T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DÖRT PARAMETRELİ FİBONACCİ VE DÖRT PARAMETRELİ LUCAS DİZİLERİ İLE DÖRT PARAMETRELİ FİBONACCİ DİZİLERİNİN MATRİS TEMSİLLERİ ÜZERİNE

Tezi Hazırlayan
Esmahan CİNGÖZ

Tez Danışmanı
Doç. Dr. Yasin YAZLIK

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Şubat 2021
NEVŞEHİR

T.C.

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI ÖZEL SAYI DİZİLERİNİN DÖRT PARAMETRELİ GENELLEMELERİ VE MATRİS TEMSİLLERİ ÜZERİNE

Tezi Hazırlayan
Esmahan CİNGÖZ

Tez Danışmanı
Doç. Dr. Yasin YAZLIK

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Şubat 2021
NEVŞEHİR

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim ve tez çalışmam süresince tüm bilgilerini benimle paylaşan, bana yön veren, destekleyen, düşünceleriyle yolumu açan, kıymetli zamanını bana harcayan ve tezimde büyük emeği olan sayın hocam Doç. Dr. Yasin YAZLIK’ a, maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen değerli aileme ve çok kıymetli çocuklarım Tuna ve Aras’a, teknik yardımlarından dolayı Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Matematik Bölümünün değerli hocalarına teşekkür ederim.

BAZI ÖZEL SAYI DİZİLERİNİN DÖRT PARAMETRELİ GENELLEMELERİ VE MATRİS TEMSİLLERİ ÜZERİNE

(Yüksek Lisans Tezi)

Esmahan CİNGÖZ

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Şubat 2021

ÖZET

Bu tezin temel amacı 4-parametreli genelleştirilmiş Fibonacci ve 4-parametreli genelleştirilmiş Lucas dizilerinin temel özelliklerini döşeme tekniği kullanarak incelemektir. Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde giriş, amaç kapsam ve literatür taraması verilmiştir. İkinci bölümde sayı dizileri ile ilgili genel tanımlar ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde 4-parametreli genelleştirilmiş Fibonacci dizisi ve 4-parametreli genelleştirilmiş Lucas dizileri tanımlanmış, kombinatoriksel yorumlar ve üreteç fonksiyonları verilmiştir. Dördüncü bölümde bu dizilere ait temel özellikleri döşeme tekniği ile elde edilmiştir. Ayrıca elemanları 4-parametreli genelleştirilmiş Fibonacci sayıları olan matrisin temel özellikleri verilmiştir. Son bölümde sonuç ve öneriler verilmiştir.

Anahtar kelimeler:4-parametreli genelleştirilmiş Fibonacci dizileri,4-parametreli, Genelleştirilmiş Lucas dizileri, döşemeler

Tez Danışman: Doç. Dr. Yasin YAZLIK
Sayfa Adeti: 55

ON FOUR-PARAMETERS GENERALIZATION OF SOME SPECIAL NUMBER SEQUENCE AND THEIR MATRIX

(M. Sc. Thesis)

Esmahan CİNGÖZ

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ UNİVERSİTY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLİED SCİENCES

February 2021

ABSTRACT

The main purpose of this thesis is to examine the basic properties of the four-parameters generalized Fibonacci and four-parameters generalized Lucas sequences. Using tiling technique. This thesis consist of five chapters. In the first section, introduction, purpose-scope and literature review are given. In the second section, the general definitions and theorems related to number sequences are given. In the third section, the four –parameters generalized Lucas sequence are defined and their combinatorial interpretations and their generating functions are given. In the fourth section, the basic properties of these sequences are obtained using tiling technique. Also, the basic properties of the matrix whose entries are the four parameters generalized Fibonacci number are given. In the last section, results and discussion are given.

Keywords: Generalized Fibonacci numbers, Generalized Lucas numbers,Tilings
Thesis Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Yasin YAZLIK
Page Number: 55

İÇİNDEKİLER

TABLOLAR LİSTESİ

ŞEKİLLER LİSTESİ

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{N}$	: Doğal Sayılar
$\mathbb{Z}$	: Tamsayılar
$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar
$\leq$	: küçük ve ya eşittir
$\geq$	: büyük veya eşittir
$\neq$	: eşit değildir
$\in$	: elemanıdır
F_n	: *n.* Fibonacci Sayı Dizisi
L_n	: *n.* Lucas Sayı Dizisi
$F(k,n)$	: *k.* Fibonacci sayısı
$F_{r,s}^{\ i}(k,n)$	: Dört parametreli Fibonacci Sayısı
$L_{r,s}^{i}(k,n)$	: Dört parametreli Lucas Sayısı
P_n	: *n.* Pell Sayısı
$P(n)$	: Padovan dizisi
u_n	: *n.* Narayana Sayısı
J_n	: *n.* Jacobsthal Sayısı
P_v	: Genelleştirilmiş Padovan sayısı
Q^n	: *n.* dereceden Fibonacci Sayısı
P^n	: *n.* dereceden Pell sayısı

Q_k	: $k \times k$ tipinde Fibonacci matrisi
$u(n,k)$	: *n*. narayana sayısı
G_n	: Genelleştirilmiş Fibonacci Sayı Dizisi
$F_{k,n}$	: *k*-Fibonacci dizisi
$L_{k,n}$	: *k*-Lucas dizisi
$P_{k,n}$	: *k*-Pell dizisi
$J_{k,n}$	: *k*-Jacobsthal dizisi
$G_{k,n}$	: Genelleştirilmiş *k*-Fibonacci ve *k*-Lucas dizisi
$\{n\}_{s,t}$	: Genelleştirilmiş Fibonacci polinomu
$H_{k,n}$	: Genelleştirilmiş *k*-Horodam dizisi
q_n	: İki periyotlu Fibonacci dizisi
ℓ_n	: İki periyotlu Lucas dizisi
F_p	: Fibonacci *p*-dizisi
L_p	: Lucas *p*-dizisi
$F_{p,m}$	: *m*-genişletilmiş Fibonacci *p*-dizisi
$L_{p,m}$	: *m*-genişletilmiş Lucas *p*-dizisi
f_n	: genelleştirilmiş Fibonacci *p*-dizisi
ℓ_n	: genelleştirilmiş Lucas *p*-dizisi
$F_{k,n}(r)$	: $(k,r)-$Fibonacci dizisi

$F_d(k,n)$: mesafeli Fibonacci dizisi

$F_2(k,n)$: $(2,k)-$mesafeli Fibonacci dizisi

1. BÖLÜM

1.1.Giriş

Hayatı hakkında, kendi kaleme almış olduğu matematik yazıları haricinde çok fazla bilgi bulunamayan Leonardo Fibonacci, XIII. yüzyılda yaşamış bir İtalyan matematikçidir. Çocuk denilecek yaşlardayken Kuzey Afrika'ya giden Fibonacci ve orada günümüzde kullanılmakta olan "0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9," rakamlarına yönelik bilgiler edinmiştir. Fibonacci öğrenmiş olduğu bu bilgiyi "Liber Abaci" isimli kitabında Avrupa'ya tanıtmıştır. Böylece Fibonacci "Matematiği Araplardan alıp Avrupa'ya aktaran kişi" olarak tanınmıştır [1].

Leonardo Fibonacci, özgün bir teori geliştirmiştir. "Fibonacci Sayıları" olarak isimlendirilen bu teori sonucu ortaya çıkan sayılara bağlı olarak "Altın Oran' hesaplanmıştır. Nitekim fen bilimlerinde altın oranın kullanıldığı birçok çalışma yapılmıştır [3,19,24,26]. Fibonacci, Liber Abaci isimli yapıtında, kendinden sonraki matematikçilerin Altın Oran'ı anlamaları adına anahtar niteliğinde olan matematiksel bir bulmaca ortaya koymuştur [29]. Bu bulmaca Liber Abaci'de yer alan pek çok problemden birisi olup, tavşan üretme gibi ilk bakışta matematik ile çok fazla ilgisi olmadığı düşünülen bir konuya ilişkindir. Her terimi, kendisinden önceki iki terimin toplamı olarak hesaplanan 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21… sayı dizisi "Fibonacci Sayı Dizisi" olarak bilinmektedir. Söz konusu bu sayıların her biri Fibonacci Sayısı olarak adlandırılır ve *n*. Fibonacci Sayısı F_n ile gösterilmektedir. Bu sayı dizisi bir tavşan problemi sonucunda meydana gelmiştir.

Bu problem, erişkin bir çift tavşanın her ay için yeni bir yavru çifti verdiği ve de yeni doğmuş olan bir çiftin, bir ay zarfında tam ergenliğe ulaştıkları varsayımıyla, bir tavşan çiftinden başlayıp bir senede oluşan toplam tavşan çifti sayısını sormaktadır. Fibonacci'ye ait bu problem aşağıdaki biçimde özetlenebilir.

i. Ocak ayının ilk günü, kapalı bir alanda bir çift tavşan bulunmaktadır.

ii. Bu çift şubat ayının ilk günü ve sonrasında gelen her ayın ilk gününde bir çift tavşan dünyaya getirmektedir.

iii. Her yeni çift, bir ay içerisinde olgunlaştığı, ömrünün üçüncü ayından itibaren her ayın ilk günü bir çift dünyaya getirdiği ve hiç tavşanın ölmediği kabul edilir.

Bu mantık dahilinde hareket edildiğinde 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, … şeklinde sayı dizisi elde edilecektir. Bu dizinin terimlerinin çok basit bir kurala dayanarak oluştuğu görülebilir. Bu kural "İlk ikisi dışında her sayı kendinden önce gelen iki sayının toplamından oluşmaktadır" şeklinde ifade edilebilir. Bu ise $F_1 = 1$ ve $F_1 = 2$ verildiğinde daha sonra gelen tüm terimlerin bulunabilmesini sağlayan $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ rekürans bağıntısıdır.

Dizinin terimleri arasında bu kadar rahat görülmeyen fakat bundan çok daha ilginç matematiksel ilişkiler bulunmaktadır. Bu ilişkilerden birisi daha önce de ifade edildiği gibi altın orandır. Her Fibonacci sayısı kendisinden önce gelen ardışığına bölündüğünde "altın oran" sayısına yakınsar[11]. $x^2 - x - 1 = 0$ kuadratik denkleminin kökleri $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\alpha = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ şeklindedir. Burada α pozitif köküne altın oran denir [19]. "Altın oran" terimi (Almanca, goldener Schnitt veya der goldene Schnitt) ilk olarak Martin Ohm tarafından, Die Reine Elementar-Mathematik adlı ders kitabının 1835 yılı 2. baskısında kullanılmıştır. Bu terimin İngilizce'de bilinen ilk kullanımı, Encyclopedia Britannica'nın 9. baskısındaki James Sulley'in 1875 tarihli makalesinde yer almaktadır. Phi sembolü "(ρ)", Mark Barr tarafından ilk kez 20. yüzyılın başlarında Yunan heykeltıraş Phidias'ın (yaklaşık MÖ 490-430) anısına kullanılmıştır. Benzer şekilde, alternatif gösterim tau, Yunanca'nın bir kısaltmasıdır ve "kesmek" anlamına gelmektedir [28]. Altın oran birçok farklı alanda kullanılmıştır. Günlük hayatta kullandığımız binlerce dikdörtgen içinde altın dikdörtgeni görebiliriz. Altın dikdörtgenin göze hoş görünen bir çekiciliği vardır ve sanat insanları bunu hala tartışmaktadır. Altın dikdörtgenin giderek küçülen dikdörtgenlerinin köşeleri ve merkezleri sırasıyla birleştirilse altın sarmal elde edilir.[1]

Bu çalışmada yalnızca Fibonacci sayıları için değil, Padovan, Jacobsthal, Pell ve Lucas sayıları da dahil olmak üzere bazı iyi bilinen tamsayı dizilerini aynı anda genelleştiren yeni bir dört parametreli dizi tanıtılmıştır. Dört parametreli dizi olan $F^i_{r,s}(k,n)$:

$F^i_{r,s}(k,n) = rF^i_{r,s}(k,n-i) + sF^i_{r,s}(k,n-k)$ uygun başlangıç koşullarıyla rekürans bağıntısı tanımlanır.

Çalışmada ayrıca Lucas sayıları da L_n tanıtılmıştır:

$$L^i_{r,s}(k,n) = r^{k-1}\left\{\left(k-1\right)sF^i_{r,s}(k,n-k-(k-1)i) + F^i_{r,s}(k,n(k-1)i\right\}$$

$F^i_{r,s}(k,n)$ ve $L^i_{r,s}(k,n)$ ’de $i = r = s = 1$ ve $k = 2$ için sırasıyla F_n ve L_n sayıları elde edilmiştir.

1.2. Amaç ve Kapsam

Bu çalışmanın temel amacı, Da Silva ve arkadaşlarının “On a four -parameter generalization of some special sequences” isimli çalışması detaylı bir şekilde incelemektir. Bu tezde öncelikle Da Silva ve arkadaşlarının tanımlamış oldukları 4-parametreli genelleştirilmiş Fibonacci ve 4-parametreli genelleştirilmiş Lucas dizileri verilmiş ve bazı özellikleri döşeme tekniği ile açıklanmıştır ve literatürde yer alan bu tanımlanmış olan dizilerin özel halleri ile ilgili yeni özdeşlikler de verilmiştir. Son olarak elemanları 4-parametreli genelleştirilmiş Fibonacci sayıları olan matris tanımlanmış ve bu matrisin bazı temel özellikleri incelenmiştir.

1.3. Kaynak Araştırması

Bu kısımda tez içerisinde kullanılan çalışmalarla ilgili bilgiler verilecektir.

Weger (1997), “ Padua and Pisa are exponentially far apart’’ çalışmasında Padovan ve Fibonacci sayıları ile ilişkili Ian Stewart tarafından sorulan soru cevaplandırılmıştır, ayrıca Padovan ve Fibonacci sayıları arasındaki fark ve negatif indisli artan Padovan sayıları üzerine sonuçlar verilmiştir.[10].

Sergio Falcon ve Algen Plaza (2007), “On the fibonacci *k*-numbers’’isimli çalışmalarında, hem klasik Fibonacci hem de klasik Lucas dizilerinin genellemesi olan bir genel Fibonacci dizisi tanımlamışlardır. İyi bilinen (4TLE) paylaşımı yönteminde kullanılan iki geometriksel uygulama üzerinde çalışma yaparken *k*-fibonacci sayılarını bulmuşlardır. Ayrıca bu sayıların çoğu özellikleri elemanter yollarla oluşturulan matrisi kullanarak elde etmişlerdir.[13]

Kocer ve Ark. (2009), “On the $m-$extension of the Fibonacci and Lucas $p-$numbers“ isimli çalışmalarında Fibonacci ve Lucas $p-$sayılarının $m-$genişlemesini tanımlamışlar ve p ve m’nin özel değerleri için sırasıyla $p=1$ ve $m=1$ için bilinen Fibonacci ve Lucas sayılarını, $p=1$ ve $m=2$ için Pell ve Pell-Lucas sayılarını, $m=1$ için Fibonacci ve Lucas p-sayılarını, $p=1$ için Fibonacci $m-$ sayılarını, $m=2$ için Pell ve Pell Lucas $p-$sayılarını elde etmişlerdir. Daha sonra genelleştirilmiş Binet formülünü kullanarak Fibonacci ve Lucas p-sayılarının m-genişlemesinin sürekli fonksiyonlarını elde etmişlerdir [23].

Edson ve Yayenie (2009), “ A new generalization of Fibonacci sequence and extended Binet’s formula“ isimli çalışmalarında iki periyotlu Fibonacci dizilerini tanımlamışlardır. Ayrıca çalışma kapsamında söz konusu bu dizilere ait Binet formülünü ve üreteç fonksiyonlarını ele alarak Cassini, Catalan ve d’Ocagne gibi temel özellikleri ele almışlardır. Çalışmada Binet formüllerin kullanılarak binom katsayılarını içeren toplam formülleri de elde edilmiştir. [12]

Tasci ve Firengiz (2010), “Incomplete Fibonacci and Lucas $p-$numbers” isimli çalışmalarında tamamlanmamış Fibonacci $p-$sayıları ve tamamlanmamış Lucas $p-$sayılarını tanımlamışlardır. Bunun yanı sıra bu dizilere ait özelliklere değinerek rekürans bağlantılarını ele almışlardır. Ayrıca tamamlanmamış Fibonacci $p-$sayıları ve tamamlanmamış Lucas $p-$sayıları arasındaki bazı bağlantıları ortaya koymuşlardır [34].

Yazlık ve Ark.(2011), ”The Generalized (s,t)-Sequence and its matrix sequence” isimli çalışmalarında (s,t)-Fibonacci ve (s,t)-Lucas sayılarının aynı zamanda genellemesi olan yeni bir dizi tanımlamışlardır daha sonra bunu kullanarak genelleştirilmiş (s,t)-matris dizilerini kurmuşlardır. Son olarak (s,t)-Fibonacci ve (s,t)-Lucas ve bunların genellemeleri olan genelleştirilmiş (s,t)-matris dizileri arasında bazı önemli ilişkiler bulmuşlardır.

Falcon (2011), “On the $k-$Lucas numbers” isimli çalışmasında k-Fibonacci sayısının özel bir kareler dizisinden doğal bir yolla k-Lucas dizilerini elde etmiştir. Daha sonra k-Lucas sayılarının özelliklerini çalışmış ve k-Fibonacci sayılarıyla ilişkili olan bazı özellikleri de ispat etmiştir. k-Fibonacci sayılarında olduğu gibi k-Lucas sayıları da pek çok özelliklere sahip olup bunların çoğunu da Binet formülünden yararlanarak ispat etmiştir [14].

Gulec ve Ark. (2013), "A new approach to generalized Fibonacci and Lucas numbers with binomial coefficients" isimli çalışmalarında genelleştirilmiş Fibonacci sayılarını kullanarak, Fibonacci ve Lucas sayılarını elde etmişlerdir. Ayrıca, binom katsayılı genelleştirilmiş Fibonacci sayılarının bazı yeni özelliklerinin yeni bir yolla elde etmişlerdir [18].

Wloch ve Ark. (2013), "On a new type of distance Fibonacci numbers" isimli çalışmalarında, mesafe kavramı ele alınarak Fibonacci sayılarının yeni bir genellemesini tanımlamışlardır. Bu genelleme, mesafeli Fibonacci sayıları ve mesafeli Lucas sayılarıyla ilişkilidir. Ayrıca negatif indisli terimlere sahip bu dizinin bazı temel özellikleri graflar yardımıyla yorumlanmış ve elde edilmiştir.[21]

Uslu ve Uygun (2013), "The *(s,t)*-Jacobsthal and *(s,t)*-Jacobsthal-Lucas Matrix Sequences'' isimli çalışmalarında (s,t)-Jacobsthal ve $(s,t)-$ Jacobsthal Lucas matris dizilerini tanımlamışlardır ve bu matris dizilerinin özelliklerini elde etmişlerdir [35].

