T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

II. MERTEBEDEN BAZI FARK DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİNİN DAVRANIŞLARININ İNCELENMESİ

Tezi Hazırlayan
Ahmet DEĞİRMENCİ

Tez Danışmanı
Doç. Dr. Yasin YAZLIK

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Temmuz 2019
NEVŞEHİR

T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

II. MERTEBEDEN BAZI FARK DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİNİN DAVRANIŞLARININ İNCELENMESİ

Tezi Hazırlayan
Ahmet DEĞİRMENCİ

Tez Danışmanı
Doç. Dr. Yasin YAZLIK

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Temmuz 2019
NEVŞEHİR

Doç. Dr. Yasin YAZLIK danışmanlığında Ahmet DEĞİRMENCİ tarafından hazırlanan **"II. Mertebeden Bazı Fark Denklemlerinin Çözümlerinin Davranışlarının İncelenmesi"** başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

07 / 08 / 2019

JÜRİ

Başkan : Doç. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ

Üye : Doç. Dr. Yasin YAZLIK

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Durhasan Turgut TOLLU

ONAY:

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun 16.08.2019 tarih ve 49-481 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

16 / 08 / 2019

Prof. Dr. Şahlan ÖZTÜRK

Enstitü Müdürü V.

TEZ BİLDİRİM SAYFASI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada yer alan bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu ve bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Ahmet DEĞİRMENCİ

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim ve tez çalışmam süresince bana sabırla yol gösteren, büyük bir titizlikle fikir ve düşüncelerini benimle paylaşmaktan kaçınmayan, her aşamada desteğini esirgemeyen, kıymetli zamanını bana ayıran ve tezimde büyük emeği olan Saygıdeğer Hocam Doç. Dr. Yasin YAZLIK' a,

Çalışmalarım esnasında maddi ve manevi olarak desteklerini hissettiren değerli eşim Burcu DEĞİRMENCİ ve çok kıymetli kızım Ceren'e teşekkür ederim.

II. MERTEBEDEN BAZI FARK DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİNİN DAVRANIŞLARININ İNCELENMESİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Ahmet DEĞİRMENCİ

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Temmuz 2019

ÖZET

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde giriş, amaç-kapsam ve literatür taraması verilmiştir.

İkinci bölümde, fark denklemleri ile ilgili genel tanımlar ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde, $A, p, r \in (0, \infty)$ ve $x_{-1},\ x_0 \in (0, \infty)$ olmak üzere $x_{n+1} = A + \frac{x_n^p}{x_{n-1}^r}$, $n \in \mathbb{N}_0$, fark denkleminin pozitif çözümlerin sınırlılık karakteri incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, $A, p, r \in (0, \infty)$ ve $x_{-1},\ x_0 \in (0, \infty)$ olmak üzere $x_{n+1} = A + \frac{x_{n-1}^p}{x_n^q}$, $n \in \mathbb{N}_0$, fark denkleminin pozitif çözümlerinin sınırlılığı, dirençliliği, çekimliliği ve kararlılığı incelenmiştir. Dahası bu denklemin asal 2-periyotlu çözümlerin varlığı da incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: ***Fark denklemi, sınırlılık, kararlılık, periyodiklik.***

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Yasin YAZLIK

Sayfa sayısı: 47

THE INVESTIGATION OF THE BEHAVIORS OF SOLUTIONS OF SOME SECOND-ORDER DIFFERENCE EQUATIONS

(M. Sc. Thesis)

Ahmet DEĞİRMENCİ

NEVŞEHIR HACI BEKTAŞ VELI UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

July 2019

ABSTRACT

This thesis consists of four chapters.

In the first part, introduction, aim-scope and literature review are given.

In the second part, the general definitions and theorems related to difference equations are given.

In the third section, the boundedness character of positive solutions of difference equation $x_{n+1} = A + \frac{x_n^p}{x_{n-1}^r}$, $n \in \mathbb{N}_0$, where $A, p, r \in (0, \infty)$ and x_{-1}, $x_0 \in (0, \infty)$, is investigated.

In the fourth chapter, the boundedness, the persistence, the attractivity and the stabilitiy of the positive solutions of the nonlinear difference equation $x_{n+1} = A + \frac{x_{n-1}^p}{x_n^q}$, $n \in \mathbb{N}_0$, where $A, p, q \in (0, \infty)$ and x_{-1}, $x_0 \in (0, \infty)$, are examined. Moreover the existence of a prime two periodic solution of this equation is studied.

Keyword:* *Difference equation, boundedness, stability, periodicity.

Thesis Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Yasin YAZLIK

Pages: 47

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{N}$	:	Sayma sayılar kümesi
$\mathbb{N}_0$	:	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	:	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	:	Pozitif reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar kümesi
$=$	:	Eşittir
$\neq$	:	Eşit değildir
$\leq$	:	Küçük veya eşittir
$\geq$	:	Büyük veya eşittir
$\in$	:	Elemanıdır
ln	:	Logaritma fonksiyonu
E	:	Öteleme operatörü
$\overline{x}$	:	Denge noktası

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Doğada canlı ya da cansız her zerre zamanın içerisinde bir döngü halinde, kusursuz işleyen bu mükemmel döngünün planlayıcısı muhakkak ki belirli kurallar ve ölçüler koymuştur. İnsanoğlu bu döngüde yaşadığı çevreyi tanımak, yaşanan olayları anlamak, kendisini ve doğayı korumak için en ilkel çağlardan beri matematiği hep bir araç olarak kullanmıştır. Doğasında merak etme arzusu olan insan, bilmek ve öğrenmek için geçmişten günümüze kadar fen bilimleri, mühendislik bilimi ve sosyal bilimleri gibi birçok alanda matematik bilimini yardımcı bilim olarak kullanmıştır.

Matematik biliminin, uygulamalı matematik alanının önemli konularından biri olan diferansiyel denklemler ve fark denklemlerinin araştırılmasında zamanla yoğun bir ilgi oluşmuştur. Dinamik sistemlerin iki ana çeşidi olan diferansiyel denklemler ile fark denklemleri çok büyük benzerlik göstermekle birlikte ayrıştığı durumlar da vardır. x bağımsız değişkeninin sürekli olduğu durumlarda $y(x)$ bağımlı değişkenin değişimi $y'(x)$, $y''(x)$, $y'''(x)$ ... türevleri yardımıyla açıklanabilir. Ancak x’ in sürekli olmadığı kesikli değerler olması durumunda değişim, türevler yardımı ile açıklanamaz. Bundan dolayı x’ in tam sayı değerleri aldığı durumlarda ortaya çıkan ve içinde sonlu farkların bulunduğu fark denklemleri üzerinde durulmuştur [19]. Diferansiyel denklemlerde karşılaşılan süreksizlik durumlarını, fark denklemleri ile kaldırmak mümkündür [21]. Fark denklemleri, diferansiyel denklemlerden daha sonra ortaya atılmıştır. Fark denklemleri mühendislik, fizik, kimya, biyoloji, ekonomi, genetik ve popülasyon dinamiği gibi bir çok uygulama alanında kullanılmaktadır. Bu da fark denklemlerine olan ilgiyi son zamanlarda artırmış ve fark denklemlerini ilgi odağı haline getirmiştir. Bunlardan bir kaçına değinecek olursak örneğin;

Fibonacci ismiyle de anılan İtalyan matematikçi Leonardo da Pisa, 1202 yılında yazdığı “Liber Abaci” adlı kitabında, biyolojide ilk matematiksel model olan *tavşan nüfus artış modelini* ortaya koymuştur. Bu problemin ifadesi şu şekilde ifade edilebilir; bir çift olgun tavşan her ayın sonunda bir çift yavrulamakta ve bu yavrular iki ayda olgunlaşmakta ve hiçbir tavşanın ölmediği var sayılmaktadır. Bu var sayımın altında bir çift olgun tavşan ile başlanacak olursa oluşacak tavşan nüfusu, başlangıç koşulları $x_0 = 1$ ve $x_1 = 1$ olmak üzere denklemi;

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n , \qquad n \in \mathbb{N}_0,$$

şeklinde olup, bu denklem *tavşan problemi* olarakta bilinmektedir [26].

Malthus Popülasyon Modeli; Malthus' tan beri popülasyon dinamikleri kapsamlı bir şekilde incelenmektedir. Çalışmaların amacı, temel ve önemli yaşam olaylarını (doğum, olgunlaşma, çoğalma ve ölüm) takip eden bir grup canlının zaman içindeki evrimlerini incelemektir. Bu canlı grubu, bakteriler, hayvanlar ya da insanlar olabilir. Kolaylık olması için, popülasyon modellerinde genellikle nüfusun sadece dişi kısmı göz önüne alınır. n anında, bir popülasyondaki dişi sayısı y_n olsun. En basit popülasyon modeli, *Malthus modeli*, y_0 başlangıç koşulu ile beraber aşağıdaki gibi

$$y_{n+1} = r.y_n , \quad r > 0 , \; n \in \mathbb{N}_0,$$

tanımlanır. Burada r parametresi, popülasyonda ki doğum ve ölüm oranları arasındaki fark olup büyüme oranı olarak adlandırılır. Denklemin çözümü

$$y_n = r^n y_0 , \; n \in \mathbb{N}_0,$$

şeklindedir. Eğer $|r| < 1$ ise, $n \to \infty$ için $y_n \to 0$ olur, yani popülasyon eninde sonunda yok olur. $|r| > 1$ ise de, $n \to \infty$ için $y_n \to \infty$ olur ki bu da doğada ki kaynaklar sınırlı olduğundan mümkün değildir [23].

Lojistik Büyüme Modeli; Robert May, 1976 yılında Nature dergisinde yayınlanan *Simple mathematical models with very complicated Dynamics* adlı makalesinde birinci mertebeden bir fark denklemi ile tanımlanan biyolojik modellerin dinamiğini incelemiştir. Lojistik denklem (*Verhulst modeli, lojistik büyüme modeli*) aşağıdaki şekilde tanımlanır;

$$y_{n+1} = ry_n \left(1 - \frac{y_n}{K}\right),$$

burada K sayısı ortamın taşıma kapasitesi olarak adlandırılır. Popülasyon büyüklüğü bu kapasiteye yaklaşmaya başladığında popülasyon küçülmeye başlar. Denklemin her iki tarafı K taşıma kapasitesine bölünürse

$$\frac{y_{n+1}}{K} = \frac{ry_n}{K} \left(1 - \frac{y_n}{K}\right),$$

şeklinde bir denkleme dönüşür ve $x_n = \frac{y_n}{K}$, $n \in \mathbb{N}_0$, değişken değiştirmesi yapılırsa

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n),$$

ifadesi elde edilir. $\forall n \in \mathbb{N}_0$ için, $0 < x_n < 1$ durumunda popülasyonun varlığını devam ettireceği, $x_n = 0$ olması durumunda popülasyonun yok olacağı ve $x_n = 1$ olması durumunda da popülasyonun taşıma kapasitesine ulaştığı için bir sonraki zaman diliminde yine yok olacağı anlamına gelir [23].

