T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİNCİ MERTEBEDEN ÇARPILABİLİR FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜLEBİLİRLİĞİ

Tezi Hazırlayan
Fatih PİŞKİN

Tez Danışmanı
Doç. Dr. Yasin YAZLIK

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Nisan 2019
NEVŞEHİR

T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİNCİ MERTEBEDEN ÇARPILABİLİR FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜLEBİLİRLİĞİ

Tezi Hazırlayan
Fatih PİŞKİN

Tez Danışmanı
Doç. Dr. Yasin YAZLIK

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Nisan 2019
NEVŞEHİR

Doç. Dr. Yasin YAZLIK danışmanlığında **Fatih PİŞKİN** tarafından hazırlanan **"İkinci Mertebeden Çarpılabilir Fark Denklem Sistemlerinin Çözülebilirliği"** başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

29/04/2019

JÜRİ

Başkan : Dr. Öğr. Üyesi Durhasan Turgut TOLLU

Üye : Doç. Dr. Yasin YAZLIK

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Sure KÖME

ONAY:

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun 30/04/2019 tarih ve 2019.25.212 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

03/05/2019

Prof. Dr. Şahlan ÖZTÜRK

Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİM SAYFASI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada yer alan bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu ve bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Fatih PİŞKİN

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim ve tez çalışmam süresince tüm bilgilerini benimle paylaşan, bana yön veren, destekleyen, düşünceleriyle yolumu açan, kıymetli zamanını bana harcayan ve tezimde büyük emeği olan sayın hocam Doç. Dr. Yasin YAZLIK'a,

Maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen değerli eşim Rabia PİŞKİN ve çok kıymetli çocuklarım Enes ve Elif'e,

Teknik ve idari yardımlarından dolayı Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Matematik Bölümünün değerli hocalarına teşekkür ederim.

İKİNCİ MERTEBEDEN ÇARPILABİLİR FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜLEBİLİRLİĞİ

(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

Fatih PİŞKİN

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Nisan 2019

ÖZET

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm kendi içinde giriş ve literatür taraması olarak iki kısma ayrılmıştır.

İkinci bölümde, ön bilgiler ve üçüncü bölümde kullanılacak olan bazı tanımlar, lemmalar ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde ise $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$ ve başlangıç şartları z_{-1}, z_0, w_{-1}, w_0 kompleks sayılar olmak üzere $z_{n+1} = \frac{w_n^a}{z_{n-1}^b}$, $w_{n+1} = \frac{z_n^c}{w_{n-1}^d}$, $n \in \mathbb{N}_0$, şeklindeki lineer olmayan çarpılabilir tipteki fark denklem sisteminin çözümleri elde edilmiştir. Ayrıca elde edilen çözümler kullanılarak çözümlerin asimptotik davranışı incelenmiştir.

Son bölüm olan dördüncü bölümde ise sonuç ve öneriler bulunmaktadır.

Anahtar kelimeler: Fark denklem sistemi, Periyodiklik, Çözümlerin asimptotik davranışı, Çarpılabilir tipteki sistemler
Tez Danışmanları: Doç. Dr. Yasin YAZLIK
Sayfa sayısı: 53

SOLVABLE PRODUCT-TYPE SISTEM OF DIFFERENCE EQUATIONS OF SECOND ORDER

(MS THESIS)

Fatih PİŞKİN

NEVŞEHIR HACI BEKTAŞ VELI UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

April 2019

ABSTRACT

This thesis consists of four chapters.

The first chapter is divided into two parts as an introduction and a literature review.

In the second chapter, preliminary information and some definitions, lemmas and theorems which will be used in the third chapter are given.

In the third chapter, $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$ and on the condition which z_{-1}, z_0, w_{-1}, w_0 are the complex numbers, the solutions of the non-lineary multiplicable type of difference equations system in the form of $z_{n+1} = \frac{w_n^a}{z_{n-1}^b}$, $w_{n+1} = \frac{z_n^c}{w_{n-1}^d}$, $n \in \mathbb{N}_0$, are obtained. In addition, by using the obtained solutions the asymptotic behavior of the solutions are analyzed

In the last chapter, there are conclusions and recommendations.

Keywords:* *Difference equations system, Periodicity, Asymptotic behavior of the solutions, Prudct-type system
Thesis Supervisors: Assoc. Prof. Dr. Yasin YAZLIK
Pages: 53

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	:	Kompleks sayılar kümesi
F_n	:	n. Fibonacci sayısı
E	:	Öteleme operatörü
Δ	:	Fark operatörü
C	:	Casoratyan matrisi

1. BÖLÜM

GİRİŞ

Kainat'ın bir düzen üzerine yaratıldığı şüphesizdir. Gözle görünür ya da görünmez olan bu düzenin varlığını ispatlamada bizim en temel aracımız matematiktir. Matematik, ayrıca tüm bilimlerin yardımcı bir bilimi olarak karşımıza çıkmaktadır. Yardımcı bilim olarak matematik ilk başta fen bilimlerinde sıkça karşımıza çıksa da, sosyal bilimlerin de temel araçlarından biridir. Bu nedenledir ki matematik canlı cansız her varlığın hizmetindedir. İnsanoğlu yaratılışından günümüze kadar; tarım, hayvancılık, savaş, astronomi, fizik, tıp, mühendislik, resim, müzik vb her işinde matematikten yararlanmıştır.

Son zamanlarda diferansiyel denklemlerle yakından ilgili olan fark denklemler matematikçiler tarafından sıkça işlenen bir konu olmuştur. Fark denklemler, diferansiyel denklemlerin geliştirilmesiyle günümüzde ki haline getirilmiştir. Fark denklemleri ve diferansiyel denklemler bir biri ile büyük benzerlikler göstermektedir. Ancak bu iki denklem arasında bazı farklar da bulunmaktadır.

Fark denklem; insanoğlunun gündelik yaşamında karşılaştığı olayları ve sorunları matematiksel olarak çözüme ulaştırmaya yarayan bir denklemdir. Bu sebepten matematikçilerin ve bilimcilerin çok ilgi gören bir alanı olmuştur. Bu denklemler; fizik, kuantum, kimya, biyoloji, tıp, genetik, ilaç, mühendislik, teknik bilimler, ekonomi, olasılık teorisi ve sosyal bilimler gibi birçok bilim alanında kullanılmaktadır. Fark denklemlerin kullanıldığı bazı problemler aşağıda verilmiştir.

Tavşan Problemi: Daha çok Fibonacci olarak bilinen ünlü İtalyan matematikçisi Leonardo di Pisa 1202 yılında yazdığı *Liber Abaci* adlı kitabında ilk defa tavşan probleminden söz etmiştir. Bu problem "bir çift olgun tavşan her ayın sonunda bir çift yavrulamakta ve bu yavrular iki ayda olgunlaşmaktadır. Bu varsayım altında bir çift olgun tavşanla işe başlanırsa, bir yıl sonra kaç çift tavşan elde edilir?" şeklindedir. Bu problemin çözümü, birinci ayın sonunda ilk olgun çift bir çift yavru doğuracağından, iki çift tavşan bulunur. İkinci ayın sonunda, sadece ilk olgun çift doğurmaya devam edeceğinden, üç çift tavşan elde edilir. Üçüncü ayın sonunda, hem ilk hem de ikinci çift doğuracağından, beş çift tavşan bulunur. Bu şekilde devam edilirse aylara göre tavşan çifti sayısı 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377 olarak bulunur. Öte yandan, tavşan probleminin matematiksel modeli $x(n+2)-x(n+1)-x(n)=0$, $x(0)=1$, $x(1)=2$, $0\le n\le 12$, dir. Burada $x(n)$ *n*. ayın sonundaki tavşan çiftlerinin sayısıdır. Bu model ikinci basamaktan bir lineer fark denklemidir [19].

Bir Ulusal Gelir Modeli: Üç parametreden oluşan bir M_n ulusal geliri üçer aylık (çeyrek yıl) dönemler sonunda hesaplanmaktadır. Bu parametreler müşteri harcamaları C_n, özel yatırımlar I_n ve hükümet harcamaları G_n şeklinde olup $M_n = C_n + I_n + G_n$ dir. Böyle bir ulusal geliri modellmek için ekonomist Paul A. Samuelson bu faktörlere dair aşağıdaki kabullenmeleri yapmıştır. “(i) Herhangi bir çeyrek yıldaki müşteri harcaması bir önceki çeyrek yıldaki ulusal gelir ile orantılıdır, (ii) Herhangi bir çeyrek yılda oluşan özel yatırım, o çeyrek ve bir önceki çeyrek yıl üzerinden yapılan müşteri harcamalarındaki artış ile orantılıdır (ivmelenme prensibi), (iii) Hükümet harcamaları her çeyrek yılda aynıdır”. Bu kabullere göre (i) den $C_n = \alpha M_{n-1}$, $0<\alpha<1$, yazılabilir. Burada α orantı sabiti marjinal tüketim sabitidir. Buna göre bireyler gelirlerinin sabit bir oranını harcama eğiliminde olurlar. (ii) den $I_n = \beta(C_n - C_{n-1})$, $0<\beta<1$, bulunur. Burada β orantı sabitidir. Bu ifadeden, tüketim azalırken, yani $C_n - C_{n-1} < 0$ halinde üreticilerin yatırım amaçlı sermayelerini aşağı çekme eğiliminde olacakları ve buna mukabil tüketim artarken, $C_n - C_{n-1} > 0$ durumunda üreticilerin yatırım harcamalarını artırmak isteyecekleri düşünülebilir. C_n, I_n de yerine yazılırsa $I_n = \alpha\beta(M_{n-1} - M_{n-2})$ dir. (iii) kabulüne göre hükümet harcamaları her çeyrek yılda aynı kaldığından, $G_n = g$ yazılabilir. Burada g sabiti hükümetin sabit harcama değerini göstermektedir. Böylece C_n, I_n ve G_n ifadeleri M_n de yerine yazılırsa, ulusal gelir için $M_n = \alpha M_{n-1} + \alpha\beta(M_{n-1} - M_{n-2}) + g$ veya $M_{n+2} - \alpha(1+\beta)M_{n+1} + \alpha\beta M_n = g$, $n \in \mathbb{N}_0$ denklemi elde edilir. Burada M_0 ve M_1 verilen başlangıç değerleridir. Bu denklem ikinci basamaktan bir lineer sabit katsayılı fark denklemi olup çözümü ulusal geliri niteler. Bu denkleme göre herhengi bir periyottaki ulusal gelir önceki iki periyottaki gelirle ilişkilidir [19].

Richardson Silahlanma Yarışı Modeli: *X* ve *Y* rekabet halinde olan iki ülkeyi göstersin ve onların *n*. yıldaki askeri bütçeleri sırasıyla x_n ve y_n olsun. Lewis F. Richardson askeri bütçelerdeki yıllık değişimin $\Delta x_n = Ky_n - \alpha x_n + g$, $\Delta y_n = Lx_n - \beta y_n + h$ lineer denklemleriyle ilişkili olduğunu belirtmiştir. Burada *K, L, α, β, g, h* katsayıları negatif olmayan sabitlerdir. *K* ve *L* savunma katsayıları olup bir ülkenin mevcut askeri bütçesine diğer ülkenin verdiği tepki göstergeleridir. *α* ve *β* yorgunluk katsayıları olup eylemsizlik ve askeri bütçelerdeki artışın olası negatif ekonomik bedel ölçütleridir. *g* ve *h* sabitleri askeri olmayan siyasi ve ekonomik kaygıları gösteren düşmanlık hisleridir [19].

1.1. Amaç ve Kapsam

Bu çalışmanın temel amacı, Stević ve arkadaşlarının [1] makalesini detaylı olarak incelemektir.

1.2. Kaynak Araştırması

Çalışmanın bu kısmında, çarpılabilir tipteki fark denklem sistemlerinin çözülebilirliği ve onların uygulamaları ile ilgili literatürde yapılmış olan çalışmalardan bahsedilecektir.

Stević ve arkadaşları (2014) "*On positive solutions of a system of max-type difference equaıons*" isimli çalışmalarında $x_{n+1} = \max\left\{c, \frac{y_n^p}{z_{n-1}^p}\right\}$, $y_{n+1} = \max\left\{c, \frac{z_n^p}{x_{n-1}^p}\right\}$, $z_{n+1} = \max\left\{c, \frac{x_n^p}{y_{n-1}^p}\right\}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $p, c \in (0, \infty)$, maksimum fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin sınırlılık karakterini ve global kararlılığını incelemişlerdir.

Stević ve arkadaşları (2014) "*Long-term behavior of positive solutions of a system of max-type difference equations*" isimli çalışmalarında

$$x_n = \max\left\{a, \frac{y_{n-1}^p}{\prod_{j=2}^{k} x_{n-j}^{q_j}}\right\}, y_n = \max\left\{a, \frac{x_{n-1}^p}{\prod_{j=2}^{k} y_{n-j}^{q_j}}\right\}, \ a, p > 0 \text{ ve } \forall j \in \ 2,...,k \ , q_j \geq 0,$$

fark denklemlem sisteminin bütün pozitif çözümlerinin çekimliliğini garanti eden bazı yeterli şartlar verilmişlerdir. Aynı zamanda sistemin pozitif çözümlerinin sınırlık karakterini de incelemişlerdir.

Stević ve arkadaşları (2014) "*Boundedness character of a max-type system of difference equations of second order*" isimli çalışmada $x_{n+1}=\max\left\{A,\frac{y_n^p}{x_{n-1}^q}\right\}$, $y_{n+1}=\max\left\{A,\frac{x_n^p}{y_{n-1}^q}\right\}$, $n\in\mathbb{N}_0$, $\min\{A,p,q\}>0$, maksimum tip fark denklem sisteminin pozitif çözümlerininin sınırlılığını incelemişlerdir.

Stević ve arkadaşları (2015) "*On a product-type system of difference equations of second order solvable in closed form*" isimli çalışmalarında $z_{n+1}=\frac{z_n^a}{w_{n-1}^b}$, $w_{n+1}=\frac{w_n^c}{z_{n-1}^d}$, $n\in\mathbb{N}_0$, $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$, $z_{-1},z_0,w_{-1},w_0\in\mathbb{C}$, fark denklem sisteminin kapalı formda çözülebilir olduğunu göstermişlerdir.

Stević (2015) "*Product-type system of difference equations of second-order solvable in closed form*" isimli çalışmasında $x_{n+1}=\frac{y_n^a}{z_{n-1}^b}$, $y_{n+1}=\frac{z_n^c}{x_{n-1}^d}$, $z_{n+1}=\frac{x_n^f}{y_{n-1}^g}$, $n\in\mathbb{N}_0$, $a,b,c,d,f,g\in\mathbb{Z}$, $x_i,y_i,z_i\in\mathbb{C}-\{0\}$, $i\in\{0,1\}$ ikinci dereceden fark denklem sisteminin kapalı formda çözümlerini vermiştir.

Stević ve arkadaşları (2016) "S*olvability of a close to symmetric system of difference equations*" isimli çalışmalarında ikinci mertebeden çarpılabilir tipteki $z_{n+1}=\alpha z_n^a w_{n-1}^b,\ w_{n+1}=\beta w_n^c z_{n-1}^d,\quad a,b,c,d\in\mathbb{Z},\ \alpha,\beta\in\mathbb{C},\quad z_{-1},z_0,w_{-1},w_0\in\mathbb{C},$ simetrik fark denklem sisteminin çözülebilirliğini incelemişlerdir. Bu çalışma ile literatürdeki bazı yeni sonuçları genişletmişlerdir.

Stević ve arkadaşları (2016) "*Two-dimensional product-type system of difference equations solvable in closed form*" isimli çalışmasında iki boyutlu çarpılabilir tipteki çözülebilir $z_{n+1}=\alpha z_n^a w_{n-1}^b,\ w_{n+1}=\beta w_{n-1}^c z_{n-1}^d,\quad a,b,c,d\in\mathbb{Z},\ \alpha,\beta\in\mathbb{C},\ z_{-1},z_0,w_{-1},w_0\in\mathbb{C},$ fark denklem sisteminin genel çözümünü kapalı formda vermişlerdir.

Stević (2016) "*Solvability of a class of product-type systems of difference equations*" isimli çalışmasında karmaşık düzlemde iki bağımlı değişkenli matematiksel ifadeden, çarpılabilir tipteki fark denklem sisiteminin $z_n = \alpha z_{n-1}^a w_{n-2}^b,\ w_n = \beta w_{n-2}^c z_{n-1}^d,\quad a,b,c,d \in \mathbb{Z},\ \alpha,\beta \in \mathbb{C},\quad z_{-1}, w_{-2}, w_{-1} \in \mathbb{C},$ çözülebilirliği üzerine çalışmıştır. Bulduğu sonuçlar literatürdeki bazı yeni sonuçları tamamlamıştır. Sistemin genel çözümleri için kapalı formüller ya da bunların nasıl elde edileceğine ilişkin metodlar verimiştir.

Stević (2016) "*New solvable class of product-type systems of difference equations on the complex domain and a new method for proving the solvability*" isimli çalışmasında çarpılabilir tipteki $z_n = \alpha z_{n-1}^a w_{n-2}^b$, $w_n = \beta w_{n-3}^c z_{n-2}^d$, $n \in \mathbb{N}_0$, $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$, $\alpha,\beta \in \mathbb{C}-\{0\}$, $w_{-3}, w_{-2}, w_{-1}, z_{-2}, z_{-1} \in \mathbb{C}-\{0\}$ iki değişkenli fark denklem sisteminin çözülebilirliğini önceki yöntemlerden farklı bir yöntemle incelemiştir.

Stević ve Ranković (2016) "*On a practically solvable product-type system of difference equations of second order*" isimli çalışmalarında $z_{n+1} = \alpha z_n^a w_n^b$, $w_{n+1} = \beta w_n^c z_{n-1}^d$ $n \in \mathbb{N}_0$, $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$, $\alpha,\beta \in \mathbb{C}-\{0\}$, $z_{-1}, z_{-0}, w_0 \in \mathbb{C}-\{0\}$, ikinci mertebeden fark denklem sistemlerinin çözülebilirliğini detaylı bir şekilde incelemişlerdir.

Stević (2017) "*Product-type system of difference equations with a complex structure of solutions*" isimli çalışmasında çarpılabilir tipteki $z_{n+1} = \alpha z_n^a w_n^b$ $w_{n+1} = \beta w_{n-2}^c z_{n-2}^d$, $n \in \mathbb{N}_0$, $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$ $\alpha, \beta, w_{-2}, w_{-1}, w_0, z_{-2}, z_{-1}, z_0 \in \mathbb{C}-\{0\}$, fark denklem sisteminin çözülebilirliğini incelemiştir. Bu konuda yapılan çalışmaların aksine çözümlerin daha karmaşık yapıya sahip olduğunu göstermiştir.

Stević (2017) "*Solution to the solvability problem for a class of product-type systems of difference equations*" isimli çalışmada iki boyutlu çarpılabilir tipteki $z_n = \alpha z_{n-1}^a w_{n-1}^b,\ w_n = \beta w_{n-2}^c z_{n-2}^d,\quad a,b,c,d \in \mathbb{Z},\ \alpha,\beta \in \mathbb{C},\ z_{-2}, z_{-1}, w_{-2}, w_{-1} \in \mathbb{C},$ fark denklem sisteminin açık çözümlerini vermiştir. Temel / en karmaşık durumlarda problemi çoğunlukla iki farklı yöntem kullanılarak çözmüştür. Çözümlerin yapısını belirleyen üçüncü dereceden polinomlardan sonuncusunun çözüm olduğunu göstermiştir.

Stević (2017) "*Solvable product-type system of difference equations with two dependent variables*" isimli çalışmada iki bağımlı değişkenli çarpılabilir tipteki $z_{n+1} = \alpha z_n^a w_n^b,\ w_{n+1} = \beta w_{n-2}^c z_{n-1}^d,\quad a,b,c,d \in \mathbb{Z},\ \alpha,\beta \in \mathbb{C},\ z_{-1}, z_0, w_{-2}, w_{-1}, w_0 \in \mathbb{C},$ fark denklem sisteminin çözülebilirliği, yeni bir sınıfı vermiştir. Çözümlerinin ayrıntılı bir analizini yapmıştır. Bulduğu sonuçlar önceki çözümleri tamamlamıştır.

Stević (2017) "*Solvable product-type system of difference equations whose associated polynomial is of the fourth order*" isimli çalışmasında iki boyutlu çarpılabilir tipteki $z_{n+1} = \alpha z_n^a w_n^b,\quad w_{n+1} = \beta w_{n-1}^c z_{n-2}^d,\quad n \in \mathbb{N}_0,\quad a,b,c,d \in \mathbb{Z},\quad \alpha,\beta \in \mathbb{C} - \{0\}$ $z_{-2}, z_{-1}, z_0, w_{-1}, w_0 \in \mathbb{C} - \{0\}$, fark denklem sisteminin $bd \neq 0$ olduğunda dördüncü dereceden bir polinom sistemle ilişkilendirmiştir. Çözümlerini tüm olası durumlarda polinomun kökleri aracılığıyla a,b,c,d parametreleri ile temsil etmiştir.

Stević ve arkadaşları (2017) "O*n a solvable class of product-type systems of difference equations*" isimli çalışmalarında çarpılabilir tipteki $z_{n+1} = \alpha z_n^a w_n^b,\quad w_{n+1} = \beta w_n^c z_{n-2}^d$ $n \in \mathbb{N}_0$, $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$, $\alpha,\beta \in \mathbb{C} - \{0\}$, $z_{-2}, z_{-1}, z_0, w_0 \in \mathbb{C} - \{0\}$, fark denklem sisteminin bütün olası durumlarda kapalı formdaki çözümlerini elde etmiştir. $bd \neq 0$ temel durumunda, çözümleri sistemin parametrelerinin bazılarına bağlı olan bir polinomun kökleri yardımıyla ayrıntılı bir şekilde incelemişlerdir.

Stević (2017) "*Solvable three-dimensional product-type system of difference equations with multipliers*" isimli çalışmasında çarpılabilir tipteki üç boyutlu fark denklem sisteminin $x_{n+1} = \alpha y_n^a z_{n-1}^b,\ y_{n+1} = \beta z_n^c x_{n-1}^d,\ z_{n+1} = \gamma x_n^f y_{n-1}^g$, $n \in \mathbb{N}_0$, $a,b,c,d,f,g \in \mathbb{Z}$, $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{C} - \{0\}$, $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{C} - \{0\}$, $i \in \{0,1\}$, çözülebilirliğini göstermiştir.