Nazmiye Yılmaz Taşkara (2013),"Matrix sequences in terms of padovan and perrin numbers" isimli çalışmalarında elemanları padovan ve perrin sayıları olan matris dizilerini tanımlamışlardır. Bu yeni matris dizilerinin matris özellikleri dikkate alınarak Padovan ve Perrin sayılarıyla ilgili yeni eşitlikler elde etmişlerdir. Ayrıca Padovan ve Perrin matris dizileri arasında bazı önemli eşitlikler elde etmişlerdir [41].

Sergio Falcon (2014), "Generalized *(k,r)*-Fibonacci Numbers" isimli çalışmasında bir rekürans bağıntısıyla sayılar arasındaki bir mesafenin tanımından yola çıkarak *k*-fibonacci sayılarının yeni bir çeşidini elde etmiştir. Bu verilen dizi sadece *k* doğal sayısına bağlı değil, aynı zamanda yeni bir "*r*" parametresine de bağlıdır. Son olarak bu sayıların çeşitli özellikleri de çalışılmıştır. [15]

Amdeberhan ve Ark. (2014), "Generalized Fibonacci Polynomials and Fibonomial Coefficients" isimli çalışmalarında Genelleştirilmiş Fibonacci polinomları ve Fibonomial katsayılarını çalışmışlardır. $n \geq 2$ ve herhangi iki *s, t* değişkenleri için $\{0\}=0$ ve $\{1\}=1$ olmak üzere $\{n\}=s\{n-1\}+t\{n-2\}$ rekürans bağıntısı ile $\{n\}$ polinomları verilmiştir. Daha sonra $\{n\}!=\{1\}\{2\}\ldots\{n\}$ olmak üzere $\left\{\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right\}=\frac{\{n\}!}{\{k\}!\{n-k\}!}$ tanımlanmıştır. Bu oranlar *s,t* değişkenlerinin polinomlarıdır ve özel durumları iyi bilinen binomial katsayıları, fibonomial katsayıları ve q-binomial katsayılarını verir. Ayrıca onların temel bazı özellikleri de gösterilmiştir. Son olarak da katalan sayıları da çalışılmıştır.[2]

Bilgici (2014), "Two generalizations of Lucas sequence" isimli çalışmasında $\ell_0 = 2$ ve $\ell_1 = a$ başlangıç koşullu $\ell_n = \begin{cases} b.\ell_{n-1} + \ell_{n-2}, & n\, çift\, ise \\ a.\ell_{n-1} + \ell_{n-2}, & n\, tek\, ise \end{cases}$ rekürans bağıntısıyla genelleştirilmiş Lucas dizisini tanımlamıştır, bu dizinin bazı özelliklerini elde etmiş ve Edson ve Yayanie tarafından tanımlanan genelleştirilmiş Fibonacci dizisi ve bu dizi arasındaki bazı ilişkileri vermiştir. [7].

Ramirez ve Sirvent (2015), "A note on the k-Narayana sequence" isimli çalışmalarında, rekürans bağıntıları bu sayıların kombinatoriyel özelliklerini ve bu sayıların ilk n terimlerinin toplamının kombinatoriyel özelliklerini çalışmışlardır. Ayrıca k-Narayana dizisi ve kıvrılmış k-Narayana dizisi ile Hessenberg matrislerinin bir tipinin determinant ve permanentsleri arasındaki ilişkileri de vermişlerdir [31].

Ramirez (2015), "Matrices and the generalized Fibonacci-Narayana sequence" isimli çalışmasında genelleştirilmiş Fibonacci-Narayana dizisini tanımlamışlardır daha sonra üst Hessenberg matrisinin bir tipinin determinantları permanentleri ve genelleştirilmiş Fibonacci-Narayana dizileri arasındaki bazı ilişkileri elde etmişlerdir [30].

Yazlık ve Ark. (2018), "A new generalization of Fibonacci and Lucas p−numbers" isimli çalışmalarında yeni bir genelleştirilmiş Fibonacci p – sayı dizisi ve Lucas p – sayı dizisi tanımlayarak bu sayı dizilerinin Binet formülü ve bazı eşitliklerini ortaya koymuşladır [40].

Uygun ve Tümbas (2018), "Generalized k-Jacobsthal Sequence" isimli çalışmalarında ikinci mertebeden yeni bir genelleştirilmiş Jacobsthal dizisi tanımlamışlar ve bu dizinin Binet formülünü, üreteç fonksiyonunu ve bazı özelliklerini ortaya koymuşlardır [36].

2. BÖLÜM

Bu bölümde tez içerisinde kullanılacak olan genel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

2.1. Sayı Dizileri İle İlgili Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1 ([24]). $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ başlangıç koşulları ve $n \geq 2$ tamsayıları için

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlanan $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisine Fibonacci dizisi denir. Eşitlik (2.1) sabit katsayılı 2. mertebeden bir lineer fark denklemidir. Bu fark denklemine ait karakteristik denklem $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ şeklindedir. Karakteristik denkleme ait kökler ise sırasıyla

$\lambda_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\lambda_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$' dir. Fibonacci sayısının *n*. terimi için Binet formülü,

$$F_n = \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2} \tag{2.2}$$

biçimindedir. Fibonacci dizisinin üreteç fonksiyonu ise,

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = \frac{1}{1-x-x^2}$ şeklindedir. Öte yandan $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ olmak üzere Q matrisinin *n*. kuvveti elemanları Fibonacci sayıları olan $Q^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$ matrisini üretir.

Tanım 2.1.2 ([24]). $L_0 = 2, L_1 = 1$ başlangıç koşulları ve $n \geq 2$ tamsayı olmak üzere,

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \tag{2.3}$$

ile tanımlanan $\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sayı dizisine Lucas sayı dizisi denir. $\lambda_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\lambda_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere Lucas sayılarına ait Binet formülü,

$$L_n = \lambda_1^n + \lambda_2^n \tag{2.4}$$

biçimindedir. Ayrıca Lucas dizisine ait üreteç fonksiyonu ise,

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n x^n = \frac{2-x}{1-x-x^2} \tag{2.5}$$

şeklindedir. Eşitlik (2.4)'ten $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{L_{n+1}}{L_n} = \lambda_1$ olduğu kolayca görülür. Burada λ_1 altın orandır.

Tanım 2.1.3 ([17]). $P(0)=P(1)=P(2)=1$ başlangıç koşulları ve $n\geq 3$ tamsayıları için

$$P(n)=P(n-2)+P(n-3) \tag{2.6}$$

ile tanımlanan $\{P(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisine Padovan dizisi denir. Padovan dizisinin ilk birkaç terimi 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21, 28, ... şeklindedir. Öte yandan $P=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$ olmak üzere P matrisinin n. kuvveti, elemanları Padovan sayıları olan $P^n=\begin{bmatrix}P(n-5)&P(n-3)&P(n-4)\\P(n-4)&P(n-2)&P(n-3)\\P(n-3)&P(n-1)&P(n-2)\end{bmatrix}$ matrisini üretir. [17]

Tanım 2.1.4. ([24]). $J_0=0$, $J_1=1$ başlangıç koşulları ve $n\geq 2$ koşulunu sağlayan tamsayılar olmak üzere**,**

$$J_n=J_{n-1}+2J_{n-2} \tag{2.7}$$

rekürans bağıntısı ile verilen $\{J_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisine Jacobsthal sayı dizisi denir. Sırasıyla $n=0,1,2,3,...$ için Jacobsthal sayıları 0, 1, 1, 3, 5, 11, 21,… şeklinde devam eder. Jacobsthal dizisinin rekürans bağıntısına ait karakteristik denklem $r^2-r-2=0$ şeklindedir. Karakteristik denkleme ait kökler ise $\phi=2$ ve $\varphi=-1$ olup Jacobsthal sayısının Binet formülü,

$$J_n=\frac{\phi^n-\varphi^n}{\phi-\varphi} \tag{2.8}$$

dir. Ayrıca Jacobsthal dizisinin üreteç fonksiyonu ise,

$$\sum_{n=0}^{\infty}J_nx^n=\frac{x}{1-x-2x^2} \tag{2.9}$$

biçiminde yazılır.

Tanım 2.1.5. ([24]). $P_0=0$ ve $P_1=1$ başlangıç koşulları ve $n\geq 2$ için koşulunu sağlayan tamsayılar olmak üzere,

$$P_n=2P_{n-1}+P_{n-2} \tag{2.10}$$

rekürans bağıntısı ile verilen $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ şeklindeki tamsayı dizisine Pell sayı dizisi denir. Eşitlik (2.10)'un karakteristik denklemi $r^2 - 2r - 1 = 0$ biçimindedir. Karakteristik denkleme ait kökler sırası ile $\gamma = 1+\sqrt{2}$ ve $\delta = 1-\sqrt{2}$'dir. *n*. Pell sayısı için Binet formülü

$$P_n = \frac{\lambda^n - \delta^n}{\lambda - \delta} \tag{2.11}$$

şeklindedir. Ayrıca Pell dizisinin üreteç fonksiyonu ise;

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n x^n = \frac{x}{1-2x-x^2} \tag{2.12}$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.1.6 $([32])$**.** $1 \le k \le n$ için

$$u(n,\, k) = \frac{1}{n}\binom{n}{k}\binom{n}{k-1} \tag{2.13}$$

bağıntısı ile tanımlanan $u(n,\, k)$ dizisine Narayana dizisi denir. Narayana sayılarının ilk 8 terimi Tablo 1'de verilmiştir.

Tablo 2.1. Narayana Sayıları

K	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
N								
1	1							
2	1	1						
3	1	3	1					
4	1	6	6	1				
5	1	10	20	10	1			
6	1	15	50	50	15	1		
7	1	21	105	175	105	21	1	
8	1	28	196	490	490	196	28	1

Tanım 2.1.7 ([24])**.** *a* ve *b* herhangi reel sayılar olmak üzere, $G_0 = a, G_1 = b,$ başlangıç koşulları ve $n \ge 2$ koşulunu sağlayan tam sayılar olmak üzere,

$$G_n = G_{n-1} + G_{n-2} \tag{2.14}$$

şeklinde tanımlanan $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisine genelleştirilmiş Fibonacci dizisi denir. Genelleştirilmiş Fibonacci dizisinin ilk birkaç terimi *a, b, a+ b, a+2, 2b+3b, 3a+5b, ...*

şeklindedir.

Tanım 2.1.8 ([13]). k,n, $k \geq 1$ ve $n \geq 2$ koşullarını sağlayan birer tamsayı $F_{k,0} = 0$ $F_{k,1} = 1$ başlangıç koşulları olmak üzere,

$$F_{k,n} = kF_{k,n-1} + F_{k,n-2} \tag{2.15}$$

bağıntısını sağlayan $\{F_{k,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisine *k*-Fibonacci dizisi denir.

k-Fibonacci dizisinin karakteristik denklemi $r^2 - kr - 1 = 0$ biçimindedir. Karakteristik denkleme ait kökler $r_1 = \dfrac{k + \sqrt{k^2+4}}{2}$ ve $r_2 = \dfrac{k - \sqrt{k^2+4}}{2}$ şeklindedir. *k*-Fibonacci sayısı için Binet formülü $F_{k,n} = \dfrac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2}$ dir.

Tanım 2.1.9 ([14]) k,n, $k \geq 1$ ve $n \geq 2$ koşullarını sağlayan birer tamsayı $L_{k,0} = 2$ ve $L_{k,1} = k$ başlangıç koşulları olmak üzere,

$$L_{k,n} = kL_{k,n-1} + L_{k,n-2} \tag{2.16}$$

bağıntısı ile tanımlanan $\{L_{k,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisine *k*-Lucas dizisi denir.

n. k-Lucas sayısı için Binet formülü $r_1 = \dfrac{k + \sqrt{k^2+4}}{2}$ ve $r_2 = \dfrac{k - \sqrt{k^2+4}}{2}$ ise,

$$L_{k,n} = r_1^n + r_2^n \tag{2.17}$$

dir.

Tanım 2.1.10 $([55])$. k,n, $k \geq 1$ ve $n \geq 2$ koşullarını sağlayan birer tamsayı $P_{k,0} = 0$ *ve* $P_{k,1} = 1$ başlangıç koşulları olmak üzere,

$$P_{k,n+1} = 2P_{k,n} + kP_{k,n-1} \tag{2.18}$$

bağıntısını sağlayan $\left(P_{k,n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisine *k*-Pell dizisi denir.

Tanım 2.1.11 $([27])$. $k \geq 1$ ve $n \geq 2$ koşullarını sağlayan birer tamsayı $J_{k,0} = 0$ ve $J_{k,1} = 1$ başlangıç koşulları olmak üzere $n \geq 1$ için

$$J_{k,n+1} = kJ_{k,n} + J_{k,n-1} \tag{2.19}$$

bağıntısıyla tanımlanan $\{J_{k,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisine *k*-Jacobsthall dizisi denir.

Tanım 2.1.12 $([35])$. k, n , $k \geq 1$ ve $n \geq 2$ koşullarını sağlayan birer tamsayı a ve b birer reel sayı $G_{k,0} = a$ ve $G_{k,1} = b$ başlangıç koşulları olmak üzere,

$$G_{k,n} = kG_{k,n-1} + G_{k,n-2} \tag{2.20}$$

bağıntısını sağlayan $\{G_{k,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisine Genelleştirilmiş *k*-Fibonacci ve *k*-Lucas dizisi denir.

Tanım 2.1.13 $([14])$. $n \geq 2$ koşulunu sağlayan bir tamsayı *s* ve *t* iki değişken olmak üzere $\{0\}_{s,t} = 0, \{1\}_{s,t} = 1$ başlangıç koşullarını sağlayan

$$\{n\}_{s,t} = s\{n-1\}_{s,t} + t\{n-2\}_{s,t} \tag{2.21}$$

polinomuna genelleştirmiş fibonacci polinomu denir.

Tanım 2.1.14 ([38]). $k > 0$ ve $f(k)$ ve $g(k)$ *k*'nın skaler değerli polinomları ve $f^2(k) + 4g(k) > 0$ $H_{k,0} = a$ ve $H_{k,1} = b$ başlangıç koşulları olmak üzere,

$$H_{k,n} = f(k)H_{k,n-1} + g(k)H_{k,n-2} \tag{2.22}$$

bağıntısı ile tanımlanan $H_{k,n}$ dizisine genelleştirilmiş *k*-Horodam dizisi denir.

Tanım 2.1.15 ([12]). a ve b 0'dan farklı herhangi iki reel sayı ve $n \geq 2$ koşulunu sağlayan bir tamsayı $q_0 = 0$ ve $q_1 = 1$ başlangıç koşulları olmak üzere,

$$q_{n+2} = \begin{cases} aq_{n+1} + q_n, & n \equiv 0 \pmod 2 \\ bq_{n+1} + q_n, & n \equiv 1 \pmod 2 \end{cases} \tag{2.23}$$

bağıntısı ile tanımlanan $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisine 2-periyotlu Fibonacci dizisi denir. 2-periyotlu Fibonacci dizisinin karakteristik denklemi $x^2 - abx - ab = 0$ ' dır. Karakteristik denkleme ait kökler $\alpha = \frac{ab+\sqrt{a^2b^2+4ab}}{2}$ ve $\beta = \frac{ab-\sqrt{a^2b^2+4ab}}{2}$ 'dir. $\xi(m) = m - 2\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$ ise *n.* iki periyotlu Fibonacci sayısı için Binet formülü

$$q_n = \left(\frac{a^{1-\xi(n)}}{ab^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}} \right) \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \text{ dir.} \tag{2.24}$$

Tanım 2.1.16 ([7]). a ve b sıfırdan farklı herhangi iki reel sayı ve $n \geq 2$ koşulunu sağlayan birer tamsayı $\ell_0 = 2$ *ve* $\ell_1 = a$ başlangıç koşulları olmak üzere,

$$\ell_{n+2} = \begin{cases} b\ell_{n+1} + \ell_n, & n \equiv 0(\mathrm{mod}\,2) \\ a\ell_{n+1} + \ell_n, & n \equiv 1(\mathrm{mod}\,2) \end{cases} \tag{2.25}$$

bağıntısı ile tanımlanan $\{\ell_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisine 2-periyotlu Lucas dizisi denir. *n.* iki periyotlu Lucas dizisi için $\alpha = \frac{ab+\sqrt{a^2b^2+4ab}}{2}$ ve $\beta = \frac{ab-\sqrt{a^2b^2+4ab}}{2}$ karakteristik denkleme ait kökler olmak üzere, iki periyotlu Lucas sayısı için Binet formülü

$$\ell_n = \left(\frac{a^{\xi(n)}}{ab^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor}} \right) \alpha^n + \beta^n \tag{2.26}$$

dir.

Tanım 2.1.17 ([32]). $p, n\ ,\ p > 0\ \mathit{ve}\ n \geq p+1$ koşullarını sağlayan birer tamsayı ve $F_p(0) = 0\ F_p(1) = 1\ F_p(2) = 2, \ldots, F_p(p) = 1$ başlangıç koşulları olmak üzere,

$$F_p(n) = F_p(n-1) + F_p(n-p-1) \quad n \in \mathbb{N} \tag{2.27}$$

bağıntısıyla tanımlanan diziye Fibonacci *p*-dizisi denir.

Tanım 2.1.18 ([23]). $p, n\ ,\ p > 0\ \mathit{ve}\ n \geq p+1$ koşullarını sağlayan birer tamsayı $L_p(1) = 1$, $L_p(2) = 1, \ldots\ldots, L_p(p) = 1$ başlangıç koşulları olmak üzere,

$$L_p(n)=L_p(n-1)+L_p(n-p-1)\ ,\ n\in\mathbb{N} \tag{2.28}$$

bağıntısıyla tanımlanan diziye Lucas *p*-dizisi denir.

Tanım 2.1.19 $([39])$. $m, p,\ m>0\ \ p>0\ ve\ n\geq p+1$ koşullarını sağlayan birer tamsayı $F_{p,m}(0)=0\,F_{p,m}(1)=1, F_{p,m}(2)=m,...., F_{p,m}(p)=m^{p-1}$ başlangıç koşulları olmak üzere,

$$F_{p,m}(n)=mF_{p,m}(n-1)+F_{p,m}(n-p-1)=0\ ,n\in\mathbb{N} \tag{2.29}$$

bağıntısıyla tanımlanan diziye *m*-genişletilmiş Fibonacci *p*-dizisi denir.