Yukarıda verilen birkaç matematiksel modellerden de anlaşılacağı üzere günümüzde de fark denklemler konusu araştırmaya açıktır ve ilgi çekici olma özelliğini hala korumaktadır.

1.1. Amaç ve Kapsam

Bu çalışmanın temel amacı Stević S.' nin "On the Recursive Sequence $x_{n+1} = A + x_n^p / x_{n-1}^r$" isimli çalışmasında ki, $x_{n+1} = A + x_n^p / x_{n-1}^r$, $n \in \mathbb{N}_0$, fark denklemi ile Schinas ve arkadaşlarının "On the Recursive Sequence $x_{n+1} = A + x_{n-1}^p / x_n^q$" isimli çalışmalarında ki, $x_{n+1} = A + x_{n-1}^p / x_n^q$, $n \in \mathbb{N}_0$, fark denkleminin pozitif çözümlerinin davranışlarını ayrıntılı bir şekilde incelemektir.

1.2. Literatür Taraması

Bu kısımda rasyonel fark denklemlerinin çözülebilirliği, uygulamaları ve özel halleri için yapılmış olan bazı çalışmalardan bahsedilmiştir.

DeVault ve Ark. (1998) "*On the recursive sequence* $x_{n+1} = A/x_n + 1/x_{n-2}$" isimli çalışmalarında, *A* ve başlangıç koşulları pozitif sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{A}{x_n} + \frac{1}{x_{n-2}} \ , \ \ n \in \mathbb{N}_0 \, , \tag{1.2.1}$$

fark denkleminin bütün pozitif çözümlerinin iki periyotlu periyodik bir çözüme yakınsadığını ve

$x_{n+1} = \frac{A}{x_n} + \frac{x_n}{x_{n-1}}$, $n \in \mathbb{N}_0$, fark denkleminin A, x_{-1}, $x_0 \in (0,\infty)$ için tek denge noktası olan $\bar{x} = A + 1$' in global asimptotik kararlı olduğunu göstermişlerdir [6].

Amleh ve Ark. (1999) "*On the recursive sequence* $x_{n+1} = \alpha + x_{n-1}/x_n$" isimli çalışmalarında α pozitif bir reel sayı ve başlangıç koşulları x_{-1}, x_0 keyfi pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-1}}{x_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{1.2.2}$$

fark denkleminin pozitif çözümlerinin α'nın durumlarına göre global asimptotik kararlılığını, sınırlılığını ve periyodikliğini incelemişlerdir. Bu çalışmada $0 < \alpha < 1$ durumunda Denklem (1.2.2)' nin sınırsız pozitif çözümlere sahip olduğunu, $\alpha = 1$ durumunda Denklem (1.2.2)' nin her pozitif çözümünün iki periyodik bir çözüme yakınsadığını ve $\alpha > 1$ durumunda ise Denklem (1.2.2)' nin, $\bar{x} = 1 + A$ denge noktasında global asimptotik kararlı olduğunu göstermişlerdir [7].

Feuer (2003) "*Periodic solutions of the Lyness max equation*" isimli çalışmasında Denklem (1.2.2)'de verilen fark denkleminde özellikle $0 < \alpha < 1$ durumuna yoğunlaşmış ve bu durum için pozitif çözümlerin denge noktası civarındaki davranışlarını incelemiştir. Ayrıca α' nın diğer durumları içinde alternatif ispatlar vermiştir [8].

Stević (2003) *"On the recursive sequence* $x_{n+1} = \alpha_n + x_{n-1}/x_n$" isimli çalışmasında α_n negatif olmayan α pozitif sayısına yakınsayan bir dizi, başlangıç koşulları keyfi pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \alpha_n + \frac{x_{n-1}}{x_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{1.2.3}$$

fark denkleminin pozitif çözümlerinin sınırlılığını, global kararlılığını ve periyodikliğini incelemiştir [11].

Stević (2003) "*Asymptotic behaviour of a nonlinear difference equation*" isimli bir diğer çalışmasında α_n negatif olmayan periyodik bir dizi, başlangıç koşulları pozitif reel sayılar olmak üzere Denklem (1.2.3)'te verilen fark denkleminin pozitif çözümlerinin sınırlılık karakterini, salınımlılığını ve periyodikliğini incelemiştir [12].

El-Owaidy ve Ark. (2003) "*On the asymptotic behavior of the difference equation* $x_{n+1} = \alpha + x_{n-1}^p / x_n^p$" isimli çalışmalarında α pozitif bir reel sayı, $p \in [1, \infty)$ ve başlangıç koşulları x_{-1} , x_0 keyfi pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-1}^p}{x_n^p}, \quad n \in \mathbb{N}_0 , \tag{1.2.4}$$

fark denkleminin pozitif çözümlerinin lokal kararlılığını, salınımlılığını ve sınırlılık karakterini araştırmışlardır [13].

Stević (2005) "*On the recursive sequence* $x_{n+1} = \alpha + x_{n-1}^p / x_n^p$" isimli çalışmasında, **El-Owaidy ve Ark. (2003)** yılında yaptığı çalışmayı daha da geliştirmiştir. Bu yaptığı çalışmada α pozitif bir reel sayı, $p \in (0,1)$ ve başlangıç koşulları x_{-1} , x_0 keyfi pozitif reel sayılar olmak üzere Denklem (1.2.4)'te verilen fark denkleminin pozitif çözümlerinin sınırlılığını, global çekiciliğini, salınımlılığını ve periyodikliğini incelemiştir [14].

Berenthaut ve Stević (2006) "*The behavior of the positive solutions of the difference equation* $x_n = A + (x_{n-2}/x_{n-1})^p$" isimli çalışmalarında Denklem (1.2.4)'te verilen fark denkleminin pozitif çözümlerinin sınırlılık karakterini, global asimptotik kararlılığını ve periyodikliğini incelemişlerdir. Bu fark denkleminde α, p parametreleri ve başlangıç koşullarının pozitif reel sayı olduklarını varsaymışlar ve çalışma sonucunda bu denklemin çözümlerinin sınırsız, periyodik ve kararlı olma şartlarını p parametresine bağlı olarak elde etmişlerdir [15].

Hamza ve Morsy (2009) "*On the recursive sequence* $x_{n+1} = \alpha + x_{n-1}/x_n^k$" isimli çalışmalarında $k \in \mathbb{N}$ ve başlangıç koşulları pozitif sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-1}}{x_n^k}, \qquad n \in \mathbb{N}_0 , \tag{1.2.5}$$

olan ikinci mertebeden lineer olmayan rasyonel fark denkleminin global davranışını incelemişlerdir [17].

Papaschinopoulos ve Ark. (2011) "*On the nonautonomous difference equation* $x_{n+1} = A_n + x_{n-1}^p / x_n^q$" isimli çalışmalarında A_n pozitif sınırlı bir dizi, p, q ve başlangıç koşulları pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = A_n + \frac{x_{n-1}^p}{x_n^q}, \qquad n \in \mathbb{N}_0, \tag{1.2.6}$$

fark denkleminin pozitif çözümlerinin periyodikliği ve asimptotik davranışını incelemişlerdir [16].

DeVault ve Ark. (2003) *"On the recursive sequence* $x_{n+1} = \alpha + x_{n-k}/x_n$" isimli çalışmalarında α pozitif reel sayı, $k \in \{2, 3, \dots\}$ ve başlangıç koşulları $x_{-k}, x_{-k+1}, \dots, x_0$ keyfi pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-k}}{x_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{1.2.7}$$

fark denkleminin pozitif çözümlerinin davranışlarını incelemişlerdir. k' nın tek olma durumunda sınırlılık karakteri, global kararlılığı ve periyodikliği için α' nin durumlarına göre gerek ve yeter şartlar verilmiştir. $k = 2$ durumu için de ayrıntılı bir yarı döngü analizi verilmiş ve çözümlerin sınırlılığının ne zaman olacağı açık problem olarak bırakılmıştır [9].

El-Owaidy ve Ark. (2004) *"On the asymptotic behavior of the difference equation* $x_{n+1} = \alpha + x_{n-k}/x_n$*"* isimli çalışmalarında Denklem (1.2.7)' nin pozitif çözümlerinin bazı özel koşullar altında periyodikliğini ve global asimptotik kararlılığını araştırmışlardır [10].

Stević (2007) "*On the recursive sequence* $x_{n+1} = \alpha + x_n^p / x_{n-1}^p$" isimli yaptığı çalışmasında α, p ve başlangıç koşulları pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \alpha + \frac{x_n^p}{x_{n-1}^p}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{1.2.8}$$

fark denkleminin pozitif çözümlerinin sınırlılığını, global çekimliliğini ve periyodikliğini çalışmıştır [4].

Abu-Saris ve DeVault (2002) *"Global stability of* $y_{n+1} = A + \frac{y_n}{y_{n-k}}$*"* isimli çalışmalarında $A \in (0,\infty)$, $k \in \{2,3,\dots\}$ ve pozitif başlangıç koşulları için

$$y_{n+1} = A + \frac{y_n}{y_{n-k}}, \quad n \in \mathbb{N}_0\,, \tag{1.2.9}$$

fark denkleminin denge noktasının global asimptotik kararlılığı için gerekli koşulları elde etmişlerdir [2].

Berenhaut ve Ark. (2005) *"Quantitative bound for the recursive sequence* $y_{n+1} = A + y_n/y_{n-k}$*"* isimli çalışmalarında $A \in (0,\infty), k \in \{2,3,\dots\}$ ve pozitif başlangıç koşulları altında Denklem (1.2.9)' da verilen fark denkleminde parametreleri değiştirip yeni çözümler bulmuşlar ve çözümlerin yakınsaklığı ile ilgili bazı sonuçlar elde etmişlerdir [3].

Bao (2015) "*Dynamical behavior of a system of second-order nonlinear difference equations*" isimli çalışmasında $A \in (0,\infty), p \in [1,\infty)$ ve $i = -1, 0$ için $x_i, y_i \in (0,\infty)$ olmak üzere

$$x_{n+1} = A + x_{n-1}^p/y_n^p\,, \qquad y_{n+1} = A + y_{n-1}^p/x_n^p\,, \;\; n \in \mathbb{N}_0, \tag{1.2.10}$$

fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin sınırlılığı, salınımlılığı ve lokal asimptotik kararlılığı incelenmiştir [28].

Zhang ve Ark. (2013) "*On the symmetrical system of sational sifference equation* $x_{n+1} = A + y_{n-k}/y_n$, $\quad y_{n+1} = A + x_{n-k}/x_n$" isimli çalışmalarında $A \in (0,\infty)$, $m \in \mathbb{Z}^+$ ve $i = -m, -m+1, \dots, 0$ için y_i, x_i keyfi pozitif sabitler olmak üzere

$$x_{n+1} = A + y_{n-m}/y_n, \;\; y_{n+1} = A + x_{n-m}/x_n\,, \;\; n \in \mathbb{N}_0, \tag{1.2.11}$$

fark denkleminin sınırlılık ve periyodiklik karakterlerini incelemişlerdir [22].

