

**T.C.  
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**B-SPLINE KOLLOKASYON YÖNTEMİ İLE  
GENERALIZED REGULARIZED LONG WAVE (GRLW)  
DENKLEMİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ**

**Tezi Hazırlayan  
Dilaver ŞAHİN**

**Tez Danışmanı  
Doç. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ**

**Matematik Anabilim Dalı  
Yüksek Lisans Tezi**

**Nisan 2018  
NEVŞEHİR**



**T.C.  
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**B-SPLINE KOLLOKASYON YÖNTEMİ İLE  
GENERALIZED REGULARIZED LONG WAVE (GRLW)  
DENKLEMİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ**

**Tezi Hazırlayan  
Dilaver ŞAHİN**

**Tez Danışmanı  
Doç. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ**

**Matematik Anabilim Dalı  
Yüksek Lisans Tezi**

**Nisan 2018  
NEVŞEHİR**

**Doç. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ** danışmanlığında **Dilaver ŞAHİN** tarafından hazırlanan " **B-Spline Kollokasyon yöntemi ile Generalized Regularized Long Wave (GRLW) denkleminin Yaklaşık Çözümleri** " başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

27/04/2018

### JÜRİ

Başkan : Doç. Dr. Ali GELİŞKEN



Üye : Doç. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ



Üye : Doç. Dr. Yasin YAZLIK




### ONAY:

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun **3/5/2018**..tarih ve **18-177**... sayılı kararı ile onaylanmıştır.



## TEZ BİLDİRİM SAYFASI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada yer alan bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu ve bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

  
Dilaver ŞAHİN

## TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim esnasında ve tez konusunun seçimi ile tezin çalışmaları süresince tüm bilgilerini benimle paylaşan, her türlü konuda desteğini benden esirgemeyen, tezimde büyük emeği olan ve gerçek bir dost olarak kazandığım Sayın Hocam Doç. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ' a,

Bu tez çalışmasına başlamama vesile olan ve hiçbir zaman emeklerini ödeyemeyeceğim, maddi ve manevi desteklerini benden esirgemeyen değerli babam Ziya ŞAHİN'E, annem Hatice ŞAHİN'e, eşim Ayşe ŞAHİN'e, teknik desteğinden dolayı kardeşim Recep ŞAHİN'e, ayrıca çocuklarım Yusuf Ziya, Hatice Zümranur ve Ahmet Selim'e,

Desteklerinden dolayı Doç. Dr. Yasin YAZLIK' a,

Teknik ve idari yardımlarından dolayı Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölüm Başkanlığı'na çok teşekkür ederim.

# B-SPLINE KOLLOKASYON YÖNTEMİ İLE GENERALIZED REGULARIZED LONG WAVE (GRLW) DENKLEMİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Dilaver ŞAHİN

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Nisan 2018

## ÖZET

Bu tez çalışmasında, GRLW (Genelleştirilmiş Düzenli Uzun Dalga) denkleminin yaklaşık çözümleri beşinci (kuintik) dereceden ve yedinci (septik) dereceden B-spline fonksiyonlar kullanılarak Kollokasyon yöntemi ile elde edilmiştir.

Bu tez çalışması beş bölümden oluşacak şekilde hazırlanmıştır. Tezin birinci bölümünde Sonlu Elemanlar Yöntemi, Spline Fonksiyonlar ve B- Spline Fonksiyonlar hakkında detaylı bilgiler verilmiştir.

Tezin ikinci bölümünde Kollokasyon yöntemi ile GRLW denklemi tanıtıldı, bunlar hakkında geniş bir literatür araştırması yapıldı. Tezin üçüncü ve dördüncü bölümü, çalışmanın esas amacına uygun olacak şekilde düzenlenmiştir.

Tezin üçüncü bölümünde GRLW denkleminin kuintik B-spline Kollokasyon sonlu eleman yöntemi ile yaklaşık çözümleri elde edilmiştir.

Tezin dördüncü bölümünde GRLW denkleminin septik B-spline Kollokasyon sonlu eleman yöntemi ile yaklaşık çözümleri bulunmuştur.

Tezin son bölümü olan beşinci bölümde ise elde edilen sonuçlar literatürde bulunan diğer sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

**Anahtar kelimeler:** GRLW denklemi, Kollokasyon yöntemi, Sonlu eleman yöntemi, Spline, B-spline, Solitary dalgalar

**Tez Danışman:** Doç. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ

**Sayfa sayısı:** 68

# NUMERICAL SOLUTIONS OF GENERALIZED REGULARIZED LONG WAVE (GRLW) EQUATION WITH B-SPLINE COLLOCATION METHOD

(M. Sc. Thesis)

Dilaver ŞAHİN

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ UNIVERSITY  
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

April 2018

## ABSTRACT

In this thesis study, numerical solutions of the GRLW (Generalized Regularized Long Wave) equation have been obtained by using fifth (quintic) and seventh (septic) B-spline collocation method.

This thesis consist of five parts. In the first part, the detailed information about finite element method, spline and B-spline functions is given.

In the second part, collocation method and GRLW equation are introduced and also a detailed literature investigation is made. The third and fourth parts of the study are designed according to its main aim.

In the third part, numerical solutions of the GRLW equation with quintic B-spline collocation finite element method have been obtained.

In the fourth part, numerical solutions of the GRLW equation with septic B-spline collocation finite element method have been obtained.

In the fifth part, the last part of the thesis, the obtained results have been compared with other results in the literature.

**Keywords:** *GRLW equation, Collocation method, Finite element method, Spline, B-spline, Solitary waves*

**Thesis Supervisor:** Assoc. Prof. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ

**Page Number:** 68



## İÇİNDEKİLER

|   |      |
|---|------|
| KABÜL VE ONAY SAYFASI .....                 | I    |
| TEZ BİLDİRİM SAYFASI .....                  | II   |
| TEŞEKKÜR .....                              | III  |
| ÖZET .....                                  | IV   |
| ABSTRACT.....                               | V    |
| İÇİNDEKİLER .....                           | VI   |
| TABLolar LİSTESİ.....                       | VIII |
| ŞEKİLLER LİSTESİ .....                      | X    |
| SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ .....       | XII  |
| 1. BÖLÜM                                    |      |
| GİRİŞ .....                                 | 1    |
| 1.1 Sonlu Elemanlar Yöntemi .....           | 1    |
| 1.2 Spline Fonksiyonlar .....               | 2    |
| 1.3 B-spline Fonksiyonlar .....             | 4    |
| 1.3.1 Lineer B-spline Fonksiyonlar.....     | 5    |
| 1.3.2 Kuadratik B-spline Fonksiyonlar ..... | 6    |
| 1.3.3 Kübik B-spline Fonksiyonlar .....     | 8    |
| 1.3.4 Kuartik B-spline Fonksiyonlar.....    | 9    |
| 1.3.5 Kuintik B-spline Fonksiyonlar.....    | 11   |
| 1.3.6 Sektik B-spline Fonksiyonlar .....    | 14   |
| 1.3.7 Septik B-spline Fonksiyonlar .....    | 16   |
| 2. BÖLÜM                                    |      |
| 2.1 Kollokasyon Yöntemi .....               | 19   |
| 2.2 GRLW Denklemi .....                     | 21   |

### 3. BÖLÜM

|  |    |
|--|----|
| GRLW DENKLEMİNİN KUİNTİK B-SPLINE KOLLOKASYON SONLU ELEMENLAR YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ ..... | 23 |
| 3.1 Thomas algoritması ile penta-diagonal matris sisteminin çözümü .....               | 28 |
| 3.2 Lineer kararlılık analizi .....  | 29 |
| 3.3 Sayısal hesaplamalar .....   | 30 |
| 3.3.1 Tek solitary dalğanın davranışı .....  | 31 |
| 3.3.2 İki solitary dalğanın girişimi .....   | 35 |
| 3.3.3 Ardışık dalğaların oluşumu .....   | 38 |

### 4. BÖLÜM

|   |    |
|---|----|
| GRLW DENKLEMİNİN SEPTİK B-SPLINE KOLLOKASYON SONLU ELEMENLAR YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ ..... | 41 |
| 4.1 Thomas algoritması ile septa-diagonal matris sisteminin çözümü .....              | 47 |
| 4.2 Lineer kararlılık analizi .....   | 48 |
| 4.3 Sayısal hesaplamalar .....  | 48 |
| 4.3.1 Tek solitary dalğanın davranışı .....   | 49 |
| 4.3.2 İki solitary dalğanın girişimi .....  | 55 |
| 4.3.3 Maxwellian başlangıç koşulu .....   | 59 |

### 5. BÖLÜM

|                         |    |
|-------------------------|----|
| SONUÇ VE ÖNERİLER ..... | 63 |
| KAYNAKLAR .....         | 64 |
| ÖZGEÇMİŞ .....          | 68 |

## TABLolar LİSTESİ

|  |    |
|--|----|
| Tablo 1. 1. $Q_m(x)$ ve $Q'_m(x)$ ' in düğüm noktalarındaki değerleri.....   | 7  |
| Tablo 1. 2. $\emptyset_m(x)$ , $\emptyset'_m(x)$ ve $\emptyset''_m(x)$ ' in düğüm noktalarındaki değerleri.....  | 8  |
| Tablo 1. 3. $\emptyset_m(x)$ , $\emptyset'_m(x)$ , $\emptyset''_m(x)$ ve $\emptyset'''_m(x)$ ' in düğüm noktalarındaki değerleri .....   | 10 |
| Tablo 1. 4. $\emptyset_m(x)$ , $\emptyset'_m(x)$ , $\emptyset''_m(x)$ , $\emptyset'''_m(x)$ ve $\emptyset_m^{(1v)}(x)$ ' in düğüm noktalarındaki değerleri .....   | 12 |
| Tablo 1. 5. $\emptyset_m(x)$ , $\emptyset'_m(x)$ , $\emptyset''_m(x)$ , $\emptyset'''_m(x)$ , $\emptyset_m^{(1v)}(x)$ ve $\emptyset_m^{(v)}(x)$ ' in düğüm noktalarındaki değerleri.....                           | 15 |
| Tablo 1. 6. $\emptyset_m(x)$ , $\emptyset'_m(x)$ , $\emptyset''_m(x)$ , $\emptyset'''_m(x)$ , $\emptyset_m^{(1v)}(x)$ , $\emptyset_m^{(v)}(x)$ ve $\emptyset_m^{(vi)}(x)$ ' in düğüm noktalarındaki değerleri..... | 17 |
| Tablo 3. 1. $p=2, 3, 4$ ; $c=0.1, 0.3$ , $h=0.2$ , $\Delta t=0.01$ ve $x \in [0, 100]$ için hesaplanan tek solitary dalğanın korunum sabitleri ve hata norm değerleri.....   | 31 |
| Tablo 3. 2. $p=6, 8, 10$ ; $c=0.1, 0.3$ , $h=0.1$ , $\Delta t=0.01$ ve $x \in [0, 100]$ için hesaplanan tek solitary dalğanın korunum sabitleri ve hata norm değerleri.....  | 32 |
| Tablo 3. 3. $p=2, 3, 4$ ; $t=20$ ve $x \in [0, 100]$ için hesaplanan tek solitary dalğanın farklı konum ve zaman adımıdaki hata norm değerleri .....   | 33 |
| Tablo 3. 4. $p=6, 8, 10$ ; $t=20$ ve $x \in [0, 100]$ için hesaplanan tek solitary dalğanın farklı konum ve zaman adımıdaki hata norm değerleri .....  | 34 |
| Tablo 3. 5 $p=2, 3, 4$ ve $x \in [0, 100]$ için hesaplanan tek solitary dalğanın sayısal sonuçlarının karşılaştırılması.....   | 34 |
| Tablo 3. 6. $p=2$ , genlikleri=2, 1, $h=0.2$ , $\Delta t=0.025$ ve $x \in [0, 250]$ için iki solitary dalğanın girişimine ait korunum sabitleri .....  | 36 |
| Tablo 3. 7. $p=3, 4$ ve genlikleri=2, 1 için iki solitary dalğanın girişimine ait korunum sabitleri .....  | 37 |

|  |    |
|--|----|
| Tablo 3. 8. $U_0 = 0.1, x_0 = 0, d = 5, \mu = 1/6, h = 0.1, \Delta t = 0.1$ ve $x \in [-36, 300]$ için ardışık dalgaların oluşumuna ait korunum sabitleri.....               | 39 |
| Tablo 4. 1. $p = 2, \text{gen.} = 1, h = 0.2, \Delta t = 0.025$ ve $x \in [0, 100]$ için hesaplanan tek solitary dalganın korunum sabitleri ve hata norm değerleri .....     | 50 |
| Tablo 4. 2. $p = 2, \text{gen.} = 0.54772, h = 0.1, \Delta t = 0.01$ ve $x \in [0, 100]$ için hesaplanan tek solitary dalganın korunum sabitleri ve hata norm değerleri..... | 50 |
| Tablo 4. 3. $p = 3, \text{gen.} = 1, h = 0.1, \Delta t = 0.025$ ve $x \in [0, 100]$ için hesaplanan tek solitary dalganın korunum sabitleri ve hata norm değerleri .....     | 51 |
| Tablo 4. 4. $p = 3, \text{gen.} = 0.6, h = 0.1, \Delta t = 0.01$ ve $x \in [0, 100]$ için hesaplanan tek solitary dalganın korunum sabitleri ve hata norm değerleri.....     | 52 |
| Tablo 4. 5. $p = 4, \text{gen.} = 1, h = 0.1, \Delta t = 0.025$ ve $x \in [0, 100]$ için hesaplanan tek solitary dalganın korunum sabitleri ve hata norm değerleri .....     | 52 |
| Tablo 4. 6. $p = 4, \text{gen.} = 0.6, h = 0.1, \Delta t = 0.01$ ve $x \in [0, 100]$ için hesaplanan tek solitary dalganın korunum sabitleri ve hata norm değerleri.....     | 53 |
| Tablo 4. 7. $p = 2, 3, 4; t = 10$ ve $x \in [0, 100]$ için hesaplanan tek solitary dalganın sayısal sonuçlarının karşılaştırılması .....                                     | 54 |
| Tablo 4. 8. $p = 2, \text{gen.} = 2.1, h = 0.2, \Delta t = 0.025$ ve $x \in [0, 250]$ için iki solitary dalganın girişimine ait korunum sabitleri.....                       | 57 |
| Tablo 4. 9. $p = 3, \text{gen.} = 2.1, h = 0.1, \Delta t = 0.01$ ve $x \in [0, 120]$ için iki solitary dalganın girişimine ait korunum sabitleri .....                       | 57 |
| Tablo 4.10. $p = 4, \text{gen.} = 2.1, h = 0.125, \Delta t = 0.01$ ve $x \in [0, 200]$ için iki solitary dalganın girişimine ait korunum sabitleri.....                      | 58 |
| Tablo 4.11. $h = 0.1, \Delta t = 0.01$ ve $x \in [-20, 60]$ için maxwellian başlangıç koşuluna ait ve korunum sabitleri.....   | 60 |

## ŞEKİLLER LİSTESİ

|   |    |
|---|----|
| Şekil 1. 1. Lineer B- spline Şekil Fonksiyonları. ....  | 6  |
| Şekil 1. 2. Kuadratik B-spline Şekil Fonksiyonları. ....  | 7  |
| Şekil 1. 3. Kübik B-spline Şekil Fonksiyonları. ....  | 9  |
| Şekil 1. 4. Kuartik B- spline Şekil Fonksiyonları. ....   | 11 |
| Şekil 1. 5. Kuintik B- spline Şekil Fonksiyonları. ....   | 13 |
| Şekil 1. 6. Sektik B-spline Şekil Fonksiyonları. ....   | 16 |
| Şekil 1. 7. Septik B-spline Şekil Fonksiyonları. ....   | 18 |
| Şekil 3. 1. $p = 2, 3, 4, 6, 8, 10, c = 0.1, x_0 = 40, x \in [0, 100]$ için tek solitary dalganın $t = 0, 10, 20$ 'deki davranışı. .... | 35 |
| Şekil 3. 2. $p = 3$ için iki solitary dalganın a) $t = 0$ , b) $t = 3$ , c) $t = 5$ , d) $t = 6$ 'daki hareketi. ....                   | 37 |
| Şekil 3. 3. $p = 4$ için iki solitary dalganın a) $t = 0$ , b) $t = 2$ , c) $t = 4$ , d) $t = 6$ 'daki hareketi. ....                   | 38 |
| Şekil 3. 4. $p = 2$ için a) $t = 50$ , b) $t = 200$ değerlerindeki ardışık dalgaların oluşumu. ....                                     | 39 |
| Şekil 3. 5. $p = 3$ için a) $t = 50$ , b) $t = 200$ değerlerindeki ardışık dalgaların oluşumu. ....                                     | 40 |
| Şekil 3. 6. $p = 4$ için a) $t = 50$ , b) $t = 200$ değerlerindeki ardışık dalgaların oluşumu. ....                                     | 40 |
| Şekil 4. 1. $p = 3$ , genliği = 1, $x_0 = 40, x \in [0, 100]$ için tek solitary dalganın $t = 0, 5, 10$ 'daki davranışı. ....           | 55 |
| Şekil 4. 2. $p = 4$ , genliği = 1, $x_0 = 40, x \in [0, 100]$ için tek solitary dalganın $t = 0, 5, 10$ 'daki davranışı. ....           | 55 |

|  |    |
|--|----|
| Şekil 4. 3. $p = 3$ için iki solitary dalganın a) $t = 0$ , b) $t = 3$ , c) $t = 5$ , d) $t = 6$ 'daki hareketi. ....  | 58 |
| Şekil 4. 4. $p = 4$ için iki solitary dalganın a) $t = 0$ , b) $t = 2$ , c) $t = 4$ , d) $t = 6$ 'daki hareketi .....  | 59 |
| Şekil 4. 5. $p = 3, t = 6$ ; a) $\mu = 0.1$ , b) $\mu = 0.05$ , c) $\mu = 0.025$ , d) $\mu = 0.01$ değerleri ve maxwellian başlangıç şartı için dalgaların oluşumu ..... | 61 |
| Şekil 4. 6. $p = 4, t = 6$ ; a) $\mu = 0.1$ , b) $\mu = 0.05$ , c) $\mu = 0.025$ , d) $\mu = 0.01$ değerleri ve maxwellian başlangıç şartı için dalgaların oluşumu ..... | 62 |

## SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

|  |   |
|--|---|
| <b>GRLW</b>                                      | Genelleştirilmiş düzenli uzun dalga         |
| <b>GEW</b>                                       | Genelleştirilmiş eşit genişlikli dalga      |
| <b>RLW</b>                                       | Düzenli uzun dalga                          |
| <b>GKdV</b>                                      | Genelleştirilmiş Korteweg-de Vries          |
| <b>KdV</b>                                       | Korteweg-de Vries                           |
| <b>KdVB</b>                                      | Korteweg-de Vries Burgers'                  |
| <b>GNLS</b>                                      | Genelleştirilmiş lineer olmayan Schrödinger |
| <b>CMKdV</b>                                     | Kompleks modifiye edilmiş Korteweg-de Vries |
| <b>BST</b>                                       | Boussinesq sistemi tipi                     |
| <b>K-S</b>                                       | Kuramoto-Sivashinsky                        |
| <b>W</b>   | Ağırlık fonksiyonu                          |
| <b><math>L_m(x)</math></b>                       | Lineer B-spline fonksiyon                   |
| <b><math>U_N</math></b>                          | Yaklaşık çözüm                              |
| <b><math>I_1</math></b>                          | Kütle                                       |
| <b><math>I_2</math></b>                          | Momentum                                    |
| <b><math>I_3</math></b>                          | Enerji                                      |
| <b><math>L_2</math> ve <math>L_\infty</math></b> | Hata normları                               |
| <b><math>\gg</math></b>                          | Çok daha büyük                              |
| <b><math>\ll</math></b>                          | Çok daha küçük                              |

# 1. BÖLÜM

## GİRİŞ

Bu bölümde, tezde kullanılacak olan sonlu elemanlar yöntemi ile spline ve B-spline fonksiyonlar hakkında temel bilgiler verilecektir.

### 1.1 Sonlu Elemanlar Yöntemi

Sonlu elemanlar kavramı ilk olarak Clough tarafından, 1960 yılında yayımlanan düzlem esnekliğindeki uygulamaları adlı makalesinde dile getirilmiştir [1]. Sonlu elemanlar yöntemi mühendislik ve öncelikle havacılık mühendisliği alanlarındaki değişik problemlerin çözümü için bir ihtiyaç olarak ortaya çıkmıştır. Sonlu elemanlar yöntemi karmaşık fiziksel özelliklere sahip problemleri daha basite indirgemek suretiyle, çözüm bulan bir yöntemdir. Günümüzde bilgisayarlardaki teknolojinin akıl almaz bir şekilde ilerlemesi sonlu elemanlar yönteminin çok hızlı bir şekilde gelişmesine olanak vermiştir. Uygulamalı matematikçiler, fizikçiler, mühendisler ve diğer bilim adamları bu yöntem ile ilgili çok sayıda çalışmalar yapmışlar ve yapmaya da devam etmektedirler [2].

Sonlu elemanlar yöntemlerinin; yapı mühendisliği, havacılık mühendisliği, uzay bilimleri, nükleer enerji mühendisliği, akışkanlar mekaniği, dinamik ve ısı iletim problemleri ve diğer mühendislik alanlarındaki problemlere başarılı bir şekilde uygulanabileceği görülmüştür. Sonlu elemanlar yönteminin diğer yöntemlere göre bazı avantajları aşağıda ifade edilmiştir [3];

- Düzensiz şekildeki yapıları ve diğer yöntemlerle modellenemeyen değişik karmaşık bölgeleri daha kolay bir şekilde modelleyebilmesi.
- Eleman denklemleri ayrı ayrı oluşturulduğundan değişik malzemelerden oluşan yapıları modelleyebilmesi.
- Çok değişik sınır şartlarıyla beraber kullanılabilmesi. Sınır koşullarının değişmesi halinde sonlu eleman modelinin değişmemesi.
- İhtiyaç duyulduğunda elemanların büyüklüklerinin değiştirilebilmesi.
- Sonlu eleman modelinin istenildiği zaman rahat bir şekilde değiştirilebilmesi.
- Bilgisayar programlama diline yatkın olması.



Sonlu elemanlar yönteminin bu avantajlarının yanında çözüm bölgesinin alt bölgelere ayrılması işleminin belirli bir tecrübeyi gerektirmesi, süreklilik şartlarının alt bölgelere uygulanmasında bir takım zorluklarla karşılaşılması ve bilgisayar programında veri girişi sırasında hatalar yapılması gibi dezavantajları da vardır [4].

Sonlu eleman yönteminin herhangi bir probleme uygulanmasında izlenecek temel adımlar aşağıda verilmiştir [5].

- Problemin çözüm bölgesinin ayrıklaştırılması (diskritizasyonu).
- Çözüm bölgesindeki tüm tipik elemanlar için eleman denklemlerinin türetilmesi.
- Verilen problemin denklemlerini elde etmek amacıyla eleman denklemlerinin birleştirilmesi.
- Problemin sınır şartlarının tatbik edilmesi.
- Birleştirilmiş denklemlerin çözümünün yapılması.
- Çözüm sonunda elde edilen sonuçların değerlendirilmesinin yapılması.

Sonlu elemanlar yönteminin integral formulasyonları genellikle varyasyonel ve ağırlıklı kalan yöntemleri olmak üzere iki farklı yoldan bulunabilir.

## 1.2 Spline Fonksiyonlar

Yaklaşım yöntemleri temel bilim dallarının birçok alanında ve mühendislikte olduğu gibi matematik alanında da oldukça çok kullanılmaktadır. Genelde iki tip yaklaşım problemlerinden söz edilebiliriz. Birinci tip problemlerde bu yöntemler, eldeki mevcut verileri kullanarak bilinmeyen fonksiyonları yaklaşık olarak bulmak için kullanılır. İkinci tip yaklaşım ise değişik fiziksel problemler için bir operatör denklem tarafından temsil edilen matematiksel modellemelerden oluşur. Bu tarz problemler, özdeğer ve özvektör problemleri, integro-diferansiyel denklemler, adi ve kısmi diferansiyel denklemler için sınır değer problemleri barındırmaktadır. Yukarıda belirtilen iki problem tipinde de, en iyi çözümü elde etmek için iki önemli sorunla karşılaşmak mümkündür;

1) Yaklaşım koşullarını yerine getirecek uygun fonksiyonların sınıfını seçmek

2) Yaklaşımın etkili olması için iyi bir yöntem seçmek.

Bu yaklaşım yöntemlerinden polinom yaklaşımları önemli bir yere sahiptir. Ancak polinom yaklaşımı her zaman istenilen hassasiyette bir sonuç elde etmemize imkan vermeyebilir. Genellikle köşeleri keskin olan, yüksek mertebeden türevlerde hızlı değişim gösteren fonksiyonlara ve bazı düzgün fonksiyonlara bile yüksek dereceden polinomlar ile arzulanan hassasiyette bir yaklaşım yapmak mümkün olmayabilir. Nokta sayısı arttıkça yaklaşımda kullanılacak olan polinomun derecesi de artacaktır. Bu durum ise yapılacak bazı hesaplamalarda hatalara sebep olacaktır. Kaldı ki istenilen fonksiyonun belirli bir aralığının değişik kademelerinde farklı özelliklere sahip olacağından fonksiyona tek bir eğri ile yaklaşmak hatalı sonuçlar verebilir. Bu nedenlerden dolayı arka arkaya gelen iki veri arasından yüksek dereceden olmayan birinci, ikinci, üçüncü veya arzulanan dereceden polinom fonksiyonlar ile yaklaşımların yapıldığı spline interpolasyon yöntemini kullanmak daha uygundur.

Yukarıda ki ifadelerden de anlaşılacağı üzere spline interpolasyon yaklaşımı gerçekte parçalı polinom yaklaşımıdır. Yani spline fonksiyonlar, veri aralıklarını değişik sonlu sayıda alt aralıklara bölerek, birbirini örtmeyen her bir alt aralıkta daha küçük dereceden polinomlarla yaklaşım yapma mantığına dayanmaktadır.

Spline fonksiyonlar ifadesi ilk defa Schoenberg tarafından 1946 yılında gündeme getirilmiştir [6]. 1960'lı yıllara kadar yavaş bir gelişim gösteren spline fonksiyonlara daha sonraki dönemlerde ilgi oldukça artmıştır. Bu ilginin en önemli bir nedeni, bir çok yapısal özelliklere sahip olması, etkili yaklaşım gücü ve bilgisayarlarla yapılan hesaplamalardaki sağladığı kolaylıklardır. Depolanması, işlenmesi ve kullanılması daha kolay olan spline fonksiyonların dijital bilgisayarlardaki gelişmeler ile çok daha önemli hale geldiği görülmüştür [7]. Spline fonksiyonların hesaplamalarda sağladığı kolaylıklardan dolayı; interpolasyon, eğri uydurma, diferansiyel denklemlerin çözümünde, karmaşık geometrik nesnelere matematiksel modellemesinde, eğri ve yüzey yaklaşımında sıkça kullanıldığı görülür.

Spline fonksiyonların sahip olduğu özellikler aşağıda verilmiştir [4].

- Spline fonksiyonlar smooth (düzgün) fonksiyonlardır,
- Spline fonksiyonların tamamı uygun tabanlara sahip sonlu boyutlu lineer uzaylardır,

- Spline fonksiyonların türevleri ve integralleri alınırsa yine spline fonksiyonlar elde edilir,
- Spline fonksiyonlar bilgisayarlarda işleme, hesaplama ve depolama açısından elverişli fonksiyonlardır,
- Nümerik analizde ve yaklaşım teorisinde spline fonksiyonların kullanılması halinde matrisler ortaya çıkacaktır. Bu matrisler uygun işaretleri ve determinant özellikleri açısından kolay hesaplanabilirler,
- Düşük dereceli spline fonksiyonlar oldukça esnekler ve polinomlardaki gibi keskin salınımlar sergilemezler,
- Yaklaşım işlemi sonucunda elde edilen işaretler, katsayılar v.b. gibi yapılar polinomların yapıları ile de ilgilidir,
- Spline fonksiyonlar kullanıldığında, kararlılık ve yakınsaklığın incelenmesi daha basit olacaktır,
- Spline fonksiyonlar ve türevlerinin yaklaşık olarak aynı anda hesaplanması mümkündür.
- Yeteri kadar alt bölgelere ayrılmış  $[a, b]$  aralığı üzerinde tanımlı olan her sürekli fonksiyon,  $n$ . dereceden spline fonksiyonu ile iyi bir biçimde temsil edilmesi mümkündür.