Tanım 2.1.20 $([39])$ $m, p,\ m>0\ \ p>0\ \ ve\ \ n\geq p+1$

$L_{p,m}(0)=p+1, L_{p,m}(1)=m, L_{p,m}(2)=m^2,..., L_{p,m}(p)=m^p$ başlangıç koşulları olmak üzere,

$$L_{p,m}(n)=mL_{p,m}(n-1)+L_{p,m}(n-p-1)=0\ ,n\in\mathbb{N} \tag{2.30}$$

bağıntısıyla tanımlanan diziye *m*-genişletilmiş Lucas *p*-dizisi denir.

Tanım 2.1.21 $([44])$. $p, n,\ p>0\ ve\ n\geq p+1$ koşullarını sağlayan birer tamsayı ve a ve b pozitif reel sayıları için $f_0=0,\ f_1=1, f_2=a,......, f_p=a^{\left\lfloor\frac{p}{2}\right\rfloor}b^{\left\lfloor\frac{p-1}{2}\right\rfloor}$ başlangıç koşulları olmak üzere,

$$f_n=\begin{cases} af_{n-1}+f_{n-p-1}, & n\equiv 0 \pmod 2 \\ bf_{n-1}+f_{n-p-1}, & n\equiv 1 \pmod 2 \end{cases} \tag{2.31}$$

bağıntısıyla tanımlanan $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ diziye genelleştirilmiş Fibonacci *p*-dizisi denir.

Tanım 2.1.22 $([44])$ $p, n\ p>0\ ve\ n\geq p+1$ koşullarını sağlayan birer tamsayı ve a ve b pozitif reel sayılar olsun. $\ell_0=p+1, \ell_1=a, \ell_2=ab,....., \ell_p=a^{\left\lfloor\frac{p+1}{2}\right\rfloor}b^{\left\lfloor\frac{p}{2}\right\rfloor}$ başlangıç koşulları olmak üzere,

$$\ell_n = \begin{cases} b\ell_{n-1} + \ell_{n-p-1}, & n \equiv 0 \pmod 2 \\ a\ell_{n-1} + \ell_{n-p-1}, & n \equiv 1 \pmod 2 \end{cases} \tag{2.32}$$

bağıntısıyla tanımlanan $\{\ell_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisine genelleştirilmiş Lucas p-dizisi denir.

Tanım 2.1.23 ([28]). $k, n, r,\ k \geq 1, n \geq 0, r \geq 1$ koşullarını sağlayan birer tamsayı ve $F_{k,1}(1) = k$ dışında $n = 0,1,2,.....,r-1$ için $F_{k,n}(r) = 1$ başlangıç koşulları olmak üzere, $n \geq r$ için

$$F_{k,n}(r) = kF_{k,n-r}(r) + F_{k,n-2}(r) \tag{2.33}$$

bağıntısıyla tanımlanan $F_{k,n}(r)$ dizisine (*k,r)*-Fibonacci dizisi denir.

Tanım 2.1.24 ([13]). $k, n,\ k \geq 2 \ ve \ n \geq 0$ koşullarını sağlayan birer tamsayı olsun. $0 \leq n \leq k-1 \, için \, F_d(k,n) = 1$ başlangıç koşullarını sağlayan $n \geq k$ için

$$F_d(k,n) = F_d(k,n-k+1) + F_d(k,n-k) \tag{2.34}$$

bağıntısıyla tanımlanan $F_d(k,n)$ dizisine mesafeli Fibonacci dizisi denir.

Tanım 2.1.25 ([13]). $k, n, k \geq 1 \ ve \ n \geq 2$ koşullarını sağlayan birer tamsayı olmak üzere, $i = 0,1,....,k-1$ için $F_2(k,i) = 1$ başlangıç koşulunu sağlayan $n \geq k$ için

$$F_2(k,n) = F_2(k,n-2) + F_2(k,n-k) \tag{2.35}$$

dizisine $(2,k)-$mesafeli Fibonacci dizisi denir.

BÖLÜM 3

Bu bölümde [9]' de verilen Silva ve ark. 2018 yılında yapmış olduğu "*On a four-parameter generaliztion of some special sequence*" isimli çalışmasındaki 4-parametreli genelleştirilmiş Fibonacci dizisi ve 4-parametreli genelleştirilmiş Lucas dizileri tanımlanmış ve bazı özellikleri döşeme tekniği ile açıklanmıştır.

3.1 4-Parametreli Genelleştirilmiş Fibonacci Dizileri ve 4-Parametreli Genelleştirilmiş Lucas Dizileri

Tanım 3.1.1 $i, k, r, s \geq 0$ ve $n \geq -1$ koşullarını sağlayan tamsayılar, başlangıç koşulları

$$F_{r,s}^{i}(k,n) = \begin{cases} r^{\left\lfloor \frac{n+1}{i} \right\rfloor}, i \leq k \; ve \; n = -1, 0, 1, .., k-2 \\ s^{\left\lfloor \frac{n+1}{k} \right\rfloor}, k < i \;\; ve \;\; n = -1, 0, 1, ..., i-2 \end{cases} \tag{3.1}$$

ve $F_{r,s}^{i}(k,n) = rF_{r,s}^{i}(k,n-i) + sF_{r,s}^{i}(k,n-k)$, $n \geq \max\{k,i\} - 1$ rekürans bağıntısı ile tanımlanan $F_{r,s}^{i}(k,n)$ reel sayı dizisine 4-parametreli genelleştirilmiş Fibonacci dizisi denir.

Tanım 3.1.2 $i, k, r, s \geq 1$ ve $n \geq -1$ koşullarını sağlayan tamsayılar, başlangıç koşulları

$$L_{r,s}^{i}(k,n) = \begin{cases} F_{r,s}^{i}(k,n) \quad \text{n=0,1,2,…,k-2} \\ F_{r,s}^{i}(k,n) - r^{\left\lfloor \frac{n+1}{i} \right\rfloor}, n = k-1, \ldots, k + (k-1)i - 2 \end{cases}$$

ve $k > i$ ve $n \geq k + (k-1)i - 1$ için

$$L_{r,s}^{i}(k,n) = r^{k-1}\left\{(k-1)sF_{r,s}^{i}\left(k, n-k-(k-1)i\right) + F_{r,s}^{i}\left(k, n-(k-1)i\right)\right\} \tag{3.2}$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanan $L_{r,s}^{i}(k,n)$ reel sayı dizisine 4-parametreli genelleştirilmiş Lucas dizisi denir.

$F_{r,s}^{i}(k,n)$ ve $L_{r,s}^{i}(k,n)$ sayı dizileri i, k, r, s 'nin farklı değerleri için literatürde iyi bilinen bir çok sayı dizisine indirgenebilir. Örneğin Fibonacci dizisi, $F_{r,s}^{i}(k,n)$ dizisinden iki farklı yolla elde edilebilir. Tanım 3.1.'deki rekürans bağıntısında ya $r = s = i = 1$ ve $k = 2$ ya da $r = s = k = 1$ ve $i = 2$ olarak elde edilir.

Aşağıda $F^{i}_{r,s}(k,n)$ ve $L^{i}_{r,s}(k,n)$ dizilerinden indirgenerek elde edilen dizilerin tablosu verilmiştir.

Tablo 3.1. $F^{i}_{r,s}(k,n)$ ve $F^{i}_{r,s}(k,n)$ Dizilerinden Elde Edilen Bazı Diziler

i	***k***	***r***	***s***	$\mathrm{F}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{r,s}}(\mathrm{k,n})$ veya $\mathrm{L}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{r,s}}(\mathrm{k,n})$	**Başlangıç Koşulları**	**Kaynaklar**
1	2	*1*	*1*	$F^{1}_{1,1}(2,n)=$ $F^{1}_{1,1}(2,n-1)+F^{1}_{1,1}(2,n-2), n\geq 1$	$F^{1}_{1,1}(2,-1)=1$ $F^{1}_{1,1}(2,0)=1$	***Fn**, n. Fibonacci sayısı*
1	2	*1*	*1*	$L^{1}_{1,1}(2,n)=$ $L^{1}_{1,1}(2,n-1)+L^{1}_{1,1}(2,n-2), n\geq 3$	$L^{1}_{1,1}(2,1)=1$ $L^{1}_{1,1}(2,2)=3$	***Ln**, n. Lucas sayısı*
1	2	2	*1*	$F^{1}_{2,1}(2,n)=$ $2F^{1}_{2,1}(2,n-1)+F^{1}_{2,1}(2,n-2), n\geq 1$	$F^{1}_{2,1}(2,-1)=1$ $F^{1}_{2,1}(2,0)=2$	***Pn**, n.Pell sayısı*
1	2	*1*	2	$F^{1}_{1,2}(2,n)=$ $F^{1}_{1,2}(2,n-1)+2F^{1}_{1,2}(2,n-2), n\geq 1$	$F^{1}_{1,2}(2,-1)=1$ $F^{1}_{1,2}(2,0)=1$	***Jn**, n. Jacobsthal sayısı*
2	3	*1*	*1*	$F^{2}_{1,1}(3,n)=$ $F^{2}_{1,1}(3,n-2)+F^{2}_{1,1}(3,n-3), n\geq 2$	$F^{2}_{1,1}(3,n)=1$ *n=-1,0,1*	***Pv(n)**, n.Padovan sayısı*
1	3	*1*	*1*	$F^{1}_{1,1}(3,n)=$ $F^{1}_{1,1}(3,n-1)+F^{1}_{1,1}(3,n-3), n\geq 2$	$F^{1}_{1,1}(3,n)=1$ *n=-1,0,1*	***un**, n. Narayana sayısı [16]*
1	4	*1*	*1*	$F^{1}_{1,1}(4,n)=$ $F^{1}_{1,1}(4,n-1)+F^{1}_{1,1}(4,n-4), n\geq 3$	$F^{1}_{1,1}(4,n)=1$ *n=-1,0,1,2*	
1	2	*a*	*b*	$F^{1}_{a,b}(2,n)=$ $aF^{1}_{a,b}(2,n-1)+bF^{1}_{a,b}(2,n-2), n\geq 1$	$F^{1}_{a,b}(2,-1)=1$ $F^{1}_{a,b}(2,0)=a$	$p_n^{a,b}$, [5]
1	2	*s*	*t*	$F^{1}_{s,t}(2,n)=$ $sF^{1}_{s,t}(2,n-1)+tF^{1}_{s,t}(2,n-2), n\geq 1$	$F^{1}_{s,t}(2,-1)=1$	$(n)_{s,t}$, [2]
1	*k*	*1*	*t*	$F^{1}_{1,t}(k,n)=$ $F^{1}_{1,t}(k,n-1)+tF^{1}_{1,t}(k,n-k), n\geq k-1$	$F^{1}_{1,t}(k,n)=1$ $n=-1,\ldots,k-2$	$J(k,t,n)$, [33]
1	2	*k*	*1*	$F^{1}_{k,1}(2,n)=$ $kF^{1}_{k,1}(2,n-1)+F^{1}_{k,1}(2,n-2), n\geq 1$	$F^{1}_{k,1}(2,-1)=1$ $F^{1}_{k,1}(2,0)=k$	$F_{k,n}$, [13]
1	*k*	*1*	*1*	$F^{1}_{1,1}(k,n)=$ $F^{1}_{1,1}(k,n-1)+F^{1}_{1,1}(k,n-k), n\geq k-1$	$F^{1}_{1,1}(k,n)=1$ $n=-1,\ldots,k-2$	$F_1(k,n)$, [27] $F_1(k,n)=F^{i}_{r,s}(k,n+k-2)$
2	*k*	*1*	*1*	$F^{2}_{1,1}(k,n)=$ $F^{2}_{1,1}(k,n-2)+F^{1}_{1,1}(k,n-k), n\geq k-1$	$F^{2}_{1,1}(k,n)=1$ $n=-1,\ldots,k-2$	$F_2(k,n)$, [21]
k-1	*k*	*1*	*1*	$F^{k-1}_{1,1}(k,n)=$ $F^{k-1}_{1,1}(k,n-k+1)+F^{k-1}_{1,1}(k,n-k), n\geq k-1$	$F^{k-1}_{1,1}(k,n)=1$ $n=-1,\ldots,k-2$	$F_{k-1}(k,n)$, [4]
r	2	*k*	*1*	$F^{r}_{k,1}(2,n)=$ $kF^{r}_{k,1}(2,n-r)+F^{r}_{k,1}(2,n-2), n\geq r-1$	$F^{r}_{k,1}(2,n)=1$ $n=-1,\ldots,r-2$	$F_{k,n}(r)$, [15]
1	2	*k*	2	$F^{1}_{k,1}(2,n)=$ $kF^{1}_{k,1}(2,n-1)+2F^{1}_{k,1}(2,n-2), n\geq 1$	$F^{1}_{k,1}(2,-1)=1$ $F^{1}_{k,1}(2,0)=k$	$J_{k,n}$, [22]
1	2	2	*k*	$F^{1}_{2,k}(2,n)=$ $2F^{1}_{2,k}(2,n-1)+kF^{1}_{2,k}(2,n-2), n\geq 1$	$F^{1}_{2,k}(2,-1)=1$ $F^{1}_{2,k}(2,0)=2$	$P_k(n)$, [8]

1	*c*	*1*	*1*	$F^1_{1,1}(c,n)=$ $F^1_{1,1}(c,n-1)+F^1_{1,1}(c,n-c),n\geq c-1$	$F^1_{1,1}(c,n)=1$ $n=-1,...,c-2$	G_n, [6]

Aşağıdaki teorem 4-pararametreli genelleştirilmiş Lucas dizileri için yeni bir rekurans bağıntısı verir.

Teorem 3.1.1. $k,n,i,\ k>i$ ve $n\geq 2k+(k-1)i-1$ koşullarını sağlayan tamsayılar olmak üzere,

$$L^i_{r,s}(k,n)=rL^i_{r,s}(k,n-i)+sL^i_{r,s}(k,n-k)$$

dir.

İspat. Tanım 3.1.1 ve Tanım 3.1.2 ‘den

$$L^i_{r,s}(k,n)=(k-1)r^{k-1}sF^i_{r,s}(k,n-k-(k-1)i)+r^{k-1}F^i_{r,s}(k,n-(k-1)i)$$

$$=(k-1)r^ksF^i_{r,s}(k,n-k-(k-1)i-i)+(k-1)r^{k-1}s^2F^i_{r,s}(k,n-k-(k-1)i-k)$$

$$+r^kF^i_{r,s}(k,n-(k-1)i-i)+r^{k-1}sF^i_{r,s}(k,n-(k-1)i-k)$$

ve

$$L^i_{r,s}(k,n)=(k-1)r^ksF^i_{r,s}(k,n-k-ki)+(k-1)r^{k-1}s^2F^i_{r,s}(k,n-2k-ki+i)$$

$$+r^kF^i_{r,s}(k,n-ki)+r^{k-1}sF^i_{r,s}(k,n-ki+i-k)$$

olarak bulunur. Böylece,

$$L^i_{r,s}(k,n)=(k-1)r^ksF^i_{r,s}(k,n-i-(k(i+1)-i))+r^k\ F^i_{r,s}(k,n-i-i(k-1))$$

$$+(k-1)r^{k-1}s^2F^i_{r,s}(k,n-k-(k(i+1)i-i))+r^{k-1}sF^i_{r,s}(k,n-k-(k-1)i)$$

$$=rL^i_{r,s}(k,n-i)+sL^i_{r,s}(k,n-k)$$

dir.■

Burada $i=r=s=1$ ve $k=2$ alınırsa literatürde iyi bilinen Lucas dizisine indirgenir.

3.2. $F_{r,s}^{i}(k,n)$ ve $L_{r,s}^{i}(k,n)$ Dizilerinde Kombinatoriksel Yorumlar

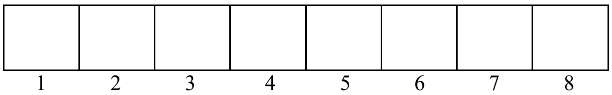
Bu bölümde $F_{r,s}^{i}(k,n)$ ve $L_{r,s}^{i}(k,n)$ dizileri için üç farklı kombinatoriksel yaklaşım verilmiştir. Literatürde iyi bilinen Benjamin ve Quinn'in, [37], döşemeler kullanılarak Fibonacci sayılarının yorumuna ilaveten [24]'de döşemeler kullanılarak genelleştirilmiş Fibonacci ve genelleştirilmiş Lucas sayılarının kombinatoriksel yorumları bu bölümde verilen kombinatoriksel yorumlardan birinin özel halleridir.

3.2.1 Döşeme Sayısı

Döşemeleri kullanarak kombinatoriksel yorumları göstermek için, $(n+1)$-levha olarak adlandırılan $1\times(n+1)$ boyutlu levhalar dikkate alınacaktır. Burada her zaman olduğu gibi ilk pozisyon en soldaki kare iken, en sağdaki kare $(n+1)$.pozisyonu gösterir. (Şekil 3.1'e bakınız.)

Levhayı döşemek için kullanılan parçalar 1×1 boyutlu siyah kareler, $1\times i$ boyutlu dikdörtgenler (*i*-dikdörtgenleri) ve $1\times k$ boyutlu dikdörtgenler (*k*-dikdörtgenleri)' dir. Burada *i*-dikdörtgenleri ve *k*-dikdörtgenleri sırasıyla *r* ve *s* renklerinden biri ile boyanabilir. Yukarıdaki parçalar kullanılarak $f_{r,s}^{i}(k,n)$, $(n+1)$-levhanın döşemelerin sayısı olsun. Öyle ki siyah kareler sadece ilk $\min\{i,k\}-1$ pozisyonda bulunabilir. Öte yandan $n<\max\{k,i\}-1$ olsun. Eğer $i\le k$ ise $-1\le n\le k-2$ olduğundan, bu durumda, *k*-dikdörtgenini içeren döşemeler bulunmaz. Bu levhaya $\left\lfloor \frac{n+1}{i} \right\rfloor$ tane *i*-dikdörtgenler ekleyebilirken ve her bir *i*-dikdörtgenleri *r* farklı şekillerde boyanabilirken $r^{\left\lfloor \frac{n+1}{i} \right\rfloor}$ döşemeye sahip olunur, yani $f_{r,s}^{i}(k,n)=r^{\left\lfloor \frac{n+1}{i} \right\rfloor}$ olur. Benzer şekilde, eğer $k<i$ ise, $f_{r,s}^{i}(k,n)=s^{\left\lfloor \frac{n+1}{k} \right\rfloor}$'dır. Eğer $n\ge\max\{k,i\}-1$ ise, bütün döşemeler $f_{r,s}^{i}(k,n)$ tarafından numaralandırılır ve sayılan tüm döşemeler ya bir *i*-dikdörtgen veya *k*-dikdörtgeni ile bitirilir. Bu son parça kaldırılarak, son parçanın bir *i*-dikdörtgen veya bir *k*-dikdörtgen olmasına göre, sırasıyla geriye ya bir $rf_{r,s}^{i}(k,n-i)$ ya da $sf_{r,s}^{i}(k,n-k)$ döşemeleri kalır.