Stević (2017) "*Solvability of the class of two-dimensional product-type systems of difference equations of delay-type (1, 3, 1, 1)*" isimli çalışmasında iki boyutlu çarpılabilir tipteki $z_n = \alpha z_{n-k}^a w_{n-l}^b,\ w_n = \beta w_{n-m}^c z_{n-s}^d,\ n \in \mathbb{N}_0,\ k,l,m,s \in \mathbb{N},\ a,b,c,d \in \mathbb{Z}$, ve $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$, fark denklem sistemlerinin (pratik) çözülebilirliği çalışmasındaki son ve önemli adımları sunmuştur. Şimdiye kadar düşünülmemiş en karmaşık durumu incelemiştir ($k = l = s = 1$ ve $m = 3$). Tüm olası durumlarda, sistemin çözümleri için kapalı formüller bulmuştur. Durumlardan bazıları literatürde ilk kez ortaya çıkmaktadır. (1) $b = 0$; (2) $c = 0$; (3) $d = 0$; (4) $ac \neq 0$; (5) $a = 0$, beş durumda çözümlerin yapısını ayrıntılı olarak ele almıştır.

2. BÖLÜM

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tezin temel sonuçları ile ilgili üçüncü bölümde yararlanılacak temel kavramlar verilecektir.

2.1. Lineer Fark Denklemleri

Tanım 2.1.1: Bir $x:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{R}$ fonksiyonu için Δ fark operatörü veya x in birinci basamaktan farkı $\Delta x(n)=x(n+1)-x(n)$ şeklinde tanımlanır; burada $\mathbb{N}=\{0,1,2,...\}$ doğal sayılar cümlesi ve $\mathbb{R}$ reel sayılar cümlesidir. Buna göre x in ikinci basamaktan farkı $(\Delta^2 x)$, $\Delta^2 x(n)=\Delta(\Delta x(n))= x(n+2)-2x(n+1)+x(n)$ ve böyle devam ederek x in k yıncı basamaktan farkı $(\Delta^k x)$, $\Delta^k x(n)=\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}x(n+k-j)$ şeklinde hesaplanır; burada $k\geq j$ olmak üzere $\binom{k}{j}=\dfrac{k(k-1)...(k-j+1)}{j!}$ dir.

Bazen fark operatörü iki ya da daha çok değişkenli fonksiyonlara uygulanabilir. Böyle bir durumda Δ operatörünün sağ alt köşesine konulan bir indis yardımıyla hangi değişkenin bir birim ötelendiği gösterilmiş olur. Örneğin

$\Delta_n ne^t=(n+1)e^t-ne^t=e^t$, $\Delta_t ne^t=ne^{t+1}-ne^t=ne^t(e-1)$ [19].

Tanım 2.1.2: *E öteleme operatörü* $Ex(n)=x(n+1)$ şeklinde tanımlanır. Bu tanıma göre $E^k x(n)=x(n+k)$ dır. Ayrıca a ve b sabitleri için

$E(ax(n)+by(n))=aEx(n)+bEy(n)$ dir; yani E operatörü lineerlik özelliğine sahiptir. Δ ve E operatörleri arasında $\Delta=E-I$ ilişkisi vardır; burada *I özdeşlik operatörüdür*; yani $Ix(n)=x(n)$ Buradan $\Delta E=E\Delta$ değişme özelliği ortaya çıkar. Binom formülünden, k yıncı basamaktan fark ve öteleme operatörleri, sırasıyla,

$\Delta^k=(E-I)^k=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^j E^{k-j}$ ve $E^k=(\Delta-I)^k=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\Delta^{k-j}$ dir [19].

Tanım 2.1.3: $n\in\mathbb{N}_0$ bağımsız değişken ve x bilinmeyen fonksiyon olmak üzere

$$F(n, x(n), x(n+1), ..., x(n+k)) = 0 \tag{2.1}$$

eşitliğine bir *fark denklemi* denir. $E = \Delta + I$ operatörü göz önüne alınırsa (2.1) fark denklemi

$$G(n, x(n), \Delta x(n), ..., \Delta^k x(n)) = 0$$

formunda yazılabilir. (2.1) denklemi

$x(n+k) = f(n, x(n), x(n+1), ..., x(n+k-1))$ ya da

$\Delta^k x(n) = g(n, x(n), \Delta x(n), ..., \Delta^{k-1} x(n))$ ya da

$\Delta^k x(n) = g(n, x(n), x(n+1), ..., x(n+k-1))$ formunda ise *normal fark denklem* adını alır [19].

Tanım 2.1.4: Bir fark denkleminde bilinmeyen fonksiyonun mevcut en büyük ve en küçük argümentinin farkına o denklemin *basamağı* denir [19].

Tanım 2.1.5: *k* yıncı basamaktan bir fark denkleminin bir özel çözümünü bulmak için o çözüme ilişkin

$$x(n_0 + i) = \alpha_i, \quad 0 \le i \le k-1, \tag{2.2}$$

$$\Delta^i x(n_0) = \alpha_i, \quad 0 \le i \le k-1 \tag{2.3}$$

biçiminde ilk k tane ardışık değerin belirtilmesi gereklidir. Burada $n_0 \in \mathbb{N}$ ve $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{k-1}$ reel sabitlerdir. (2.2) ya da (2.3) koşullarına *başlangıç koşulları* adı verilir. *k* yıncı basamaktan bir fark denklemi ve (2.2) ya da (2.3) başlangıç koşullarından meydana gelen probleme bir *başlangıç değer problemi* denir [19].

Teorem 2.1.6: *k* yıncı basamaktan lineer olmayan skaler normal

$$x(n+k) = f(n, x(n), x(n+1), ..., x(n+k-1)), \quad n \in \mathbb{N}_0 \tag{2.4}$$

fark denklemi ve

$$x(0) = \alpha_0,\ x(1) = \alpha_1, ..., x(k-1) = \alpha_{k-1} \tag{2.5}$$

başlangıç koşulları verilsin. *f* fonksiyonu bağlı olduğu değişkenlere göre tanımlı ise, o zaman (2.4)-(2.5) başlangıç değer probleminin bir tek çözümü vardır [19].

Tanım 2.1.7: $a_1(n), a_2(n), ..., a_k(n)$ katsayıları ile $g(n)$, $n \geq n_0$ için tanımlı reel değerli fonksiyonlar ve $[n_0, \infty) = \{n_0, n_0+1, n_0+2, ...\}$ üzerinde $a_k(n) \neq 0$ olmak üzere

$$x(n+k) + a_1(n)x(n+k-1) + ... + a_k(n)x(n) = g(n) \tag{2.6}$$

biçimindeki bir denkleme *k yıncı basamaktan lineer fark denklemi* denir. Bu denklem, $g(n) = 0$ olduğu zaman *homojen denklem*, aksi durumda *homojen olmayan denklem* olarak adlandırılır. Buna göre *k* yıncı basamaktan bir *lineer homojen fark denklemi*

$$x(n+k) + a_1(n)x(n+k-1) + ... + a_k(n)x(n) = 0 \tag{2.7}$$

şeklinde ifade edilir. Ayrıca bütün $a_i(n)$ katsayıları $a_i(n) = a_i$ şeklinde sabitse, (2.6) denklemine *sabit katsayılı*, aksi halde *değişken katsayılı fark denklemi* denir [19].

Tanım 2.1.8: $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$, gerçel sayı dizileri ve $\forall n \in \mathbb{N}_0$ için $b_n \neq 0$ olsun. Aşağıda verilen

$$x_{n+2} + a_n x_{n+1} + b_n x_n = 0, \qquad n \in \mathbb{N}_0 \tag{2.8}$$

$$x_{n+2} + a_n x_{n+1} + b_n x_n = c_n, \qquad n \in \mathbb{N}_0 \tag{2.9}$$

(2.8) denklemine *ikinci mertebeden lineer homojen fark denklemi*, (2.9) denklemine de *ikinci mertebeden lineer homojen olmayan fark denklemi* denir [20].

Tanım 2.1.9: $x = \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $y = \{y_n\}_{n=0}^{\infty}$, (2.9)'un iki çözümü olsun. $\{C(x, y; n)\}_{n=0}^{\infty}$ *Casoratyanı* $C(x, y; n) = \begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_{n+1} & y_{n+1} \end{vmatrix} = x_n y_{n+1} - x_{n+1} y_n, \quad n \in \mathbb{N}_0$ şeklindedir [20].

Teorem 2.1.10: $x = \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $y = \{y_n\}_{n=0}^{\infty}$, (2.8)'in iki çözümü olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

(i) Casoratyan $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$ birinci mertebeden lineer bir homojen fark denklemini sağlar. Yani; $C_{n+1} - b_n C_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0$, ve sonuç olarak $C_n = \left(\prod_{k=0}^{n-1} b_k \right) C_0$ dır.

(ii) Eğer $C(x, y; n) \neq 0$, $n \in \mathbb{N}_0$, ise $x = \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $y = \{y_n\}_{n=0}^{\infty}$, (2.8)'in lineer bağımsız çözümleridir [20].

Teorem 2.1.11: $x=\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $y=\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$, (2.8)'in iki lineer bağımsız çözümü ve $\{x_n^{(p)}\}_{n=0}^{\infty}$, (2.9)'un bir özel çözümü olsun. Bu durumda

(i) (2.8)'in genel çözümü $x_h(n)=c_1x_n+c_2y_n,\quad n\in\mathbb{N}_0$, dir. Burada c_1 ve c_2 keyfi sabitlerdir.

(ii) (2.9)'un genel çözümü $x_g(n)=c_1x_n+c_2y_n+x_n^p,\quad n\in\mathbb{N}_0$, dir. Burada c_1 ve c_2 keyfi sabitlerdir.

Sabit katsayılı lineer fark denklemlerinde

$$x_{n+2}px_{n+1}+qx_n=0,\quad p,q\in\mathbb{R},\quad q\neq 0,\quad n\in\mathbb{N}_0, \tag{2.10}$$

(2.8)'in çözümü için basit bir formül vardır. (2.10) için bir çözüm ararsak. $x_n=\lambda^n$, $n\in\mathbb{N}_0$, $\lambda\neq 0$ ise o zaman (2.10) ikinci dereceden denklem oluşturur.

$$\lambda^2+p\lambda+q=0 \tag{2.11}$$

(2.11) denklemi (2.10)'un karakteristik denklemi olarak adlandırılır ve kökleri (2.10)'un karakteristik kökleri olarak adlandırılır. (2.11)'in köklerini veren formül $\lambda_{1,2}=\dfrac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$ dir. Eğer (2.11) denkleminin diskriminatı $\Delta=p^2-4q$ pozitif ise farklı iki reel kökü vardır. Bu durumda $\{\lambda_1^n,\lambda_2^n\}$ cümlesi (2.8) denkleminin bir temel cümlesidir. Buradan (2.8)'in genel çözümü c_1 ve c_2 keyfi sabit olmak üzere $x_n=c_1\lambda_1^n+c_2\lambda_2^n$ şeklindedir. Eğer (2.11) denkleminin diskriminantı $\Delta=0$ ise $\lambda_1=\lambda_2=\lambda=-\dfrac{p}{2}$ olup çift katlı kökü vardır. Bu durumda (2.8) denkleminin bir temel cümlesi $\{\lambda^n,n\lambda^n\}$ olup genel çözüm $x_n=(c_1+nc_2)\lambda^n$ dir. Eğer (2.11) denkleminin diskriminantı $\Delta<0$ ise karakteristik kökler birbirinin eşleniği olan $\lambda_1=a+ib$ ve $\lambda_2=a-ib$ karmaşık köklerdir. Bu durumda (2.8) denkleminin bir temel cümlesi $\{r^n\cos\theta,r^n\sin\theta\}$ dır. Burada $r=\sqrt{a^2+b^2}$, $a+ib$ karmaşık sayısının modülü ve θ, $a+ib$ karmaşık sayısının argümentidir. θ açısı için $\cos\theta=\dfrac{a}{r}$, $\sin\theta=\dfrac{b}{r}$ ve $-\pi<\theta\leq\pi$ dir. Bu durumda (2.8)'in genel çözümü $x_n=r^n(c_1\cos n\theta+c_2\sin n\theta)$ şeklindedir [20].

Teorem 2.1.12: λ_1 ve λ_2 (2.11) karakteristik denkleminin kökleri olsun. Bu durumda (2.10) denkleminin genel çözümünü için aşağıdaki durumlardan biri geçerlidir.

(i) Eğer λ_1 ve λ_2 kökleri reel ve farklı ise $x_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$, $n \in \mathbb{N}_0$ dır. Burada c_1 ve c_2 keyfi sabitlerdir.

(ii) Eğer $\lambda_1 = \lambda_2$ ise $x_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$, $n \in \mathbb{N}_0$ dır. Burada c_1 ve c_2 keyfi sabitlerdir.

(iii) Eğer $\lambda_{1,2} = a \pm ib = re^{\pm i\theta}$ ise $x_n = c_1 r^n \cos n\theta + c_2 r^n \sin n\theta$, $n \in \mathbb{N}_0$ dır. Burada $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos\theta = \dfrac{a}{r}$, $\sin\theta = \dfrac{b}{r}$, $\theta \in (-\pi, \pi]$, c_1 ve c_2 keyfi sabitlerdir [20].

Teorem 2.1.13: $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$, gerçel sayıların dizisileri, $\forall n \in \mathbb{N}_0$ için $b_n \neq 0$ ve

$$x_{n+2} + a_n x_{n+1} + b_n x_n = c_n, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.12}$$

fark denklemi verilsin. $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$

$$y_{n+2} + a_n y_{n+1} + b_n y_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.13}$$

homojen fark denkleminin lineer bağımsız iki çözümü ise, Denklem (2.12)'nin özel çözümü

$$x_p(n) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{\begin{vmatrix} x_{k+1} & y_{k+1} \\ x_n & y_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_{k+1} & y_{k+1} \\ x_{k+2} & y_{k+2} \end{vmatrix}}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \tag{2.14}$$

dir [20].

2.2. Lineer Fark Denlem Sistemleri

Tanım 2.2.1: İki boyutlu lineer homojen fark denklem sistemleri

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= ax_n + by_n \\ y_{n+1} &= cx_n + dy_n \end{aligned} \tag{2.15}$$

şeklinde tanımlanır. Sistem (2.15) matris formunda ise

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

şeklinde yazılır. Burada $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dir. Eğer $Z_n=\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ alınırsa Sistem (2.15), $Z_{n+1}=AZ_n$ şeklinde matris formunda yazılabilir. Açıktır ki Sistem (2.15)' in bir çözümü $n\in\mathbb{N}_0$, tüm değerleri için bu sistemi sağlayan değerlerin kümesidir. Genel çözüm, sistemin tüm çözümlerini içeren bir çözümdür. Sistem (2.15)' in özel çözümü

$$x_0=c, \quad y_0=d \tag{2.17}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümüdür. Burada c ve d reel sayıdır. (2.17) de belirtilen koşullarla birlikte Sistem (2.15)'in özel çözümünü bulma problemine başlangıç değer problemi denir. Sistem (2.15)' in çözümü ise

$$Z_n=A^nZ_0 \tag{2.18}$$

şeklinde olduğu kolayca görülür. Lineer fark denklem sistemlerinin çözümünü elde ederken temel problem A^n nin hesaplanmasıdır. Sistem (2.15)'in iki çözümü z^1 ve z^2 ise bunların lineer bağımsız olması için çözümlerden birinin diğerinin skaler bir katı olamayacağı açıktır. Yani, $\forall n\in\mathbb{N}_0$ için $c_1z_n^1+c_2z_n^2=0$ eşitliği ancak ve ancak $c_1=c_2=0$ olması durumunda sağlanacaktır. Dolayısyla Sistem (2.15)'in lineer bağımsız çözümlerinin kümesine de *temel küme*, sütunları Sistem (2.15)'in lineer bağımsız çözümlerinden oluşan matrise de *temel matris* denir[20].

Teorem 2.2.2: $Z_{n+1}=AZ_n$ denklem sistemi verilsin. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur.

(i) Sistem (2.15) için çözümlerin bir temel kümesi vardır.

(ii) Sistem (2.15)'in çözümlerinin bir temel kümesi $\{z^1,z^2\}$ ise, o zaman Sistem (2.15) 'in genel çözümü $z=c_1z^1+c_2z^2=F\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ dir. Burada $F=(z^1,z^2)$ Sistem (2.15)'in temel matrisidir[20].

Tanım 2.2.3: İki boyutlu lineer homojen olmayan fark denklem sistemleri

$$Z_{n+1}=AZ_n+B_n, \quad Z_0=d, \quad n\in\mathbb{N}_0, \tag{2.19}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $B_n=(b_1(n),b_2(n))^T$ ve $d=(d_0,d_1)^T$ dir. Başlangıç değer problemi

$$Z_n = Ad + \sum_{i=0}^{n} A^{n-i} B_i, \qquad n = \mathbb{N}_0 \tag{2.20}$$

şeklinde tek bir çözüme sahiptir [20].

Teorem 2.2.4. Her 2x2 reel matris, aşağıdaki durumlardan biri tarafından verilen J matrisine benzerdir.

(i) Eğer A reel ve farklı özdeğerlere sahipse $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$,

(ii) Eğer A reel ve eşit özdeğerlere sahipse $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$,

(iii) Eğer A'nın karmaşık özdeğerleri varsa $\lambda = \alpha \pm i\beta$, $J = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$.

Teorem 2.2.4, A^n' in hesaplanmasında etkili bir araçtır. Yani, $A^n = (PJP^{-1})^n = PJ^nP^{-1}$'nin hesaplanması için kullanılır. Burada J yukarıdaki teoremin öncüllerindeki J'lerden biridir [20].

3. BÖLÜM

İKİNCİ MERTEBEDEN ÇARPILABİLİR FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜLEBİLİRLİĞİ

Bu bölümde, Stević ve arkadaşlarının [1] makalesi detaylı olarak incelenmiştir. $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$ ve başlangıç şartları z_{-1}, z_0, w_{-1}, w_0 kompleks sayılar olmak üzere

$$z_{n+1}=\frac{w_n^a}{z_{n-1}^b},\ w_{n+1}=\frac{z_n^c}{w_{n-1}^d},\ n\in\mathbb{N}_0, \tag{3.1}$$

şeklindeki fark denklem sistemi ele alınacaktır.

3.1 (3.1) Denklem Sisteminin Çözümleri ve Çözümlerinin Davranışı

Sistem (3.1)'in iyi tanımlı çözümlerini elde etmek için, öncelikle sistem (3.1)' in iyi tanımlı olmadığı noktaların kümesinin

$U=\{(z_{-1},z_0,w_{-1},w_0)\in\mathbb{C}^4 : z_{-1}=0\ veya\ z_0=0\ veya\ w_{-1}=0\ veya\ w_0=0\}$

olduğu denklem sisteminin yapısından kolaylıkla görülür. Dolayısıyla bundan sonra sistem (3.1)' in iyi tanımlı çözümleri için başlangıç koşullarının $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ kümesinden seçileceği açıktır.

Teorem 3.1. $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$ ve başlangıç değerleri z_{-1}, z_0, w_{-1}, $w_0\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ olsun. Bu durumda, sistem (3.1) kapalı formda çözülebilir.

İspat:

$$a_1=a,\ \ b_1=b,\ \ c_1=c,\ \ d_1=d \tag{3.2}$$

olsun. Sistem (3.1)'deki ilk denklemde w_n yerine $\dfrac{z_{n-1}^c}{w_{n-2}^d}$ yazılırsa

$$z_{n+1}=\frac{w_n^{a_1}}{z_{n-1}^{b_1}}=\frac{\left(\dfrac{z_{n-1}^c}{w_{n-2}^d}\right)^{a_1}}{z_{n-1}^{b_1}}=\frac{z_{n-1}^{ca_1-b_1}}{w_{n-2}^{da_1}}=\frac{z_{n-1}^{a_2}}{w_{n-2}^{b_2}} \tag{3.3}$$

elde edilir. Burada $a_2:=ca_1-b_1$ ve $b_2:=da_1$ dir. Benzer şekilde, Sistem (3.1)' deki ikinci denklemde ise z_n yerine $\dfrac{w_{n-1}^a}{z_{n-2}^b}$ yazılırsa

$$w_{n+1}=\frac{z_n^{c_1}}{w_{n-1}^{d_1}}=\frac{\left(\frac{w_{n-1}^{a}}{z_{n-2}^{b}}\right)^{c_1}}{w_{n-1}^{d_1}}=\frac{w_{n-1}^{ac_1-d_1}}{z_{n-2}^{bc_1}}=\frac{w_{n-1}^{c_2}}{z_{n-2}^{d_2}} \tag{3.4}$$

elde edilir. Burada $c_2:=ac_1-d_1$, $d_2:=bc_1$ dir. Öte yandan, Sistem (3.1)' deki denklemlerde, (3.3) ve (3.4) denklemleri kullanılırsa

$$z_{n+1}=\frac{\left(\frac{w_{n-2}^{a}}{z_{n-3}^{b}}\right)^{a_2}}{w_{n-2}^{b_2}}=\frac{w_{n-2}^{aa_2-b_2}}{z_{n-3}^{ba_2}}=\frac{w_{n-2}^{a_3}}{z_{n-3}^{b_3}}, \tag{3.5}$$

$$w_{n+1}=\frac{w_{n-1}^{c_2}}{z_{n-2}^{d_2}}=\frac{\left(\frac{z_{n-2}^{c}}{w_{n-3}^{d}}\right)^{c_2}}{z_{n-2}^{d_2}}=\frac{z_{n-2}^{cc_2-d_2}}{w_{n-3}^{dc_2}}=\frac{z_{n-2}^{c_3}}{w_{n-3}^{d_3}} \tag{3.6}$$

elde edilir. Burada $a_3:=aa_2-b_2$, $b_3:=ba_2$, $c_3:=cc_2-d_2$, $d_3:=dc_2$ dir. Varsayalım ki, $k\in\mathbb{N}$ ve $n\geq 2k-2$ için,

$$z_{n+1}=\frac{w_{n-2k+2}^{a_{2k-1}}}{z_{n-2k+1}^{b_{2k-1}}},\quad w_{n+1}=\frac{z_{n-2k+2}^{c_{2k-1}}}{w_{n-2k+1}^{d_{2k-1}}}, \tag{3.7}$$

$a_{2k-1}:=aa_{2k-2}-b_{2k-2}$, $b_{2k-1}:=ba_{2k-2}$, $c_{2k-1}:=cc_{2k-2}-d_{2k-2}$, $d_{2k-1}:=dc_{2k-2}$,

ve

$$z_{n+1}=\frac{z_{n-2k+1}^{a_{2k}}}{w_{n-2k}^{b_{2k}}},\quad w_{n+1}=\frac{w_{n-2k+1}^{c_{2k}}}{z_{n-2k}^{d_{2k}}}, \tag{3.8}$$