### 1.3 B- Spline Fonksiyonlar

Spline fonksiyonların hesaplanmasıyla lineer yada lineer olmayan sistemler elde edilir ki, bu sistemler arzulanan parametrelerin hesaplanmasına izin vermeyecek şekilde bazen uygun şartlı olmayabilir. Ayrıca Spline yaklaşımları elde etme sürecinde sayısal kararsızlıklarla karşılaşmak mümkündür. Belirli derece ve düzgünlükteki tüm spline fonksiyonlar, aynı derece ve düzgünlükteki B-spline fonksiyonların bir lineer kombinasyonu şeklinde temsil edilebileceğinden, bu tür zorluklar “B- spline” (basis spline) olarak isimlendirilen farklı bir spline fonksiyon sınıfı ile giderilebilir [8]. Bu tür fonksiyonlara B-spline fonksiyon denmesinin sebebi, aynı dereceye sahip bütün spline fonksiyonlar kümesi için bir taban oluşturmasındandır. B- spline fonksiyonlar sayısal hesaplamalar için oldukça kullanışlıdır.

### 1.3.1 Lineer B- Spline fonksiyonlar

$[a, b]$  aralığında düzgün bir parçalanışı  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$  olsun.  $h = x_{m+1} - x_m$  olmak üzere  $x_m$  düğüm noktalarında  $L_m(x)$  lineer B- spline fonksiyonlar  $m = 0(1)N$  noktaları için;

$$L_m = \frac{1}{h} \begin{cases} (x_{m+1} - x) - 2(x_m - x), & [x_{m-1}, x_m] \\ (x_{m+1} - x), & [x_m, x_{m+1}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (1.3.1.1)$$

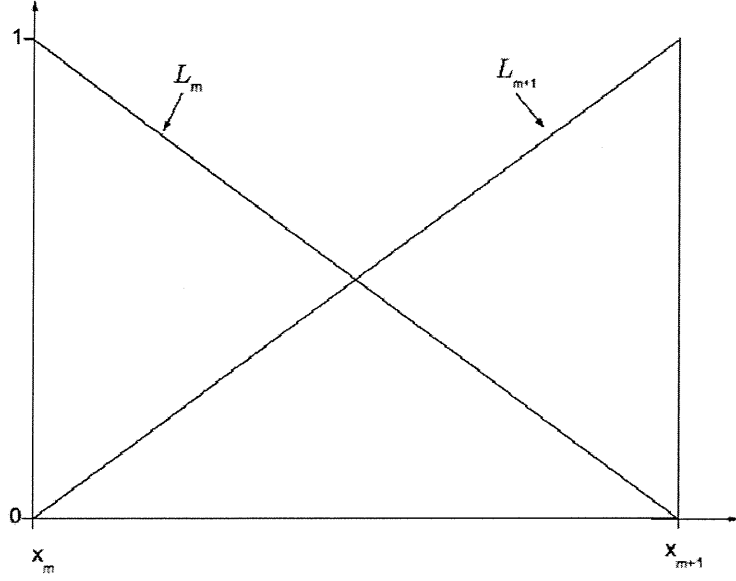
şeklinde tanımlanır [9].  $\{L_0(x), L_1(x), \dots, L_N(x)\}$  kümesi  $a \leq x \leq b$  aralığında tanımlı fonksiyonlar için bir baz oluşturur. Lineer B- spline fonksiyon ve türevi  $[x_{m-1}, x_{m+1}]$  aralığı dışında ki değeri sıfırdır. Şekil 1.1 de görüldüğü üzere her bir  $L_m$  B- spline fonksiyonu  $[x_{m-1}, x_{m+1}]$  aralığında arda arda gelen iki elemanı örtmekte ve dolayısıyla her bir  $[x_m, x_{m+1}]$  sonlu eleman  $L_m, L_{m+1}$  gibi iki lineer B- spline fonksiyonu tarafından örtülmektedir [4]. Bir  $[x_m, x_{m+1}]$  aralığı

$$h\xi = x - x_m \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (1.3.1.2)$$

lokal koordinat dönüşümü yardımıyla  $[0, 1]$  aralığına dönüşür. Böylelikle lineer B- spline fonksiyonlar  $[0, 1]$  aralığında  $\xi$  türünden,

$$\begin{aligned} L_m &= 1 - \xi \\ L_{m+1} &= \xi \end{aligned} \quad (1.3.1.3)$$

şeklinde bulunur.



Şekil 1.1. Linear B- spline şekil fonksiyonları

### 1. 3. 2 Kuadratik B- Spline fonksiyonlar

$[a, b]$  aralığının bir düzgün parçalanışı  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$  olsun.  $h = x_{m+1} - x_m$  olmak üzere  $x_m$  düğüm noktalarında  $Q_m(x)$  kuadratik B- spline fonksiyonlar  $m = -1(1)N$  noktaları için;

$$Q_m(x) = \frac{1}{h^2} \begin{cases} (x_{m+2} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^2 + 3(x_m - x)^2, & [x_{m-1}, x_m] \\ (x_{m+2} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^2, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+2} - x)^2, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (1.3.2.1)$$

şeklinde tanımlanır [9].  $\{Q_{-1}(x), Q_0(x), \dots, Q_N(x)\}$  kümesi  $a \leq x \leq b$  aralığında tanımlı fonksiyonlar için bir baz oluşturur. Kuadratik B- spline  $Q_m(x)$  fonksiyonu ve türevi  $[x_{m-1}, x_{m+2}]$  aralığı dışında sıfırdır. Şekil 1.2' de görüldüğü üzere her bir  $Q_m(x)$  kuadratik B- spline fonksiyonu bu aralıkta ard arda gelen üç elamanı örtmekte, dolayısıyla her bir  $[x_m, x_{m+1}]$  sonlu eleman  $Q_{m-1}, Q_m, Q_{m+1}$  gibi üç kuadratik B- spline fonksiyon tarafından örtülür [4].  $Q_m(x)$  ve birinci mertebeden türevinin düğüm noktalarındaki değerleri aşağıdaki Tablo 1.1' de gösterildi.

Tablo 1.1.  $Q_m(x)$  ve  $Q'_m(x)$  ' in düğüm noktalarındaki değerleri

| $x$     | $x_{m-1}$ | $x_m$ | $x_{m+1}$ | $x_{m+2}$ |
|---------|-----------|-------|-----------|-----------|
| $Q_m$   | 0         | 1     | 1         | 0         |
| $hQ'_m$ | 0         | 2     | -2        | 0         |

Bir  $[x_m, x_{m+1}]$  aralığı, (1.3.1.2) lokal koordinat dönüşümü yardımıyla  $[0, 1]$  aralığına dönüşür. Böylelikle kuadratik B- spline fonksiyonlar  $[0, 1]$  aralığında  $\xi$  türünden,

$$Q_{m-1} = (1 - \xi)^2,$$

$$Q_m = 1 + 2\xi - 2\xi^2,$$

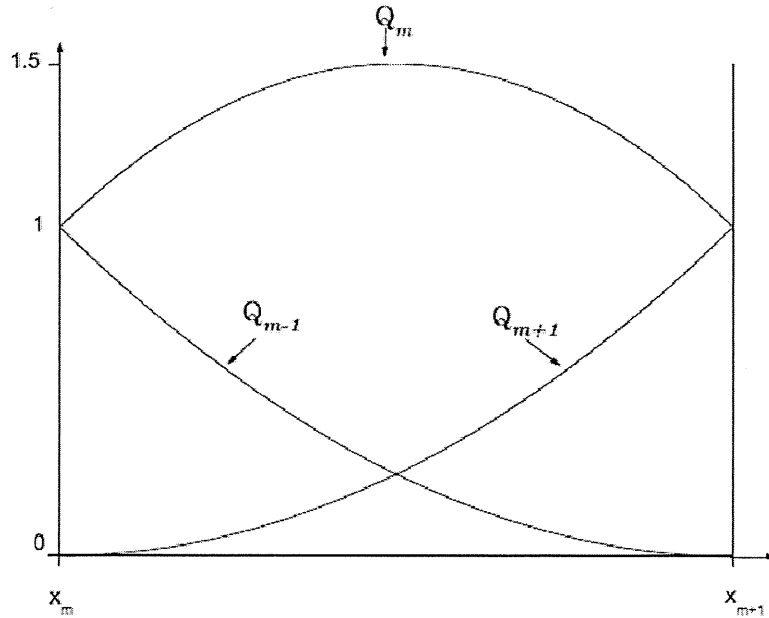
$$Q_{m+1} = \xi^2 \quad (1.3.2.2)$$

şeklinde bulunur. (1.3.2.2) kuadratik B-spline fonksiyonlar kullanılarak  $x_m$  düğüm noktalarında  $U_N$  yaklaşık çözümü ve  $x'$  e göre birinci mertebeden türevi  $\delta_m$  eleman parametreleri cinsinden,

$$U_N(x_m, t) = U_m = \delta_{m-1} + \delta_m ,$$

$$U'_m = \frac{2}{h} (-\delta_{m-1} + \delta_m) \quad (1.3.2.3)$$

biçiminde yazılabilir.



Şekil 1.2. Kuadratik B-spline şekil fonksiyonları

### 1.3.3 Kübik B- Spline fonksiyonlar

$[a, b]$  aralığının bir düzgün parçalanışı  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$  olsun.  $h = x_{m+1} - x_m$  olmak üzere  $x_m$  düğüm noktalarında  $\Phi_m(x)$  kübik B- spline fonksiyonlar  $m = -1(1)N + 1$  noktaları için;

$$\Phi_m(x) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (x - x_{m-2})^3, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ h^3 + 3h^2(x - x_{m-1}) + 3h(x - x_{m-1})^2 - 3(x - x_{m-1})^3, & [x_{m-1}, x_m] \\ h^3 + 3h^2(x_{m+1} - x) + 3h(x_{m+1} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^3, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+2} - x)^3, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (1.3.3.1)$$

şeklinde ifade edilir [9].  $\{\Phi_{-1}(x), \Phi_0(x), \dots, \Phi_N(x), \Phi_{N+1}(x)\}$  kümesi  $a \leq x \leq b$  aralığında tanımlı fonksiyonlar için bir baz oluşturur. Kübik B- spline  $\Phi_m(x)$  fonksiyonu ve türevleri  $[x_{m-2}, x_{m+2}]$  aralığı dışında sıfırdır. Şekil 1.3'te görüldüğü üzere her bir  $\Phi_m(x)$  kübik B-spline fonksiyonu  $[x_{m-2}, x_{m+2}]$  aralığında ard arda gelen dört elamanı örtmekte ve dolayısıyla her bir  $[x_m, x_{m+1}]$  aralığındaki sonlu eleman  $\Phi_{m-1}, \Phi_m, \Phi_{m+1}, \Phi_{m+2}$  gibi dört kübik B-spline fonksiyonu tarafından örtülmektedir [4].  $\Phi_m(x)$  ve ikinci mertebeye kadar olan  $\Phi'_m(x)$  ve  $\Phi''_m(x)$  türevlerinin düğüm noktalarındaki değerleri aşağıdaki Tablo 1. 2' de gösterildi.

Tablo 1.2.  $\Phi_m(x), \Phi'_m(x)$  ve  $\Phi''_m(x)$  ' in düğüm noktalarındaki değerleri

| $x$           | $x_{m-2}$ | $x_{m-1}$ | $x_m$ | $x_{m+1}$ | $x_{m+2}$ |
|---------------|-----------|-----------|-------|-----------|-----------|
| $\Phi_m$      | 0         | 1         | 4     | 1         | 0         |
| $h\Phi'_m$    | 0         | 3         | 0     | -3        | 0         |
| $h^2\Phi''_m$ | 0         | 6         | -12   | 6         | 0         |

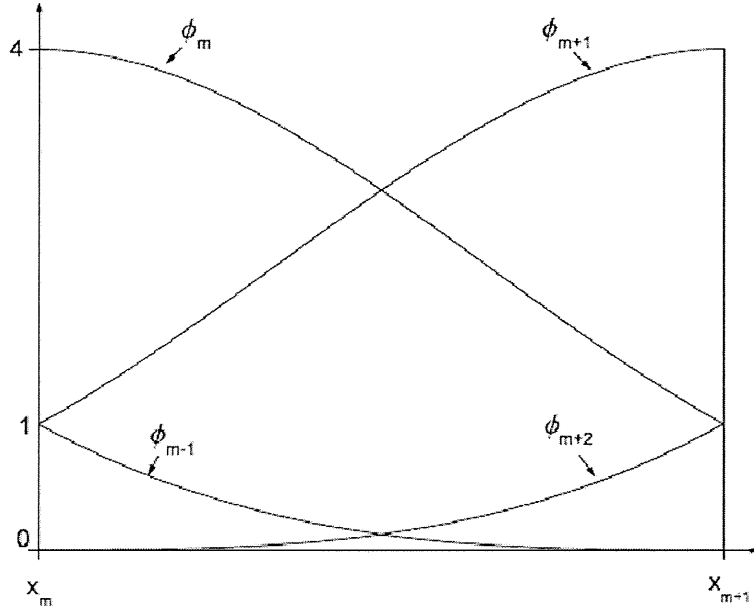
Bir  $[x_m, x_{m+1}]$  sonlu eleman (1.3.1.2) lokal koordinat dönüşümü vasıtasıyla  $[0, 1]$  aralığına dönüşecektir. Böylelikle bir  $[x_m, x_{m+1}]$  aralığını örten  $\Phi_{m-1}, \Phi_m, \Phi_{m+1}, \Phi_{m+2}$  kübik B- spline fonksiyonlar  $[0, 1]$  aralığında  $\xi$  türünden,

$$\begin{aligned}
\phi_{m-1} &= (1 - \xi)^3, \\
\phi_m &= 1 + 3(1 - \xi) + 3(1 - \xi)^2 - 3(1 - \xi)^3, \\
\phi_{m+1} &= 1 + 3\xi + 3\xi^2 - 3\xi^3, \\
\phi_{m+2} &= \xi^3
\end{aligned} \tag{1.3.3.2}$$

şeklinde bulunur. (1.3.3.2) kübik B- spline fonksiyonlar kullanılarak  $x_m$  düğüm noktasında  $U_N$  yaklaşık çözümü ve  $x'e$  göre ikinci mertebeye kadar olan türevleri  $\delta_m$  eleman parametreleri cinsinden,

$$\begin{aligned}
U_N(x_m, t) &= U_m = \delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1}, \\
U'_m &= \frac{3}{h}(-\delta_{m-1} + \delta_{m+1}), \\
U''_m &= \frac{6}{h^2}(\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1})
\end{aligned} \tag{1.3.3.3}$$

biçiminde yazılabilir.



Şekil 1.3. Kübik B-spline şekil fonksiyonları

#### 1. 3. 4 Kuartik B- Spline fonksiyonlar

$[a, b]$  aralığının bir düzgün parçalanışı  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$  olsun.

$h = x_{m+1} - x_m$  olmak üzere  $x_m$  düğüm noktalarında  $\phi_m(x)$  kuartik B- spline fonksiyonlar  $m = -2(1)N + 1$  noktaları için;



$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^4} \begin{cases} (x - x_{m-2})^4, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ (x - x_{m-2})^4 - 5(x - x_{m-1})^4, & [x_{m-1}, x_m] \\ (x - x_{m-2})^4 - 5(x - x_{m-1})^4 + 10(x - x_m)^4, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+3} - x)^4 - 5(x_{m+2} - x)^4, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ (x_{m+3} - x)^4, & [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (1.3.4.1)$$

şeklinde tanımlanır [9].  $\{\phi_{-2}(x), \phi_{-1}(x), \dots, \phi_N(x), \phi_{N+1}(x)\}$  kümesi  $a \leq x \leq b$  aralığında tanımlı fonksiyonlar için bir baz oluşturur. Kuartik B- spline  $\phi_m(x)$  fonksiyonu ve türevleri  $[x_{m-2}, x_{m+3}]$  aralığı dışında sıfırdır. Şekil 1. 4' de görüldüğü üzere her bir  $\phi_m(x)$  kuartik B- spline fonksiyonu  $[x_{m-2}, x_{m+2}]$  aralığında ard arda gelen beş elamanı örtmekte ve dolayısıyla her bir  $[x_m, x_{m+1}]$  sonlu eleman  $\phi_{m-2}, \phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}, \phi_{m+2}$  gibi beş kuartik B- spline fonksiyonu tarafından örtülmektedir [4].  $\phi_m(x)$  ve üçüncü mertebeye kadar olan  $\phi'_m(x), \phi''_m(x)$  ve  $\phi'''_m(x)$  türevlerinin düğüm noktalarındaki değerleri aşağıdaki Tablo 1.3' te gösterildi.

Tablo 1.3.  $\phi_m(x), \phi'_m(x), \phi''_m(x)$  ve  $\phi'''_m(x)$  ' in düğüm noktalarındaki değerleri

| $x$            | $x_{m-2}$ | $x_{m-1}$ | $x_m$ | $x_{m+1}$ | $x_{m+2}$ | $x_{m+3}$ |
|----------------|-----------|-----------|-------|-----------|-----------|-----------|
| $\phi_m$       | 0         | 1         | 11    | 11        | 1         | 0         |
| $h\phi'_m$     | 0         | 4         | 12    | -12       | -4        | 0         |
| $h^2\phi''_m$  | 0         | 12        | -12   | -12       | 12        | 0         |
| $h^3\phi'''_m$ | 0         | 24        | -72   | 72        | -24       | 0         |

Bir  $[x_m, x_{m+1}]$  sonlu eleman (1.3.1.2) lokal koordinat dönüşümü yardımıyla  $[0, 1]$  aralığına dönüşür. Böylelikle bir  $[x_m, x_{m+1}]$  aralığını örten  $\phi_{m-2}, \phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}, \phi_{m+2}$  kuartik B- spline fonksiyonlar  $[0, 1]$  aralığında  $\xi$  türünden,

$$\begin{aligned} \phi_{m-2} &= 1 - 4\xi + 6\xi^2 - 4\xi^3 + \xi^4, \\ \phi_{m-1} &= 11 - 12\xi - 6\xi^2 + 12\xi^3 - \xi^4, \\ \phi_m &= 11 + 12\xi - 6\xi^2 - 12\xi^3 + \xi^4 \\ \phi_{m+1} &= 1 + 4\xi + 6\xi^2 + 4\xi^3 - \xi^4, \\ \phi_{m+2} &= \xi^4 \end{aligned} \quad (1.3.4.2)$$

şeklinde bulunur. (1.3.4.2) kuartik B- spline fonksiyonlar kullanılarak  $x_m$  düğüm noktasında  $U_N$  yaklaşık çözümü ve  $x'$  e göre üçüncü mertebeye kadar olan türevleri  $\delta_m$  eleman parametreleri cinsinden,

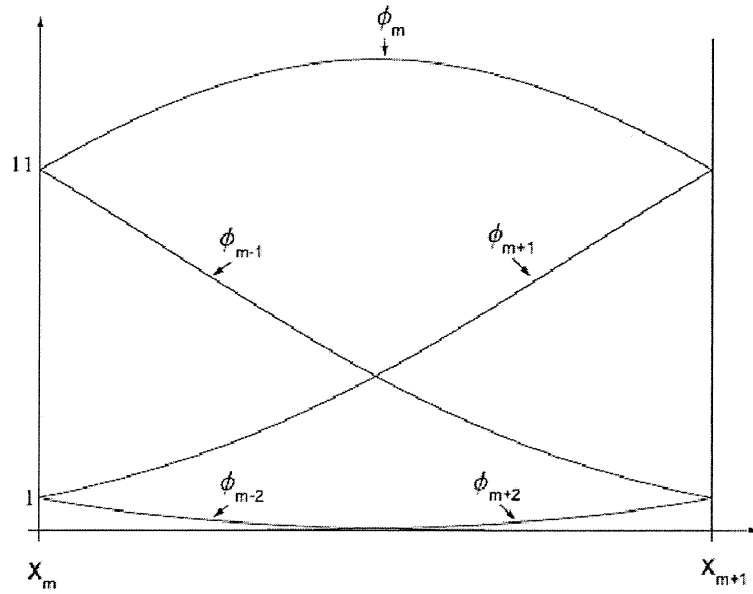
$$U_N(x_m, t) = U_m = \delta_{m-2} + 11\delta_{m-1} + 11\delta_m + \delta_{m+1},$$

$$U'_m = \frac{4}{h}(-\delta_{m-2} - 3\delta_{m-1} + 3\delta_m + \delta_{m+1}),$$

$$U''_m = \frac{1}{h^2}(\delta_{m-2} - \delta_{m-1} - \delta_m + \delta_{m+1}),$$

$$U'''_m = \frac{24}{h^3}(-\delta_{m-2} + 3\delta_{m-1} - 3\delta_m + \delta_{m+1}) \quad (1.3.4.3)$$

biçiminde yazılabilir.



Şekil 1.4. Kuartik B- spline şekil fonksiyonları

### 1. 3. 5 Kuintik B- Spline fonksiyonlar

$[a, b]$  aralığının bir düzgün parçalanışı  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$  olsun.  $h = x_{m+1} - x_m$  olmak üzere  $x_m$  düğüm noktalarında  $\phi_m(x)$  kuintik B- spline fonksiyonlar  $m = -2(1)N + 2$  noktaları için;

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^5} \begin{cases} (x - x_{m-3})^5, & [x_{m-3}, x_{m-2}] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5, & [x_{m-1}, x_m] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5 + 20(x - x_m)^5, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5 - 20(x - x_m)^5 + 15(x - x_{m+1})^5, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5 - 20(x - x_m)^5 + 15(x - x_{m+1})^5 - 6(x - x_{m+2})^5, & [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (1.3.5.1)$$

şeklinde tanımlanır [9].  $\{\phi_{-2}(x), \phi_{-1}(x), \dots, \phi_N(x), \phi_{N+1}(x), \phi_{N+2}(x)\}$  kümesi  $a \leq x \leq b$  aralığında tanımlı fonksiyonlar için bir baz oluşturur. Kuintik B- spline  $\phi_m(x)$  fonksiyonu ve türevleri  $[x_{m-3}, x_{m+3}]$  aralığı dışında sıfırdır. Şekil 1. 5' te görüldüğü üzere her bir  $\phi_m(x)$  kuintik B- spline fonksiyonu  $[x_{m-3}, x_{m+3}]$  aralığında ard arda gelen altı elamanı örtmekte ve dolayısıyla her bir  $[x_m, x_{m+1}]$  sonlu eleman  $\phi_{m-2}, \phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}, \phi_{m+2}, \phi_{m+3}$  gibi altı kuintik B- spline fonksiyonu tarafından örtülmektedir [4].  $\phi_m(x)$  ve dördüncü mertebeye kadar olan  $\phi'_m(x), \phi''_m(x), \phi'''_m(x)$  ve  $\phi_m^{(iv)}(x)$  türevlerinin düğüm noktalarındaki değerleri aşağıdaki Tablo 1. 4' de gösterildi.

Tablo 1.4.  $\phi_m(x), \phi'_m(x), \phi''_m(x), \phi'''_m(x)$  ve  $\phi_m^{(iv)}(x)$  'in düğüm noktalarındaki değerleri

| $x$                | $x_{m-3}$ | $x_{m-2}$ | $x_{m-1}$ | $x_m$ | $x_{m+1}$ | $x_{m+2}$ | $x_{m+3}$ |
|--------------------|-----------|-----------|-----------|-------|-----------|-----------|-----------|
| $\phi_m$           | 0         | 1         | 26        | 66    | 26        | 1         | 0         |
| $h\phi'_m$         | 0         | 5         | 50        | 0     | -50       | -5        | 0         |
| $h^2\phi''_m$      | 0         | 20        | 40        | -120  | 40        | 20        | 0         |
| $h^3\phi'''_m$     | 0         | 60        | -120      | 0     | 120       | -60       | 0         |
| $h^4\phi_m^{(iv)}$ | 0         | 120       | -480      | 720   | -480      | 120       | 0         |

Bir  $[x_m, x_{m+1}]$  sonlu eleman (1.3.1.2) lokal koordinat dönüşümü yardımıyla  $[0, 1]$  aralığına dönüşecektir. Böylelikle kuintik B-spline fonksiyonlar  $[0, 1]$  aralığında  $\xi$  türünden,

$$\begin{aligned}
\phi_{m-2} &= 1 - 5\xi + 10\xi^2 - 10\xi^3 + 5\xi^4 - \xi^5, \\
\phi_{m-1} &= 26 - 50\xi + 20\xi^2 + 20\xi^3 - 20\xi^4 + 5\xi^5, \\
\phi_m &= 66 - 60\xi^2 + 30\xi^4 - 10\xi^5, \\
\phi_{m+1} &= 26 + 50\xi + 20\xi^2 - 20\xi^3 - 20\xi^4 + 10\xi^5, \\
\phi_{m+2} &= 1 + 5\xi + 10\xi^2 + 10\xi^3 + 5\xi^4 - 5\xi^5, \\
\phi_{m+3} &= \xi^5
\end{aligned} \tag{1.3.5.2}$$

şeklinde bulunur. (1.3.5.2) kuintik B- spline fonksiyonlar kullanılarak  $x_m$  düğüm noktasında  $U_N$  yaklaşık çözümü ve  $x'$ e göre dördüncü mertebeye kadar olan türevleri  $\delta_m$  eleman parametreleri cinsinden,

$$U_N(x_m, t) = U_m = \delta_{m-2} + 26\delta_{m-1} + 66\delta_m + 26\delta_{m+1} + \delta_{m+2},$$

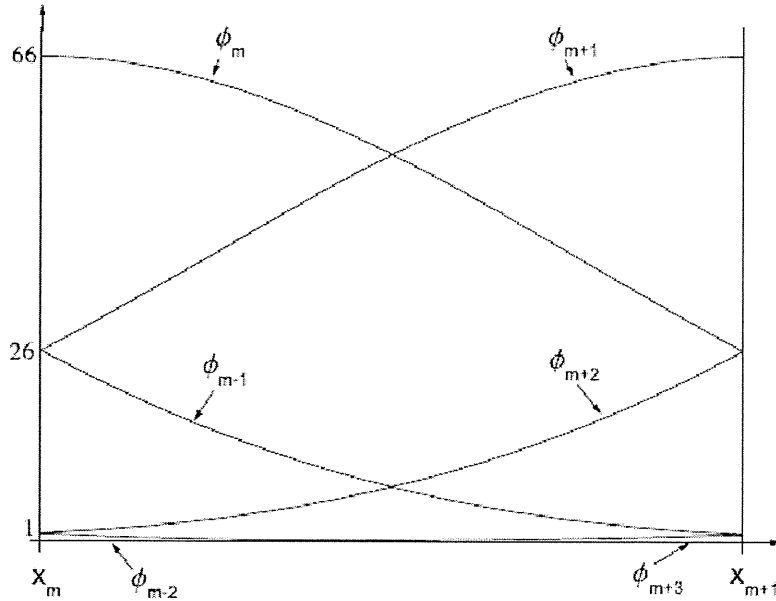
$$U'_m = \frac{5}{h}(-\delta_{m-2} - 10\delta_{m-1} + 10\delta_{m+1} + \delta_{m+2}),$$

$$U''_m = \frac{20}{h^2}(\delta_{m-2} + 2\delta_{m-1} - 6\delta_m + 2\delta_{m+1} + \delta_{m+2}),$$

$$U'''_m = \frac{60}{h^3}(-\delta_{m-2} + 2\delta_{m-1} - 2\delta_{m+1} + \delta_{m+2}),$$

$$U_m^{(iv)} = \frac{120}{h^4}(\delta_{m-2} - 4\delta_{m-1} + 6\delta_m - 4\delta_{m+1} + \delta_{m+2}) \tag{1.3.5.3}$$

şeklinde yazılabilir.