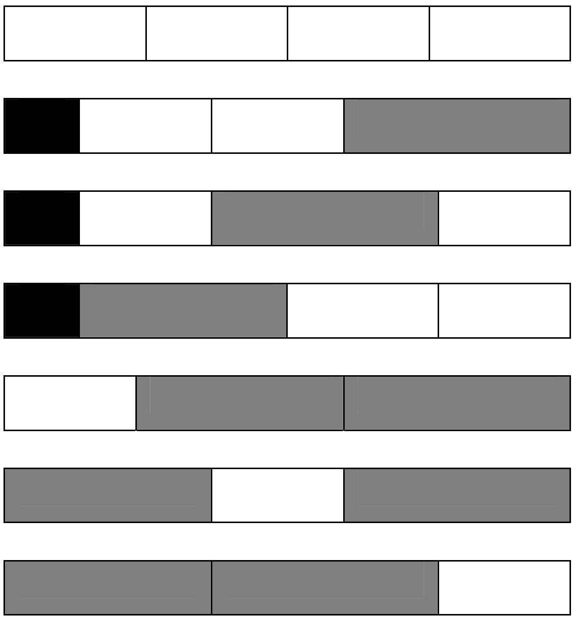
Dolayısıyla $f_{r,s}^{i}\left(k,n\right)=rf_{r,s}^{i}\left(k,n-i\right)+sf_{r,s}^{i}\left(k,n-k\right)$ olur. $f_{r,s}^{i}\left(k,n\right)$ ve $F_{r,s}^{i}\left(k,n\right)$ aynı rekürans bağıntısına sahip ve aynı başlangıç koşullarını paylaşıyorlarsa $F_{r,s}^{i}\left(k,n\right)$ için bir kombinatoriksel yorumu veren aşağıdaki teorem ispatlanır.



Şekil 3. 1. Sekiz Parçalı Döşeme Örneği

Teorem 3.2.1. 1×1 blok kareleri kullanarak bir $\left(n+1\right)-$levhanın döşemelerin sayısı, *r* boyalarının biriyle *i*-dikdörtgenleri ve *s* boyalarının biriyle *k*-dikdörtgenleri, öyle ki siyah kareler sadece ilk $\min\left(i,k\right)-1$ pozisyonlarında görülebilir, $F_{r,s}^{i}\left(k,n\right)$'e eşittir.

Örnek 3.2.1. Şekil 2, Teorem 3.2.1.'in koşulları altında bir 8-levhanın bütün döşemelerini gösterir. Burada $i=2,\ k=3$ ve $r=s=1$ ve 1. pozisyonda en çok bir siyahın olabileceğine dikkat edilmelidir. Bu durumda $F_{1,1}^{2}\left(3,7\right)=7$ 'dir.



Şekil 3. 2. $F_{1,1}^{2}\left(3,7\right)$ tarafından sayılan 7 olası döşeme

Burada $L^{i}_{r,s}\left(k,n\right)$ sayıları son parçalarda bir ek koşullara sahip Teorem 3.2.1'de tanımlanan ve son parçalar üzerinde ek koşullara sahip olan döşemelerin sayısı olarak yorumlanabilir.

- Eğer $k-1\leq n\leq k+\left(k-1\right)i-2$ ise döşemede *k*-dikdörtgenden en az biri vardır.
- Eğer $n\geq k+\left(k-1\right)i-1$ ise son k parçaları arasında en az $k-1$ tane *i*-dikdörtgenleri vardır.

Aslında, $n\geq k+\left(k-1\right)i-1$ olduğunda $k-1$ *i*-dikdörtgenleri ile biten döşemeler $r^{k-1}F^{i}_{r,s}\left(k,n-\left(k-1\right)i\right)$ ile numaralandırılırken, son *k* parçaları bir *k*-dikdörtgeni içerenler, iki veya tüm $k-1$ *i*-dikdörtgeni arasında $\left(k-1\right)r^{k-1}s\ F^{i}_{r,s}\left(k,n-k-\left(k-1\right)i\right)$ ile sayılır. Çünkü *k*-dikdörtgeni yerleştirmek için $k-1$ tane olası yer vardır. Eğer $k-1\leq n\leq k+\left(k-1\right)i-2$ ise döşemelerin sayısının $F^{i}_{r,s}\left(k,n\right)-r^{\left\lfloor \frac{n+1}{i}\right\rfloor}$ ile verildiğini görmek kolaydır. Çünkü tam olarak $r^{\left\lfloor \frac{n+1}{i}\right\rfloor}$-döşemelerinde herhangi bir *k*-dikdörtgeni bulunmaz.

$F^{i}_{r,s}\left(k,n\right)$'de $k=2$ ve $r=s=i=1$ alınırsa iyi bilinen Benjamin ve Quinn'in Fibonacci sayılarının kombinotoriksel yorumu elde edilir.

3.2.2 Diğer İki Kombinatoriksel Yorum

$k>i\geq 1$ ve $n\geq i-1$ birer tamsayı $X=\left\{1,2,...,n+1\right\}$ ve $\xi=\left\{Y_t;t\in T\right\}$ *X*'in alt kümelerinin ailesi olsun. Öyle ki her $Y_t,\ t\in T$ ardışık tamsayıları içerir ve aşağıdaki koşulları sağlar.

1. $\left|Y_t\right|\in\left\{i,k\right\}$
2. Eğer $\left|Y_t\right|=i$ ise o zaman Y_t elemanları, *r*-fark renklerinden biriyle renklendirilebilir.
3. Eğer $\left|Y_t\right|=k$ ise daha sonra Y_t elemanları *s*-fark renklerinden biriyle renklendirilebilir.
4. $\left|X\setminus U_{t\in T}Y_T\right|\leq i-1$

5. Eğer $x \in X \backslash U_{t \in T} Y_t$ ise o zaman $x \in \{n+1, n, ..., n+3-i\}$ sağlarsa

ξ ailesine *X*'e göre kalanı en çok $i-1$ olan renk ayrışımı denir. Özel olarak $k=2$ ve $r=s=i=1$ alınırsa $[51]$' de verilen Fibonacci dizileri ile ilgili küme ayrışımına indirgenebilir.

Teorem 3.2.2. $k, n, i,\ k > i \geq 1\ ve\ n \geq i-1$ koşullarını sağlayan tamsayılar olsunlar. *X*'e göre kalanı en çok $i-1$ olan renk ayrışımının sayısı $F_{r,s}^{i}(k,n)$'e eşittir.

İspat. $X = \{1, 2, ..., n+1\}$ kümesinde kalanı en çok $i-1$ olan renk ayrışımının sayısı $\ell(\mathrm{n})$ olsun. Eğer $n < k-1$ ise, o zaman $\ell(n) = r^{\left\lfloor \frac{n+1}{i} \right\rfloor}$'dır. Çünkü $|Y_t| = i,\ \forall t \in T$ ve Y_t r boyalarından birine sahip olabilir. Böylece $i-1 \leq n < k-1$ için $l(n) = F_{r,s}^{i}(k,n)$' dir. Şimdi $n \geq k-1$ ve $\ell(n) = F_{r,s}^{i}(k,n)$ olsun. $\ell(n+1) = F_{r,s}^{i}(k,n+1)$ olduğunu gösterelim. $\ell_i(n+1)$, *X'* e göre kalanı en çok $i-1$ olan bütün renk ayrışımlarındaki sayısı olsun öyle ki $\{1, 2, ..., i\} \in \xi$ ve $\ell_k(n+1)$'de ve ξ ayrışımının sayısı olsun öyle ki $\{1, 2, ..., k\} \in \xi$'dir. Eğer $\{1, 2, ..., i\}$ X'in bir ayrışımına ait ise, o zaman $\{1, 2, ..., k\}$ bu aynı ayrışıma ait değildir ve tersi de benzer şekildedir. Buradan $\ell(n+1) = \ell_i(n+1) + \ell_k(n+1)$'dir. Bunun yanı sıra $\ell_i(n+1) = r\ell(n+1-i)$ ve $\ell_k(n+1) = s\ell(n+1-k)$'dır. Tümevarım ve (3.1) rekürans bağıntısından

$$\begin{aligned}
\ell(n+1) &= r\ell(n+1-i) + s\ell(n+1-k) \\
&= rF_{r,s}^{i}(k, n+1-i) + sF_{r,s}^{i}(k, n+1-k) \\
&= F_{r,s}^{i}(k, n+1)
\end{aligned}$$

bulunur ki bu da ispatı tamamlar.■

Şimdi $F_{r,s}^{i}(k,n)$ için üçüncü kombinatoriksel yorumu gösterelim. Bunun için $X = \{1, 2, ..., n+1\}$ olsun. Eğer X $n \geq i-1$ için P_{n+1} grafın köşe kümesine karşılık geliyorsa o zaman her Y_t, $t \in T$ bir P_e tek türlü boyanabilir grafına karşılık gelir. Burada $l \in \{i,k\}$ 'dır. Yani P_i ve P_k için sırasıyla mevcut *r* ve *s* renkleri vardır. Böylece, *X'* in en çok $i-1$ kalanlı renk ayrışımı bir P_n' nin $\{P_k, P_i\}$ eşleşmesine karşılık gelir. Açık olarak en son $i-1$ köşe P_n'nin $\{P_k, P_i\}$ eşleşmesine ait değildir.

3.3. $\mathbf{F^{i}_{r,s}(k,n)}$ İçin Üreteç Fonksiyonu

Bu bölümde, $F^i_{r,s}(k,n)$ dizisine ait üreteç fonksiyonu verilmiştir. Burada elde edilen üreteç fonksiyonu $[29]$' da verilen *k*-Narayana sayıları, $[28]$' de verilen Fibonacci sayılarının polinom genellemesi ve $[28]$'de verilen (k,r)-Fibonacci sayıları ve $[27]$'de verilen *k*-Jacobsthall dizilerine ait üreteç fonksiyonlarının bir genellemesidir.

Teorem 3.3.1. $F^i_{r,s}(k,n)$ dizisi için üreteç fonksiyonu aşağıdaki gibi verilmektedir.

$$f^i_{r,s}(k,n,x) = \begin{cases} \dfrac{1 + r^{\left\lfloor \frac{1}{i} \right\rfloor} x + \dots + r^{\frac{k-1}{i}} x^{k-1} - r\left(x^i + r^{\left\lfloor \frac{1}{i} \right\rfloor} x^{i+1} + \dots + r^{\left\lfloor \frac{k-1-i}{i} \right\rfloor} x^{k-1} \right)}{1 - rx^i - sx^k} & eğer\ k > ise \\ \dfrac{1 + r^{\left\lfloor \frac{1}{i} \right\rfloor} x + \dots + r^{\left\lfloor \frac{k-1}{i} \right\rfloor} x^{k-1}}{1 - x^k (r+s)} & eğer\ k = 1\ ise \end{cases}$$

dir.

İspat. $k > i$ olsun. $g^i_{r,s}(k,n,x)$'i

$$g^i_{r,s}(k,n,x) = F^i_{r,s}(k,-1) + F^i_{r,s}(k,0)x + \dots + F^i_{r,s}(k,n-1)x^n + \dots$$

seri olarak tanımlansın. O zaman

$$rx^i g^i_{r,s}(k,n,x) = rF^i_{r,s}(k,-1)x^i + \dots + rF^i_{r,s}(k,n-1)x^{n+i} + \dots$$

$$sx^k g^i_{r,s}(k,n,x) = sF^i_{r,s}(k,-1)x^k + \dots + sF^i_{r,s}(k,n-1)x^{n+k} + \dots$$

dir. Öte yandan $n \geq k-1$ için $F^i_{r,s}(k,n) = rF^i_{r,s}(k,n-i) + sF^i_{r,s}(k,n-k)$ ve $n < k-1$ için $F^i_{r,s}(k,n) = r^{\left\lfloor \frac{n+1}{i} \right\rfloor}$ olduğundan

$$\left(1 - rx^i - sx^k\right) g^i_{r,s}(k,n,x) = 1 + r^{\left\lfloor \frac{1}{i} \right\rfloor} x + \ldots + r^{\left\lfloor \frac{k-1}{i} \right\rfloor} x^{k-1} - r(x^i + r^{\left\lfloor \frac{1}{i} \right\rfloor} x^{i+1} + \ldots + r^{\left\lfloor \frac{k-1-i}{i} \right\rfloor} x^{k-1}$$

elde edilir. Böylece, $f^i_{r,s}(k,n,x) = g^i_{r,s}(k,n,x)$'dir. $k = i$ durumu benzer şekilde gösterilebilir.■

Aşağıdaki teoremde Bölüm 3.2' de verilen kombinatoriksel yorumun bir uygulaması olarak, 4-parametre içeren $F^i_{r,s}(k,n)$ dizisi için binomial eşitliği verilecektir. Bu binomial eşitlik, aynı zamanda $F_n, P_n, J_n, P_v(n)$ ve $\{n\}_{s,t}$ gibi iyi bilinen dizilere ait binomial eşitliklerinde bir genellemesidir.

Teorem 3.3.2. $k \geq i$ ve $n \geq -1$ koşullarını sağlayan birer tamsayı olsun. O zaman

$$F^i_{r,s}(k,n) = \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n+1}{k} \right\rfloor} r^{\left\lfloor \frac{n+1-jk}{i} \right\rfloor} s^j \binom{j + \left\lfloor \frac{n+1-jk}{i} \right\rfloor}{j} \tag{3.3}$$

dir.

İspat. İlk olarak $n \geq k-1$ durumu göz önüne alınacaktır. j ve t, $F^i_{r,s}(k,n)$ ile numaralandırılmış bir döşemede sırasıyla k-dikdörtgenlerini ve i-dikdörtgenlerin sayısı olsun. O zaman $0 \leq j \leq \left\lfloor \frac{n+1}{k} \right\rfloor$, $0 \leq t \leq \left\lfloor \frac{n+1}{i} \right\rfloor$, ve her j için $t = \left\lfloor \frac{n+1-jk}{i} \right\rfloor$ dir.

k-dikdörtgenlerini muhtemel s renkleri ve i-dikdörtgenlerinin r-renkleri dikkate alındığında, $F^i_{r,s}(k,n)$ ile sayılan j tane k-dikdörtgenlere sahip olan döşeme sayısı

$r^t s^J \binom{j+t}{j} = r^{\left\lfloor \frac{n+1-jk}{i} \right\rfloor} s^j \binom{j+\left\lfloor \frac{n+1-jk}{i} \right\rfloor}{j}$ dır. j' nin değerlerine göre eklenerek döşemelerin sayısı (3.3) denkleminin sağ tarafı ile verildiği görülür. $n < k-1$ olduğunda, $\left\lfloor \frac{n+1}{k} \right\rfloor = 0$ olur. Böylece $\sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n+1}{k} \right\rfloor} r^{\left\lfloor \frac{n+1-jk}{i} \right\rfloor} s^j \binom{j+\left\lfloor \frac{n+1-jk}{i} \right\rfloor}{j} = r^{\left\lfloor \frac{n+1}{i} \right\rfloor}$

dir.■

$F_n, P_n, J_n, P_v(n)$ ve $\{n\}_{s,t}$ sayılarının bilinen formüllerinin yanı sıra, aşağıdaki sonuçta n. u_n Narayana sayısını hesaplamak için binomiyal bir özdeşlik verilmiştir.

Sonuç 3.3.1 $\forall n \geq 1$ için

$$u_n = \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor} \binom{n-2j}{j}$$

dir.

4. BÖLÜM

Bu bölümde [9]'de verilen Silva ve arkadaşları 2018 yılında yapmış olduğu "*On a four parameter generalization of some special sequence"* isimli çalışmasında yer alan dizilerin bazı temel özellikleri incelenmiştir.

4.1. $F_{r,s}^{i}(k,n)$ ve $L_{r,s}^{i}(k,n)$ İçeren Eşitlikler

Bu bölümde $F_{r,s}^{i}(k,n)$ ve $L_{r,s}^{i}(k,n)$ içeren çok sayıda eşitlikler verilmiştir. Bu eşitliklerin çoğu tümevarım ya da cebirsel yollarla ispatlanabilir olmasına rağmen bir önceki bölümde gösterilen kombinatoriksel yorumlara da uygulanabilir. Öte yandan burada $F_{r,s}^{i}(k,n)$ ve $L_{r,s}^{i}(k,n)$ dizilerini numaralandıran döşemelerini sırasıyla F ve L sembolleri ile gösterilecektir.

Teorem 4.1.1. i, k, t, $i \geq 2$, $k = ti$, $t \geq 1$ ve $n \geq 0$ koşullarını sağlayan tamsayılar olsunlar. O zaman

$$F_{r,s}^{i}(k,ni-1) = F_{r,s}^{i}(k,ni)$$

dir.

İspat. Bir ni-levhanın $F_{r,s}^{i}(k,ni-1)$ tipi F döşemeleri mevcuttur. $k = ti$ olduğundan, bir siyah kare döşemesi mevcut değildir. Böyle döşemelerin başlangıcına bir siyah kare ekleyerek $F_{r,s}^{i}(k,ni)$ ile numaralandırılmış bütün döşemeleri elde edilir. Karşılık olarak $F_{r,s}^{i}(k,ni)$ ile numaralandırılmış her döşeme tam olarak 1 tane siyah kareye sahiptir ve bu, çıkarıldıktan sonra $F_{r,s}^{i}(k,n-1)$ ile numaralandırılan bir döşemeye dönüşür.■

Teorem 4.1.2. n, i, k, $n \geq 0$ ve $i, k \geq 1$ koşullarını sağlayan birer tamsayı olsun. O zaman

$$F_{r,s}^{i}(k,ni+k) = \begin{cases} r^{n+k+1} + \sum_{j=-1}^{n} r^{n-j} s F_{r,s}^{i}(k,j) & i = 1 \\ u(k,i) + \sum_{j=0}^{n} r^{n-j} s F_{r,s}^{i}(k,ij) & i \neq 1 \end{cases} \tag{4.1}$$

dir. Burada

$$u(k,i)=\begin{cases} r^{\left\lfloor \frac{ni+k+1}{i} \right\rfloor}, & k\geq i \\ r^{n+1}, & i=k+1 \\ 0, & i\geq k+2 \end{cases}$$

dir.

