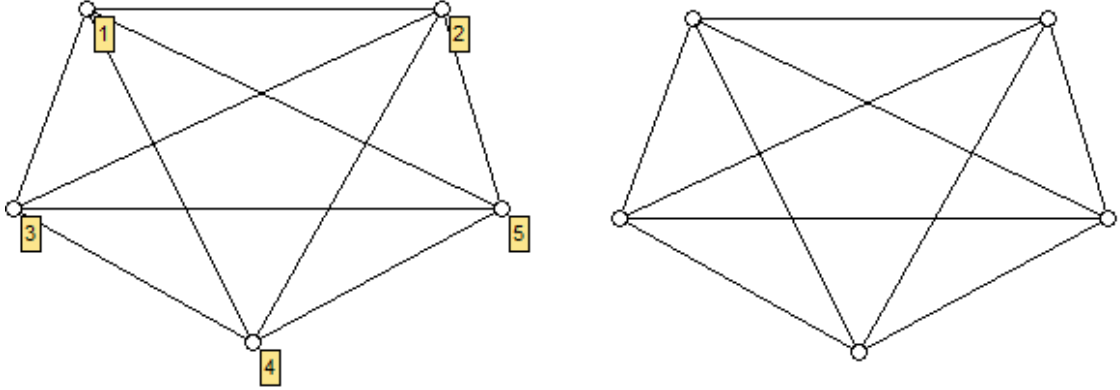
Örnek 2.3.16.



Şekil 2. 5. Bağlantılı ve bağlantısız graf

Tanım 2.3.17. [7] Bir grafın noktalarının isimlendirilmesi işlemine etiketleme; noktaları isimlendirilmiş bir grafa ise etiketlenmiş graf denir.

Örnek 2.3.18.

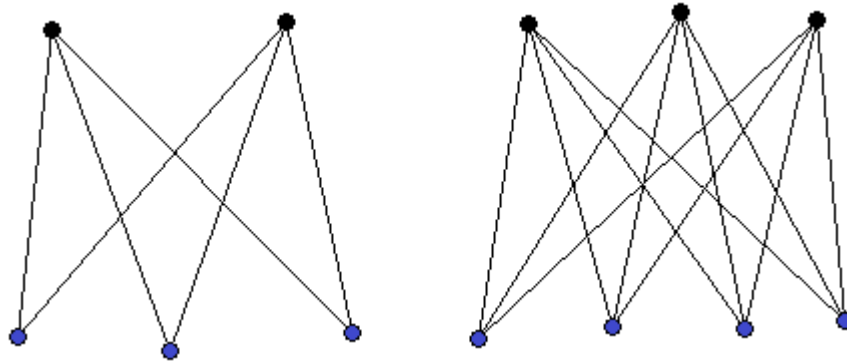


Şekil 2. 6. Etiketlenmiş ve etiketlenmemiş graf

Tanım 2.3.19. [6] $G = (V, E)$ grafi verilsin. Eğer V noktalar kümesi U ve W bağımsız iki kümeye parçalanabiliyorsa, G grafına iki parçalı graf (bipartite) denir. Daha da genellenirse, bir grafın V noktalar kümesi r tane kümeye parçalanabiliyorsa, grafa r –parçalı graf (çok parçalı graf) denir.

İki parçalı tam graflar, n sayısı bir parçasının noktaları ve m sayısı da diğer parçasının noktalar sayısı olmak üzere $K_{n,m}$ biçiminde gösterilir.

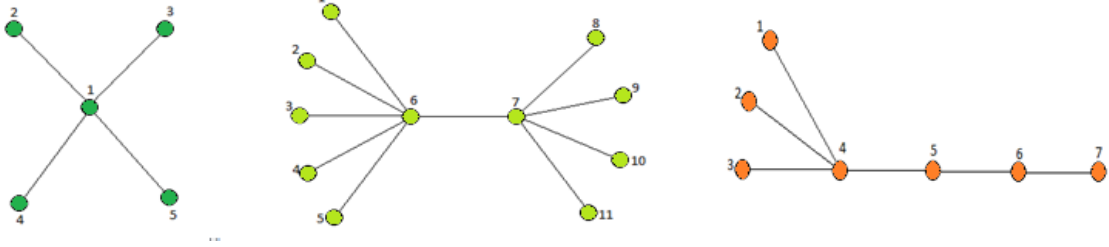
Örnek 2.3.20.



Şekil 2. 7. $K_{2,3}$ ve $K_{3,4}$

Tanım 2.3.21. [6] n noktalı bir grafa, bir noktasının derecesi $n - 1$, diğer noktalarının derecesi 1 olan grafa yıldız (star) graf denir. $K_{1,n-1}$ ya da S_n ile gösterilir. S_p ve S_q iki yıldız olmak üzere merkez noktalarının bir kenar ile birleştirilmesi ile oluşan $p + q$ noktalı grafa çift yıldız (double star) denir ve $S_{p,q}$ ile gösterilir. Üstelik bir yıldız grafa yol graf eklenerek elde edilen grafa kuyruklu yıldız (comet) denir ve $P_{n,k}$ ile gösterilir.

Örnek 2.3.22.



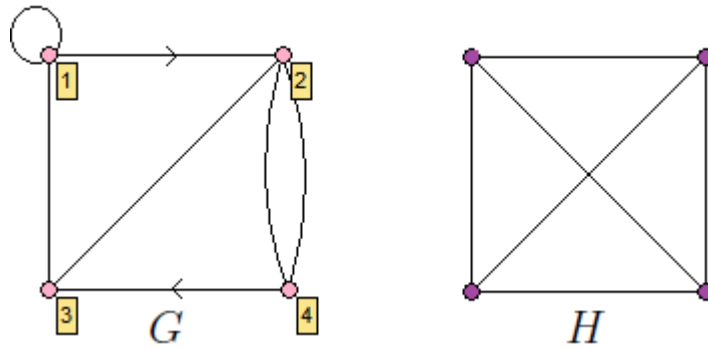
Şekil 2. 8. S_5 , $S_{6,5}$, $P_{7,3}$ grafları

Tanım 2.3.23. [6] Bir grafin tüm kenarları, bu kenarları oluşturan noktalardan biri çıkış noktası diğeri varış noktası olacak biçimde yönlendirilmiş ise bu grafa yönlü graf (digraph) denir. Yönlü bir grafin kenarları yay (arc) olarak isimlendirilir. G bir yönlü graf olmak üzere her u, v nokta çifti için u noktasından v noktasına ve v noktasından u noktasına bir yol varsa grafa güçlü bağlantılı graf denir.

Tanım 2.3.24. [6] Bir graf hem kenar hem de yay içeriyorsa bu grafa karışık (mixed) graf denir.

Tanım 2.3.25. [6] Yönsüz bir G grafi, herhangi bir ilmek (loop) ve katlı kenar içermiyorsa bu grafa basit graf denir.

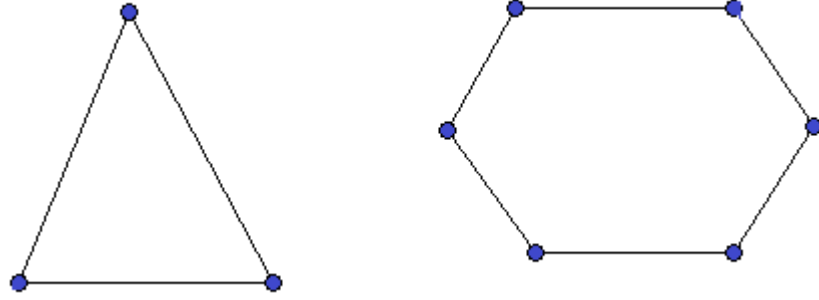
Örnek 2.3.26.



Şekil 2. 9. Basit ve karışık graf

Tanım 2.3.27. [6] Bir G grafinde her noktanın derecesi aynı ise G grafinde regüler graf denir. Bir graf iki parçalı ve aynı parçadaki her bir nokta aynı dereceye sahipse yarı regüler (semi-regular) iki parçalı graf olarak adlandırılır.

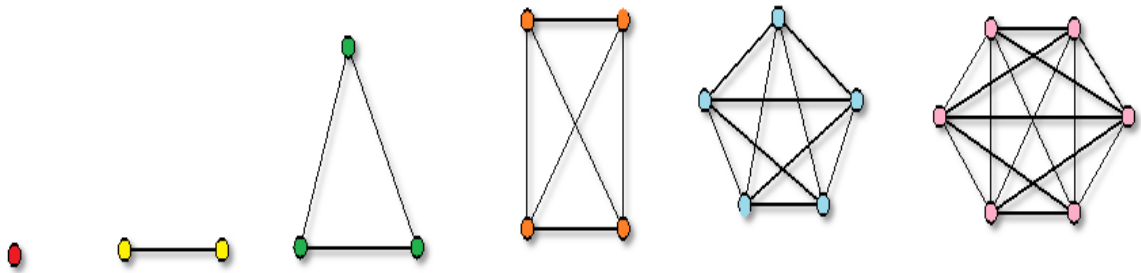
Örnek 2.3.28.



Şekil 2. 10. Regüler graf

Tanım 2.3.29. Her bir farklı nokta çiftinin sadece bir tek kenar oluşturduğu grafa tam graf denir ve nokta sayısı n olmak üzere K_n ile gösterilir.

Örnek 2.3.30.



Şekil 2. 11. $K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6$

Tanım 2.3.31. [7] $G = (V, E)$ grafi için $V' \subseteq V$ ve $E' \subseteq E$ olmak üzere, $S = (V', E')$ grafına G 'nin bir alt grafi denir ve $S \subseteq G$ ile gösterilir.

Tanım 2.3.32. [6] $G = (V, E)$ bir graf ve $u, v \in V$ olsun. Eğer, $e = \{u, v\}$ olacak biçimde bir $e \in E$ kenarı varsa u ve v noktaları komşu noktaldır denir ve $u \sim v$ ile gösterilir. Eğer $e = \{v\}$ ise v noktası kendisine komşudur denir. $v \in V$ olmak üzere v 'nin komşuluk kümesi

$$N_G(v) = \{u \in V : u \sim v\} \quad (2.27)$$

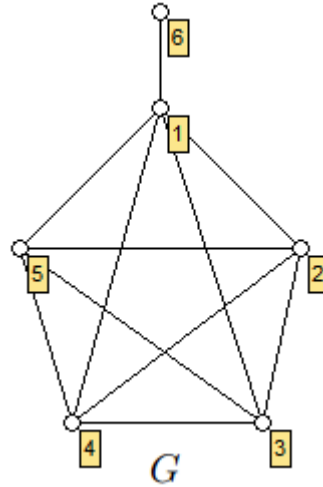
şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.3.33. [7] $G = (V, E)$ bir graf ve $v_0, v_1, \dots, v_n \in V$, $e_0, e_1, \dots, e_n \in E$ olmak üzere v_0 ve v_n noktaları arasında $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n \in V$ şeklinde yazılan

n –uzunluklu noktaların ve kenarları oluşturduğu sonlu diziye bir yürüme denir. Bir yürüyüşteki kenar sayısına o yürümenin uzunluğu denir. Hiçbir kenarın tekrarlanmadığı yürümeye gezi (trail) ve hiçbir noktanın tekrarlanmadığı yürümeye yol (path) denir.

Tanım 2.3.34. [7] Başlangıç ve bitiş noktası aynı olan bir yürüyüşe kapalı yürüyüş denir. Kenar tekrarlamayan bir kapalı yürüyüşe devir; nokta tekrarlamayan bir kapalı yürüyüşe ise döngü denir.

Örnek 2.3.35. Aşağıdaki şekilde verilen G grafında verilen 6 –uzunluklu bir yürüyüş; $1; \{6,1\}, 2; \{1,2\}, 3; \{2,3\}, 4; \{3,4\}, 5; \{4,5\}, 6; \{5,1\}$ olur. G basit graf olduğundan kısaca $6 - 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 1$ biçiminde de yazılabilir. Bu yürüyüş kenar tekrarlamadığı için aynı zamanda bir gezidir. Fakat 1 noktasından iki kere geçildiği için bir yol değildir. Başlangıç ve bitiş noktaları farklı olduğundan kapalı yürüyüş değildir. Dolayısıyla devir ya da döngü değildir. $1 - 2 - 5 - 1$ yürüyüşü ise üç uzunluklu bir döngüdür.



Şekil 2. 12. Yürüyüş, yol, devir ve döngü

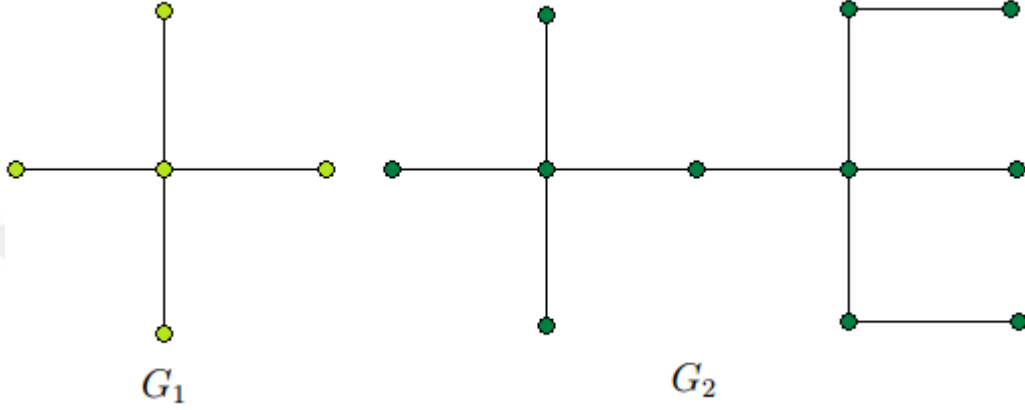
Tanım 2.3.36. [7] Döngü içermeyen bağlantılı basit bir grafa ağaç denir. Bileşenlerin hepsi ağaç olan bir grafa ise orman denir.

Tanım 2.3.37. [6] G grafi n noktalı m kenarlı graf olmak üzere;

- i. $m = n - 1$ ise G bir ağaç (tree)
- ii. $m = n$ ise tek döngülü (unicyclic)

- iii. $m = n + 1$ ise çift döngülü (bicyclic)
- iv. Bağlantısız olacak biçimde en az iki ağacın oluşturduğu grafa orman (forest) denir.

Örnek 2.3.38.



Şekil 2. 13. Ağaç ve orman

Tanım 2.3.39. [9] R birimli,değişmeli halka olsun. R ' nin sıfır bölenlerinin kümesi $Z(R)$ olsun. R ' nin sıfır bölen grafi $\Gamma(R)$, $Z(R)^* = Z(R) - \{0\}$ nokta kümesi ile bir graftır. Öyle ki $x \neq y$ ve $x, y \in Z(R)^*$ için x ve y komşudur gerek ve yeter şart $xy = 0$ ' dir.

Örnek 2.3.40. $R = \mathbb{Z}_8$ halkası üzerinde tanımlanmış sıfır bölen graf için $Z(R)^* = \{2,4,6\}$ olur. Sıfır bölen olma şartına göre graf;



Şekil 2. 14. $\Gamma(\mathbb{Z}_8)$

şeklindedir.