Şekil 1.5. Kuintik B- spline şekil fonksiyonları

### 1.3.6 Sektik B- Spline fonksiyonlar

$[a, b]$  aralığının bir düzgün parçalanışı  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$  olsun.  $h = x_{m+1} - x_m$  olmak üzere  $x_m$  düğüm noktalarında  $\phi_m(x)$  sektik B- spline fonksiyonlar  $m = -3(1)N + 2$  noktaları için;

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^6} \begin{cases} (x - x_{m-3})^6, & [x_{m-3}, x_{m-2}] \\ (x - x_{m-3})^6 - 7(x - x_{m-2})^6, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ (x - x_{m-3})^6 - 7(x - x_{m-2})^6 + 21(x - x_{m-1})^6, & [x_{m-1}, x_m] \\ (x - x_{m-3})^6 - 7(x - x_{m-2})^6 + 21(x - x_{m-1})^6 - 35(x - x_m)^6, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x - x_{m+4})^6 - 7(x - x_{m+3})^6 + 21(x - x_{m+2})^6, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ (x - x_{m+4})^6 - 7(x - x_{m+3})^6, & [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ (x - x_{m+4})^6, & [x_{m+3}, x_{m+4}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (1.3.6.1)$$

şeklinde tanımlanır [9].  $\{\phi_{-3}(x), \phi_{-2}(x), \dots, \phi_N(x), \phi_{N+1}(x), \phi_{N+2}(x)\}$  kümesi  $a \leq x \leq b$  aralığında tanımlı fonksiyonlar için bir baz oluşturur. Sektik B- spline  $\phi_m(x)$  fonksiyonu ve türevleri  $[x_{m-3}, x_{m+4}]$  aralığı dışında sıfırdır. Şekil 1. 6' da görüldüğü üzere her bir  $\phi_m(x)$  sektik B-spline fonksiyonu  $[x_{m-3}, x_{m+4}]$  aralığında ard arda gelen yedi elamanı örtmekte ve dolayısıyla her bir  $[x_m, x_{m+1}]$  sonlu eleman  $\phi_{m-3}, \phi_{m-2}, \phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}, \phi_{m+2}$  ve  $\phi_{m+3}$  gibi yedi sektik B-spline fonksiyonu tarafından örtülmektedir [4].  $\phi_m(x)$  ve beşinci mertebeye kadar olan  $\phi'_m(x), \phi''_m(x), \phi'''_m(x), \phi^{(iv)}_m(x)$  ve  $\phi^{(v)}_m(x)$  türevlerinin düğüm noktadaki değerleri aşağıdaki Tablo 1. 5' te gösterildi. Bir  $[x_m, x_{m+1}]$  sonlu eleman (1.3.1.2) lokal koordinat dönüşümü yardımıyla  $[0, 1]$  aralığına dönüşür.

Tablo 1.5.  $\phi_m(x)$ ,  $\phi'_m(x)$ ,  $\phi''_m(x)$ ,  $\phi'''_m(x)$ ,  $\phi_m^{(iv)}(x)$  ve  $\phi_m^{(v)}(x)$  'in düğüm noktalarındaki değerleri

| $x$                | $x_{m-3}$ | $x_{m-2}$ | $x_{m-1}$ | $x_m$ | $x_{m+1}$ | $x_{m+2}$ | $x_{m+3}$ | $x_{m+4}$ |
|--------------------|-----------|-----------|-----------|-------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $\phi_m$           | 0         | 1         | 57        | 302   | 302       | 57        | 1         | 0         |
| $h\phi'_m$         | 0         | 6         | 150       | 240   | -240      | -150      | -6        | 0         |
| $h^2\phi''_m$      | 0         | 30        | 270       | -300  | -300      | 270       | 30        | 0         |
| $h^3\phi'''_m$     | 0         | 120       | 120       | -960  | 960       | -120      | -120      | 0         |
| $h^4\phi_m^{(iv)}$ | 0         | 360       | -1080     | 720   | 720       | -1080     | 360       | 0         |
| $h^5\phi_m^{(v)}$  | 0         | 720       | -3600     | 7200  | 7200      | 3600      | -720      | 0         |

Böylelikle sektik B- spline fonksiyonlar  $[0, 1]$  aralığında  $\xi$  türünden,

$$\phi_{m-3} = 1 - 6\xi + 15\xi^2 - 20\xi^3 + 15\xi^4 - 6\xi^5 + \xi^6,$$

$$\phi_{m-2} = 57 - 150\xi + 135\xi^2 - 20\xi^3 - 45\xi^4 + 30\xi^5 - 6\xi^6,$$

$$\phi_{m-1} = 302 + 240\xi - 150\xi^2 + 160\xi^3 + 30\xi^4 - 60\xi^5 + 15\xi^6,$$

$$\phi_m = 302 + 240\xi - 150\xi^2 - 160\xi^3 + 30\xi^4 + 60\xi^5 - 20\xi^6,$$

$$\phi_{m+1} = 57 + 150\xi + 135\xi^2 + 20\xi^3 - 45\xi^4 - 30\xi^5 + 15\xi^6,$$

$$\phi_{m+2} = 1 + 6\xi + 15\xi^2 + 20\xi^3 + 15\xi^4 + 6\xi^5 - 6\xi^6,$$

$$\phi_{m+3} = \xi^6$$

(1.3.6.2)

şeklinde bulunur. (1.3.6.2) sektik B- spline fonksiyonlar kullanılarak  $x_m$  düğüm noktasında  $U_N$  yaklaşık çözümü ve  $x'$ e göre beşinci mertebeye kadar olan türevleri  $\delta_m$  eleman parametreleri cinsinden,

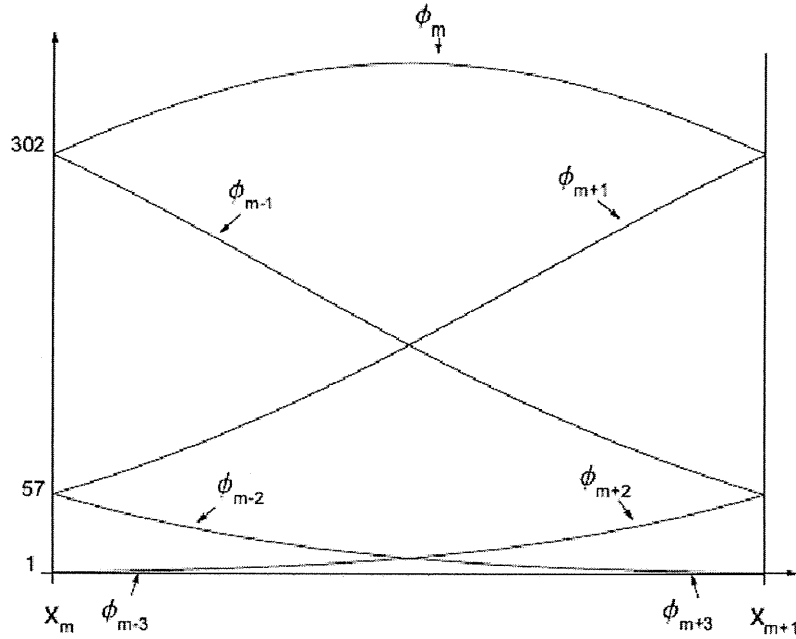
$$U_N(x_m, t) = U_m = \delta_{m-3} + 57\delta_{m-2} + 302\delta_{m-1} + 302\delta_m + 57\delta_{m+1} + \delta_{m+2},$$

$$U'_m = \frac{6}{h}(-\delta_{m-3} - 25\delta_{m-2} - 40\delta_{m-1} + 40\delta_m + 25\delta_{m+1} + \delta_{m+2}),$$

$$U''_m = \frac{30}{h^2}(\delta_{m-3} + 9\delta_{m-2} - 10\delta_{m-1} - 10\delta_m + 9\delta_{m+1} + \delta_{m+2}),$$

$$\begin{aligned}
U_m''' &= \frac{120}{h^3} (-\delta_{m-3} - \delta_{m-2} + 8\delta_{m-1} - 8\delta_m + \delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \\
U_m^{(iv)} &= \frac{360}{h^4} (\delta_{m-3} - 3\delta_{m-2} + 2\delta_{m-1} + 2\delta_m - 3\delta_{m+1} + \delta_{m+2}) \\
U_m^{(v)} &= \frac{720}{h^5} (-\delta_{m-3} + 5\delta_{m-2} - 10\delta_{m-1} + 10\delta_m - 5\delta_{m+1} + \delta_{m+2}) \quad (1.3.6.3)
\end{aligned}$$

biçiminde ifade edilebilir.



Şekil 1.6. Sektik B-spline şekil fonksiyonları

### 1.3.7 Sektik B- Spline fonksiyonlar

$[a, b]$  aralığının bir düzgün parçalanışı  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$  olsun.

$h = x_{m+1} - x_m$  olmak üzere  $x_m$  düğüm noktalarında  $\phi_m(x)$  septik B- spline fonksiyonlar  $m = -3(1)N + 3$  noktaları için;

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^7} \begin{cases} (x - x_{m-4})^7, & [x_{m-4}, x_{m-3}] \\ (x - x_{m-4})^7 - 8(x - x_{m-3})^7, & [x_{m-3}, x_{m-2}] \\ (x - x_{m-4})^7 - 8(x - x_{m-3})^7 + 28(x - x_{m-2})^7, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ (x - x_{m-4})^7 - 8(x - x_{m-3})^7 + 28(x - x_{m-2})^7 - 56(x - x_{m-1})^7, & [x_{m-1}, x_m] \\ (x_{m+4} - x)^7 - 8(x_{m+3} - x)^7 + 28(x_{m+2} - x)^7 - 56(x_{m+1} - x)^7, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+4} - x)^7 - 8(x_{m+3} - x)^7 + 28(x_{m+2} - x)^7, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ (x_{m+4} - x)^7 - 8(x_{m+3} - x)^7, & [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ (x_{m+4} - x)^7, & [x_{m+3}, x_{m+4}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (1.3.7.1)$$

şeklinde tanımlanır [9].  $\{\phi_{-3}(x), \phi_{-2}(x), \dots, \phi_{N+1}(x), \phi_{N+2}(x), \phi_{N+3}(x)\}$  kümesi  $a \leq x \leq b$  aralığında tanımlı fonksiyonlar için bir baz oluşturur. Septik B- spline  $\phi_m(x)$  fonksiyonu ve türevleri  $[x_{m-4}, x_{m+4}]$  aralığı dışında sıfırdır. Şekil 1.7’de görüldüğü üzere her bir  $\phi_m(x)$  septik B- spline fonksiyonu  $[x_{m-4}, x_{m+4}]$  aralığında ard arda gelen sekiz elamanı örtmekte ve dolayısıyla her bir  $[x_m, x_{m+1}]$  sonlu eleman  $\phi_{m-3}, \phi_{m-2}, \phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}, \phi_{m+2}, \phi_{m+3}$  ve  $\phi_{m+4}$  gibi sekiz septik B- spline fonksiyonu tarafından örtülmektedir [4].  $\phi_m(x)$  ve altıncı mertebeye kadar olan  $\phi'_m(x), \phi''_m(x), \phi'''_m(x), \phi^{(iv)}_m(x), \phi^{(v)}_m(x)$  ve  $\phi^{(vi)}_m(x)$  türevlerinin düğüm noktalarındaki değerleri Tablo 1. 6’ da gösterildi.

Tablo 1.6.  $\phi_m(x), \phi'_m(x), \phi''_m(x), \phi'''_m(x), \phi^{(iv)}_m(x), \phi^{(v)}_m(x)$  ve  $\phi^{(vi)}_m(x)$  ' in düğüm noktalarındaki değerleri

| $x$                | $x_{m-4}$ | $x_{m-3}$ | $x_{m-2}$ | $x_{m-1}$ | $x_m$   | $x_{m+1}$ | $x_{m+2}$ | $x_{m+3}$ | $x_{m+4}$ |
|--------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|---------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $\phi_m$           | 0         | 1         | 120       | 1191      | 2416    | 1191      | 120       | 1         | 0         |
| $h\phi'_m$         | 0         | -7        | -392      | -1715     | 0       | 1715      | 392       | 7         | 0         |
| $h^2\phi''_m$      | 0         | 42        | 1008      | 630       | -3360   | 630       | 1008      | 42        | 0         |
| $h^3\phi'''_m$     | 0         | -210      | -1680     | 3990      | 0       | -3990     | 1680      | 210       | 0         |
| $h^4\phi^{(iv)}_m$ | 0         | 840       | 0         | -7560     | 13440   | -7560     | 0         | 840       | 0         |
| $h^5\phi^{(v)}_m$  | 0         | -2520     | 10080     | -12600    | 0       | 12600     | -10080    | 2520      | 0         |
| $h^6\phi^{(vi)}_m$ | 0         | 5040      | -30240    | 75600     | -100800 | 75600     | -30240    | 5040      | 0         |

Bir  $[x_m, x_{m+1}]$  sonlu eleman (1.3.1.2) lokal koordinat dönüşümü yardımıyla  $[0, 1]$  aralığına dönüşür. Böylelikle septik B- spline fonksiyonlar  $[0, 1]$  aralığında  $\xi$  türünden,

$$\phi_{m-3} = 1 - 7\xi + 21\xi^2 - 35\xi^3 + 35\xi^4 - 21\xi^5 + 7\xi^6 - \xi^7$$

$$\phi_{m-2} = 120 - 392\xi + 504\xi^2 - 280\xi^3 + 84\xi^5 - 42\xi^6 + 7\xi^7,$$

$$\phi_{m-1} = 1191 - 1715\xi + 315\xi^2 + 665\xi^3 - 315\xi^4 - 105\xi^5 + 105\xi^6 - 21\xi^7,$$

$$\phi_m = 2416 - 1680\xi^2 + 560\xi^4 - 140\xi^6 + 35\xi^7,$$

$$\phi_{m+1} = 1191 + 1715\xi + 315\xi^2 - 665\xi^3 - 315\xi^4 + 105\xi^5 + 105\xi^6 - 35\xi^7,$$

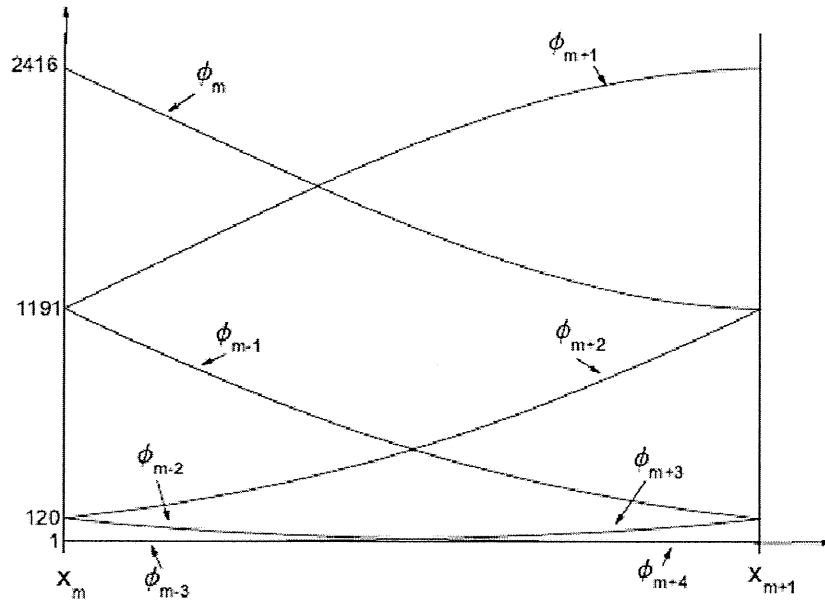


$$\begin{aligned}
\phi_{m+2} &= 120 + 392\xi + 504\xi^2 + 280\xi^3 - 84\xi^5 - 42\xi^6 + 21\xi^7, \\
\phi_{m+3} &= 1 + 7\xi + 21\xi^2 + 35\xi^3 + 35\xi^4 + 21\xi^5 + 7\xi^6 - \xi^7 \\
\phi_{m+4} &= \xi^7
\end{aligned} \tag{1.3.7.2}$$

şeklinde bulunur. (1.3.7.2) septik B- spline fonksiyonlar kullanılarak  $x_m$  düğüm noktasında  $U_N$  yaklaşık çözümü ve  $x'$  e göre altıncı mertebeye kadar olan türevleri  $\delta_m$  eleman parametreleri cinsinden,

$$\begin{aligned}
U_N(x_m, t) &= \delta_{m-3} + 120\delta_{m-2} + 1191\delta_{m-1} + 2416\delta_m + 1191\delta_{m+1} + 120\delta_{m+2} + \delta_{m+3}, \\
U'_m &= \frac{7}{h}(-\delta_{m-3} - 56\delta_{m-2} - 245\delta_{m-1} + 245\delta_{m+1} + 56\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \\
U''_m &= \frac{42}{h^2}(\delta_{m-3} + 24\delta_{m-2} + 15\delta_{m-1} - 80\delta_m + 15\delta_{m+1} + 24\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \\
U'''_m &= \frac{210}{h^3}(-\delta_{m-3} - 8\delta_{m-2} + 19\delta_{m-1} - 19\delta_{m+1} + 8\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \\
U_m^{(iv)} &= \frac{840}{h^4}(\delta_{m-3} - 9\delta_{m-1} + 16\delta_m - 9\delta_{m+1} + \delta_{m+3}) \\
U_m^{(v)} &= \frac{2520}{h^5}(-\delta_{m-3} + 4\delta_{m-2} - 5\delta_{m-1} + 5\delta_{m+1} - 4\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) \\
U_m^{(vi)} &= \frac{5040}{h^6}(\delta_{m-3} - 6\delta_{m-2} + 15\delta_{m-1} - 20\delta_m + 15\delta_{m+1} - 6\delta_{m+2} + \delta_{m+3})
\end{aligned} \tag{1.3.7.3}$$

biçiminde gösterilir.



Şekil 1.7. Septik B-spline şekil fonksiyonları

## 2. BÖLÜM

### 2.1 Kollokasyon yöntemi

Bir diferansiyel denklemin tam çözümü ile yaklaşık çözümü arasındaki farkın, sıfırdan farklı bir ağırlık fonksiyonu ile çarpılıp toplamlarının en küçük yapılması işlemi ağırlıklı kalan yaklaşımı olarak adlandırılır ve bu yaklaşıma dayanan metotlara ise ağırlıklı kalan metodları denir. Her denklemin ağırlıklı integral formu oluşturulabileceğinden dolayı her denkleme tatbik edilebilir. Ağırlıklı kalan yöntemlerini ifade etmek için  $\Omega$  bölgesinde

$$A(u) = f, \quad (2.1.1)$$

operatör denklemini ele alalım. Burada  $A$  lineer yada lineer olmayan operatör ve  $f$  bağımsız değişkenin bir fonksiyonu olarak tanımlanırsa, buradaki  $u$  çözümüne, bir yaklaşım olarak

$$u_N = \sum_{j=1}^N c_j \phi_j + \phi_0, \quad (2.1.2)$$

kullanılır ve (2.1.1) denkleminde (2.1.2) ile verilen  $u_N$  yaklaşık çözümü yerine yazıldığında  $f_N = A(u_N)$  fonksiyonu elde edilir. Bu fonksiyon büyük olasılıkla  $f'$  ye eşit değildir.  $A(u_N)$  ile  $f$  fonksiyonu arasındaki farka

$$R = A(u) - f = A\left(\sum_{j=1}^N c_j \phi_j + \phi_0\right) - f \neq 0 \quad (2.1.3)$$

yaklaşımın kalanı denir. Burada  $R$  kalan fonksiyonu  $c_j$  parametrelerine bağlı olduğu kadar konuma da bağlıdır ve ağırlıklı kalan yöntemlerinde  $c_j$  parametreleri

$$\int_{\Omega} \psi_i(x, y) R(x, y, c_j) dx dy = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots, N) \quad (2.1.4)$$

ağırlıklı kalan integralindeki  $R$  kalanı sıfır olacak biçimde seçilir. Buradaki  $\Omega$  iki boyutlu bir bölge ve  $\psi_i$ 'ler ise ağırlıklı kalan fonksiyonları olup (2.1.4) integralinin hesaplanmasıyla elde edilen denklemlerin çözülebilmesi için seçilen  $\psi_i$  ağırlıklı kalan fonksiyonlar kümesinin lineer bağımsız olması gerekir. Ağırlıklı kalanlar yönteminde

ağırlık fonksiyonunun seçimine bağlı olarak yöntemler farklı isimle adlandırılır. Bu yöntemler Galerkin, Petrov-Galerkin, Kollokasyon ve Subdomain şeklinde sıralanabilir.

Bu tez çalışmasında kullanacağımız ağırlıklı kalan yöntemlerinden biri olan Kollokasyon yönteminde  $\Omega$  bölgesinden seçilen  $N$  adet  $X^i \equiv (x^i, y^i)$  kollokasyon noktasında kalanın sıfır olması istenir ki yani kalan

$$R(x^i, y^i, c_j) = 0, \quad (i = 0, 1, 2, \dots, N) \quad (2.1.5)$$

şeklinde olmalıdır.  $X^i$  kollokasyon noktalarının denklem sistemi iyi şartlı olacak biçimde seçilmesi çok önemlidir. Burada  $\psi_i = \delta(X - X^i)$  alınır ve (2.1.4) denkleminde yerine yazılacak olursa

$$\int_{\Omega} \delta(X - X^i) R(X, c_j) dx dy = 0 \quad (2.1.6)$$

veya

$$R(X^i, c_j) = 0, \quad (2.1.7)$$

elde edilir. Buradaki  $\delta(x)$ , Dirac delta fonksiyonu olup aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\int_{\Omega} f(x) \delta(x - \xi) dx dy = f(\xi) \quad (2.1.8)$$

B-spline fonksiyonlara dayanan kollokasyon sonlu elemanlar yöntemi, daha önceleri farklı türden doğrusal olmayan problemlerin yaklaşık çözümlerini elde etmek için kullanılmıştır. Mesela Kawahara denklemi septik B-spline kollokasyon [24], Burgers, KdV Burgers, kompleks modifiye edilmiş KdV, geliştirilmiş doğrusal olmayan Schrödinger (GNLS) ve geliştirilmiş Rosenau-RLW denklemleri ise kuintik B-spline kollokasyon yöntemiyle sayısal olarak çözülmüştür [25–28]. Yine Geliştirilmiş Burgers–Fisher ve geliştirilmiş Burgers–Huxley denklemleri ise kübik B-spline kollokasyon algoritması yardımıyla çözülmüştür [29]. D. Irk, kübik ve kuintik B-spline kollokasyon yöntemiyle GNLS denkleminin, CMKdV denkleminin ve BST denklem sisteminin çözümlerini bulmuştur [30]. Saka, RLW ve K-S denklemlerinin, sayısal çözümlerini kuadratik, kübik ve kuintik B-spline fonksiyonlar kullanarak kollokasyon yöntemi ile elde edilmiştir [31].

## 2.2 GRLW Denklemi

Düzenli uzun dalga (RLW) denklemine dayanan genelleştirilmiş düzenli uzun dalga (GRLW) denklemi, genelleştirilmiş eşit genişlikli dalga (GEW) denklemi ve genelleştirilmiş Korteweg-de Vries (GKdV) denklemi ile ilişkilidir. Bu tür denklemler  $(p + 1)$ . dereceden doğrusal olmayan dalga denklemleri olup, nabız atışına benzeyen solitary dalga çözümlere sahiptirler [10].

GKdV denklemi,

$$U_t + \varepsilon U^p U_x + \mu U_{xxt} = 0 ; \quad (2.2.1)$$

GEW denklemi,

$$U_t + \varepsilon U^p U_x - \mu U_{xxt} = 0 ; \quad (2.2.2)$$

GRLW denklemi,

$$U_t + U_x + p(p+1)U^p U_x - \mu U_{xxt} = 0 \quad (2.2.3)$$

şeklindedir. Fiziksel sınır şartları  $x \rightarrow \pm \infty$  iken  $U \rightarrow 0$  dır. Burada alt indis  $t$  ve  $x$  sırasıyla zaman ve boyutsal türevi ifade ederler ki,  $\varepsilon$  ve  $p$  pozitif tamsayı olup,  $\mu$  pozitif bir sabit sayıdır.

Bu tez çalışmasında, beşinci ve yedinci dereceden B-spline fonksiyonlar kullanılarak kollokasyon yöntemi ile yaklaşık çözümlerini araştırdığımız GRLW denkleminin; solitary dalga çözümlerinin bazı analitik ve sayısal çözüm teknikleri ile bulunduğu bilinmektedir. GRLW denkleminin hem kararlı hem kararsız solitary dalga çözümleri Bona ve arkadaşları tarafından elde edilmiştir [11]. Ramos ise ardışık dalgaların oluşumu üzerindeki başlangıç şartı ile birlikte GRLW denkleminin solitary dalga çözümünü elde edebilmek için yaklaşık yarı lineerleştirme algoritmasını kullanmıştır [12]. El-Danaf ve arkadaşları, Kaya, Guo ve arkadaşları; GRLW denkleminin sayısal davranışlarını incelemek amacı ile sırasıyla sonlu fark yaklaşımını, Adomian ayrışım yöntemini, elamansız kp-Ritz yöntemini uygulamışlardır [13–15]. Hamdi ve arkadaşları, GRLW denklemi ve onun daha basit alternatif modeli olan GEW denklemi için yeni bir

tam çözüm yöntemi sunmuşlardır [16]. Sonlu fark, He'nin değişimli tekrarlama, Meshfree, Petrov-Galerkin sonlu elemanlar, elemansız olma yaklaşımına ve  $2N$  mertebeden yoğunlaştırılmış, sonlu fark algoritmalarına dayanan sayısal yöntemler GRLW denkleminin çözümü için tanıtılmıştır [17–22]. Üstel B-spline sonlu elemanlara dayanan kollokasyon algoritmasını kullanmak suretiyle GRLW denkleminin sayısal sonuçları Mohammadi tarafından bulunmuştur [23].

Bu çalışmada ele aldığımız GRLW denkleminin yapısı incelendiğinde,  $(p + 1)$ . dereceden lineer olmayan terimlere sahip olduğunu görürüz. Bu denklemin şayet varsa analitik çözümlerini bulmak en iyi tercih olacaktır. Ancak ele aldığımız dalga denkleminin doğrusal olmayan terimlerinden dolayı bu ve buna benzer denklemlerin genelde analitik çözümlerini elde etmek oldukça zordur. O zaman bu aşamada, yaklaşık analitik çözüm teknikleri devreye girecektir. Şayet bu da mümkün olmazsa, analitik olarak çözümü zor veya mümkün olmayan problemlerin çözülebilmesi için uygun ve en iyi yaklaşım tekniği olan sayısal çözüm teknikleri kaçınılmaz olur. Literatürde yapılan çalışmalar ve benzer yapıdaki doğrusal olmayan denklemlere uygulanan yöntemlerle elde edilen sayısal veriler incelenirse, sonlu elemanlar yönteminin doğru ve etkili bir sayısal algoritma olduğu görülecektir [32]. Bu nedenle, bu tez çalışmasında GRLW dalga denkleminin yaklaşık çözümlerini bulabilmek için, beşinci ve yedinci dereceden B-spline kollokasyon sonlu eleman yöntemleri kullanılmıştır. Bu tez çalışması [32] ve [33] referansları baz alınarak hazırlanmıştır.

### 3. BÖLÜM

#### GRLW DENKLEMİNİN KUİNTİK B-SPLİNE KOLLOKASYON SONLU ELEMEN YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

GRLW denklemi,

$$U_t + U_x + p(p+1)U^p U_x - \mu U_{xxt} = 0 \quad (3.1)$$

şeklindedir. Fiziksel sınır şartları  $x \rightarrow \pm \infty$  iken  $U \rightarrow 0$  dır. Burada alt indis  $t$  ve  $x$  sırasıyla zaman ve boyutsal türevi ifade ederler,  $\varepsilon$  ve  $p$  pozitif tamsayı olup,  $\mu$  ise pozitif bir sabit sayıdır.

Sınır ve başlangıç koşulları,

$$\begin{aligned} U(a, t) = 0, \quad U_x(a, t) = 0, \\ U(b, t) = 0, \quad U_x(b, t) = 0, \\ U(x, 0) = f(x), \quad a \leq x \leq b, \end{aligned} \quad (3.2)$$

biçiminde ele alınacaktır.