İspat: (4.1) denkleminin sağ tarafının bir $(ni+k+1)$-levhanın *F* tipi döşeme sayısının sayılabilir olduğunu gösterelim. Buna ulaşmak için, eğer varsa bir *k*-dikdörtgeninin en doğru görünümü dikkate alınmalıdır. Herhangi bir *k*-dikdörtgeni olmayan döşeme sayısı ya eğer $k\geq i$ için $r^{\left\lfloor \frac{ni+k+1}{i} \right\rfloor}$ ye eşittir ya da $i=k+1$ için r^{n+1} ya da $i\geq k+2$ için 0'a eşittir. Kalan döşemeler ya *k*-dikdörtgeni ya da *k*-dikdörtgeninin takip eden bir *i*- dikdörtgeni ile biter. *F* döşemesinin $sF_{r,s}^{i}(k,ni)$-tipi bir *k*-dikdörtgeninin takip eden bir *i*-dikdörtgeni ile biten *F* döşemesi $rsF_{r,s}^{i}(k,(n-1)i)$ tipi, *k*-dikdörtgeni takip eden iki *i*-dikdörtgeni ile biten *F* döşemesi $r^{2}sF_{r,s}^{i}(k,(n-2)i)$,..., bir *k*-dikdörtgenini takip eden $(n-1)$ tane *i*-dikdörtgenleri ile biten *F* döşemesi $r^{n-1}sF_{r,s}^{i}(k,i)$ tipi ve son olarak bir *k*-dikdörtgeni takip eden n tane *i*-dikdörtgenleri ile biten *F* döşemesi $r^{n}sF_{r,s}^{i}(k,0)$ tipi vardır. $i=1$ durumunda, bir *k*-dikdörtgenini takip eden $n+1$ *i*-dikdörtgenleri ile biten bir döşeme vardır. Yukarıdaki bütün bu olasılıklar dikkate alındığında ispat tamamlanır.■

Bu teoremden bazı iyi bilinen eşitlikler (parametrenin seçimi için Tablo 3.1' e bakınız) de aşağıda verilmiştir.

$$1)\sum_{j=1}^{n}F_j=F_{n+2}-1$$

$$2)\sum_{j=0}^{n}F_{2j}=F_{2n+1}-1$$

$$3)\sum_{j=0}^{n}P_{2j}=\frac{1}{2}(P_{2n+1}-1)$$

$$4)\sum_{j=2}^{n}J_j=\frac{1}{2}(J_{n+2}-3)$$

$5)\sum_{j=0}^{n} P_v(2j+1) = P_v(2n+4)-1$

$6)\sum_{j=1}^{n} u_j = u_{n+3}-1$ [20]

Sonuç 4.1.1

1. $\sum_{j=1}^{n} 2^{-j} J_{2j} = \frac{1}{2^n}\left(J_{2n+1}-2^n\right),\ \forall n \geq 1,$

2. $\sum_{j=2}^{n} 2^{-j} P_j = \frac{1}{2^n}\left(P_{n+2}-2^{n+1}-2^{n-1}\right),\ \forall n \geq 2,$

3. $\{n+2\}_{s,t} = s^{n+1} + \sum_{j=-1}^{n-2} s^{n-2-j} t\{2+j\}_{s,t}, \forall n \geq 0.$

Teorem 4.1.3. n, k, i, $n \geq 0$ ve $i, k \geq 1$ koşullarını sağlayan tamsayılar olsun. O zaman

$$F_{r,s}^{i}(k, ni+k+1) = u(k,i) + \sum_{j=1}^{n} r^{n-j} s F_{r,s}^{i}(k, ji+1)$$

dır. Burada

$$l = \begin{cases} -2, & i=1 \\ -1, & i=2 \\ 0, & i \geq 3 \end{cases} \quad \text{ve} \quad v(k,i) = \begin{cases} r^{\left\lfloor \frac{ni+k+2}{i} \right\rfloor}, & k \geq i \\ r^{n+1} & i=k+1 \ ve\ i \geq 3\ \ veya\ \ i=k+2 \\ 0, & i \geq k+3\ veya\ i=2\ \ ve\ k=1 \end{cases}$$

dır.

İspat. Teoremin ispatı Teorem 4.1.1.'in ispatına benzer olduğundan göz ardı edilmiştir.■

Bu eşitlikten iyi bilinen Padovan sayıları ile ilişkili $\sum_{j=0}^{n} P_v(2j) = P_v(2n+3)-1$ ve $\{n\}_{s,t}$ Fibonacci sayılarının polinom genişlemesi ile ilişkili yeni bir eşitlik elde edilmiştir.

Sonuç 4.1.2. $\forall n \geq 0$ için

$$\{n+5\}_{s,t} = s^{n+4} + \sum_{j=-2}^{n} s^{n-j} t\{3+j\}_{s,t}$$

dir.

Teorem 4.1.4. n, k, i, m , $n \geq 0$, $k \geq i+1 \geq 2$ ve $-1 \leq m \leq k-(i+1)$ koşullarını sağlayan tamsayılar olsunlar. O zaman

$$F^i_{r,s}\left(k, nk+m+i\right) = \begin{cases} s^{n+1} + \sum_{J=0}^{n} rs^{n-j} F^i_{r,s}\left(k, jk+m\right) & m+i+1=k \\ \sum_{J=0}^{n} rs^{n-j} F^i_{r,s}\left(k, jk+m\right) & m+i+1<k \end{cases} \tag{4.2}$$

dir.

İspat. Eğer varsa, bir i-dikdörtgenin en sağdaki görünümünü dikkate alarak (4.2) ‘nin sağ tarafının $F^i_{r,s}\left(k, nk+m+i\right)$ ile aynı döşemeleri saydığını göreceğiz. $m+i+1=k$ olduğunda i-dikdörtgensiz s^{n+1} döşeme vardır. Diğer durumlarda, $m+i+1<k$ olduğundan *F* döşemelerinin bütün tipleri en az bir *i*-dikdörtgen içerir. Şimdi Teorem 4.1.2.’nin ispatındaki benzer adımlar yapılırsa (4.2)deki eşitlik kolaylıkla elde edilir. ■

(4.2) den bazı bilinen eşitlikler ve yeni eşitlikler aşağıdaki gibi elde edilir.

1) $\sum_{j=0}^{n} F_{2j+1} = F_{2n+2}$

2) $\sum_{j=0}^{n} 2^{n-j} J_{2j+1} = J_{2n+2}$

3) $2\sum_{j=0}^{n} P_{2j+1} = P_{2n+2}$

4) $u_{3n-1} = \sum_{j=0}^{n} u_{3j+1}$

5) $u_{3n} = \sum_{j=0}^{n-1} u_{3j+2}$

6) $u_{3n+1} - 1 = \sum_{j=1}^{n} u_{3j}$

$7) P_v\left(3n+2\right)=\sum_{j=0}^{n} P_V\left(3j\right)$

$8) P_u\left(3n+3\right)-1=\sum_{j=0}^{n} P_u\left(3j+1\right)$

Sonuç 4.1.3. $\forall n \geq 0$ için

1. $\left\{2n+2\right\}_{s,t}=\sum_{j=0}^{n} st^{n-j}\left\{2j+1\right\}_{s,t}$

2. $\left\{2n+3\right\}_{s,t}=t^{n+1}+\sum_{j=0}^{n} st^{n-j}\left\{2j+2\right\}_{s,t}$

Teorem 4.1.5. $n,k,i,\ n \geq 0, k > i \geq 1$ ve $k-i \leq m < k$ koşullarını sağlayan birer tamsayı olsunlar. O zaman

$$F_{r,s}^{i}\left(k,nk+m+i\right)=u\left(m\right)+\sum_{j=0}^{n} rs^{n-j}F_{r,s}^{i}\left(k,jk+m\right) \tag{4.3}$$

dır. Burada

$$u\left(m\right)=\begin{cases} s^{n+1}, & k-i \leq m \leq k-2 \\ rs^{n+1}, & m=k-1 \end{cases}$$

dır.

İspat. Bu teoremin ispatı, eğer varsa, bir *i*-dikdörtgeninin sağda görünümü dikkate alınarak bir önceki teoremin ispatına benzer şekilde uygulanarak ispatlanabilir.■

(4.3) ’ten iyi bilinen Padovan sayılarıyla ilişkili $P_v\left(3n+4\right)-1=\sum_{j=0}^{n} P_v\left(3j+2\right)$ ve $P_v\left(3n+5\right)-1=\sum_{j=0}^{n} P_v\left(3j+3\right)$ ve aşağıdaki sonuçta verilen $\left\{n\right\}_{s,t}$ dizisi için yeni bir eşitlik elde edilir.

Sonuç 4.1.4. $\forall n \geq 0$ için

$$\left(2n+4\right)_{s,t}=st^{n+1}+\sum_{j=0}^{n} st^{n-j}\left\{2j+3\right\}_{s,t}$$

dır.

Teorem 4.1.6. k, i, n, $k, i \geq 1$ ve $n \geq \max\{i-1, 2k-i-1\}$ koşullarını sağlayan birer tamsayı olsunlar. O zaman

$$F_{r,s}^{i}(k,n) = (s-r)F_{r,s}^{i}(k,n-k) + rF_{r,s}^{i}(k,n-i) + F_{r,s}^{i}(k,n-k+i) - sF_{r,s}^{i}(k,n-2k+i).$$

İspat. $F_{r,s}^{i}(k,n)$ dizisinin tanımındaki rekürans bağıntısı ve (3.1)' den bu teoremin ispatı kolayca görülür.■

Sonuç olarak, iyi bilinen $F_{n+2} = \frac{1}{2}(F_n + F_{n+3})$ ve aşağıda verilen iki yeni sonucu elde edebiliriz.

Sonuç 4.1.5. $\forall n \geq 2$ için

1. $\{n+2\}_{s,t} = (t-s)\{n\}_{s,t} + (s+1)\{n+1\}_{s,t} - t\{n-1\}_{s,t}$

2. $u_{n+2} = \frac{1}{2}(u_{n-1} + u_{n+4} - u_n)$

dır.

Teorem 4.1.7. t, n , $t \geq 1$ ve $n \geq 2t-1$ koşullarını sağlayan birer tamsayı olsun.

O zaman

$$F_{r,s}^{1}(2t,2n) = \sum_{j\geq 0}\sum_{l\geq 0} r^{2n+1-2t(j+1)} s^{j+1} \binom{n-t(j+l)+j}{j}\binom{n-t(j+l)+l}{l} \tag{4.4}$$

dır.

İspat. Burada (3.1) eşitliğinin sağ tarafı merkez karenin her yanındaki *2t*-dikdörtgenlerin sayısını dikkate alınarak $F_{r,s}^{1}(2t,2n)$'e eşit olduğu gösterilecektir. Yani $(2n+1)$-levhasının karesi sağ tarafta ve sol taraftaki karelerin sayısı aynıdır. *j* ve *l* sırasıyla merkez karenin sağı ve solundaki *2t*-dikdörtgenlerinin sayısı olsun. Döşemede $2n+1-2t(j-l)$ tane *l*-dikdörtgenleri ve $j+1$ tane *2t*-dikdörtgenleri vardır ve böylece merkez karenin her tarafında $n-t(j+l)$ kareleri vardır. Sol taraf $n-t(j+l)+j$ parça varsa, burada *j* tane

$2t$-diktörtgenleridir. O zaman bu sol tarafı boyamak için farklı $r^{n-t(j+l)}s^{j}\binom{n-t(j+l)+j}{j}$ farklı yol vardır. Benzer bir düşünce ile merkez karenin sağ tarafında $r^{n-t(j+l)}s^{l}\binom{n-t(j+l)+l}{l}$ seçimlerinin var olduğunu gösterir. j ve ℓ değişkenleri için mümkün olan tüm döşemeler sayılmıştır.■

$t=r=s=1$ alınırsa Fibonacci sayıları için iyi bilinen aşağıdaki binomial eşitliğe indirgenir. $\forall n \geq 1$ için

$$F_{2n} = \sum_{j\geq 0}\sum_{\ell\geq 0}\binom{n-l-1}{j}\binom{n-j-1}{l}$$

Yukarıdaki teoremden Pell ve Jacobsthol sayıları ile ilişkili benzer sonuçların yanı sıra $\{n\}_{s,t}$ dizisi içinde binomial eşitlikler aşağıdaki sonuçta verilmiştir.

Sonuç 4.1.6. $\forall n \geq 1$ için,

1. $P_{2n} = \sum_{j\geq 0}\sum_{\ell\geq 0} 2^{2n-1-2(j+l)}\binom{n-l-1}{j}\binom{n-j-1}{l}$,

2. $J_{2n} = \sum_{j\geq 0}\sum_{l\geq 0} 2^{j+l}\binom{n-l-1}{j}\binom{n-j-1}{l}$,

3. $\{2n\}_{s,t} = \sum_{j\geq 0}\sum_{l\geq 0} s^{2n-1-2(j+l)}t^{j+l}\binom{n-l-1}{j}\binom{n-j-1}{l}$

dır.

Aşağıdaki teoremde verilen eşitlik

$$F_n = F_{n-4} + 4F_{n-5} + 6F_{n-6} + 4F_{n-7} + F_{n-8}, \qquad \forall n \geq 9 \tag{4.5}$$

eşitliğinin bir sade ispatını sağlar ve Fibonacci, Pell, Jacobsthal ve Podovan sayılarını içeren yeni ilişkiler sunar.

Teorem 4.1.8. $l,k,n,$ $\ell \geq 0$ ve $n \geq \max\{i,k\}\,\ell - 1$ koşullarını sağlayan tamsayılar olsunlar. O zaman

$$F_{r,s}^{i}(k,n)=\sum_{j\geq 0} r^{\ell-j}s^{j}\binom{\ell}{j}F_{r,s}^{i}\left(k,n-jk-(\ell-j)i\right)$$

dir.

İspat. Son ℓ parçası dikkate alınarak, bir $(n+1)$-levhanın F tipi döşemelerinin sayısı sayılabilir. Başlangıçta $\binom{\ell}{j}$ yollarında yapılabilen son ℓ parçalar arasında *j* tane *k*-dikdörtgenlerini seçilir. Burada $0\leq j\leq l$ dir. $\ell-\mathrm{j}$ tane i-dikdörtgenleriyle birlikte kaldırılarak $r^{\ell-j}s^{j}F_{r,s}^{i}\left(k,n-jk-(\ell-j)i\right)$ ile numaralandırılmış döşemeler solda kalır. Bütün $j\geq 0$'ları toplayarak ispat tamamlanır.■

Bu eşitlikte $\ell=1$ alınırsa, (3.1)'de elde edilen rekürans bağıntısı elde edilir.

Sonuç 4.1.7. $l,n,$ $\ell\geq 0$ ve $n\geq 2\ell+1$ koşullarını sağlayan tamsayılar olsunlar. O zaman

1. $F_{n}=\sum_{j\geq 0}\binom{\ell}{j}F_{n-j-\ell}$
2. $P_{n}=\sum_{j\geq 0}\binom{\ell}{j}2^{\ell-j}P_{n-j-\ell}$
3. $J_{n}=\sum_{j\geq 0}\binom{\ell}{j}2^{j}J_{n-j-\ell}$
4. $\{n\}_{s,t}=\sum_{j\geq 0}s^{\ell-j}t^{j}\{n-j-\ell\}_{s,t}$
5. $\forall n\geq 3$ için ; $P_{v}(n)=\sum_{j\geq 0}\binom{\ell}{j}P_{v}(n-j-2\ell),$
6. $\forall \mathrm{n}\geq 3\ell+1$ için; $\mathrm{u}_{\mathrm{n}}=\sum_{\mathrm{j}\geq 0}\binom{\ell}{\mathrm{j}}\mathrm{u}_{\mathrm{n}-2\mathrm{j}-\ell}$

dir.

Sonuç 4.1.7.' nin (1) öncülünde $\ell=4$ alınırsa ,(4.5) deki eşitlik elde edilir. Ayrıca $\ell=m$ ve $n=2m+1$ alarak iyi bilinen Fibonacci sayılarıyla ilişkili $F_{2m+1}=\sum_{j\geq 0}\binom{m}{j}F_{j+1}$ binomial eşitliğe indirgenir.

Teorem 4.1.9. $i,k,n,\ i,k \geq 1$ ve $n \geq k-1$ koşullarını sağlayan birer tamsayı öyle ki $k = 2i$ olsun. O zaman

$$\left(2+r^2\right)F_{r,1}^{i}\left(k,n\right)=F_{r,1}^{i}\left(k,n+k\right)+F_{r,1}^{i}\left(k,n-k\right) \tag{4.6}$$

dır.