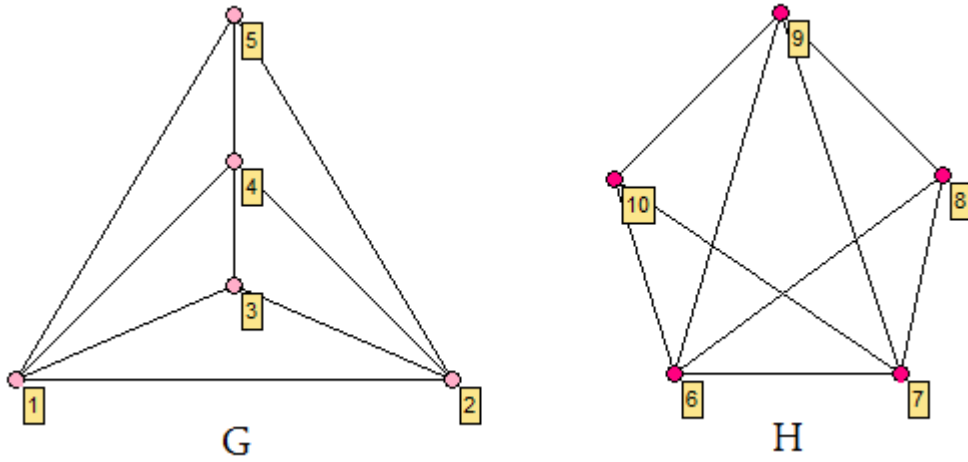
Tanım 2.3.41. [7] $G = (V, E)$ grafinın $H = (V', E')$ alt grafi için V' kümesindeki tüm noktalar birbirine komşu ise H alt grafına G grafına ait bir klik denir. Bir kliğin mertebesi klikteki nokta sayısıdır.

Tanım 2.3.42. [7] $G = (V, E)$ ve $G' = (V', E')$ grafları için bir birebir ve örten $f: V \rightarrow V'$ dönüşümü aşağıdaki koşulu sağlıyorsa, bu dönüşüme G ve G' arasında bir izomorfizma denir.

$$\forall u, v \in V \text{ için } u \sim v \Leftrightarrow f(u), f(v) \in V' \text{ ve } f(u) \sim f(v) \quad (2.28)$$

Aralarında en az bir izomorfizmanın tanımlı olduğu herhangi iki G ve G' grafına izomorf graflar denir. $G \cong G'$ ile gösterilir.

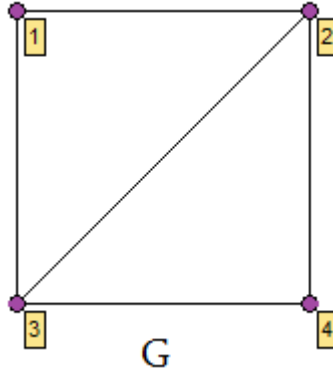
Örnek 2.3.43. $f: V(G) \rightarrow V(H)$ öyle ki $f(x) = x + 5$ ile tanımlı f dönüşümü bir izomorfizmadır. Dolayısıyla $G \cong H$ olur.



Şekil 2. 15. İzomorf Graflar

Tanım 2.3.44. [10] G grafında her bir noktadan sadece bir kere geçen bir yol varsa iki nokta arasındaki bu yola Hamilton yolu denir. G 'nin tüm noktalarını kapsayan bir alt grafi döngü oluşturuyorsa bu alt grafi G 'nin bir Hamilton döngüsü denir. Hamilton döngüsü içeren bir grafi ise Hamilton graf denir.

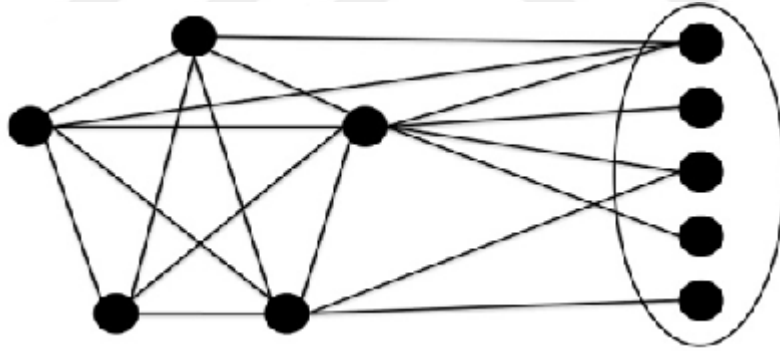
Örnek 2.3.45. Aşağıda verilen G grafi bir Hamilton grafi. Çünkü $\{1,2,3,4\}$ noktalarının tamamını kapsayan en az bir döngü içermektedir.



Şekil 2. 16. Hamilton graf

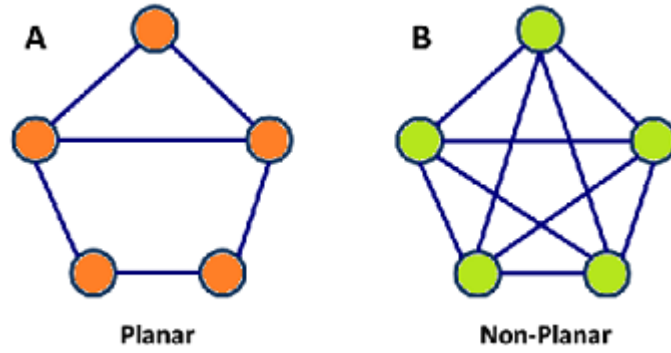
Tanım 2.3.46. [11] G bir graf olmak üzere bağımsız bir kümeye ve kliğe bölünebilirse bölünmüş graf (split graph) denir.

Tanım 2.3.47. [11] G bir graf olmak üzere bağımsız bir kümeye ve kliğe bölünebilirse öyle ki bağımsız kümedeki her nokta klikteki her noktaya komşu ise tam bölünmüş graf (complete split graph) denir.



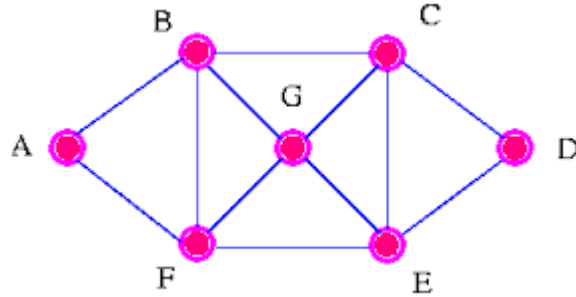
Şekil 2. 17. Split graf

Tanım 2.3.48. G bir graf olmak üzere düzlemde iki kenarın birbirleriyle kesiştikleri nokta haricinde birbirlerini karşılamayacak şekilde çizildiğinde G' ye düzlemsel graf (planar graph) denir. Böyle bir çizime G' nin düzlemsel çizimi denir.



Şekil 2. 18. Planar ve planar olmayan graflar

Tanım 2.3.49. [10] Bir grafin her kenarından bir kez ve sadece bir kez geçmek şartıyla gidilen yola Euler yolu (Eulerian trail) denir. Başlanılan noktadan farklı bir nokta da bitirilebilir. Bu tür graflara çaprazlanabilir denir. Bir döngü içeren Euler yolu varsa Euler döngüsü (Eulerian circuit) denir. Öyle ki aynı noktada başlar ve biter. Euler döngüsü içeren bir grafa ise Euler graf (Eulerian graph) denir.



Şekil 2. 19. Eulerian graf

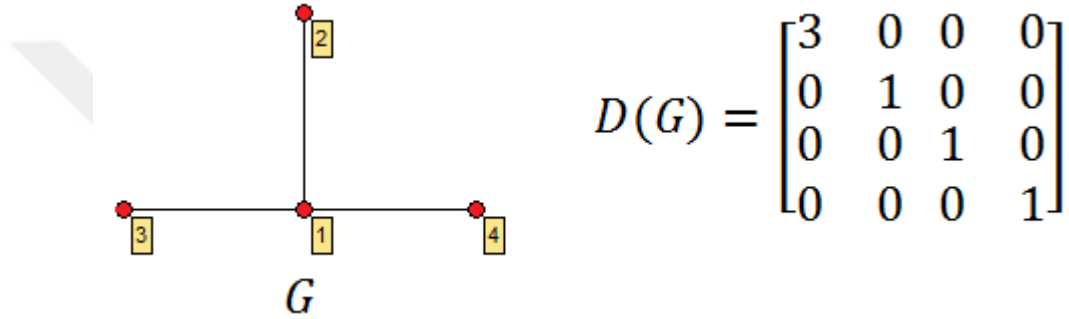
Tanım 2.3.50. [7] Bir grafin parametrelerinden bazıları arasındaki ilişkileri gösteren bir matrise graf matrisi denir.

Tanım 2.3.51. [7] $M(G)$ ya da kısaca M , G grafına ait bir graf matrisi ve I_n birim matris olmak üzere $\det(xI - M(G))$ polinomuna G ' nin $M(G)$ karakteristik polinomu denir ve $\text{char}(M(G))(x)$ ile gösterilir. Bu polinomun köklerinden yani $M(G)$ matrisinin öz değerlerinden oluşan kümeye ise G ' nin $M(G)$ spektrumu denir ve $\text{spec}(M(G))$ ile gösterilir. Ya da matrisin adına göre komşuluk spektrumu, Laplasyan spektrumu v.b. de denir.

Tanım 2.3.52. [7] G grafının bir graf matrisi $M(G)$ ve $\lambda \in \text{spec}(M(G))$ olsun. $(x - \lambda)^k / (\text{char}(M(G))(x))$ olacak biçimde en büyük k pozitif tamsayısına öz değerine cebirsel katı denir.

Tanım 2.3.53. [7] $G = (V, E)$ grafi verilsin ve $V = \{1, \dots, n\}$ olsun. $\forall i \in V$ için $d(i)$, i noktasının derecesini göstermek üzere $n \times n$ tipinde $D(G) = \text{diag}(d(1), \dots, d(n))$ köşegen matrisine G grafının derece matrisi denir.

Örnek 2.3.54. Bir G grafi ve derece matrisi aşağıdaki gibidir.

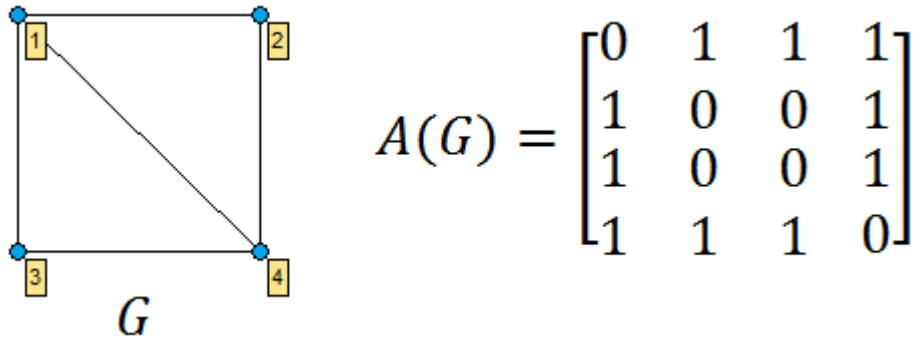


Şekil 2. 20. Grafın derece matrisi

Tanım 2.3.55. [7] $G = (V, E)$ grafi n noktalı m kenarlı bir graf olsun. $\forall i, j \in V$ için G grafının komşuluk matrisi aşağıdaki gibi tanımlanan ve $A(G)$ ile gösterilen $n \times n$ tipinde bir matristir.

$$A(G) = [a_{ij}] \text{ öyle ki } a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{eğer } i \sim j \text{ ise} \\ 0, & \text{eğer } i \not\sim j \text{ ise} \end{cases} \quad (2.29)$$

Örnek 2.3.56. Bir G grafının komşuluk matrisi aşağıdaki gibidir.



Şekil 2. 21. Bir grafın komşuluk matrisi

Teorem 2.3.57. [7] $n \times m$ tipinde reel bir Q matrisi ve $n \times n$ tipinde reel, simetrik bir A matrisi verilsin. $Q^T Q = I$ olsun. A matrisinin özdeğerleri $\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_n$ ve $Q^T A Q$ matrisinin özdeğerleri $\beta_1 \geq \dots \geq \beta_m$ ise $\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$ için aşağıda verilen eşitsizlik sağlanır.

$$\alpha_{n-m+i} \leq \beta_i \leq \alpha_i \quad (2.30)$$

Bu teoremin bir sonucu olarak, spektral graf teoride iç içe geçme (interlacing) lemması olarak bilinen ve hayli kullanışlı olan aşağıdaki lemma verilmiştir. Bu lemma bazı kaynaklarda teorem olarak verilmiştir.

Lemma 2.3.58. (İç İçe Geçme (Interlacing) Lemması) [18]

n noktalı bir G grafının komşuluk öz değerleri $\lambda_1(A(G)) \geq \dots \geq \lambda_n(A(G))$ ve G 'nin m noktalı indirgenmiş bir H alt grafının komşuluk öz değerleri $\lambda_1(A(H)) \geq \dots \geq \lambda_m(A(H))$ olsun. O zaman $i = 1, \dots, m$ için

$$\lambda_i(A(G)) \geq \lambda_i(A(H)) \geq \lambda_{n-m+i}(A(G)) \quad (2.31)$$

olur.

Sonuç 2.3.59. [18] n noktalı bir G grafının tek bir nokta kümesinin silinmesiyle elde edilen keyfi bir indirgenmiş alt grafi H olsun. G grafının komşuluk öz değerleri $\lambda_1(A(G)) \geq \dots \geq \lambda_n(A(G))$ ve H alt grafının komşuluk öz değerleri $\lambda_1(A(H)) \geq \dots \geq \lambda_{n-1}(A(H))$ ise

$$\lambda_1(A(G)) \geq \lambda_1(A(H)) \geq \lambda_2(A(G)) \geq \dots \geq \lambda_{n-1}(A(H)) \geq \lambda_n(A(G)) \quad (2.32)$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Sonuç 2.3.60. [7] Reel, simetrik bir A matrisinin öz değerleri $\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_n$ olsun. $|\Delta_i| = n_i \geq 0$ olmak üzere $\{1, 2, \dots, n\} = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \dots \cup \Delta_m$ bir küme parçalanışı olsun. A_{ij} , $n_i \times n_j$ tipinde bir blok olmak üzere $A = (A_{ij})$ blok matrisi yazılsın. A_{ij} bloğundaki tüm bileşenlerin toplamı e_{ij} ve $B = (e_{ij} / n_i)$ ise B 'nin öz değerleri A 'nin öz değerleri ile iç içe geçer. (Burada (e_{ij} / n_i) , A_{ij} bloğundaki ortalama satır toplamıdır.)