Gümüş (2014) "*The global asymptotic stability of a system of difference equation*" isimli çalışmasında $A \in (0,\infty)$, $m \in \mathbb{Z}^+$, $i = 0, 1, \dots, m$ için x_i, y_i keyfi pozitif sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = A + y_{n-m}/y_n, \;\; y_{n+1} = A + x_{n-m}/x_n\,, \; n \in \mathbb{N}_0, \tag{1.2.12}$$

fark denklem sisteminin tek pozitif denge noktasının global asimptotik kararlılığı ve verilen denklem sisteminin pozitif çözümlerinin yakınsaklık oranını incelemiştir [24].

Okumuş ve Soykan (2018) "*Dynamical behavior of a system of three-dimensional nonlinear difference equations*" isimli çalışmalarında $A \in (0, \infty)$, $i = -1, 0$ için $x_{-i,}\, y_{-i}, z_{-i} \in (0, \infty)$ olmak üzere

$$x_{n+1} = A + x_{n-1}/z_n,\, y_{n+1} = A + y_{n-1}/z_n,\ z_{n+1} = A + z_{n-1}/y_n\,,\ n \in \mathbb{N}_0, \quad (1.2.13)$$

fark denklem sisteminin pozitif denge noktasının global asimptotik kararlılığı, pozitif çözümlerin periyodikliği, direnci ve sınırı çalışılmıştır [25].

BÖLÜM 2

2.1. Fark Denklemleri ile İlgili Genel Tanımlar ve Teoremler

Bu bölümde fark denklemleri ile ilgili literatürde var olan genel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Tanım 2.1.1. n bağımsız değişken ve buna bağlı değişkende y olmak üzere, bağımlı değişken ve bağımsız değişken ile bağımlı değişkenin $E(y), E^2(y), E^3(y), \dots\ E^n(y), \dots$ gibi farklarını içeren bağıntılara *fark denklemi* denir [18].

Teorem 2.1.2. I reel sayıların herhangi bir alt aralığı olmak üzere, $f\colon I \times I \to I$ sürekli türevlere sahip bir fonksiyon ise $x_{-1}, x_0 \in I$ başlangıç şartları için

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}) \ , \qquad n \in \mathbb{N}_0 \ , \tag{2.1.1}$$

fark denkleminin bir tek $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümü vardır [18].

Tanım 2.1.3. Eğer $\bar{x}$ noktası için Denklem (2.1.1)'de $f(\bar{x}, \bar{x}) = \bar{x}$ şartı sağlanıyor ise $\bar{x}$ noktasına Denklem (2.1.1)'in *denge noktası* denir. Eğer $\forall n \geq 0$ için $\bar{x} = x_n$ ise, $\bar{x}'$e f'nin *sabit noktası* denir [19].

Tanım 2.1.4. Eğer $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_{-1}, x_0 \in J$ iken $x_n \in J$ olacak şekilde bir $J \subseteq I$ alt aralığı varsa, bu aralığa Denklem (2.1.1)'in *değişmez (*ya da *sabit) aralığı* denir [18].

Teorem 2.1.5. $\bar{x}$, Denklem (2.1.1)'in denge noktası olmak üzere:

i. Eğer $x_{-1},\ x_0 \in I$ olmak üzere ∀ ε > 0 için $|x_0 - \bar{x}| + |x_{-1} - \bar{x}| < \delta$ iken ∀ n ≥ 0 için $|x_0 - \bar{x}| < \varepsilon$ olacak şekilde bir δ > 0 sayısı varsa, $\bar{x}$ denge noktası kararlıdır denir.

ii. Eğer $\bar{x}$ denge noktası kararlı ve $x_{-1},\ x_0 \in I$ iken $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$ olacak şekilde, $|x_0 - \bar{x}| + |x_{-1} - \bar{x}| < \gamma$ şartını sağlayan $\gamma > 0$ sayısı varsa, $\bar{x}$ denge noktası *lokal asimptotik kararlıdır* denir.

iii. Eğer $x_{-1},\ x_0 \in I$ iken $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$ ise, $\bar{x}$ denge noktasına çekici noktaları denir.

iv. Eğer $\bar{x}$ denge noktası kararlı ve çekim noktası ise, $\bar{x}$ denge noktasına global asimptotik kararlıdır denir.

v. Eğer $\bar{x}$ denge noktası kararlı değil ise kararsızdır denir.

vi. Eğer $x_{-1},\ x_0 \in I$ iken $|x_0 - \bar{x}| + |x_{-1} - \bar{x}| < r$ ve bazı $\mathbb{N} \geq -1$ sayıları için $|x_N - \bar{x}| \geq r$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa, $\bar{x}$ denge noktasına *repeller(geri itici nokta*) denir [18].

Tanım 2.1.6. Eğer $\{x_n\}$ dizisi için $x_{n+p} = x_n$ ise, $\{x_n\}$ dizisine *p-periyotludur* denir ve p bu şartı sağlayan en küçük pozitif tam sayıdır [18].

Tanım 2.1.7. Eğer $\{x_n\}$ dizisinde sonlu sayıda terim hariç tutulduğunda, geriye kalan sonsuz sayıdaki terim için $x_{n+p} = x_n$ ise, $\{x_n\}$ dizisine *er geç p-periyotludur* denir ve *p* bu şartı sağlayan en küçük pozitif tam sayıdır [18].

Tanım 2.1.8. Denklem (2.1.1)'de $f(x_n, x_{n-1})$ fonksiyonunu *u, v*'nin $f(u, v)$ şeklinde sürekli fonksiyonları ve

$$r = \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{x})}{\partial u}\ , \qquad s = \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{x})}{\partial v}\ ,$$

olmak üzere

$$y_{n+1} = ry_n + sy_{n-1}\,, \tag{2.1.2}$$

denklemi elde edilir. Bu denkleme Denklem (2.1.1)'in $\bar{x}$ denge noktası civarında *lineer denklem* denir.

Denklem (2.1.2)'nin karakteristik denklemi:

$$\lambda^2 - r\lambda - s = 0\,, \tag{2.1.3}$$

şeklindedir [18].

Teorem 2.1.9. (Lineer Kararlılık Teoremi):

i. Eğer Denklem (2.1.3)'ün her iki kökü de mutlak değerce 1'den küçük ise $\bar{x}$ denge noktası asimptotik kararlıdır.

ii. Eğer Denklem (2.1.3)'ün köklerinden en az biri mutlak değerce 1'den büyük ise $\bar{x}$ denge noktası kararsızdır.

iii. Denklem (2.1.3)'ün her iki kökünün de mutlak değerce 1'den küçük olması için gerek ve yeter şart

$$|r| < 1 - s < 2\,,$$

olmasıdır. Bu durumda, $\bar{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır. Aynı zamanda $\bar{x}$ *sink (çukur nokta)* diye de adlandırılır.

iv. Denklem (2.1.3)'ün her iki kökünün de mutlak değerce 1'den büyük olması için gerek ve yeter şart

$$|s| > 1 \;\; ve \; |r| < |1 - s|,$$

olmasıdır. Bu durumda, $\bar{x}$ denge noktası repeller (*geri itici nokta*) dır.

v. Denklem (2.1.3)'ün bir kökünün mutlak değerce 1'den büyük, diğer kökünün mutlak değerce 1'den küçük olması için gerek ve yeter şart

$$r^2 + 4s > 0 \;\; ve \;\; |r| > |1 - s|,$$

olmasıdır. Bu durumda $\bar{x}$ denge noktası kararsızdır ve *eyer noktası* diye adlandırılır.

vi. Denklem (2.1.3)'ün bir kökünün mutlak değerce 1'e eşit olması için gerek ve yeter şart

$$|r| = |1 - s| \text{ veya } s = -1 \text{ ve } \; |r| \leq 2,$$

olmasıdır. Bu durumda $\bar{x}$ denge noktasına hiperbolik olmayan nokta denir [18].

Benzer şekilde, mertebesi 3 olan fark denklemleri için Teorem 2.1.2 aşağıdaki gibi genelleştirilebilir.

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, x_{n-2})\,, \qquad n \in \mathbb{N}_0\,, \tag{2.1.4}$$

fark denklemi verilsin.

Denklem (2.1.4)'de $f(x_n, x_{n-1}, x_{n-2})$ fonksiyonu $f(u, v, w)$, u, v, w değişkenlerinin sürekli bir fonksiyonu ve *r*, *s*, *t* değerleri

$$r = \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{x}, \bar{x})}{\partial u}\,, \qquad s = \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{x}, \bar{x})}{\partial v}\,, \qquad t = \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{x}, \bar{x})}{\partial w}\,,$$

şeklinde olmak üzere,

$$y_{n+1} = r.y_n + s.y_{n-1} + t.y_{n-2}\,, \tag{2.1.5}$$

denklemi elde edilir. Bu denkleme $\bar{x}$ denge noktası civarında *lineer denklem* denir.

Denklem (2.1.5)'in karakteristik denklemi

$$\lambda^3 - r.\lambda^2 - s.\lambda - t = 0\,, \tag{2.1.6}$$

şeklindedir [18].

Teorem 2.1.10.

i. Eğer Denklem (2.1.6)'nın bütün kökleri mutlak değerce 1'den küçük ise $\bar{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

ii. Eğer Denklem (2.1.6)'nın bütün köklerinden en az biri mutlak değerce 1'den büyük ise $\bar{x}$ denge noktası kararsızdır.

iii. Denklem (2.1.6)'nın bütün köklerinin mutlak değerce 1'den küçük olması için gerek ve yeter şartlar

$|r+t| < 1-s\,,\ \ |r-3t| < 3+s$ ve $t^2 - s - rt < 1,$

olmasıdır. Bu durumda $\bar{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır [18].

Tanım 2.1.11. $\bar{x}$, Denklem (2.1.1)'in denge noktası ve $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$'de pozitif bir çözümü olsun. $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümünün *pozitif yarı döngüsü* $\{x_l, x_{l+1}, \ldots, x_m\}$ terimlerinin art arda gelmesinden oluşur. Bu dizinin bütün terimleri $\bar{x}$' dan büyük veya eşit, $l > -1$ ve $m \leq \infty$ öyle ki

$$\text{ya } l = -1 \text{ veya } l > -1\,,\ x_{l-1} < \bar{x}\,,$$

olmakla birlikte

$$\text{ya } m = \infty \text{ veya } m < \infty\,,\ x_{m+1} < \bar{x}\,,$$

dır [20].

Tanım 2.1.12. $\bar{x}$, Denklem (2.1.1)'in denge noktası ve $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ de pozitif bir çözümü olsun. $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümünün *negatif yarı döngüsü* $\{x_l, x_{l+1}, \ldots, x_m\}$ terimlerinin art arda gelmesinden oluşur. Bu dizinin bütün terimleri $\bar{x}$' ten küçük $l > -1$ ve $m \leq \infty$ öyle ki

ya $l = -1$ veya $l > -1,\ x_{l-1} \geq \bar{x}$,

ve

ya da $m = \infty$ veya $m < \infty, x_{m+1} \geq \bar{x}$,

dır [20].