$a_{2k}:=ca_{2k-1}-b_{2k-1}$, $b_{2k}:=da_{2k-1}$, $c_{2k}:=ac_{2k-1}-d_{2k-1}$, $d_{2k}:=bc_{2k-1}$ olsun. Sistem (3.1)' deki denklemlerde, (3.7) ve (3.8) denklemleri kullanırsa,

$$z_{n+1}=\frac{z_{n-2k+1}^{a_{2k}}}{w_{n-2k}^{b_{2k}}}=\frac{\left(\frac{w_{n-2k}^{a}}{z_{n-2k-1}^{b}}\right)^{a_{2k}}}{w_{n-2k}^{b_{2k}}}=\frac{w_{n-2k}^{aa_{2k}-b_{2k}}}{z_{n-2k-1}^{ba_{2k}}}=\frac{w_{n-2k}^{a_{2k+1}}}{z_{n-2k-1}^{b_{2k+1}}}, \tag{3.9}$$

$$w_{n+1}=\frac{w_{n-2k+1}^{c_{2k}}}{z_{n-2k}^{d_{2k}}}=\frac{\left(\frac{z_{n-2k}^{c}}{w_{n-2k-1}^{d}}\right)^{c_{2k}}}{z_{n-2k}^{d_{2k}}}=\frac{z_{n-2k}^{cc_{2k}-d_{2k}}}{w_{n-2k-1}^{dc_{2k}}}=\frac{z_{n-2k}^{c_{2k+1}}}{w_{n-2k-1}^{d_{2k+1}}}, \tag{3.10}$$

elde edilir. Burada $a_{2k+1}:=aa_{2k}-b_{2k}$, $b_{2k+1}:=ba_{2k}$, $c_{2k+1}:=cc_{2k}-d_{2k}$, $d_{2k+1}:=dc_{2k}$ dır. Benzer şekilde Sistem (3.1)' de (3.9) ve (3.10) denklemleri kullanılırsa,

$$z_{n+1}=\frac{w_{n-2k}^{a_{2k+1}}}{z_{n-2k-1}^{b_{2k+1}}}=\frac{\left(\frac{z_{n-2k-1}^{c}}{w_{n-2k-2}^{d}}\right)^{a_{2k+1}}}{z_{n-2k-1}^{b_{2k+1}}}=\frac{z_{n-2k-1}^{ca_{2k+1}-b_{2k+1}}}{w_{n-2k-2}^{da_{2k+1}}}=\frac{z_{n-2k-1}^{a_{2k+2}}}{w_{n-2k-2}^{b_{2k+2}}}, \tag{3.11}$$

$$w_{n+1}=\frac{z_{n-2k}^{c_{2k+1}}}{w_{n-2k-1}^{d_{2k+1}}}=\frac{\left(\frac{w_{n-2k-1}^{a}}{z_{n-2k-2}^{b}}\right)^{c_{2k+1}}}{w_{n-2k-1}^{d_{2k+1}}}=\frac{w_{n-2k-1}^{ac_{2k+1}-d_{2k+1}}}{z_{n-2k-2}^{bc_{2k+1}}}=\frac{w_{n-2k-1}^{c_{2k+2}}}{z_{n-2k-2}^{d_{2k+2}}} \tag{3.12}$$

elde edililir. Burada $a_{2k+2}:=ca_{2k+1}-b_{2k+1}$, $b_{2k+2}:=da_{2k+1}$, $c_{2k+2}:=ac_{2k+1}-d_{2k+1}$, $d_{2k+2}:=bc_{2k+1}$ dir. Böylece, yukarıdaki tümevarım (3.7) ve (3.8) denklemlerinin $\forall k\in\mathbb{N}$ ve $n\geq 2k-1$ için sağlandığı ve $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ve $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizilerinin aşağıdaki eşitlikleri $\forall k\in\mathbb{N}$ için sağladığı görülür.

$$a_{2k}=ca_{2k-1}-b_{2k-1}, \tag{3.13}$$

$$b_{2k}=da_{2k-1}, \tag{3.14}$$

$$a_{2k+1}=aa_{2k}-b_{2k}, \tag{3.15}$$

$$b_{2k+1}=ba_{2k}, \tag{3.16}$$

$$c_{2k}=ac_{2k-1}-d_{2k-1}, \tag{3.17}$$

$$d_{2k}=bc_{2k-1}, \tag{3.18}$$

$$c_{2k+1}=cc_{2k}-d_{2k}, \tag{3.19}$$

$$d_{2k+1}=dc_{2k}. \tag{3.20}$$

(3.9)-(3.12) denklemlerinden, $n\in\mathbb{N}_0$ için,

$$z_{2n+1}=\frac{w_0^{a_{2n+1}}}{z_{-1}^{b_{2n+1}}},\ z_{2n+2}=\frac{z_0^{a_{2n+2}}}{w_{-1}^{b_{2n+2}}}, \tag{3.21}$$

$$w_{2n+1}=\frac{z_0^{c_{2n+1}}}{w_{-1}^{d_{2n+1}}},\ w_{2n+2}=\frac{w_0^{c_{2n+2}}}{z_{-1}^{d_{2n+2}}}, \tag{3.22}$$

eşitlikleri elde edilir. (3.13)-(3.16) denklemlerinden

$$a_{2k+1}=aa_{2k}-da_{2k-1},\ a_{2k+2}=ca_{2k+1}-b_{2k+1},\ k\in\mathbb{N},$$

yazılabilir ki buradan

$$a_{2k+3}-(ac-b-d)a_{2k+1}+bda_{2k-1}=0,\ \ k\in\mathbb{N}, \tag{3.23}$$

$$a_{2k+2}-(ac-b-d)a_{2k}+bda_{2k-2}=0,\ \ k\geq 2, \tag{3.24}$$

elde edilir. Benzer şekilde, (3.17)-(3.20) denklemlerinden

$c_{2k+1} = cc_{2k} - bc_{2k-1},\ c_{2k+2} = ac_{2k+1} - dc_{2k},\ k \in \mathbb{N},$

yazılabilir ki buradan

$$c_{2k+3} - (ac - b - d)c_{2k+1} + bdc_{2k-1} = 0,\ k \in \mathbb{N}, \tag{3.25}$$

$$c_{2k+2} - (ac - b - d)c_{2k} + bdc_{2k-2} = 0,\ k \geq 2, \tag{3.26}$$

elde edilir. Şimdi, (3.23)-(3.26) denkelmleri $b = 0$, $d = 0$ ve $bd \neq 0$ durumları için ayrı ayrı ele alınacaktır.

$b = 0$ **Durumu:** Bu durumda, (3.23)-(3.26) denklemlerinden aşağıdaki

$$a_{2k+3} = (ac - d)a_{2k+1}, k \in \mathbb{N} \tag{3.27}$$

$$a_{2k+2} = (ac - d)a_{2k}, k \in \mathbb{N} \tag{3.28}$$

$$c_{2k+3} = (ac - d)c_{2k+1}, k \in \mathbb{N} \tag{3.29}$$

$$c_{2k+2} = (ac - d)c_{2k}, k \in \mathbb{N} \tag{3.30}$$

eşitlikler yazılabilir. (3.27)-(3.30) denklemleri ikinci mertebeden sabit katsayılı lineer denklemeler olduğundan ve Denklem (3.2) dikkate alındığında, indirgeme yöntemi ile $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ve $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ' nin çözümleri

$$a_{2k+1} = (ac - d)a_{2k-1} = (ac - d)^2 a_{2k-3} = \ldots = a_1(ac - d)^k = a(ac - d)^k, k \in \mathbb{N}_0, \tag{3.31}$$

$$a_{2k+2} = (ac - d)a_{2k} = (ac - d)^2 a_{2k-2} = \ldots = a_2(ac - d)^k = ac(ac - d)^k,\ k \in \mathbb{N}_0, \tag{3.32}$$

$$c_{2k+1} = (ac - d)c_{2k-1} = (ac - d)^2 c_{2k-3} = \ldots = c_1(ac - d)^k = c(ac - d)^k, k \in \mathbb{N}_0, \tag{3.33}$$

$$c_{2k+2} = (ac - d)c_{2k} = (ac - d)^2 c_{2k-2} = c_2(ac - d)^k = (ac - d)^{k+1}, k \in \mathbb{N}_0, \tag{3.34}$$

elde edilir. (3.31)-(3.34) denklemleri, (3.13)-(3.20) denklemlerinde yerine yazılır ve $b = 0$ olduğu dikkate alınırsa

$$b_{2k+1} = 0,\ \ k \in \mathbb{N}_0, \tag{3.35}$$

$$b_{2k+2} = da_{2k+1} = d(a(ac - d)^k) = ad(ac - d)^k,\ k \in \mathbb{N}_0, \tag{3.36}$$

$$d_{2k+1} = dc_{2k} = d((ac - d)^k) = d(ac - d)^k,\ k \in \mathbb{N}_0, \tag{3.37}$$

$$d_{2k+2} = 0,\ \ k \in \mathbb{N}_0, \tag{3.38}$$

elde edilir. (3.31)-(3.38) denklemlerinde $n = k$ alınıp, (3.21)-(3.22) denklemlerinde yerine yazılırsa, Sistem (3.1)' in çözümü

$$z_{2n+1} = w_0^{a(ac-d)^n}, \quad z_{2n+2} = \frac{z_0^{ac(ac-d)^n}}{w_{-1}^{ad(ac-d)^n}}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{3.39}$$

$$w_{2n+1} = \frac{z_0^{c(ac-d)^n}}{w_{-1}^{d(ac-d)^n}}, \quad w_{2n+2} = w_0^{(ac-d)^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{3.40}$$

olarak elde edilir.

$d = 0$ **Durumu:** Bu durumda, (3.23)-(3.26) denklemlerinden aşağıdaki

$$a_{2k+3} = (ac-b)a_{2k+1}, k \in \mathbb{N}, \tag{3.41}$$

$$a_{2k+2} = (ac-b)a_{2k}, k \in \mathbb{N}, \tag{3.42}$$

$$c_{2k+3} = (ac-b)c_{2k+1}, k \in \mathbb{N}, \tag{3.43}$$

$$c_{2k+2} = (ac-b)c_{2k}, k \in \mathbb{N}, \tag{3.44}$$

eşitlikler yazılabilir. Benzer şekilde, (3.41)-(3.44) denklemleri ikinci mertebeden sabit katsayılı lineer denklemeler oluduğundan ve Denklem (3.2) dikkate alındığında, indirgeme yöntemi ile $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ve $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$' dizileri

$$a_{2k+1} = (ac-b)a_{2k-1} = (ac-b)^2 a_{2k-3} = \ldots = a_1(ac-b)^k = a(ac-b)^k, \ k \in \mathbb{N}_0, \tag{3.45}$$

$$a_{2k+2} = (ac-b)a_{2k} = (ac-b)^2 a_{2k-2} = \ldots = a_2(ac-b)^k = (ac-b)^{k+1}, \ k \in \mathbb{N}_0, \tag{3.46}$$

$$c_{2k+1} = (ac-b)c_{2k-1} = (ac-b)^2 c_{2k-3} = \ldots = c_2(ac-b)^k = ac(ac-b)^k, \ k \in \mathbb{N}_0, \tag{3.47}$$

$$c_{2k+2} = (ac-b)c_{2k} = (ac-b)^2 c_{2k-2} = \ldots = c_2(ac-b)^k = ac(ac-b)^k, \ k \in \mathbb{N}_0, \tag{3.48}$$

şeklinde elde edilir. (3.41)-(3.44) denklemleri, (3.13)-(3.20) denklemlerinde yerine yazılır ve $d = 0$ olduğu dikkate alınırsa

$$b_{2k+1} = b(ac-b)^k, \ k \in \mathbb{N}_0, \tag{3.49}$$

$$b_{2k+2} = 0, \ \ k \in \mathbb{N}_0, \tag{3.50}$$

$$d_{2k+1} = 0, \ \ k \in \mathbb{N}_0, \tag{3.51}$$

$$d_{2k+2} = bc_{2k+1} = bc(ac-b)^k, \ k \in \mathbb{N}_0, \tag{3.52}$$

elde edilir. (3.45)-(3.52) denklemlerinde $n = k$ alınıp (3.21)-(3.22) denklemlerinde yerine yazılırsa, sistem (3.1)' in çözümü

$$z_{2n+1}=\frac{w_0^{a(ac-b)^n}}{z_{-1}^{b(ac-b)^n}},\quad z_{2n+2}=z_0^{(ac-b)^{n+1}},\quad n\in\mathbb{N}_0 \tag{3.53}$$

$$w_{2n+1}=z_0^{c(ac-b)^n},\quad w_{2n+2}=\frac{w_0^{ac(ac-b)^n}}{z_{-1}^{bc(ac-b)^n}},\quad n\in\mathbb{N}_0 \tag{3.54}$$

olarak elde edilir.

$bd\neq 0$ **Durumu:** Bu durumda

$$u_{n+2}-(ac-b-d)u_{n+1}+bdu_n=0,\quad n\in\mathbb{N}, \tag{3.55}$$

ikinci mertebeden sabit katsayılı homojen fark denklemine ait karakteristik denklemi

$$P(\lambda)=\lambda^2-(ac-b-d)\lambda+bd=0 \tag{3.56}$$

ve onun kökleri $\lambda_1=\dfrac{ac-b-d+\sqrt{(ac-b-d)^2-4bd}}{2}$ ve $\lambda_2=\dfrac{ac-b-d-\sqrt{(ac-b-d)^2-4bd}}{2}$ şeklindedir. (3.23)-(3.26) denklemleri ile (3.55) denklemi aynı formda olduğundan, $(a_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}_0}$, $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(c_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}_0}$, $(c_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ dizileri (3.55) denkleminin çözümlerini sağlar. (3.55) denkleminin $(ac-b-d)^2\neq 4bd$ için genel çözümü

$$u_n=\alpha_1\lambda_1^n+\alpha_2\lambda_2^n,\quad n\in\mathbb{N}, \tag{3.57}$$

şeklindedir. Burada α_1 ve α_2 keyfi sabitlerdir. Eğer $(ac-b-d)^2=4bd$ ise, bu durumda (3.55) denkleminin genel çözümü

$$u_n=(\beta_1 n+\beta_2)\lambda_1^n,\quad n\in\mathbb{N}, \tag{3.58}$$

şeklindedir. Burada β_1 ve β_2 keyfi sabitlerdir.

Eğer $(ac-b-d)^2\neq 4bd$ ise,

$$\begin{aligned}
a_1&=a,\\
a_2&=ca-b,\\
a_3&=a^2c-ab-ad,\\
a_4&=b^2-2abc+a^2c^2-acd,
\end{aligned} \tag{3.59}$$

$$b_1 = b,\quad b_2 = ad,\quad b_3 = abc - b^2,\quad b_4 = a^2cd - abd - ad^2, \tag{3.60}$$

$$c_1 = c,\quad c_2 = ac - d,\quad c_3 = ac^2 - cd - bc,\quad c_4 = a^2c^2 - 2acd - abd - d^2, \tag{3.61}$$

$$d_1 = d,\quad d_2 = bc,\quad d_3 = acd - d^2,\quad d_4 = abc^2 - bcd - b^2c, \tag{3.62}$$

değerleri için $(a_{2k+i})_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_{2k+i})_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_{2k+i})_{n\in\mathbb{N}}$, $(d_{2k+i})_{n\in\mathbb{N}}$, $i = 1,2$ dizileri

$$a_{2k+1} = a\frac{\lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+1}}{\lambda_1 - \lambda_2},\ k \in \mathbb{N}_0, \tag{3.63}$$

$$a_{2k+2} = \frac{(ac-b-\lambda_2)\lambda_1^{k+1} - (ac-b-\lambda_1)\lambda_2^{k+1}}{\lambda_1 - \lambda_2},\ k \in \mathbb{N}_0, \tag{3.64}$$

$$b_{2k+1} = b\frac{(ac-b-\lambda_2)\lambda_1^{k} - (ac-b-\lambda_1)\lambda_2^{k}}{\lambda_1 - \lambda_2},\ k \in \mathbb{N}_0, \tag{3.65}$$

$$b_{2k+2} = ad\frac{\lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+1}}{\lambda_1 - \lambda_2},\ k \in \mathbb{N}_0, \tag{3.66}$$

$$c_{2k+1} = c\frac{\lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+1}}{\lambda_1 - \lambda_2},\ k \in \mathbb{N}_0, \tag{3.67}$$

$$c_{2k+2} = \frac{(ac-d-\lambda_2)\lambda_1^{k+1} - (ac-d-\lambda_1)\lambda_2^{k+1}}{\lambda_1 - \lambda_2},\ k \in \mathbb{N}_0, \tag{3.68}$$

$$d_{2k+1} = d\frac{(ac-d-\lambda_2)\lambda_1^{k} - (ac-d-\lambda_1)\lambda_2^{k}}{\lambda_1 - \lambda_2},\ k \in \mathbb{N}_0, \tag{3.69}$$

$$d_{2k+2} = bc\frac{\lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+1}}{\lambda_1 - \lambda_2},\ k \in \mathbb{N}_0, \tag{3.70}$$

şeklindedir. (3.63) - (3.70) denklemleri (3.21) ve (3.22) eşitliklerinde yerine yazılırsa, Denklem (3.1)' in iyi tanımlı çözümleri

$$z_{2n+1}=\frac{w_0^{a_{2n+1}}}{z_{-1}^{b_{2n+1}}}=\frac{w_0^{a\frac{\lambda_1^{n+1}-\lambda_2^{n+1}}{\lambda_1-\lambda_2}}}{z_{-1}^{b\frac{(ac-b-\lambda_2)\lambda_1^n-(ac-b-\lambda_1)\lambda_2^n}{\lambda_1-\lambda_2}}}=w_0^{a\frac{\lambda_1^{n+1}-\lambda_2^{n+1}}{\lambda_1-\lambda_2}}z_{-1}^{-b\frac{(ac-b-\lambda_2)\lambda_1^n-(ac-b-\lambda_1)\lambda_2^n}{\lambda_1-\lambda_2}} \tag{3.71}$$

$$z_{2n+2}=\frac{z_0^{a_{2n+2}}}{w_{-1}^{b_{2n+2}}}=\frac{z_0^{\frac{(ac-b-\lambda_2)\lambda_1^{n+1}-(ac-b-\lambda_1)\lambda_2^{n+1}}{\lambda_1-\lambda_2}}}{w_{-1}^{ad\frac{\lambda_1^{n+1}-\lambda_2^{n+1}}{\lambda_1-\lambda_2}}}=z_0^{\frac{(ac-b-\lambda_2)\lambda_1^{n+1}-(ac-b-\lambda_1)\lambda_2^{n+1}}{\lambda_1-\lambda_2}}w_{-1}^{-ad\frac{\lambda_1^{n+1}-\lambda_2^{n+1}}{\lambda_1-\lambda_2}} \tag{3.72}$$

$$w_{2n+1}=\frac{z_0^{c_{2n+1}}}{w_{-1}^{d_{2n+1}}}=\frac{z_0^{c\frac{\lambda_1^{n+1}-\lambda_2^{n+1}}{\lambda_1-\lambda_2}}}{w_{-1}^{d\frac{(ac-d-\lambda_2)\lambda_1^n-(ac-d-\lambda_1)\lambda_2^n}{\lambda_1-\lambda_2}}}=z_0^{c\frac{\lambda_1^{n+1}-\lambda_2^{n+1}}{\lambda_1-\lambda_2}}w_{-1}^{d\frac{(ac-d-\lambda_2)\lambda_1^n-(ac-d-\lambda_1)\lambda_2^n}{\lambda_1-\lambda_2}} \tag{3.73}$$

$$w_{2n+2}=\frac{w_0^{c_{2n+2}}}{z_{-1}^{d_{2n+2}}}=\frac{w_0^{\frac{(ac-d-\lambda_2)\lambda_1^{n+1}-(ac-d-\lambda_1)\lambda_2^{n+1}}{\lambda_1-\lambda_2}}}{z_{-1}^{bc\frac{\lambda_1^{n+1}-\lambda_2^{n+1}}{\lambda_1-\lambda_2}}}=w_0^{\frac{(ac-d-\lambda_2)\lambda_1^{n+1}-(ac-d-\lambda_1)\lambda_2^{n+1}}{\lambda_1-\lambda_2}}z_{-1}^{-bc\frac{\lambda_1^{n+1}-\lambda_2^{n+1}}{\lambda_1-\lambda_2}} \tag{3.74}$$

olarak elde edilir.

Eğer $(ac-b-d)^2=4bd$ ise (3.56) denkleminin çakışık kökleri

$$\lambda_1=\lambda_2=\frac{ac-b-d}{2} \tag{3.75}$$

şeklindedir. Buradan (3.59)-(3.62) eşitlikleri kullanılarak $(a_{2k+i})_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_{2k+i})_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_{2k+i})_{n\in\mathbb{N}}$, $(d_{2k+i})_{n\in\mathbb{N}}$, $i=1,2$ dizileri

$$a_{2k+1}=a(k+1)\lambda_1^k \tag{3.76}$$

$$a_{2k+2}=((ac-b-\lambda_1)(k+1)+\lambda_1)\lambda_1^k \tag{3.77}$$

$$b_{2k+1}=b((ac-b-\lambda_1)k+\lambda_1)\lambda_1^{k-1} \tag{3.78}$$

$$b_{2k+2}=ad(k+1)\lambda_1^k \tag{3.79}$$

$$c_{2k+1}=c(k+1)\lambda_1^k \tag{3.80}$$

$$c_{2k+2}=((ac-d-\lambda_1)(k+1)+\lambda_1)\lambda_1^k \tag{3.81}$$

$$d_{2k+1}=d((ac-d-\lambda_1)k+\lambda_1)\lambda_1^{k-1} \tag{3.82}$$

$$d_{2k+2}=bc(k+1)\lambda_1^k, k\in\mathbb{N}_0 \tag{3.83}$$

olarak elde edilir. (3.76)-(3.83) denklemleri (3.21) ve (3.22) eşitliklerinde yerine yazılırsa Denklem (3.1)' in iyi tanımlı çözümleri

$$z_{2n+1}=\frac{w_0^{a_{2n+1}}}{z_{-1}^{b_{2n+1}}}=\frac{w_0^{a(n+1)\lambda_1^n}}{z_{-1}^{b((ac-b-\lambda_1)n+\lambda_1)\lambda_1^{n-1}}}=w_0^{a(n+1)\lambda_1^n}z_{-1}^{-b((ac-b-\lambda_1)n+\lambda_1)\lambda_1^{n-1}} \tag{3.84}$$

$$z_{2n+2} = \frac{z_0^{a_{2n+2}}}{w_{-1}^{b_{2n+2}}} = \frac{z_0^{((ac-b-\lambda_1)(n+1)+\lambda_1)\lambda_1^n}}{w_{-1}^{ad(n+1)\lambda_1^n}} = z_0^{((ac-b-\lambda_1)(n+1)+\lambda_1)\lambda_1^n} w_{-1}^{-ad(n+1)\lambda_1^n} \tag{3.85}$$

$$w_{2n+1} = \frac{z_0^{c_{2n+1}}}{w_{-1}^{d_{2n+1}}} = \frac{z_0^{c(n+1)\lambda_1^n}}{w_{-1}^{d((ac-d-\lambda_1)n+\lambda_1)\lambda_1^{n-1}}} = z_0^{c(n+1)\lambda_1^n} w_{-1}^{-d((ac-d-\lambda_1)n+\lambda_1)\lambda_1^{n-1}} \tag{3.86}$$

$$w_{2n+2} = \frac{w_0^{c_{2n+2}}}{z_{-1}^{d_{2n+2}}} = \frac{w_0^{((ac-d-\lambda_1)(n+1)+\lambda_1)\lambda_1^n}}{z_{-1}^{bc(n+1)\lambda^n}} = w_0^{((ac-d-\lambda_1)(n+1)+\lambda_1)\lambda_1^n} z_{-1}^{-bc(n+1)\lambda^n} \tag{3.87}$$

şeklinde olur ki ispat tamamlanır■.