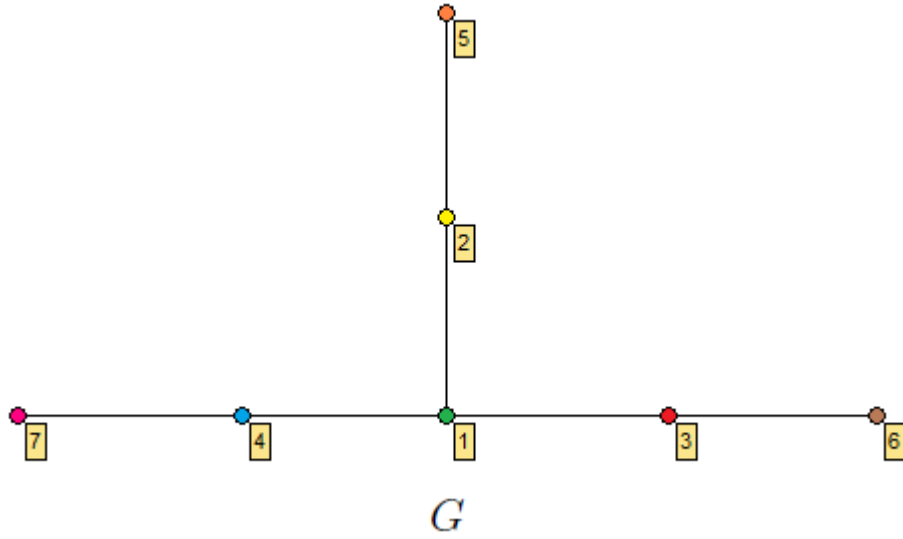
Burada aynı blok içerisindeki tüm satır toplamları eşit ise aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.3.61. [7] A matrisi Sonuç 2.3.60.' daki gibi bloklara ayrılabilen bir matris olsun. A_{ij} bloğundaki sabit satır toplamı b_{ij} ve $B = b_{ij}$ ise A' nin spektrumu, B' nin spektrumunu kapsar.

Tanım 2.3.62. [7] $G = (V, E)$ grafi verilsin ve V kümesinin bir parçalanışı $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k$ olsun. $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ için V_i kümesindeki her nokta, V_j de aynı noktaya komşu ise bu parçalanışa G grafının bir eşit parçalanışı (equitable partition) denir.

Tanım 2.3.63. [7] $G = (V, E)$ grafi ve $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k$ eşit parçalanışı verilsin. Sonuç 2.3.61.' deki notasyona uygun biçimde elde edilen $B = (b_{ij})$ matrisine bu parçalanışın bölüm matrisi (quotient matrix) denir.

Örnek 2.3.64.



Şekil 2. 22. G grafi ve iki eşit parçalanışı

Yukarıda verilen G grafının iki eşit parçalanışı;

$\mathcal{P}: \{1\}, \{2,3,4\}, \{5,6,7\}$ ve

$\mathcal{P}': \{1\}, \{2,3\}, \{4\}, \{5,6\}, \{7\}$ olur.

Bu parçalanışların bölüm matrisleri ise aşağıdaki gibidir.

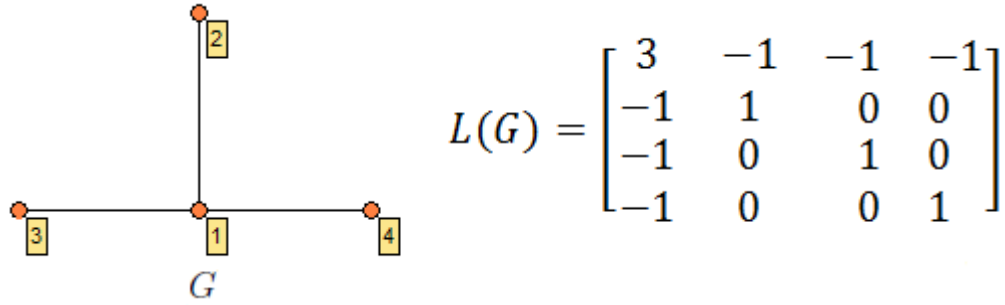
$$B_{\mathcal{P}} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } B_{\mathcal{P}'} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tanım 2.3.65. [7] $G = (V, E)$ grafinın Laplasyan matrisi aşağıdaki gibi tanımlanan ve $L(G)$ ile gösterilen $n \times n$ tipindeki bir matristir.

$$L(G) = [b_{ij}] \text{ öyle ki } b_{ij} = \begin{cases} d(i), \text{ eğer } i = j \text{ ise} \\ -1, \text{ eğer } i \sim j \text{ ise} \\ 0, \text{ eğer } i \not\sim j \text{ ise} \end{cases} \quad (2.33)$$

Buradan görüldüğü üzere $L(G) = D(G) - A(G)$ olur.

Örnek 2.3.66. Aşağıda bir G grafi ve Laplasyan matrisi verilmiştir.



Şekil 2. 23. Grafın Laplasyan matrisi

3.BÖLÜM

NİLPOTENT GRAFLAR VE BAZI SINIFLANDIRMALARI

Bu bölümde verilen temel bilgiler ve sonuçlar genel olarak [12-15] kaynaklarından alınmıştır.

3.1. $\Gamma_N(R)$ 'nin Temel Özellikleri

Tanım 3.1.1. R birimli bir halka olsun. R 'nin $\Gamma_N(R)$ ile gösterilen nilpotent grafi, nokta kümesi;

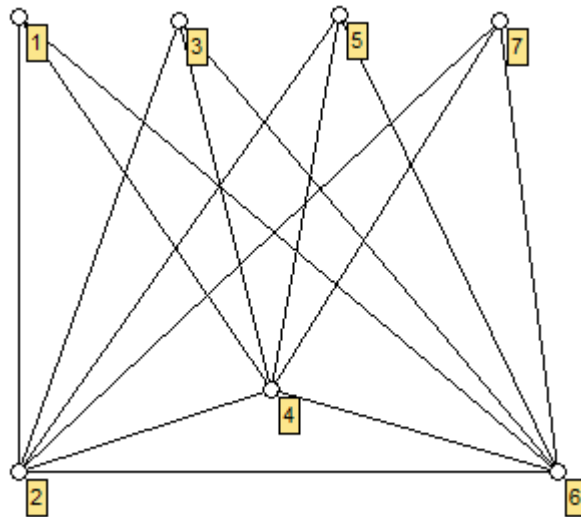
$$V_N(R)^* = \{0 \neq x \in R \mid xy \in N(R), 0 \neq y \in R\} \quad (3.1)$$

ile bir graftır. $N(R)$, R 'nin bütün nilpotent elemanlarının kümesi olmak üzere iki farklı nokta x ve y komşudur $\Leftrightarrow xy \in N(R)$ dir.

Örnek 3.1.2. $R = \mathbb{Z}_8$ halkasının nokta kümesi ve nilpotent grafi aşağıdaki gibi verilmektedir.

$$V_N(\mathbb{Z}_8)^* = \{1,2,3,4,5,6,7\}$$

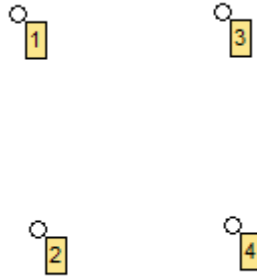
$$N(R) = \{0,2,4,6\}$$



Şekil 3.1. $\Gamma_N(\mathbb{Z}_8)$

Not 3.1.3. [12] R halkası tamlık bölgesidir $\Leftrightarrow \Gamma_N(R)$ boş graftır. Aslında R bir tamlık bölgesi ise o zaman $V_N(R)^* = \emptyset$ dir. Dolayısıyla $\Gamma_N(R)$ boşdur. Tersine $\Gamma_N(R)$ boş ise o zaman $\Gamma_N(R)$ ' nin tanımından R' nin sıfırdan farklı sıfır bölenleri yoktur. Böylece R bir tamlık bölgesidir.

Örnek 3.1.4. p asal sayı olmak üzere $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ halkası bir tamlık bölgesidir. Fakat 0 ' dan farklı hiçbir nilpotent ve sıfır bölen elemana sahip olmadığı için nilpotent grafi boş graf olmak zorundadır. $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ halkasının nilpotent grafi aşağıdaki gibidir.



Şekil 3.2. $\Gamma_N(\mathbb{Z}_5)$

Not 3.1.5. [12] Varsayalım ki R regüler halka ve birimli olsun. O zaman $R/Z(R)$ ' nin her elemanı birimdir. Gerçekten her $x \in R$ için $xyx = x$ olacak biçimde bir $y \in R$ vardır. Eğer $x \notin Z(R)$ ise $xy = 1$ dir. Dolayısıyla x aritmetik birimdir.

Not 3.1.6. [12] R değişmeli veya regüler halka olsun. Eğer R indirgenmiş ise o zaman $|R| \leq |Z(R)|^2 = |V_N(R)|^2$, aksi takdirde $|V_N(R)^*| = |R| - 1$. Aslında R indirgenmiş ise $\Gamma_N(R) = \Gamma(R)$ olur. Böylece $|R| \leq |Z(R)|^2 = |V_N(R)|^2$ eşitliği sağlanır. R indirgenmemiş değişmeli halka ise o zaman her $r \in R^*$ ve $x \in N(R)^*$ için r ve x komşudur. Bu nedenle $V_N(R) = R$. Varsayalım ki R indirgenmemiş regüler halka olsun. r, R^* in keyfi bir elemanı olsun. $r \in Z(R)$ ise $V_N(R) = R$ dir. Çünkü $Z(R) \subseteq V_N(R)$ dir. Aksi halde Not 3.1.5.' den r aritmetik birimdir ve ters elemanı r^{-1} ile gösterilir. x sıfırdan farklı nilpotent eleman olsun. $r^{-1}x \neq 0$ olduğunu görmek kolaydır ve $r, r^{-1}x$ e komşudur. Dolayısıyla $r \in V_N(R)$ dir ve böylece $|V_N(R)| = |R|$ olur.

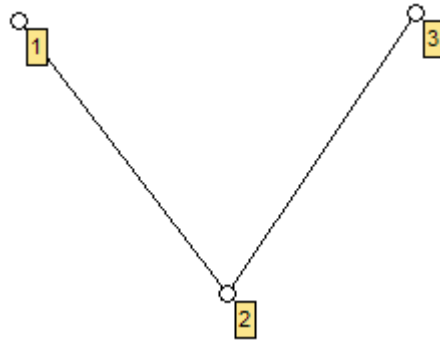
Not 3.1.7. [13] R' nin merkezinde sıfırdan farklı bir nilpotent eleman varsa R' nin sıfırdan farklı bütün elemanları nilpotent elemana komşudur. Bu nedenle herhangi bir R halkası için R' nin merkezi en az bir nilpotent eleman içerirse;

- i. $\Gamma_N(R)$ bağlantılıdır ve $\text{diam}(\Gamma_N(R)) \leq 2$
- ii. $\text{gr}(\Gamma_N(R)) = 3$ veya ∞ .

Örnek 3.1.8. $R = \mathbb{Z}_4$ için nilpotent graf incelenirse;

$$V_N(\mathbb{Z}_4)^* = \{1,2,3\}$$

$$N(R) = \{0,2\}$$



Şekil 3.3. $\Gamma_N(\mathbb{Z}_4)$

$\Gamma_N(\mathbb{Z}_4)$ bağlantılıdır, $\text{diam}(\Gamma_N(\mathbb{Z}_4)) = 2$ ve $\text{gr}(\Gamma_N(\mathbb{Z}_4)) = \infty$.

Teorem 3.1.9. [12] R değişmeli, regüler ve birimli halka olsun. O halde aşağıdaki şartları sağlamaktadır:

- i. $\Gamma_N(R)$ bağlantılıdır.
- ii. $\text{diam}(\Gamma_N(R)) \leq 3$.
- iii. Eğer $\Gamma_N(R)$ bir döngü içeriyorsa, o halde $\text{gr}(\Gamma_N(R)) \leq 4$. Buna ilaveten R indirgenemez ise o zaman $\text{gr}(\Gamma_N(R)) = 3$.

Teorem 3.1.10. [12] R indirgenemez değişmeli halka olsun. $\Gamma_N(R)$ tek noktalı küme (singleton) olmasın. O halde aşağıdaki ifadeler denktir:

- i. $\text{gr}(\Gamma_N(R)) = \infty$
- ii. $\Gamma_N(R)$ bir star graftır.
- iii. R ya 3 mertebeli boş halkadır ya da $|N(R)| = 2$ olacak biçimde $N(R)$, R' nin asal idealidir.

Teorem 3.1.11. [12] R indirgenemez regüler bir halka ve $\Gamma_N(R)$ star graf olsun. O zaman:

- i. $\Gamma_N(R)$ tam olarak iki noktaya sahip olması için gerek ve yeter şart R halkası 3 mertebeli nilpotent halkadır.
- ii. $\Gamma_N(R)$ en az üç noktaya sahiptir. Bu durumda $|N(R)| = 2$ olmak üzere $N(R)$, R 'nin asal idealidir.

Lemma 3.1.12. [12] R basit bir graf olsun. Maksimum derecenin her u noktası için $\Delta(R) - d(v) + 2$, R 'deki maksimum dereceli noktaların sayısından daha fazla olmak üzere $u - v$ kenarı varsa $\chi'(R) = \Delta(R)$ dir.

Teorem 3.1.13. [13] R sonlu, indirgenemez ve değişmeli bir halka olsun. R çift mertebeli nilpotent bir halka olmadıkça

$$\chi'(\Gamma_N(R)) = \Delta(\Gamma_N(R)) \quad (3.2)$$

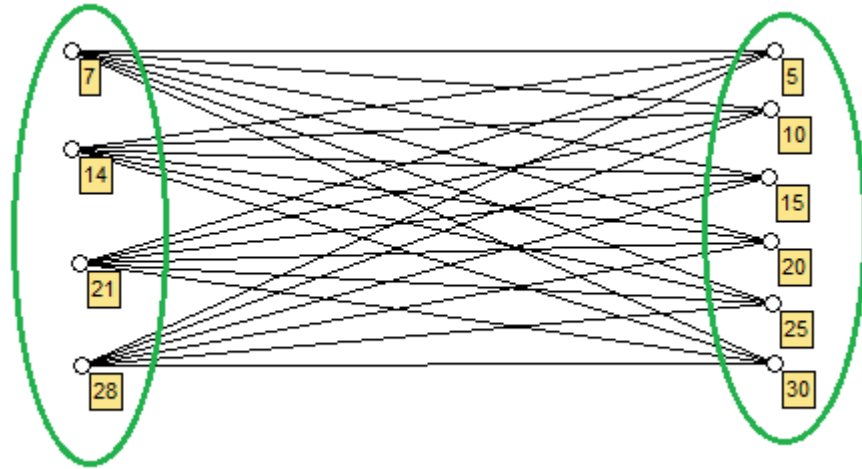
Sonuç 3.1.14. [13] R sonlu, birimli, değişmeli bir halka olsun. O zaman;

$$\chi'(\Gamma_N(R)) = \Delta(\Gamma_N(R)). \quad (3.3)$$

Teorem 3.1.15. [13] R sonlu, değişmeli, birimli bir halka öyle ki $\Gamma_N(R)$ bağlantılı olsun. O zaman $\Gamma(R)^c$, $\Gamma_N(R)$ 'nin alt grafidir gerek ve yeter şart R lokal halkadır.

Teorem 3.1.16. [13] R sonlu, değişmeli, birimli bir halka ve $\Gamma_N(R)$ bağlantılı olsun. O zaman, $\Gamma_N(R)$ iki parçalı tam graftır gerek ve yeter şart $\Gamma(R)$ tam graftır.

Örnek 3.1.17. $R = \mathbb{Z}_{35}$ halkasının nilpotent grafi iki parçalı tam graftır.