İspat. Bu teoremi ispatlamak için, bir $(n+1)$-levhanın F tipi döşemeleri ile ya $(n+k+1)-$levhanın F tipi döşemesi ya da $(n-k+1)-$ levhanın F tipi döşemesi arasında 1'den $2+r^2$ ye kadar bir bağıntı kurulsun. Yani $F_{r,1}^{i}(k,n)$ ile numaralandırılmış her döşemeden ya $F_{r,1}^{i}(k,n+k)$ ya da $F_{r,1}^{i}(k,n-k)$ ile sayılan $2+r^2$ döşeme tek bir yolla oluşturulacaktır. $F_{r,1}^{i}(k,n+k)$ ile numaralandırılmış bir döşeme verildiğinde, son parçaları inceleyerek ve çıkartılarak $(n+1)-$levhanın bir F tipi döşemesi aşağıdaki koşullarda belirlenebilir.

i) Son *k*-dikdörtgeni, bir *k*-dikdörtgeni ile bitiyorsa,

ii) iki ya da daha fazla *i*-dikdörtgenleri ile bitiyorsa son iki *i*-dikdörtgeni,

iii) bir *k*-dikdörtgeninin öncesinde bir *i*-dikdörtgeni ile bitiyorsa son *k*-dikdörtgeni,

(i) durumda $F_{r,1}^{i}(k,n)$ ile numaralandırılmış bir tek döşeme elde edilebilir. (iii) durumunda $r^2F_{r,1}^{i}(k,n)$ döşemelerindeki (ii) durumdaki sonuçlar bir *i*-dikdörtgeni ile biten $F_{r,1}^{i}(k,n)$ ile sayılan döşemeleri verir. (4.6)'nın ispatını bitirmek için bir *k*-dikdörtgeni ile biten $F_{r,1}^{i}(k,n)$ ile numaralandırılmış kalan döşemeler bir *k*-dikdörtgeni ile bittiği ve sonuna sadece bir *k*-dikdörtgeni ekleyerek $F_{r,1}^{i}(k,n-k)$ ile sayılmış bu döşemelerden geldiği fark edilir. Karşılık olarak $F_{r,1}^{i}(k,n)$ ile numaralandırılmış her döşeme için ya bir *k*-dikdörtgeni ekleyerek ya da sonuna iki *i*-dikdörtgeni ekleyerek bir $(n+k+1)$-levhanın bir F tipi döşemesi üretilebilir. Son durumda bütün *i*-dikdörtgenleri *r* boyalardan biri kullanarak boyandığı için bir $(n+k+1)$-levhanın r^2 tipi F döşemeleri elde edilir ve eski durumda $s=1$ olduğunda bir döşemedir. Bir $(n+1)$-levhanın bir F tipi döşemesi i-dikdörtgeni ile bitiyorsa, bir $(n+k+1)-$levhanın bir F tipi döşemesini elde etmek için son parçadan önce bir k-dikdörtgeni eklenebilir. Son olarak, bir $(n+1)$-levhanın bir F tipi döşemesi bir k-dikdörtgeni ile bitiyorsa $F_{r,1}^{i}(k,n-k)$ ile numaralandırılmış bir döşeme oluşturmak için bu parça kaldırılır.■

(4.6) denkleminden Fibonacci ve Pell sayılarıyla ilişkili bilinen iki eşitlik aşağıdaki gibidir. $\forall n \geq 2$ için $3F_n = F_{n+2} + F_{n-2}$ [7] ve $6P_n = P_{n+2} + P_{n-2}$ [25] 'dir.

Teorem 4.1.10. $i,k,n,\ i,k \geq 1$ ve $n \geq \max\{i,k\}-1$ koşullarını sağlayan bir tamsayı olsun ve $n+1$ in k ile bölümünden kalan l olsun. O zaman

$$F_{r,s}^{i}(k,n) = t(i,k,n) + \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n+1-i}{k} \right\rfloor} rs^{j} F_{r,s}^{i}(k,n-i-jk)\ . \tag{4.7}$$

Burada

$$t(i,k,n) = \begin{cases} s^{\left\lfloor \frac{n+1}{k} \right\rfloor}, i \geq k\ ve\ k > i\ \ ve\ \ell \leq i-1 \\ 0\ ,\ k > i\ \ ve\ l > i-1 \end{cases}$$

dir.

İspat. Eğer varsa bir i-dikdörtgeninin en sağdaki görünümü dikkate alınarak bir n-levhanın F tipindeki döşemelerin sayısı sayılabilirdir. $t(i,k,n)$, i-dikdörtgeni olmayan döşemelerin sayısıdır. Aslında $i \geq k$ yada $k > i$ ve $\ell \leq i-1$ ise $t(i,k,n) = s^{\left\lfloor \frac{n+1}{k} \right\rfloor}$ 'dır ve $k > i$ ve $\ell \geq i-1$ durumunda i-dikdörtgenlerini içermeyen herhangi bir döşeme vermez. Kalan döşemeler, bir k-dikdörtgenini takip eden bir i-dikdörtgeni ile biter. Son parçası bir i-dikdörtgeni olan $rF_{r,s}^{i}(k,n-i)$ döşemesi, k-dikdörtgeninin takip eden bir i-dikdörtgeni ile biten $rsF_{r,s}^{i}(k,n-i-k)$ döşemesi, iki tane k-dikdörtgenini takip eden bir i-dikdörtgeni ile biten $rs^2F_{r,s}^{i}(k,n-i-2k),\ldots,\left\lfloor \frac{n+1-i}{k} \right\rfloor$ tane k-dikdörtgenlerini takip eden bir i-dikdörtgeni ile biten $rs^{\left\lfloor \frac{n+1-i}{k} \right\rfloor} F_{r,s}^{i}\left(k,n-i-\left\lfloor \frac{n+1-i}{k} \right\rfloor k\right)$ döşeme vardır. Bu bütün ihtimaller dikkate alındığında ispat tamamlanır.■

Aşağıdaki sonuç (4.7) den elde edilen Jacobsthal sayılarına ait yenir eşitliği verir.

Sonuç 4.1.8. $\forall n \geq 3$ için,

$$J_n = 1 + 2\sum_{j=1}^{n-2} J_j$$

dir.

Teorem 4.1.11. i, k, n $i, k \geq 1$ ve $n \geq \max\{k-i-1, -1\}$ koşullarını sağlayan tamsayılar olsunlar. O zaman

$$F_{r,s}^{i}(k, n+ik) = r^k F_{r,s}^{i}(k,n) + \sum_{j=0}^{k-1} r^j s F_{r,s}^{i}(k, n+ik-k-ji)$$

dir.

İspat. *k* yada daha fazla *i*-dikdörtgenleri ile biten $F_{r,s}^{i}(k, n+ik)$ ile numaralandırılmış *F* tipi döşemelerin sayısı $r^k F^{i}{}_{r,s}(k,\ n)$'ye eşittir. Kalan döşemeler tam olarak *j* tane *i*-dikdörtgenleri ile biter. Burada $0 \leq j \leq i-1$'dir. Son *k*-dikdörtgeni ve *i*-dikdörtgenlerini kaldırılarak $r^j s F_{r,s}^{i}(k,\ n+ik-k-ji)$ ile numaralandırılmış döşemeler solda kalır. İspatı tamamlamak için, sadece *j*'yi eklememiz yeterlidir.■

Teorem 4.1.11.'den Padovan sayıları için aşağıdaki eşitlik verilebilir.

Sonuç 4.1.9. $P_v(n+7) = P_v(n+1) + P_v(n) + P_v(n+2) + P_v(n+4)$

dır.

Teorem 4.1.12. i, k, m , $i, k, m \geq 1$ ve $n \geq \max\{i-k-1, -1\}$ koşullarını sağlayan tamsayılar olsun. O zaman

$$F_{r,s}^{i}(k, n+mk) = s^m F_{r,s}^{i}(k,n) + \sum_{j=0}^{m-1} r s^j F_{r,s}^{i}(k, n+mk-jk-i)$$

dir.

İspat. En az m tane k-dikdörtgeni ile biten $F_{r,s}^{i}\left(k,n+mk\right)$ ile numaralandırılmış F tipi döşemelerin sayısı $s^{m}F_{r,s}^{i}\left(k,n\right)$' ye eşit olduğundan bir önceki teoremin ispatına benzer şekilde ispat yapılabilir.

Sonuç 4.1.10.

1. $\forall n\geq 0,\;\; m\geq 3, F_{n+m}=F_{n+2}+\sum_{j=2}^{m-1}F_{n+m-j}$

2. $\forall n\geq 0,\;\; m\geq 3, P_{n+m}=2^{m-2}P_{n+2}+\sum_{j=2}^{m-1}2^{j-2}P_{n+m-j}$,

3. $\forall n,m\geq 1\;\; P_{v}\left(n+3m\right)=P_{v}\left(n\right)+\sum_{j=0}^{m-1}P_{v}\left(n+3m-3j-2\right)$,

4. $\forall n\geq 0,\;\; m\geq 3\; J_{n+m}=J_{n+2}+2\sum_{j=2}^{m-1}J_{n+m-j}$,

5. $\forall n\geq 0,\;\; m\geq 1\; u_{n+3m}=u_{n}+\sum_{j=0}^{m-1}u_{n-1+3m-3j}$,

6. $\forall n\geq 0,\;\; m\geq 1\; \left\{n+2m\right\}_{s,t}=t^{m}\left\{n\right\}_{s,t}+\sum_{j=0}^{m-1}st^{j}\left\{n+2m-2j-1\right\}_{s,t}$

Sonuç olarak, aşağıdaki teorem $F_{r,s}^{i}\left(k,n\right)$ içeren çok sayıda eşitlikleri verir.

Teorem 4.1.13. $i,k,n,$ i, k ≥ 1 ve $n\geq 2\max\left\{i,k\right\}-1$ koşullarını sağlayan tamsayılar olsun. $n+1$'in i ile bölümünden kalan l olsun. O zaman

$$F_{r,s}^{i}\left(k,n\right)=u\left(i,k,n\right)+\sum_{j=0}^{\left\lfloor\frac{n+1-2k}{i}\right\rfloor}\sum_{t=0}^{\left\lfloor\frac{n+1-2k-ij}{i}\right\rfloor}s^{2}r^{j+t}F_{\{r,s\}}^{(i)}\left(k,n-2k-ti-ji\right) \tag{4.8}$$

dir. Burada

$$u\left(i,k,n\right)=\begin{cases} r^{\left\lfloor \frac{n+1}{i} \right\rfloor}+sr^{\left\lfloor \frac{n+1-k}{i} \right\rfloor}\left(\left\lfloor \frac{n+1-k}{i} \right\rfloor+1\right), & eğer\ k\geq i\ veya\ i>k,\ \ell\leq 2k-i-1 \\ r^{\left\lfloor \frac{n+1}{i} \right\rfloor}, & eğer\ i>k\ \ ve\ 2k-i-1<\ell\leq k-1 \\ sr^{\left\lfloor \frac{n+1-k}{i} \right\rfloor}\left(\left\lfloor \frac{n+1-k}{i} \right\rfloor+1\right), & eğer\ i>k\ \ ve\ k-1<\ell\leq 2k-1 \\ 0, & eğer\ i>k\ \ ve\ \ell>2k-1 \end{cases}$$

dir.

İspat. Son iki *k*-dikdörtgenleri arasında *i*-dikdörtgenlerinin sayısını dikkate alarak (4.8) eşitliğinin sağ tarafının $F_{r,s}^{i}\left(k,n\right)$'deki gibi aynı döşemelere numaralandırıldığını göstereceğiz. $k\geq i$ olduğunda, herhangi bir *k*-dikdörtgenini içermeyen bir $\left(n+1\right)-$ levhasının $r^{\left\lfloor \frac{n+1}{i} \right\rfloor}$ F tipi döşemesi olduğu açıktır. Tam olarak bir *k*-dikdörtgenine sahip döşemelerin sayısı $\left(\left\lfloor \frac{n+1-k}{i} \right\rfloor+1\right)sr^{\left\lfloor \frac{n+1-k}{i} \right\rfloor}$'dir. Aslında, bir k-dikdörtgenine sahip bir döşeme $\left\lfloor \frac{n+1-k}{i} \right\rfloor$ tane *i*-dikdörtgenine sahiptir. Böylece, *k*-dikdörtgeni $\left\lfloor \frac{n+1-k}{i} \right\rfloor+1$ pozisyonlarından birine eklenebilir. Şimdi $i>k$ ve $l\leq k-1$ durumunu göz önüne alalım. Açıktır ki *k*-dikdörtgenlerini içermeyen olmayan $\mathrm{r}^{\left\lfloor \frac{\mathrm{n}+1}{\mathrm{i}} \right\rfloor}$ döşemeleri vardır. Bazı $\mathrm{q}\geq 2$ tam sayıları için; $n+1=l+qi=l-k+k+i+\left(q-1\right)i$ dır. Eğer $\ell\leq 2k-i-1$ ise, bir önceki teoremdeki gibi, tam olarak bir tane *k*-dikdörtgenine sahip $\mathrm{sr}^{\left\lfloor \frac{\mathrm{n}+1-\mathrm{k}}{\mathrm{i}} \right\rfloor}\left(\left\lfloor \frac{\mathrm{n}+1-\mathrm{k}}{\mathrm{i}} \right\rfloor+1\right)$ döşeme bulunur. Diğer taraftan, $2\mathrm{k}-\mathrm{i}-1\leq\ell\leq\mathrm{k}-1$ olduğunda; tam olarak bir *k*-dikdörtgeni döşemeleri yoktur. $i>k$ ve $l>k-1$ olduğunda, bütün döşemeler bir *k*-dikdörtgeni içerir. O zaman $\ell\leq 2k-1$ ise, o zaman, $n+1=\ell-k+k+qi$'dir. Böylece tam olarak sadece bir *k*-dikdörtgeni içeren $\mathrm{sr}^{\left\lfloor \frac{\mathrm{n}+1-\mathrm{k}}{\mathrm{i}} \right\rfloor}\left(\left\lfloor \frac{\mathrm{n}+1-\mathrm{k}}{\mathrm{i}} \right\rfloor+1\right)$ döşemeleri vardır. Fakat $\ell>2k-1$ olduğunda böyle döşemeler bulunmaz. Böylece $u\left(i,k,n\right)$ en fazla bir *k*-dikdörtgenine sahip döşemeleri numaralandırır. Şimdi, en sağdaki iki *k*-dikdörtgeni arasındaki i-dikdörtgenlerin sayısını dikkate alarak $F^{i}_{r,s}\left(k,n\right)$ ile numaralandırılmış kalan döşemelerin sayısını sayabiliriz. j, i-dikdörtgenleri ile biten $s^2 r^{j+t} F^{i}_{r,s}\left(k,n-2k-ti-ji\right)$ ve son iki k-dikdörtgeni arasında t tane i-dikdörtgenleri vardır. Burada $t\in\left\{0,...,\left\lfloor\frac{n+1-2k-ji}{i}\right\rfloor\right\}$ dir. Bütün bu sayıları toplayarak $F^{i}_{r,s}\left(k,n\right)$ ile sayılan döşemelerin toplamını verir.■

Aşağıdaki eşitlik (4.8)den elde edilir. $\forall n\geq 5$ için

$$F_n=\left(n-1\right)+\sum_{j=1}^{n-4}\left(n-3-j\right)F_j$$

dir.

Sonuç 4.1.10.

1. $\forall n\geq 2\ ,\ F_{2n}=n+\sum_{j=1}^{n-1}\left(n-j\right)F_{2j},$

2. $\forall n\geq 1\ ,\ F_{2n+1}=1+\sum_{j=1}^{n}\left(n+1-j\right)F_{2j-1},$

3. $\forall n\geq 5\ ,\ P_n=2^{n-1}+2^{n-3}(n-2)+\sum_{j=1}^{n-4}2^{n-4-j}\left(n-3-j\right)P_j,$

4. $\forall n\geq 2\ ,\ P_{2n}=2n+4\sum_{j=1}^{n-1}\left(n-j\right)P_{2j},$

5. $\forall n\geq 1\ ,P_{2n+1}=1+4\sum_{j=1}^{n}\left(n+1-j\right)P_{2j-1},$

6. $\forall n\geq 3,\ Pv(2n)=n+\sum_{j=0}^{n-3}\left(n-2\text{-j}\right)Pv(2j),$

7. $\forall n\geq 3\ ,Pv(2n+1)=(n+1)+\sum_{j=0}^{n-3}\left(n-2-j\right)Pv(2j+1),$

8. $\forall n\geq 2\ ,Pv(3n)=1+n+\sum_{j=1}^{n-1}\left(n-j\right)Pv(3j-1),$

9. $\forall n\geq 1\ ,\ Pv(3n+1)=1+\sum_{j=0}^{n-1}\left(n-j\right)Pv(3j),$

10. $\forall n\geq 1\ ,Pv(3n+2)=1+n+\sum_{j=1}^{n}\left(n+1-j\right)Pv(3j-2),$

11. $\forall n\geq 5\ ,J_n=2n-3+4\sum_{j=1}^{n-4}\left(n-3-j\right)j_j,$

12. $\forall n \geq 2\ , J_{2n} = n2^{n-1} + \sum_{j=1}^{n-1} 2^{n-1}\left(n-j\right) j_{2j},$

13. $\forall n \geq 1\ , J_{2n+1} = 2^{n} + \sum_{i-1}^{n} 2^{n-j}\left(n+1-j\right) j_{2j-1},$

14. $\forall n \geq 7\ , u_{n} = n - 2 + \sum_{j=1}^{n-6}\left(n-5-j\right)u_{j},$

15. $\forall n \geq 1\ , u_{3n} = \sum_{j=1}^{n}\left(n+1-j\right)u_{3j-2},$

16. $\forall n \geq 1\ , u_{3n+1} = 1 + \sum_{j=1}^{n}\left(n+1-j\right)u_{3j-1},$

17. $\forall n \geq 1\ , u_{3n+2} = n + 1 + \sum_{j=1}^{n}\left(n+1-j\right)u_{3j},$

18. $\forall n \geq 1\ , \{n\}_{s,t} = s^{n-1} + nts^{n-3} + t^{2}\sum_{j=1}^{n-4} s^{n-4-j}\left(n-3-j\right)\{j\}_{s,t},$

19. $\forall n \geq 2\ , \{2n\}_{s,t} = nts^{n-1} + t^{2}\sum_{j=1}^{n-1} s^{n-j-1}\left(n-j\right)\{2j\}_{s,t},$

20. $\forall n \geq 1\ , \{2n+1\}_{s,t} = s^{n} + t^{2}\sum_{j=1}^{n} s^{n-j}\left(n+1-j\right)\{2j-1\}_{s,t}.$

Sonuç 4.10. daha önce elde edilen eşitliklerle birleştirildiğinde bazı ilginç eşitlikler elde edilebilir.

Sonuç 4.1.11.