Çözüm bölgesini kısıtlanmış  $[a, b]$  sonlu aralığında düşünecek olursak, aralık uzunluğu  $h = \frac{b-a}{N} = (x_{m+1} - x_m)$  ve  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$  olmak üzere,  $[a, b]$  aralığı  $x_m$  düğüm noktaları vasıtasıyla  $N$  tane eşit aralığa parçalanır.  $\{\emptyset_{-2}(x), \emptyset_{-1}(x), \dots, \emptyset_N(x), \emptyset_{N+1}(x), \emptyset_{N+2}(x)\}$  kuintik B-spline fonksiyonları,  $[a, b]$  aralığında tanımlanmış fonksiyonlar için bir baz oluşturur. Kuintik B-spline fonksiyonları  $x_m$  düğüm noktalarında,

$$\emptyset_m(x) = \frac{1}{h^5} \begin{cases} (x - x_{m-3})^5, & [x_{m-3}, x_{m-2}] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5, & [x_{m-1}, x_m] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5 + 20(x - x_m)^5, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5 \\ -20(x - x_m)^5 + 15(x - x_{m+1})^5, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5 - 20(x - x_m)^5 \\ +15(x - x_{m+1})^5 - 6(x - x_{m+2})^5, & [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (3.3)$$

biçiminde verilmiştir [9].  $\emptyset_m$  kuintik B-spline fonksiyonların her biri sonlu ardışık altı tane alt aralığı örtecektir. Bundan dolayı altı adet B-spline fonksiyonu her bir

$[x_m, x_{m+1}]$  sonlu alt aralığını örter.  $U_N(x, t)$  yaklaşımı, kuintik B-spline şekil fonksiyonları türünden yazılacak olursa,

$$U_N(x, t) = \sum_{m=-2}^{N+2} \phi_m(x) \delta_m(t) \quad (3.4)$$

Yaklaşım fonksiyonu bulunur. GRLW denkleminin kuintik B-spline kollokasyon şartları ve sınır koşulları kullanılarak, yukarıda verilen zamana bağlı bilinmeyen  $\delta_m(t)$  parametreleri tespit edilecektir. (3.4) de belirtilen yaklaşım fonksiyonunda (3.3) ile verilen kuintik B-spline fonsiyonlar kullanılmak suretiyle,  $U_m$  yaklaşım fonksiyonu ve  $U_m$  'in  $x$ 'e göre ikinci mertebeye kadar olan türevleri,  $x_m$  düğüm noktasında  $\delta_m$  bilinmeyen parametreleri cinsinden aşağıdaki gibi bulunur [33]:

$$\begin{aligned} U_N(x_m, t) &= U_m = \delta_{m-2} + 26\delta_{m-1} + 66\delta_m + 26\delta_{m+1} + \delta_{m+2}, \\ U'_m &= \frac{5}{h} (-\delta_{m-2} - 10\delta_{m-1} + 10\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \\ U''_m &= \frac{20}{h^2} (\delta_{m-2} + 2\delta_{m-1} - 6\delta_m + 2\delta_{m+1} + \delta_{m+2}). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Buradan  $U$  değişimi  $[x_m, x_{m+1}]$  sonlu elemanı üzerinde

$$U = \sum_{m=-2}^{N+2} \phi_m \delta_m. \quad (3.6)$$

şeklinde yeniden ifade edilebilir. (3.1) de verilen GRLW denkleminde, (3.5) de bulunan  $U_m$  ve  $U_m$  'in  $x$ 'e göre türevleri uygun yerlere yazılacak olursa,

$$\begin{aligned} &(\dot{\delta}_{m-2} + 26\dot{\delta}_{m-1} + 66\dot{\delta}_m + 26\dot{\delta}_{m+1} + \dot{\delta}_{m+2}) \\ &+ \frac{5}{h} (-\delta_{m-2} - 10\delta_{m-1} + 10\delta_{m+1} + \delta_{m+2}) \\ &+ p(p+1)Z_m(\delta_{m-2} + 26\delta_{m-1} + 66\delta_m + 26\delta_{m+1} + \delta_{m+2}) \\ &- \frac{20\mu}{h^2} (\dot{\delta}_{m-2} + 2\dot{\delta}_{m-1} + 6\dot{\delta}_m + 2\dot{\delta}_{m+1} + \dot{\delta}_{m+2}) = 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

şeklinde çözüm yaklaşımının genel biçimi bulunur. Burada  $Z_m$  lineer olmayan terimi;

$$Z_m \cong [U_m^n]^p = (\delta_{m-2}^n + 26\delta_{m-1}^n + 66\delta_m^n + 26\delta_{m+1}^n + \delta_{m+2}^n)^p$$

dir. (3.7) ile verilen denklemde “” zamana bağlı türevi belirtir. (3.7) de verilen kollokasyon denkleminde konuma göre bilinmeyen parametreler  $\delta_m$  ve zamana göre türevleri olan  $\dot{\delta}_m$  ifadelerine,

$$\delta_m = \frac{1}{2}(\delta_m^n + \delta_m^{n+1}), \quad \dot{\delta}_m = \frac{\delta_m^{n+1} - \delta_m^n}{\Delta t} \quad (3.8)$$

(3.8) de verilen Crank-Nicolson ve klasik ileri sonlu fark yaklaşımı sırasıyla uygulanırsa,  $\delta_i^{n+1}$  ve  $\delta_i^n$  parametrelerine göre ardışık iki zaman adımı olan  $n$  ve  $n+1$  arasındaki yineleme bağıntısı,

$$\begin{aligned} & \gamma_1 \delta_{m-2}^{n+1} + \gamma_2 \delta_{m-1}^{n+1} + \gamma_3 \delta_m^{n+1} + \gamma_4 \delta_{m+1}^{n+1} + \gamma_5 \delta_{m+2}^{n+1} \\ & = \gamma_6 \delta_{m-2}^n + \gamma_7 \delta_{m-1}^n + \gamma_8 \delta_m^n + \gamma_9 \delta_{m+1}^n + \gamma_{10} \delta_{m+2}^n \end{aligned} \quad (3.9)$$

şeklinde bulunur. Yukarıdaki  $\gamma$  katsayıları,

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= (1 - K + EZ_m - M), & \gamma_2 &= (26 - 10K + 26EZ_m - 2M), \\ \gamma_3 &= (66 + 66EZ_m + 6M), & \gamma_4 &= (26 + 10K + 26EZ_m - 2M), \\ \gamma_5 &= (1 + K + EZ_m - M), & \gamma_6 &= (1 + K - EZ_m - M), \\ \gamma_7 &= (26 + 10K - 26EZ_m - 2M), & \gamma_8 &= (66 - 66EZ_m + 6M), \\ \gamma_9 &= (26 - 10K - 26EZ_m - 2M), & \gamma_{10} &= (1 - K - EZ_m - M), \\ m &= 0, 1, \dots, N, & K &= \frac{5\Delta t}{2h}, & E &= \frac{P(P+1)\Delta t}{2}, & M &= \frac{20\mu}{h^2} \end{aligned} \quad (3.10)$$

biçimindedir.

(3.9) da verilen denklem sistemi  $N + 1$  tane lineer denklemden meydana gelir, fakat bu ifadede  $(\delta_{-2}, \delta_{-1}, \dots, \delta_{N+1}, \delta_{N+2})^T$  parametrelerinden gelen  $N + 5$  tane bilinmeyen vardır. Bu sisteme ait tek çözümü bulabilmek için dört tane daha ek şarta ihtiyaç duyulur ki bu şartlar (3.2) de verilen sınır koşulları vasıtasıyla bulunur. Denklem sistemine sınır koşullarının basit bir biçiminde dahil edilmesi şeklinde



ifade edilen bu adımın benzeri, aşağıda verilen iterasyonu başlatmak için  $d^0$  başlangıç değerinin tespit edilmesi aşamasında belirtilmiştir. Bundan sonra (3.9) ile verilen cebirsel denklem sisteminden  $\delta_{-2}, \delta_{-1}$  ve  $\delta_{N+1}, \delta_{N+2}$  parametreleri, elimine edilir. Yapılan bu işlemlerin ardından  $d^n = (\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_N)^T$  olmak üzere, aşağıdaki  $N + 1$  tane bilinmeyenli matris form bulunur:

$$Cd^{n+1} = Dd^n. \quad (3.11)$$

$C$  ve  $D$  matrisleri,  $(N + 1) \times (N + 1)$  boyutlu beş sütun elemanlı penta-diagonal matris olarak adlandırılan matrisler olup, verilen matris denklemi aşağıdaki alt bölüm 3.1'de belirtildiği üzere Fortran programında Thomas algoritması (penta-diagonal algoritma) kullanılmak suretiyle çözülmüştür. Bu aşamada çözümün iyileştirilmesi için, lineer olmayan terim  $Z_m$  deki eleman parametresine,

$$(\delta_m^*)^{n+1} = \delta_m^n + \frac{1}{2}(\delta_m^{n+1} - \delta_m^n)$$

yukarıda verilen iç iterasyon her bir zaman adımında üç veya dört defa uygulanmıştır.

### Başlangıç iterasyonu

Tekrarlama bağıntısının verildiği (3.9) daki iterasyonun başlatılabilmesi için,  $d^0$  başlangıç değerinin hesaplanması gerekir. Bundan dolayı aşağıda (3.12) ile verilen başlangıç şartları kullanılmalıdır. Sayısalçözümün başlangıç şartı aşağıdaki biçimdedir.

$$U_N(x, 0) = \sum_{m=-2}^{N+2} \phi_m(x) \delta_m^0(t)$$

Başlangıç şartı ve sınır noktalarındaki türevleri,

$$U_N(x, 0) = U(x_m, 0); \quad m = 0, 1, 2, \dots, N$$

$$(U_N)_x(a, 0) = 0, \quad (U_N)_{xx}(a, 0) = 0, \quad (3.12)$$

$$(U_N)_x(b, 0) = 0, \quad (U_N)_{xx}(b, 0) = 0$$

şeklinde. Başlangıç şartı,  $\delta_m$  parametreleri türünden,

$$\delta_{-2} + 26\delta_{-1} + 66\delta_0 + 26\delta_1 + \delta_2 = U(x_0, 0)$$

$$\begin{aligned}
\delta_{-1} + 26\delta_0 + 66\delta_1 + 26\delta_2 + \delta_3 &= U(x_1, 0) \\
\delta_0 + 26\delta_1 + 66\delta_2 + 26\delta_3 + \delta_4 &= U(x_2, 0) \\
&\vdots \\
&\vdots \\
\delta_{N-4} + 26\delta_{N-3} + 66\delta_{N-2} + 26\delta_{N-1} + \delta_N &= U(x_{N-2}, 0), \\
\delta_{N-3} + 26\delta_{N-2} + 66\delta_{N-1} + 26\delta_1 + \delta_{N+1} &= U(x_{N-1}, 0), \\
\delta_{N-2} + 26\delta_{N-1} + 66\delta_N + 26\delta_{N+1} + \delta_{N+2} &= U(x_N, 0)
\end{aligned} \tag{3.13}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bulunan bu denklem sistemi  $N + 1$  tane lineer denklem ile  $(\delta_{-2}, \delta_{-1}, \dots, \delta_{N+1}, \delta_{N+2})^T$  parametrelerinden meydana gelen  $N + 5$  tane bilinmeyenden oluşur. Bu sistemin tek çözümünün bulunabilmesi için dört tane daha ek şart gereklidir. Bundan dolayı başlangıç şartının (3.12)' de verilen sınır noktalarındaki türevleri kullanılmalıdır. Türevli olan sınır koşulları  $\delta_m$  parametreleri türünden aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\begin{aligned}
-\delta_{-2} - 10\delta_{-1} + 10\delta_1 + \delta_2 &= 0, \\
\delta_{-2} + 2\delta_{-1} - 6\delta_0 + 2\delta_1 + \delta_2 &= 0, \\
-\delta_{N-2} - 10\delta_{N-1} + 10\delta_{N+1} + \delta_{N+2} &= 0, \\
\delta_{N-2} + 2\delta_{N-1} - 6\delta_N + 2\delta_{N+1} + \delta_{N+2} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Bu denklemlerden  $(\delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_{N+1}, \delta_{N+2})$  parametreleri hesaplanırsa;

$$\begin{aligned}
\delta_{-2} &= \frac{1}{2}(15\delta_0 - 10\delta_1 - 3\delta_2), \\
\delta_{-1} &= -\frac{3}{4}\delta_0 + \frac{3}{2}\delta_1 + \frac{1}{4}\delta_2, \\
\delta_{N+1} &= -\frac{3}{4}\delta_N + \frac{3}{2}\delta_{N-1} + \frac{1}{4}\delta_{N-2} \\
\delta_{N+2} &= \frac{1}{2}(15\delta_N - 10\delta_{N-1} - 3\delta_{N-2}).
\end{aligned} \tag{3.15}$$

şeklinde bulunur.



$$\alpha_i = b_{i-1} - a_{i-2}\mu_{i-2}, \quad \beta_i = c_i - \alpha_i\mu_{i-1} - a_{i-2}\zeta_{i-2}, \quad \mu_i = \frac{d_i - \alpha_i\zeta_{i-1}}{\beta_i},$$

$$\zeta_i = \frac{e_i}{\beta_i}, \quad \lambda_i = \frac{f_i - \alpha_i\lambda_{i-1} - a_{i-2}\lambda_{i-2}}{\beta_i}, \quad i = 2, 3, \dots, N.$$

Yukarıdaki iki aşamadan sonra  $\delta_m$  parametreleriyle çözüm,

$$\delta_N = \lambda_N, \quad \delta_{N-1} = \lambda_{N-1} - \mu_{N-1}\delta_N,$$

$$\delta_i = \lambda_i - \zeta_i\delta_{i+2} - \mu_i\delta_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, N-3, N-2.$$

biçiminde elde edilir.

### 3.2 Lineer kararlılık analizi

Sayısal yöntemin lineer kararlılığını incelemek amacıyla Von-Neumann tekniği uygulanacaktır. GRLW denkleminde bulunan, lineer olmayan  $U^p U_x$  terimindeki  $U^p$  teriminin bölgesel olarak sabit olduğu kabul edilecek olursa, sunulan sayısal yöntemlerdeki aşamalar tatbik edilerek aşağıdaki biçimde tekrarlama bağıntısı bulunur.

$$\begin{aligned} & \alpha_1 \delta_{m-2}^{n+1} + \alpha_2 \delta_{m-1}^{n+1} + \alpha_3 \delta_m^{n+1} + \alpha_4 \delta_{m+1}^{n+1} + \alpha_5 \delta_{m+2}^{n+1} \\ & = \alpha_5 \delta_{m-2}^n + \alpha_4 \delta_{m-1}^n + \alpha_3 \delta_m^n + \alpha_2 \delta_{m+1}^n + \alpha_1 \delta_{m+2}^n \end{aligned} \quad (3.16)$$

Burada,

$$\alpha_1 = (1 - K - KEZ_m - M), \quad \alpha_2 = (26 - 10K - 10KEZ_m - 2M), \quad \alpha_3 = (66 + 6M)$$

$$\alpha_4 = (26 + 10K + 10KEZ_m - 2M), \quad \alpha_5 = (1 + K + KEZ_m - M),$$

$$m = 0, 1, \dots, N, \quad K = \frac{5\Delta t}{2h}, \quad E = \frac{P(P+1)\Delta t}{2}, \quad M = \frac{20\mu}{h^2}.$$

Ardından  $h$  eleman büyüklüğü ve  $k$  mod numarası olarak alındığında, (3.16) ile verilen denklem de  $\delta_m^n = \xi^n e^{imkh}$  ( $i = \sqrt{-1}$ ) şeklinde verilen Fourier terimi uygun yerlere yazılırsa,

$$\begin{aligned} & \alpha_1 \xi^{n+1} e^{i(m-2)kh} + \alpha_2 \xi^{n+1} e^{i(m-1)kh} + \alpha_3 \xi^{n+1} e^{i(m)kh} + \alpha_4 \xi^{n+1} e^{i(m+1)kh} \\ & + \alpha_5 \xi^{n+1} e^{i(m+2)kh} = \\ & \alpha_5 \xi^n e^{i(m-2)kh} + \alpha_4 \xi^n e^{i(m-1)kh} + \alpha_3 \xi^n e^{i(m)kh} + \alpha_2 \xi^n e^{i(m+1)kh} \\ & + \alpha_1 \xi^n e^{i(m+2)kh} . \end{aligned} \quad (3.17)$$

eşitliği bulunur.

$e^{ikh} = \cos(kh) + i \sin(kh)$  Euler formülü, (3.17) ile verilen denklem de kullanılarak gerekli olan bütün işlemler yapıldığında büyüme faktörü olan  $\xi$ ,

$$\xi = \frac{a - ib}{a + ib} \text{ şeklinde bulunur.}$$

Burada,

$$a = \alpha_3 + (\alpha_4 + \alpha_2) \cos[hk] + (\alpha_5 + \alpha_1) \cos[2hk],$$

$$b = (\alpha_4 - \alpha_2) \sin[hk] + (\alpha_5 - \alpha_1) \sin[2hk].$$

olup, buradan  $|\xi|$  nin değeri 1 olarak bulunur, dolayısıyla lineerleştirilmiş algoritma şartsız kararlıdır.

### 3.3 Sayısal hesaplamalar

Burada sayısal algoritma tek solitary dalganın davranışı, iki solitary dalganın girişimi ve ardışık dalganın oluşumunu kapsayan üç örneğin üzerinde çalışılmıştır. Sayısal yöntemin doğruluğunu ve etkinliğini göstermek için  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları, hesap edilmiştir. Bundan dolayı aşağıda verilen norm eşitlikleri ve (3.18) ile verilen GRLW denkleminin tam çözümü kullanılacaktır:

$$L_2 = \|U^{tam} - U_N\|_2 \approx \sqrt{h \cdot \sum_{j=0}^N |U_j^{tam} - (U_N)_j|^2},$$

$$L_\infty = \|U^{tam} - U_N\|_\infty \approx \max_j |U_j^{tam} - (U_N)_j|.$$

GRLW dekleminin tam çözümü,

$$U(x, t) = \sqrt{\frac{c(p+2)}{2p} \sec^2 h^2 \left[ \frac{p}{2} \sqrt{\frac{c}{\mu(c+1)}} (x - (c+1)t - x_0) \right]} \quad (3.18)$$

şeklindedir [20, 34]. Burada  $\sqrt{\frac{c(p+2)}{2p}}$  dalganın genliği,  $c+1$  pozitif  $x$  yönünde hareket eden dalganın hızı ve  $x_0$  keyfi bir sabit olup, sayısal yöntemin kütle, momentum ve enerji ile ilgili özelliklerini koruduğunu göstermek amacı ile,

$$I_1 = \int_a^b U dx, \quad I_2 = \int_a^b [U^2 + \mu(U_x)^2] dx, \quad I_3 = \int_a^b [U^4 - \mu(U_x)^2] dx \quad (3.19)$$

parametrelerindeki değişim hesaplanmıştır.

### 3.3.1 Tek solitary dalganın davranışı

Birinci örnek, (3.18) ile verilen denklem de  $t = 0$  alınması ile bulunan başlangıç şartı kullanılarak elde edilmiştir. Daha önceden yapılan çalışmalar [20, 23, 34, 36, 37, 38, 39] referans alınmış olup bu çalışmalarla uyumlu olması için  $0 \leq x \leq 100$  aralığında  $\mu = 1$ ,  $x_0 = 40$  parametreleri ve  $p$ ,  $c$ , konum adımı  $h$ , zaman adımı  $\Delta t$  parametrelerinin farklı değerlerinin alınması, mümkün olduğunca muntazam ve kıyaslanabilir sayısal sonuçlar elde etmemizi sağlayacaktır. Uygulamalar  $t = 20$  anına kadar çalıştırılmıştır.

İlk olarak,  $p = 2, 3, 4, 6, 8, 10$ ;  $c = 0.1, 0.3$ ;  $h = 0.2, 0.1$ ;  $\Delta t = 0.01$  parametreleri alınmıştır. Bu parametrelere göre elde edilen korunum sabitleri ve hata normlarının değerleri Tablo 3.1 ve Tablo 3.2’te gösterilmiştir. Bu tablolardan görüldüğü gibi  $I_1, I_2, I_3$  korunum sabitlerinin elde edilme süresince başlangıç değerlerine göre değişim oranı %0.03 den daha küçük olduğu görülmektedir.  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları oldukça küçük olarak bulunmuş olup,  $L_\infty$  hata normu  $L_2$  normundan daima küçük kalmaktadır.

Tablo 3.1.  $p = 2, 3, 4$ ;  $c = 0.1, 0.3$ ,  $h = 0.2$ ,  $\Delta t = 0.01$  ve  $x \in [0, 100]$  için hesaplanan tek solitary dalganın korunum sabitleri ve hata norm değerleri

| p=2 | $I_1$   |         | $I_2$   |         | $I_3$   |         | $L_2 \times 10^4$ |       | $L_\infty \times 10^4$ |       |
|-----|---------|---------|---------|---------|---------|---------|-------------------|-------|------------------------|-------|
|     | c=0.1   | c=0.3   | c=0.1   | c=0.3   | c=0.1   | c=0.3   | c=0.1             | c=0.3 | c=0.1                  | c=0.3 |
| t   |         |         |         |         |         |         |                   |       |                        |       |
| 0   | 3.29490 | 3.58195 | 0.68342 | 1.34507 | 0.02412 | 0.15372 | 0.000             | 0.000 | 0.000                  | 0.000 |
| 5   | 3.29492 | 3.58195 | 0.68342 | 1.34507 | 0.02412 | 0.15372 | 0.040             | 0.095 | 0.029                  | 0.051 |
| 10  | 3.29493 | 3.58195 | 0.68342 | 1.34507 | 0.02412 | 0.15372 | 0.075             | 0.159 | 0.035                  | 0.076 |
| 15  | 3.29494 | 3.58195 | 0.68342 | 1.34506 | 0.02412 | 0.15372 | 0.101             | 0.207 | 0.036                  | 0.095 |
| 20  | 3.29493 | 3.58195 | 0.68342 | 1.34506 | 0.02412 | 0.15372 | 0.120             | 0.376 | 0.066                  | 0.175 |

| p=3 | $I_1$   |         | $I_2$   |         | $I_3$   |         | $L_2 \times 10^4$ |       | $L_\infty \times 10^4$ |       |
|-----|---------|---------|---------|---------|---------|---------|-------------------|-------|------------------------|-------|
|     | c=0.1   | c=0.3   | c=0.1   | c=0.3   | c=0.1   | c=0.3   | c=0.1             | c=0.3 | c=0.1                  | c=0.3 |
| t   |         |         |         |         |         |         |                   |       |                        |       |
| 0   | 4.06256 | 3.67753 | 1.13387 | 1.56573 | 0.09289 | 0.22683 | 0.000             | 0.000 | 0.000                  | 0.000 |
| 5   | 4.06258 | 3.67753 | 1.13387 | 1.56573 | 0.09289 | 0.22683 | 0.048             | 0.217 | 0.032                  | 0.121 |
| 10  | 4.06260 | 3.67753 | 1.13387 | 1.56573 | 0.09289 | 0.22684 | 0.088             | 0.400 | 0.038                  | 0.203 |
| 15  | 4.06261 | 3.67753 | 1.13387 | 1.56573 | 0.09289 | 0.22684 | 0.116             | 0.581 | 0.039                  | 0.284 |
| 20  | 4.06260 | 3.67753 | 1.13386 | 1.56572 | 0.09289 | 0.22684 | 0.137             | 0.918 | 0.073                  | 0.438 |

| p=4 | $l_1$   |         | $l_2$   |         | $l_3$   |         | $L_2 \times 10^4$ |       | $L_\infty \times 10^4$ |       |
|-----|---------|---------|---------|---------|---------|---------|-------------------|-------|------------------------|-------|
|     | c=0.1   | c=0.3   | c=0.1   | c=0.3   | c=0.1   | c=0.3   | c=0.1             | c=0.3 | c=0.1                  | c=0.3 |
| t   |         |         |         |         |         |         |                   |       |                        |       |
| 0   | 4.55093 | 3.75921 | 1.49159 | 1.72999 | 0.18389 | 0.28940 | 0.000             | 0.000 | 0.000                  | 0.000 |
| 5   | 4.55095 | 3.75921 | 1.49159 | 1.72999 | 0.18389 | 0.28941 | 0.059             | 0.402 | 0.034                  | 0.231 |
| 10  | 4.55097 | 3.75921 | 1.49159 | 1.72998 | 0.18389 | 0.28941 | 0.106             | 0.803 | 0.041                  | 0.421 |
| 15  | 4.55098 | 3.75921 | 1.49159 | 1.72998 | 0.18389 | 0.28941 | 0.142             | 1.235 | 0.042                  | 0.627 |
| 20  | 4.55097 | 3.75921 | 1.49159 | 1.72998 | 0.18389 | 0.28941 | 0.176             | 1.868 | 0.078                  | 0.915 |

Tablo 3.2.  $p=6, 8, 10$ ;  $c=0.1, 0.3$ ,  $h=0.1$ ,  $\Delta t=0.01$  ve  $x \in [0, 100]$  için hesaplanan tek solitary dalga için korunum sabitleri ve hata norm değerleri

| p=6 | $l_1$   |         | $l_2$   |         | $l_3$   |         | $L_2 \times 10^4$ |       | $L_\infty \times 10^4$ |       |
|-----|---------|---------|---------|---------|---------|---------|-------------------|-------|------------------------|-------|
|     | c=0.1   | c=0.3   | c=0.1   | c=0.3   | c=0.1   | c=0.3   | c=0.1             | c=0.3 | c=0.1                  | c=0.3 |
| t   |         |         |         |         |         |         |                   |       |                        |       |
| 0   | 5.12921 | 3.86622 | 1.98857 | 1.94334 | 0.36740 | 0.37760 | 0.000             | 0.000 | 0.000                  | 0.000 |
| 5   | 5.12924 | 3.86622 | 1.98857 | 1.94334 | 0.36740 | 0.37760 | 0.236             | 0.752 | 0.092                  | 0.402 |
| 10  | 5.12926 | 3.86622 | 1.98857 | 1.94334 | 0.36740 | 0.37760 | 0.458             | 1.554 | 0.179                  | 0.823 |
| 15  | 5.12927 | 3.86622 | 1.98857 | 1.94333 | 0.36740 | 0.37760 | 0.661             | 2.429 | 0.259                  | 1.282 |
| 20  | 5.12926 | 3.86622 | 1.98857 | 1.94333 | 0.36740 | 0.37760 | 0.848             | 3.390 | 0.333                  | 1.785 |

| p=8 | $l_1$   |         | $l_2$   |         | $l_3$   |         | $L_2 \times 10^4$ |       | $L_\infty \times 10^4$ |       |
|-----|---------|---------|---------|---------|---------|---------|-------------------|-------|------------------------|-------|
|     | c=0.1   | c=0.3   | c=0.1   | c=0.3   | c=0.1   | c=0.3   | c=0.1             | c=0.3 | c=0.1                  | c=0.3 |
| t   |         |         |         |         |         |         |                   |       |                        |       |
| 0   | 5.45779 | 3.92982 | 2.30588 | 2.07217 | 0.51946 | 0.43167 | 0.000             | 0.000 | 0.000                  | 0.000 |
| 5   | 5.45781 | 3.92982 | 2.30589 | 2.07217 | 0.51946 | 0.43167 | 0.268             | 1.204 | 0.108                  | 0.690 |
| 10  | 5.45783 | 3.92981 | 2.30589 | 2.07216 | 0.51946 | 0.43168 | 0.499             | 3.012 | 0.200                  | 1.699 |
| 15  | 5.45785 | 3.92981 | 2.30589 | 2.07214 | 0.51946 | 0.43170 | 0.686             | 5.690 | 0.273                  | 3.184 |
| 20  | 5.45784 | 3.92980 | 2.30589 | 2.07212 | 0.51946 | 0.43172 | 0.822             | 9.520 | 0.322                  | 5.296 |

| p=10 | $l_1$   |         | $l_2$   |         | $l_3$   |         | $L_2 \times 10^4$ |        | $L_\infty \times 10^4$ |        |
|------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|-------------------|--------|------------------------|--------|
|      | c=0.1   | c=0.3   | c=0.1   | c=0.3   | c=0.1   | c=0.3   | c=0.1             | c=0.3  | c=0.1                  | c=0.3  |
| t    |         |         |         |         |         |         |                   |        |                        |        |
| 0    | 5.66906 | 3.97136 | 2.52266 | 2.15744 | 0.63820 | 0.46614 | 0.000             | 0.000  | 0.000                  | 0.000  |
| 5    | 5.66908 | 3.97134 | 2.52266 | 2.15742 | 0.63819 | 0.46615 | 0.297             | 2.271  | 0.124                  | 1.380  |
| 10   | 5.66910 | 3.97133 | 2.52266 | 2.15737 | 0.63819 | 0.46620 | 0.536             | 7.775  | 0.220                  | 4.595  |
| 15   | 5.66912 | 3.97131 | 2.52267 | 2.15729 | 0.63819 | 0.46629 | 0.700             | 19.017 | 0.280                  | 11.082 |
| 20   | 5.66911 | 3.97129 | 2.52267 | 2.15714 | 0.63819 | 0.46643 | 0.764             | 39.763 | 0.288                  | 22.983 |

İkinci durumda ise, farklı hız, konum ve zaman adımlarında hata normlarının büyüklüğü araştırılmış ve bu amaçla,  $p=2, 3, 4, 6, 8, 10$ ;  $c=0.03, 0.1, 0.3$ ;  $h=0.1, 0.2$ ;  $\Delta t=0.01, 0.025, 0.1$  parametreleri seçilmiştir.  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normlarının yaklaşık sonuçları, Tablo 3.3 ve Tablo 3.4'te gösterilmiştir. Tablolar da hata normlarının yeterince küçük olduğu ölçülmüş ve  $L_\infty$  hata normunun  $L_2$  hata normundan daima küçük kaldığı görülmüştür. Şayet  $c=0.1$ ,  $h=0.1$ ,  $\Delta t=0.025$  parametreleri alınırsa

program boyunca  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları  $1.5 \times 10^{-3}$  ve  $0.8 \times 10^{-3}$  den daha küçük kalacaktır.