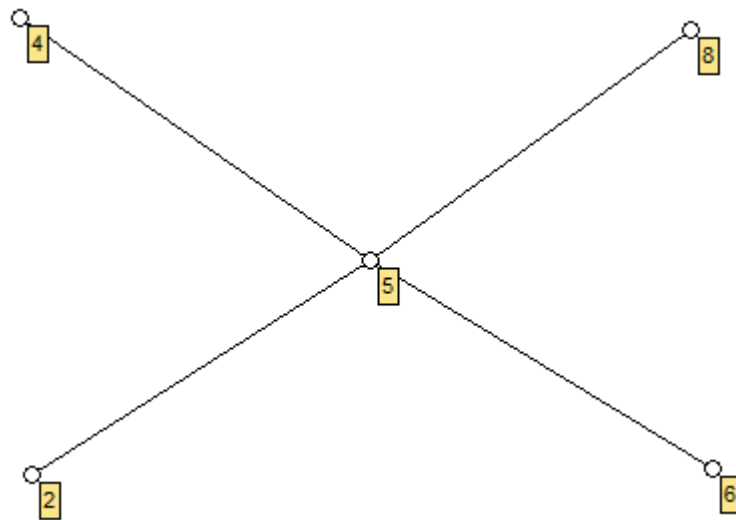


Şekil 3.4. $\Gamma_N(\mathbb{Z}_{35})$

Teorem 3.1.18. [13] R sonlu, değişmeli, birimli bir halka ve $\Gamma_N(R)$ bağlantılı olsun. O halde aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

- i. $\Gamma_N(R)$ bir star graftır.
- ii. $\Gamma_N(R)$ bir ağaıtır.
- iii. $R \cong \mathbb{Z}_4$ veya $\mathbb{Z}_2[x]/(x^2)$.

Örnek 3.1.19. $R = \mathbb{Z}_{10}$ halkası sonlu değişmeli birimli ve bağlantılıdır. Bu nedenle hem star graftır hem de ağaıtır.



Şekil 3.5. $\Gamma_N(\mathbb{Z}_{10})$

Teorem 3.1.20. [13] (R, m) cisim olmayan sonlu lokal halka olsun ve $|R| = p^n$, p asal sayı ve $n > 1$. Eğer $|m^*| \geq 2$ ile $\Gamma_N(R)$ bağlantılı ise o zaman $\Gamma_N(R)$ Eulerian olması için gerek ve yeter koşul $|R|$ tektir ve bütün $x \in m^*$ için $x^2 = 0$ dır.

Teorem 3.1.21. [13] R sonlu, değişmeli, birimli, lokal olmayan bir halka ve $\Gamma_N(R)$ bağlantılı olsun. O zaman $\Gamma_N(R)$ Eulerian'dır gerek ve yeter şart $|R|$ tektir ve bütün $x \in J(R)^*$ için $x^2 = 0$.

Teorem 3.1.22. [13] (R, m) cisim olmayan sonlu lokal halka olsun ve $|R| = p^n \geq 4$, p asal sayı ve $n > 1$. O zaman $\Gamma_N(R)$ Hamilton yoluna sahiptir gerek ve yeter şart $R/m \cong \mathbb{Z}_2$. Dolayısıyla $|R|$ çifttir.

Sonuç 3.1.23. [13] (R, m) cisim olmayan sonlu lokal halka olsun. O zaman $\Gamma_N(R)$ Hamiltonyan değildir.

Teorem 3.1.24. [14] (R, m) sonlu lokal halka, p asal sayı ve $n \geq 2$ olmak üzere $|R| = p^n$ olsun. O zaman $\Gamma_N(R)$ split graftır.

Teorem 3.1.25. [13] R sonlu, değişmeli, birimli bir halka ve $\Gamma_N(R)$ bağlantılı olsun. O zaman $\Gamma_N(R)$ planar (düzlemsel) olması için gerek ve yeter şart $R \cong \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_2[x]/(x^2), \mathbb{Z}_9, \mathbb{Z}_8[x]/(x^2)$, halkalarından birine izomorftur.

3.2. $\Gamma_N(\mathbf{R})$ 'nin Çapı ve Çevresi

Teorem 3.2.1. [15] \mathbb{F} bir cisim ve $n \geq 3$ ise $\text{diam}(\Gamma_N(M_n(\mathbb{F}))) = 2$.

Teorem 3.2.2. [15] \mathbb{F} bir cisim ise $\text{diam}(\Gamma_N(M_n(\mathbb{F}))) \leq 3$.

Lemma 3.2.3. [15] \mathbb{F} bir cisim ve $c \in \mathbb{F}$ vardır öyle ki c kare değildir. O halde $\text{diam}(\Gamma_N(M_2(\mathbb{F}))) = 3$.

Lemma 3.2.4. [15] \mathbb{F} sonlu bir cisim olsun. O zaman $|\mathbb{F}|$ çift sayıdır gerek ve yeter şart \mathbb{F} 'nin bütün elemanları karedir.

Sonuç 3.2.5. [15] \mathbb{F} bir sonlu cisim ve $|\mathbb{F}|$ tek sayı ise $\text{diam}(\Gamma_N(M_2(\mathbb{F}))) = 3$.

Lemma 3.2.6. [15]

- i. \mathbb{F} bir cisim ve $\text{char}(\mathbb{F}) = 2$ ise o zaman $\text{diam}(\Gamma_N(M_2(\mathbb{F}))) = 3$.
- ii. $\text{diam}(\Gamma_N(M_2(\mathbb{F}_2))) = 3$.

Teorem 3.2.7. [15] \mathbb{F} bir cisim ise $\text{diam}(\Gamma_N(M_2(\mathbb{F}))) = 3$.

Lemma 3.2.8. [15]

- i. $\mathbb{F}_1, \dots, \mathbb{F}_k$ sonlu cisimler olmak üzere $R \cong \prod_{i=1}^k M_{n_i}(\mathbb{F}_i)$ ve $1 \leq i \leq k$ için $n_i \geq 3$ ise o zaman $\text{diam}(\Gamma_N(R)) = 2$.
- ii. $\mathbb{F}_1, \dots, \mathbb{F}_k$ sonlu cisimler olmak üzere $R \cong \prod_{i=1}^k M_{n_i}(\mathbb{F}_i)$ ve $i = 1, \dots, k$ için $n_i \leq 2$ ve $1 \leq j \leq k$ için $n_j = 2$ ise $\text{diam}(\Gamma_N(R)) = 3$.

Teorem 3.2.9. [15] R sonlu halka ise $\text{diam}(\Gamma_N(R)) \leq 3$.

Sonuç 3.2.10. [15] R sonlu halka olsun. $J(R) \neq 0$ ise $\text{diam}(\Gamma_N(R)) \leq 2$.

Sonuç 3.2.11. [15] $\mathbb{F}_1, \dots, \mathbb{F}_k$ cisimler ve n_1, \dots, n_k, k 'lar pozitif tam sayılar olmak üzere $R \cong \prod_{i=1}^k M_{n_i}(\mathbb{F}_i)$ aşağıdaki şartlar sağlanır:

- i. Bazı i 'ler için $n_i \geq 3$ ise $\text{diam}(\Gamma_N(R)) = 2$.
- ii. $\forall i$ için $n_i \leq 2$ ve bazı j 'ler için $n_j = 2$ ise $\text{diam}(\Gamma_N(R)) = 3$.
- iii. $k = 2$ ve $n_1 = n_2 = 1$ ise $\text{diam}(\Gamma_N(R)) \in \{1, 2\}$.

iv. $k \geq 3$ ve $n_1 = \dots = n_k = 1$ ise $\text{diam}(\Gamma_N(R)) = 3$.

Lemma 3.2.12. [15] $\mathbb{F}_1, \dots, \mathbb{F}_k$ cisimler ve n_1, \dots, n_k pozitif tam sayılar ve $k \geq 3$ için $R \cong \prod_{i=1}^k M_{n_i}(\mathbb{F}_i)$ ise $\text{gr}(\Gamma_N(R)) = 3$.

Lemma 3.2.13. [15]

- i. \mathbb{F} bir cisim ve $n \geq 2$ ise $\text{gr}(\Gamma_N(M_n(\mathbb{F}))) = 3$.
- ii. $\forall \mathbb{F}_i$ bir cisim ve bazı i ' ler için $|\mathbb{F}_i| \geq 3$, $R \cong M_{n_1}(\mathbb{F}_1) \times M_{n_2}(\mathbb{F}_2)$ olsun. $n_1, n_2 \geq 2$ ise $\text{gr}(\Gamma_N(R)) = 3$.
- iii. $\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2$ cisim ve $n \geq 2$ ise $\text{gr}(\Gamma_N(\mathbb{F}_1 \times M_n(\mathbb{F}_2))) = 3$.
- iv. $\text{gr}(\Gamma_N(M_{n_1}(\mathbb{Z}_2) \times M_{n_2}(\mathbb{Z}_2))) \in \{3, \infty\}$.

Teorem 3.2.14. [14] (R_i, m_i) bir lokal halka ve $n \geq 2$ olmak üzere $R \cong R_1 \times \dots \times R_n$ sonlu değişmeli birimli halka olsun. O zaman $\text{gr}(\Gamma_N(R)) \geq 2$.

Sonuç 3.2.15. [14] (R, m) sonlu lokal halka olsun. O halde aşağıdaki şartları sağlamaktadır:

- i. $|m^*| = 3$ ve $\text{gr}(\Gamma_N(R)) \geq 2$ ise o zaman $R \cong \mathbb{F}_4[x]/[x^2]$ veya $\mathbb{Z}_4[x]/[x^2 + x + 1]$.
- ii. $|m^*| \geq 4$ ise o zaman $\text{gr}(\Gamma_N(R)) \geq 2$.

Not 3.2.16. [13] R lokal halka olsun fakat cisim olmasın. O halde nilpotent graf tanımından $\Gamma_N(R)$ bağlantılıdır ve $\text{diam}(\Gamma_N(R)) = 2$.

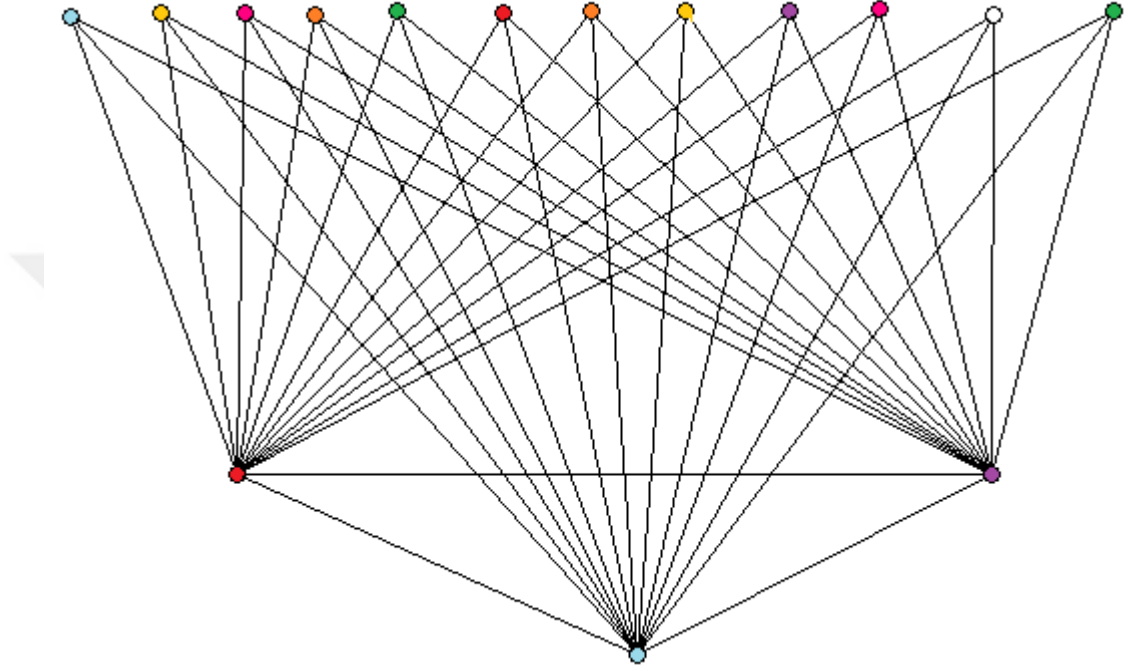
Teorem 3.2.17. [13] R_i bir lokal halka ve $n \geq 2$ olmak üzere $R \cong R_1 \times \dots \times R_n$ sonlu, değişmeli, birimli bir halka olsun. $\Gamma_N(R)$ bağlantılıdır gerek ve yeter şart $\forall i$ için R_i cisim değildir. Ayrıca $\text{diam}(\Gamma_N(R)) = 2$.

Teorem 3.2.18. [13] R sonlu, değişmeli, birimli bir halka ve $\Gamma_N(R)$ bağlantılı olsun.

- i. $\text{gr}(\Gamma_N(R)) = \infty$ gerek ve yeter şart $R \cong \mathbb{Z}_4$ ve $\mathbb{Z}_2[x]/[x^2]$.
- ii. $\text{gr}(\Gamma_N(R)) = 4$ gerek ve yeter şart $\mathcal{Z}(R)^2 = 0$ ve $|\mathcal{Z}(R)^*| \geq 2$ ile R lokaldir.
- iii. $\text{gr}(\Gamma_N(R)) = 3$ gerek ve yeter şart $R \cong \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_2[x]/[x^2]$ ve $\mathcal{Z}(R)^2 = 0$ ve $|\mathcal{Z}(R)^*| \geq 2$ ile R lokal halka değildir.

Teorem 3.2.19. [13] $g(\Gamma_N(R)) = 2$ olan sonlu lokal R halkası yoktur.

Örnek 3.2.20. $R = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$ halkasının çap ve çevresi aşağıdaki gibi incelenmektedir.



Şekil 3.6. $\Gamma_N(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4)$

$$V_N(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4) = \{(0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (1,0), (1,1), (1,2), (1,3), (2,0), (2,1), (2,2), (2,3), (3,0), (3,1), (3,2), (3,3)\}$$

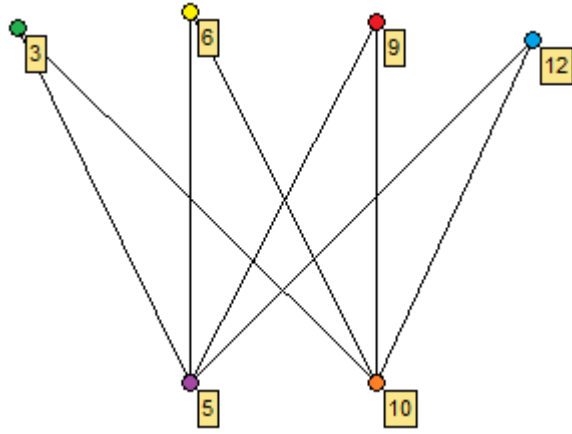
$$V_N(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4)^* = \{(0,1), (0,2), (0,3), (1,0), (1,1), (1,2), (1,3), (2,0), (2,1), (2,2), (2,3), (3,0), (3,1), (3,2), (3,3)\}$$

$$N(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4) = \{(0,0), (0,2), (2,0), (2,2)\}$$

Renklendirilmiş herhangi iki nokta arasında keyfi bir seçimle çap ve çevre incelenirse;

$$\text{diam}(\Gamma_N(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4)) = 2 \text{ ve } \text{gr}(\Gamma_N(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4)) = 3.$$

Örnek 3.2.21. $R = \mathbb{Z}_{15}$ Eulerian halkasının;



Şekil 3.7. $\Gamma_N(\mathbb{Z}_{15})$

$\text{diam}(\Gamma_N(\mathbb{Z}_{15})) = 2$ ve $\text{gr}(\Gamma_N(\mathbb{Z}_{15})) = 4$ olmaktadır.