Teorem 3.1' in ispatından aşağıdaki sonuç elde edilir

Sonuç 3.2. $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$, $(z_n, w_n)_{n\geq -1}$, Sistem (3.1)' in iyi tanımlı çözümü ve $z_{-1}, z_0, w_{-1}, w_0 \in \mathbb{C}-\{0\}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur.

(a) Eğer $b=0$ ise, Sistem (3.1)' in genel çözümü Denklem (3.39) ve Denklem (3.40) ile verilir.

(b) Eğer $d=0$ ise, Sistem (3.1)' in genel çözümü Denklem (3.53) ve Denklem (3.54) ile verilir.

(c) Eğer $bd \neq 0$ ve $(ac-b-d)^2 \neq 4bd$ ise, Sistem (3.1)' in genel çözümü (3.71)-(3.74)' deki denklemler ile verilir.

(d) Eğer $bd \neq 0$ ve $(ac-b-d)^2 = 4bd$ ise, Sistem (3.1)' in genel çözümü (3.84)-(3.87) ' deki denklemler ile verilir ■.

Yorum 3.3. Kompleks sayıların kuvvetlerinin çok değerliliğinden kaçınmak için $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$ koşulu alınmıştır. Böylece $z_{-1}, z_0, w_{-1}, w_0 \in \mathbb{C}$ başlangıç koşulları için Sistem (3.1)'in tek bir çözümünün olması amaçlanmıştır ■.

Şimdi Sistem (3.1)' in çözümleri kullanılarak, Sistem (3.1)' in çözümlerinin asimptotik davranışı a, b, c ve d ' nin durumlarına göre aşağıdaki teoremlerde incelenecektir.

Teorem 3.4. $a,c,d \in \mathbb{Z}$, $b=0$, $z_{-1}, z_0, w_{-1}, w_0 \in \mathbb{C}-\{0\}$ ve $(z_n, w_n)_{n\geq -1}$, Sistem (3.1)' in iyi tanımlı çözümü olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

(a) Eğer $ac=d$ ise, o zaman $(z_n, w_n)_{n\geq -1}$ sisteminin çözümleri er-geç sabittir.

(b) Eğer $ac-d=1$ ise, o zaman $(z_n, w_n)_{n\geq -1}$ sisteminin çözümleri iki periyotlu; $ac-d=-1$ ise, o zaman $(z_n, w_n)_{n\geq -1}$ sisteminin çözümleri dört periyotludur.

(c) Eğer $ac-d\geq 2$ ve $0<\left|w_0^a\right|<1$ ise, o zaman $n\to\infty$ iken $z_{2n+1}\to 0$ dır.

(d) Eğer $ac-d\geq 2$ ve $\left|w_0^a\right|>1$ ise, o zaman $n\to\infty$ iken $z_{2n+1}\to\infty$ dur.

(e) Eğer $w_0^a=1$ ise, o zaman $\forall n\in\mathbb{N}_0$ için $z_{2n+1}=1$ dir.

(f) Eğer $ac\neq d$, $a\neq 0$, $\theta=\dfrac{p\pi}{q}$ için $w_0=e^{i\theta}$, $q\in\mathbb{N}$, $p\in\mathbb{Z}$ ise, o zaman z_{2n+1}, T periyotludur. Burada $T\leq 2q$ dur.

(g) Eğer $ac-d\leq -2$ ve $0<\left|w_0^a\right|<1$ ise, o zaman $n\to\infty$ iken $z_{4n+1}\to 0$; $\left|w_0^a\right|>1$ ise, o zaman $n\to\infty$ iken $z_{4n+1}\to\infty$ dur.

(h) Eğer $ac-d\leq -2$ ve $0<\left|w_0^a\right|<1$ ise, o zaman $n\to\infty$ iken $z_{4n+3}\to\infty$; $\left|w_0^a\right|>1$ ise, o zaman $n\to\infty$ iken $z_{4n+3}\to 0$ dır.

(i) Eğer $ac-d\geq 2$ ve $0<\left|\dfrac{z_0^{ac}}{w_{-1}^{ad}}\right|<1$ ise, o zaman $n\to\infty$ iken $z_{2n+2}\to 0$ dır.

(j) Eğer $ac-d\geq 2$ ve $\left|\dfrac{z_0^{ac}}{w_{-1}^{ad}}\right|>1$ ise, o zaman $n\to\infty$ iken $z_{2n+2}\to\infty$ dur.

(k) Eğer $z_0^{ac}=w_{-1}^{ad}$ ise, o zaman $\forall n\in\mathbb{N}$ için $z_{2n+2}=1$ dir.

(l) Eğer $ac\neq d$, $a\neq 0$, $c\neq 0$ veya $d\neq 0$ ve $\theta=\dfrac{p\pi}{q}$ için $z_0^{ac}=w_{-1}^{ad}e^{i\theta}$, $q\in\mathbb{N}$, $p\in\mathbb{Z}$ ise, o zaman z_{2n+2} T periyotludur. Burada $T\leq 2q$ dur.

(m) Eğer $ac-d\leq -2$ ve $0<\left|\dfrac{z_0^{ac}}{w_{-1}^{ad}}\right|<1$ ise, o zaman $n\to\infty$ iken $z_{4n+2}\to 0$; $\left|\dfrac{z_0^{ac}}{w_{-1}^{ad}}\right|>1$ ise, o zaman $n\to\infty$ iken $z_{4n+2}\to\infty$ dur.

(n) Eğer $ac-d\leq -2$ ve $0<\left|\dfrac{z_0^{ac}}{w_{-1}^{ad}}\right|<1$ ise, o zaman $n\to\infty$ iken $z_{4n}\to\infty$; $\left|\dfrac{z_0^{ac}}{w_{-1}^{ad}}\right|>1$ ise, o zaman $n\to\infty$ iken $z_{4n}\to 0$ dır.

(o) Eğer $ac-d\geq 2$ ve $0<\left|\dfrac{z_0^{c}}{w_{-1}^{d}}\right|<1$ ise, o zaman $n\to\infty$ iken $w_{2n+1}\to 0$ dır.

(p) Eğer $ac-d\geq 2$ ve $\left|\dfrac{z_0^c}{w_{-1}^d}\right|>1$ ise, o zaman $n\to\infty$ iken $w_{2n+1}\to\infty$ dur.

(q) Eğer $z_0^c=w_{-1}^d$ ise, o zaman $\forall n\in\mathbb{N}$ için $w_{2n+1}=1$ dir.

(r) Eğer $ac\neq d$ ve $\theta=\dfrac{p\pi}{q}$ için $z_0^c=w_{-1}^d e^{i\theta}$, $q\in\mathbb{N}$, $p\in\mathbb{Z}$ ise, o zaman w_{2n+1} T periyotludur. Burada $T\leq 2q$ dur.

(s) Eğer $ac-d\leq -2$ ve $0<\left|\dfrac{z_0^c}{w_{-1}^d}\right|<1$ ise, o zaman $n\to\infty$ iken $w_{4n+1}\to 0$; $\left|\dfrac{z_0^c}{w_{-1}^d}\right|>1$ ise, o zaman $n\to\infty$ iken $w_{4n+1}\to\infty$ dur.

(t) Eğer $ac-d\leq -2$ ve $0<\left|\dfrac{z_0^c}{w_{-1}^d}\right|<1$ ise, o zaman $n\to\infty$ iken $w_{4n+3}\to\infty$; $\left|\dfrac{z_0^c}{w_{-1}^d}\right|>1$ ise, o zaman $n\to\infty$ iken $w_{4n+3}\to 0$ dır.

(u) Eğer $ac-d\geq 2$ ve $0<|w_0|<1$ ise, o zaman $n\to\infty$ iken $w_{2n+2}\to 0$ dır.

(v) Eğer $ac-d\geq 2$ ve $|w_0|>1$ ise, o zaman $n\to\infty$ iken $w_{2n+2}\to\infty$ dur.

(w) Eğer $w_0=1$ ise, o zaman $\forall n\in\mathbb{N}_0$ $w_{2n+2}=1$, dir.

(x) Eğer $ac\neq d$ ve $\theta=\dfrac{p\pi}{q}$ için $w_0=e^{i\theta}$, $q\in\mathbb{N}$, $p\in\mathbb{Z}$ ise, o zaman w_{2n+2} T periyotludur. Burada $T\leq 2q$ dur.

(y) Eğer $ac-d\leq -2$ ve $|w_0|>1$ ise, o zaman $n\to\infty$ iken $w_{4n+2}\to 0$; $0<|w_0|<1$ ise, o zaman $n\to\infty$ iken $w_{4n+2}\to\infty$ dur.

(z) Eğer $ac-d\leq -2$ ve $0<|w_0|<1$ ise, o zaman $n\to\infty$ iken $w_{4n+4}\to 0$; $|w_0|>1$ ise, o zaman $n\to\infty$ iken $w_{4n+4}\to\infty$ dur.

İspat. (g)-(z) öncüllerinin ispatları, (a)-(f) öncüllerinin ispatına benzer şekilde yapılabileceğinden, burada sadece (a)-(f) öncüllerinin ispatları yapılacaktır.

(a): $ac=d$ koşulu Denklem (3.39) ve Denklem (3.40)' ta yerine yazılırsa, $n\in\mathbb{N}_0$ için,

$$
\begin{aligned}
z_{2n+1} &= w_0^{a(ac-d)^n} = w_0^{a(0)^n} = 1,\\
z_{2n+2} &= \frac{z_0^{ac(ac-d)^n}}{w_{-1}^{ad(ac-d)^n}} = \frac{z_0^{ac(0)^n}}{w_{-1}^{ad(0)^n}} = 1,\\
w_{2n+1} &= \frac{z_0^{c(ac-d)^n}}{w_{-1}^{d(ac-d)^n}} = \frac{z_0^{c(0)^n}}{w_{-1}^{d(0)^n}} = 1,\\
w_{2n+2} &= w_0^{(ac-d)^{n+1}} = w_0^{(0)^{n+1}} = 1\ ,
\end{aligned} \tag{3.88}
$$

elde edilir ki bu da $(z_n, w_n)_{n\geq -1}$ sisteminin çözümlerinin er-geç sabit olduğunu gösterir.

(b): $ac-d=1$ koşulu Denklem (3.39) ve Denklem (3.40)' ta yerine yazılırsa, $n\in\mathbb{N}_0$ için,

$$
\begin{aligned}
z_{2n+1} &= w_0^{a(ac-d)^n} = w_0^{a(1)^n} = w_0^{a},\\
z_{2n+2} &= \frac{z_0^{ac(ac-d)^n}}{w_{-1}^{ad(ac-d)^n}} = \frac{z_0^{ac(1)^n}}{w_{-1}^{ad(1)^n}} = \frac{z_0^{ac}}{w_{-1}^{ad}},\\
w_{2n+1} &= \frac{z_0^{c(ac-d)^n}}{w_{-1}^{d(ac-d)^n}} = \frac{z_0^{c(1)^n}}{w_{-1}^{d(1)^n}} = \frac{z_0^{c}}{w_{-1}^{d}},\\
w_{2n+2} &= w_0^{(ac-d)^{n+1}} = w_0^{(1)^{n+1}} = w_0\ ,
\end{aligned} \tag{3.89}
$$

elde edilir. Denklem (3.89)' dan $(z_n, w_n)_{n\geq -1}$ sisteminin çözümlerini iki periyotlu olduğu kolayca görülür. Öte yandan $ac-d=-1$ ise, varsayım Denklem (3.39) ve Denklem (3.40)' ta yerine yazılırsa, $n\in\mathbb{N}_0$ için,

$$
\begin{aligned}
z_{2n+1} &= w_0^{a(ac-d)^n} = w_0^{a(-1)^n},\\
z_{2n+2} &= \frac{z_0^{ac(ac-d)^n}}{w_{-1}^{ad(ac-d)^n}} = \frac{z_0^{ac(-1)^n}}{w_{-1}^{ad(-1)^n}},\\
w_{2n+1} &= \frac{z_0^{c(ac-d)^n}}{w_{-1}^{d(ac-d)^n}} = \frac{z_0^{c(-1)^n}}{w_{-1}^{d(-1)^n}},\\
w_{2n+2} &= w_0^{(ac-d)^{n+1}} = w_0^{(-1)^{n+1}}\ ,
\end{aligned} \tag{3.90}
$$

elde edilir. Denklem (3.90)' da sırasıyla n yerine $2n$ ve $2n+1$ yazılırsa,

$$
\begin{aligned}
&z_{4n+1} = w_0^{a(-1)^{2n}} = w_0^{a},\quad z_{4n+2} = \frac{z_0^{ac(-1)^{2n}}}{w_{-1}^{ad(-1)^{2n}}} = \frac{z_0^{ac}}{w_{-1}^{ad}},\\
&w_{4n+1} = \frac{z_0^{c(-1)^{2n}}}{w_{-1}^{d(-1)^{2n}}} = \frac{z_0^{c}}{w_{-1}^{d}},\quad w_{4n+2} = w_0^{(-1)^{n+1}} = \frac{1}{w_0},
\end{aligned} \tag{3.91}
$$

ve

$$z_{4n+3}=w_0^{a(-1)^{2n+1}}=\frac{1}{w_0^a}, z_{4n+4}=\frac{z_0^{ac(-1)^{2n+1}}}{w_{-1}^{ad(-1)^{2n+1}}}=\frac{w_{-1}^{ad}}{z_0^{ac}},$$

$$w_{4n+3}=\frac{z_0^{c(-1)^{2n+1}}}{w_{-1}^{d(-1)^{2n+1}}}=\frac{w_{-1}^{d}}{z_0^{c}}, w_{4n+4}=w_0^{(-1)^{2n}}=w_0, \tag{3.92}$$

elde edilir ki bu da $(z_n, w_n)_{n\geq -1}$ sisteminin çözümlerinin dört periyotlu olduğunu gösterir.

(c)-(d): $ac-d\geq 2$ ise o zaman $n\to\infty$ iken $(ac-d)^n\to\infty$ olduğu kolayca görülür. Bundan ve Denklem (3.39)' dan, eğer $0<\left|w_0^a\right|<1$ ise, $\lim_{n\to\infty} z_{2n+1}=\lim_{n\to\infty} w_0^{a(ac-d)^n}=0$ dır. Benzer şekilde, $\left|w_0^a\right|>1$ ise, $\lim_{n\to\infty} z_{2n+1}=\lim_{n\to\infty} w_0^{a(ac-d)^n}=\infty$ elde edilir ki istenendir.

(e): $w_0^a=1$ ifadesi Denklem (3.39)' da yerine yazılırsa

$$z_{2n+1}=w_0^{a(ac-d)^n}=1^{a(ac-d)^n}=1$$

elde edilir ki istenendir.

(f): $\theta=\dfrac{p\pi}{q}$ için $ac\neq d$, $a\neq 0$, $w_0=e^{i\theta}$, $q\in\mathbb{N}$, $p\in\mathbb{Z}$ koşulları Denklem (3.39)' da kullanılırsa, $n\in\mathbb{N}_0$ için,

$$z_{2n+1}=w_0^{a(ac-d)^n}=(e^{i\theta})^{a(ac-d)^n}=(e^{i\frac{p\pi}{q}})^{a(ac-d)^n}=e^{i\pi\frac{pa(ac-d)^n}{q}} \tag{3.93}$$

bulunur. Öte yandan

pa, $pa(ac-d)$, $pa(ac-d)^2,\ldots, pa(ac-d)^{2q}$,

sayıları arasında $2q$ ile bölündüğünde aynı kalanı veren 2 sayı vardır öyle ki $0\leq i\leq j\leq 2q$ için, $pa(ac-d)^i$ ve $pa(ac-d)^j$ ' dir. Bu ise, $k_0\in\mathbb{N}$ için

$$pa(ac-d)^j-pa(ac-d)^i=2k_0q \tag{3.94}$$

olduğu anlamına gelir. Denklem (3.94)' ün her iki yanı, $m\in\mathbb{N}_0$ için, $(ac-d)^m$ ile çarpılırsa

$$pa(ac-d)^{m+j}-pa(ac-d)^{m+i}=2k_0q(ac-d)^m$$

elde edilir. Bu ise, $n\in\mathbb{N}_0$ için, $pa(ac-d)^n(\bmod 2q)$ dizisinin er-geç $T=j-i\leq 2q$ periyotlu olduğu anlamına gelir.

Teorem 3.5. $a,b,c\in\mathbb{Z}$, $d=0$, $z_{-1},z_0,w_{-1},w_0\in\mathbb{C}-\{0\}$ ve $(z_n,w_n)_{n\geq -1}$ Sistem (3.1)' in iyi tanımlı çözümü olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

(a) Eğer $ac=b$ ise, o zaman $(z_n,w_n)_{n\geq -1}$ sisteminin çözümleri er-geç sabittir.

(b) Eğer $ac-b=1$ ise, o zaman $(z_n,w_n)_{n\geq -1}$ sisteminin çözümleri iki periyotlu; $ac-b=-1$ ise, o zaman $(z_n,w_n)_{n\geq -1}$ sisteminin çözümleri dört periyotludur.

(c) Eğer $ac-b\geq 2$ ve $0<\left|\frac{w_0^a}{z_{-1}^b}\right|<1$ ise, o zaman $n\to\infty$ iken $z_{2n+1}\to 0$ dır.

(d) Eğer $ac-b\geq 2$ ve $\left|\frac{w_0^a}{z_{-1}^b}\right|>1$ ise, o zaman $n\to\infty$ iken $z_{2n+1}\to\infty$ dur.

(e) Eğer $w_0^a=z_{-1}^b$ ise, o zaman $\forall n\in\mathbb{N}_0$ için $z_{2n+1}=1$ dir.

(f) Eğer $ac\neq b$, $\theta=\frac{p\pi}{q}$ için $w_0^a=z_{-1}^b e^{i\theta}$, $q\in\mathbb{N}$, $p\in\mathbb{Z}$ ise, o zaman z_{2n+1} T periyotludur. Burada $T\leq 2q$ dur.

(g) Eğer $ac-b\leq -2$ ve $0<\left|\frac{w_0^a}{z_{-1}^b}\right|<1$ ise, o zaman $n\to\infty$ iken $z_{4n+1}\to 0$; $\left|\frac{w_0^a}{z_{-1}^b}\right|>1$ ise, o zaman $n\to\infty$ iken $z_{4n+1}\to\infty$ dur.

(h) Eğer $ac-b\leq -2$ ve $0<\left|\frac{w_0^a}{z_{-1}^b}\right|<1$ ise, o zaman $n\to\infty$ iken $z_{4n+3}\to\infty$; $\left|\frac{w_0^a}{z_{-1}^b}\right|>1$ ise, o zaman $n\to\infty$ iken $z_{4n+3}\to 0$ dır.

(i) Eğer $ac-b\geq 2$ ve $0<|z_0|<1$ ise, o zaman $n\to\infty$ iken $z_{2n+2}\to 0$ dır.

(j) Eğer $ac-b\geq 2$ ve $|z_0|>1$ ise, o zaman $n\to\infty$ iken $z_{2n+2}\to\infty$ dur.

(k) Eğer $ac=b$ veya $z_0=1$ ise, o zaman $\forall n\in\mathbb{N}$ için $z_{2n+2}=1$ dir.

(l) Eğer $ac\neq b$ ve $\theta=\frac{p\pi}{q}$ için $z_0=e^{i\theta}$, $q\in\mathbb{N}$, $p\in\mathbb{Z}$ ise, o zaman z_{2n+2} T periyotludur. Burada $T\leq 2q$ dur.

(m) Eğer $ac-b\leq -2$ ve $0<|z_0|<1$ ise, o zaman $n\to\infty$ iken $z_{4n+2}\to\infty$; $|z_0|>1$ ise, o zaman $n\to\infty$ iken $z_{4n+2}\to 0$ dır.

(n) Eğer $ac-b\leq -2$ ve $0<|z_0|<1$ ise, o zaman $n\to\infty$ iken $z_{4n}\to 0$; $|z_0|>1$ ise, o zaman $n\to\infty$ iken $z_{4n}\to\infty$ dur.

(o) Eğer $ac-b\geq 2$ ve $0<\left|z_0^c\right|<1$ ise, o zaman $n\to\infty$ iken $w_{2n+1}\to 0$ dır.

(p) Eğer $ac-b\geq 2$ ve $\left|z_0^c\right|>1$ ise, o zaman $n\to\infty$ iken $w_{2n+1}\to\infty$ dur.

(q) Eğer $z_0^c=1$ ise, o zaman $\forall n\in\mathbb{N}$ için $w_{2n+1}=1$ dir.

(r) Eğer $ac\neq b$ ve $\theta=\dfrac{p\pi}{q}$ için $z_0^c=e^{i\theta}$, $q\in\mathbb{N}$, $p\in\mathbb{Z}$ ise, o zaman w_{2n+1} T periyotludur. Burada $T\leq 2q$ dur.

(s) Eğer $ac-b\leq -2$ ve $0<\left|z_0^c\right|<1$ ise, o zaman $n\to\infty$ iken $w_{4n+1}\to 0$; $\left|z_0^c\right|>1$ ise, o zaman $n\to\infty$ iken $w_{4n+1}\to\infty$ dur.