Tablo 3.5’de elde edilen korunum sabitlerinin ve hata normlarının sonuçları ile daha önceki çalışmalarda bulunan sonuçların karşılaştırılması yapılmış olup bu tabloya göre  $I_1, I_2, I_3$  korunum sabitlerinin daha önceden hesaplanan değerleri ile neredeyse aynı olduğu görülür. Ayrıca bu tablodan, hata norm değerlerinin daha önce hesaplanan sonuçlardan daha küçük olduğu anlaşılmaktadır ki; yukarıdaki iki sonuç bize yöntemin doğruluğunu gösterir.

Ayrıca tek solitary dalganın farklı zamanlarda ve farklı  $p$  değerlerindeki davranışı Şekil 3.1’de çizilmiş buna göre artan  $p$  değerine bağlı olarak dalganın genliği dalganın yüksekliği ile doğru orantılı olduğundan, dalganın yüksekliği de artmaktadır.  $t = 0$  dan  $t = 20$  zamanına kadar çizilen dalga hareketleri incelendiğinde, dalganın sağa doğru genlik, hız ve şeklinde herhangi bir bozulma oluşmadan ilerlediği görülmektedir ki, bu dalgalar solitary dalgalardır.

Tablo 3.3.  $p = 2, 3, 4$ ;  $t = 20$  ve  $x \in [0, 100]$  için hesaplanan tek solitary dalganın farklı konum ve zaman adımındaki hata norm değerleri

|                        |     | p=2        |       |       | p=3   |       |       | p=4   |       |       |        |  |
|------------------------|-----|------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|--|
| c                      |     | 0.03       | 0.1   | 0.3   | 0.03  | 0.1   | 0.3   | 0.03  | 0.1   | 0.3   |        |  |
| gen.                   |     | 0.17       | 0.31  | 0.54  | 0.29  | 0.43  | 0.62  | 0.38  | 0.52  | 0.68  |        |  |
| h                      |     | $\Delta t$ |       |       |       |       |       |       |       |       |        |  |
| $L_2 \times 10^3$      | 0.1 | 0.010      | 1.002 | 0.044 | 0.119 | 1.343 | 0.062 | 0.157 | 1.585 | 0.073 | 0.195  |  |
|                        | 0.2 | 0.010      | 0.889 | 0.012 | 0.037 | 1.192 | 0.013 | 0.091 | 1.407 | 0.017 | 0.186  |  |
|                        | 0.1 | 0.025      | 1.002 | 0.064 | 0.328 | 1.343 | 0.109 | 0.593 | 1.585 | 0.158 | 0.988  |  |
|                        | 0.2 | 0.025      | 0.889 | 0.025 | 0.248 | 1.192 | 0.055 | 0.530 | 1.407 | 0.101 | 0.981  |  |
|                        | 0.1 | 0.100      | 1.004 | 0.488 | 4.323 | 1.353 | 1.035 | 8.561 | 1.611 | 1.795 | 16.850 |  |
|                        | 0.2 | 0.100      | 0.891 | 0.452 | 4.244 | 1.201 | 0.986 | 8.499 | 1.430 | 1.741 | 16.842 |  |
| $L_\infty \times 10^3$ | 0.1 | 0.010      | 0.403 | 0.014 | 0.051 | 0.541 | 0.022 | 0.072 | 0.638 | 0.027 | 0.095  |  |
|                        | 0.2 | 0.010      | 0.403 | 0.006 | 0.017 | 0.541 | 0.007 | 0.043 | 0.638 | 0.007 | 0.091  |  |
|                        | 0.1 | 0.025      | 0.403 | 0.023 | 0.143 | 0.541 | 0.042 | 0.277 | 0.638 | 0.064 | 0.482  |  |
|                        | 0.2 | 0.025      | 0.403 | 0.009 | 0.105 | 0.541 | 0.022 | 0.245 | 0.638 | 0.042 | 0.475  |  |
|                        | 0.1 | 0.100      | 0.403 | 0.199 | 1.894 | 0.541 | 0.433 | 4.016 | 0.638 | 0.766 | 8.235  |  |
|                        | 0.2 | 0.100      | 0.403 | 0.185 | 1.854 | 0.541 | 0.414 | 3.984 | 0.638 | 0.744 | 8.213  |  |

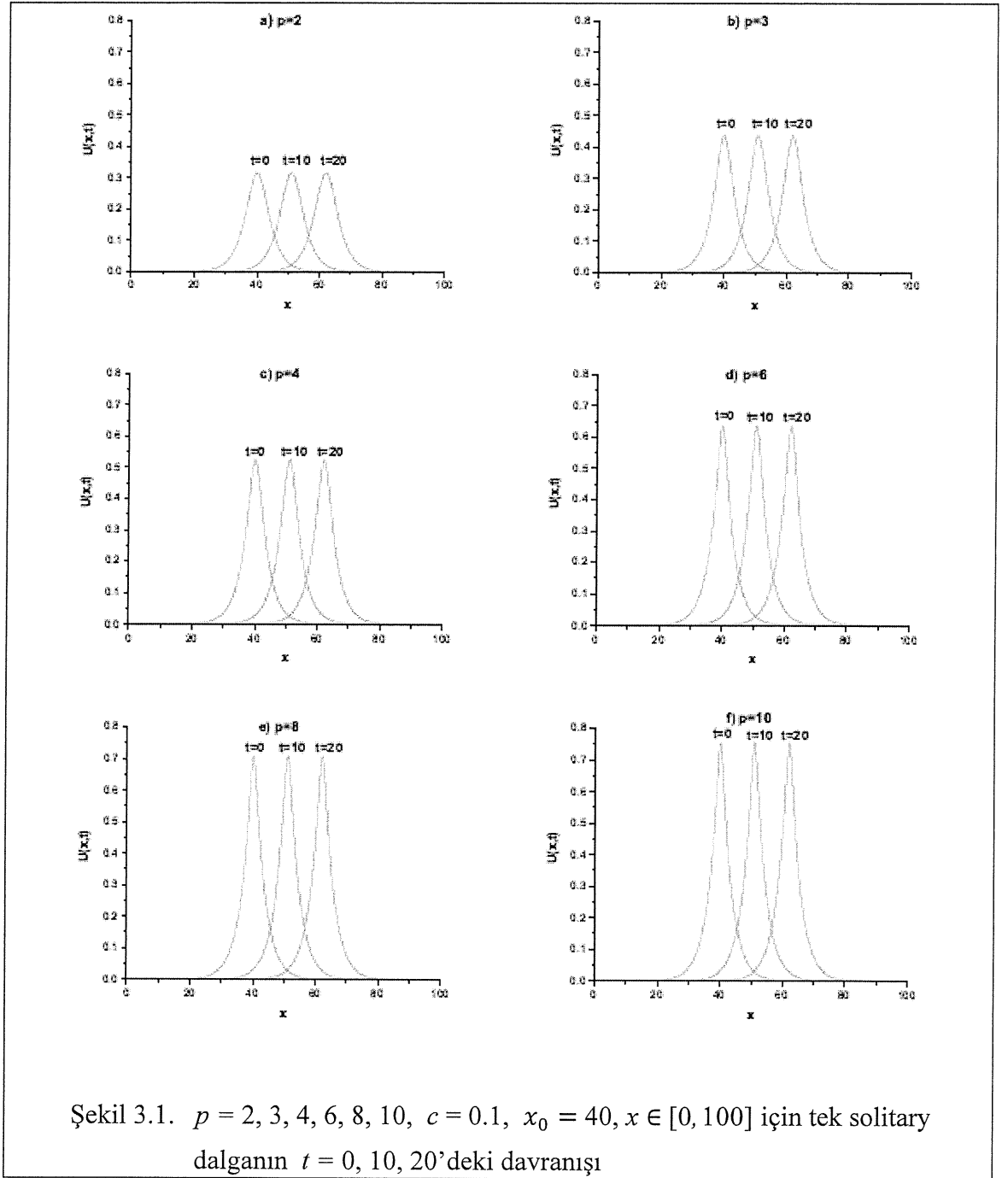


Tablo 3.4.  $p = 6, 8, 10$ ;  $t = 20$  ve  $x \in [0, 100]$  için hesaplanan tek solitary dalganın farklı konum ve zaman adımındaki hata norm değerleri

|                        | c          | p=6   |       |       | p=8   |       |       | p=10   |       |       |        |
|------------------------|------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|-------|-------|--------|
|                        |            | 0.03  | 0.1   | 0.3   | 0.03  | 0.1   | 0.3   | 0.03   | 0.1   | 0.3   |        |
|                        | gen.       | 0.52  | 0.63  | 0.76  | 0.60  | 0.70  | 0.81  | 0.66   | 0.75  | 0.84  |        |
|                        | h          |       |       |       |       |       |       |        |       |       |        |
|                        | $\Delta t$ |       |       |       |       |       |       |        |       |       |        |
| $L_2 \times 10^3$      | 0.1        | 0.010 | 1.900 | 0.084 | 0.339 | 2.094 | 0.082 | 0.952  | 2.225 | 0.076 | 3.976  |
|                        | 0.2        | 0.010 | 1.686 | 0.049 | 0.699 | 1.858 | 0.158 | 2.887  | 1.974 | 0.521 | 13.291 |
|                        | 0.1        | 0.025 | 1.901 | 0.296 | 2.954 | 2.095 | 0.590 | 12.175 | 2.228 | 1.461 | 57.247 |
|                        | 0.2        | 0.025 | 1.686 | 0.268 | 3.316 | 1.859 | 0.679 | 14.108 | 1.976 | 1.926 | 66.443 |
| $L_\infty \times 10^3$ | 0.1        | 0.010 | 0.765 | 0.033 | 0.178 | 0.843 | 0.032 | 0.529  | 0.896 | 0.028 | 2.298  |
|                        | 0.2        | 0.010 | 0.765 | 0.021 | 0.366 | 0.843 | 0.074 | 1.591  | 0.896 | 0.257 | 7.601  |
|                        | 0.1        | 0.025 | 0.765 | 0.128 | 1.563 | 0.843 | 0.274 | 6.802  | 0.896 | 0.724 | 33.005 |
|                        | 0.2        | 0.025 | 0.765 | 0.119 | 1.750 | 0.843 | 0.317 | 7.808  | 0.896 | 0.954 | 38.021 |

Tablo 3.5.  $p = 2, 3, 4$  ve  $x \in [0, 100]$  için hesaplanan tek solitary dalganın sayısal sonuçlarının karşılaştırılması

|                    | Yöntemler       | $L_2 \times 10^3$ | $L_\infty \times 10^3$ | $h_1$  | $h_2$  | $h_3$  |
|--------------------|-----------------|-------------------|------------------------|--------|--------|--------|
| $p = 2$            | CBSC-CN [34]    | 16.3900           | 9.2400                 | 4.4420 | 3.2990 | 1.4130 |
| $c = 1$            | CBSC+PA-CN [34] | 20.3000           | 11.2000                | 4.4400 | 3.2960 | 1.4110 |
| $h = 0.2$          | CBSC [38]       | 9.3019            | 5.4371                 | 4.4428 | 3.2998 | 1.4142 |
| $\Delta t = 0.025$ | MFC [39]        | 3.9140            | 2.0190                 | 4.4428 | 3.2997 | 1.4141 |
| $t = 10$           | QBSPG [20]      | 3.0053            | 1.6874                 | 4.4428 | 3.2998 | 1.4141 |
|                    | QBSC [37]       | 2.4155            | 1.0797                 | 4.4431 | 3.3003 | 1.4146 |
|                    | EBSC [23]       | 2.3909            | 1.0647                 | 4.4428 | 3.2998 | 1.4142 |
|                    | QBSC            | 2.5893            | 1.3518                 | 4.4428 | 3.2997 | 1.4143 |
| $p = 3$            | QBSPG [20] t=5  | 0.0409            | 0.0238                 | 3.6775 | 1.5657 | 0.2268 |
| $c = 0.3$          | t=10            | 0.0719            | 0.0377                 | 3.6775 | 1.5657 | 0.2268 |
| $h = 0.1$          | QBSC t=5        | 0.0393            | 0.0182                 | 3.6776 | 1.5657 | 0.2268 |
| $\Delta t = 0.01$  | t=10            | 0.0787            | 0.0365                 | 3.6776 | 1.5657 | 0.2268 |
| $p = 4$            | QBSPG [20] t=5  | 0.0542            | 0.0382                 | 3.7592 | 1.7299 | 0.2894 |
| $c = 0.3$          | t=10            | 0.1225            | 0.0662                 | 3.7592 | 1.7299 | 0.2894 |
| $h = 0.1$          | QBSC t=5        | 0.0497            | 0.0244                 | 3.7592 | 1.7300 | 0.2894 |
| $\Delta t = 0.01$  | t=10            | 0.0987            | 0.0483                 | 3.7592 | 1.7300 | 0.2894 |



### 3.3.2 İki solitary dalganın girişimi

Bu bölümde genlikleri sırasıyla iki ve bir olan aynı doğrultuda hareket eden iki pozitif solitary dalganın girişimi,

$$U(x, 0) = \sum_{i=1}^2 \sqrt{\frac{c_i(p+2)}{2p}} \sec h^2 \left[ \frac{p}{2} \sqrt{\frac{c_i}{\mu(c_i+1)}} (x - x_i) \right] \quad (3.20)$$

başlangıç şartı kullanılarak incelenmiştir.

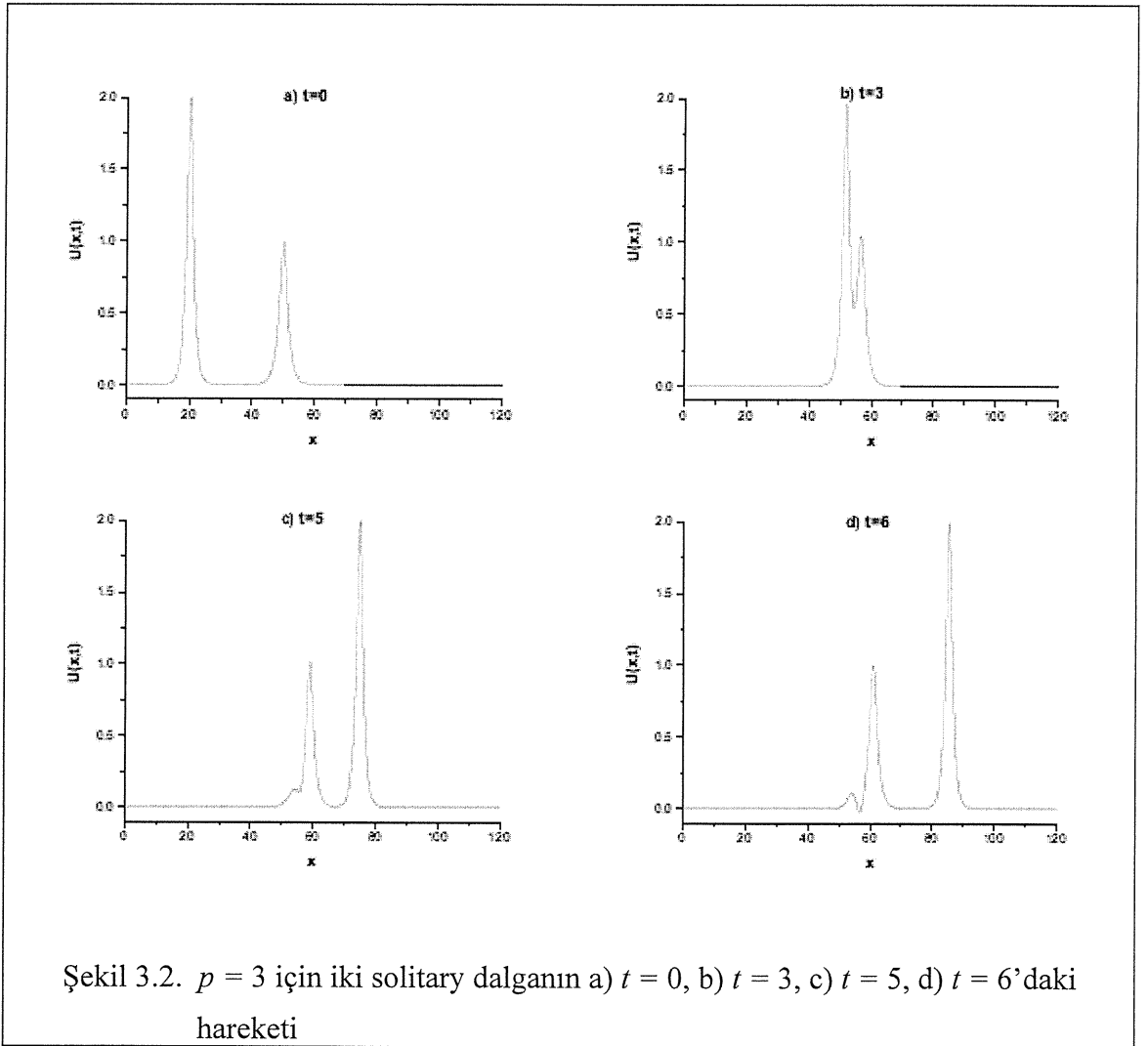
Sayısal hesaplamalar için üç farklı parametre kümesi göz önüne alınmıştır. İlk olarak  $0 \leq x \leq 250$  aralığında  $p = 2$ ,  $c_1 = 4$ ,  $c_2 = 1$ ,  $x_1 = 25$ ,  $x_2 = 55$ ,  $h = 0.2$ ,  $\Delta t = 0.025$  ve  $\mu = 1$  seçilmiştir. İkinci olarak  $0 \leq x \leq 120$  aralığında  $p = 3$ ,  $c_1 = 48/5$ ,  $c_2 = 6/5$ ,  $x_1 = 20$ ,  $x_2 = 50$ ,  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.01$  ve  $\mu = 1$  alınmıştır. Son olarak  $0 \leq x \leq 200$  aralığında  $p = 4$ ,  $c_1 = 64/3$ ,  $c_2 = 4/3$ ,  $x_1 = 20$ ,  $x_2 = 80$ ,  $h = 0.125$ ,  $\Delta t = 0.01$  ve  $\mu = 1$  kullanılmıştır. Elde edilen sonuçlar Tablo 3.6 ve Tablo 3.7’de sunulmuştur. Bu tablolardan da anlaşılacağı üzere, korunum sabitlerinin başlangıça göre değişimleri, oldukça küçük kalmış ve sonuçlar Roshan’ın [20] elde ettiği sonuçlarla uyumlu olduğu görülmüştür. Ayrıca iki solitary dalganın farklı zaman adımlarındaki hareketi Şekil 3.2 ve Şekil 3.3’de verilmiştir. Verilen bu şekillerde görüldüğü gibi, başlangıçta küçük genliğe sahip dalga, aynı yönde ilerleyen büyük genliğe sahip dalganın ilerisinde olup zamanla büyük genlikli dalga küçük genlikli dalgayı yakalar ve çarpışırlar. Ardından bu dalgalar ayrılarak büyük genlikli dalganın öne geçmesiyle yollarına devam ederler. Sonuç olarak, bu dalgaların aynı yönde ilerlerken çarpışması sonucunda dalgaların şekil, hız ve büyüklük gibi durumları hiç etkilenmez ya da çok az etkilenir, bundan dolayı bu iki dalga solitondur.

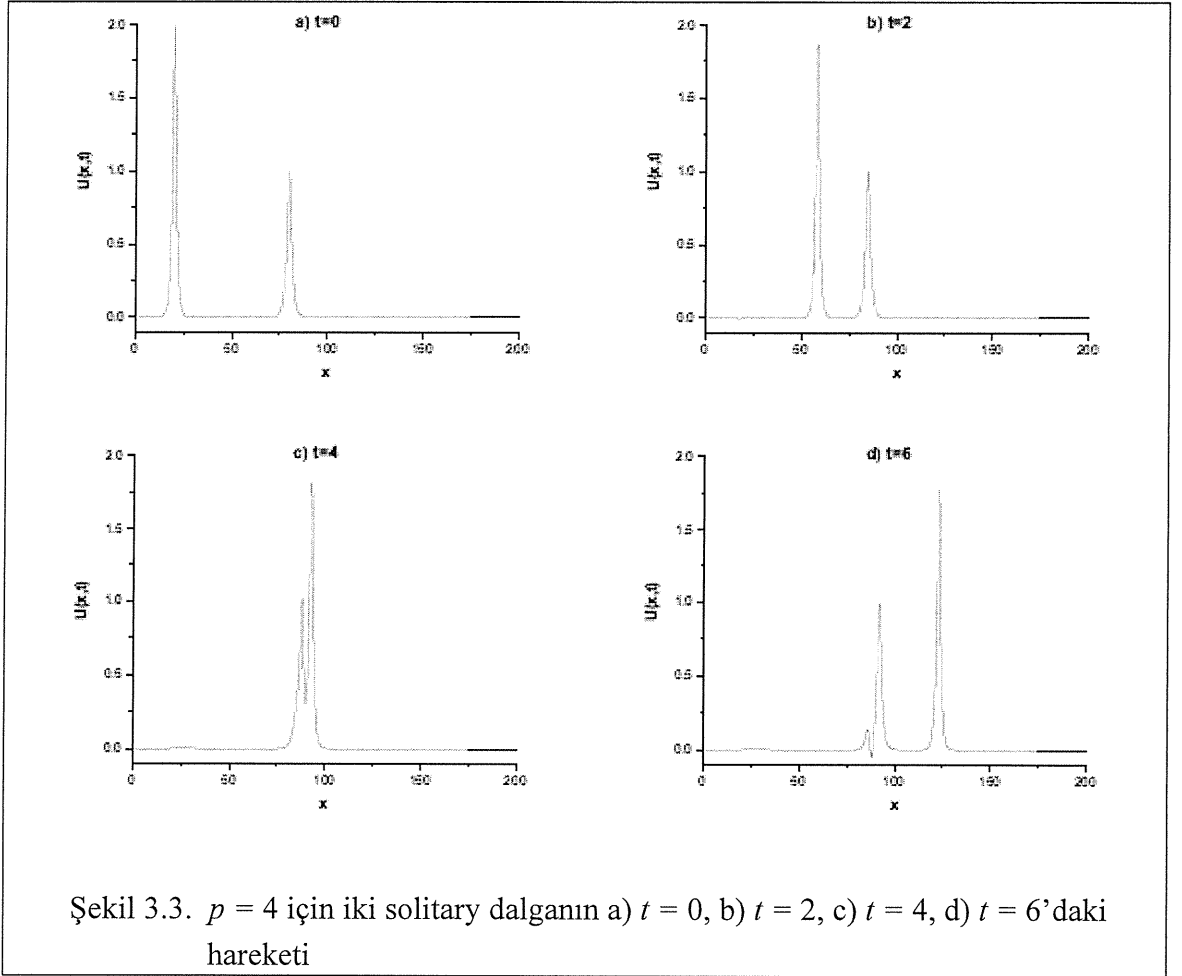
Tablo 3.6.  $p = 2$ , genlikleri = 2, 1,  $h = 0.2$ ,  $\Delta t = 0.025$  ve  $x \in [0, 250]$  için iki solitary dalganın girişimine ait korunum sabitleri

| t  | $h_1$   |         | $h_2$   |         | $h_3$   |         |
|----|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
|    | QBSC    | QBSPG   | QBSC    | QBSPG   | QBSC    | QBSPG   |
|    | [20]    |         | [20]    |         | [20]    |         |
| 0  | 11.4676 | 11.4677 | 14.6292 | 14.6286 | 22.8803 | 22.8788 |
| 4  | 11.4676 | 11.4677 | 14.6277 | 14.6292 | 22.8818 | 22.8811 |
| 8  | 11.4668 | 11.4677 | 14.1399 | 14.6229 | 23.3695 | 22.8798 |
| 12 | 11.4676 | 11.4677 | 14.6803 | 14.6299 | 22.8292 | 22.8803 |
| 16 | 11.4676 | 11.4677 | 14.6442 | 14.6295 | 22.8653 | 22.8805 |
| 20 | 11.4676 | 11.4677 | 14.6309 | 14.6299 | 22.8786 | 22.8806 |

Tablo 3.7.  $p = 3, 4$  ve genlikleri = 2, 1 için iki solitary dalganın girişimine ait korunum sabitleri

| Zaman | 0     | 1       | 2       | 3       | 4       | 5       | 6       |         |
|-------|-------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| p=3   | $h_1$ | 9.6907  | 9.6894  | 9.6881  | 9.6851  | 9.6860  | 9.6848  | 9.6835  |
|       | $h_2$ | 12.9443 | 12.9433 | 12.9391 | 12.3044 | 12.9704 | 13.0539 | 13.0028 |
|       | $h_3$ | 17.0186 | 17.0197 | 17.0239 | 17.6586 | 16.9926 | 16.9091 | 16.9601 |
| p=4   | $h_1$ | 8.8342  | 8.6650  | 8.5662  | 8.4965  | 8.4529  | 8.4089  | 8.3702  |
|       | $h_2$ | 12.1708 | 11.9332 | 11.7919 | 11.6913 | 11.4644 | 11.7254 | 11.5990 |
|       | $h_3$ | 14.0294 | 14.2670 | 14.4083 | 14.5090 | 14.7358 | 14.4748 | 14.6012 |





### 3.3.3 Ardışık dalgaların oluşumu

Burada, ardışık dalgaların oluşumu aşağıdaki başlangıç şartı ile birlikte araştırılmıştır:

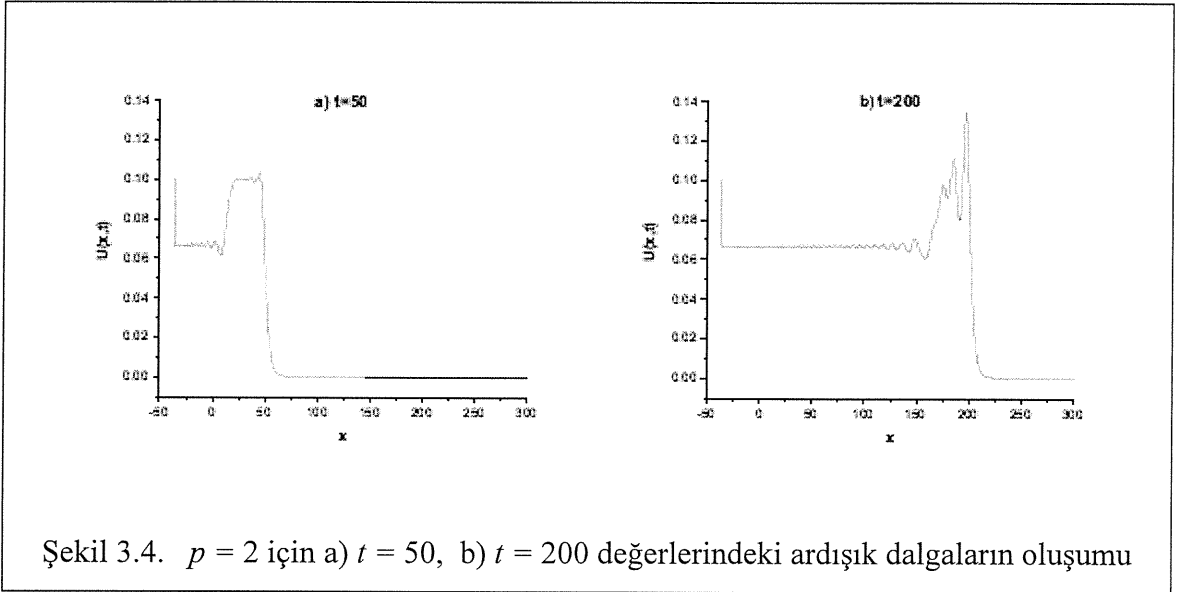
$$U(x, 0) = \frac{1}{2} U_0 \left[ 1 - \tanh\left(\frac{x - x_c}{d}\right) \right]. \quad (3.21)$$