Tanım 2.1.13. Denklem (2.1.1)'in $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümlerinin hepsi birden ne pozitif ne de negatif ise bu çözümlere *sıfır civarında salınımlı* denir. Aksi halde salınımlı değildir [18].

Tanım 2.1.14. $\bar{x}$, Denklem (2.1.1)'in denge noktası ve $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ de pozitif bir çözümü olmak üzere $\{x_n - \bar{x}\}$ dizisi salınımlı ise $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümüne $\bar{x}$ *denge noktası civarında salınımlı* denir. Aksi halde $\bar{x}$ denge noktası civarında salınımlı değildir [20].

Tanım 2.1.15. $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ dizisinde $\forall n \in \mathbb{N}$ için $P \leq x_n \leq Q$ olacak şekilde P ve Q pozitif sayıları varsa $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ dizisine *sınırlı dizi* denir [18].

Tanım 2.1.16. Eğer $\bar{x}$ noktası için Denklem (2.1.1)'in $|f'(\bar{x},\bar{x})| \neq 1$ şartı sağlanıyorsa $\bar{x}$ denge noktasına Denklem (2.1.1)'in *hiperbolik noktası* denir [19].

Tanım 2.1.17. $x(n+1) = f\big(x(n)\big)$ denkleminde tanımlanan f fonksiyonunun *schwarzian türevi*

$$sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left[\frac{f''(x)}{f'(x)}\right]^2, \tag{2.1.7}$$

şeklindedir [19].

Teorem 2.1.18. $\bar{x}$, $x(n+1) = f\big(x(n)\big)$ denkleminin denge noktası olsun. $x(n+1) = f\big(x(n)\big)$ denkleminde tanımlanan f fonksiyonu sürekli ve diferansiyellenebilir olmak üzere aşağıdaki durumlar doğrudur.

i. Eğer $|f'(\bar{x})| < 1$ ise o zaman $\bar{x}$ denge noktası asimptotik kararlıdır.

ii. Eğer $|f'(\bar{x})| > 1$ ise o zaman $\bar{x}$ denge noktası kararsızdır [19].

Teorem 2.1.19. $\bar{x}$, $x(n+1) = f\big(x(n)\big)$ denkleminin denge noktası ve $f'(x) = 1$ için aşağıdaki durumlar doğrudur.

i. Eğer $f''(\bar{x}) \neq 0$ ise, o zaman $\bar{x}$ denge noktası kararsızdır.

ii. Eğer $f''(\bar{x}) = 0$ ve $f'''(\bar{x}) > 0$ ise, $\bar{x}$ denge noktası kararsızdır.

iii. Eğer $f''(\bar{x}) = 0$ ve $f'''(\bar{x}) < 0$ ise, $\bar{x}$ denge noktası asimptotik kararlıdır [19].

Teorem 2.1.20. $\bar{x}$, $x(n+1) = f\big(x(n)\big)$ denkleminin denge noktası ve $f'(x) = -1$ olsun. O halde

i. Eğer $s.f(\bar{x}) < 0$ ise, o zaman $\bar{x}$ denge noktası asimptotik kararlıdır.

ii. Eğer $s.f(\bar{x}) > 0$ ise, o zaman $\bar{x}$ denge noktası kararsızdır.

Durumları doğrudur [19].

Teorem 2.1.21. $x_{n+1} = g(x_n, \dots, x_{n-k})$, $n \in \mathbb{N}_0$ fark denklemi verilsin. $g \in C[(0,\infty)^{k+1}, (0,\infty)]$ fonksiyonu her bir bileşeni için artan olsun. Başlangıç koşulları $x_{-k}, \dots, x_0$ pozitif sayılar olmak üzere, $x_{n+1} = g(x_n, \dots, x_{n-k})$ denklemi tek bir pozitif denge noktasına sahip olsun. $h(x) = g(x, \dots, x)$, $x \in (0,\infty)$, şeklinde tanımlanan ve $(h(x) - x)(x - \bar{x}) < 0$, $x \neq \bar{x}$, için *negatif feedback (geri besleme)* özelliğini sağlayan h fonksiyonu verilsin. O halde $\bar{x}$, $x_{n+1} = g(x_n, \dots, x_{n-k})$ denkleminin bütün pozitif çözümleri global çekimlidir. Yani

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x},$$

dır [27].

BÖLÜM 3

$\boldsymbol{x_{n+1} = A + \frac{x_n^p}{x_{n-1}^r}}$ FARK DENKLEMİNİN SINIRLILIK KARAKTERİ

Bu bölümde, Stevi$\acute{c}$' in [1] makalesi detaylı olarak incelenmiştir. Stevi$\acute{c}$ çalışmasında $A, p, r > 0$ ve x_{-1}, x_0 başlangıç koşulları pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = A + \frac{x_n^p}{x_{n-1}^r}\ , \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{3.1}$$

şeklindeki fark denklemini ele almıştır.

3.1. Denklem (3.1)' in Sınırlılık Karakteri

Burada p ve r' nin arasındaki ilişkiye göre Denklem (3.1)' in pozitif çözümlerinin sınırlılık karakteri incelenmiştir.

Teorem 3.1.1. $p^2 \geq 4r > 4$ olsun. O zaman Denklem (3.1) sınırsız pozitif çözümlere sahiptir.

İspat: Denklem (3.1)'in her pozitif çözümü için

$$x_{n+1} > \frac{x_n^p}{x_{n-1}^r}, \qquad n \in \mathbb{N}_0, \tag{3.1.1}$$

olduğu açıktır. Şimdi $y_n = \ln x_n$ dönüşümü tanımlansın. (3.1.1) eşitsizliğinin her iki yanının logaritması alınırsa

$$\ln x_{n+1} > \ln \frac{x_n^p}{x_{n-1}^r}$$

$$\ln x_{n+1} > \ln x_n^p - \ln x_{n-1}^r$$

$$\ln x_{n+1} > p \ln x_n - r \ln x_{n-1}$$

$$y_{n+1} > p y_n - r y_{n-1}$$

$$y_{n+1} - p y_n + r y_{n-1} > 0\ , \tag{3.1.2}$$

elde edilir. $y_{n+1} - p y_n + r y_{n-1} = 0$ fark denklemine ait karakteristik denklem

$$\lambda^2 - p\lambda + r = 0\,, \tag{3.1.3}$$

olup bu denklemin kökleri $\lambda_{1,2} = \frac{p \pm \sqrt{p^2-4r}}{2}$ dir. Öte yandan $p^2 \geq 4r > 4$ kabulünden

$$\lambda_1 = \frac{p + \sqrt{p^2 - 4r}}{2} \geq \frac{p + \sqrt{p^2 - p^2}}{2} = \frac{p}{2} \ ,$$

yazılabilir. Buradan $\lambda_1 > 1$ olduğu kolayca görülür. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\lambda_2 &= \frac{p - \sqrt{p^2 - 4r}}{2} \\
&= \frac{p - \sqrt{p^2 - 4r}}{2} \cdot \frac{p + \sqrt{p^2 - 4r}}{p + \sqrt{p^2 - 4r}} \\
&= \frac{2r}{p + \sqrt{p^2 - 4r}} \ ,
\end{aligned} \tag{3.1.4}$$

şeklinde yazılabilir ki bu ve kabulden $\lambda_2 > 0$ olduğu kolayca görülür. Böylece $p^2 \geq 4r > 4$ ise karakteristik denklemin köklerinin pozitif olduğu görülür. Şimdi (3.1.2) eşitsizliği

$$\begin{aligned}
&y_{n+1} - py_n + ry_{n-1} > 0 \\
&y_{n+1} - (\lambda_1 + \lambda_2). y_n + \lambda_1.\lambda_2 y_{n-1} > 0 \\
&y_{n+1} - \lambda_1. y_n - \lambda_2. y_n + \lambda_1.\lambda_2 y_{n-1} > 0 \\
&y_{n+1} - \lambda_1. y_n - \lambda_2.(y_n - \lambda_1 y_{n-1}) > 0,
\end{aligned} \tag{3.1.5}$$

şeklinde yeniden yazılır ve x_n değişkenine geri dönülürse

$$\begin{aligned}
&x_{n+1} > \frac{x_n^p}{x_{n-1}^r} \\
&x_{n+1} > \frac{x_n^{\lambda_1+\lambda_2}}{x_{n-1}^{\lambda_1.\lambda_2}} \\
&\frac{x_{n+1}}{x_n^{\lambda_1}} > \frac{x_n^{\lambda_2}}{x_{n-1}^{\lambda_1.\lambda_2}} \\
&\frac{x_{n+1}}{x_n^{\lambda_1}} > \left(\frac{x_n}{x_{n-1}^{\lambda_1}}\right)^{\lambda_2} \ ,
\end{aligned} \tag{3.1.6}$$

eşitsizliği elde edilir. İndirgeme işlemine (3.1.6) eşitsizliğindeki gibi devam edilirse

$$\frac{x_n}{x_{n-1}^{\lambda_1}} > \left(\frac{x_0}{x_{-1}^{\lambda_1}}\right)^{\lambda_2^n}, \tag{3.1.7}$$

eşitsizliği elde edilir. Eğer $x_0 > 1$, $x_0 = x_{-1}^{\lambda_1}$ seçilir ve (3.1.7) eşitsizliği dikkate alınırsa

$$x_n > \left(\frac{x_0}{x_{-1}^{\lambda_1}}\right)^{\lambda_2^n} x_{n-1}^{\lambda_1}$$

$$x_n > x_{n-1}^{\lambda_1} > \cdots > x_0^{\lambda_1^n}, \tag{3.1.8}$$

bulunur. Buradan da

$$x_n > x_0^{\lambda_1^n}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{3.1.9}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.1.9) eşitsizliğinin her iki tarafın limiti alınırsa $n \to \infty$ iken $x_n \to \infty$ olur ki ispat tamamlanır ■.

Teorem 3.1.2. $p^2 < 4r$ olsun. Bu takdirde Denklem (3.1)'in bütün pozitif çözümleri sınırlıdır.