(t) Eğer $ac-b\leq -2$ ve $0<\left|z_0^c\right|<1$ ise $n\to\infty$ iken $w_{4n+3}\to\infty$, eğer $\left|z_0^c\right|>1$ ise $n\to\infty$ iken $w_{4n+3}\to 0$ dır.

(u) Eğer $ac-b\geq 2$ ve $0<\left|\dfrac{w_0^{ac}}{z_{-1}^{bc}}\right|<1$ ise, o zaman $n\to\infty$ iken $w_{2n+2}\to 0$ dır.

(v) Eğer $ac-b\geq 2$ ve $\left|\dfrac{w_0^{ac}}{z_{-1}^{bc}}\right|>1$ ise, o zaman $n\to\infty$ iken $w_{2n+2}\to\infty$ dur.

(w) Eğer $w_0^{ac}=z_{-1}^{bc}$ ise, o zaman $\forall n\in\mathbb{N}_0$ $w_{2n+2}=1$, dir.

(x) Eğer $ac\neq b$ ve $\theta=\dfrac{p\pi}{q}$ için $w_0^{ac}=z_{-1}^{bc}e^{i\theta}$, $q\in\mathbb{N}$, $p\in\mathbb{Z}$ ise, o zaman w_{2n+2} T periyotludur. Burada $T\leq 2q$ dur.

(y) Eğer $ac-b\leq -2$ ve $0<\left|\dfrac{w_0^{ac}}{z_{-1}^{bc}}\right|<1$ ise, o zaman $n\to\infty$ iken $w_{4n+2}\to 0$; $\left|\dfrac{w_0^{ac}}{z_{-1}^{bc}}\right|>1$ ise, o zaman $n\to\infty$ iken $w_{4n+2}\to\infty$ dur.

(z) Eğer $ac-b\leq -2$ ve $0<\left|\dfrac{w_0^{ac}}{z_{-1}^{bc}}\right|<1$ ise, o zaman $n\to\infty$ iken $w_{4n+4}\to\infty$; $\left|\dfrac{w_0^{ac}}{z_{-1}^{bc}}\right|>1$ ise, o zaman $n\to\infty$ iken $w_{4n+4}\to 0$ dır.

İspat

(a): $ac=b$ koşulu Denklem (3.53) ve Denklem (3.54)' te yerine yazılırsa, $n\in\mathbb{N}_0$ için,

$$
\begin{aligned}
z_{2n+1} &= \frac{w_0^{a(ac-b)^n}}{z_{-1}^{b(ac-b)^n}} = \frac{w_0^{a(0)^n}}{z_{-1}^{b(0)^n}} = 1, \\
z_{2n+2} &= z_0^{(ac-b)^{n+1}} = z_0^{(0)^{n+1}} = 1, \\
w_{2n+1} &= z_0^{c(ac-b)^n} = z_0^{c(0)^n} = 1, \\
w_{2n+2} &= \frac{w_0^{ac(ac-b)^n}}{z_{-1}^{bc(ac-b)^n}} = \frac{w_0^{ac(0)^n}}{z_{-1}^{bc(0)^n}} = 1 \ ,
\end{aligned} \tag{3.95}
$$

elde edilir ki bu da $(z_n, w_n)_{n \geq -1}$ sisteminin çözümlerinin er-geç sabit olduğunu gösterir

(b): $ac-b=1$ koşulu Denklem (3.53) ve Denklem (3.54)' te yerine yazılırsa, $n \in \mathbb{N}_0$ için,

$$
\begin{aligned}
z_{2n+1} &= \frac{w_0^{a(ac-b)^n}}{z_{-1}^{b(ac-b)^n}} = \frac{w_0^{a(1)^n}}{z_{-1}^{b(1)^n}} = \frac{w_0^{a}}{z_{-1}^{b}}, \\
z_{2n+2} &= z_0^{(ac-b)^{n+1}} = z_0^{(1)^{n+1}} = z_0, \\
w_{2n+1} &= z_0^{c(ac-b)^n} = z_0^{c(1)^n} = z_0^{c}, \\
w_{2n+2} &= \frac{w_0^{ac(ac-b)^n}}{z_{-1}^{bc(ac-b)^n}} = \frac{w_0^{ac(1)^n}}{z_{-1}^{bc(1)^n}} = \frac{w_0^{ac}}{z_{-1}^{bc}} \ ,
\end{aligned} \tag{3.96}
$$

elde edilir. Denklem (3.96)' dan $(z_n, w_n)_{n \geq -1}$ sisteminin çözümlerinin er-geç iki periyotlu olduğu kolayca görülür. Öte yandan $ac-b=-1$ koşulu Denklem (3.53) ve Denklem (3.54)' te yerine yazılırsa, $n \in \mathbb{N}_0$ için,

$$
\begin{aligned}
z_{2n+1} &= \frac{w_0^{a(ac-b)^n}}{z_{-1}^{b(ac-b)^n}} = \frac{w_0^{a(-1)^n}}{z_{-1}^{b(-1)^n}}, \\
z_{2n+2} &= z_0^{(ac-b)^{n+1}} = z_0^{(-1)^{n+1}}, \\
w_{2n+1} &= z_0^{c(ac-b)^n} = z_0^{c(-1)^n}, \\
w_{2n+2} &= \frac{w_0^{ac(ac-b)^n}}{z_{-1}^{bc(ac-b)^n}} = \frac{w_0^{ac(-1)^n}}{z_{-1}^{bc(-1)^n}} \ ,
\end{aligned} \tag{3.97}
$$

elde edilir. Denklem(3.97)' de sırasıyla n yerine $2n$ ve $2n+1$ yazılırsa,

$$
\begin{aligned}
z_{4n+1} &= \frac{w_0^{a(-1)^{2n}}}{z_{-1}^{b(-1)^{2n}}} = \frac{w_0^{a}}{z_{-1}^{b}}, \qquad z_{4n+2} = z_0^{(-1)^{2n+1}} = \frac{1}{z_0}, \\
w_{4n+1} &= z_0^{c(-1)^{2n}} = z_0^{c}, \qquad w_{4n+2} = \frac{w_0^{ac(-1)^{2n}}}{z_{-1}^{bc(-1)^{2n}}} = \frac{w_0^{ac}}{z_{-1}^{bc}} \ ,
\end{aligned} \tag{3.98}
$$

ve

$$z_{4n+3}=\frac{w_0^{a(-1)^{2n+1}}}{z_{-1}^{b(-1)^{2n+1}}}=\frac{z_{-1}^{b}}{w_0^{a}},\quad z_{4n+4}=z_0^{(-1)^{2n+2}}=z_0$$
$$w_{4n+3}=z_0^{c(-1)^{2n+1}}=\frac{1}{z_0^{c}},\quad w_{4n+4}=\frac{w_0^{ac(-1)^{2n+1}}}{z_{-1}^{bc(-1)^{2n+1}}}=\frac{z_{-1}^{bc}}{w_0^{ac}}, \tag{3.99}$$

elde edilir ki bu da $(z_n, w_n)_{n\geq -1}$ sisteminin çözümlerinin er-geç dört periyotlu olduğunu gösterir.

(c)-(d): $ac-b\geq 2$ ise o zaman $n\to\infty$ iken $(ac-b)^n\to\infty$ olduğu kolayca görülür. Bu ve Denklem (3.53)' ten, eğer $0<\left|\frac{w_0^a}{z_{-1}^b}\right|<1$ ise,

$\lim\limits_{n\to\infty} z_{2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{w_0^{a(ac-b)^n}}{z_{-1}^{b(ac-b)^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{w_0^a}{z_{-1}^b})^{(ac-b)^n}=0$ dır. Benzer şekilde, $\left|\frac{w_0^a}{z_{-1}^b}\right|>1$ ise,

$\lim\limits_{n\to\infty} z_{2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{w_0^{a(ac-b)^n}}{z_{-1}^{b(ac-b)^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{w_0^a}{z_{-1}^b})^{(ac-b)^n}=\infty$ elde edilir ki istenendir.

(e): $w_0^a=z_{-1}^b$ ifadesi Denklem (3.53)' te yerine yazılırsa

$$z_{2n+1}=\frac{w_0^{a(ac-b)^n}}{z_{-1}^{b(ac-b)^n}}=(\frac{w_0^a}{z_{-1}^b})^{(ac-b)^n}=1^{(ac-b)^n}=1$$

elde edilir ki istenendir.

(f): $\theta=\frac{p\pi}{q}$ için $w_0^a=z_{-1}^b e^{i\theta}$, $q\in\mathbb{N}$, $p\in\mathbb{Z}$ koşulları Denklem (3.53)' te kullanılırsa, $n\in\mathbb{N}_0$ için,

$$z_{2n+1}=\frac{w_0^{a(ac-b)^n}}{z_{-1}^{b(ac-b)^n}}=(\frac{w_0^a}{z_{-1}^b})^{(ac-b)^n}=(e^{i\theta})^{(ac-b)^n}=(e^{i\frac{p\pi}{q}})^{(ac-b)^n}=e^{i\pi\frac{p(ac-b)^n}{q}} \tag{3.100}$$

bulunur. Öte yandan

p, $p(ac-b)$, $p(ac-b)^2,\ldots,p(ac-b)^{2q}$

sayıları arasında $2q$ ile bölündüğünde aynı kalanı veren 2 sayı vardır öyleki $0\leq i\leq j\leq 2q$ için, $p(ac-b)^i$ ve $p(ac-b)^j$ ' dir. Bu ise, $k_0\in\mathbb{N}$ için

$$p(ac-b)^j-p(ac-b)^i=2k_0q \tag{3.101}$$

olduğu anlamına gelir. Denklem (3.101)' in her iki yanını, $m\in\mathbb{N}_0$ için, $(ac-b)^m$ ile çarpılırsa

$$p(ac-b)^{m+j}-p(ac-b)^{m+i}=2k_0q(ac-b)^m$$

elde edilir. Bu ise, $n\in\mathbb{N}_0$ için, $p(ac-b)^n(\bmod 2q)$ dizisinin er-geç $T=j-i\le 2q$ periyotlu olduğu anlamına gelir.

(g)-(h): $ac-b\le -2$ olduğundan, Denklem (3.53)' te sırasıyla n yerine $2n$ ve $2n+1$ yazıldığında, $n\in\mathbb{N}_0$ için,

$$z_{4n+1}=\frac{w_0^{a(ac-b)^{2n}}}{z_{-1}^{b(ac-b)^{2n}}},n\in\mathbb{N}_0 \tag{3.102}$$

$$z_{4n+3}=\frac{w_0^{a(ac-b)^{2n+1}}}{z_{-1}^{b(ac-b)^{2n+1}}}=(\frac{w_0^a}{z_{-1}^b})^{-|ac-b|^{2n+1}},n\in\mathbb{N}_0 \tag{3.103}$$

elde edilir. Denklem (3.102)' den

$\lim\limits_{n\to\infty}z_{4n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{w_0^{a(ac-b)^{2n}}}{z_{-1}^{b(ac-b)^{2n}}}=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{w_0^a}{z_{-1}^b})^{[(ac-b)^2]^n}$ elde edilir. Eğer $0<\left|\frac{w_0^a}{z_{-1}^b}\right|<1$ ise $\lim\limits_{n\to\infty}z_{4n+1}=0$ olduğu, $\left|\frac{w_0^a}{z_{-1}^b}\right|>1$ ise, $\lim\limits_{n\to\infty}z_{4n+1}=\infty$ olduğu kolayca görülür. Öte yandan Denklem(3.103) 'ten $\lim\limits_{n\to\infty}z_{4n+3}=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{w_0^a}{z_{-1}^b})^{-|ac-b|^{2n+1}}$ elde edilir. Eğer $0<\left|\frac{w_0^a}{z_{-1}^b}\right|<1$ ise $\lim\limits_{n\to\infty}z_{4n+3}=\infty$, eğer $\left|\frac{w_0^a}{z_{-1}^b}\right|>1$ ise $\lim\limits_{n\to\infty}z_{4n+3}=0$ olduğu kolayca görülür.

(i)-(l): (c)-(f) öncüllerinin ispatlarında $\frac{w_0^a}{z_{-1}^b}$ ' nin yerine z_0, z_{2n+1}' in yerine de z_{2n+2} alınarak (i)-(l)' nin ispatı benzer şekilde yapılabilir.

(m)-(n): Denklem (3.53)'te n yerine sırasıyla $2n$ ve $2n-1$ yazılırsa.

$$z_{4n+2}=z_0^{-|ac-b|^{2n+1}} \tag{3.104}$$

$$z_{4n+4}=z_0^{(ac-b)^{2n+2}} \tag{3.105}$$

elde edilir. $ac-b\le -2$ ise o zaman $n\to\infty$ iken $-|ac-b|^{2n+1}\to-\infty$ olduğu kolayca görülür. Bu ve Denklem (3.104)' den $\lim\limits_{n\to\infty}z_{4n+2}=\lim\limits_{n\to\infty}z_0^{-|ac-b|^{2n+1}}$ elde edilir. Eğer $0<|z_0|<1$ ise $\lim\limits_{n\to\infty}z_{4n+2}=\infty$ olduğu, $|z_0|>1$ ise $\lim\limits_{n\to\infty}z_{4n+2}=0$ olduğu kolayca görülür. Öte yandan $ac-b\le -2$ şartından $n\to\infty$ iken $(ac-b)^{2n+2}\to\infty$ olur. Bu ve Denklem

(3.105)’den $\lim_{n\to\infty} z_{4n+4} = \lim_{n\to\infty} z_0^{(ac-b)^{2n+2}}$ elde edilir. Eğer $0<|z_0|<1$ ise $\lim_{n\to\infty} z_{4n+4}=0$ olduğu, $|z_0|>1$ ise $\lim_{n\to\infty} z_{4n+4}=\infty$ olduğu kolayca görülür.

(o)-(r): $w_{2n+1}=(z_0^c)^{(ac-b)^n}$ eşitliği kullanılarak (o)-(q) öncüllerinin ispatı kolayca elde edilir. (r) öncülünün ispatı ise (f) öncülünün ispatına benzer şekilde yapılabilir.

(s)-(t): Denklem (3.54)’te n yerine sırasıyla $2n$ ve $2n+1$ yazılırsa.

$$w_{4n+1}=z_0^{c(ac-b)^{2n}} \tag{3.106}$$

$$w_{4n+3}=(z_0^c)^{-|ac-b|^{2n+1}} \tag{3.107}$$

elde edilir. $ac-b\le -2$ ise o zaman $n\to\infty$ iken $(ac-b)^{2n}\to\infty$ olduğu kolayca görülür. Bu ve Denklem (3.106)’ dan $\lim_{n\to\infty} w_{4n+1}=\lim_{n\to\infty} z_0^{c(ac-b)^{2n}}$ elde edilir. Eğer $0<|z_0^c|<1$ ise $\lim_{n\to\infty} w_{4n+1}=0$ olduğu, $|z_0^c|>1$ ise $\lim_{n\to\infty} w_{4n+1}=\infty$ olduğu kolayca görülür. Öte yandan $ac-b\le -2$ şartından $n\to\infty$ iken $-|ac-b|^{2n+1}\to -\infty$ olur. Bu ve Denklem (3.107)’den $\lim_{n\to\infty} w_{4n+3}=\lim_{n\to\infty}(z_0^c)^{-|ac-b|^{2n+1}}=(z_0^c)^{-\infty}$ elde edilir. Eğer $0<|z_0^c|<1$ ise $\lim_{n\to\infty} w_{4n+3}=\infty$ olduğu, $|z_0^c|>1$ ise $\lim_{n\to\infty} w_{4n+3}=0$ olduğu kolayca görülür.

(u)-(x): $w_{2n+2}=\left(\dfrac{w_0^{ac}}{z_{-1}^{bc}}\right)^{(ac-b)^n}$ eşitliği kullanılarak (u)-(w) öncüllerinin ispatı kolayca elde edilir. (x) öncülünün ispatı ise (f) öncülünün ispatına benzer şekilde yapılabilir.

(y)-(z): Denklem (3.54)’te n yerine sırasıyla $2n$ ve $2n+1$ yazılırsa

$$w_{4n+2}=\frac{w_0^{ac(ac-b)^{2n}}}{z_{-1}^{bc(ac-b)^{2n}}}=\left(\frac{w_0^{ac}}{z_{-1}^{bc}}\right)^{(ac-b)^{2n}} \tag{3.108}$$

$$w_{4n+4}=\left(\frac{w_0^{ac}}{z_{-1}^{bc}}\right)^{-|ac-b|^{2n+1}} \tag{3.109}$$

elde edilir. $ac-b\le -2$ ise o zaman $n\to\infty$ iken $(ac-b)^{2n}\to\infty$ olduğu kolayca görülür. Bu ve Denklem (3.108)’ den $\lim_{n\to\infty} w_{4n+2}=\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{w_0^{ac}}{z_{-1}^{bc}}\right)^{(ac-b)^{2n}}$ elde edilir. Eğer $0<\left|\dfrac{w_0^{ac}}{z_{-1}^{bc}}\right|<1$ ise $\lim_{n\to\infty} w_{4n+2}=0$ olduğu, $\left|\dfrac{w_0^{ac}}{z_{-1}^{bc}}\right|>1$ ise $\lim_{n\to\infty} w_{4n+2}=\infty$ olduğu kolayca görülür. Öte yandan $ac-b\le -2$ ise o zaman $n\to\infty$ iken $-|ac-b|^{2n+1}\to -\infty$ olduğu kolayca görülür. Bu ve Denklem (3.109)' dan $\lim_{n\to\infty} w_{4n+4} = \lim_{n\to\infty} (\frac{w_0^{ac}}{z_{-1}^{bc}})^{-|ac-b|^{2n+1}}$ elde edilir. Eğer $0 < \left|\frac{w_0^{ac}}{z_{-1}^{bc}}\right| < 1$ ise $\lim_{n\to\infty} w_{4n+4} = \infty$ olduğu, $\left|\frac{w_0^{ac}}{z_{-1}^{bc}}\right| > 1$ ise $\lim_{n\to\infty} w_{4n+4} = 0$ olduğu kolayca görülür■.

Teorem 3.6. $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$, $z_{-1}, z_0, w_{-1}, w_0 \in \mathbb{C} - \{0\}$, $(ac-b-d)^2 = 4bd$, $ac-b-d = 2$ ve $(z_n, w_n)_{n\geq -1}$, Sistem (3.1)' in iyi tanımlı çözümü olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

(a) Eğer $0 < \left|\frac{w_0^a}{z_{-1}^{b(ac-b-1)}}\right| < 1$ ise, o zaman $n \to \infty$ iken $z_{2n+1} \to 0$ dır.

(b) Eğer $\left|\frac{w_0^a}{z_{-1}^{b(ac-b-1)}}\right| > 1$ ise, o zaman $n \to \infty$ iken $z_{2n+1} \to \infty$ dur.

(c) Eğer $w_0^a = z_{-1}^{b(ac-b-1)}$ ise, o zaman $n \to \infty$ iken $z_{2n+1} = \frac{w_0^a}{z_{-1}^b}$ dir.

(d) Eğer $\theta = \frac{p\pi}{q}$ için $w_0^a = z_{-1}^{b(ac-b-1)} e^{i\theta}$, $q \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$ ise, o zaman z_{2n+1} T periyotludur. Burada $T \leq 2q$ dur.

(e) Eğer $0 < \left|\frac{z_0^{ac-b-1}}{w_{-1}^{ad}}\right| < 1$ ise, o zaman $n \to \infty$ iken $z_{2n+2} \to 0$ dır.

(f) Eğer $\left|\frac{z_0^{ac-b-1}}{w_{-1}^{ad}}\right| > 1$ ise, o zaman $n \to \infty$ iken $z_{2n+2} \to \infty$ dur.

(g) Eğer $z_0^{ac-b-1} = w_{-1}^{ad}$ ise, o zaman $n \to \infty$ iken $z_{2n+2} = \frac{z_0^{ac-b}}{w_{-1}^{ad}}$ dir.

(h) Eğer $\theta = \frac{p\pi}{q}$ için $z_0^{ac-b-1} = w_{-1}^{ad} e^{i\theta}$, $q \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$ ise, o zaman z_{2n+2} T periyotludur. Burada $T \leq 2q$ dur.

(i) Eğer $0 < \left|\frac{z_0^c}{w_{-1}^{d(ac-d-1)}}\right| < 1$ ise, o zaman $n \to \infty$ iken $w_{2n+1} \to 0$ dır.

(j) Eğer $\left|\frac{z_0^c}{w_{-1}^{d(ac-d-1)}}\right| > 1$ ise, o zaman $n \to \infty$ iken $w_{2n+1} \to \infty$ dur.

(k) Eğer $z_0^c = w_{-1}^{d(ac-d-1)}$ ise, o zaman $n \to \infty$ iken $w_{2n+1} = \dfrac{z_0^c}{w_{-1}^d}$ dir.

(l) Eğer $\theta = \dfrac{p\pi}{q}$ için $z_0^c = w_{-1}^{d(ac-d-1)} e^{i\theta}$, $q \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$ ise, o zaman w_{2n+1} T periyotludur. Burada $T \le 2q$ dur.

(m) Eğer $0 < \left| \dfrac{w_0^{ac-d-1}}{z_{-1}^{bc}} \right| < 1$ ise, o zaman $n \to \infty$ iken $w_{2n+2} \to 0$ dır.

(n) Eğer $\left| \dfrac{w_0^{ac-d-1}}{z_{-1}^{bc}} \right| > 1$ ise, o zaman $n \to \infty$ iken $w_{2n+2} \to \infty$ dur.

(o) Eğer $w_0^{ac-d-1} = z_{-1}^{bc}$ ise, o zaman $n \to \infty$ iken $w_{2n+2} = \dfrac{w_0^{ac-d-1}}{z_{-1}^{bc}}$ dir.

(p) Eğer $\theta = \dfrac{p\pi}{q}$ için $w_0^{ac-d-1} = z_{-1}^{bc} e^{i\theta}$, $q \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$ ise, o zaman w_{2n+2} T periyotludur. Burada $T \le 2q$ dur.