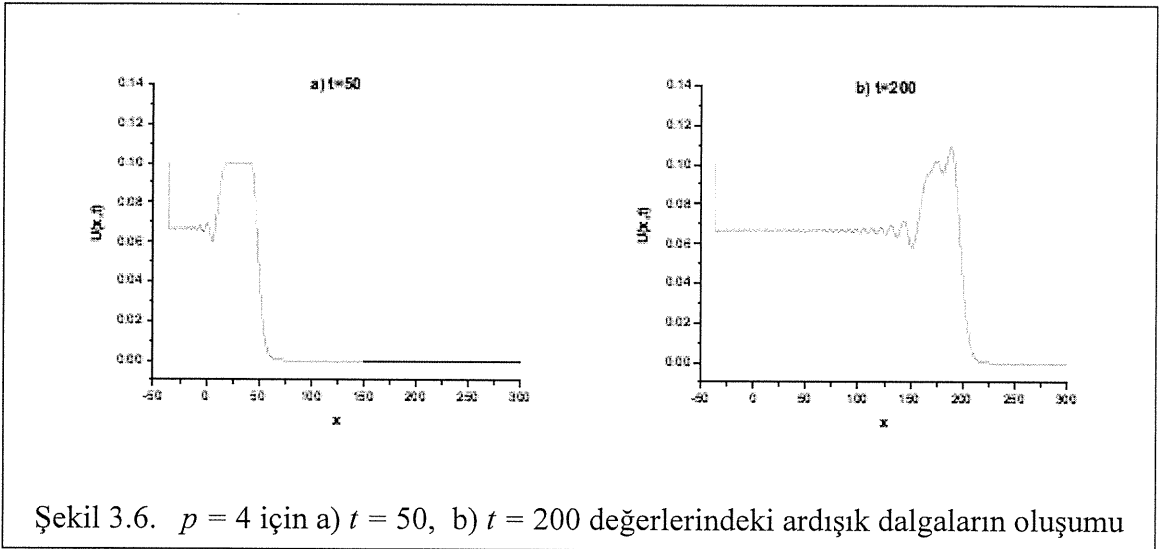
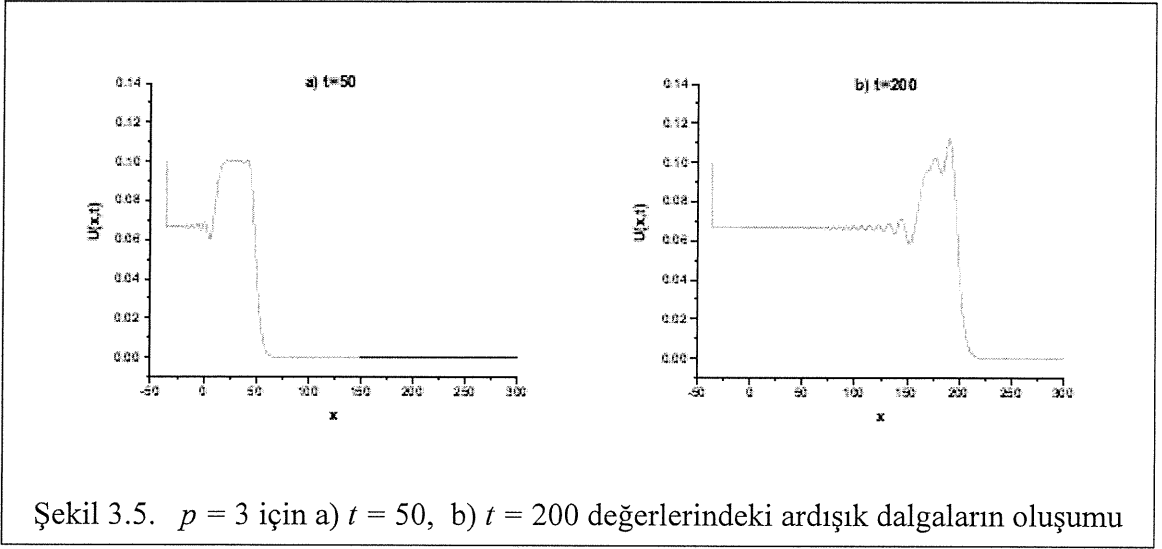
Denge seviyesinin üstünde bulunan suyun yükseltisini başlangıç şartının  $t = 0$  anı belirler. Burada  $d$  durgun ve derin su arasındaki eğimi,  $x_c$  de su seviyesindeki değişimi gösterir. [35, 40, 41] referansları ile verilen çalışmalarla uygunluk göstermesi için  $-36 \leq x \leq 300$  aralığında  $U_0 = 0.1$ ,  $\mu = 1/6$ ,  $x_c = 0$ ,  $d = 5$ ,  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.1$ , parametreleri alınmıştır. Elde edilen sonuçlar Tablo 3.8'de gösterilmiştir. Tablodan görüldüğü üzere korunum sabitlerinin değişimi istenen seviyededir. Ardışık dalgaların oluşumu Şekil 3.4, Şekil 3.5 ve Şekil 3.6'da verilmiştir. Şekillerden de görüldüğü gibi, seçilen bu başlangıç değerine göre uzun bir süre solitary dalgalarda

çok az dalgalanmalar olduğu görülür. İlerleyen zaman adımlarında solitary dalganın ani bir sıçrama hareketi ile genliği büyür ve daha sonra dalgayavaş yavaş sönmeye başlar.

Tablo 3.8.  $U_0 = 0.1$ ,  $x_0 = 0$ ,  $d = 5$ ,  $\mu = 1/6$ ,  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.1$  ve  $x \in [-36, 300]$  için ardışık dalgaların oluşumuna ait korunum sabitleri

| Zaman<br>↓ | $I_1$   |         |         | $I_2$  |        |        | $I_3$  |        |        |
|------------|---------|---------|---------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
|            | p=2     | p=3     | p=4     | p=2    | p=3    | p=4    | p=2    | p=3    | p=4    |
| 0          | 3.6049  | 3.6049  | 3.6049  | 0.3372 | 0.3372 | 0.3372 | 0.0014 | 0.0014 | 0.0014 |
| 50         | 7.0244  | 6.9980  | 6.9954  | 0.5694 | 0.5668 | 0.5665 | 0.0041 | 0.0041 | 0.0041 |
| 100        | 10.3873 | 10.3343 | 10.3290 | 0.7946 | 0.7893 | 0.7888 | 0.0051 | 0.0051 | 0.0051 |
| 150        | 13.7503 | 13.6706 | 13.6626 | 1.0198 | 1.0119 | 1.0110 | 0.0061 | 0.0061 | 0.0061 |
| 200        | 17.1133 | 17.0069 | 16.9961 | 1.2450 | 1.2344 | 1.2333 | 0.0071 | 0.0071 | 0.0071 |





## 4. BÖLÜM

### GRLW DENKLEMİNİN SEPTİK B-SPLİNE KOLLOKASYON SONLU ELEMAN YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

GRLW denklemi,

$$U_t + U_x + p(p+1)U^p U_x - \mu U_{xxt} = 0 \quad (4.1)$$

şekindedir. Fiziksel sınır şartları  $x \rightarrow \pm \infty$  iken  $U \rightarrow 0$  dır. Burada alt indis  $t$  ve  $x$  sırasıyla zaman ve boyutsal türevi ifade ederler ki,  $\varepsilon$  ve  $p$  pozitif tamsayı olup,  $\mu$  pozitif bir sabit sayıdır.

Sınır ve başlangıç şartları,

$$\begin{aligned} U(a, t) = 0, \quad U_x(a, t) = 0, \quad U_{xxx}(a, t) = 0, \\ U(b, t) = 0, \quad U_x(b, t) = 0, \quad U_{xxx}(b, t) = 0, \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$U(x, 0) = f(x), \quad a \leq x \leq b,$$

şeklinde alınacaktır.

Sonlu  $[a, b]$  aralığına sınırlandırılmış çözüm bölgesini ele alacak olursak aralık uzunluğu  $h = \frac{b-a}{N} = (x_{m+1} - x_m)$  ve  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$  olmak üzere,  $[a, b]$  aralığı  $x_m$  düğüm noktaları aracılığıyla  $N$  tane eşit aralığa parçalanır.  $\Phi_m(x)$  septik B-spline fonksiyonları  $m = -3, -2, \dots, N + 3$  olmak üzere  $x_m$  düğüm noktalarında aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır [9].

$$\Phi_m(x) = \frac{1}{h^7} \begin{cases} (x - x_{m-4})^7, & [x_{m-4}, x_{m-3}] \\ (x - x_{m-4})^7 - 8(x - x_{m-3})^7, & [x_{m-3}, x_{m-2}] \\ (x - x_{m-4})^7 - 8(x - x_{m-3})^7 + 28(x - x_{m-2})^7, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ (x - x_{m-4})^7 - 8(x - x_{m-3})^7 + 28(x - x_{m-2})^7 - 56(x - x_{m-1})^7, & [x_{m-1}, x_m] \\ (x_{m+4} - x)^7 - 8(x_{m+3} - x)^7 + 28(x_{m+2} - x)^7 - 56(x_{m+1} - x)^7, & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+4} - x)^7 - 8(x_{m+3} - x)^7 + 28(x_{m+2} - x)^7, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ (x_{m+4} - x)^7 - 8(x_{m+3} - x)^7, & [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ (x_{m+4} - x)^7, & [x_{m+3}, x_{m+4}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (4.3)$$

$\{\Phi_{-3}(x), \Phi_{-2}(x), \dots, \Phi_{N+2}(x), \Phi_{N+3}(x)\}$  septik B-spline fonksiyonları,  $[a, b]$  aralığındaki fonksiyonlar için bir baz oluşturur.  $\Phi_m$  septik B-spline fonksiyonların her biri sonlu ardışık sekiz tane alt aralığı örtecektir. Bundan dolayı sekiz adet B-spline



fonksiyonu her bir  $[x_m, x_{m+1}]$  sonlu alt aralığını örter.  $U_N(x, t)$  yaklaşımı septik B-spline şekil fonksiyonları türünden yazılırsa,

$$U_N(x, t) = \sum_{m=-3}^{N+3} \phi_m(x) \delta_m(t) \quad (4.4)$$

yaklaşım fonksiyonu elde edilir. Yukarıdaki  $\delta_m(t)$ , zamana bağlı bilinmeyen parametreleri GRLW denkleminin septik B-spline kollokasyon şartları ve sınır koşulları kullanılarak belirlenecektir. (4.4) ile verilen yaklaşım çözümünde (4.3) ile verilen B-spline fonksiyonlar kullanılırsa,  $U_m$  yaklaşım fonksiyonu ve  $U_m$ 'in  $x$ 'e göre  $U'_m, U''_m$  türevleri,  $x_m$  düğüm noktasında  $\delta_m$  bilinmeyen parametreleri türünden,

$$\begin{aligned} U_m &= \delta_{m-3} + 120\delta_{m-2} + 1191\delta_{m-1} + 2416\delta_m + 1191\delta_{m+1} + 120\delta_{m+2} + \delta_{m+3}, \\ U'_m &= \frac{7}{h} (-\delta_{m-3} - 56\delta_{m-2} - 245\delta_{m-1} + 245\delta_{m+1} + 56\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \\ U''_m &= \frac{42}{h^2} (\delta_{m-3} + 24\delta_{m-2} + 15\delta_{m-1} - 80\delta_m + 15\delta_{m+1} + 24\delta_{m+2} + \delta_{m+3}). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Şeklinde bulunur [33]. Böylelikle  $U$  değişimi sonlu  $[x_m, x_{m+1}]$  elemanı üzerinde aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$U = \sum_{m=-3}^{N+3} \phi_m \delta_m. \quad (4.6)$$

(4.1) ile verilen GRLW denkleminde, (4.5) de bulunan  $U_m, U'_m$  ve  $U''_m$  yerine yazılırsa düğüm noktalarıyla birlikte kollokasyon şartını oluşacaktır. Buna göre;

Klasik lineerleştirme tekniği için,

$$\begin{aligned} &(\dot{\delta}_{m-3} + 120\dot{\delta}_{m-2} + 1191\dot{\delta}_{m-1} + 2416\dot{\delta}_m + 1191\dot{\delta}_{m+1} + 120\dot{\delta}_{m+2} + \dot{\delta}_{m+3}) \\ &+ \frac{7}{h} (-\dot{\delta}_{m-3} - 56\dot{\delta}_{m-2} - 245\dot{\delta}_{m-1} + 245\dot{\delta}_{m+1} + 56\dot{\delta}_{m+2} + \dot{\delta}_{m+3}) \\ &+ \frac{7p(p+1)Z_m}{h} (-\dot{\delta}_{m-3} - 56\dot{\delta}_{m-2} - 245\dot{\delta}_{m-1} + 245\dot{\delta}_{m+1} + 56\dot{\delta}_{m+2} + \dot{\delta}_{m+3}) \\ &- \frac{42\mu}{h^2} (\dot{\delta}_{m-3} + 24\dot{\delta}_{m-2} + 15\dot{\delta}_{m-1} - 80\dot{\delta}_m + 15\dot{\delta}_{m+1} + 24\dot{\delta}_{m+2} + \dot{\delta}_{m+3}) = 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

biçiminde birleştirilmiş adi diferansiyel denklemlerin bir kümesi bulunur. Burada lineer olmayan  $Z_m$  terimi;

$$Z_m \cong [U_m^n]^p = \left( \begin{array}{c} \delta_{m-3}^n + 120\delta_{m-2}^n + 1191\delta_{m-1}^n + 2416\delta_m^n + 1191\delta_{m+1}^n \\ + 120\delta_{m+2}^n + \delta_{m+3}^n \end{array} \right)^p$$

dir. (4.7) ile verilen denklemde “” zamana bağlı türevi ifade eder. (4.7) ile verilen genel çözüm denkleminde konuma göre bilinmeyen parametreler  $\delta_m$  ve zamana göre türevleri olan  $\dot{\delta}_m$  parametrelerine,

$$\delta_m = \frac{1}{2}(\delta_m^n + \delta_m^{n+1}), \quad \dot{\delta}_m = \frac{\delta_m^{n+1} - \delta_m^n}{\Delta t} \quad (4.8)$$

(4.8) de verilen Crank-Nicolson ve klasik ileri sonlu fark yaklaşımı uygulanırsa buradan klasik lineerleştirme tekniği için  $\delta_i^{n+1}$  ve  $\delta_i^n$  bilinmeyen zaman parametrelerine göre,  $n$  ve  $n + 1$  ardışık zaman adımı arasındaki tekraralama bağıntısı,

$$\begin{aligned} & \gamma_1 \delta_{m-3}^{n+1} + \gamma_2 \delta_{m-2}^{n+1} + \gamma_3 \delta_{m-1}^{n+1} + \gamma_4 \delta_m^{n+1} + \gamma_5 \delta_{m+1}^{n+1} + \gamma_6 \delta_{m+2}^{n+1} + \gamma_7 \delta_{m+3}^{n+1} \\ & = \gamma_7 \delta_{m-3}^n + \gamma_6 \delta_{m-2}^n + \gamma_5 \delta_{m-1}^n + \gamma_4 \delta_m^n + \gamma_3 \delta_{m+1}^n + \gamma_2 \delta_{m+2}^n + \gamma_1 \delta_{m+3}^n \end{aligned} \quad (4.9)$$

şeklinde bulunur. Buradaki  $\gamma$  katsayıları,

$$\gamma_1 = (1 - E - p(p + 1)EZ_m - M), \quad \gamma_2 = (120 - 56E - 56p(p + 1)EZ_m - 24M),$$

$$\gamma_3 = (1191 - 245E - 245p(p + 1)EZ_m - 15M), \quad \gamma_4 = (2416 + 80M),$$

$$\gamma_5 = (1191 + 245E + 245p(p + 1)EZ_m - 15M),$$

$$\gamma_6 = (120 + 56E + 56p(p + 1)EZ_m - 24M), \quad \gamma_7 = (1 + E + p(p + 1)EZ_m - M),$$

$$m = 0, 1, \dots, N, \quad E = \frac{7}{2h} \Delta t, \quad M = \frac{42\mu}{h^2}. \quad (4.10)$$

biçimindedir.

(4.10) da verilen cebirsel denklem sistemi  $N + 1$  tane lineer denklemden meydana gelir, ancak burada  $(\delta_{-3}, \delta_{-2}, \delta_{-1}, \dots, \delta_{N+1}, \delta_{N+2}, \delta_{N+3})^T$  parametrelerinden gelen  $N + 7$  tane bilinmeyen olup, bu sisteme ait tek çözümü bulmak için altı tane ek şarta ihtiyaç duyulur ki bu ek şartlar (4.2) de verilen sınır koşulları aracılığıyla bulunur. Cebirsel denklem sistemine sınır koşullarının dahil edilmesi şeklinde ifade edilen bu adımın

benzeri, aşağıda verilen iterasyonu başlatmak için  $d^0$  in tespit edilmesi aşamasında verilmiştir. Bu işlemlerden sonra (4.9) ile verilen cebirsel denklem sisteminden  $\delta_{-3}, \delta_{-2}, \delta_{-1}$  ve  $\delta_{N+1}, \delta_{N+2}, \delta_{N+3}$  parametreleri elimine edilir. Buradan  $d^n = (\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_N)^T$  olmak üzere,  $N + 1$  tane bilinmeyenli cebirsel denklem sistemi elde edilir:

$$Cd^{n+1} = Dd^n. \quad (4.11)$$

$C$  ve  $D$  matrisleri,  $(N + 1) \times (N + 1)$  boyutlu yedi sütun elemanlı septa-diagonal matris olarak adlandırılan matrislerdir. (4.11) ile verilen matris denklemi aşağıda alt bölüm 4.1'de belirtildiği üzere Fortran programında Thomas algoritması (septa-diagonal algoritma) kullanılmak suretiyle çözülmüştür. Bu adımda  $Z_m$  deki eleman parametresine aşağıda verilen iç iterasyon her bir zaman adımında üç veya dört defa tatbik edilerek çözüm iyileştirilmiştir.

$$(\delta_m^*)^{n+1} = \delta_m^n + \frac{1}{2}(\delta_m^{n+1} - \delta_m^n)$$

### Başlangıç iterasyonu

Tekrarlama bağıntısının verildiği (4.9) da,  $d^0$  değerinin bulunmasıyla iterasyon başlatılırsa başlangıç parametreleri türünden yaklaşım fonksiyonu;

$$U_N(x, 0) = \sum_{m=-2}^{N+2} \phi_m(x) \delta_m^0(t).$$

biçiminde olacaktır. Aşağıda belirtilen başlangıç şartı ve sınır noktalarındaki türevler, yukarıdaki yaklaşımda verilen  $\delta_m^0$  parametrelerini bulmak için kullanılacaktır.

$$U_N(x, 0) = U(x_m, 0); \quad m = 0, 1, 2, \dots, N$$

$$(U_N)_x(a, 0) = 0, \quad (U_N)_{xx}(a, 0) = 0, \quad (U_N)_{xxx}(a, 0) = 0, \quad (4.12)$$

$$(U_N)_x(b, 0) = 0, \quad (U_N)_{xx}(b, 0) = 0, \quad (U_N)_{xxx}(b, 0) = 0.$$

Başlangıç şartı  $\delta_m$  parametreleri türünden,

$$\delta_{-3} + 120\delta_{-2} + 1191\delta_{-1} + 2416\delta_0 + 1191\delta_1 + 120\delta_2 + \delta_3 = U(x_0, 0),$$

$$\delta_{-2} + 120\delta_{-1} + 1191\delta_0 + 2416\delta_1 + 1191\delta_2 + 120\delta_3 + \delta_4 = U(x_1, 0)$$

$$\begin{aligned}
\delta_{-1}+120\delta_0+1191\delta_1+2416\delta_2 + 1191\delta_3 +120\delta_4 + \delta_5 &= U(x_2, 0) \\
\delta_0+120\delta_1+1191\delta_2+2416\delta_3 + 1191\delta_4 +120\delta_5 + \delta_6 &= U(x_3, 0) \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\delta_{N-6}+120\delta_{N-5}+1191\delta_{N-4}+2416\delta_{N-3} + 1191\delta_{N-2} +120\delta_{N-1} + \delta_N &= U(x_{N-3}, 0), \\
\delta_{N-5}+120\delta_{N-4}+1191\delta_{N-3}+2416\delta_{N-2} + 1191\delta_{N-1} +120\delta_N + \delta_{N+1} &= U(x_{N-2}, 0), \\
\delta_{N-4}+120\delta_{N-3}+1191\delta_{N-2}+2416\delta_{N-1} + 1191\delta_N +120\delta_{N+1} + \delta_{N+2} &= U(x_{N-1}, 0), \\
\delta_{N-3}+120\delta_{N-2}+1191\delta_{N-1}+2416\delta_N + 1191\delta_{N+1} +120\delta_{N+2} + \delta_{N+3} &= U(x_N, 0)
\end{aligned} \tag{4.13}$$

olarak elde edilir. Bu denklem sistemi,  $(\delta_{-3}, \delta_{-2}, \delta_{-1}, \dots, \delta_{N+1}, \delta_{N+2}, \delta_{N+3})^T$  parametrelerinden gelen  $N + 7$  tane bilinmeyenden ve  $N + 1$  tane lineer denklemden oluşur. Dolayısıyla sistemin tek çözümünün bulunabilmesi için altı tane daha ek şarta ihtiyaç duyulur. O halde başlangıç şartının (4.12) ile verilen sınır noktalarındaki türevleri kullanılacak olursa ,  $\delta_m$  parametreleri türünden türevli sınır koşulları,

$$\begin{aligned}
-\delta_{-3} - 56\delta_{-2} - 245\delta_{-1} + 245\delta_1 + 56\delta_2 + \delta_3 &= 0, \\
\delta_{-3} + 24\delta_{-2} + 15\delta_{-1} - 80\delta_0 + 15\delta_1 + 24\delta_2 + \delta_3 &= 0, \\
-\delta_{-3} - 8\delta_{-2} + 19\delta_{-1} - 19\delta_1 + 8\delta_2 + \delta_3 &= 0, \\
-\delta_{N-3} - 56\delta_{N-2} - 245\delta_{N-1} + 245\delta_{N+1} + 56\delta_{N+2} + \delta_{N+3} &= 0, \\
\delta_{N-3} + 24\delta_{N-2} + 15\delta_{N-1} - 80\delta_N + 15\delta_{N+1} + 24\delta_{N+2} + \delta_{N+3} &= 0, \\
-\delta_{N-3} - 8\delta_{N-2} + 19\delta_{N-1} - 19\delta_{N+1} + 8\delta_{N+2} + \delta_{N+3} &= 0
\end{aligned} \tag{4.14}$$

şeklinde bulunur. Bu denklemlerden  $(\delta_{-3}, \delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_{N+1}, \delta_{N+2}, \delta_{N+3})$  parametreleri hesaplanırsa aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}
\delta_{-3} &= \frac{1}{3}(-280\delta_0 + 105\delta_1 + 16\delta_2 + 10\delta_3), \\
\delta_{-2} &= \frac{220}{27}\delta_0 - \frac{55}{18}\delta_1 - \frac{35}{9}\delta_2 - \frac{11}{54}\delta_3, \\
\delta_{-1} &= -\frac{40}{27}\delta_0 + \frac{14}{9}\delta_1 + \frac{8}{9}\delta_2 + \frac{1}{27}\delta_3, \\
\delta_{N+1} &= -\frac{40}{27}\delta_N + \frac{14}{9}\delta_{N-1} + \frac{8}{9}\delta_{N-2} + \frac{1}{27}\delta_{N-3},
\end{aligned} \tag{4.15}$$



#### 4.1 Thomas algoritması ile septa-diagonal matris sisteminin çözümü

Septa-diagonal matris sisteminin Thomas algoritması ile çözümü, Zaki [42] tarafından açıklandığı gibi ve Fortran programında dizayn edildiği biçimiyle aşağıda verilen adımlarla bulunabilir:

Septa-diagonal sistem aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$a_i \delta_{i-3} + b_i \delta_{i-2} + c_i \delta_{i-1} + d_i \delta_i + e_i \delta_{i+1} + f_i \delta_{i+2} + g_i \delta_{i+3} = h_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N$$

Burada,

$$a_0 = b_0 = c_0 = a_1 = b_1 = g_{N-2} = g_{N-1} = f_{N-1} = g_N = f_N = e_N = 0.$$

İlk olarak, parametreler aşağıdaki şekilde seçilir:

$$\alpha_0 = b_0, \quad \beta_0 = c_0, \quad \mu_0 = d_0, \quad \zeta_0 = \frac{e_0}{\mu_0}, \quad \lambda_0 = \frac{f_0}{\mu_0}, \quad \eta_0 = \frac{g_0}{\mu_0}, \quad \gamma_0 = \frac{h_0}{\mu_0},$$

$$\alpha_1 = b_1, \quad \beta_1 = c_1, \quad \mu_1 = d_1 - \beta_1 \zeta_0, \quad \zeta_1 = \frac{e_1 - \beta_1 \lambda_0}{\mu_1}, \quad \lambda_1 = \frac{f_1 - \beta_1 \gamma_0}{\mu_1},$$

$$\eta_1 = \frac{g_1}{\mu_1}, \quad \gamma_1 = \frac{h_1 - \beta_1 \lambda_0}{\mu_1},$$

ve

$$\alpha_2 = b_2, \quad \beta_2 = c_2 - \alpha_2 \zeta_0, \quad \mu_2 = d_2 - \lambda_0 \alpha_2 - \beta_2 \zeta_1, \quad \zeta_2 = \frac{e_2 - \eta_0 \alpha_2 - \beta_2 \lambda_1}{\mu_2},$$

$$\lambda_2 = \frac{f_2 - \beta_2 \eta_1}{\mu_2}, \quad \eta_2 = \frac{g_2}{\mu_2}, \quad \gamma_2 = \frac{h_2 - \alpha_2 \gamma_0 - \beta_2 \gamma_1}{\mu_2}.$$

İkinci olarak, aşağıda verilen parametreler elde edilir:

$$\alpha_i = b_i - a_i \zeta_{i-3}, \quad \beta_i = c_i - a_i \lambda_{i-3} - \alpha_i \zeta_{i-2}, \quad \mu_i = d_i - a_i \eta_{i-3} - \lambda_{i-2} \alpha_i - \beta_i \zeta_{i-1},$$

$$\zeta_i = \frac{e_i - \eta_{i-2} \alpha_i - \beta_i \lambda_{i-1}}{\mu_i}, \quad \lambda_i = \frac{f_i - \beta_i \eta_{i-1} - \alpha_{i-2} \lambda_{i-2}}{\mu_i}, \quad \eta_i = \frac{g_i}{\mu_i},$$

$$\gamma_i = \frac{h_i - \beta_i \gamma_{i-1} - \alpha_i \gamma_{i-2} - a_i \gamma_{i-3}}{\mu_i}, \quad i = 3, 4, \dots, N.$$

Bu iki aşamadan sonra çözüm,

$$\delta_i = \gamma_i - \zeta_i \delta_{i+1} - \lambda_i \delta_{i+2} - \eta_i \delta_{i+3}, \quad i = 0, 1, \dots, N-4, N-3,$$

$$\delta_{N-2} = \gamma_{N-2} - \lambda_{N-2} \delta_N - \eta_{N-2} \delta_{N-1}, \quad \delta_{N-1} = \gamma_{N-1} - \eta_{N-1} \delta_N, \quad \delta_N = \gamma_N.$$

şeklinde bulunur.