İspat: Denklem (3.1)'den $\forall k \in \mathbb{N}$ için aşağıda verilen eşitlik sağlanır.

$$x_{n+1} = A + \frac{x_n^p}{x_{n-1}^r} = A + \left(\frac{A}{x_{n-1}^{r/p}} + \frac{x_{n-1}^{p-r/p}}{x_{n-2}^r}\right)^p \tag{3.1.10}$$

$$= A + \left(\frac{A}{x_{n-1}^{r/p}} + \left(\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}^{r/(p-r/p)}}\right)^{p-r/p}\right)^p$$

$$= A + \left(\frac{A}{x_{n-1}^{r/p}} + \left(\frac{A}{x_{n-2}^{r/(p-r/p)}} + \frac{x_{n-2}^{p-r/(p-r/p}}{x_{n-3}^r}\right)^{p-r/p}\right)^p$$

$$= A + \left(\frac{A}{x_{n-1}^{r/p}} + \left(\frac{A}{x_{n-2}^{r/(p-r/p)}} + \left(\frac{x_{n-2}}{x_{n-3}^{r/(p-r/(p-r/p))}}\right)^{p-r/(p-r/p}\right)^{p-r/p}\right)^p$$

.
.
.

$$= A + \left(\frac{A}{x_{n-1}^{r/p}} + \left(\frac{A}{x_{n-2}^{r/(p-r/p)}} + \left(\cdots + \left(\frac{A}{x_{n-k}^{p_k}} + \frac{x_{n-k}^{p-p_k}}{x_{n-k-1}^{r}} \right)^{p-p_{k-1}} \cdots \right)^{p-r/(p-r/p} \right)^{p-r/p} \right)^{p} .$$

(3.1.11)

Burada p_k dizisi

$$p_{k+1} = \frac{r}{p - p_k}, \qquad p_0 = 0, \tag{3.1.12}$$

şeklindedir. Şimdi $p^2 \leq r$ olsun. O zaman Denklem (3.1.10)' dan $n \geq 3$ için

$$x_{n+1} = A + \left(\frac{A}{x_{n-1}^{r/p}} + \frac{1}{x_{n-1}^{r/p-p} x_{n-2}^{r}} \right)^{p} \leq A + \left(\frac{1}{A^{r/p-1}} + \frac{1}{A^{r/p-p+r}} \right)^{p}, \tag{3.1.13}$$

eşitsizliği bulunur. (3.1.13) eşitsizliğinden $p^2 \leq r$ için x_n dizisinin sınırlı olduğu kolayca görülür. Şimdi $p^2 > r$ olsun. $p_{k_0-1} < p$ ve $p_{k_0} \geq p$ koşulunu sağlayan bir $k_0 \in \mathbb{N}$ olduğu gösterilsin. Bunun için, aksine $\forall k \in \mathbb{N}_0$ ve $p_k < p$ olsun.
$0 = p_0 < p_1 = \frac{r}{p}$ ve $x < p$ için $f(x) = \frac{r}{p-x}$ fonksiyonu monoton artan olduğundan p_k dizisi de monoton artandır. p_k dizisi üstten p ile sınırlı olduğundan

$$x^2 - px + r = 0\ , \tag{3.1.14}$$

denkleminin bir çözümü olan p^*'a yakınsaktır.

Ancak $p^2 < 4r$ varsayımından Denklem (3.1.14)' ün reel çözümleri yoktur. Böylece $p_{k_0} \geq p$ ve $p_{k_0-1} < p$ koşulunu sağlayan en az bir $k_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Bu, $k = k_0$ için Denklem (3.1.11)' de $n \geq 1$ için $x_n > A$ olduğundan, $n \geq k_0 + 2$ için

$$X_{n+1} = A + \left(\frac{A}{x_{n-1}^{r/p}} + \left(\frac{A}{x_{n-2}^{r/(p-r/p)}} + \left(\cdots + \left(\frac{A}{x_{n-k_0}^{p_{k_0}}} + \frac{1}{x_{n-k_0}^{p_{k_0}-p} x_{n-k_0-1}^{r}} \right)^{p-p_{k_0-1}} \cdots \right)^{p-r/(p-r/p} \right)^{p-r/p} \right)^{p}$$

$$X_{n+1} \leq A + \left(\frac{1}{A^{r/p-1}} + \left(\frac{1}{A^{r/(p-r/p)-1}} + \left(\cdots + \left(\frac{1}{A^{p_{k_0}-1}} + \frac{1}{A^{p_{k_0}-p+r}} \right)^{p-p_{k_0-1}} \cdots \right)^{p-r/(p-r/p)} \right)^{p-r/p} \right)^{p},$$

(3.1.15)

olur ki ispat tamamlanır■.

Teorem 3.1.3. $p > 1 + r$ ve $r \leq 1$ olsun. O zaman Denklem (3.1) sınırsız pozitif çözümlere sahiptir.

İspat: $p > 1 + r$ ve $r \leq 1$ kabullerinde

$$\lambda_1 = \frac{p + \sqrt{p^2 - 4r}}{2} > \frac{1 + r + |1 - r|}{2} = 1 \,, \qquad (3.1.16)$$

olduğundan teoremin ispatı, Teorem (3.1.2)'nin ispatına benzer şekilde yapılabilir■.

Teorem 3.1.4. $p = r + 1$ ve $r \in (0,1]$ olsun. O zaman Denklem (3.1) sınırsız çözümlere sahiptir.

İspat: $x_0 > x_{-1}$ olsun. Bu durumda Denklem (3.1)'den

$$x_{n+1} = A + \frac{x_n^{r+1}}{x_{n-1}^r} \,, \qquad n \in \mathbb{N}_0 \,, \qquad (3.1.17)$$

yazılabilir. Denklem (3.1.17) aşağıdaki şekilde yeniden düzenlenirse

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{A}{x_n} + \left(\frac{x_n}{x_{n-1}}\right)^r, \quad n \in \mathbb{N}_0 \,, \qquad (3.1.18)$$

ifadesinden

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} > \left(\frac{x_n}{x_{n-1}}\right)^r > \cdots > \left(\frac{x_0}{x_{-1}}\right)^{r^{n+1}} > 1 \,, \quad n \in \mathbb{N}_0 \,, \qquad (3.1.19)$$

eşitsizlikleri elde edilir. Buradan $n \in \mathbb{N}_0$ için $x_{n+1} > x_n$ sonucu çıkarılır. Varsayalım ki x_n sınırlı olsun. O zaman $\lim_{n\to\infty} x_n = c$, olacak şekilde bir c pozitif sayısı vardır. Denklem (3.1.17)' nin her iki yanının $n \to \infty$ iken limiti alınırsa $c = A + c$ elde edilir ki bu bir çelişkidir. Böylece Denklem (3.1.17) de $x_0 > x_{-1}$ koşulunu sağlayan bütün çözümleri sınırsızdır■.

Teorem 3.1.5. $2\sqrt{r} \leq p < 1 + r$ ve $r \in (0,1)$ olsun. O zaman Denklem (3.1)'in her pozitif çözümü sınırlıdır.

İspat: İlk olarak kabullerden $P(\lambda) = \lambda^2 - p\lambda + r$ polinomunun her iki kökü reel ve dahası

$$0 < \lambda_2 < \lambda_1 < 1 \,, \qquad (3.1.20)$$

dır. Öte yandan Denklem (3.1) aşağıdaki şekilde yeniden düzenlenirse

$$x_{n+1} = A + \frac{x_n^{\lambda_1+\lambda_2}}{x_{n-1}^{\lambda_1.\lambda_2}}, \quad n \in \mathbb{N}_0 , \tag{3.1.21}$$

elde edilir. Denklem (3.1.21)'den

$$\frac{x_{n+1}}{x_n^{\lambda_1}} = \frac{A}{x_n^{\lambda_1}} + \left(\frac{x_n}{x_{n-1}^{\lambda_1}}\right)^{\lambda_2} \le A^{1-\lambda_1} + \left(\frac{x_n}{x_{n-1}^{\lambda_1}}\right)^{\lambda_2}, \quad n \in \mathbb{N}_0 , \tag{3.1.22}$$

yazılabilir. Şimdi

$$y_n = \frac{x_n}{x_{n-1}^{\lambda_1}} , \tag{3.1.23}$$

ve $z_0 = y_0$ için

$$z_n = A^{1-\lambda_1} + z_{n-1}^{\lambda_2} , \tag{3.1.24}$$

fark denkleminin çözümü $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olsun. Denklem (3.1.23) ve tümevarımla $n \in \mathbb{N}$ için $y_n \le z_n$ olduğu kolayca görülür. Böylece $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin sınırlı olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

$$f(x) = A^{1-\lambda_1} + x^{\lambda_2} , \quad x \in (0,\infty) , \tag{3.1.25}$$

fonksiyonu artan ve konkav olduğundan (burada $\lambda_2 \in (0,1)$) x^*, $f(x) = x$ denkleminin tek bir sabit noktası ve *f* fonksiyonu

$$(f(x) - x)(x - x^*) < 0 , \quad x \in (0,\infty) \setminus \{x^*\} , \tag{3.1.26}$$

koşulunu sağlar. Buradan, eğer $z_0 \in (0, x^*)$ ise $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi azalmayan ve üstten x^* ile sınırlı, eğer $z_0 \ge x^*$ ise $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi artmayan ve alttan x^* ile sınırlıdır. Böylece $\forall z_0 \in (0,\infty)$ için $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi sınırlıdır. Yani, bir *M* pozitif sabiti vardır öyle ki;

$$x_n \le M x_{n-1}^{\lambda_1} , \quad n \in \mathbb{N}_0 , \tag{3.1.27}$$

dir. (3.1.27) eşitsizliğinden

$$x_n \le M^{(1-\lambda_1^n)/(1-\lambda_1)} \, x_0^{\lambda_1^n} \le \max\{1, M\}^{1/(1-\lambda_1)} \max\{1, x_0\} , \tag{3.1.28}$$

sonucu çıkar ki ispat tamamlanır■.

Aşağıdaki teoremle, Teorem (3.1.2)'den Teorem (3.1.5)'e kadar verilen teoremler Denklem (3.1)'in pozitif çözümlerinin sınırlılık karakterine ilişkin bir sonuç olarak özetlenmiştir.

Teorem 3.1.6. A, p ve r pozitif reel sayılar olmak üzere Denklem (3.1) verilsin. Bu takdirde aşağıdaki durumlar doğrudur.

a) $p^2 \geq 4r$ ya da $p \geq 1 + r$, $r \in (0,1]$ ise o zaman Denklem (3.1) sınırsız pozitif çözümlere sahiptir.

b) $p^2 < 4r$ ya da $2\sqrt{r} \leq p < 1 + r$, $r \in (0,1)$ ise o zaman Denklem (3.1)'in bütün pozitif çözümleri sınırlıdır.

Teorem 3.1.7. $p = r + 1$ ve $r \in (0,1)$ olsun. O zaman Denklem (3.1.17)'nin ıraksayan her çözümü

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n-1}} = 1 \tag{3.1.29}$$

koşulunu sağlar.