3.3. $\Gamma_N(R)$ 'nin İzomorfizmaları

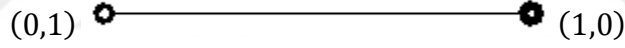
Teorem 3.3.1. [14] \mathbb{F}_1 ve \mathbb{F}_2 cisim olmak üzere $R = \mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2$ sonlu, değişmeli olsun. O zaman $\Gamma_N(R)$ iki parçalı tam graftır ve dolayısıyla $\Gamma_N(R) \cong K_{|\mathbb{F}_1^*|, |\mathbb{F}_2^*|}$.

Sonuç 3.3.2. [14] (R, m) sonlu lokal halka, p asal sayı ve $n \geq 2$ olmak üzere $|R| = p^n$ olsun. O zaman $R^x = R \setminus m$ R 'nin bütün aritmetik birimlerinin kümesi olmak üzere $\Gamma_N(R) \cong K_{|m^*|} + \overline{K_{|R^x|}}$.

Teorem 3.3.3. [14] (R_i, m_i) bir lokal halka ve \mathbb{F}_j bir cisim olmak üzere $R \cong R_1 \times \dots \times R_n \times \mathbb{F}_1 \times \dots \times \mathbb{F}_m$ cisim olmayan, sonlu, değişmeli, birimli halka olsun. O zaman $\Gamma_N(R)$ split graftır gerek ve yeter şart R aşağıdaki halkalardan birine izomorftur.

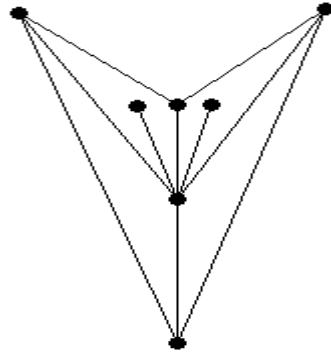
R lokaldır veya $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{F}$ veya $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Not 3.3.4. [14] R sonlu değişmeli halka olsun. O zaman $\Gamma_N(R)$ tam olması için gerek ve yeter şart $\Gamma_N(R) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.



Şekil 3.8. $\Gamma_N(R) \cong \Gamma_N(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$

Teorem 3.3.5. [14] $\forall (R_i, m_i)$ bir lokal halka ve \mathbb{F}_j bir cisim ve $m, n \geq 1$ olmak üzere $R \cong R_1 \times \dots \times R_n \times \mathbb{F}_1 \times \dots \times \mathbb{F}_m$ sonlu değişmeli birimli halka olsun. O zaman $\Gamma_N(R)$ planardır gerek ve yeter şart R , $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ veya $\mathbb{Z}_2[x]/[x^2] \times \mathbb{Z}_2$ halkalarına izomorftur.

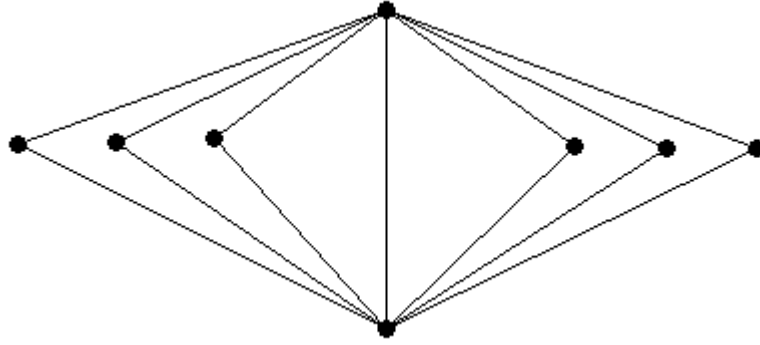


Şekil 3.9. $\Gamma_N(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2) \cong \Gamma_N(\mathbb{Z}_2[x]/[x^2] \times \mathbb{Z}_2)$

Örnek 3.3.6.



Şekil 3.10. $\Gamma_N(\mathbb{Z}_4) \cong \Gamma_N(\mathbb{Z}_2[x]/[x^2])$



Şekil 3.11. $\Gamma_N(\mathbb{Z}_9) \cong \Gamma_N(\mathbb{Z}_3[x]/[x^2])$

Sonuç 3.3.7. [15] $\forall \mathbb{F}_j$ bir cisim ve $m \geq 2$ olmak üzere $R \cong \mathbb{F}_1 \times \dots \times \mathbb{F}_m$ sonlu değişmeli birimli bir halka olsun. O zaman $\Gamma_N(R)$ planardır gerek ve yeter şart R aşığıdaki halkalardan birine izomorftur;

\mathbb{F} sonlu cisim olmak üzere; $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{F}$, $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{F}$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ veya $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$.

Sonuç 3.3.8. [14] $\forall \mathbb{F}_j$ bir cisim ve $m \geq 2$ olmak üzere $R \cong \mathbb{F}_1 \times \dots \times \mathbb{F}_m$ sonlu değişmeli birimli bir halka olsun. O zaman $gr(\Gamma_N(R)) = 1$ gerek ve yeter şart R aşığıdaki halkalardan birine izomorftur;

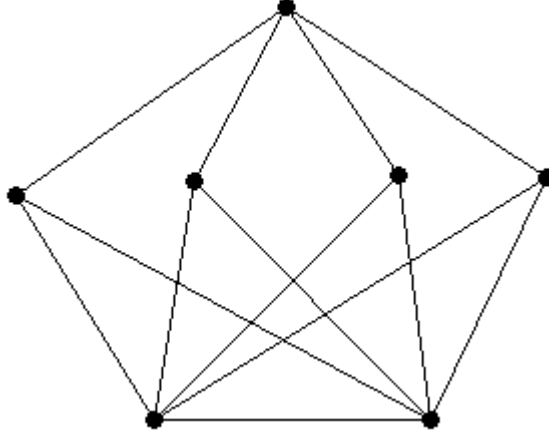
$\mathbb{F}_4 \times \mathbb{F}_4$, $\mathbb{F}_4 \times \mathbb{Z}_5$, $\mathbb{F}_4 \times \mathbb{Z}_7$, $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{F}_4$,
 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_7$ veya $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Teorem 3.3.9. [14] (R_i, m_i) bir lokal halka ve \mathbb{F}_j bir cisim ve $m, n \geq 1$ olmak üzere $R \cong R_1 \times \dots \times R_n \times \mathbb{F}_1 \times \dots \times \mathbb{F}_m$ sonlu değişmeli birimli halka olsun. O zaman $gr(\Gamma_N(R)) = 1$ gerek ve yeter şart R aşığıdaki halkalardan birine izomorftur;

$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_2[x]/[x^2] \times \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_2[x]/[x^2] \times \mathbb{F}_4$ veya $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{F}_4$.

Teorem 3.3.10. [13] R sonlu, değişmeli, birimli bir halka ve $\Gamma_N(R)$ bağlantılı olsun. O zaman $g(\Gamma_N(R)) = 1$ gerek ve yeter şart $R \cong \mathbb{Z}_8, \mathbb{Z}_2[x]/[x^3], \mathbb{Z}_4[x]/[2x, x^2 - 2], \mathbb{Z}_2[x, y]/(x, y)^2$ veya $\mathbb{Z}_4[x]/(2, x)^2$ halkalarından birine izomorftur.

Örnek 3.3.11.



Şekil 3.12. $\Gamma_N(\mathbb{Z}_8) \cong \Gamma_N(\mathbb{Z}_2[x]/[x^3]) \cong \Gamma_N(\mathbb{Z}_4[x]/[2x, x^2 - 2])$

Not 3.3.12. [12]

- i. Kabul edelim ki $R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ve S indirgenemez değişmeli halka olsun. Eğer $\Gamma_N(R) \cong \Gamma_N(S)$ ise o zaman Not 3.1.6.' dan $|S| = 3$. Dolayısıyla S üç mertebeli boş graftır.
- ii. Kabul edelim ki $R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ ve S indirgenemez değişmeli halka olsun. Eğer $\Gamma_N(R) \cong \Gamma_N(S)$ ise o zaman Not 3.1.5.' dan $|S| = 4$. $\Gamma_N(S)$ bir star graf olduğu için $S \cong \mathbb{Z}_4$ veya $S \cong \mathbb{Z}_2[x]/(x^2)$.

Teorem 3.3.13. [12] R sonlu indirgenmiş bir halka ve S tamlık bölgesi olmayan değişmeli bir halka olsun. Eğer $\Gamma_N(R) \cong \Gamma_N(S)$ ise o zaman $R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ve S 3 mertebeli boş bir halka veya $R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ ve S, \mathbb{Z}_4 veya $\mathbb{Z}_2[x]/(x^2)$ ' e izomorf olmadıkça $R \cong S$.

Teorem 3.3.14. [12] R ve S sonlu, indirgenemez, değişmeli halkalar olsun öyle ki $\Gamma_N(R) \cong \Gamma_N(S)$. O halde $|R| = |S|$ ve $|N(R)| = |N(S)|$.

Sonuç 3.3.15. [12] R ve S sonlu, indirgenemez, değişmeli halkalar asal mertebeli $N(R)$ olsun. O zaman $\Gamma_N(R) \cong \Gamma_N(S)$ gerek ve yeter şart $R \cong S$.

Sonuç 3.3.16. [12] R ve S sonlu, indirgenemez, değişmeli, esas ideal halkası olsun. O zaman $\Gamma_N(R) \cong \Gamma_N(S)$ gerek ve yeter şart $R \cong S$.



4.BÖLÜM

\mathbb{Z} HALKASI ÜZERİNDE NİLPOTENT GRAFLARIN SPEKTRAL KARAKTERİZASYONU

Bu bölümde halka üzerine tanımlanmış nilpotent grafların Laplasyan spektral incelemesi yapılmaktadır.

4.1. \mathbb{Z}_n Halkası Üzerine Nilpotent Grafların Laplasyan Spektral Özellikleri

$R = \mathbb{Z}_n$ halkası verildiğinde bilindiği üzere sıfırdan farklı nilpotent elemanları vardır gerek ve yeter şart n bazı asal sayıların kareleri ile bölünebilirdir. Gerçekten n asal veya $n = p_1 p_2 \dots p_t$ olduğu zaman \mathbb{Z}_n 'nin sıfırdan farklı hiçbir nilpotent elemanı yoktur. Ayrıca $n = p^m$, $m > 1$ olduğu zaman;

$$N(\mathbb{Z}_n) = \{\bar{0}, \bar{p}, 2\bar{p}, \dots, (p^{m-1} - 1)\bar{p}\} \quad (4.1)$$

ve $n = \prod_{i=1}^t p_i^{s_i}$, $t \geq 2$ olduğunda;

$$N(\mathbb{Z}_n) = \left\{ (\overline{p_1 p_2 \dots p_t}), 2(\overline{p_1 p_2 \dots p_t}), \dots, \left(\prod_{i=1}^t p_i^{s_i-1} - 1 \right) (\overline{p_1 p_2 \dots p_t}) \right\} \quad (4.2)$$

olduğu kolayca görülebilir.

Literatürde nilpotent graflar üzerinde çap, girth, vb. gibi graf parametrelerine bağlı çok az çalışma olmasına rağmen nilpotent grafların spektral özellikleri üzerine hiçbir çalışma yoktur. Bu bölümde her n için \mathbb{Z}_n halkası üzerindeki nilpotent graflar kullanılmakta ve bu halkanın Laplasyan spektral özellikleri anlatılmaktadır. Grafın Laplasyan öz değerlerinin hemen hemen hepsi tam olarak noktaların dereceleridir. Şüphesiz tam sayıdır.

Lemma 4.1.1. $n = p^m$ ve p asal sayı olmak üzere \mathbb{Z}_n tam sayı halkası olsun. O zaman $\Gamma_N(\mathbb{Z}_n)$ 'nin nokta kümesi;

$$V_N(\mathbb{Z}_{p^m})^* = \mathbb{Z}_{p^m}^*. \quad (4.3)$$

Dolayısıyla, $i \in N(\mathbb{Z}_{p^m}^*)$ için $d_i = p^m - 2$ ve $i \notin N(\mathbb{Z}_{p^m}^*)$ için $d_i = p^{m-1} - 1$ olur.

İspat. \bar{p} bir asal sayı öyle ki $\bar{p}^2 | n$ olduğunda $N(\mathbb{Z}_{p^m}) = \{\bar{0}, \bar{p}, 2\bar{p}, \dots, (p^{m-1} - 1)\bar{p}\}$ dir. $i \in \mathbb{Z}_{p^m}^*$ olsun. $\forall j \in N(\mathbb{Z}_{p^m}^*)$ için ij $\mathbb{Z}_{p^m}^*$ ' in nilpotent elemanı olduğundan $i \in V_N(\mathbb{Z}_{p^m})^*$ dir. Böylece $\mathbb{Z}_{p^m}^* \subset V_N(\mathbb{Z}_{p^m})^*$. Bir nilpotent grafın nokta kümesi tanımından $V_N(\mathbb{Z}_{p^m})^* \subset \mathbb{Z}_{p^m}^*$ olduğu açıktır. Böylece

$$V_N(\mathbb{Z}_{p^m})^* = \mathbb{Z}_{p^m}^*$$

elde edilir. Yukarıdaki aynı argümanlarla $i \in N(\mathbb{Z}_{p^m}^*)$ için $d_i = p^m - 2$ olduğunu görmek kolaydır. $i \notin N(\mathbb{Z}_{p^m}^*)$ için $d_i = p^{m-1} - 1$ olduğu gösterilmelidir. Şimdi $i \notin N(\mathbb{Z}_{p^m}^*)$ ve herhangi $j \in \mathbb{Z}_{p^m}^*$ olsun. Burada 2 durum söz konusudur.

Durum 4.1.2. $j \in N(\mathbb{Z}_{p^m}^*)$ olsun. Bu durumda $\forall j \in \mathbb{Z}_{p^m}^*$ için ij nilpotenttir ($i \sim j$). Dolayısıyla;

$$N_i = \{j: j \in N(\mathbb{Z}_{p^m}^*)\}$$

ve böylece

$$d_i = p^{m-1} - 1$$

dir.

Durum 4.1.3. $j \notin N(\mathbb{Z}_{p^m}^*)$ olsun.