## 4.2 Lineer kararlılık analizi

Von-Neumann kararlılık analizi, sayısal yöntemin lineer olarak kararlı olup-olmadığını belirlemek için uygulanacaktır. GRLW denkleminde bulunan lineer olmayan  $U^p U_x$  terimindeki  $U^p$  teriminin bölgesel olarak sabit olduğu kabul edilir,  $k$  mod numarası ve  $h$  eleman büyüklüğü olarak alınırsa,  $\delta_m^n = \xi^n e^{imkh}$  ( $i = \sqrt{-1}$ ) ile verilen Fourier teriminin, (4.10) ile verilen denklem de tatbik edilmesiyle;

$$\begin{aligned} & \gamma_1 \xi^{n+1} e^{i(m-3)kh} + \gamma_2 \xi^{n+1} e^{i(m-2)kh} + \gamma_3 \xi^{n+1} e^{i(m-1)kh} + \gamma_4 \xi^{n+1} e^{imkh} \\ & + \gamma_5 \xi^{n+1} e^{i(m+1)kh} + \gamma_6 \xi^{n+1} e^{i(m+2)kh} + \gamma_7 \xi^{n+1} e^{i(m+3)kh} = \\ & \gamma_7 \xi^n e^{i(m-3)kh} + \gamma_6 \xi^n e^{i(m-2)kh} + \gamma_5 \xi^n e^{i(m-1)kh} + \gamma_4 \xi^n e^{imkh} \\ & + \gamma_3 \xi^n e^{i(m+1)kh} + \gamma_2 \xi^n e^{i(m+2)kh} + \gamma_1 \xi^n e^{i(m+3)kh} \end{aligned} \quad (4.16)$$

eşitliği bulunur.

$e^{ikh} = \cos(kh) + i \sin(kh)$  Euler formülünün (4.16) ile verilen denklem kullanılmasıyla büyüme faktörü olan  $\xi$  aşağıdaki şekilde bulunur:

$$\xi = \frac{a - ib}{a + ib}$$

Burada,

$$a = \gamma_4 + (\gamma_5 + \gamma_3) \cos[hk] + (\gamma_6 + \gamma_2) \cos[2hk] + (\gamma_7 + \gamma_1) \cos[3hk],$$

$$b = (\gamma_5 - \gamma_3) \sin[hk] + (\gamma_6 - \gamma_2) \sin[2hk] + (\gamma_7 - \gamma_1) \sin[3hk].$$

olmak üzere  $|\xi|$  nin değeri 1 olur. O halde lineerleştirilmiş algoritma şartsız kararlıdır.

## 4.3 Sayısal hesaplamalar

Bu kısımda sayısal algoritma, başlangıç şartının farklı değerlerden seçilmesiyle oluşan tek solitary dalga'nın davranışı, iki solitary dalga arasındaki girişim ve Maxwellian başlangıç koşulunu içeren üç örneğe uygulanmıştır. Daha önceki çalışmalarda bulunan sonuçlarla yeni bulunan sayısal sonuçları karşılaştırabilmek ve sayısal algoritmanın doğruluğunu göstermek için  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları aşağıdaki ifadelerden yararlanılarak bulunmuştur.

$$L_2 = \|U^{tam} - U_N\|_2 \approx \sqrt{h \cdot \sum_{j=0}^N |U_j^{tam} - (U_N)_j|^2},$$

$$L_\infty = \|U^{tam} - U_N\|_\infty \approx \max_j |U_j^{tam} - (U_N)_j|.$$

GRLW dekleminin tam çözümü,

$$U(x, t) = \sqrt[p]{\frac{c(p+2)}{2p} \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{p}{2} \sqrt{\frac{c}{\mu(c+1)}} (x - (c+1)t - x_0) \right]} \quad (4.17)$$

biçiminde verilmiştir [34]. Burada dalganın genliği  $\sqrt[p]{\frac{c(p+2)}{2p}}$ , pozitif  $x$  yönünde ilerleyen dalganın sabit hızı  $c+1$  ve  $x_0$  keyfi bir sabit olup sayısal yöntemin kütle, momentum ve enerjisi ile ilgili özelliklerini koruduğunu belirtmek amacı ile,

$$I_1 = \int_a^b U dx, \quad I_2 = \int_a^b [U^2 + \mu U_x^2] dx, \quad I_3 = \int_a^b [U^4 - \mu U_x^2] dx \quad (4.18)$$

olarak verilen korunum sabitlerindeki değişim araştırılmıştır.

#### 4.3.1 Tek solitary dalganın davranışı

Buradaki örnek için korunum sabitleri ve hata normları, klasik lineerleştirme tekniği uygulanarak bulunmuştur. Başlangıç şartı olarak kullanılacak fonksiyon (4.17) ile verilen denklemde  $t=0$  alınması ile bulunmuştur. Bulunan yaklaşık değerler, daha önce yapılan çalışmalarla [20, 34, 38] karşılaştırılmıştır.  $\mu = 1$ ,  $x_0 = 40$  ve  $x \in [0, 100]$  nin aynı değerleri;  $p$ ,  $c$ ,  $h$ ,  $\Delta t$  ve genlikleri' nin farklı değerleri alınarak altı farklı parametre kümesi oluşturulmuştur. Deneyler  $t = 10$  veya  $t = 20$  anına kadar çalıştırılmıştır.

İlk olarak,  $p=2$ ,  $c=1$ ,  $h=0.2$  ve  $\Delta t=0.025$  parametre değerleri alınmıştır. Alınan bu parametrelere göre solitary dalganın genliği 1 olarak hesaplanmıştır. Sayısal yöntem  $t = 10$  zamanına kadar çalıştırılmış ve bulunan değerler Tablo 4.1'de verilmiştir. Bu tablodan, klasik lineerleştirme tekniği için hesaplanan korunum sabitlerinin  $t = 10$  zamanına kadar neredeyse değişmeden kaldığı, ayrıca  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normlarının değerlerinin beklenildiği kadar küçük kaldığı sonucu çıkarılabilir.



Tablo 4.1.  $p = 2$ ,  $gen. = 1$ ,  $h = 0.2$ ,  $\Delta t = 0.025$  ve  $x \in [0, 100]$  için hesaplanan tek solitary dalganın korunum sabitleri ve hata norm değerleri

| $t$                    | 0          | 2          | 4          | 6          | 8          | 10         |
|------------------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| $h_1$                  | 4.4428661  | 4.4428661  | 4.4428661  | 4.4428661  | 4.4428661  | 4.4428661  |
| $h_2$                  | 3.2998227  | 3.2998227  | 3.2998227  | 3.2998227  | 3.2998227  | 3.2998227  |
| $h_3$                  | 1.4142046  | 1.4142046  | 1.4142045  | 1.4142045  | 1.4142045  | 1.4142045  |
| $L_2 \times 10^3$      | 0.00000000 | 0.60716949 | 1.14063868 | 1.64433340 | 2.63246332 | 2.63246332 |
| $L_\infty \times 10^3$ | 0.00000000 | 0.36598695 | 0.63405702 | 0.88886854 | 1.39306406 | 1.39306406 |

İkinci olarak,  $p = 2$ ,  $c = 0.3$ ,  $h = 0.1$  ve  $\Delta t = 0.01$  için solitary dalganın genliği 0.54772 büyüklüğüne sahiptir. Sayısal veriler  $t = 0$  dan  $t = 20$  zamanına kadar çalıştırılmış ve bulunan değerler Tablo 4.2’de verilmiştir. Bu tabloya göre klasik lineerleştirme tekniği uygulanarak hesaplanan korunum sabitleri, zaman ilerledikçe neredeyse aynı kalmaktadır.

Tablo 4.2.  $p = 2$ ,  $gen. = 0.54772$ ,  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.01$  ve  $x \in [0, 100]$  için hesaplanan tek solitary dalganın korunum sabitleri ve hata norm değerleri

| $t$                    | 0          | 4          | 8          | 12         | 16         | 20         |
|------------------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| $h_1$                  | 3.5820205  | 3.5820205  | 3.5820205  | 3.5820206  | 3.5820205  | 3.5820204  |
| $h_2$                  | 1.3450941  | 1.3450941  | 1.3450941  | 1.3450941  | 1.3450941  | 1.3450941  |
| $h_3$                  | 0.1537283  | 0.1537283  | 0.1537283  | 0.1537283  | 0.1537283  | 0.1537283  |
| $L_2 \times 10^4$      | 0.00000000 | 0.23672179 | 0.47619933 | 0.71790890 | 0.96089487 | 1.20462362 |
| $L_\infty \times 10^4$ | 0.00000000 | 0.09872538 | 0.20175604 | 0.30567565 | 0.40978331 | 0.51392349 |

Üçüncü olarak  $p = 3$ ,  $c = 6/5$ ,  $h = 0.1$  ve  $\Delta t = 0.025$  parametre değerleri için, solitary dalğanın genliği 1 olarak elde edilmiştir. Uygulamalar  $t = 10$  zamanına kadar yapılmış, bu parametreler için korunum sabitleri ve hata normaları Tablo 4.3'de verilmiştir. Bu tablodan da görüldüğü üzere korunum sabitleri için klasik lineerleştirme tekniği ile elde edilen sonuçlar daha iyidir. Bu dalğanın hareketi Şekil 4.1'de verilmiştir. Bu şekilden, dalğanın zaman ilerledikçe beklenildiği gibi sağa doğru sabit hız ve neredeyse değişmeyen genlikle hareket ettiği anlaşılabilir. Bu durumun ise solitary dalga tanımına uyduğu görülmektedir.

Tablo 4.3.  $p = 3$ ,  $gen. = 1$ ,  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.025$  ve  $x \in [0, 100]$  için hesaplanan tek solitary dalğanın korunum sabitleri ve hata norm değerleri

| $t$                    | 0          | 2          | 4          | 6          | 8          | 10         |
|------------------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| $h_1$                  | 3.7971850  | 3.7971850  | 3.7971850  | 3.7971850  | 3.7971850  | 3.7971850  |
| $h_2$                  | 2.8812522  | 2.8812522  | 2.8812522  | 2.8812522  | 2.8812522  | 2.8812522  |
| $h_3$                  | 0.9729661  | 0.9730958  | 0.9731319  | 0.9731417  | 0.9731447  | 0.9731457  |
| $L_2 \times 10^3$      | 0.00000000 | 1.90329843 | 3.69133655 | 5.45488983 | 7.21419106 | 8.97298352 |
| $L_\infty \times 10^3$ | 0.00000000 | 1.16955458 | 2.17410995 | 3.17420400 | 4.17483173 | 5.17598210 |

Dördüncü olarak,  $p = 3$ ,  $c = 0.3$ ,  $h = 0.1$  ve  $\Delta t = 0.01$  parametreleri alındığında dalğanın genliği 0.6 olarak bulunmuş, hesaplamalar  $t = 10$  anına kadar yapılmıştır. Elde edilen veriler Tablo 4.4'te listelenmiştir. Tablo 4.4'den, klasik lineerleştirme tekniği ile bulunan hareket sabitleri, elde edilme süresince neredeyse aynı kalmaktadır. Ayrıca hata norm değerleri ise beklendiği gibi yeterince küçük olarak bulunmuştur.

Tablo 4.4.  $p = 3$ ,  $gen. = 0.6$ ,  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.01$  ve  $x \in [0, 100]$  için hesaplanan tek solitary dalğanın korunum sabitleri ve hata norm değerleri

| $t$                    | 0          | 2          | 4          | 6          | 8          | 10         |
|------------------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| $I_1$                  | 3.6776069  | 3.6776069  | 3.6776069  | 3.6776069  | 3.6776070  | 3.6776070  |
| $I_2$                  | 1.5657604  | 1.5657604  | 1.5657604  | 1.5657604  | 1.5657604  | 1.5657604  |
| $I_3$                  | 0.2268462  | 0.2268462  | 0.2268462  | 0.2268462  | 0.2268462  | 0.2268462  |
| $L_2 \times 10^4$      | 0.00000000 | 0.17328588 | 0.34661331 | 0.52006829 | 0.69360491 | 0.86713653 |
| $L_\infty \times 10^4$ | 0.00000000 | 0.08009713 | 0.15772492 | 0.23706868 | 0.31711953 | 0.39714589 |

Beşinci olarak,  $p = 4$ ,  $c = 4/3$ ,  $h = 0.1$  ve  $\Delta t = 0.025$  olarak alınırsa solitary dalğanın genliği 1 olarak hesaplanmış, bu parametrelere göre deneyler  $t = 10$  anına kadar çalıştırılmıştır. Bulunan veriler Tablo 4.5'te sunulmuştur. Tablodan anlaşılacağı üzere  $I_1$ ,  $I_2$  ve  $I_3$  korunum sabitlerinin başlangıç durumuna göre değişim oranı %0.004 ve daha küçük bulunmuş ve  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları ise, elde edilme süresince  $0.34 \times 10^{-2}$  den daha küçük olmaktadır. Şekil 4.2'de elde edilen sayısal verilerin bir dalga hareketi meydana getirdiği ve bu dalgaların ilerleyen zamanlarda büyüklüklerini koruyarak sabit hızda ilerleyen solitary dalgalar olduğu görülür.

Tablo 4.5.  $p = 4$ ,  $gen. = 1$ ,  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.025$  ve  $x \in [0, 100]$  için hesaplanan tek solitary dalğanın korunum sabitleri ve hata norm değerleri

| $t$                    | 0          | 2          | 4          | 6          | 8          | 10         |
|------------------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| $I_1$                  | 3.4687090  | 3.4687090  | 3.4687090  | 3.4687090  | 3.4687090  | 3.4687090  |
| $I_2$                  | 2.6716961  | 2.6716961  | 2.6716961  | 2.6716961  | 2.6716961  | 2.6716961  |
| $I_3$                  | 0.7291997  | 0.7292453  | 0.7292551  | 0.7292575  | 0.7292582  | 0.7292584  |
| $L_2 \times 10^3$      | 0.00000000 | 0.68380580 | 1.35202774 | 2.01856221 | 2.68509298 | 3.35174007 |
| $L_\infty \times 10^3$ | 0.00000000 | 0.43263300 | 0.83440039 | 1.24065060 | 1.64702738 | 2.04973389 |

Son olarak,  $p=4$ ,  $c=0.3$ ,  $h=0.1$  ve  $\Delta t=0.01$  parametreleri için dalganın genliği 0.6 büyüklüğüne sahip olur. Uygulamalar  $t=10$  anına kadar çalıştırılmış ve sonuçlar Tablo 4.6’da gösterilmiştir. Önceki parametrelerde olduğu gibi, klasik lineerleştirme tekniği ile hesaplanan korunum sabitlerinin hemen hemen değişmeden kaldığı anlaşılmaktadır.  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları ise sırasıyla hesaplama süresince,  $0.13 \times 10^{-3}$  ve  $0.63 \times 10^{-4}$  den daha küçük bulunmuştur.

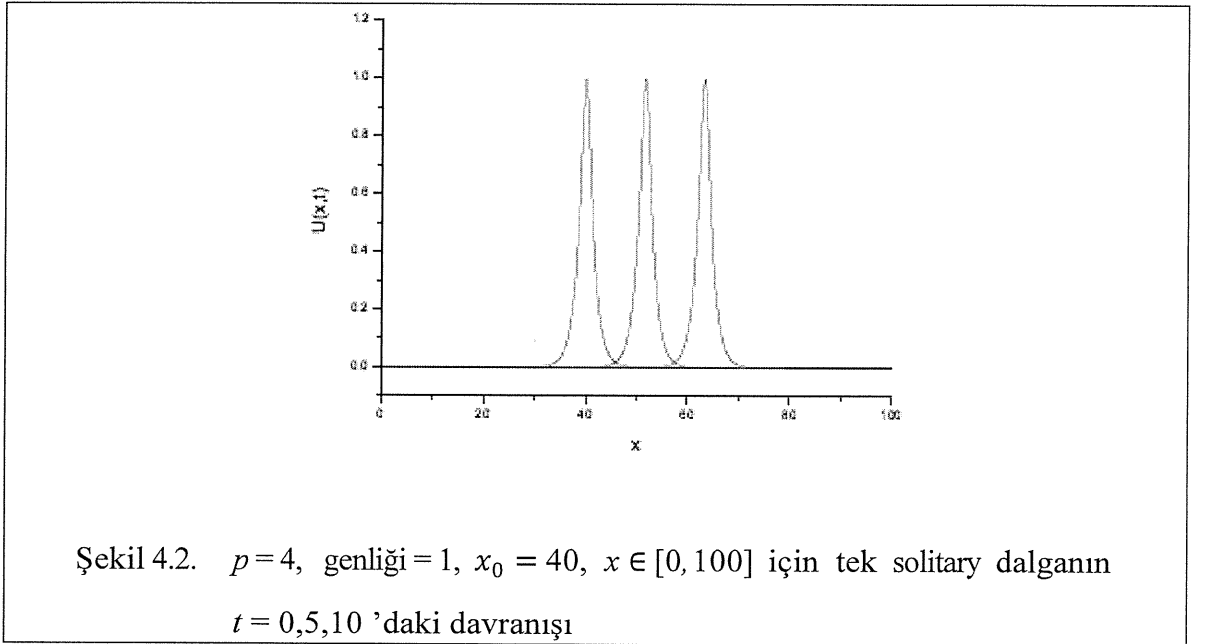
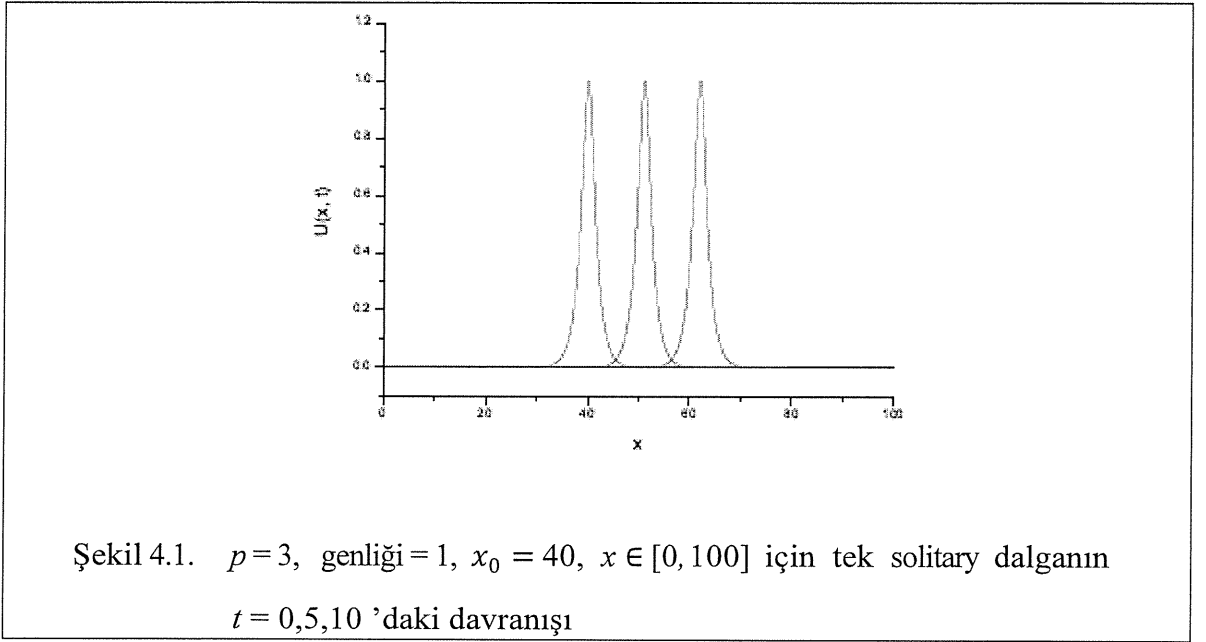
Tablo 4.6.  $p=4$ , gen.= 0.6,  $h=0.1$ ,  $\Delta t=0.01$  ve  $x \in [0, 100]$  için hesaplanan tek solitary dalganın korunum sabitleri ve hata norm değerleri

| $t$                    | 0          | 2          | 4          | 6          | 8          | 10         |
|------------------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| $h_1$                  | 3.7592865  | 3.7592865  | 3.7592865  | 3.7592865  | 3.7592865  | 3.7592865  |
| $h_2$                  | 1.7300238  | 1.7300238  | 1.7300238  | 1.7300238  | 1.7300238  | 1.7300238  |
| $h_3$                  | 0.2894189  | 0.2894191  | 0.2894192  | 0.2894192  | 0.2894192  | 0.2894192  |
| $L_2 \times 10^4$      | 0.00000000 | 0.25417530 | 0.50867400 | 0.76378746 | 1.01967310 | 1.27628477 |
| $L_\infty \times 10^4$ | 0.00000000 | 0.13193138 | 0.25511505 | 0.37848569 | 0.50227119 | 0.62645346 |

Tablo 4.7’de korunum sabitleri ve hata normları  $t=10$  anında farklı çalışmalardan hesaplanan verilerle kıyaslanmıştır. Elde edilen verilere göre korunum sabitleri diğer çalışmalara oldukça yakındır.  $L_2$  ve  $L_\infty$  normlarının büyüklükleri sırasıyla  $2.64 \times 10^{-3}$  ve  $1.40 \times 10^{-3}$  den daha küçük bulunmuş ve diğer çalışmalardan daha küçük olduğu saptanmıştır.

Tablo 4.7.  $p = 2, 3, 4$ ;  $t = 10$  ve  $x \in [0, 100]$  için hesaplanan tek solitary dalganın sayısal sonuçlarının karşılaştırılması

| $p$                    |                 | 2                                     | 3                                      | 4                                      |
|------------------------|-----------------|---------------------------------------|--|--|
|                        |                 | $gen. = 1, h = 0.2, \Delta t = 0.025$ | $gen. = 0.6, h = 0.1, \Delta t = 0.01$ | $gen. = 0.6, h = 0.1, \Delta t = 0.01$ |
| $h_1$                  | CBSC+PA-CN [34] | 4.44000000                            |  |  |
|                        | CBSC-CN [34]    | 4.44200000                            |  |  |
|                        | CBSC [38]       | 4.44288000                            |  |  |
|                        | QBSPG [20]      | 4.44288000                            | 3.67755000                             | 3.75923000                             |
|                        | SBSC            | 4.44286610                            | 3.67760700                             | 3.75928650                             |
| $h_2$                  | CBSC+PA-CN [34] | 3.29600000                            |  |  |
|                        | CBSC-CN [34]    | 3.29900000                            |  |  |
|                        | CBSC [38]       | 3.29983000                            |  |  |
|                        | QBSPG [20]      | 3.29981000                            | 1.56574000                             | 1.72999000                             |
|                        | SBSC            | 3.29982270                            | 1.56576040                             | 1.73002380                             |
| $h_3$                  | CBSC+PA-CN [34] | 1.41100000                            |  |  |
|                        | CBSC-CN [34]    | 1.41300000                            |  |  |
|                        | CBSC [38]       | 1.41420000                            |  |  |
|                        | QBSPG [20]      | 1.41416000                            | 0.22683700                             | 0.28940600                             |
|                        | SBSC            | 1.41420450                            | 0.22684620                             | 0.28941920                             |
| $L_2 \times 10^3$      | CBSC+PA-CN [34] | 20.30000000                           |  |  |
|                        | CBSC-CN [34]    | 16.39000000                           |  |  |
|                        | CBSC [38]       | 9.30196000                            |  |  |
|                        | QBSPG [20]      | 3.00533000                            | 0.07197600                             | 0.12253900                             |
|                        | SBSC            | 2.63246332                            | 0.08671365                             | 0.12762847                             |
| $L_\infty \times 10^3$ | CBSC+PA-CN [34] | 11.20000000                           |  |  |
|                        | CBSC-CN [34]    | 9.24000000                            |  |  |
|                        | CBSC [38]       | 5.43718000                            |  |  |
|                        | QBSPG [20]      | 1.68749000                            | 0.03772280                             | 0.06620700                             |
|                        | SBSC            | 1.39306406                            | 0.03971458                             | 0.06264534                             |



### 4.3.2 İki solitary dalganın girişimi

Burada, yönleri aynı olan pozitif sırasıyla 2 ve 1 genliklerine sahip iki solitary dalga arasındaki girişim,

$$U(x, 0) = \sum_{i=1}^2 \sqrt[p]{\frac{c_i(p+2)}{2p} \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{p}{2} \sqrt{\frac{c_i}{\mu(c_i+1)}} (x - x_i) \right]} \quad (4.19)$$

yukarıda verilen (4.19) kullanılarak araştırılmıştır. Buradaki  $i = 1, 2$  ile  $c_i$  ve  $x_i$  keyfi sabitler olup yaklaşık hesaplamaların yapılabilmesi için üç farklı parametre kümesi düşünülmüştür.

İlk küme için,  $x \in [0, 250]$  aralığında  $p = 2$ ,  $c_1 = 4$ ,  $c_2 = 1$ ,  $x_1 = 25$ ,  $x_2 = 55$ ,  $h = 0.2$ ,  $\Delta t = 0.025$  ve  $\mu = 1$  parametreleri alınmıştır.  $t = 0$  dan  $t = 20$  zamanına kadar sayısal yöntem uygulanmış  $I_1, I_2$  ve  $I_3$  korunum sabitlerinin sonuçları Tablo 4.8’de verilmiştir. Bu tablodan elde edilen verilerin Roshan’ın bulduğu değerlere [20] yakın olduğu,  $I_1, I_2$  ve  $I_3$  ’ün başlangıç hesabına göre değişimleri, sırasıyla %0.00002, %0.00004 ve %0.5 den daha küçüktür sonucuna varılabilir.

İkinci küme için  $x \in [0, 120]$  aralığında  $p = 3$ ,  $c_1 = 48/5$ ,  $c_2 = 6/5$ ,  $x_1 = 20$ ,  $x_2 = 50$ ,  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.01$  ve  $\mu = 1$  değerleri seçilmiştir. Veriler  $t = 6$  anına kadar çalıştırılmış, elde edilen korunum sabitlerinin değerleri, Tablo 4.9’da sunulmuştur. Tablo 4.9’dan, korunum sabitlerindeki değişim oranı, klasik lineerleştirme tekniği için daha küçük bulunduğu ve bu oranın Roshan’ın elde ettiği sonuçlara [20] daha yakın olduğu anlaşılır. İki solitary dalganın farklı zamanlardaki hareketi Şekil 4.3’te çizilmiştir. Şekil 4.3’e bakıldığında başlangıç sırasında genliği büyük olan dalga, genliği küçük olan dalganın solundadır. İlerleyen sürelerde genliği büyük olan dalga, küçük olan dalgayı yakalar ve  $t = 3$  gibi büyük dalga küçük dalganın üzerine biner.  $t = 5$  anında dalgalar ayrılmaya başlar  $t = 6$  ’da ise dalgalar bariz olarak ayrılır. Bu iki dalga başlangıç şekil, hız ve büyüklüklerini bozmadan büyük genlikli dalga önde, küçük genlikli dalga arkada yollarına devam ederler. Neticede, iki solitary dalga aynı yönde giderken girişim oluşur ve çarpışmanın ardından başlangıç hallerine geri dönerek uzun mesafe yol alabileceklerinden dolayı bu dalgalar solitondur.

Üçüncü küme için  $x \in [0, 200]$  aralığında  $p = 4$ ,  $c_1 = 64/3$ ,  $c_2 = 4/3$ ,  $x_1 = 20$ ,  $x_2 = 80$ ,  $h = 0.125$ ,  $\Delta t = 0.01$  ve  $\mu = 1$  parametreleri kullanılmıştır. Sayısal uygulamalar  $t = 6$  anına kadar hesaplanmış ve korunum sabitlerinin sayısal verileri Tablo 4.10’da belirtilmiştir. Bu sabitlere ait değerlerin Roshan’ın [20] elde ettiği

sonuçlarla uyumlu olduğu ve korunum sabitlerinin başlangıç hesabına göre değişimi oldukça küçüktür. Ayrıca sayısal algoritma yapılarak hesaplanan iki solitary dalganın hareketi Şekil 4.4'te çizilmiştir.  $t=0$  konumunda küçük genlikli dalga büyük genlikli dalganın sağındadır ve zaman ilerledikçe geride kalan dalga öndeki dalgayı yakalar ardından girişim başlar ve bu iki dalga ayrılarak, ilk hallerini korumak suretiyle yollarına devam ederler. Bundan dolayı solitary dalgalar solitonlardır.