İspat: Denklem (3.1.17)'de $A = 1$ alınırsa, $x_n = Au_n$ dönüşümüyle denklem bu koşula indirgenir. Dolayısıyla Denklem (3.1.17)'den

$$x_{n+1} = A + \frac{x_n^{r+1}}{x_{n-1}^r}$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{A}{x_n} + \frac{x_n^r}{x_{n-1}^r}$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{x_n} + \left(\frac{x_n}{x_{n-1}}\right)^r$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq 1 + \left(\frac{x_n}{x_{n-1}}\right)^r, \quad n \in \mathbb{N}_0 , \tag{3.1.30}$$

yazılabilir. $r \in (0,1)$ kabulünden, Teorem (3.1.5)' in ispatına benzer şekilde (x_n/x_{n-1}) dizisinin sınırlılığı ispat edilebilir. $x_n \to \infty$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0 , \tag{3.1.31}$$

olacaktır. Böylece $\varepsilon_n = \frac{1}{x_n}$ dizisi bir sıfır dizisidir. Öte yandan $\frac{x_0}{x_{-1}} = y_0 = z_0$ için

$$y_n = y_{n-1}^r\,, \quad z_n = \varepsilon + z_{n-1}^r\,, \tag{3.1.32}$$

fark denklemleri göz önüne alınsın. Genelliği bozmadan $\forall n \in \mathbb{N}_0$ için $\varepsilon_n < \varepsilon$ alınabilir. Tümevarım ile

$$y_n \le \frac{x_n}{x_{n-1}} \le z_n\,, \qquad n \in \mathbb{N}_0, \tag{3.1.33}$$

doğruluğu görülebilir. $y_n = y_0^{r^n}$, olduğundan $\lim_{n\to\infty} y_n = 1$ olacaktır. Başka bir deyişle Teorem (3.1.5)'teki gibi z_n, $x - \varepsilon - x^r = 0$, denkleminin $x^*(\varepsilon)$ pozitif çözümüne yakınsar. $\mathbb{R}^2$' de $x - \varepsilon - x^r$ fonksiyonu sürekli olduğundan $\varepsilon \to 0$ iken $x^*(\varepsilon) \to x^*(0)$ yakınsadığı açıktır. Buda ispatı tamamlar■.

3.2. $x_{n+1} = max\left\{A, \frac{x_n^p}{x_{n-1}^r}\right\}$ denklemi

Bu bölümde $A, p, r \in (0, \infty)$ olmak üzere Denklem (3.1) ile yakından ilişkili olan

$$x_{n+1} = max\left\{A, \frac{x_n^p}{x_{n-1}^r}\right\}, \quad n \in \mathbb{N}_0\,, \tag{3.2.1}$$

fark denkleminin pozitif çözümlerinin sınırlılık karakteri incelenmiştir.

Teorem 3.2.1. *A*, p ve r pozitif sayılar olmak üzere Denklem (3.2.1) verilsin. Bu takdirde aşağıdaki durumlar doğrudur.

(a) $p^2 \ge 4r > 4$ ya da $p \ge 1 + r$, $r \in (0,1]$ ise, o zaman Denklem (3.2.1) pozitif sınırsız çözümlere sahiptir.

(b) $p^2 < 4r$ ya da $2\sqrt{r} \le p < 1 + r$, $r \in (0,1)$ ise, o zaman Denklem (3.2.1)'in bütün çözümleri sınırlıdır.

İspat:

(a) Bu durumun ispatı Teorem (3.1.1), Teorem (3.1.6) ve Teorem (3.1.7)'nin direk bir sonucudur. Burada Denklem (3.2.1)'in bir (x_n) çözümü için Teorem (3.1.1), Teorem (3.1.6) ve Teorem (3.1.7)'deki p ve r parametrelerin değerleri için (3.1.1) ve (3.1.19) eşitsizliklerinin sağlandığına dikkat edilmelidir.

(b) İlk olarak $p^2 < 4r$ olsun. Denklem (3.1.11)'deki gibi

$$x_{n+1} = max\left\{A, \left(\frac{A}{x_{n-1}^{r/p}}, \left(\frac{A}{x_{n-2}^{r/(p-r/p)}}, \left(\cdots, \left(\frac{A}{x_{n-k}^{p_k}}, \frac{x_{n-k}^{p-p_k}}{x_{n-k-1}^{r}}\right)^{p-p_{k-1}} \cdots\right)^{p-r/(p-r/p}\right)^{p-r/p}\right)^{p}\right\}$$

, (3.2.2)

ispatlanabilir. Burada $(p_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ Denklem (3.1.12)'deki gibi tanımlanmıştır. Bundan (x_n) dizisinin sınırlılığı Teorem (3.1.2)'nin ispatındaki verileri kullanarak kolayca elde edilir. Şimdi de $2\sqrt{r} \leq p < 1 + r$, $r \in (0,1]$ ve λ_1 ve λ_2' de $0 < \lambda_2 < \lambda_1 < 1$ koşulunu sağlasın. Denklem (3.2.1)'den, $n \in \mathbb{N}_0$ için,

$$\frac{x_{n+1}}{x_n^{\lambda_1}} = max\left\{\frac{A}{x_n^{\lambda_1}}, \left(\frac{x_n}{x_{n-1}^{\lambda_1}}\right)^{\lambda_2}\right\} \leq max\left\{A^{1-\lambda_1}, \left(\frac{x_n}{x_{n-1}^{\lambda_1}}\right)^{\lambda_2}\right\}, \quad (3.2.3)$$

dir.

$$u_n = \frac{x_n}{x_{n-1}^{\lambda_1}}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (3.2.4)$$

ve $(v_n)_{n\in N_0}$'da, $v_0 = u_0$ başlangıç şartı ile

$$v_n = max\left\{A^{1-\lambda_1},\ v_{n-1}^{\lambda_2}\right\}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (3.2.5)$$

fark denkleminin bir çözümü olsun. Teorem (3.1.5)'in ispatındaki gibi v_n dizisi sınırlıdır ve sonuç olarak Denklem (3.2.1)'in çözümü bu şartlar altında sınırlıdır■.

BÖLÜM 4

$x_{n+1} = A + \frac{x_{n-1}^p}{x_n^q}$ FARK DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN DAVRANIŞLARI

Bu bölümde Schinas ve arkadaşlarının [5] makalesi detaylı olarak incelenmiştir. Schinas ve arkadaşları çalışmalarında $A, p, q > 0$ ve x_{-1}, x_0 başlangıç koşulları pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = A + \frac{x_{n-1}^p}{x_n^q}, \quad n \in \mathbb{N}_0\,, \tag{4.1}$$

şeklindeki fark denklemini ele almışlardır.

4.1. Sınırlılık ve Dirençlilik

Lemma 4.1.1. Eğer $0 < p < 1$ ise bu taktirde Denklem (4.1)'in her pozitif çözümü sınırlı ve dirençlidir.

Lemma 4.1.2. Eğer $p > 1$ ise bu takdirde Denklem (4.1)'in sınırsız çözümleri vardır.

İspat:

$$x_{-1} > max\{(A+1)^{p/q}, (A+1)^{q/(p-1)}\}, \quad x_0 < A+1\,, \tag{4.1.1}$$

koşullarını sağlayan x_{-1}, x_0 başlangıç şartlarıyla Denklem (4.1)'in bir çözümü (x_n) olsun. O zaman Denklem (4.1), (4.1.1) eşitsizliği ve $p > 1$ şartından

$$x_1 = A + \frac{x_{-1}^p}{x_0^q} > A + \frac{x_{-1}^p}{(A+1)^q} - x_{-1} + x_{-1}\,,$$

$$= A + x_{-1}\left(\frac{x_{-1}^{p-1}}{(A+1)^q} - 1\right) + x_{-1} > A + x_{-1}\,, \tag{4.1.2}$$

$$x_2 = A + \frac{x_0^p}{x_1^q} < A + \frac{(A+1)^p}{x_{-1}^q} < A + 1,$$

bulunur. Dahası Denklem (4.1) ve (4.1.1) eşitsizliğinden

$$x_1 = A + \frac{x_{-1}^p}{x_0^q} > A + \frac{(A+1)^{qp/(p-1)}}{(A+1)^q} = A + (A+1)^{q/(p-1)} > (A+1)^{q/(p-1)}, \quad (4.1.3)$$

yazılabilir. Benzer şekilde Denklem (4.1) kullanılarak (4.1.1) – (4.1.3) eşitsizliklerindeki gibi

$$x_3 = A + \frac{x_1^p}{x_2^q} > A + \frac{x_1^p}{(A+1)^q} - x_1 + x_1 > A + x_1 \,,$$

$$x_4 = A + \frac{x_2^p}{x_3^q} < A + \frac{(A+1)^p}{x_{-1}^q} < A + 1 \,, \quad (4.1.4)$$

yazılabilir. Tümevarım metodundan $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$x_{2n+1} > A + x_{2n-1} \,, \qquad x_{2n} < A + 1, \quad (4.1.5)$$

elde edilir ki buradan

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = \infty, \quad (4.1.6)$$

sonucu bulunur. Böylece x_n sınırsızdır. Bu da lemmanın ispatını tamamlar■.

4.2. Çekimlilik ve Kararlılık

Pozitif denge noktasının varlığı aşağıda ki lemma ile verilecektir.

Lemma 4.2.1. Eğer ya

$$0 < q < p < 1 \,, \quad (4.2.1)$$

ya da

$$0 < p < q \,, \quad (4.2.2)$$

ise bu taktirde Denklem (4.1) bir tek $\bar{x}$ pozitif denge noktasına sahiptir.

İspat: $\bar{x} \in \mathbb{R}$, Denklem (4.1)'in bir denge noktası olması için gerek ve yeter koşul

$$F(x) = x^{p-q} - x + A = 0 \,, \quad (4.2.3)$$

denklemini sağlamasıdır. (4.2.1) eşitsizliğinden ve

$$F'(x) = (p-q)x^{p-q-1} - 1 \,, \quad (4.2.4)$$

ifadesinden F fonksiyonunun, $[0,(p-q)^{1/(-p+q+1)}]$ aralığında artan ve $[(p-q)^{1/(-p+q+1)},\infty)$ aralığında ise azalan bir fonksiyon olduğu açıktır. Dahası $F(0)=A>0$ ve

$$\lim_{x\to\infty} F(x)=-\infty\,, \tag{4.2.5}$$

dur. Eğer (4.2.1) eşitsizliği sağlanıyorsa Denklem (4.1), (0, ∞) aralığında bir tek $\bar{x}$ denge noktasına sahiptir.

Şimdi de (4.2.2) ve (4.2.3) eşitsizliklerinden $F(1)=A>0$ ve $F'(x)<0$ olup F fonksiyonu (0, ∞) aralığında azalandır. Böylece Denklem (4.2.5)'ten Denklem (4.1)'in bir tek $\bar{x}$ denge noktasına sahip olduğu açıktır ki ispat tamamlanır.

Lemma 4.2.2. Denklem (4.1) verilsin. Ya

$$0<p<1<q\;,\;\;A>(p+q-1)^{\;1/(q-p+1)}\,, \tag{4.2.6}$$

ya da

$$0<p+q\leq 1\,, \tag{4.2.7}$$

olsun. O zaman Denklem (4.1)'in bir tek pozitif $\bar{x}$ denge noktası global asimptotik kararlıdır.