İspat $ac-b-d=2$ koşulu Denklem (3.75)'te yazılırsa karakteristik denkleminin kökleri $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ dir. Elde edilen bu değer (3.84)-(3.87) denlemlerinde yerine yazıldığında

$$z_{2n+1} = \frac{w_0^{a(n+1)}}{z_{-1}^{b((ac-b-1)n+1)}} = \frac{w_0^a}{z_{-1}^b} \left(\frac{w_0^a}{z_{-1}^{b(ac-b-1)}}\right)^n \tag{3.110}$$

$$z_{2n+2} = \frac{z_0^{(ac-b-1)(n+1)+1}}{w_{-1}^{ad(n+1)}} = \frac{z_0^{ac-b}}{w_{-1}^{ad}} \left(\frac{z_0^{(ac-b-1)}}{w_{-1}^{ad}}\right)^n \tag{3.111}$$

$$w_{2n+1} = \frac{z_0^{c(n+1)}}{w_{-1}^{d((ac-d-1)n+1)}} = \frac{z_0^c}{w_{-1}^d} \left(\frac{z_0^c}{w_{-1}^{d(ac-d-1)}}\right)^n \tag{3.112}$$

$$w_{2n+2} = \frac{w_0^{(ac-d-1)(n+1)+1}}{z_{-1}^{bc(n+1)}} = \frac{w_0^{ac-d}}{z_{-1}^{bc}} \left(\frac{w_0^{ac-d-1}}{z_{-1}^{bc}}\right)^n \tag{3.113}$$

eşitlikleri elde edilir.

(a)-(c): Denklem (3.110)'dan $\lim\limits_{n\to\infty} z_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{w_0^a}{z_{-1}^b} \left(\dfrac{w_0^a}{z_{-1}^{b(ac-b-1)}}\right)^n$ elde edilir. Eğer $0 < \left| \dfrac{w_0^a}{z_{-1}^{b(ac-b-1)}} \right| < 1$ ise $\lim\limits_{n\to\infty} z_{2n+1} = 0$ dır. Benzer şekilde eğer $\left| \dfrac{w_0^a}{z_{-1}^{b(ac-b-1)}} \right| > 1$ ise

$\lim_{n\to\infty} z_{2n+1} = \infty$ dur. Öte yandan Denklem (3.110)'da eğer $w_0^a = z_{-1}^{b(ac-b-1)}$ ise $z_{2n+1} = \frac{w_0^a}{z_{-1}^b}$ olduğu kolayca görülür.

(d): $\theta = \frac{p\pi}{q}$ için $w_0^a = z_{-1}^{b(ac-b-1)} e^{i\theta}$, $q \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$ koşulları Denklem (3.110)' da kullanılırsa, $n \in \mathbb{N}_0$ için,

$$z_{2n+1} = \frac{w_0^a}{z_{-1}^b} \left(\frac{w_0^a}{z_{-1}^{b(ac-b-1)}} \right)^n = \frac{w_0^a}{z_{-1}^b} (e^{i\theta})^n = \frac{w_0^a}{z_{-1}^b} (e^{i\frac{p\pi}{q}})^n = \frac{w_0^a}{z_{-1}^b} (e)^{i\pi\frac{pn}{q}} \tag{3.114}$$

elde edilir. Teorem 3.5' in (f) öncülünün ispatında $a(ac-b)^n$ yerine n alarak Teorem 3.5- (f) öncülünün ispatına benzer şekilde ispat yapılabilir.

(e)-(g): Denklem (3.111)' den $\lim_{n\to\infty} z_{2n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{z_0^{ac-b}}{w_{-1}^{ad}} \left(\frac{z_0^{(ac-b-1)}}{w_{-1}^{ad}} \right)^n$ elde edilir. Burada $0 < \left| \frac{z_0^{ac-b-1}}{w_{-1}^{ad}} \right| < 1$ ise $\lim_{n\to\infty} z_{2n+2} = 0$ dır. Benzer şekilde eğer $\left| \frac{z_0^{ac-b-1}}{w_{-1}^{ad}} \right| > 1$ ise $\lim_{n\to\infty} z_{2n+2} = \infty$ dur. Öte yandan Denklem (3.111)'de eğer $z_0^{ac-b-1} = w_{-1}^{ad}$ ise $z_{2n+2} = \frac{z_0^{ac-b}}{w_{-1}^{ad}}$ olduğu kolayca görülür.

(h): $\theta = \frac{p\pi}{q}$ için $z_0^{ac-b-1} = w_{-1}^{ad} e^{i\theta}$, $q \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$ koşulları Denklem (3.111)' de kullanılırsa, $n \in \mathbb{N}_0$ için,

$$z_{2n+2} = \frac{z_0^{ac-b}}{w_{-1}^{ad}} \left(\frac{z_0^{(ac-b-1)}}{w_{-1}^{ad}} \right)^n = \frac{z_0^{ac-b}}{w_{-1}^{ad}} (e^{i\theta})^n = \frac{z_0^{ac-b}}{w_{-1}^{ad}} (e^{i\frac{p\pi}{q}})^n = \frac{z_0^{ac-b}}{w_{-1}^{ad}} (e)^{i\pi\frac{pn}{q}} \tag{3.115}$$

elde edilir. Benzer şekilde Teorem 3.5' in (f) öncülünün ispatında $a(ac-b)^n$ yerine n alarak Teorem 3.5- (f) öncülünün ispatına benzer şekilde ispat yapılabilir.

(i)-(k): Denklem (3.112)' den $\lim_{n\to\infty} w_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{z_0^c}{w_{-1}^d} \left(\frac{z_0^c}{w_{-1}^{d(ac-d-1)}} \right)^n$ yazılabilir. Burada eğer $0 < \left| \frac{z_0^c}{w_{-1}^{d(ac-d-1)}} \right| < 1$ ise, $\lim_{n\to\infty} w_{2n+1} = 0$ dır. Benzer şekilde eğer $\left| \frac{z_0^c}{w_{-1}^{d(ac-d-1)}} \right| > 1$ ise $\lim_{n\to\infty} w_{2n+1} = \infty$ dur. Öte yandan Denklem (3.112)'de eğer $z_0^c = w_{-1}^{d(ac-d-1)}$ ise $w_{2n+1} = \frac{z_0^c}{w_{-1}^d}$ olduğu kolayca görülür.

(l): $\theta = \dfrac{p\pi}{q}$ için $z_0^c = w_{-1}^{d(ac-d-1)} e^{i\theta}$, $q \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$ koşulları Denklem (3.112)' de kullanılırsa, $n \in \mathbb{N}_0$ için,

$$w_{2n+1} = \frac{z_0^c}{w_{-1}^d} \left(\frac{z_0^c}{w_{-1}^{d(ac-d-1)}}\right)^n = \frac{z_0^c}{w_{-1}^d} (e^{i\theta})^n = \frac{z_0^c}{w_{-1}^d} (e^{i\frac{p\pi}{q}})^n = \frac{z_0^c}{w_{-1}^d} (e)^{i\pi\frac{pn}{q}} \tag{3.116}$$

dır. Benzer şekilde Teorem 3.5' in (f) öncülünün ispatında $a(ac-b)^n$ yerine n alarak Teorem 3.5- (f) öncülünün ispatına benzer şekilde ispat yapılabilir.

(m)-(o): Denklem (3.113) 'den $\lim\limits_{n\to\infty} w_{2n+2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{w_0^{ac-d}}{z_{-1}^{bc}} \left(\dfrac{w_0^{ac-d-1}}{z_{-1}^{bc}}\right)^n$ dir. Burada eğer $0 < \left|\dfrac{w_0^{ac-d-1}}{z_{-1}^{bc}}\right| < 1$ ise $\lim\limits_{n\to\infty} w_{2n+2} = 0$ dır. Benzer şekilde eğer $\left|\dfrac{w_0^{ac-d-1}}{z_{-1}^{bc}}\right| > 1$ ise $\lim\limits_{n\to\infty} w_{2n+2} = \infty$ dur. Öte yandan Denklem (3.113)' te eğer $w_0^{ac-d-1} = z_{-1}^{bc}$ ise $w_{2n+2} = \dfrac{w_0^{ac-d-1}}{z_{-1}^{bc}}$ olduğu kolayca görülür.

(p): $\theta = \dfrac{p\pi}{q}$ için $w_0^{ac-d-1} = z_{-1}^{bc} e^{i\theta}$, $q \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$ koşulları Denklem (3.113)' de kullanılırsa, $n \in \mathbb{N}_0$ için,

$$w_{2n+2} = \frac{w_0^{ac-d}}{z_{-1}^{bc}} \left(\frac{w_0^{ac-d-1}}{z_{-1}^{bc}}\right)^n = \frac{w_0^{ac-d}}{z_{-1}^{bc}} (e^{i\theta})^n = \frac{w_0^{ac-d}}{z_{-1}^{bc}} (e^{i\frac{p\pi}{q}})^n = \frac{w_0^{ac-d}}{z_{-1}^{bc}} (e)^{i\pi\frac{pn}{q}} \tag{3.117}$$

dir. Benzer şekilde Teorem 3.5' in (f) öncülünün ispatında $a(ac-b)^n$ yerine n alarak Teorem 3.5- (f) öncülünün ispatına benzer şekilde ispat yapılabilir ■.

Teorem 3.7. $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$, $z_{-1}, z_0, w_{-1}, w_0 \in \mathbb{C} - \{0\}$, $(ac-b-d)^2 = 4bd$, $ac-b-d = -2$ ve $(z_n, w_n)_{n\geq -1}$, Sistem (3.1)' in iyi tanımlı çözümü olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

(a) Eğer $0 < \left|\dfrac{w_0^a}{z_{-1}^{-b(ac-b+1)}}\right| < 1$ ise, o zaman $n \to \infty$ iken $z_{4n+1} \to 0$ ve $z_{4n+3} \to \infty$ dur.

(b) Eğer $\left|\dfrac{w_0^a}{z_{-1}^{-b(ac-b+1)}}\right| > 1$ ise, o zaman $n \to \infty$ iken $z_{4n+1} \to \infty$ ve $z_{4n+3} \to 0$ dır.

(c) Eğer $\dfrac{w_0^a}{z_{-1}^{-b(ac-b+1)}} = 1$ ise, o zaman $z_{4n+1} = \dfrac{w_0^a}{z_{-1}^b} = \dfrac{1}{z_{4n+3}}$, $n \in \mathbb{N}_0$, dır.

(d) Eğer $\theta = \dfrac{p\pi}{q}$ için $w_0^a z_{-1}^{b(ac-b+1)} = e^{i\theta}$, $q \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$ ise, o zaman z_{4n+1} ve z_{4n+3} T periyotludur. Burada $T \le 2q$ dur.

(e) Eğer $0 < \left| \dfrac{z_0^{ac-b+1}}{w_{-1}^{ad}} \right| < 1$ ise, o zaman $n \to \infty$ iken $z_{4n+2} \to 0$ ve $z_{4n+4} \to \infty$ dur.

(f) Eğer $\left| \dfrac{z_0^{ac-b+1}}{w_{-1}^{ad}} \right| > 1$ ise, o zaman $n \to \infty$ iken $z_{4n+2} \to \infty$ ve $z_{4n+4} \to 0$ dır.

(g) Eğer $\dfrac{z_0^{ac-b+1}}{w_{-1}^{ad}} = 1$ ise, o zaman $z_{4n+2} = \dfrac{z_0^{ac-b}}{w_{-1}^{ad}} = \dfrac{1}{z_{4n+4}}$, $n \in \mathbb{N}_0$, dır.

(h) Eğer $\theta = \dfrac{p\pi}{q}$ için $z_0^{ac-b+1} = w_{-1}^{ad} e^{i\theta}$, $q \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$ ise, o zaman z_{4n+2} ve z_{4n+4} T periyotludur. Burada $T \le 2q$ dur.

(i) Eğer $0 < \left| z_0^c w_{-1}^{d(ac-d+1)} \right| < 1$ ise, o zaman $n \to \infty$ iken $w_{4n+1} \to 0$ ve $w_{4n+3} \to \infty$ dur.

(j) Eğer $\left| z_0^c w_{-1}^{d(ac-d+1)} \right| > 1$ ise, o zaman $n \to \infty$ iken $w_{4n+1} \to \infty$ ve $w_{4n+3} \to 0$ dır.

(k) Eğer $z_0^c w_{-1}^{d(ac-d+1)} = 1$ ise, o zaman $w_{4n+1} = \dfrac{z_0^c}{w_{-1}^d} = \dfrac{1}{w_{4n+3}}$, $n \in \mathbb{N}_0$, dır.

(l) Eğer $\theta = \dfrac{p\pi}{q}$ için $z_0^c w_{-1}^{d(ac-d+1)} = e^{i\theta}$, $q \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$ ise, o zaman w_{4n+1} ve w_{4n+3} T periyotludur. Burada $T \le 2q$ dur.

(m) Eğer $0 < \left| \dfrac{w_0^{ac-d+1}}{z_{-1}^{bc}} \right| < 1$ ise, o zaman $n \to \infty$ iken $w_{4n+2} \to 0$ ve $w_{4n+4} \to \infty$ dur.

(n) Eğer $\left| \dfrac{w_0^{ac-d+1}}{z_{-1}^{bc}} \right| > 1$ ise, o zaman $n \to \infty$ iken $w_{4n+2} \to \infty$ ve $w_{4n+4} \to 0$ dır.

(o) Eğer $w_0^{ac-d+1} = z_{-1}^{bc}$ ise, o zaman $w_{4n+2} = \dfrac{w_0^{ac-d}}{z_{-1}^{bc}} = \dfrac{1}{w_{4n+4}}$, $n \in \mathbb{N}_0$, dır.

(p) Eğer $\theta = \dfrac{p\pi}{q}$ için $w_0^{ac-d+1} = z_{-1}^{bc} e^{i\theta}$, $q \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$ ise, o zaman w_{4n+2} ve w_{4n+3} T periyotludur. Burada $T \le 2q$ dur.

İspat $ac-b-d=-2$ koşulu Denklem (3.75)'te yazılırsa karakteristik denkleminin kökleri $\lambda_1=\lambda_2=-1$ dir. Elde edilen bu değer (3.84)-(3.87) denlemlerinde yerine yazıldığında

$$z_{2n+1}=\frac{w_0^{a(n+1)(-1)^n}}{z_{-1}^{b((ac-b+1)n-1)(-1)^{n-1}}}=\frac{w_0^{a(-1)^n}}{z_{-1}^{b(-1)^n}}\left(\frac{w_0^a}{z_{-1}^{-b(ac-b+1)}}\right)^{n(-1)^n} \tag{3.118}$$

$$z_{2n+2}=\frac{z_0^{((ac-b+1)(n+1)-1)(-1)^n}}{w_{-1}^{ad(n+1)(-1)^n}}=\frac{z_0^{(ac-b)(-1)^n}}{w_{-1}^{ad(-1)^n}}\left(\frac{z_0^{ac-b+1}}{w_{-1}^{ad}}\right)^{n(-1)^n} \tag{3.119}$$

$$w_{2n+1}=\frac{z_0^{c(n+1)(-1)^n}}{w_{-1}^{d((ac-d+1)n-1)(-1)^{n-1}}}=\frac{z_0^{c(-1)^n}}{w_{-1}^{d(-1)^n}}\left(\frac{z_0^c}{w_{-1}^{-d(ac-d+1)}}\right)^{n(-1)^n} \tag{3.120}$$

$$w_{2n+2}=\frac{w_0^{((ac-d+1)(n+1)-1)(-1)^n}}{z_{-1}^{bc(n+1)(-1)^n}}=\frac{w_0^{(ac-d)(-1)^n}}{z_{-1}^{bc(-1)^n}}\left(\frac{w_0^{ac-d+1}}{z_{-1}^{bc}}\right)^{n(-1)^n} \tag{3.121}$$

eşitlikleri elde edilir. (3.118)-(3.121) denklemlerinde *n* yerine sırasıyla *2n* ve *2n+1* alınırsa

$$z_{4n+1}=\frac{w_0^a}{z_{-1}^b}\left(\frac{w_0^a}{z_{-1}^{-b(ac-b+1)}}\right)^{2n},\quad z_{4n+3}=\frac{z_{-1}^b}{w_0^a}\left(\frac{z_{-1}^{-b(ac-b+1)}}{w_0^a}\right)^{2n+1}, \tag{3.122}$$

$$z_{4n+2}=\frac{z_0^{ac-b}}{w_{-1}^{ad}}\left(\frac{z_0^{ac-b+1}}{w_{-1}^{ad}}\right)^{2n},\quad z_{4n+4}=\frac{w_{-1}^{ad}}{z_0^{ac-b}}\left(\frac{w_{-1}^{ad}}{z_0^{ac-b+1}}\right)^{2n+1}, \tag{3.123}$$

$$w_{4n+1}=\frac{z_0^c}{w_{-1}^d}\left(\frac{z_0^c}{w_{-1}^{-d(ac-d+1)}}\right)^{2n},\quad w_{4n+3}=\frac{w_{-1}^d}{z_0^c}\left(\frac{w_{-1}^{-d(ac-d+1)}}{z_0^c}\right)^{2n+1}, \tag{3.124}$$

$$w_{4n+2}=\frac{w_0^{(ac-d)}}{z_{-1}^{bc}}\left(\frac{w_0^{ac-d+1}}{z_{-1}^{bc}}\right)^{2n},\quad w_{4n+4}=\frac{z_{-1}^{bc}}{w_0^{(ac-d)}}\left(\frac{z_{-1}^{bc}}{w_0^{ac-d+1}}\right)^{2n+1} \tag{3.125}$$

bulunur.

(a)-(c): Denklem (3.122)' de her iki denklemin eşitliğininher iki tarafının limiti alınırsa $\lim\limits_{n\to\infty}z_{4n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{w_0^a}{z_{-1}^b}\left(\frac{w_0^a}{z_{-1}^{-b(ac-b+1)}}\right)^{2n}$ ve $\lim\limits_{n\to\infty}z_{4n+3}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{z_{-1}^b}{w_0^a}\left(\frac{z_{-1}^{-b(ac-b+1)}}{w_0^a}\right)^{2n+1}$ yazılır. Burada üç durum söz konusudur. Eğer $0<\left|\frac{w_0^a}{z_{-1}^{-b(ac-b+1)}}\right|<1$ ise $\lim\limits_{n\to\infty}z_{4n+1}=0$ ve $\lim\limits_{n\to\infty}z_{4n+3}=\infty$ dur. Benzer şekilde eğer $\left|\frac{w_0^a}{z_{-1}^{-b(ac-b+1)}}\right|>1$ ise $\lim\limits_{n\to\infty}z_{4n+1}=\infty$ ve $\lim\limits_{n\to\infty}z_{4n+3}=0$ dır. Öte yandan Denklem (3.122)'de eğer $\frac{w_0^a}{z_{-1}^{-b(ac-b+1)}}=1$ ise $z_{4n+1}=\frac{w_0^a}{z_{-1}^b}=\frac{1}{z_{4n+3}}$ olduğu kolayca görülür.

(d): $\theta = \dfrac{p\pi}{q}$ için $w_0^a z_{-1}^{b(ac-b+1)} = e^{i\theta}$, $q \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$ koşulları Denklem (3.122)' de kullanılırsa

$$z_{4n+1} = \frac{w_0^a}{z_{-1}^b}\left(\frac{w_0^a}{z_{-1}^{-b(ac-b+1)}}\right)^{2n} = \frac{w_0^a}{z_{-1}^b}(e^{i\theta})^{2n} = \frac{w_0^a}{z_{-1}^b}e^{i\pi\frac{2np}{q}}$$

$$z_{4n+3} = \frac{z_{-1}^b}{w_0^a}\left(\frac{z_{-1}^{-b(ac-b+1)}}{w_0^a}\right)^{2n+1} = \frac{z_{-1}^b}{w_0^a}(e^{-i\theta})^{2n+1} = \frac{z_{-1}^b}{w_0^a}e^{-i\pi\frac{p(2n+1)}{q}}$$

eşitlikleri yazılır. Benzer şekilde Teorem 3.5' in (f) öncülünün ispatında $a(ac-b)^n$ yerine sırasıyla $2n$ ve *2n+1* alarak Teorem 3.5- (f) öncülünün ispatına benzer şekilde ispat yapılabilir.

(e)-(g): Denklem (3.123)' te her iki denklemin eşitliğininher iki tarafının limiti alınırsa $\lim\limits_{n\to\infty} z_{4n+2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{z_0^{ac-b}}{w_{-1}^{ad}}\left(\frac{z_0^{ac-b+1}}{w_{-1}^{ad}}\right)^{2n}$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} z_{4n+4} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{w_{-1}^{ad}}{z_0^{ac-b}}\left(\frac{w_{-1}^{ad}}{z_0^{ac-b+1}}\right)^{2n+1}$ ifadeleri yazılabilir.

Burada yine üç durum söz konusudur. Eğer $0 < \left|\frac{z_0^{ac-b+1}}{w_{-1}^{ad}}\right| < 1$ ise $\lim\limits_{n\to\infty} z_{4n+2} = 0$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} z_{4n+4} = \infty$ dur. Benzer şekilde eğer $\left|\frac{z_0^{ac-b+1}}{w_{-1}^{ad}}\right| > 1$ ise $\lim\limits_{n\to\infty} z_{4n+2} = \infty$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} z_{4n+4} = 0$ dır.

Öte yandan Denklem (3.123)'te eğer $\frac{z_0^{ac-b+1}}{w_{-1}^{ad}} = 1$ ise $z_{4n+2} = \frac{w_0^a}{z_{-1}^b} = \frac{1}{z_{4n+4}}$ olduğu kolayca görülür.

(h): $\theta = \dfrac{p\pi}{q}$ için $z_0^{ac-b+1} = w_{-1}^{ad}e^{i\theta}$, $q \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$ koşulları Denklem (3.123)' te kullanılırsa, $n \in \mathbb{N}_0$ için,

$$\begin{aligned} z_{4n+2} &= \frac{z_0^{ac-b}}{w_{-1}^{ad}}\left(\frac{z_0^{ac-b+1}}{w_{-1}^{ad}}\right)^{2n} = \frac{z_0^{ac-b}}{w_{-1}^{ad}}(e^{i\theta})^{2n} = \frac{z_0^{ac-b}}{w_{-1}^{ad}}e^{i\pi\frac{2np}{q}} \\ z_{4n+4} &= \frac{w_{-1}^{ad}}{z_0^{ac-b}}\left(\frac{w_{-1}^{ad}}{z_0^{ac-b+1}}\right)^{2n+1} = \frac{w_{-1}^{ad}}{z_0^{ac-b}}(e^{-i\theta})^{2n+1} = \frac{w_{-1}^{ad}}{z_0^{ac-b}}e^{-i\pi\frac{(2n+1)p}{q}} \end{aligned} \tag{3.126}$$

elde edilir. Benzer şekilde Teorem 3.5' in (f) öncülünün ispatında $a(ac-b)^n$ yerine sırasıyla $2n$ ve *2n+1* alarak Teorem 3.5- (f) öncülünün ispatına benzer şekilde ispat yapılabilir.