1. $\forall n \geq 5\ , \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor}\binom{n-1-j}{j} = 1 + \sum_{j=1}^{n-2} F_{j} = (n-1) + \sum_{j=1}^{n-4}(n-3-j)F_{j},,$

2. $\forall n \geq 2,\ \sum_{j=0}^{n-1} F_{2j+1} = n + \sum_{j=1}^{n-1}\left(n-j\right)F_{2j},$

3. $\forall n \geq 1, \sum_{j=0}^{n} F_{2j} = \sum_{j=1}^{n}\left(n+1-j\right)F_{2j-1},$

4. $\sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor}\binom{n-1-j}{j}2^{n-1-2j} = 2^{n-3}(3-n) + 2^{n-2}\sum_{j=2}^{n-2} 2^{-j}P_{j} = \sum_{j=1}^{n-4} 2^{n-4-j}(n-3-j)P_{j}, \forall n \geq 5$

5. $\forall n \geq 2,\ \sum_{j=0}^{n-1} P_{2j+1} = n + 2\sum_{j=1}^{n-1}\left(n-j\right)P_{2j},$

6. $\forall n \geq 1,\ \sum_{j=0}^{n} P_{2j} = 2\sum_{j=1}^{n}\left(n+1-j\right)P_{2j-1},$

7. $\forall n \geq 3,\ 1 + \sum_{j=0}^{n-2} Pv(2j+1) = n + \sum_{j=0}^{n-3}\left(n-2-j\right)Pv(2j),$

8. $\forall n \geq 3, \sum_{j=0}^{n-1} Pv(2j) = n + \sum_{j=0}^{n-3}\left(n-2-j\right) Pv(2j+1),$

9. $\forall n \geq 2, \sum_{j=0}^{n-1} Pv(3j+1) = n + \sum_{j=1}^{n-1}\left(n-j\right) Pv(3j-1),$

10. $\forall n \geq 1, \sum_{j=0}^{n-1} Pv(3j+2) = \sum_{j=0}^{n-1}\left(n-j\right) Pv(3j),$

11. $\forall n \geq 1, \sum_{j=1}^{n} Pv(3j) = n + \sum_{j=1}^{n}\left(n+1-j\right) Pv(3j-2),$

12. $\forall n \geq 5,\ 3+2\sum_{j=2}^{n-2} j_j = \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor}\binom{n-1-j}{j} 2^j = 2n-3+4\sum_{j=1}^{n-4}(n-3-j) j_j,$

13. $\forall n \geq 2, \sum_{j=0}^{n-1} 2^{n-1-j} j_{2j+1} = n2^{n-1} + \sum_{j=1}^{n-1} 2^{n-1-j}\left(n-j\right) j_{2j},$

14. $\forall n \geq 1, \sum_{j=1}^{n} 2^{-j} j_{2j} = \sum_{j=1}^{n} 2^{-j}\left(n+1-j\right) j_{2j-1},$

15. $\forall n \geq 7, \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor}\binom{n-2j}{j} = n-2+\sum_{j=1}^{n-6}(n-5-j)u_j,$

16. $\forall n \geq 1, \sum_{j=0}^{n-1} u_{3j+2} = \sum_{j=1}^{n}(n+1-j)u_{3j-2},$

17. $\forall n \geq 1, \sum_{j=1}^{n} u_{3j} = \sum_{j=1}^{n}(n+1-j)u_{3j-1},$

18. $\forall n \geq 1, \sum_{j=0}^{n} u_{3j+1} = n+1+\sum_{j=1}^{n}(n+1-j)u_{3j},$

19. $\forall n \geq 5, \sum_{k \geq 0}\binom{n-k-1}{k} \mathrm{s}^{n-2k-1}\mathrm{t}^k = s^{n-1} + nts^{n-3} + t^2\sum_{j=1}^{n-4} s^{n-4-j}(n-3-j)\left\{j\right\}_{s,t},$

20. $\forall n \geq 2, st^{n-1} + \sum_{j=0}^{n-2} st^{n-2-j}\left\{2j+3\right\}_{s,t} = nts^{n-1} + t^2\sum_{j=1}^{n-1} s^{n-j-1}(n-j)\left\{2j\right\}_{s,t},$

21. $\forall n \geq 1, t^n + \sum_{j=0}^{n-1} st^{n-1-j}\left\{2j+2\right\}_{s,t} = s^n + t^2\sum_{j=1}^{n} s^{n-j}(n+1-j)\left\{2j-1\right\}_{s,t}$

dir.

Teorem 4.1.14. $i,k,n,\ k \geq 1$ ve $n \geq 2\max\left\{i,k\right\}-1$ koşullarını sağlayan birer tamsayı olsun. $n+1$ 'in i ile bölümünden kalan l olsun. O zaman

$$F_{r,s}^{i}\left(k,n\right) = v\left(i,k,n\right) + \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n+1-2k}{i} \right\rfloor} r^j s^2 F_{r,s}^{i}\left(k,n-2k-ji\right) + \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n+1-k-i}{r} \right\rfloor} r^{j+1} s F_{r,s}^{i}\left(k,n-i-k-ji\right) \quad (4.9)$$

Burada

$$v(i,k,n)=\begin{cases} r^{\left\lfloor \frac{n+1}{i} \right\rfloor}+sr^{\left\lfloor \frac{n+1-k}{i} \right\rfloor}, & eğer\ k \geq i\ veya\ i>k\ ve\ \ell \leq 2k-i-1 \\ r^{\left\lfloor \frac{n+1}{i} \right\rfloor}, & eğer\ i>k\ ve\ 2k-i-1<\ell \leq k-1 \\ sr^{\left\lfloor \frac{n+1-k}{i} \right\rfloor}, & eğer\ i>k\ ve\ k \leq \ell \leq 2k-1 \\ 0, & eğer\ i>k\ ve\ \ell > 2k-1 \end{cases}$$

dir.

İspat. İlk olarak $v(i,k,n)$'nin son parçadan önce *k*-dikdörtgeni olmadan *F* tipi döşemelerin sayısı olduğunu göstereceğiz. $k \geq i$ olduğunda son parçadan önce herhangi *k*-dikdörtgeni içermeyen bir $(n+1)-$levhanın $r^{\left\lfloor \frac{n+1}{i} \right\rfloor}+sr^{\left\lfloor \frac{n+1-k}{i} \right\rfloor}$ döşemelerin varlığını görmek kolaydır, son parçası bir *i*-dikdörtgeni ise $r^{\left\lfloor \frac{n+1}{i} \right\rfloor}$, son parçası bir *k* dikdörtgeni ise $sr^{\left\lfloor \frac{n+1-k}{i} \right\rfloor}$, dir. Eğer $i \geq k$ ve $i \leq 2k-i-1<k-1$ ise bazı $q \geq 2$ tamsayıları için $n+1=1+qi=\ell-k+k+qi$' dir. Böylece, son parçadan önce bir *k*-dikdörtgeni olmayan döşemeler vardır. Başka bir deyişle $2k-i-1<l \leq k-1$ olduğunda, böyle döşemeler sadece *i*-dikdörtgenler ile sonlanır. Şimdi $i>k$ ve $k \leq \ell \leq i-1$ olsun. Bu durumda, son parçası bir *i*-dikdörtgeni olan son parçadan önce *k*-dikdörtgenli döşemeler yoktur ayrıca $n+1=\ell+qi=\ell-k+k+qi$'dır. Böylece $l \leq 2k-1$ ise son parçadan önce *k*-dikdörtgenlerini içermeyen son parçası bir *k*-dikdörtgeni olan bir döşeme vardır ve $\ell > 2k-1$ ise son parçadan önce *k*-dikdörtgenini içeren herhangi bir döşeme yoktur. Geri kalan durumlarda son parçadan önce *j* tane *i*-dikdörtgenlerini takip eden bir *k*-dikdörtgeni vardır, burada ya son parçası bir k-dikdörtgeni ise $0 \leq j \leq \left\lfloor \frac{n+1-k-i}{i} \right\rfloor$ ya da diğer durumlarda $0 \leq j \leq \left\lfloor \frac{n+1-2k}{i} \right\rfloor$ 'dir. Son durumda $s^2r^jF_{r,s}^i(k,n-2k-ji)$ varken daha önceki döşemelerin sayısı $sr^{j+1}F_{r,s}^i(k,n-i-k-ji)$ döşemememiz vardır. Yukarıdaki bütün sayıları toplayarak ispat sonuçlandırılabilir.■

Bir sonraki eşitliği göstermeden önce kırılabilir bir döşeme fikrine ihtiyaç vardır. $k > i \geq 1$ olsun. Bir $(n+1)$-levhanın bir F döşemesi m hücresinde kırılabilir olduğu söylenebilir. Bir tanesi 1'den m'ye kadar hücreleri kaplarken diğeri $m+1$' den sonra $n+1$'e kadar hücreleri kapsar. Eğer bir k-dikdörtgeni $m-j,...,m+k-1-j\left(m+i-1-j\right)$ hücrelerini kapsarsa (eğer 1'den büyük ise i-dikdörtgeni), bir döşemeye m hücresinde bölünemez denilebilir. Burada $j=\{0,...,k-2\}$' dır.

Örnek 4.1.1 Şekil 3, 1, 3, 5 ve 8 hücrelerinde kırılabilir bir döşemeyi gösterir.

Şekil 4.1. Kırılabilir döşeme

Teorem 4.1.15. $m,k,n,$ $m \geq k \geq -2$ ve $n \geq 0$ koşullarını sağlayan tamsayılar olsunlar.

O zaman,

$$F_{r,s}^{1}\left(k,m+n\right)=F_{r,s}^{1}\left(k,m-1\right)F_{r,s}^{1}\left(k,n\right)+s\sum_{j=0}^{k=2}F_{r,s}^{1}\left(k,m-j-2\right)F_{r,s}^{1}\left(k,n-k+j+1\right) \quad (4.10)$$

dir.

İspat. (4.10)' un sağ tarafı bir döşemenin m hücresinde kırılabilir olup olmadığını dikkate alarak $F_{r,s}^{1}\left(k,m+n\right)$ ile numaralandırılmış döşemelerin sayısı olduğunu gösterilecektir. Bir $(m+n+1)$-levhanın bir döşemesi m hücresinde kırılabilir ise, o zaman iki döşemeye ayrılır, birinin uzunluğu m ve bir diğerinin uzunluğu $n+1$'dir. Böylece m hücresinde $F_{r,s}^{1}\left(k,m-1\right)F_{r,s}^{1}\left(k,n\right)$ kırılabilir döşemeye mevcuttur.

Bir $(m+n+1)-$levhasının bir döşemesi m hücresinde kırılamaz ise, o zaman bazı $j\in\{0,...,k-2\}$ için $m-j,...,m+k-1-j$ hücrelerini kapsayan bir k-dikdörtgeni vardır. Bu durumda, döşeme, bir k-dikdörtgeninin takip eden $m-j-1$ uzunluğunda bir döşemeye ve $n-k+j+2$ uzunluğunda takip eden bir döşemeye ayrılır. k-dikdörtgenleri

s boyamalarına sahipken m hücresinde kırılmayan $s\sum_{j=0}^{k-2} F_{r,s}^{1}\left(k,m-j-2\right)F_{r,s}^{1}\left(k,n-k+j+1\right)$ döşemeleri vardır. Böylece muhtemel bütün döşemeler toplanarak ispatı tamamlarız.■

Bu teoremden Fibonacci sayıları için iyi bilinen $F_{m+n}=F_{m+1}F_n+F_mF_{n-1}$ [5], $P_{m+n}=P_{m+1}P_n+P_mP_{n-1}$ [25], $u_{m+n}=u_{m+1}u_n+u_mu_{n-2}+u_{m-1}u_{n-1}$ [16] $\left\{m+n\right\}_{s,t}=\left\{n+1\right\}_{s,t}\left\{m\right\}_{s,t}+t\left\{n\right\}_{s,t}\left\{m-1\right\}_{s,t}$ [2] ve Jacobsthal sayıları için de aşağıda benzer eşitlikler vardır.

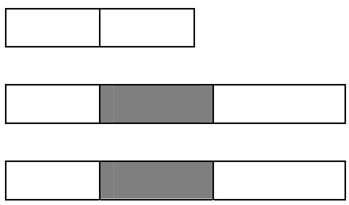
Sonuç 4.1.12. $n,m\geq 1$ için

$$J_{m+n}=J_{m+1}J_n+2J_mJ_{n-1}$$

dir.

Ya hepsinden sonra ya da *2* tane *i*-dikdörtgeni arasında bir *k*-dikdörtgeni varsa *k*-parçanın son dizisine, ya da döşeme $\left(k-1\right)$tane *i*-dikdörtgeni ile bitiyorsa $\left(k-1\right)$ parçanın son dizisine döşemenin *L* tipi bir kuyruğu denir.

Örnek 4.1.2 Şekil 4.'de 2-dikdörtgenli ve 3-dikdörtgenli, sırasıyla beyaz ve gri renkleri kullanarak 9-parçalı olası döşeme kuyrukları görülmektedir.



Şekil 4.2. 2-dikdörtgen ve 3-dikdörtgen kullanarak oluşturulan L tipi döşeme kuyrukları

Teorem 4.1.16. $k,n,i,\ k>i$ ve $n\geq k\left(1+i\right)-i-1$ koşullarını sağlayan bir tamsayılar olsunlar. O zaman

$$L_{r,s}^{i}\left(k,n\right)=ksr^{k-1}F_{r,s}^{i}\left(k,n-\left(1+i\right)k+i\right)+r^kF_{r,s}^{i}\left(k,n-ki\right)$$

dır.

İspat. $(k-1)i$ boyutlu kuyruğun L tipi döşemelerin sayısı $r^{k-1}F_{r,s}^{i}\left(k,n-(k-1)i\right)$ iken $k(i+1)-i$ boyutundaki kuyruğun L tipi döşemelerinin sayısı $(k-1)sr^{k-1}F_{r,s}^{i}\left(k,n-k(i+1)+i\right)$ 'e eşit olduğunu biliyoruz. Döşemenin son parçası, toplamı $r^{k}F_{r,s}^{i}\left(k,n-(k-1)i-i\right)=r^{k}F_{r,s}^{i}\left(k,n-ki\right)$ olan bir i-dikdörtgeni ya da toplamı $sr^{k-1}F_{r,s}^{i}\left(k,n-(k-1)i-k\right)=sr^{k-1}F_{r,s}^{i}\left(k,n-(i+1)k+i\right)$' ya eşit olan bir k-dikdörtgeni olan iki ayrık alt kümeye ayrılır. Daha sonra bu sayılar toplanarak $L_{r,s}^{i}(k,n)$ ile numaralandırılan döşemenin sayısı sol taraftadır.■

Yukarıdaki eşitlikte $i=r=s=1$ ve $k=2$ alınırsa iyi bilinen $L_n=F_n+2F_{n-1}$ eşitliğine indirgenir.

Teorem 4.1.17. $k,i,n,$ $k>i$ ve $n\geq k(2+i)-i-1$ koşullarını sağlayan tamsayılar olsun. O zaman

$$L_{r,s}^{i}(k,n)=(k-1)sr^{\left\lfloor\frac{n+1-k}{i}\right\rfloor}+r^{\left\lfloor\frac{n+1}{i}\right\rfloor}$$

$$+\sum_{j=0}^{\left\lfloor\frac{n+1-k(2+i)+i}{i}\right\rfloor}(k-1)s^{2}r^{(k-1)+j}F_{r,s}^{i}\left(k,n-k(2+i)+i-ij\right)$$

$$+\sum_{t=0}^{\left\lfloor\frac{n+1-k(1+i)+i}{i}\right\rfloor}sr^{(k-1)+t}F_{r,s}^{i}\left(k,n-k(1+i)+i-it\right)$$

dır.

İspat. Kuyruktan önce herhangi bir k-dikdörtgenini içermeyen bir $(n+1)$ -levhanın L tipi döşemelerinin sayısı $(k-1)sr^{\left\lfloor\frac{n+1-k}{i}\right\rfloor}+r^{\left\lfloor\frac{n+1}{i}\right\rfloor}$ olduğu kolayca görülür. $k(1+i)i$ boyutunun kuyruğu $(k-1)sr^{\left\lfloor\frac{n+1-k}{i}\right\rfloor}$ ve $(k-1)i$ boyutunun kuyruğu $r^{\left\lfloor\frac{n+1}{i}\right\rfloor}$'dır. Kalan durumlarda kuyruktan önce en az bir k-dikdörtgeni vardır. Kuyruk ile kuyruktan önce en sağdaki k-dikdörtgeni arasında j tane i-dikdörtgenlerin sayısı dikkate alınarak böyle döşemelerin sayısını hesaplayabiliriz. Kuyruk $(k-1)i$ boyutluysa

$t \leq \left\lfloor \dfrac{n+1-\left(k+(k-1)i\right)}{i} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{n+1-k(1+i)+i}{i} \right\rfloor$ ve kuyruk $k(1+i)-i$ boyutluysa $j \leq \left\lfloor \dfrac{n+1-\left(2k+(k-1)i\right)}{i} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{n+1-k(2+i)+i}{i} \right\rfloor$ dır. Parçaların bu dizisi çıkarılması halinde ya kuyruk $k(1+i)-i$ boyuta sahipse $\left(n+1-k(2+i)+i-ij\right)$ levhalı F tipi döşemesi ya da kuyruğu $(k-1)i$ boyutluysa $\left(n+1-k(1+i)+i-it\right)$ levhanın F tipi döşemesi elde edilir. Her durumdaki olası tüm değerleri toplayarak ispatı tamamlayabiliriz.

Sonuç 4.1.13. $n \geq 4$ için

$L_n = 2 + F_n + 2\sum_{j=1}^{n-3} F_j$ 'dir.

Sonuç olarak $L_n - F_n$ çifttir.

Teorem 4.1.18. $k, i, n,$ $k > i$ ve $n \geq k(3+i)-i-1$ koşullarını sağlayan tamsayılar olsun. O zaman

$$L_{r,s}^{i}(k,n) = (k-1)\ s r^{\left\lfloor \frac{n+1-k}{i} \right\rfloor} + r^{\left\lfloor \frac{n+1}{i} \right\rfloor}$$

$$+(k-1)s^2 r^{\left\lfloor \frac{n+1-2k}{i} \right\rfloor}\left(\left\lfloor \frac{n+1-k(2+i)+i}{i} \right\rfloor + 1\right) + s r^{\left\lfloor \frac{n+1-k}{i} \right\rfloor}\left(\left\lfloor \frac{n+1-k(1+i)+i}{i} \right\rfloor + 1\right)$$

$$+\sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n+1-k(3+i)+i}{i} \right\rfloor} \sum_{t=0}^{\left\lfloor \frac{n+1-k(3+i)+i-ji}{i} \right\rfloor} (k-1)s^3 r^{(k-1)+j+t} F_{r,s}^{i}\left(k, n-k(3+i)+i-ji-ti\right)$$

$$+\sum_{\mathrm{j}=0}^{\left\lfloor \frac{\mathrm{n+1-k(i+2)+i}}{\mathrm{i}} \right\rfloor} \sum_{\mathrm{t}=0}^{\left\lfloor \frac{\mathrm{n+1-k(i+2)+i-ji}}{\mathrm{i}} \right\rfloor} \mathrm{s}^2 \mathrm{r}^{(\mathrm{k}-1)+\mathrm{j}+\mathrm{t}} \mathrm{F}_{\mathrm{r,s}}^{\mathrm{i}}\left(\mathrm{k}, \mathrm{n}-\mathrm{k}(\mathrm{i}+2)+\mathrm{i}-\mathrm{ji}+\mathrm{ti}\right)$$

dir.