İspat: İlk olarak Denklem (4.1)'in her pozitif çözümünün Denklem (4.1)'in tek pozitif $\bar{x}$ denge noktasına yakınsayacağı gösterilecektir. Denklem (4.1)'in bir pozitif çözümü x_n olsun ve (4.2.6) eşitsizliği sağlansın. Bu durumda kabul ve Lemma (4.1.1)'den

$$0<l=\lim_{n\to\infty} inf x_n\,,\;\;L=\lim_{n\to\infty} sup\, x_n<\infty\,, \tag{4.2.8}$$

dur. Denklem (4.1) ve (4.2.8) eşitsizliklerinden

$$L\leq A+\frac{L^p}{l^q}\;\;,\qquad l\geq A+\frac{l^p}{L^q}\;\;, \tag{4.2.9}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Buradan gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$Ll^q\leq Al^q+L^p\,,\;\;lL^q\geq AL^q+l^p\,, \tag{4.2.10}$$

yazılabilir. (4.2.10) eşitsizliklerinden

$$AL^q l^{q-1}+l^p l^{q-1}\leq Al^q L^{q-1}+L^p L^{q-1}, \tag{4.2.11}$$

bulunur . Bu ise

$$AL^{q-1}l^{q-1}(L-l)\leq L^{p+q-1}-l^{p+q-1}\,, \tag{4.2.12}$$

eşitsizliğini verir. Şimdi $p + q - 2 \geq 0$ olsun. Bu durumda $l = L$ eşitliği gösterilecektir. Bunu göstermek için aksine $l < L$ olduğu kabul edilsin. O zaman

$$\frac{L^{p+q-1} - l^{p+q-1}}{L - l} = (p + q - 1)c^{p+q-2} \leq (p + q - 1)L^{p+q-2}, \qquad (4.2.13)$$

eşitsizliğini sağlayan bir $c \in (l, L)$ vardır. Buradan (4.2.12) ve (4.2.13) eşitsizliklerinden

$$AL^{q-1}l^{q-1} \leq (p + q - 1)L^{p+q-2}, \qquad (4.2.14)$$

ya da

$$AL^{1-p}l^{q-1} \leq p + q - 1, \qquad (4.2.15)$$

elde edilir. Dahası Denklem (4.1)'den

$$L \geq A, \quad l \geq A, \qquad (4.2.16)$$

ve (4.2.6) ile (4.2.15) eşitsizliklerinden

$$AA^{1-p}A^{q-1} = A^{q-p+1} \leq p + q - 1, \qquad (4.2.17)$$

eşitsizliği elde edilir ki bu ise (4.2.6) eşitsizliği ile çelişir. Dolayısıyla $l = L$ eşitliği ise x_n'nin tek bir pozitif $\bar{x}$ denge noktasına yakınsadığını gösterir. Şimdi $p + q - 2 < 0$ olsun. Benzer şekilde (4.2.12) eşitsizliğinden ve yukarıda yapılan işlemlerdeki gibi

$$AL^{q-1}l^{q-1} \leq (p + q - 1)l^{p+q-2}, \qquad (4.2.18)$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan benzer şekilde x_n'in tek bir pozitif $\bar{x}$ denge noktasına yakınsadığı ispat edilebilir. Şimdi de $0 < p + q \leq 1$ olsun. (4.2.6) ve (4.2.12) eşitsizliklerinden

$$AL^{q-1}l^{q-1}(L - l) \leq \frac{1}{L^{1-p-q}} - \frac{1}{l^{1-p-q}} = \frac{l^{1-p-q} - L^{1-p-q}}{L^{1-p-q}l^{1-p-q}} \leq 0, \qquad (4.2.19)$$

eşitsizliği elde edilir ki bu da $L = l$ olduğunu ima eder. Dolayısıyla Denklem (4.1)'in her pozitif x_n çözümü Denklem (4.1)'in tek bir pozitif $\bar{x}$ denge noktasına yakınsar.

Şimdi de Denklem (4.1)'in tek bir pozitif denge noktasının lokal asimptotik kararlı olduğu gösterilecektir. $\bar{x}$ pozitif denge noktasının lineerleştirilmiş denklemi

$$y_{n+2} + q(\bar{x})^{p-q-1}y_{n+1} - p(\bar{x})^{p-q-1}y_n = 0, \qquad (4.2.20)$$

şeklindedir. Teorem 2.1.9. ve Denklem (4.2.20)'den $\bar{x}$ pozitif denge noktasının asimptotik kararlı olması için gerek ve yeter şart

$$q(\bar{x})^{p-q-1} < -p(\bar{x})^{p-q-1} + 1 < 2. \qquad (4.2.21)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır. Şimdi ilk olarak (4.2.6) eşitsizlikleri sağlansın. (4.2.6) eşitsizliğinden

$$A > (p+q)^{(p-q)/(q+1-p)}(q+1-p), \qquad (4.2.22)$$

eşitsizliği elde edilir. (4.2.6) ve (4.2.22) eşitsizliklerinden

$$c = (p+q)^{1/(q+1-p)} \ \text{için} \ F(c) > 0, \qquad (4.2.23)$$

eşitsizliği kolayca ispat edilebilir. Buradan

$$\bar{x} > (p+q)^{1/(q+1-p)} \ , \qquad (4.2.24)$$

olur ki bu (4.2.21) eşitsizliğinin doğru olduğu anlamına gelir. Buda verilen şartlarda Denklem (4.1)'in tek pozitif $\overline{x}$ denge noktasının lokal asimptotik kararlı olduğunu gösterir ki ispat tamamlanır■.

4.3. 2-Periyotlu Çözümler

Bu bölümde Denklem (4.1)'in asal 2-periyotlu çözümlerin varlığı gösterilmiştir. Ayrıca asal 2-periyotlu çözümlere yakınsayan Denklem (4.1)'in çözümleri elde edilmiştir.

Lemma 4.3.1.

$$0 < p < 1 < q \, , \qquad (4.3.1)$$

koşulunu sağlayan Denklem (4.1) verilsin. ϵ_1 ,

$$\frac{1}{(A+\epsilon_1)^{q-p}} > \epsilon_1 \, , \qquad (4.3.2)$$

$$(A+\epsilon_1)^{p/q}{\epsilon_1}^{-1/q} < A + {\epsilon_1}^{-p/q}(A+\epsilon_1)^{(p^2-q^2)/q} \ , \qquad (4.3.3)$$

koşullarını sağlayan yeteri kadar küçük pozitif bir reel sayı olsun. O zaman Denklem (4.1) asal 2-periyotlu periyodik çözümlere sahiptir.

İspat: (x_n), Denklem (4.1)'in pozitif bir çözümü olsun. Eğer

$$x_{-1} = A + \frac{x_{-1}^p}{x_0^q} \, , \quad x_0 = A + \frac{x_0^p}{x_{-1}^q} \ , \qquad (4.3.4)$$

ise x_n'in 2-periyotlu olduğu kolayca görülebilir. Şimdi

$$x = A + \frac{x^p}{y^q} \, , \quad y = A + \frac{y^p}{x^q} \, , \qquad (4.3.5)$$

sistemi göz önüne alınsın. O zaman (4.3.5) sistemi

$$y - A - \frac{y^p}{x^q} = 0 \quad , \quad y = \frac{x^{p/q}}{(x-A)^{1/q}} , \tag{4.3.6}$$

sistemine karşılık gelir ve buradan

$$G(x) = \frac{x^{p/q}}{(x-A)^{1/q}} - A - \frac{x^{(p^2-q^2)/q}}{(x-A)^{p/q}} = 0 , \tag{4.3.7}$$

denklemi elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$G(x) = \frac{1}{(x-A)^{1/q}}\left(x^{p/q} - x^{(p^2-q^2)/q}(x-A)^{(1-p)/q}\right) - A, \tag{4.3.8}$$

elde edilir. (4.3.1) eşitsizliği ve Denklem (4.3.8)'den

$$\lim_{x\to A^+} G(x) = \infty, \tag{4.3.9}$$

bulunur. Dahası (4.3.3) eşitsizliğinden

$$G(A+\epsilon_1) < 0 \ , \tag{4.3.10}$$

eşitsizliği kolayca gösterilebilir. Dolayısıyla $G(x) = 0$ denkleminin $(A, A+\epsilon_1)$ aralığında eşitsizliğini sağlayan $\bar{x} = A + \epsilon_0$ şeklinde bir çözümü vardır. Buradan

$$\overline{y} = \frac{\overline{x}^{p/q}}{(\overline{x}-A)^{1/q}} \ , \tag{4.3.11}$$

elde edilir. Şimdi

$$H(\epsilon\,) = (A+\epsilon)^{p-q} - \epsilon \,, \tag{4.3.12}$$

fonksiyonu göz önüne alınsın. (4.3.1) eşitsizliği ve $H'(\epsilon) = (p-q)(A+\epsilon)^{p-q-1} - 1 < 0$ olduğundan

$$H(\epsilon_0\,) > H(\epsilon_1) \ , \tag{4.3.13}$$

eşitsizliği bulunur. (4.3.2) eşitsizliğinden $H(\epsilon_1) > 0$ olur ve böylece (4.3.13) eşitsizliğinden

$$H(\epsilon_0) = (A+\epsilon_0)^{p-q} - \epsilon_0 > 0 \ , \tag{4.3.14}$$

yazılır ki buda

$$\overline{x} = A + \epsilon_0 < \frac{(A+\epsilon_0)^{p/q}}{{\epsilon_0}^{1/q}} = \overline{y} \,, \tag{4.3.15}$$

anlamına gelir. Böylece $x_{-1} = \overline{x}$, $x_0 = \overline{y}$ ise başlangıç koşulları x_{-1}, x_0 olan x_n çözümü asal 2-periyotlu periyodik çözümlere sahiptir■.

Lemma 4.3.2. (x_n), Denklem (4.1)'in bir çözümü olsun. O zaman (x_{2n}) ve (x_{2n+1}) dizileri er geç monotondur.

İspat: (u_n) dizisi ve $h(x)$ fonksiyonu

$$u_n = x_n - A\,, \quad h(x) = x + A\,, \tag{4.3.16}$$

şeklinde tanımlansın. O zaman Denklem (4.1)'den $n \geq 3$ için

$$\frac{u_n}{u_{n-2}} = \frac{(u_{n-2}+A)^p}{(u_{n-4}+A)^p}\frac{(u_{n-3}+A)^q}{(u_{n-1}+A)^q} = \frac{(h(u_{n-2}))^p}{(h(u_{n-4}))^p}\frac{(h(u_{n-3}))^q}{(h(u_{n-1}))^q}\,, \tag{4.3.17}$$

elde edilir. Denklem (4.3.17) kullanılarak lemma kolayca ispat edilebilir■.