(i)-(k): Denklem (3.124)' te her iki denklemin eşitliğininher iki tarafının limiti alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} w_{4n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{z_0^c}{w_{-1}^d} \left(\frac{z_0^c}{w_{-1}^{-d(ac-d+1)}}\right)^{2n} \quad \text{ve} \quad \lim_{n\to\infty} w_{4n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{w_{-1}^d}{z_0^c} \left(\frac{w_{-1}^{-d(ac-d+1)}}{z_0^c}\right)^{2n+1} \quad \text{yazılabilir.}$$

Burada da üç durum söz konusudur. Eğer $0 < \left|\frac{z_0^c}{w_{-1}^{-d(ac-d+1)}}\right| < 1$ ise $\lim_{n\to\infty} w_{4n+1} = 0$ ve $\lim_{n\to\infty} w_{4n+3} = \infty$ dur. Benzer şekilde eğer $\left|\frac{z_0^c}{w_{-1}^{-d(ac-d+1)}}\right| > 1$ ise $\lim_{n\to\infty} w_{4n+1} = \infty$ ve $\lim_{n\to\infty} w_{4n+3} = 0$ dır. Öte yandan Denklem (3.124)'de eğer $\frac{z_0^c}{w_{-1}^{-d(ac-d+1)}} = 1$ ise $z_{4n+2} = \frac{w_0^a}{z_{-1}^b} = \frac{1}{z_{4n+4}}$ olduğu kolayca görülür.

(l): $\theta = \frac{p\pi}{q}$ için $z_0^c w_{-1}^{d(ac-d+1)} = e^{i\theta}$, $q \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$ koşulları Denklem (3.124)' te kullanılırsa, $n \in \mathbb{N}_0$ için,

$$\begin{aligned} w_{4n+1} &= \frac{z_0^c}{w_{-1}^d} \left(\frac{z_0^c}{w_{-1}^{-d(ac-d+1)}}\right)^{2n} = \frac{z_0^c}{w_{-1}^d} (e^{i\theta})^{2n} = \frac{z_0^c}{w_{-1}^d} e^{i\pi\frac{2np}{q}} \\ w_{4n+3} &= \frac{w_{-1}^d}{z_0^c} \left(\frac{w_{-1}^{-d(ac-d+1)}}{z_0^c}\right)^{2n+1} = \frac{w_{-1}^d}{z_0^c} (e^{-i\theta})^{2n+1} = \frac{w_{-1}^d}{z_0^c} e^{-i\pi\frac{2n+1\ p}{q}} \end{aligned} \tag{3.127}$$

elde edilir. Benzer şekilde Teorem 3.5' in (f) öncülünün ispatında $a(ac-b)^n$ yerine sırasıyla $2n$ ve *2n+1* alarak Teorem 3.5- (f) öncülünün ispatına benzer şekilde ispat yapılabilir.

(m)-(o): Denklem (3.125)' te her iki denklemin eşitliğininher iki tarafının limiti alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} w_{4n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{w_0^{(ac-d)}}{z_{-1}^{bc}} \left(\frac{w_0^{ac-d+1}}{z_{-1}^{bc}}\right)^{2n} \quad \text{ve} \quad \lim_{n\to\infty} w_{4n+4} = \lim_{n\to\infty} \frac{z_{-1}^{bc}}{w_0^{(ac-d)}} \left(\frac{z_{-1}^{bc}}{w_0^{ac-d+1}}\right)^{2n+1} \quad \text{yazılabilir.}$$

Burada da üç durum söz konusudur. Eğer $0 < \left|\frac{w_0^{ac-d+1}}{z_{-1}^{bc}}\right| < 1$ ise $\lim_{n\to\infty} w_{4n+2} = 0$ ve $\lim_{n\to\infty} w_{4n+4} = \infty$ dur. Benzer şekilde eğer $\left|\frac{w_0^{ac-d+1}}{z_{-1}^{bc}}\right| > 1$ ise $\lim_{n\to\infty} w_{4n+1} = 0$ ve $\lim_{n\to\infty} w_{4n+3} = \infty$ dur. Son olarak Denklem (3.125)' te eğer $\frac{w_0^{ac-d+1}}{z_{-1}^{bc}} = 1$ ise $w_{4n+2} = \frac{w_0^{ac-d}}{z_{-1}^{bc}} = \frac{1}{w_{4n+4}}$ olduğu kolayca görülür.

(p): $\theta = \dfrac{p\pi}{q}$ için $w_0^{ac-d+1} = z_{-1}^{bc} e^{i\theta}$, $q \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$ koşulları Denklem (3.125)' te kullanılırsa, $n \in \mathbb{N}_0$ için,

$$\begin{aligned} w_{4n+2} &= \frac{w_0^{(ac-d)}}{z_{-1}^{bc}} \left(\frac{w_0^{ac-d+1}}{z_{-1}^{bc}}\right)^{2n} = \frac{w_0^{(ac-d)}}{z_{-1}^{bc}} (e^{i\theta})^{2n} = \frac{w_0^{(ac-d)}}{z_{-1}^{bc}} e^{i\pi\frac{2np}{q}} \\ w_{4n+4} &= \frac{z_{-1}^{bc}}{w_0^{(ac-d)}} \left(\frac{z_{-1}^{bc}}{w_0^{ac-d+1}}\right)^{2n+1} = \frac{z_{-1}^{bc}}{w_0^{(ac-d)}} (e^{-i\theta})^{2n+1} = \frac{z_{-1}^{bc}}{w_0^{(ac-d)}} e^{-i\pi\frac{2n+1\ p}{q}} \end{aligned} \tag{3.128}$$

elde edilir. Benzer şekilde Teorem 3.5' in (f) öncülünün ispatında $a(ac-b)^n$ yerine sırasıyla 2*n* ve *2n+1* alarak Teorem 3.5- (f) öncülünün ispatına benzer şekilde ispat yapılabilir■.

Teorem 3.8. $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$, $z_{-1}, z_0, w_{-1}, w_0 \in \mathbb{C} - \{0\}$, $bd \neq 0$, $(ac-b-d)^2 = 4bd$, $ac-b-d > 2$ ve $(z_n, w_n)_{n \geq -1}$, Sistem (3.1)' in iyi tanımlı çözümü olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

(a) Eğer $0 < \left|\dfrac{w_0^{a\lambda_1}}{z_{-1}^{b(ac-b-\lambda_1)}}\right| < 1$ ise, o zaman $n \to \infty$ iken $z_{2n+1} \to 0$ dır.

(b) Eğer $\left|\dfrac{w_0^{a\lambda_1}}{z_{-1}^{b(ac-b-\lambda_1)}}\right| > 1$ ise, o zaman $n \to \infty$ iken $z_{2n+1} \to \infty$ dur.

(c) Eğer $w_0^{a\lambda_1} = z_{-1}^{b(ac-b-\lambda_1)}$ ve $0 < \left|\dfrac{w_0^{a}}{z_{-1}^{b}}\right| < 1$ ise, o zaman $n \to \infty$ iken $z_{2n+1} \to 0$ dır.

(d) Eğer $w_0^{a\lambda_1} = z_{-1}^{b(ac-b-\lambda_1)}$ ve $\left|\dfrac{w_0^{a}}{z_{-1}^{b}}\right| > 1$ ise, o zaman $n \to \infty$ iken $z_{2n+1} \to \infty$ dur.

(e) Eğer $w_0^{a\lambda_1} = z_{-1}^{b(ac-b-\lambda_1)}$ ve $w_0^a = z_{-1}^b$ ise, o zaman $z_{2n+1} = 1$, $n \in \mathbb{N}_0$, dır.

(f) Eğer $\theta = \dfrac{p\pi}{q}$ için $w_0^{a\lambda_1} = z_{-1}^{b(ac-b-\lambda_1)}$ ve $w_0^a = z_{-1}^b e^{i\theta}$, $q \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$ ise, o zaman z_{2n+1} *T* periyotludur. Burada $T \leq 2q$ dur.

(g) Eğer $0 < \left|\dfrac{z_0^{ac-b-\lambda_1}}{w_{-1}^{ad}}\right| < 1$ ise, o zaman $n \to \infty$ iken $z_{2n+2} \to 0$ dır.

(h) Eğer $\left|\dfrac{z_0^{ac-b-\lambda_1}}{w_{-1}^{ad}}\right| > 1$ ise, o zaman $n \to \infty$ iken $z_{2n+2} \to \infty$ dur.

(i) Eğer $z_0^{ac-b-\lambda_1} = w_{-1}^{ad}$ ve $0 < \left|\dfrac{z_0^{ac-b}}{w_{-1}^{ad}}\right| < 1$ ise, o zaman $n \to \infty$ iken $z_{2n+2} \to 0$ dır.

(j) Eğer $z_0^{ac-b-\lambda_1} = w_{-1}^{ad}$ ve $\left|\dfrac{z_0^{ac-b}}{w_{-1}^{ad}}\right| > 1$ ise, o zaman $n \to \infty$ iken $z_{2n+2} \to \infty$ dur.

(k) Eğer $z_0^{ac-b-\lambda_1} = w_{-1}^{ad}$ ve $z_0^{ac-b} = w_{-1}^{ad}$ ise, o zaman $z_{2n+2} = 1$ $n \in \mathbb{N}_0$ dır.

(l) Eğer $\theta = \dfrac{p\pi}{q}$ için $z_0^{ac-b-\lambda_1} = w_{-1}^{ad}$ ve $z_0^{ac-b} = w_{-1}^{ad} e^{i\theta}$, $q \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$ ise, o zaman z_{2n+2} T periyotludur. Burada $T \le 2q$ dur.

(m) Eğer $0 < \left|\dfrac{z_0^{c\lambda_1}}{w_{-1}^{d(ac-d-\lambda_1)}}\right| < 1$ ise, o zaman $n \to \infty$ iken $w_{2n+1} \to 0$ dır.

(n) Eğer $\left|\dfrac{z_0^{c\lambda_1}}{w_{-1}^{d(ac-d-\lambda_1)}}\right| > 1$ ise, o zaman $n \to \infty$ iken $w_{2n+1} \to 0$ dır.

(o) Eğer $z_0^{c\lambda_1} = w_{-1}^{d(ac-d-\lambda_1)}$ ve $0 < \left|\dfrac{z_0^{c}}{w_{-1}^{d}}\right| < 1$ ise, o zaman $n \to \infty$ iken $w_{2n+1} \to 0$ dır.

(p) Eğer $z_0^{c\lambda_1} = w_{-1}^{d(ac-d-\lambda_1)}$ ve $\left|\dfrac{z_0^{c}}{w_{-1}^{d}}\right| > 1$ ise, o zaman $n \to \infty$ iken $w_{2n+1} \to \infty$ dur.

(q) Eğer $z_0^{c\lambda_1} = w_{-1}^{d(ac-d-\lambda_1)}$ ve $z_0^{c} = w_{-1}^{d}$ ise, o zaman $w_{2n+1} = 1$ $n \in \mathbb{N}_0$ dır.

(r) Eğer $\theta = \dfrac{p\pi}{q}$ için $z_0^{c\lambda_1} = w_{-1}^{d(ac-d-\lambda_1)}$ ve $z_0^{c} = w_{-1}^{d} e^{i\theta}$, $q \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$ ise, o zaman w_{2n+1} T periyotludur. Burada $T \le 2q$ dur.

(s) Eğer $0 < \left|\dfrac{w_0^{ac-d-\lambda_1}}{z_{-1}^{bc}}\right| < 1$ ise, o zaman $n \to \infty$ iken $w_{2n+2} \to 0$ dır.

(t) Eğer $\left|\dfrac{w_0^{ac-d-\lambda_1}}{z_{-1}^{bc}}\right| > 1$ ise, o zaman $n \to \infty$ iken $w_{2n+2} \to \infty$ dur.

(u) Eğer $w_0^{ac-d-\lambda_1} = z_{-1}^{bc}$ ve $0 < \left|\dfrac{w_0^{ac-d}}{z_{-1}^{bc}}\right| < 1$ ise, o zaman $n \to \infty$ iken $w_{2n+2} \to 0$ dır.

(v) Eğer $w_0^{ac-d-\lambda_1} = z_{-1}^{bc}$ ve $\left|\dfrac{w_0^{ac-d}}{z_{-1}^{bc}}\right| > 1$ ise, o zaman $n \to \infty$ iken $w_{2n+2} \to \infty$ dur.

(w) Eğer $w_0^{ac-d-\lambda_1} = z_{-1}^{bc}$ ve $w_0^{ac-d} = z_{-1}^{bc}$ ise, o zaman $w_{2n+2} = 1$ dir.

(x) Eğer $\theta = \dfrac{p\pi}{q}$ için $w_0^{ac-d-\lambda_1} = z_{-1}^{bc}$ ve $w_0^{ac-d} = z_{-1}^{bc} e^{i\theta}$, $q \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$ ise, o zaman w_{2n+2} T periyotludur. Burada $T \le 2q$ dur.

İspat $(ac-b-d)^2 = 4bd$ koşulu Denklem (3.75)'te yazılırsa karakteristik denkleminin kökleri $\lambda_1 = \lambda_2 = \sqrt{|bd|} > 1$ dir. Elde edilen bu değer (3.84)-(3.87) denlemlerinde yerine yazıldığında

$$z_{2n+1} = \frac{w_0^{a(n+1)\lambda_1^n}}{z_{-1}^{b((ac-b-\lambda_1)n+\lambda_1)\lambda_1^{n-1}}} = (\frac{w_0^a}{z_{-1}^b})^{\lambda_1^n} (\frac{w_0^{a\lambda_1}}{z_{-1}^{b(ac-b-\lambda_1)}})^{n\lambda_1^{n-1}}, \tag{3.129}$$

$$z_{2n+2} = \frac{z_0^{((ac-b-\lambda_1)(n+1)+\lambda_1)\lambda_1^n}}{w_{-1}^{ad(n+1)\lambda_1^n}} = (\frac{z_0^{ac-b}}{w_{-1}^{ad}})^{\lambda_1^n} (\frac{z_0^{ac-b-\lambda_1}}{w_{-1}^{ad}})^{n\lambda_1^n}, \tag{3.130}$$

$$w_{2n+1} = \frac{z_0^{c(n+1)\lambda_1^n}}{w_{-1}^{d((ac-d-\lambda_1)n+\lambda_1)\lambda_1^{n-1}}} = (\frac{z_0^c}{w_{-1}^d})^{\lambda_1^n} (\frac{z_0^{c\lambda_1}}{w_{-1}^{d(ac-d-\lambda_1)}})^{n\lambda_1^{n-1}}, \tag{3.131}$$

$$w_{2n+2} = \frac{w_0^{((ac-d-\lambda_1)(n+1)+\lambda_1)\lambda_1^n}}{z_{-1}^{bc(n+1)\lambda^n}} = (\frac{w_0^{ac-d}}{z_{-1}^{bc}})^{\lambda_1^n} (\frac{w_0^{ac-d-\lambda_1}}{z_{-1}^{bc}})^{n\lambda_1^n} \tag{3.132}$$

bulunur.

(a)-(e): Denklem (3.129)'un her iki denklemin eşitliğinin her iki tarafının limiti alınırsa $\lim\limits_{n\to\infty} z_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} (\frac{w_0^a}{z_{-1}^b})^{\lambda_1^n} (\frac{w_0^{a\lambda_1}}{z_{-1}^{b(ac-b-\lambda_1)}})^{n\lambda_1^{n-1}}$ yazılabilir. Burada üç durum söz konusudur. Eğer $0 < \left|\frac{w_0^{a\lambda_1}}{z_{-1}^{b(ac-b-\lambda_1)}}\right| < 1$ ise $\lim\limits_{n\to\infty} z_{2n+1} = 0$ dır. Benzer şekilde eğer $\left|\frac{w_0^{a\lambda_1}}{z_{-1}^{b(ac-b-\lambda_1)}}\right| > 1$ ise $\lim\limits_{n\to\infty} z_{2n+1} = \infty$ dır. Ayrıca Denklem (3.129)'da eğer $\frac{w_0^{a\lambda_1}}{z_{-1}^{b(ac-b-\lambda_1)}} = 1$ ise $z_{2n+1} = (\frac{w_0^a}{z_{-1}^b})^{\lambda_1^n} (\frac{w_0^{a\lambda_1}}{z_{-1}^{b(ac-b-\lambda_1)}})^{n\lambda_1^{n-1}} = (\frac{w_0^a}{z_{-1}^b})^{\lambda_1^n} (1)^{n\lambda_1^{n-1}} = (\frac{w_0^a}{z_{-1}^b})^{\lambda_1^n}$ olduğu kolayca görülür. Buradan $\lim\limits_{n\to\infty} z_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} (\frac{w_0^a}{z_{-1}^b})^{\lambda_1^n}$ dur. Eğer $0 < \left|\frac{w_0^a}{z_{-1}^b}\right| < 1$ ise $\lim\limits_{n\to\infty} z_{2n+1} = 0$ dır. Benzer şekilde eğer $\left|\frac{w_0^a}{z_{-1}^b}\right| > 1$ ise $\lim\limits_{n\to\infty} z_{2n+1} = \infty$ dur. Eğer $\frac{w_0^a}{z_{-1}^b} = 1$ ise $z_{2n+1} = 1$ olduğu kolayca görülür.

(f): $\theta = \dfrac{p\pi}{q}$ için $w_0^{a\lambda_1} = z_{-1}^{b(ac-b-\lambda_1)}$ ve $w_0^a = z_{-1}^b e^{i\theta}$, $q \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$ koşulları Denklem (3.129)' da kullanılırsa, $n \in \mathbb{N}_0$ için,

$$z_{2n+1} = (\frac{w_0^a}{z_{-1}^b})^{\lambda_1^n} (\frac{w_0^{a\lambda_1}}{z_{-1}^{b(ac-b-\lambda_1)}})^{n\lambda_1^{n-1}} = (\frac{z_{-1}^b e^{i\theta}}{z_{-1}^b})^{\lambda_1^n} (1)^{n\lambda_1^{n-1}} = (e^{i\theta})^{\lambda_1^n} = e^{i\pi\frac{\lambda_1^n p}{q}} \tag{3.133}$$

bulunur. Benzer şekilde Teorem 3.5' in (f) öncülünün ispatında $a(ac-b)^n$ yerine sırasıyla λ_1^n alarak Teorem 3.5- (f) öncülünün ispatına benzer şekilde ispat yapılabilir.

(g)-(k): Denklem (3.130)'un her iki denklemin eşitliğinin her iki tarafının limiti alınırsa $\lim\limits_{n\to\infty} z_{2n+2} = \lim\limits_{n\to\infty} (\frac{z_0^{ac-b}}{w_{-1}^{ad}})^{\lambda_1^n} (\frac{z_0^{ac-b-\lambda_1}}{w_{-1}^{ad}})^{n\lambda_1^n}$ yazılabilir. Burada da üç durum söz konusıdır. Eğer $0 < \left|\frac{z_0^{ac-b-\lambda_1}}{w_{-1}^{ad}}\right| < 1$ ise $\lim\limits_{n\to\infty} z_{2n+2} = 0$ dır. Benzer şekilde eğer $\left|\frac{z_0^{ac-b-\lambda_1}}{w_{-1}^{ad}}\right| > 1$ ise $\lim\limits_{n\to\infty} z_{2n+2} = 0$ dır. Ayrıca Denklem (3.130)'da eğer $\frac{z_0^{ac-b-\lambda_1}}{w_{-1}^{ad}} = 1$ ise $z_{2n+2} = (\frac{z_0^{ac-b}}{w_{-1}^{ad}})^{\lambda_1^n} (\frac{z_0^{ac-b-\lambda_1}}{w_{-1}^{ad}})^{n\lambda_1^n} = (\frac{z_0^{ac-b}}{w_{-1}^{ad}})^{\lambda_1^n} (1)^{n\lambda_1^n} = (\frac{z_0^{ac-b}}{w_{-1}^{ad}})^{\lambda_1^n}$ olduğu kolayca görülür. Buradan $\lim\limits_{n\to\infty} z_{2n+2} = \lim\limits_{n\to\infty} (\frac{z_0^{ac-b}}{w_{-1}^{ad}})^{\lambda_1^n}$ yazılabilir. Yine burada da üç durum söz konusudur. Eğer $0 < \left|\frac{z_0^{ac-b}}{w_{-1}^{ad}}\right| < 1$ ise $\lim\limits_{n\to\infty} z_{2n+2} = 0$ dır. Benzer şekilde eğer $\left|\frac{z_0^{ac-b}}{w_{-1}^{ad}}\right| > 1$ ise $\lim\limits_{n\to\infty} z_{2n+2} = \infty$ dur. Ayrıca $\frac{z_0^{ac-b}}{w_{-1}^{ad}} = 1$ ise $z_{2n+2} = 1$ olduğu görülür.

(l): $\theta = \dfrac{p\pi}{q}$ için $z_0^{ac-b-\lambda_1} = w_{-1}^{ad}$ ve $z_0^{ac-b} = w_{-1}^{ad} e^{i\theta}$, $q \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$ koşulları Denklem (3.130)' da kullanılırsa, $n \in \mathbb{N}_0$ için,

$$z_{2n+2} = (\frac{z_0^{ac-b}}{w_{-1}^{ad}})^{\lambda_1^n} (\frac{z_0^{ac-b-\lambda_1}}{w_{-1}^{ad}})^{n\lambda_1^n} = (\frac{w_{-1}^{ad} e^{i\theta}}{w_{-1}^{ad}})^{\lambda_1^n} (1)^{n\lambda_1^n} = (e^{i\theta})^{\lambda_1^n} = e^{i\pi\frac{\lambda_1^n p}{q}} \tag{3.134}$$

bulunur. Benzer şekilde Teorem 3.5' in (f) öncülünün ispatında $a(ac-b)^n$ yerine sırasıyla λ_1^n alarak Teorem 3.5- (f) öncülünün ispatına benzer şekilde ispat yapılabilir.