İspat. Kuyruktan önce *k*-dikdörtgeninin sayısı dikkate alınarak bir $(n+1)$-levhanın *L* tipi döşemelerinin sayısı sayılabilirdir. Kuyruktan önce herhangi bir *i*-dikdörtgeni içermeyen

$(k-1)sr^{\left\lfloor \frac{n+1-k}{i} \right\rfloor}+r^{\left\lfloor \frac{n+1}{i} \right\rfloor}$ döşemeleri vardır. Şimdi kuyruktan önce tam olarak bir k-dikdörtgenli döşemeyi göz önüne alalım. Eğer kuyruk $\left(k(1+i)-i\right)$ boyuta sahipse $(k-1)s^2r^{\left\lfloor \frac{n+1-2k}{i} \right\rfloor}\left(\left\lfloor \frac{n+1-k(2+i)+i}{i} \right\rfloor+1\right)$ döşeme vardır. Diğer taraftan kuyruğun boyutu $(k-1)i$ ise, o zaman $sr^{\left\lfloor \frac{n+1-k}{i} \right\rfloor}\left(\left\lfloor \frac{n+1-k(1+i)+i}{i} \right\rfloor+1\right)$ döşeme vardır. Her iki durumda da kuyruktan önce en az iki k-dikdörtgenini vardır.

Kuyruktan önceki son iki k-dikdörtgen arasındaki i-dikdörtgen sayısını j ile ve en sağdaki k-dikdörtgeni ile kuyruk arasında i-dikdörtgenlerin sayısı t ile tanımlanırsa iki durum ortaya çıkar.

i) <u>$\left(k(1+i)-i\right)$ boyutlu kuyruk</u>. Bu durumda

$$j,t \le \left\lfloor \frac{n+1-k(1+i)+i-2k}{i} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n+1-k(3+i)+i}{i} \right\rfloor$$

ve her j ve t için

$(k-1)s^3r^{(k-1)+j+t}F_{r,s}^{i}\left(k,n-k(3+i)+i-ji-ti\right)$ döşemesi vardır. Böylece

$$\sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n+1-k(3+i)+i}{i} \right\rfloor}\sum_{t=0}^{\left\lfloor \frac{n+1-k(3+i)+i-ji}{i} \right\rfloor}(k-1)s^3r^{(k-1)+j+t}F_{r,s}^{i}\left(k,n-k(3+i)+i-ji-ti\right)$$

$k(1+i)-i$ kuyruklu bir $(n+1)$-levhanın L tipi döşemesinin toplamı olarak numaralandırılır. Ve kuyruktan önce t tane i-dikdörtgenleri arasında j tane i-dikdörtgenlerinin bir dizisidir.

ii) <u>$(k-1)i$ boyutlu kuyruk.</u> Önceki maddeyle benzer şekilde $j,t \le \left\lfloor \frac{n+1-k(i+2)+i}{i} \right\rfloor$ ve sonrasında

$$\sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n+1-k(i+2)+i}{i} \right\rfloor}\sum_{t=0}^{\left\lfloor \frac{n+1-k(i+2)+i-ij}{i} \right\rfloor}s^2r^{(k-1)+j+t}F_{r,s}^{i}\left(k,n-k(i+2)+i-ji-ti\right)$$

döşeme sayısıdır.■

Sonuç 4.1.14. $n \geq 6$ ise

$$L_n = 2(n-1) + F_{n-3} + \sum_{j=0}^{n-5} 2(j+1) F_{n-4-j}$$

ve sonuç olarak $L_n - F_{n-3}$ çifttir.

4.1.13. ve 4.1.14. birleştirilirse; buradan $n \geq 6$ için $F_n - F_{n-3}$ çifttir.

Teorem 4.1.19. n, i, k , $k > i \geq 2$ ve $n \geq 2k + (k-1)i - 1$ koşullarını sağlayan tamsayılar olsun. Öyle ki $n+1-(k-1)i \equiv 1(\mathrm{mod}\, k)$ denktir.

Burada $0 \leq \ell \leq i-1$'dir. O zaman

$$L_{r,s}^{i}(k,n) = s^{\left\lfloor \frac{n+1-(k-1)i}{k} \right\rfloor} + (k-1)s^{\left\lfloor \frac{n+1+i-k(i+1)}{k} \right\rfloor}$$

$$+ r^k s^j \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n+1-(k-1)i}{k} \right\rfloor} F_{r,s}^{i}(k, n-ki-jk) + (k-1) r^k s^{j+1} \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n+1-(k-1)i-k}{k} \right\rfloor} F_{r,s}^{i}(k, n-ik-jk-k)$$

dır.

İspat. Sırasıyla $(k-1)i$ boyutlu kuyruk ve $(k-1)i+k$ boyutlu kuyruklar için kuyruktan önce azalan değerleri için azalmadan önce i-dikdörtgenlersiz $(n+1)$-levhanın L tipi döşemeleri $s^{\left\lfloor \frac{n+1-(k-1)i}{k} \right\rfloor}$ ve $(k-1)s^{\left\lfloor \frac{n+1+i-k(i+1)}{k} \right\rfloor}$' dir. Diğer kuyruklar kuyruktan önce k-dikdörtgenlerinin bir j sayısını takip eden bir i-dikdörtgeni ile sonlanır. Böylece kuyruk ve parçaların bu dizisi kaldırarak ya $((n+1)-(j+i)k)$-levhası ya da bir $(n+1-(j+i+1)k)$ -levhasının F tipi kuyrukları solda kalır.

Önceki durum, $(k-1)r^k s^{j+1} F_{r,s}^{i}(k, n-ki-jk-k)$ döşemeye sahipken sonraki durum her j için $r^k s^j F_{r,s}^{i}(k, n-ki-jk)$ döşemeye sahiptir. Bu sayıları toplayarak ispatı tamamlarız.■

Teorem 4.1.20. k, i, n, $k > i = 1$ ve $n \geq 3k-2$ koşullarını sağlayan tamsayılar olsunlar. O zaman

$$L_{r,s}^{i}(k,n) = u(n) + r^k s^j \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n+1-k}{k} \right\rfloor} F_{r,s}^{i}(k, n-jk-k) + r^k s^{j+1}(k-1) \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n+1-2k}{k} \right\rfloor} F_{r,s}^{i}(k, n-jk-2k)$$

Burada

$$\mathrm{u}(\mathrm{n}) = \begin{cases} 0 & , \text{eğer } \mathrm{n}+2-\mathrm{k} \neq 0 (\bmod \mathrm{k}) \\ \mathrm{r}^{\mathrm{k}-1}\mathrm{s}^{\left\lfloor \frac{\mathrm{n}+2-\mathrm{k}}{\mathrm{k}} \right\rfloor} + (\mathrm{k}-1)\mathrm{r}^{\mathrm{k}-1}\mathrm{s}^{\left\lfloor \frac{\mathrm{n}+2-2\mathrm{k}}{\mathrm{k}} \right\rfloor} & , \text{eğer } \mathrm{n}+2-\mathrm{k} \equiv 0 (\bmod \mathrm{k}) \end{cases}$$

Bu teoremin ispatı bir öncekinin ispatına benzer olduğundan göz ardı edilecektir.■

$n+2-k \not\equiv 0 (\bmod k)$ olduğundan kuyruktan önce *i*-dikdörtgenlerini içermeyen döşemeler mevcut değildir. Bu teoremin sonucu olarak aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 4.1.15. $n \geq 4$ için

$$L_n = \begin{cases} 2 + F_n + 2\sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-2} F_{n-2-2j}, & \text{eğer } n \text{ çift ise} \\ F_n + 2\sum_{j=0}^{\frac{n-3}{2}} F_{n-2-2j}, & \text{eğer } n \text{ tek ise} \end{cases}$$

dir.

4.2. Matris Üreteçleri

Bu bölümde rekürans bağıntıları hakkında sonuçlar elde etmek için oldukça önemli bir araç olan matris yöntemleri incelenmiştir. Öncelikle elemanları 4-parametreli genelleştirilmiş Fibonacci sayıları olan A_k matrisi $k \geq i$ için $Q_k = \left[q_{tj}\right]_{k \times k}$ ile tanımlanmıştır.

Tanım 4.2.1 $k \geq i$ olsun. $Q_k = \left[q_{tj}\right]_{kxk}$ matrisi, $\forall 1 \leq t \leq k$ için q_{t1} elemanları $F_{r,s}^{i}(k,n)$ tanımındaki rekürans bağıntısının $F_{r,s}^{i}(k,n-t)$ katsayıları q_{t1} ve $j \geq 2$ için

$$q_{tj} = \begin{cases} 1, & \text{eğer } j = t+1 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Örneğin $i=2$ ve $k=2,3,...,k$ için

$$Q_2=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ r+s & 0 \end{bmatrix}, \qquad Q_3=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ r & 0 & 1 \\ s & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad Q_4=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ r & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ s & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Q_k=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ r & 0 & 1 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ s & 0 & 0 & ... & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Ayrıca başlangıç koşullarının matrisine de,

$$A_k=\begin{bmatrix} F_{r,s}^i(k,2k-3) & F_{r,s}^i(k,2k-4) & ... & F_{r,s}^i(k,k-2) \\ F_{r,s}^i(k,2k-4) & F_{r,s}^i(k,2k-5) & ... & F_{r,s}^i(k,k-3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ F_{r,s}^i(k,k-1) & F_{r,s}^i(k,k-2) & ... & F_{r,s}^i(k,0) \\ F_{r,s}^i(k,k-2) & F_{r,s}^i(k,k-3) & ... & F_{r,s}^i(k,-1) \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlansın.

Teorem 4.2.1. $k,n,$ $k\geq 2$ ve $n\geq -1$ koşullarını sağlayan tamsayılar olsun. O zaman

$$A_kQ_k^{n+1}=\begin{bmatrix} F_{r,s}^i(k,n+2k-2) & ... & F_{r,s}^i(k,n+k-1) \\ F_{r,s}^i(k,n+2k-3) & ... & F_{r,s}^i(k,n+k-2) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{r,s}^i(k,n+k) & ... & F_{r,s}^i(k,n+1) \\ F_{r,s}^i(k,n+k-1) & ... & F_{r,s}^i(k,n) \end{bmatrix}$$

dir.

Genelleştirilmiş Cassini formülünü elde etmek için aşağıdaki bazı sonuçları verelim.

Teorem 4.2.2. $k\geq 2$ olsun. O zaman

$$\det Q_k = \begin{cases} s(-1)^{k+1}, & \textit{eğer } i < k \\ (s+r)(-1)^{k+1}, & \textit{eğer } i = k \textit{ ise} \end{cases}$$

dir.

İspat. Q_k matrisinin ilk sütununu üzerinde kofaktör formülü kullanılarak determinant kolayca hesaplanabilir.

Teorem 4.2.3. $k, i,\ \ k \geq 2$ ve $i = 1$ olsun. O zaman

$$\det A_k = s^{k-1}(-1)^{\frac{(k-1)(k+6)}{2}}$$

dır.

Sonuç 4.2.1. $i, k, n\ \ k \geq 2$, $i = 1$ ve $n \geq 0$ olsun. O zaman

$$\det \mathrm{A_k Q_k^{n+1}} = \mathrm{s^{n+k}}(-1)^{\frac{(k-1)(k+6)+2(k+1)(n+1)}{2}}$$ ‘ dir.

5. BÖLÜM

5.1. Sonuç Ve Öneriler

Bu çalışmada $F_{r,s}^{i}(k,n)$, 4-parametreli genelleştirilmiş Fibonacci ve $L_{r,s}^{i}(k,n)$, 4-parametreli dizileri tanımlanmış ve bu dizilerin temel özellikleri döşeme tekniği ile elde edilmiştir. Elde edilen veriler literatürde yer alan bazı dizilere indirgenebilir. Öte yandan elemanları 4-parametreli genelleştirilmiş Fibonacci sayıları olan matrislerin bazı temel özellikleri verilmiştir.

Yapılan bu çalışmada mertebe artırılarak döşeme tekniği yüksek mertebedeki sayı dizileri için de uygulanabilir.

KAYNAKÇA

[1] Akçağıl, Şamil (2005). Fibonacci Sayıları ve Altın Oran, Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Balıkesir.

[2] Amdeberhan, T., Chen, X., Moll, V. H., Sagan, B. E., Generalized Fibonacci polynomials and Fibonomial coefficients, Annals of Combinatorics, 18(4), 541-562, 2014.

[3] Bakım, Sümeyye (2014). Fibonacci Dizisi ve Altın Oran'ın Müzikte Kullanımının İncelenmesi, Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Selçuk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya.

[4]Bednardz U., Wloch A., M.Wolowiec-Musial,Distance Fibonacci numbers,their interpretations and matrix generators, Comment.Math.53(2013) 35-46.

[5] Benjamin A.T., Plott S.S, Sellers J.A, Tiling proofs of recent sum identities involving Pell numbers, Ann. Comb. 12 (3) (2008) 271–278.

[6] Bicknell-Johnson, M., Spears, C., P., Classes of identities for the generalizaed Fibonacci numbers $G_n = G_{n-1} + G_{n-c}$ from matrices with constant valued determinants, Fibonacci Quart. 34, 121–128, 1996.

[7] Bilgici, G. Two generalizations of Lucas sequence, Applied Mathematics and Computation, 245, 526-538, 2014.

[8] Catarino, P. On some identities and generating functions for *k*-Pell numbers, Int. J. Math. Anal. 7 (38) (2013) 1877–1884.

[9] Da Silva R., De Oliveira K. and Da Graça Neto A.C., On a four-parameter generalization of some special sequences, Discrete Applied Mathematics, 243(2018), 154-171.

[10] De Weger, B. M. Padua and Pisa are exponentially far apart., Publicacions Matemàtiques, 631-651. 1997.

[11] Dunlap, R. A., The golden ratio and Fibonacci numbers, World Scientific, 1997.

[12] Edson, M., & Yayenie, O., A new generalization of Fibonacci sequence and extended Binet's formula, Integers, 9(6), 639-654, 2009.

[13] Falcon S., Plaza A., On the Fibonacci *k*-numbers, Chaos Solitons Fractals, 32(5), 1615–1624, 2007.

[14] Falcon, S. On the k-Lucas numbers. Int. J. Contemp. Math. Sciences, 6(21), 1039-1050, 2011.

[15] Falcon, S., Generalized (k, r)–Fibonacci Numbers, General Mathematics Notes, 25(2), 148-158. 2014.

[16] Flaut, C., Shpakivskyi, V., On generalized Fibonacci quaternions and Fibonacci-Narayana quaternions, Adv. Appl. Clifford Algebr, 23 (3) 673–688, 2013.

[17] Gogin, N. D.; Myllari, A. A., The Fibonacci-Padovan sequence and MacWilliams transform matrices, Programming and Computer Software, 33.2, 74-79. 2007.

[18] Gulec, H. H., Taskara, N. & Uslu, K., A new approach to generalized Fibonacci and Lucas numbers with binomial coefficients, Applied Mathematics and Computation, 220, 482-486, 2013.

[19] Hoggatt, V. E., Fibonacci and Lucas Numbers, A Publication of The Fibonacci Association University of Santa Clara, 1969.

[20] Hosoya H., Topological index. A newly proposed quantity characterizing the topological nature of structural isomers of saturated hydrocarbons, Bull. Chem. Soc. Japan 44 (9) (1971) 2332–2339.

[21] I. Włoch, U. Bednarz, D. Bród, A. Włoch, M. Wołowiec-Musiał, On a new type of distance Fibonacci numbers, Discrete Appl. Math. 161 (16), 2695–2701, 2013.

[22] Jhala, D., Sisodiya, K., Rathore, G. P. S., On some identities for k-Jacobsthal numbers, Internqtional Journal Mathematic Analaysis, 7(12), 551-556, 2013.

[23] Kocer, E. G., Tuglu, N., & Stakhov, A. On the m-extension of the Fibonacci and Lucas p-numbers, Chaos, Solitons & Fractals, 40(4), 1890-1906, 2009.

[24] Koshy, T., Fibonacci and Lucas numbers with applications, Wiley, 2001.

[25] Koshy, T., Pell and Pell-Lucas Numbers with Aplications, Springer, New York, 2014.

[26] Koshy, T., Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, New Jersey: John Wiley and Sons, 2018.

[27] Kwaśnik, M., Włoch, I., The total number of generalized stable sets and kernels of graphs, Ars Combin. 55, 139–146, 2000.

[28] Livio, M., The golden ratio and aesthetics, Plus Magazine, 22, 2002.

[29] Marie, J. S., 2012, Theology As The Basis For Golden Section Analysis: A Model of Construction For Johann Sebastian Bach's St. John Passion, Doctoral Thesis, *Faculty of the Usc Thornton School of Music,* University of Southern California, 1.

[30] Ramírez, J. L. Hessenberg matrices and the generalized Fibonacci-Narayana sequence, Filomat, 29(7), 1557-1563. 2015.

[31] Ramírez, J. L., Sirvent, V. F., A note on the k-Narayana sequence, In Annales mathematicae et informaticae, 91-105, 2015.

[32] Stakhov, A., & Rozin, B., (2006), The continuous functions for the Fibonacci and Lucas p-numbers, Chaos, Solitons & Fractals, 28(4), 1014-1025.

[33] Szynal-Liana, A., Wloch, A., & Wloch, I., On generalized Pell numbers generated by Fibonacci and Lucas numbers, Ars Combinatoria, 115, 411-423, 2014.

[34] Tasci, D. & Firengiz, M.C., Incomplete Fibonacci and Lucas p-numbers, Mathematical and Computer Modelling, 52(9-10), 1763-1770, 2010.

[35] Uslu, K., & Uygun, S. The (s, t) Jacobsthal and (s, t) Jacobsthal-Lucas Matrix Sequences, Ars Comb., 108, 13-22. 2013.

[36] Uygun, S., & Tümbas, A. Generalized k-Jacobsthal Sequence, Asian Journal of Mathematics and Physics, 2, 45-50. 2018.

[37] Quinn, J. J., Arthur T. B., Proofs That Really Count: The Art of Combinatorial Proof, The Mathematical Association of America, 2003.

[38] Yazlik, Y., Taskara, N., "A note on generalized k−Horadam sequence",Computers & Mathematics with Applications, 63 (1), 36–41, 2012.

[39] Yazlık,Y., Taskara, N.Uslu K.,& Yilmaz ,N.,(2011), The generalized *(s,t)*-sequence and its matrix sequence, In AIP Conference Proceedings, 1389(1), 1-4.

[40] Yazlik, Y., Köme, C. & Madhusudanan, V. A new generalization of Fibonacci and Lucas p− numbers. Journal of Computational Analysis and Applications, 25(4), 657-669, 2018.

[41] Yılmaz, N. &Taskara,N.(2013)Matris sequences in terms Padovan and Perrin numbers. Journal of Applied Mathematics,2013