Lemma 4.3.3. (4.3.1) ve (4.3.3) eşitsizliklerini sağlayan Denklem (4.1) verilsin. (x_n), ya

$$A < x_{-1} < A + \epsilon_1\,, \qquad x_0 > (A+\epsilon_1)^{p/q}\epsilon_1^{-1/q}\,, \tag{4.3.18}$$

ya da

$$A < x_0 < A + \epsilon_1\,, \qquad x_{-1} > (A+\epsilon_1)^{p/q}\epsilon_1^{-1/q}\,, \tag{4.3.19}$$

koşulları altında Denklem (4.1)'in bir çözümü olsun. Bu takdirde eğer (4.3.18) eşitsizlikleri sağlanıyorsa

$$A < x_{2n-1} < A + \epsilon_1\,, \qquad x_{2n} > (A+\epsilon_1)^{p/q}\epsilon_1^{-1/q} \quad , n \in \mathbb{N}_0, \tag{4.3.20}$$

ve eğer (4.3.19) eşitsizlikleri sağlanıyorsa

$$A < x_{2n} < A + \epsilon_1\,,\ x_{2n-1} > (A+\epsilon_1)^{p/q}\epsilon_1^{-1/q}\,,\ n \in \mathbb{N}_0, \tag{4.3.21}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat: (4.3.18) eşitsizlikleri sağlansın. Bu takdirde Denklem (4.1) ve (4.3.3) eşitsizliğinden

$$A < x_1 = A + \frac{x_{-1}^p}{x_0^q} < A + \epsilon_1\frac{(A+\epsilon_1)^p}{(A+\epsilon_1)^p} = A + \epsilon_1\,,$$

$$x_2 = A + \frac{x_0^p}{x_1^q} > A + (A+\epsilon_1)^{(p^2-q^2)/q}\epsilon_1^{-p/q} > (A+\epsilon_1)^{p/q}\epsilon_1^{-1/q}\,, \tag{4.3.22}$$

elde edilir. Öte yandan (4.3.20) eşitsizlikleri tümevarım yöntemiyle kolayca ispat edilebilir. Benzer şekilde (4.3.19) eşitsizlikleri sağlanırsa (4.3.21) eşitsizliklerinin sağlandığı da gösterilebilir.

Lemma 4.3.4. (4.3.1), (4.3.2) ve (4.3.3) eşitsizliklerini sağlayan Denklem (4.1) verilsin. Ayrıca,

$$A + \epsilon_1 < 1, \qquad (4.3.23)$$

eşitsizliği sağlansın. Bu takdirde ya (4.3.18) ya da (4.3.19) eşitsizliklerini sağlayan x_{-1}, x_0 başlangıç koşullu Denklem (4.1)'in her x_n çözümü asal 2-periyotlu periyodik çözümlere yakınsar.

İspat: x_n, ya (4.3.18) ya da (4.3.19) eşitsizliklerini sağlayan x_{-1}, x_0 başlangıç koşullu bir çözüm olsun. Lemma (4.1.1) ve Lemma (4.3.2) kullanılarak

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = L, \quad \lim_{n\to\infty} x_{2n} = l, \qquad (4.3.24)$$

ifadeleri elde edilir. İlaveten Lemma (4.3.3)'ten ya L ya da l, $(A, A + \epsilon_1)$ aralığındadır. Dahası Denklem (4.1) ve Lemma (4.2.1)'den $1 < \overline{x} < \infty$ koşulunu sağlayan bir tek $\overline{x}$ denge noktası vardır. Böylece (4.3.23) eşitsizliğinden $L \neq l$ dir. Bu ise x_n'in asal 2-periyotlu periyodik çözümlere yakınsadığını gösterir ki bu da ispatı tamamlar■.

BÖLÜM 5

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada parametreleri $A, p, r > 0$ ve başlangıç koşulları $x_{-1}, x_0 \in \mathbb{R}^+$ olan

$$x_{n+1} = A + \frac{x_n^p}{x_{n-1}^r}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \ ,$$

denklemi ile parametreleri $A, p, q > 0$ ve başlangıç koşulları $x_{-1}, x_0 \in \mathbb{R}^+$ olan

$$x_{n+1} = A + \frac{x_{n-1}^p}{x_n^q}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \ ,$$

şeklindeki ikinci mertebeden lineer olmayan rasyonel fark denklemlerin, parametrelerine özel şartlar verilerek çözümlerin davranışları ayrıntılı olarak incelenmiştir.

Yapılan bu çalışmada parametreler değiştirilerek yeni çalışmalar yapılabileceği gibi fark denklemlerinin mertebesi artırılıp daha genel çalışmalarda yapılabilir.

KAYNAKLAR

1. Stević, S., “On the Recursive Sequence $x_{n+1} = A + x_n^p / x_{n-1}^r$”, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, Volume 2007, Article ID 40963.

2. Abu-Saris, R.M., Devault, R., Global stability of $y_{n+1} = A + y_n / y_{n-k}$, *Applied Mathematics Letters*, 16, 173-178, 2003.

3. Berenhaut, K.S., Foley, J.D. and Stević, S., “Quantitative bound for the recursive sequence $y_{n+1} = A + y_n / y_{n-k}$”, *Applied Mathematics Letters*, 19(9), pp.983-986, 2006.

4. Stević, S., “On the Recursive Sequence $x_{n+1} = \alpha + x_n^p / x_{n-1}^p$”, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, Volume 2007, Article ID 34517, 9 pages, 2007.

5. Schinas, C.J., Papaschinopoulos, G. and Stefanidou, G. “On the Recursive Sequence $x_{n+1} = A + (x_{n-1}^p / x_n^q)$”, *Advences in Difference Equations*, Volume 2009, Article ID 327649, 11 page, doi:10.1155, 2009.

6. Devault, R., Ladas, G. and Schultz, S. W. “On the recursive sequence $x_{n+1} = A/x_n + 1/x_{n-2}$ ” *Proceeding of the American Mathematical Society*, vol. 126, no. 11, pp. 3257-3261, 1998.

7. Amleh, A. M, Grove, E. A, Ladas, G. and Georgiou, D. A, “On the recursive sequence $x_{n+1} = \alpha + x_{n-1}/x_n$,” *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 233, no. 2, pp. 790-798, 1999.

8. Feuer, J., “Periodic solutions of the Lyness max equation”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 288, 147-160, 2003.

9. Devault, R., Kent, C. and Kosmala, W. “On the recursive sequence $x_{n+1} = \alpha + (x_{n-k}/x_n)$*”, Journal of Difference Equations and Applications*,9(8): 721-730, 2003.

10. El-Owaidy, H.M., Ahmed, A.M. and Mousa, M.S. “On the asimptotic behavior of the difference equation $x_{n+1} = \alpha + (x_{n-k}/x_n)$”, *Applied Mathematics and Computation*, 147, 163-167, 2004.

11. Stević, S., “On the Recursive Sequence $x_{n+1} = \alpha_n + (x_{n-1}/x_n)$”, *Dyn.Contin. Discrete Impuls. Syst*., 10a(6), pp. 911-917, 2003.

12. Stević, S., “Asymptotic behaviour of a nonlinear difference equation”, *Indian J. Pure Appl. Math*., 34(12), pp.1681-1687, 2003.

13. El-Owaidy, H.M., Ahmed, A.M. and Mousa, M.S. "On the asymptotic behavior of the difference equation $x_{n+1} = \alpha + (x_{n-1}^p / x_n^p)$", *Journal of Applied Mathematics Computing*, 12(1-2): 31-37, 2003.

14. Stević, S., "On the Recursive Sequence $x_{n+1} = \alpha + (x_{n-1}^p / x_n^p)$", *Journal of Applied Mathematics Computing*, 18(1-2):229-234, 2005.

15. Berenhaut, K.S. and Stević, S. "The behavior of the positive solutions of the difference equation $x_n = A + (x_{n-2}/x_{n-1})^p$, *Journal of Difference Equations and Applications*,12(9):909-918, 2006.

16. Papaschinopoulos, G., Schinas, C.J. and Stefanidou, G. "On the nonautonomous difference equation $x_{n+1} = A_n + (x_{n-1}^p / x_n^q)$", *Applied Mathematics and Computation*, 217:5573-5580, 2011.

17. Hamza, A.E., Morsy, A., "On the Recursive Sequence $x_{n+1} = \alpha + (x_{n-1}/x_n^k$ ", Applied Mathematics Letters, 22:91-95, 2009.

18. Kulenovic, M.R.S. and Ladas, G. "Dynamics of second order rational difference equations", Chapman & Hall / CRC, 2001.

19. Elaydi, S.N. "An Introduction to Difference Equations", Springer-Verlag, Nev York, Inc, 1996.

20. Kocić, V. and Ladas, G. "Global behavior of nonlineer difference equations of higher order with applications", *Kluwer Academic Publishers Dordrecht*, vol.256, 1993.

21. Çatal, S. "Cebirsel Katsayılı Homojen Diferansiyel Denklemlerin Fark Denklemleri ile Çözümü", *Dokuz Eylül Üniversitesi Fen ve Mühendislik Dergisi*, 6(1): 129-138, 2004.

22. Zhang, D., Ji, W., Wang, L. and Li, X., On the Symmetrical System of Rational Difference Equation $x_{n+1} = A + y_{n-k}/y_n$, $y_{n+1} = A + x_{n-k}/x_n$, "*Applied Mathematics*", 4: 834-837, 2013.

23. Koptur, M, "*Bazı Fark Denklemleri ve Uygulamalari*" https://www.academia.edu/35233282/Bazı_Fark_Denklemleri_ve_Uygulamaları, 23.11.2017.

24. Gümüş, M., & Öcalan, Ö., Global asymptotic stability of a nonautonomous difference equation, "*Journal of Applied Mathematics", 2014*.

25. Okumuş, İ., & Soykan, Y., Dynamical behavior of a system of three-dimensional nonlinear difference equations, "*Advances in Difference Equations*", (1), 223, 2018.

26. Bereketoğlu, H. ve Kutay, V. “ Fark Denklemleri”, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü, *Gazi Kitabevi,* s.44, Ankara, 2012.
27. Öcalan, Ö., İkinci Mertebeden Rasyonel Fark Denklemlerinin Asimptotik Davranışları, Yüksek Lisans Tezi, Afyon Kocatepe Üniversitesi, 2012.
28. Bao, H., Dynamical Behavior of a System of Second-Order Nonlinear Difference Equations, “*International Journal of Differential Equations*”, Article ID 679017, 2015.

ÖZGEÇMİŞ

Ahmet DEĞİRMENCİ 1983 yılında Niğde'de doğdu. İlkokulu ve Ortaokulu Niğde'de, Liseyi Nevşehir'de tamamladı. Yükseköğrenimlerini Erciyes Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü 2006, Anadolu Üniversitesi İşletme Fakültesi İşletme Bölümü 2014, Erciyes Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü 2014, Gaziosmanpaşa Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği 2017 yılında başarı ile tamamlayarak mezun oldu. Yükseköğrenimi hayatı boyunca Kayseri ve Nevşehir' de çeşitli seçkin, özel okul ve dershanelerde matematik öğretmenliği ve yöneticilik görevi yaptı. 2018 yılında Şanlıurfa / Harran Milli Eğitim'de matematik öğretmeni olarak göreve başladı.

2015 yılında Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalında yüksek lisans eğitimine başladı. Evli ve bir çocuk babası olup halen Milli Eğitim Bakanlığında matematik öğretmeni olarak görevine devam etmektedir.

Adres :	Çaltılı Ortaokulu
	Harran / ŞANLIURFA
Telefon:	0532 061 10 50
e-posta:	a.dgrmnc@gmail.com