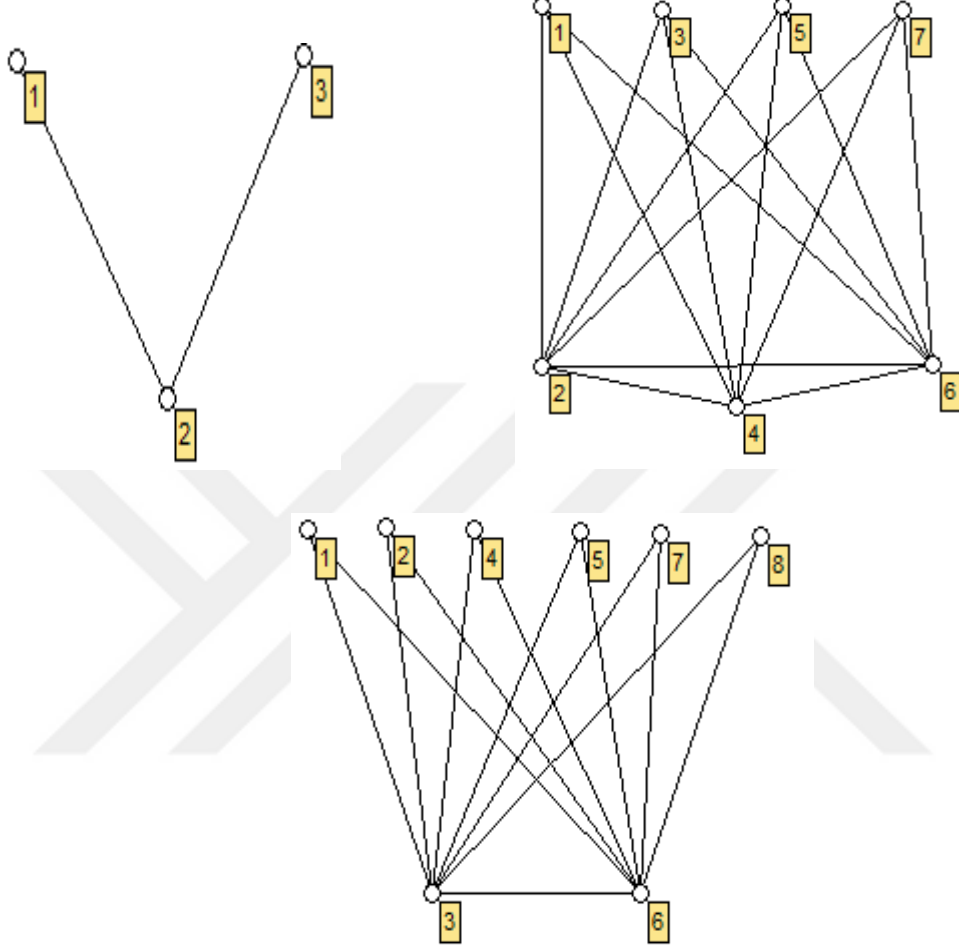
Kabul edelim ki $ij \in N(\mathbb{Z}_{p^m}^*)$. O halde, $1 \leq k \leq p^{m-1} - 1$ olduğunda $ij = pk$. Dolayısıyla $p|ij \Rightarrow p|i$ veya $p|j$ dir. Eğer $p|i$ ise o zaman $i \in N(\mathbb{Z}_{p^m}^*)$. Fakat $i \notin N(\mathbb{Z}_{p^m}^*)$ olması bir çelişkidir. Benzer şekilde eğer $p|j$ ise o zaman $j \notin N(\mathbb{Z}_{p^m}^*)$ de aynı çelişkiyi verir. Bu nedenle $i \not\sim j$ olmak üzere $ij \notin N(\mathbb{Z}_{p^m}^*)$ dir. Sonuç olarak;

$$N_i = \{k: k \in N(\mathbb{Z}_{p^m}^*)\}$$

Yani $\forall i \notin N(\mathbb{Z}_{p^m}^*)$ için;

$$d_i = p^{m-1} - 1 \tag{4.4}$$

Örnek 4.1.4. $\mathbb{Z}_2^2, \mathbb{Z}_2^3, \mathbb{Z}_3^2$ gibi \mathbb{Z}_n halkalarının dereceleri aşağıdaki şekillerde görülmektedir.



Şekil 4.1. $\Gamma_N(\mathbb{Z}_2^2)$, $\Gamma_N(\mathbb{Z}_2^3)$ ve $\Gamma_N(\mathbb{Z}_3^2)$

Açıklama 4.1.5. Lemma 4.1.1.' den, $\Gamma_N(\mathbb{Z}_p^m)$ 'in iki farklı derecesi olduğu görülmektedir. Öyle ki $\Delta = p^m - 2$ ve $\delta = p^{m-1} - 1$.

Teorem 4.1.6. p asal sayı ise $\Delta = p^m - 2$ ve $\delta = p^{m-1} - 1$ olduğu zaman;

$$S(\Gamma_N(\mathbb{Z}_p^m)) = (0, (\delta)^{(\Delta-\delta)}, (\Delta + 1)^\delta) \quad (4.5)$$

İspat. $L(\Gamma_N(\mathbb{Z}_p^m))$ için herhangi bir μ öz değerine karşılık gelen öz vektör $X = (x_1, \dots, x_{\bar{p}}, \dots, x_{2\bar{p}}, \dots, x_{p^{m-1}})^T$ olsun. Bilindiği üzere;

$$LX = \mu X \quad (4.6)$$

dir. Yani $i = \bar{1}, \dots, \bar{p}, \dots, \overline{p^m - 1}$ için;

$$\mu x_i = d_i x_i - \sum_{j: j \sim i} x_j \quad (4.7)$$

Şimdi $x_i = d_i$ vektörlerini düşünelim öyle ki $i \in N(\mathbb{Z}_p^*)$ ve diğer bütün $j \in \mathbb{Z}_p^*$ için $x_j = 1$ ve bundan dolayı $(p^{m-1} - 1)$ vektör elde edilir. Bu vektörler şöyledir;

$$(-1, \dots, -1, \underbrace{d_{\bar{p}}}_{(p)}, -1, \dots, -1)^T$$

$$(-1, \dots, -1, \underbrace{d_{\overline{2p}}}_{(2p)}, -1, \dots, -1)^T$$

⋮

$$(-1, \dots, -1, \underbrace{d_{\overline{p^{m-1}-1}}}_{(p^{m-1}-1)}, -1, \dots, -1)^T$$

Bu vektörler $L(\Gamma_N(\mathbb{Z}_p^*))$ 'nin $p^m - 1$ öz değerine karşılık gelen karakteristik öz vektörleridir ve her biri (4.7)'deki eşitliği sağlar. Çünkü yukarıdaki bütün vektörler lineer bağımsızdır. $(p^m - 1)$ özdeğerinin cebirsel çokluğu $(p^{m-1} - 1)$ 'dir. Açıklama 4.1.5.'den $\Delta - \delta + 1$, $\delta - 1$ çokluğu ile öz değer olduğu elde edilir.

Benzer şekilde, vektörleri $x_i = 1$ olarak düşünelim öyle ki $i \notin N(\mathbb{Z}_p^*)$ ve sadece bir $j, j \sim i$ için $x_j = -1$.

$$\sum_{j: j \neq i} 1 = p^m - p^{m-1} - 1$$

elde edilir.

Bundan dolayı $(p^m - p^{m-1} - 1)$ lineer bağımsız vektörler seçilir;

$$\left(1, 0, \dots, 0, \underbrace{-1}_{j}, 0, \dots, 0\right)^T, \dots, \left(0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i}, 0, \dots, 0, \underbrace{-1}_{j}, 0, \dots, 0\right)^T \quad (4.8)$$

Her bir vektör (4.7)'deki eşitliği sağlar ve bunlar sadece $L(\Gamma_N(\mathbb{Z}_p^*))$ 'in $(p^{m-1} - 1)$ öz değerine karşılık gelen karakteristik öz vektörleridir. Tekrar Açıklama 4.1.5.'den $\Delta + 1$, $\Delta - \delta + 1$ çokluğu ile öz değer olduğu elde edilir. Buna karşılık iyi bilinen

$e = (1,1, \dots, 1)$ vektörü 0 öz değerine karşılık gelen öz vektördür. Böylece teoremin sonucu elde edilir.

Lemma 4.1.7. [16] G , n noktalı bağlantılı bir graf olsun. O halde G grafi $0, \underbrace{r, \dots, r}_p, \underbrace{n, \dots, n}_q$ biçiminde üç farklı öz değere sahip olması için \Leftrightarrow

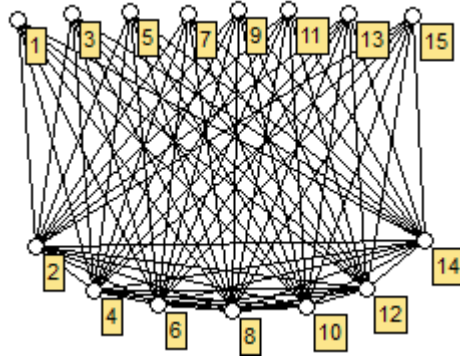
- i. $(n - r - 1) | p$,
- ii. $q + 1 \geq \frac{p}{n-r-1}$,
- iii. $G_1, \frac{p}{n-r-1}$ katsayısı ile $n - r$ izole nokta olmak üzere
 $G = K_{q+1} - \frac{p}{n-r-1} \vee G_1 \vee \dots \vee G_1.$

Açıklama 4.1.8. $\Gamma_N(\mathbb{Z}_p^m)$ grafi üç farklı öz değere sahiptir. Dolayısıyla Lemma 4.1.7.'den;

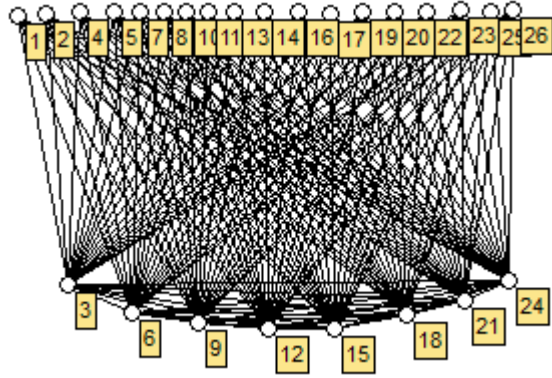
$$\Gamma_N(\mathbb{Z}_p^m) \cong CS(p^m - 1, p^{m-1} - 1)$$

elde edilir.

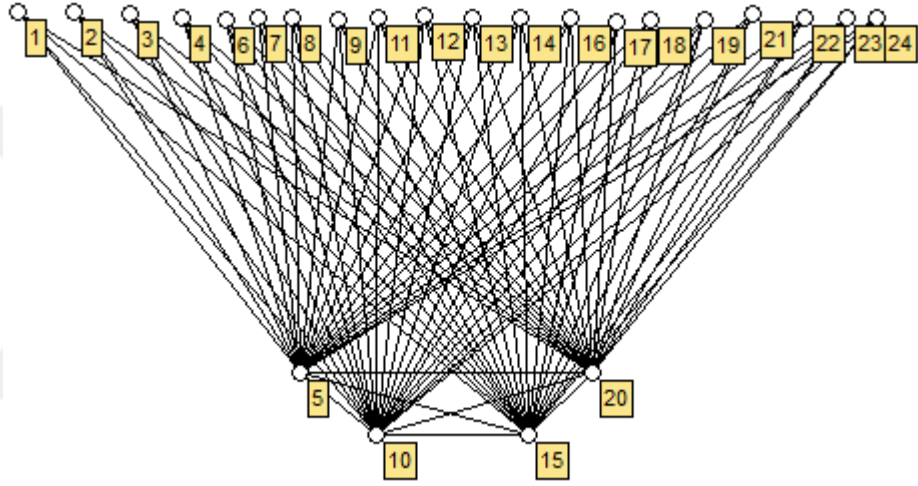
Örnek 4.1.9. $\mathbb{Z}_2^4, \mathbb{Z}_3^3, \mathbb{Z}_5^2, \mathbb{Z}_7^2$ halkalarının grafları ve öz değerleri aşağıda verilmektedir.



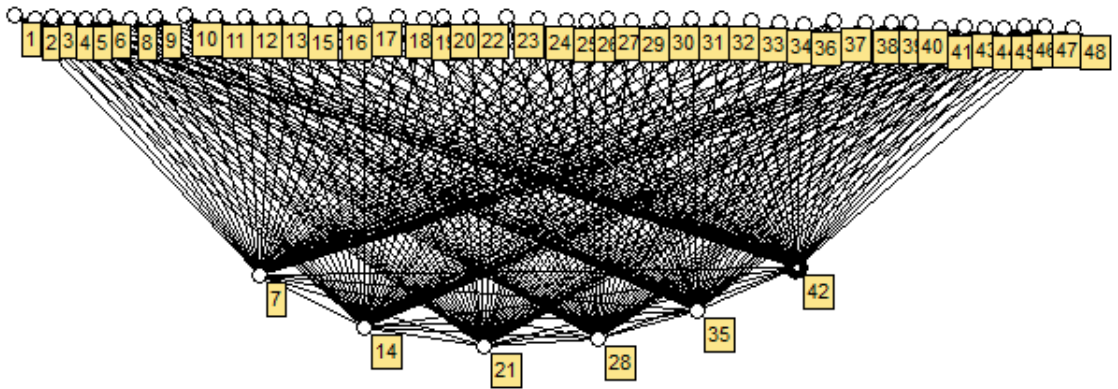
Şekil 4.2. $\Gamma_N(\mathbb{Z}_2^4) = \{0, 7^{(7)}, 15^{(7)}\}$



Şekil 4.3. $\Gamma_N(\mathbb{Z}_{3^3}) = \{0, 8^{(17)}, 26^{(8)}\}$



Şekil 4.4. $\Gamma_N(\mathbb{Z}_{5^2}) = \{0, 4^{(19)}, 24^{(4)}\}$



Şekil 4.5. $\Gamma_N(\mathbb{Z}_{7^2}) = \{0, 6^{(41)}, 48^{(6)}\}$

Lemma 4.1.10. $n = \prod_{i=1}^t p_i^{s_i}$, $t \geq 2$ olmak üzere $\Gamma_N(\mathbb{Z}_n)$ graf olsun.

- i. Eğer $\forall i$ için $s_i = 1$ ise o zaman;

$$V_N(\mathbb{Z}_n)^* = \bigcup_{i \in I} S_{p_i} \quad (4.9)$$

$$S_{p_i} = \{p_i k : 1 \leq k \leq \frac{n}{p_i} - 1\} \text{ ve } I = \{1, 2, \dots, t\}.$$

ii. Eğer en az bir i için $s_i \geq 2$ ise o zaman;

$$V_N(\mathbb{Z}_n)^* = \mathbb{Z}_n^* \quad (4.10)$$

İspat.

i. $\forall i$ için $s_i = 1$ olsun. Bu durumda \mathbb{Z}_n 'nin 0' dan farklı nilpotent elemanı yoktur.

Öyle ki; $N(\mathbb{Z}_n) = \{\bar{0}\}$. Şimdi $0 \neq x \in V_N(\mathbb{Z}_n)^*$ olsun. Nilpotent graf tanımından $\bar{x}\bar{y} = \bar{0}$ olacak biçimde $0 \neq \bar{y} \in \mathbb{Z}_n$ vardır. Yani;

$$\bar{x}\bar{y} | p_1 p_2 \dots p_t \implies \bar{x} | p_1 p_2 \dots p_t \wedge \bar{y} | p_1 p_2 \dots p_t \quad (4.11)$$

(4.11)'den $\bar{x} | p_i$ elde edilir ve bundan dolayı $V_N(\mathbb{Z}_n)^* \subset \bigcup_{i \in I} S_{p_i}$. Ayrıca $\bigcup_{i \in I} S_{p_i} \subset V_N(\mathbb{Z}_n)^*$ olduğu açıktır. Bu iki kapsamadan gerekli olan sonuca ulaşılır.