(m)-(q): Denklem (3.131)'in her iki denklemin eşitliğinin her iki tarafının limiti alınırsa

$\lim\limits_{n\to\infty} w_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{z_0^c}{w_{-1}^d})^{\lambda_1^n}(\frac{z_0^{c\lambda_1}}{w_{-1}^{d(ac-d-\lambda_1)}})^{n\lambda_1^{n-1}}$ dır. Burada da üç durum söz konudur. Eğer $0<\left|\frac{z_0^{c\lambda_1}}{w_{-1}^{d(ac-d-\lambda_1)}}\right|<1$ ise $\lim\limits_{n\to\infty} w_{2n+1}=0$ dır. Benzer şekilde eğer $\left|\frac{z_0^{c\lambda_1}}{w_{-1}^{d(ac-d-\lambda_1)}}\right|>1$ ise $\lim\limits_{n\to\infty} w_{2n+1}=\infty$ dur. Eğer $\frac{z_0^{c\lambda_1}}{w_{-1}^{d(ac-d-\lambda_1)}}=1$ ise $w_{2n+1}=(\frac{z_0^c}{w_{-1}^d})^{\lambda_1^n}(\frac{z_0^{c\lambda_1}}{w_{-1}^{d(ac-d-\lambda_1)}})^{n\lambda_1^{n-1}}=(\frac{z_0^c}{w_{-1}^d})^{\lambda_1^n}(1)^{n\lambda_1^{n-1}}=(\frac{z_0^c}{w_{-1}^d})^{\lambda_1^n}$ olduğu kolayca görülür. Buradan $\lim\limits_{n\to\infty} w_{2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{z_0^c}{w_{-1}^d})^{\lambda_1^n}$ dir. Yine burada da üç durum söz konudur. Eğer $0<\left|\frac{z_0^c}{w_{-1}^d}\right|<1$ ise $\lim\limits_{n\to\infty} w_{2n+1}=0$ dır. Benzer şekilde eğer $\left|\frac{z_0^c}{w_{-1}^d}\right|>1$ ise $\lim\limits_{n\to\infty} w_{2n+1}=\infty$ dur. Eğer $\frac{z_0^c}{w_{-1}^d}=1$ ise $w_{2n+1}=1$ olduğu görülür.

(r): $\theta=\frac{p\pi}{q}$ için $z_0^{c\lambda_1}=w_{-1}^{d(ac-d-\lambda_1)}$ ve $z_0^c=w_{-1}^d e^{i\theta}$, $q\in\mathbb{N}$, $p\in\mathbb{Z}$ koşulları Denklem (3.131)' de kullanılırsa, $n\in\mathbb{N}_0$ için,

$$w_{2n+1}=(\frac{z_0^c}{w_{-1}^d})^{\lambda_1^n}(\frac{z_0^{c\lambda_1}}{w_{-1}^{d(ac-d-\lambda_1)}})^{n\lambda_1^{n-1}}=(\frac{w_{-1}^d e^{i\theta}}{w_{-1}^d})^{\lambda_1^n}(1)^{n\lambda_1^{n-1}}=(e^{i\theta})^{\lambda_1^n}=e^{i\pi\frac{\lambda_1^n p}{q}} \tag{3.135}$$

bulunur. Benzer şekilde Teorem 3.5' in (f) öncülünün ispatında $a(ac-b)^n$ yerine sırasıyla λ_1^n alarak Teorem 3.5- (f) öncülünün ispatına benzer şekilde ispat yapılabilir.

(s)-(w): Denklem (3.132)'in her iki denklemin eşitliğinin her iki tarafının limiti alınırsa $\lim\limits_{n\to\infty} w_{2n+2}=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{w_0^{ac-d}}{z_{-1}^{bc}})^{\lambda_1^n}(\frac{w_0^{ac-d-\lambda_1}}{z_{-1}^{bc}})^{n\lambda_1^n}$ dır Burada üç durum söz konusudur. Eğer $0<\left|\frac{w_0^{ac-d-\lambda_1}}{z_{-1}^{bc}}\right|<1$ ise, eğer $\left|\frac{w_0^{ac-d-\lambda_1}}{z_{-1}^{bc}}\right|>1$ ise, eğer $\frac{w_0^{ac-d-\lambda_1}}{z_{-1}^{bc}}=1$ ise $w_{2n+2}=(\frac{w_0^{ac-d}}{z_{-1}^{bc}})^{\lambda_1^n}(\frac{w_0^{ac-d-\lambda_1}}{z_{-1}^{bc}})^{n\lambda_1^n}=(\frac{w_0^{ac-d}}{z_{-1}^{bc}})^{\lambda_1^n}(1)^{n\lambda_1^n}=(\frac{w_0^{ac-d}}{z_{-1}^{bc}})^{\lambda_1^n}$ dır. Buradan $\lim\limits_{n\to\infty} w_{2n+2}=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{w_0^{ac-d}}{z_{-1}^{bc}})^{\lambda_1^n}$ ifadesi yazılabilir. Yine burada da üç durum söz konusudur.

Eğer $0<\left|\frac{w_0^{ac-d}}{z_{-1}^{bc}}\right|<1$ ise, $\lim_{n\to\infty} w_{2n+2}=0$; eğer $\left|\frac{w_0^{ac-d}}{z_{-1}^{bc}}\right|>1$ ise, $\lim_{n\to\infty} w_{2n+2}=\infty$; $\frac{w_0^{ac-d}}{z_{-1}^{bc}}=1$ ise $w_{2n+2}=1$ olduğu görülür.

(x): $\theta=\frac{p\pi}{q}$ için $w_0^{ac-d-\lambda_1}=z_{-1}^{bc}$ ve $w_0^{ac-d}=z_{-1}^{bc}e^{i\theta}$, $q\in\mathbb{N}$, $p\in\mathbb{Z}$ koşulları Denklem (3.132)' de kullanılırsa, $n\in\mathbb{N}_0$ için,

$$w_{2n+2}=\left(\frac{w_0^{ac-d}}{z_{-1}^{bc}}\right)^{\lambda_1^n}\left(\frac{w_0^{ac-d-\lambda_1}}{z_{-1}^{bc}}\right)^{n\lambda_1^n}=\left(\frac{z_{-1}^{bc}e^{i\theta}}{z_{-1}^{bc}}\right)^{\lambda_1^n}(1)^{n\lambda_1^n}=(e^{i\theta})^{\lambda_1^n}=e^{i\pi\frac{\lambda_1^n p}{q}} \tag{3.136}$$

bulunur. Benzer şekilde Teorem 3.5' in (f) öncülünün ispatında $a(ac-b)^n$ yerine sırasıyla λ_1^n alarak Teorem 3.5- (f) öncülünün ispatına benzer şekilde ispat yapılabilir■.

Teorem 3.9. Başlangıç değerleri $z_{-1},z_0,w_{-1},w_0\in\mathbb{C}-\{0\}$ ve $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$, $bd\neq 0$ $(ac-b-d)^2=4bd$, $ac-b-d<-2$ olmak üzere (3.1) sistemi aşağıdaki ifadeleri sağlar.

(a) Eğer $0<\left|\frac{w_0^{a\lambda_1}}{z_{-1}^{b(ac-b-\lambda_1)}}\right|<1$ ise, o zaman $n\to\infty$ iken $z_{4n+1}\to\infty$ ve $z_{4n+3}\to 0$ dır.

(b) Eğer $\left|\frac{w_0^{a\lambda_1}}{z_{-1}^{b(ac-b-\lambda_1)}}\right|>1$ ise, o zaman $n\to\infty$ iken $z_{4n+1}\to 0$ ve $z_{4n+3}\to\infty$ dur.

(c) Eğer $w_0^{a\lambda_1}=z_{-1}^{b(ac-b-\lambda_1)}$ ve $0<\left|\frac{w_0^a}{z_{-1}^b}\right|<1$ ise, o zaman $n\to\infty$ iken $z_{4n+1}\to 0$ ve $z_{4n+3}\to\infty$ dur.

(d) Eğer $w_0^{a\lambda_1}=z_{-1}^{b(ac-b-\lambda_1)}$ ve $\left|\frac{w_0^a}{z_{-1}^b}\right|>1$ ise, o zaman $n\to\infty$ iken $z_{4n+1}\to\infty$ ve $z_{4n+3}\to 0$ dır.

(e) Eğer $w_0^{a\lambda_1}=z_{-1}^{b(ac-b-\lambda_1)}$ ve $w_0^a=z_{-1}^b$ ise, o zaman $n\in\mathbb{N}_0$ için $z_{2n+1}=1$ dir.

(f) Eğer $w_0^{a\lambda_1}=z_{-1}^{b(ac-b-\lambda_1)}$ ve $w_0^a=z_{-1}^b e^{i\theta}$ olmak üzere $\theta=\frac{p\pi}{q}$, $p\in\mathbb{N}$, $p\in\mathbb{Z}$ ise z_{4n+1} ve z_{4n+3} periyodiktir. Periyot $T\leq 2q$ dur.

(g) Eğer $0<\left|\frac{z_0^{ac-b-\lambda_1}}{w_{-1}^{ad}}\right|<1$ ise, o zaman $n\to\infty$ iken $z_{4n+2}\to 0$ ve $z_{4n+4}\to\infty$ dur.

(h) Eğer $\left|\dfrac{z_0^{ac-b-\lambda_1}}{w_{-1}^{ad}}\right|>1$ ise, o zaman $n\to\infty$ iken $z_{4n+2}\to\infty$ ve $z_{4n+4}\to 0$ dır.

(i) Eğer $z_0^{ac-b-\lambda_1}=w_{-1}^{ad}$ ve $0<\left|\dfrac{z_0^{ac-b}}{w_{-1}^{ad}}\right|<1$ ise, o zaman $n\to\infty$ iken $z_{4n+2}\to 0$ ve $z_{4n+4}\to\infty$ dur.

(j) Eğer $z_0^{ac-b-\lambda_1}=w_{-1}^{ad}$ ve $\left|\dfrac{z_0^{ac-b}}{w_{-1}^{ad}}\right|>1$ ise, o zaman $n\to\infty$ iken $z_{4n+2}\to\infty$ ve $z_{4n+4}\to 0$ dır.

(k) Eğer $z_0^{ac-b-\lambda_1}=w_{-1}^{ad}$ ve $z_0^{ac-b}=w_{-1}^{ad}$ ise, o zaman $z_{2n+2}=1$, $n\in\mathbb{N}_0$ dır.

(l) Eğer $z_0^{ac-b-\lambda_1}=w_{-1}^{ad}$ ve $z_0^{ac-b}=w_{-1}^{ad}e^{i\theta}$ olmak üzere $\theta=\dfrac{p\pi}{q}$, $q\in\mathbb{N}$, $p\in\mathbb{Z}$ ise z_{4n+2} ve z_{4n+4} periyodiktir. Periyot $T\le 2q$ dur.

(m) Eğer $0<\left|\dfrac{z_0^{c\lambda_1}}{w_{-1}^{d(ac-d-\lambda_1)}}\right|<1$ ise, o zaman $n\to\infty$ iken $w_{4n+1}\to\infty$ ve $w_{4n+3}\to 0$ dır.

(n) Eğer $\left|\dfrac{z_0^{c\lambda_1}}{w_{-1}^{d(ac-d-\lambda_1)}}\right|>1$ ise, o zaman $n\to\infty$ iken $w_{4n+1}\to 0$ ve $w_{4n+3}\to\infty$ dur.

(o) Eğer $z_0^{c\lambda_1}=w_{-1}^{d(ac-d-\lambda_1)}$ ve $0<\left|\dfrac{z_0^{c}}{w_{-1}^{d}}\right|<1$ ise, o zaman $n\to\infty$ iken $w_{4n+1}\to 0$ ve $w_{4n+3}\to\infty$ dur.

(p) Eğer $z_0^{c\lambda_1}=w_{-1}^{d(ac-d-\lambda_1)}$ ve $\left|\dfrac{z_0^{c}}{w_{-1}^{d}}\right|>1$ ise, o zaman $n\to\infty$ iken $w_{4n+1}\to\infty$ ve $w_{4n+3}\to 0$ dır.

(q) Eğer $z_0^{c\lambda_1}=w_{-1}^{d(ac-d-\lambda_1)}$ ve $z_0^{c}=w_{-1}^{d}$ ise, o zaman $w_{2n+1}=1$, $n\in\mathbb{N}_0$ dır.

(r) Eğer $z_0^{c\lambda_1}=w_{-1}^{d(ac-d-\lambda_1)}$ ve $z_0^{c}=w_{-1}^{d}e^{i\theta}$ olmak üzere $\theta=\dfrac{p\pi}{q}$, $q\in\mathbb{N}$, $p\in\mathbb{Z}$ ise w_{4n+1} ve w_{4n+3} periyodiktir. Periyot $T\le 2q$ dur.

(s) Eğer $0<\left|\dfrac{w_0^{ac-d-\lambda_1}}{z_{-1}^{bc}}\right|<1$ ise, o zaman $n\to\infty$ iken $w_{4n+2}\to 0$ ve $w_{4n+4}\to\infty$ dur.

(t) Eğer $\left|\dfrac{w_0^{ac-d-\lambda_1}}{z_{-1}^{bc}}\right|>1$ ise, o zaman $n\to\infty$ iken $w_{4n+2}\to\infty$ ve $w_{4n+4}\to 0$ dır.

(u) Eğer $w_0^{ac-d-\lambda_1} = z_{-1}^{bc}$ ve $0 < \left|\dfrac{w_0^{ac-d}}{z_{-1}^{bc}}\right| < 1$ ise, o zaman $n \to \infty$ iken $w_{4n+2} \to 0$ ve $w_{4n+4} \to \infty$ dur.

(v) Eğer $w_0^{ac-d-\lambda_1} = z_{-1}^{bc}$ ve $\left|\dfrac{w_0^{ac-d}}{z_{-1}^{bc}}\right| > 1$ ise, o zaman $n \to \infty$ iken $w_{4n+2} \to \infty$ ve $w_{4n+4} \to 0$ dır.

(w) Eğer $w_0^{ac-d-\lambda_1} = z_{-1}^{bc}$ ve $w_0^{ac-d} = z_{-1}^{bc}$ ise, o zaman $w_{2n+2} = 1$, $n \in \mathbb{N}_0$ dır.

(x) Eğer $w_0^{ac-d-\lambda_1} = z_{-1}^{bc}$ ve $w_0^{ac-d} = z_{-1}^{bc} e^{i\theta}$ olmak üzere $\theta = \dfrac{p\pi}{q}$, $q \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$ ise w_{4n+2} ve w_{4n+4} periyodiktir. Periyot $T \leq 2q$ dur.

İspat $(ac-b-d)^2 = 4bd$, $ac-b-d < -2$ koşulları Denklem (3.75)'te dikkate alınırsa karakteristik denkleminin kökleri $\lambda_1 = \lambda_2 = -\sqrt{|bd|} < 1$ dir. Elde edilen bu değer (3.84)-(3.87) denlemlerinde yerine yazıldığında

$$z_{2n+1} = \left(\frac{w_0^a}{z_{-1}^b}\right)^{\lambda_1^n} \left(\frac{w_0^{a\lambda_1}}{z_{-1}^{b(ac-b-\lambda_1)}}\right)^{n\lambda_1^{n-1}} = \left(\frac{w_0^a}{z_{-1}^b}\right)^{(-|\lambda_1|)^n} \left(\frac{w_0^{a\lambda_1}}{z_{-1}^{b(ac-b-\lambda_1)}}\right)^{n(-|\lambda_1|)^{n-1}}, \tag{3.137}$$

$$z_{2n+2} = \left(\frac{z_0^{ac-b}}{w_{-1}^{ad}}\right)^{\lambda_1^n} \left(\frac{z_0^{ac-b-\lambda_1}}{w_{-1}^{ad}}\right)^{n\lambda_1^n} = \left(\frac{z_0^{ac-b}}{w_{-1}^{ad}}\right)^{(-|\lambda_1|)^n} \left(\frac{z_0^{ac-b-\lambda_1}}{w_{-1}^{ad}}\right)^{n(-|\lambda_1|)^n}, \tag{3.138}$$

$$w_{2n+1} = \left(\frac{z_0^c}{w_{-1}^d}\right)^{\lambda_1^n} \left(\frac{z_0^{c\lambda_1}}{w_{-1}^{d(ac-d-\lambda_1)}}\right)^{n\lambda_1^{n-1}} = \left(\frac{z_0^c}{w_{-1}^d}\right)^{(-|\lambda_1|)^n} \left(\frac{z_0^{c\lambda_1}}{w_{-1}^{d(ac-d-\lambda_1)}}\right)^{n(-|\lambda_1|)^n}, \tag{3.139}$$

$$w_{2n+2} = \left(\frac{w_0^{ac-d}}{z_{-1}^{bc}}\right)^{\lambda_1^n} \left(\frac{w_0^{ac-d-\lambda_1}}{z_{-1}^{bc}}\right)^{n\lambda_1^n} = \left(\frac{w_0^{ac-d}}{z_{-1}^{bc}}\right)^{(-|\lambda_1|)^n} \left(\frac{w_0^{ac-d-\lambda_1}}{z_{-1}^{bc}}\right)^{n(-|\lambda_1|)^n} \tag{3.140}$$

elde edilir. (3.137)-(3.140) denklemleri dikkate alınarak teoremin öncüllerinin ispatları, Teorem 3.8' in öncüllerinin ispatlarına benzer şekilde yapılabileceğinden burada ispatlara yer verilmemiştir.

4. BÖLÜM

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$ ve başlangıç şartları z_{-1}, z_0, w_{-1}, w_0 kompleks sayılar olmak üzere $z_{n+1} = \frac{w_n^a}{z_{n-1}^b}$, $w_{n+1} = \frac{z_n^c}{w_{n-1}^d}$, $n \in \mathbb{N}_0$, şeklindeki ikinci mertebeden çarpılabilir fark denklem sisteminin a,b,c,d nin $b=0$, $d=0$, $bd \neq 0$ durumlarına göre çözümleri ve çözümlerinin asimptotik davranışları a,b,c,d ye özel şartlar verilerek ayrıntılı olarak incelenmiştir.

Bu tezde yapılan çalışmalar farklı mertebe ve farklı boyuttaki çarpılabilir fark denklem sistemlerine de uygulanabilir.

KAYNAKLAR

1. Stević, S, Alghamdi, M, A, Alotaibi, A, Elsayed, E, M, “Solvable product-type system of difference equations of second order”, *Electronic Journal of Differential Equations*, No. 169, pp. 1-20. ISSN: 1072-6691, Vol, 2015

2. Stević, S, Iričanin, B, Šamarda, Z, “Two-dimensional product-type system of difference equations solvable in closed form”, *Advances in Difference Equations,* 2016:253 doi:10.1186/s13662-016-0980-6, 2016

3. Stević, S, “Solvability of a class of product-type systems of difference equations”, *Advances in Difference Equations,* 2016:302 doi: 10.1186/s13662-016-1031, 2016

4. Stević, S, “Product-type system of difference equations with a complex structure of solutions”, *Advances in Difference Equations,* 2017:140 doi: 10.1186/s13662-017-1190-6, 2017

5. Stević, S, “Solution to the solvability problem for a class of product-type systems of difference equations”, *Advances in Difference Equations,* 2017:151 doi: 10.1186/s13662-017-1204-4, 2017

6. Stević, S, “Solvable product-type system of difference equations with two dependent variables”, *Advances in Difference Equations,* 2017:245 doi: 10.1186/s13662-017-1305-0, 2017

7. Stević, S, Alghamdi, M, A, Alotaibi, A, Shahzad, N, “Long-term behavior of positive solutions of a system of max-type difference equations”, *Applied Mathematics and Computation,* 235 567–574, 2014

8. Stević, S, Iričanin, B, Šamarda, Z, “Solvability of a close to symmetric system of difference equations”, *Electronic Journal of Differential Equations*, No. 159, pp. 1-13. ISSN: 1072-6691 Vol, 2016

9. Stević, S, “Solvable product-type system of difference equations whose associated polynomial is of the fourth order”, *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations,* No. 13, 1–29; doi: 10.14232/ejqtde.2017.1.13, 2017

10. Stević, S, “New solvable class of product-type systems of difference equations on the complex domain and a new method for proving the solvability”, *Electronic*

Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, No. 120, 1–19; doi: 10.14232/ejqtde.2016.1.120, 2016

11. Stević, S, “Product-type system of difference equations of second-order solvable in closed form”, *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, No. 56, 1–16; doi: 10.14232/ejqtde.2015.1.56, 2015

12. Stević, S, Ranković, D, ” On a practically solvable product-type system of difference equations of second order, *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, No. 56, 1–23; doi: 10.14232/ejqtde.2016.1.56, 2016

13. Stević, S, Iričanin, B, Šamarda, Z, “On a Solvable Class of Product-type Systems of Difference Equations”, *Filomat*, 31:19 6113–6129, 2017

14. Stević, S, Iričanin, B, Šamarda, Z, “On a product-type system of difference equations of second order solvable in closed form”, *Journal of Inequalities and Applications,* 2015:327 doi: 10.1186/s13660-015-0835-9, 2015

15. Stević, S, Alghamdi, M, A, Alotaibi, A, Shahzad, N, “Boundedness character of a max-type system of difference equations of second order”, *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, No. 45, 1–12, 2014

16. Stević, S, “Solvable Three-Dimensional Product-Type System of Difference Equations with Multipliers”, *Symmetry*, 9, 195; doi: 10.3390/sym9090195, 2017

17. Stević, S, “Solvability of the Class of Two-Dimensional Product-Type Systems of Difference Equations of Delay-Type (1, 3, 1, 1)”, *Symmetry*, 9, 200; doi:10.3390/sym9100200, 2017

18. Stević, S, Alghamdi, M, A, Alotaibi, A, Shahzad, N, “On positive solutions of a system of max-type difference equations”, *j. computational analysis and applications*, vol. 16, no.5, 906-915 copyright 2014 eudoxus press, llc, 2014

19. Bereketoğlu, H, Kutay, V, “Fark Denklemleri”, s1-206 *Gazi kitapevi,* 2012

20. Kulenović, M.R.S, Merino, O, “ *Chapter 2 Dynamics of Two-Dimensional Dynamical Systems”* Discrete Dynamical Systems and Difference Equations with Mathematica, A CRC Press Company s76-84, 2002

ÖZGEÇMİŞ

Fatih PİŞKİN 1979 yılında Nevşehir'de doğdu. İlkokulu Nevşehir Merkez İlköğretim Okulu'nda, Orta Okul ve Liseyi Nevşehir İmam Hatip Lisesi'nde tamamladı. 1997'de kazandığı Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümünden 2001 yılında mezun oldu. Aynı yıl Milli Eğitim Bakanlığında matematik öğretmeni olarak göreve başladı. Sırasıyla Nevşehir Kaymaklı Lisesi, Ürgüp Hayri Mehmet Ürgüplü Anadolu Lisesi ve Nevşehir 15 Temmuz Şehitleri Anadolu Lisesinde çalıştı.

2014 yılında Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalında yüksek lisans eğitimine başladı. Evli ve iki çocuk babası olup halen Nevşehir 15 Temmuz Şehitleri Anadolu Lisesi'nde matematik öğretmeni olarak görevine devam etmektedir.

Adres: Nevşehir 15 Temmuz Şehitleri Anadolu Lisesi
Nevşehir / Merkez
Telefon: 0 384 215 11 44
Belgegeçer: 0 384 215 11 45
e–posta : fatih-piskin@hotmail.com