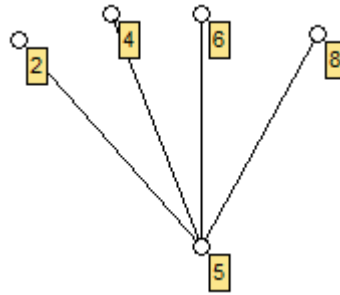
ii. En az bir i için $s_i \geq 2$ olsun. Bu durumda (4.2)'den;

$$N(\mathbb{Z}_n^*) = \{(\overline{p_1 p_2 \dots p_t}), 2(\overline{p_1 p_2 \dots p_t}), \dots, (p_1^{s_1-1} p_2^{s_2-1} \dots p_t^{s_t-1})(\overline{p_1 p_2 \dots p_t})\}$$

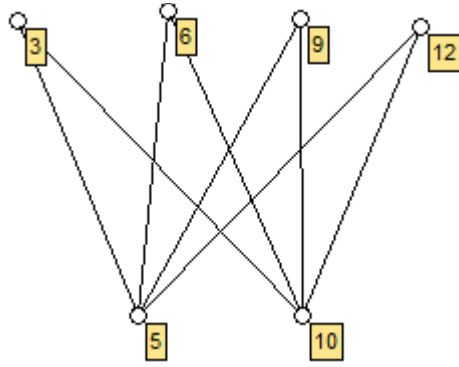
bilgisine sahibiz. Böylece \mathbb{Z}_n 'nin 0' dan farklı her sınıfı her nilpotent elemana komşudur. Böylece sonuç tamamlanır.

Açıklama 4.1.11. Lemma 4.1.10.(i)' de, $\Gamma_N(\mathbb{Z}_n)$ 'nin nokta sayısının $n - 1 - \varphi(n)$ olduğu kolayca görülmektedir. $\varphi(n)$ ise Euler' in phi(φ) fonksiyonudur. Özellikle p, q asalları için $\Gamma_N(\mathbb{Z}_{pq}) \cong K_{p-1, q-1}$ ve $\Gamma_N(\mathbb{Z}_p) \cong K_0$, K_0 boş grafır.

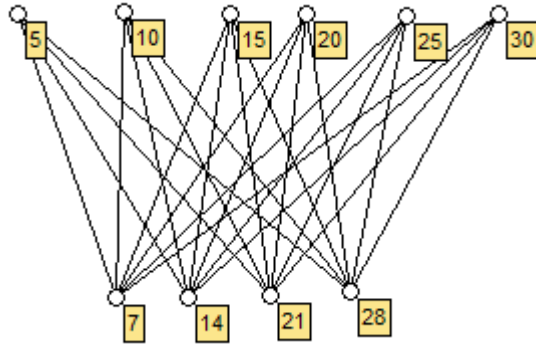
Örnek 4.1.12. $\Gamma_N(\mathbb{Z}_{pq})$ ' nin izomorfı;



Şekil 4.6. $\Gamma_N(\mathbb{Z}_{10}) \cong K_{1,4}$



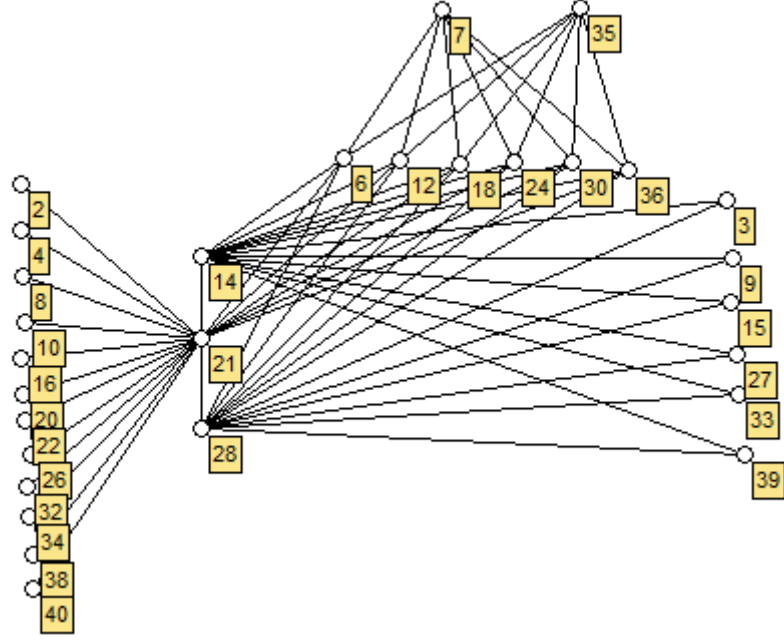
Şekil 4.7. $\Gamma_N(\mathbb{Z}_{15}) \cong K_{2,4}$



Şekil 4.8. $\Gamma_N(\mathbb{Z}_{35}) \cong K_{4,6}$

şekillerde açıkça görülmektedir.

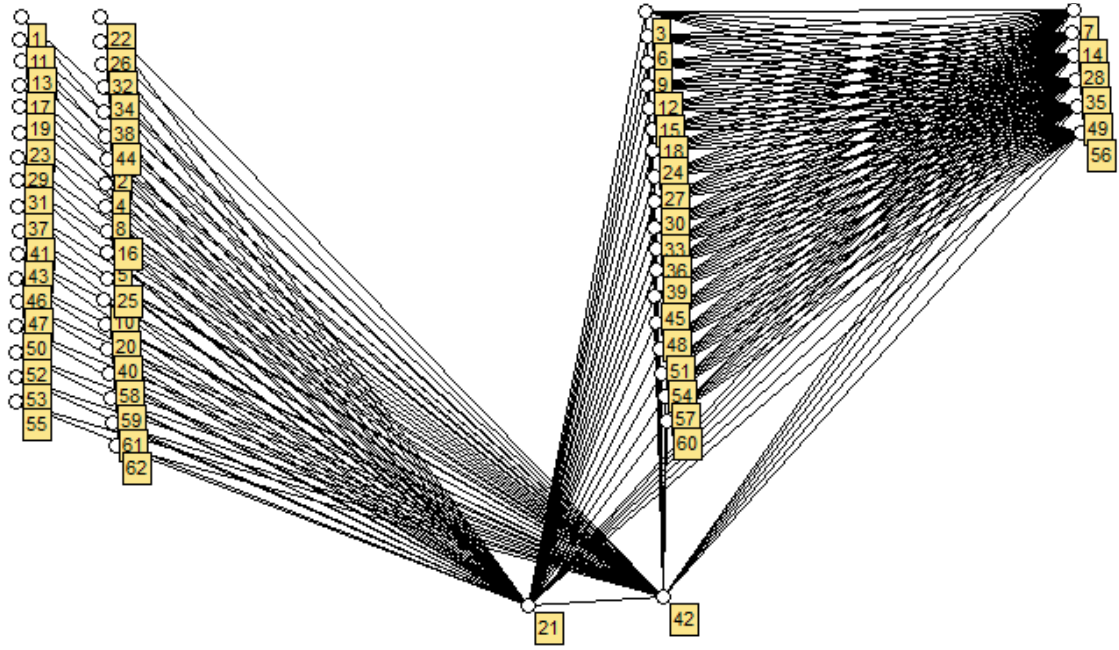
Örnek 4.1.13. \mathbb{Z}_{42} , \mathbb{Z}_{63} ve \mathbb{Z}_{60} halkalarının nilpotent grafları incelenirse;



Şekil 4.9. $\Gamma_N(\mathbb{Z}_{42})$

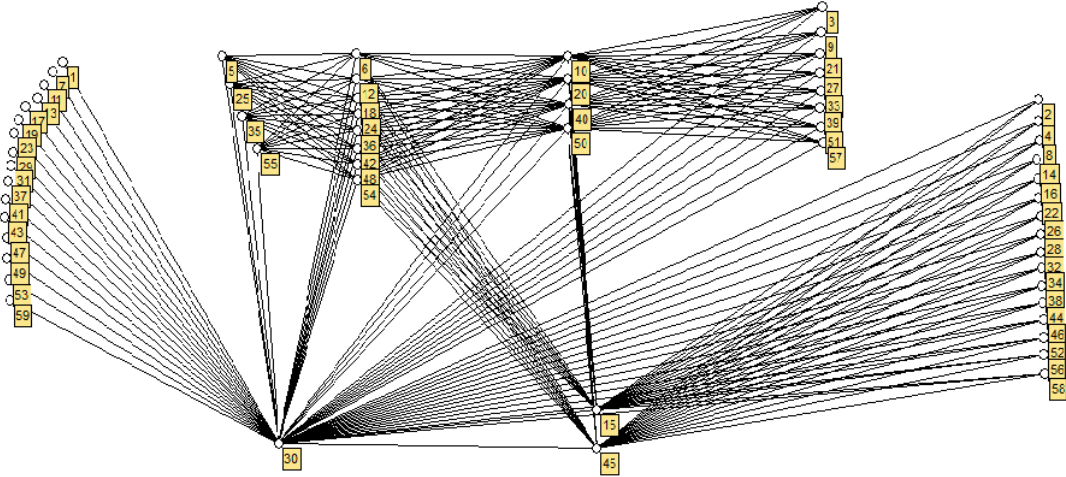
$n = 2 \cdot 3 \cdot 7$ ve $s_i = 1$ olduğuna göre Lemma 4.1.10.(i)'den $S_{p_i} = \{p_i k : 1 \leq k \leq \frac{n}{p_i} - 1\}$;

$$(V_N(\Gamma_N(\mathbb{Z}_{42}))^* = S_2 \cup S_3 \cup S_7) = \begin{cases} S_2 = \{2k : 1 \leq k \leq \frac{42}{2} - 1\} \\ S_3 = \{3k : 1 \leq k \leq \frac{42}{3} - 1\} \\ S_7 = \{7k : 1 \leq k \leq \frac{42}{7} - 1\} \end{cases}$$



Şekil 4.10. $\Gamma_N(\mathbb{Z}_{63})$

Lemma 4.1.10.(ii)'den $s_i \geq 2$ için; $n = 3^2 \cdot 7^1$ olduğundan $V_N(\Gamma_N(\mathbb{Z}_{63}))^* = \mathbb{Z}_{63}^*$.



Şekil 4.11. $\Gamma_N(\mathbb{Z}_{60})$

$s_i \geq 2$ için; $n = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1$ olduğundan $V_N(\Gamma_N(\mathbb{Z}_{60}))^* = \mathbb{Z}_{60}^*$.

Lemma 4.1.14. $n = \prod_{i=1}^t p_i^{s_i}$, $t \geq 2$ olmak üzere $\Gamma_N(\mathbb{Z}_n)$ grafi için;

- i. $\forall i \in N(\mathbb{Z}_n)$ için $d_i = n - 2$
- ii. Eğer $i \in V_N(\mathbb{Z}_n)^*$ için $\prod_{m=1}^r p_{l_m} | i$ öyle ki $1 \leq r \leq k$ için $l_1, \dots, l_r \in A$ ve $A = \{1, 2, \dots, k\}$ ise o zaman $\forall j \in A - \{l_1, \dots, l_r\}$ için $z = \prod_j p_j$ olduğunda;

$$N_i = \left\{ z, 2z, \dots, \left(\frac{n}{z} - 1 \right) z \right\} \quad (4.12)$$

Yani;

$$d_i = \frac{n}{z} - 1 \quad (4.13)$$

dir. Sırasıyla d_i ve N_i , i noktasının derecesi ve i 'nin komşuluk kümesidir.

iii. Eğer $\forall 1 \leq k \leq t$ için $(i, p_k) = 1$ ise o zaman;

$$N_i = N(\mathbb{Z}_n^*) = \left\{ (\overline{p_1 p_2 \dots p_t}), 2(\overline{p_1 p_2 \dots p_t}), \dots, \left(\prod_{i=1}^t p_i^{s_i-1} - 1 \right) (\overline{p_1 p_2 \dots p_t}) \right\} \quad (4.14)$$

Yani; sırasıyla d_i ve N_i , i noktasının derecesi ve i 'nin komşuluk kümesi olduğunda;

$$d_i = \prod_{i=1}^t p_i^{s_i-1} - 1 \quad (4.15)$$

İspat.

i. Lemma 4.1.1.'deki benzer metotla $\forall j \in V_N(\mathbb{Z}_n^*)$ için ij ayrıca \mathbb{Z}_n^* 'in nilpotent elemanıdır öyle ki $i \in N(\mathbb{Z}_n)$. O zaman $\forall j$ için $i \sim j$. Bir başka deyişle;

$$N_i = \{j : j \in \mathbb{Z}_n^*\} \quad (4.16)$$

ve

$$d_i = n - 2 \quad (4.17)$$

ii. Bahsedilen şartlar altında açıktır ki $i \sim z$.

iii. Eğer $(i, p_k) = 1$ ise herhangi bir $x \in \mathbb{Z}_n^*$ için $\Leftrightarrow x \in N(\mathbb{Z}_n^*)$. Bu gerçeklikten sonuç doğrudan elde edilir.

Teorem 4.1.15. $n = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \dots p_t^{s_t}$ için \mathbb{Z}_n bir halka olsun. O halde;

$$\Phi_{L(\Gamma_N(\mathbb{Z}_n))}(x) = x(x - d_q)^{\phi(n)} (x - (n - 2))^{\prod_{i=1}^t p_i^{s_i-1}-1} \alpha_1(x) \alpha_2(x) \dots \alpha_{t-1}(x) f(x) \quad (4.18)$$

Şöyle ki;

$$\alpha_1(x) = \prod_{k=1}^t (x - d_{p_k})^{W_{p_k}-1}$$

$$\alpha_2(x) = \prod_{k=1, k \neq l}^t (x - d_{p_k p_l})^{W_{p_k p_l}-1}$$

⋮

$$\alpha_{t-1}(x) = \prod_{k=1, k \neq l \neq \dots}^t (x - d_{p_k \dots p_{t-1}})^{W_{p_k \dots p_{t-1}} - 1}$$

$f(x)$ herhangi bir polinomdur öyle ki W_u , $\{v \in \mathbb{Z}_n^* : d_u = d_v\}$ kümesinin eleman sayısıdır; $1 \leq i \leq t$ için $(q, p_i) = 1$ ve ϕ , Euler'in Totient (fi) fonksiyonudur.

İspat. En az bir $s_i \geq 2$ de düşünelim. $L(\Gamma_N(\mathbb{Z}_{p^m}))$ için μ' ye karşılık gelen öz vektör X olsun. Öyle ki;

$$LX = \mu X$$

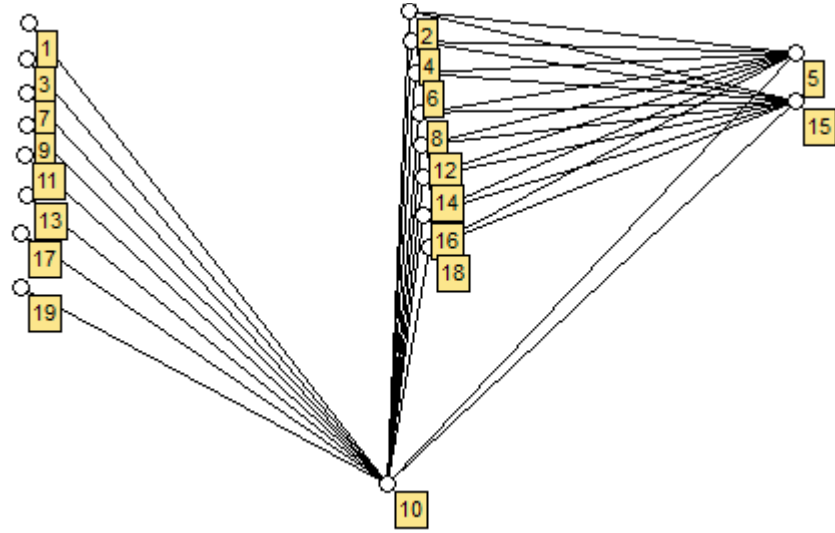
eşitliği vardır. Yani $i \in V_N(\mathbb{Z}_n)^*$ için;

$$\mu x_i = d_i x_i - \sum_{j: j \sim i} x_j \quad (4.19)$$

Lemma 4.1.14.'den i noktası için üç durum vardır. $i \in N(\mathbb{Z}_n)$ olsun. Bir $j \in N(\mathbb{Z}_n)$ için $x_i = -1$ ve $x_j = 1$ kabul edelim. Dolayısıyla $(p_1^{s_1-1} p_2^{s_2-1} \dots p_t^{s_t-1} - 1)$ vektörleri $d_i = n - 2$ öz değerine karşılık gelen karakteristik vektörlerdir (Lemma 4.1.14.(i)' den) ve (4.19)'daki eşitliği sağlar.

$(i, p_k) = 1, 1 \leq k \leq t$ olsun. O zaman Lemma 4.1.10.(iii)' den $d_i = p_1^{s_1-1} p_2^{s_2-1} \dots p_t^{s_t-1} - 1$ elde edilir. Benzer şekilde, bir $j \in V_N(\mathbb{Z}_n)^*$ için vektörleri $x_i = 1$ ve $x_j = -1$ olarak düşünersek öyle ki $d_i = d_j$ ve $(j, p_k) = 1, n = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \dots p_t^{s_t}$ olduğundan dolayı asallara bağlı olan $\phi(n)$ sınıfı vardır. Aynı metotlar yardımıyla diğer argümanlar gösterilebilir.

Örnek 4.1.16. \mathbb{Z}_{20} halkasının nilpotent grafi yardımıyla spektral incelemesi aşağıdaki gibidir.



Şekil 4.12. $\Gamma_N(\mathbb{Z}_{20})$

$\Gamma_N(\mathbb{Z}_{20})$ 'nin Laplasyan matrisi;

1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	
0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	-1	-1	-1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	-1	-1	-1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0	-1	-1	-1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	-1	-1	-1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	-1	-1	-1
0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	9	0	-1
0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	9	-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	18

Şekil 4.13 $L(\Gamma_N(\mathbb{Z}_{20}))$

Görüldüğü üzere köşegen üzerindeki elemanlar grafin noktalarının derecelerine eşittir. $\mathbb{Z}_{20} = \mathbb{Z}_{2^2 \cdot 5^1}$ halkasının nilpotent elemanının derecesi $d_{10} = n - 2 = 18$ ve

diğer çarpanlarının dereceleri $d_2 = \frac{n}{z} - 1 = \frac{20}{5} - 1 = 3$, $d_5 = \frac{n}{z} - 1 = \frac{20}{2} - 1 = 9$ ve kalan sınıfının dereceleri $d_{R_S} = |N(\mathbb{Z}_{20})| = 1$. Lemma 4.1.10.(i)' den $S_{p_i} = \{p_i k : 1 \leq k \leq \frac{n}{p_i} - 1\}$ kümesinin eleman sayıları spektrumların katlarını verir.

$$S(\Gamma_N(\mathbb{Z}_{20})) = \{0, 1^{(8)}, 3^{(7)}, 9^{(1)}, 11^{(1)}, 19^{(1)}\}.$$

Sonuç 4.1.17. $4 \leq n \leq 100$ için \mathbb{Z}_n indirgenmemiş halka olacak biçimde bütün nilpotent grafların laplasyan spektrumları belirlenmiştir. Hemen hemen bütün Laplasyan öz değerleri tam sayıdır.

Tablo 4.1. \mathbb{Z}_n halkası üzerindeki nilpotent grafların Laplasyan spektrumları

n	$\Gamma_N(\mathbb{Z}_n)$ 'nin Laplasyan Spektrumları
4	{0,1,3}
8	{0, 3 ⁽³⁾ , 7 ⁽³⁾ }
9	{0, 2 ⁽⁵⁾ , 8 ⁽²⁾ }
12	{0, 1 ⁽⁴⁾ , 5 ⁽¹⁾ , 7 ⁽¹⁾ , 11 ⁽¹⁾ }
16	{0, 7 ⁽⁷⁾ , 15 ⁽⁷⁾ }
18	{0, 2 ⁽⁶⁾ , 5 ⁽⁵⁾ , 8 ⁽²⁾ , 11 ⁽¹⁾ , 17 ⁽²⁾ }
20	{0, 1 ⁽⁸⁾ , 3 ⁽⁷⁾ , 9 ⁽¹⁾ , 11 ⁽¹⁾ , 19 ⁽¹⁾ }
24	{0, 3 ⁽⁸⁾ , 7 ⁽⁷⁾ , 11 ⁽³⁾ , 15 ⁽¹⁾ , 23 ⁽³⁾ }
25	{0, 4 ⁽¹⁹⁾ , 24 ⁽⁴⁾ }
27	{0, 8 ⁽¹⁷⁾ , 26 ⁽⁸⁾ }
28	{0, 1 ⁽¹²⁾ , 3 ⁽¹¹⁾ , 13 ⁽¹⁾ , 15 ⁽¹⁾ , 27 ⁽¹⁾ }
32	{0, 15 ⁽¹⁵⁾ , 31 ⁽¹⁵⁾ }
36	{0, 5 ⁽¹²⁾ , 11 ⁽¹¹⁾ , 17 ⁽⁵⁾ , 15 ⁽¹⁾ , 23 ⁽¹⁾ , 35 ⁽⁵⁾ }
40	{0, 3 ⁽¹⁶⁾ , 7 ⁽¹⁵⁾ , 19 ⁽³⁾ , 23 ⁽¹⁾ , 39 ⁽³⁾ }
44	{0, 1 ⁽²⁰⁾ , 3 ⁽¹⁹⁾ , 21 ⁽¹⁾ , 23 ⁽¹⁾ , 43 ⁽¹⁾ }
45	{0, 2 ⁽²⁴⁾ , 8 ⁽¹¹⁾ , 14 ⁽⁵⁾ , 20 ⁽¹⁾ , 44 ⁽²⁾ }
48	{0, 7 ⁽¹⁶⁾ , 15 ⁽¹⁵⁾ , 23 ⁽⁷⁾ , 31 ⁽¹⁾ , 47 ⁽⁷⁾ }
49	{0, 6 ⁽⁴¹⁾ , 48 ⁽⁶⁾ }
50	{0, 4 ⁽²⁰⁾ , 9 ⁽¹⁹⁾ , 24 ⁽⁴⁾ , 29 ⁽¹⁾ , 49 ⁽⁴⁾ }

54	$\{0, 8^{(18)}, 17^{(17)}, 26^{(8)}, 35^{(1)}, 53^{(8)}\}$
56	$\{0, 3^{(24)}, 7^{(23)}, 27^{(3)}, 31^{(1)}, 55^{(3)}\}$
60	$\{0, 1^{(16)}, 2.29, 3^{(15)}, 4.44, 5^{(7)}, 9^{(3)}, 11^{(7)}, 13.30, 19^{(3)}, 23.69, 29^{(1)}, 31.26, 59^{(1)}\}$
63	$\{0, 2^{(36)}, 8^{(17)}, 20^{(5)}, 26^{(1)}, 62^{(2)}\}$
72	$\{0, 11^{(24)}, 23^{(23)}, 35^{(11)}, 47^{(1)}, 71^{(11)}\}$
75	$\{0, 4^{(40)}, 14^{(19)}, 24^{(9)}, 34^{(1)}, 74^{(4)}\}$
80	$\{0, 7^{(31)}, 15^{(31)}, 39^{(7)}, 47^{(1)}, 78^{(7)}\}$
81	$\{0, 25^{(55)}, 80^{(24)}\}$
88	$\{0, 3^{(37)}, 7^{(39)}, 43^{(3)}, 47^{(1)}, 87^{(3)}\}$
90	$\{0, 2^{(24)}, 3.94, 5^{(23)}, 7.16, 8^{(11)}, 14^{(5)}, 17^{(11)}, 20.45, 29^{(5)}, 36.04, 44^{(2)}, 47.39, 89^{(2)}\}$
98	$\{0, 6^{(42)}, 13^{(41)}, 48^{(6)}, 55^{(1)}, 97^{(6)}\}$
99	$\{0, 2^{(60)}, 8^{(29)}, 32^{(5)}, 38^{(1)}, 98^{(2)}\}$
100	$\{0, 9^{(40)}, 19^{(39)}, 49^{(9)}, 59^{(1)}, 99^{(9)}\}$

5. BÖLÜM

SONUÇ VE ÖNERİLER

Günümüzde bilim ve teknoloji dünyası için spektral graf teori, graflara ilişkin matrislerin spektral özellikleri ile graf yapısı arasındaki ilişkileri incelemeye ve anlamlandırmaya çalışan bir öneme sahiptir. Özellikle halka ve grup gibi cebirsel yapılarla inşa edilen grafların spektrası oldukça ilgi çekici sonuçlar verebilir. Bu tez çalışmasında tam sayılar halkası üzerinde inşa edilen nilpotent grafların Laplasyan matrisleri üzerine inceleme yapılmıştır. Laplasyan matris alındığında ilginç sonuçlar elde edildi. Eğer tam sayılar halkası asal sayıların kuvvetleri şeklinde alınırsa nilpotent graflar tam bölünmüş (CS) graftır. Nilpotent elemanları asalların katları şeklindedir. Laplasyan spektrumları sıfırdan büyüktür. Bu şekilde alınan halkaların nilpotent grafları üç farklı katlı öz değere sahiptir. Öz değerleri ve katları ise noktaların derecelerine bağlı olarak yazılmaktadır. Eğer tam sayılar halkası asal sayıların kuvvetlerinin çarpımları şeklinde alınırsa nilpotent graflar çok parçalı graf olur. Nilpotent elemanları asalların çarpımlarının katlarıdır. Öz değerlerinin hemen hemen hepsi tam sayı olmaktadır. Öz değerlerinin katları ise asalların ve aralarında asal olanların oluşturduğu noktalar kümesinin derecelerine bağlıdır. Asalların derecelerine bağlı olarak Laplasyan karakteristik polinomu yazılmaktadır.

Bu tezde yapılan metotlarla farklı halka ve graf yapılarının Laplasyan spektral incelemelerinin vereceği sonuçlar araştırılmaya değer ilgi çekici bir problemdir.

Nilpotent grafların spektrası üzerine çok fazla Türkçe çalışma olmaması sebebiyle bu tez ülkemizde Türkçe kaynak olarak kullanılması açısından önem arz etmektedir. Bu tezde verilen temel tanım, kavram ve teoremler birçok graf ve cebir kitaplarında bulunmasına karşılık lisans ve lisansüstü öğrencilerin yararlanması amacıyla bilimsel disiplin gözetilerek verilmiştir. Genel olarak konu ile ilgili yeni ve açık problemlerin ispatlanabilmesi oldukça zor olmasına karşın imkansız değildir.

KAYNAKLAR

1. Taşçı, D., "Soyut Cebir", *Öziş Matbaacılık*, Ankara, 2010.
2. Taşçı, D., "Lineer Cebir", *Öziş Matbaacılık*, Ankara, 2011.
3. Grove, L.C., Algebra, Dover Publish, 2004.
4. Beidar, K. I., Martindale III, W. S. ve Mikhalev, V., , "Rings with Generalized Identities", *Pure Appl. Math.*, Dekker, New York, s.419, 1996.
5. Atiyah, M. F., Macdonald, I.G., "Introduction to commutative algebra", *Adisson Wesley Publish*, London, 1969.
6. Birgin, K., "Yönlü ve Yönsüz Grafların Enerjisi", *Nevşehir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi*, s.3-10, Nevşehir, 2014
7. Topcu, H., "Graf İzomorfizmi ve Ko-Spektral Graflar", *Nevşehir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi*, s.8-37, Nevşehir, 2016
8. Pena, I, Rada, J., "Energy of digraphs", *Linear and Multilinear Algebra*, 56, 565–579, 2008.
9. Anderson, D.F., Livingston, P.S., "The Zero-Divisor Graph of a Commutative Ring", *Journal of Algebra* 217, s.434-447, 1999.
10. Knauer, U., "Algebraic graph theory, De Gruyter", Berlin, 2011.
11. Akiyama, J., Egawa, Y., Enomot, H., "Graph theory and application", Northern Ireland, 1988.
12. Li, A.H., Li, Q.S., "A Kind of Graph Structure on Von-Neumann Regular Rings", *International Journal of Algebra*, vol.4, s.291-302, 2010.
13. Kala, R., Kavitha, S., "A Typical Graph Structure of a Ring", *Transactions on Combinatorics*, s.37-44, 2015.
14. Kavitha, S., "nilpotent graph of commutative ring", thesis, chapter3, s.40-55 <http://shodhganga.inflibnet.ac.in>
15. Nikmehr, M.J., Khojasteh, S., "On the Nilpotent Graph of a Ring", *Turkish Journal of Mathematics*, s.553-559, (37) 2013.
16. Kirkland, S.J., "Completion of Laplacian Integral Graphs Via Edge Additions", *Discrete Math*, s.75-90, (295) 2005.
17. Chen, P.W., "A Kind of Graph Structure of Rings", *Algebra Colloq.*, s.229-238, (10:2) 2003

18. Cvetkovic, D., Rowlinson, P., Simic, S., "An Introduction to the Theory of Graph Spectra" Cambridge University Press, 2010.
19. allıalp, F., "Örneklerle Soyut Cebir", *Birsen Yayınevi*, İstanbul, 2001.
20. Lipschutz, S., "Lineer Cebir", H. Hilmi Hacısalihoğlu, *Nobel yayın dağıtım*, Ankara, 1991



ÖZGEÇMİŞ

Hatice Pınar CANTEKİN 1992 yılında Antalya' da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Antalya' da tamamladı. 2012' de başladığı Anadolu Üniversitesi Açıköğretim Fakültesi ön lisans İlahiyat Bölümünden 2014 yılında mezun oldu. 2010' da kazandığı Nevşehir Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2014 yılında mezun oldu. Aynı yıl içerisinde Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalında Yüksek Lisansa başladı. 2017 yılında yüksek lisansını tamamladı.

Adres: Varsak Karşıyaka Mah. 1204 Sok. No:17/1 KEPEZ/ANTALYA

Telefon: 05065024592

E-mail: pinarcantekin007@gmail.com