Tablo 4.8.  $p = 2$ ,  $gen.= 2.1$ ,  $h = 0.2$ ,  $\Delta t = 0.025$  ve  $x \in [0, 250]$  için iki solitary dalganın girişimine ait korunum sabitleri

|       | $t$        | 0          | 4          | 8          | 12         | 16         | 20         |
|-------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| $h_1$ | Klasik     | 11.4676542 | 11.4676542 | 11.4676542 | 11.4676542 | 11.4676541 | 11.4676541 |
|       | QBSPG [20] | 11.4677000 | 11.4677000 | 11.4677000 | 11.4677000 | 11.4677000 | 11.4677000 |
| $h_2$ | Klasik     | 14.6292089 | 14.6292088 | 14.6292088 | 14.6292087 | 14.6292087 | 14.6292086 |
|       | QBSPG [20] | 14.6286000 | 14.6292000 | 14.6229000 | 14.6299000 | 14.6295000 | 14.6299000 |
| $h_3$ | Klasik     | 22.8803575 | 22.8803204 | 22.8759840 | 22.8803706 | 22.8803978 | 22.8803901 |
|       | QBSPG [20] | 22.8788000 | 22.8811000 | 22.8798000 | 22.8803000 | 22.8805000 | 22.8806000 |

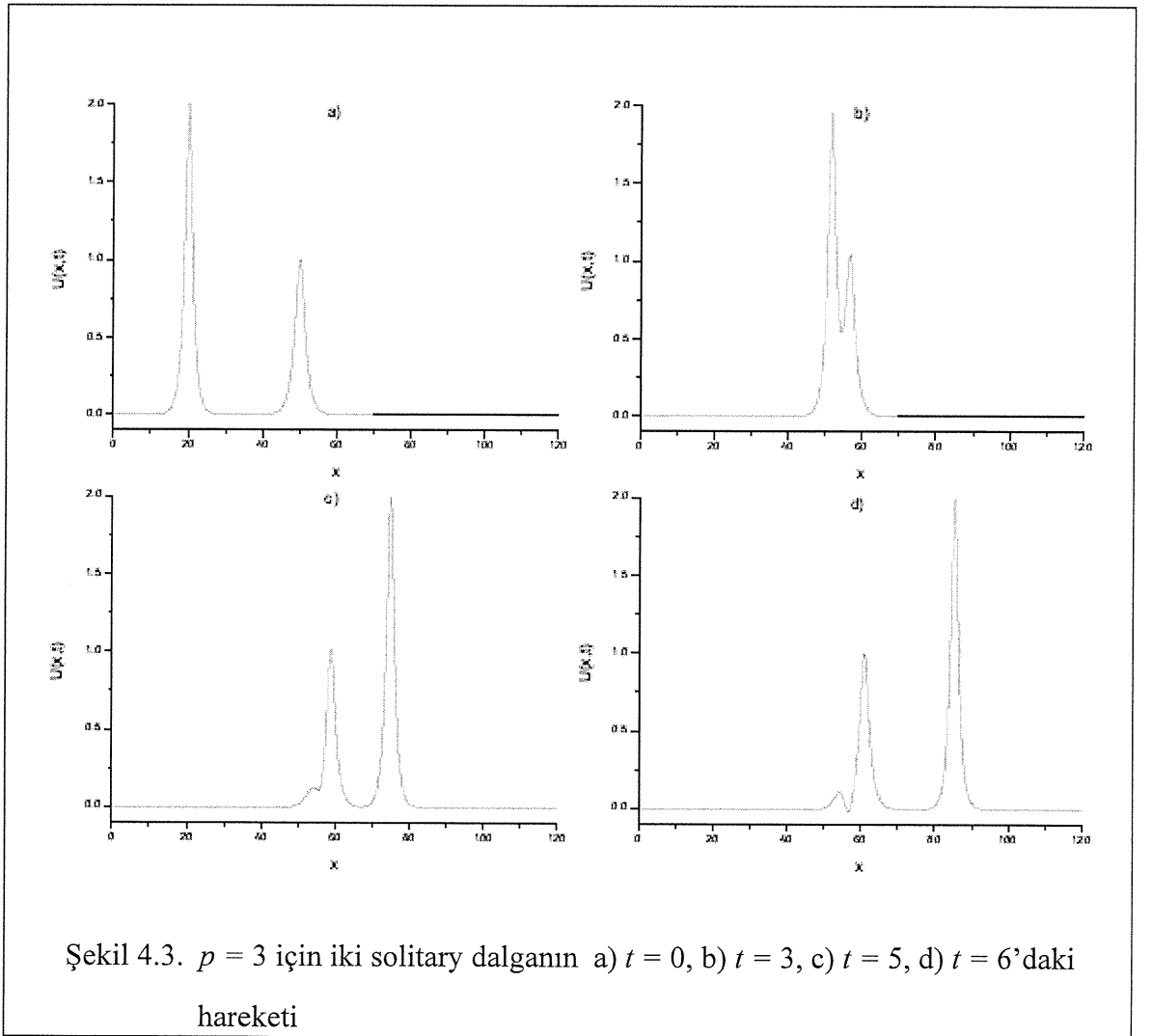
Tablo 4.9.  $p = 3$ ,  $gen.= 2.1$ ,  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.01$  ve  $x \in [0, 120]$  için iki solitary dalganın girişimine ait korunum sabitleri

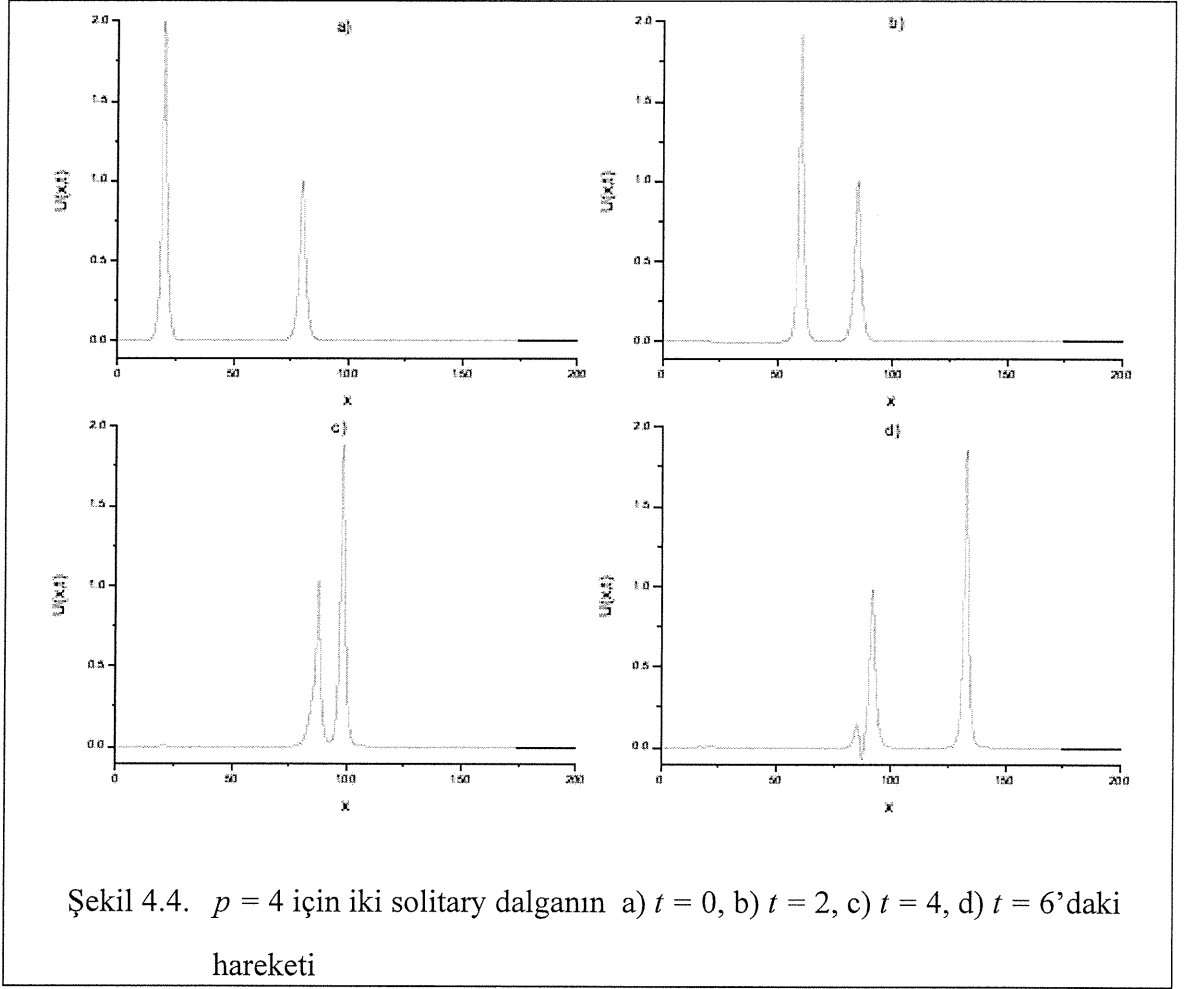
|       | $t$        | 0          | 1          | 2          | 3          | 4          | 5          | 6          |
|-------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| $h_1$ | Klasik     | 9.6907772  | 9.6907774  | 9.6907776  | 9.6907778  | 9.6907778  | 9.6907780  | 9.6907782  |
|       | QBSPG [20] | 9.6907500  | 9.6907400  | 9.6907400  | 9.6907400  | 9.6907400  | 9.6907400  | 9.6907400  |
| $h_2$ | Klasik     | 12.9443914 | 12.9443919 | 12.9443925 | 12.9443930 | 12.9443932 | 12.9443937 | 12.9443943 |
|       | QBSPG [20] | 12.9444000 | 12.9459000 | 12.9452000 | 12.9379000 | 12.9453000 | 12.9457000 | 12.9454000 |
| $h_3$ | Klasik     | 17.0186758 | 17.0236820 | 17.0256746 | 17.9687428 | 16.9816963 | 16.9181837 | 16.9520240 |
|       | QBSPG [20] | 17.0184000 | 16.9819000 | 16.9835000 | 17.0591000 | 16.9261000 | 16.8781000 | 16.9113000 |



Tablo 4.10.  $p = 4$ ,  $gen. = 2.1$ ,  $h = 0.125$ ,  $\Delta t = 0.01$  ve  $x \in [0, 200]$  için iki solitary dalganın girişimine ait korunum sabitleri

|       | $t$       | 0          | 1          | 2          | 3          | 4          | 5          | 6          |
|-------|-----------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| $h_1$ | Klasik    | 8.8342728  | 8.8342136  | 8.8341602  | 8.8341068  | 8.8340534  | 8.8340001  | 8.8339467  |
|       | QBSPG[20] | 8.8342700  | 8.8342700  | 8.8420400  | 8.8420500  | 8.8420900  | 8.8342100  | 8.8343400  |
| $h_2$ | Klasik    | 12.1708877 | 12.1707034 | 12.1705372 | 12.1703713 | 12.1702053 | 12.1700395 | 12.1698737 |
|       | QBSPG[20] | 12.1697000 | 12.3179000 | 12.3700000 | 12.4530000 | 12.5703000 | 12.6304000 | 12.6103000 |
| $h_3$ | Klasik    | 14.0294238 | 14.4197656 | 14.4134423 | 14.3841812 | 14.3516241 | 14.3210739 | 14.2929015 |
|       | QBSPG[20] | 14.0302000 | 13.8420000 | 13.9607000 | 14.0887000 | 13.9805000 | 14.2357000 | 14.6974000 |





### 4.3.3 Maxwellian başlangıç koşulu

Bu bölümde GRLW denklemini aşağıdaki Maxwellian başlangıç şartı ile ele alınmıştır.

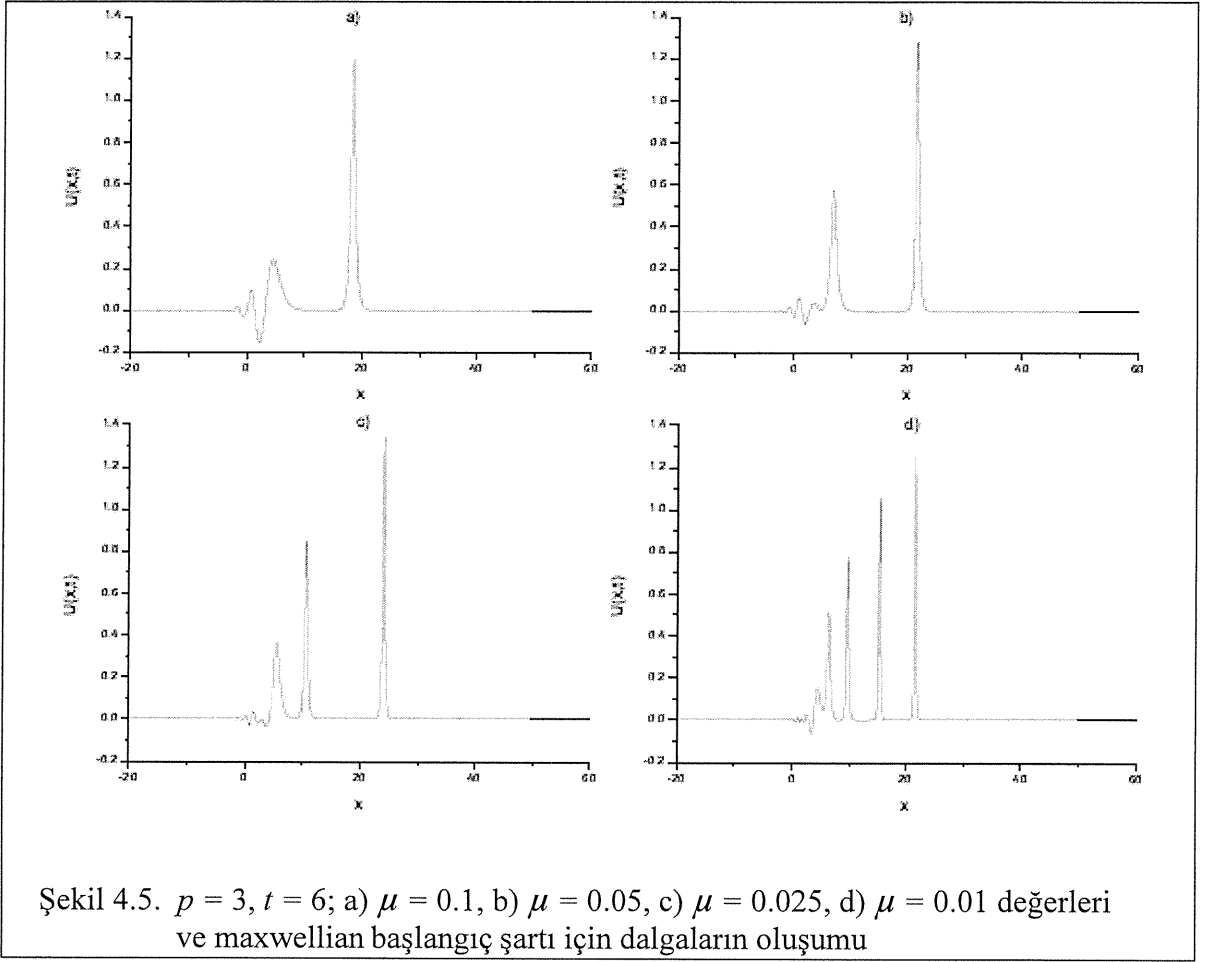
$$U(x, 0) = \text{Exp}(-x^2), \quad -20 \leq x \leq 60. \quad (4.20)$$

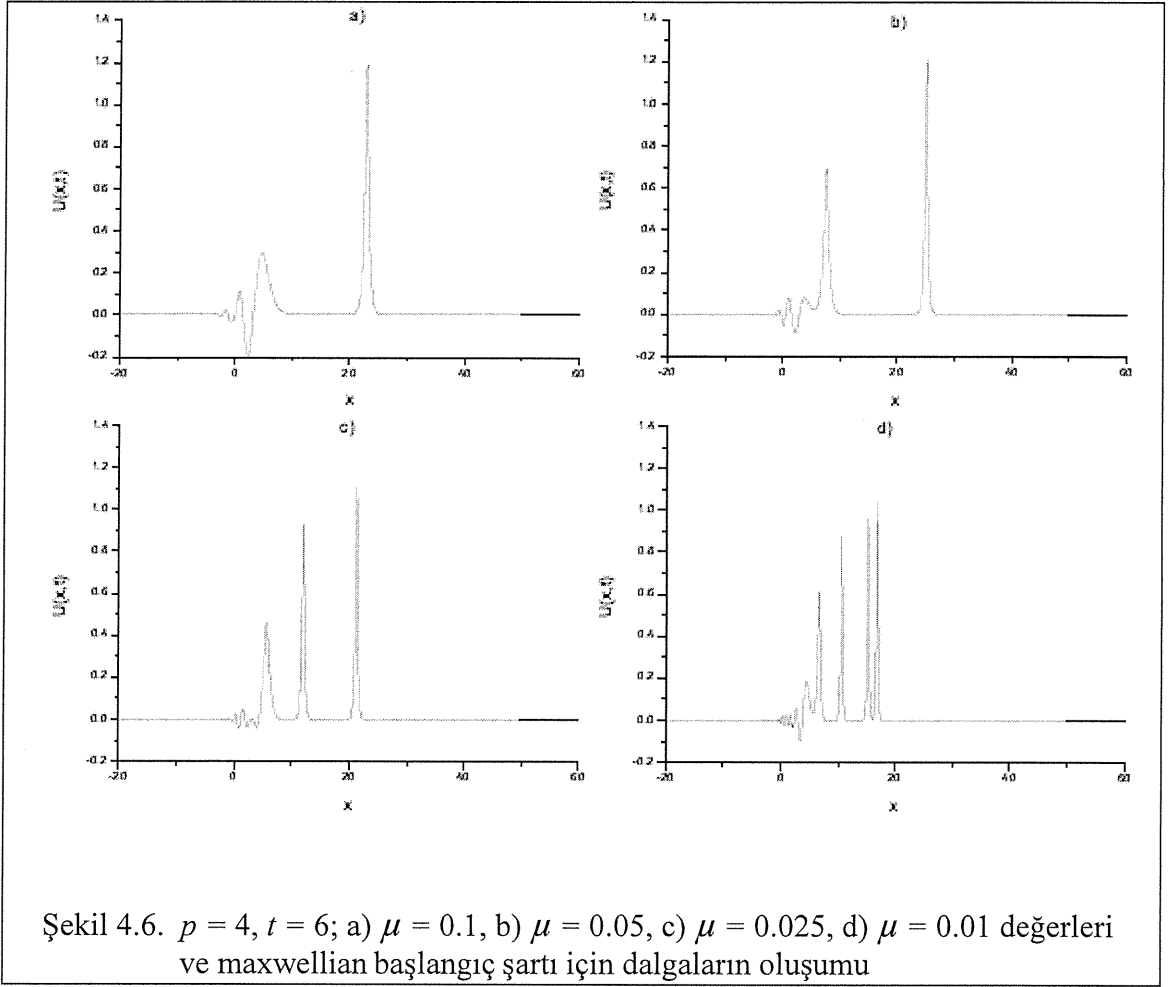
O halde çözümün tepkisi  $\mu$  değerine bağlı olarak değişeceğinden dolayı  $\mu = 0.1$ ,  $\mu = 0.025$ ,  $\mu = 0.05$ ,  $\mu = 0.01$  ve  $p = 2, 3, 4$  parametrelerine bağlı olarak dalganın oluşumu araştırılmıştır. Deneyler  $t=6$  anına kadar test edilmiş ve yukarıda verilen  $\mu$  değerleri için bulunan sonuçlar Tablo 4.11'de gösterilmiştir.  $I_1 \times 10^2$ ,  $I_2$  ve  $I_3$  sayılarının elde edilme süresince değişimi, sırasıyla  $p=2$  için 0.0001, 0.1 ve 0.1;  $p=3$  için 0.0005, 0.2 ve 0.2;  $p=4$  için 0.2, 0.3 ve 0.3 olarak hesaplanmıştır.

Maxwellian başlangıç koşuluna göre solitary dalgaların oluşumu Şekil 4.5 ve Şekil 4.6'da gösterilmiştir. Çizilen bu şekillerden  $\mu = 0.1$  değeri için yalnız bir kararlı dalga ve bir kaç tane küçük belli belirsiz dalga oluştuğu,  $\mu = 0.05$  olduğunda iki tane kararlı dalganın oluştuğu,  $\mu = 0.025$  ve  $\mu = 0.01$  için ise sırasıyla üç ve dört tane kararlı bunların yanında da tamamen belli olmayan bir kaç tane daha dalganın oluştuğu görülür. Sonuç olarak;  $\mu$  sayısal değeri küçüldükçe oluşacak olan kararlı dalga sayısı artacaktır, diyebiliriz.

Tablo 4.11.  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.01$  ve  $x \in [-20, 60]$  için maxwellian başlangıç koşuluna ait korunum sabitleri

| $\mu$      | $t$ | $p=2$    |          |          | $p=3$    |          |          | $p=4$    |          |          |
|------------|-----|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
|            |     | $l_1$    | $l_2$    | $l_3$    | $l_1$    | $l_2$    | $l_3$    | $l_1$    | $l_2$    | $l_3$    |
| 0.1        | 0   | 1.772453 | 1.378645 | 0.760895 | 1.772453 | 1.378645 | 0.760895 | 1.772453 | 1.378645 | 0.760895 |
|            | 2   | 1.772453 | 1.472878 | 0.666662 | 1.772452 | 1.548191 | 0.591349 | 1.772110 | 1.591837 | 0.547703 |
|            | 4   | 1.772453 | 1.472838 | 0.666702 | 1.772451 | 1.546329 | 0.593211 | 1.771702 | 1.588948 | 0.550592 |
|            | 6   | 1.772453 | 1.472598 | 0.666942 | 1.772449 | 1.545540 | 0.594000 | 1.771297 | 1.587779 | 0.551761 |
| QBSPG [20] | 6   | 1.772450 | 1.380900 | 0.761900 | 1.772450 | 1.384330 | 0.599080 | 1.772450 | 1.389450 | 0.449163 |
| 0.05       | 0   | 1.772453 | 1.315979 | 0.823561 | 1.772453 | 1.315979 | 0.823561 | 1.772453 | 1.315979 | 0.823561 |
|            | 2   | 1.772453 | 1.457911 | 0.681630 | 1.772376 | 1.514843 | 0.624697 | 1.753662 | 1.535874 | 0.603666 |
|            | 4   | 1.772453 | 1.456986 | 0.682554 | 1.772272 | 1.514131 | 0.625409 | 1.741625 | 1.528679 | 0.610862 |
|            | 6   | 1.772453 | 1.455748 | 0.683792 | 1.772168 | 1.513035 | 0.626505 | 1.733910 | 1.523490 | 0.616050 |
| QBSPG [20] | 6   | 1.772390 | 1.319510 | 0.825686 | 1.772480 | 1.323940 | 0.624720 | 1.772120 | 1.451680 | 0.489711 |
| 0.025      | 0   | 1.772453 | 1.284646 | 0.854894 | 1.772453 | 1.284646 | 0.854894 | 1.772453 | 1.284646 | 0.854894 |
|            | 2   | 1.772454 | 1.446475 | 0.693065 | 1.768943 | 1.502469 | 0.637071 | 1.693029 | 1.482414 | 0.657126 |
|            | 4   | 1.772452 | 1.450770 | 0.688770 | 1.764956 | 1.501801 | 0.637740 | 1.682425 | 1.476250 | 0.663290 |
|            | 6   | 1.772451 | 1.450891 | 0.688649 | 1.761477 | 1.498994 | 0.640546 | 1.674869 | 1.468703 | 0.670837 |
| QBSPG [20] | 6   | 1.772380 | 1.290110 | 0.854909 | 1.772350 | 1.308060 | 0.635790 | 1.772490 | 1.296260 | 0.479621 |
| 0.01       | 0   | 1.772453 | 1.265847 | 0.873693 | 1.772453 | 1.265847 | 0.873693 | 1.772453 | 1.265847 | 0.873693 |
|            | 2   | 1.772512 | 1.438944 | 0.700596 | 1.720433 | 1.456451 | 0.683090 | 1.651315 | 1.437490 | 0.702051 |
|            | 4   | 1.772403 | 1.443961 | 0.695579 | 1.706008 | 1.450265 | 0.689276 | 1.644999 | 1.439995 | 0.699545 |
|            | 6   | 1.772190 | 1.443723 | 0.695817 | 1.700567 | 1.451593 | 0.687947 | 1.633634 | 1.431710 | 0.707830 |
| QBSPG [20] | 6   | 1.772490 | 1.283150 | 0.892359 | 1.772450 | 1.276270 | 0.632880 | 1.756480 | 1.405770 | 0.381194 |





## 5. BÖLÜM

### SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, beşinci dereceden ve yedinci dereceden B-spline fonksiyonlar kullanılarak Kollokasyon yöntemi ile GRLW denkleminin yaklaşık çözümleri elde edilmiştir. Lineerleştirilmiş algoritmaların şartsız kararlı olduğu Von-Neumaan tekniği kullanılarak gösterilmiştir. Yaklaşık çözüm yöntemleri, başlangıç şartının farklı seçimleri ile oluşturulan tek solitary dalganın davranışı, iki solitary dalganın girişimi, ardışık dalgaların oluşumu ve Maxwellian başlangıç koşulu ile dalga oluşumunu içeren örneklere uygulanmıştır. Yaklaşık çözüm yöntemlerinin etkinliğini göstermek için,  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları ile dalganın kütle, momentum ve enerjisine karşılık gelen ve  $I_1, I_2$  ve  $I_3$  ile gösterilen korunum sabitleri elde edilmiştir. Elde edilen hata norm değerlerinin yeterince küçük ve daha önceden bulunan sayısal sonuçlardan daha iyi olduğu görülmüştür. Ayrıca, korunum sabitlerinin programın çalışması boyunca hemen hemen sabit kaldığı ve referans alınan çalışmalarla uyumlu olduğu da görülmüştür. Ayrıca elde edilen sonuçlara ait grafikler çizilmiştir. Sonuç olarak yöntemimizin GRLW denkleminin solitary dalga çözümlerini elde etmede daha etkili ve daha başarılı olduğunu söyleyebiliriz.

## KAYNAKLAR

1. Clough, R.W., “The finite element in plane stress analysis”, *Proc.2nd A.S.C.E.Conf.on Elektronik Computation*, Pittsburg, Pa., 345-378, 1960.
2. Davies, A. J., “The Finite Element Method: A First Approach” , *Oxford University Press*, Oxford, 1986.
3. Logan, D. L., “*A First Course in the Finite Element Method (Fourth Edition)* ” , Thomson, 2007.
4. Karakoç, S.B.G., “Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Modifiye edilmiş Eşit Genişlikli Dalga Denkleminin Sayısal Çözümleri” , *İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Doktora Tezi, s. 11-29 , Malatya, 2011.
5. Reddy, J.N., “An introduction to nonlinear Finite Element Analysis” , *Oxford University Press Inc.*, New York, 2004.
6. Walkley, M. A., “A Numerical Method for Extended Boussinesq Shallow-water Wave Equations” , *The University of Leeds School of Computer Studies*, 1999.
7. Geyikli, T., “Finite Element Studies of Modified KdV Equations” , *Ph. D.Thesis, University College of North Wales*, Bangor, Gwynedd (UK), 1994.
8. Keskin, P., “RLW Denkleminin Trigonometrik B-Spline Çözümleri ” , *Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Doktora Tezi , s. 11 , Eskişehir, 2016.
9. Prenter, P. M., “Splines and variational methods”, J. Wiley, New York, 1975.
10. Raslan, K. R., “Collocation method using cubic B-spline for the generalised equal width equation”, *Int. J. Simulation and Process Modelling*, 2, 37-44, 2006.
11. Bona, J. L., McKinney, W. R., Restrepo, J. M., “Stable and unstable solitary-wave solutions of the generalized regularized long-wave equation”, *Journal of Nonlinear Science*, 10, 603-638, 2000.
12. Ramos, J. I., “Solitary wave interactions of the GRLW equation”, *Chaos, Solitons & Fractals*, 33, 479-491, 2007.

13. EL-Danaf, T. S., Raslan, K. R., Ali, K. K., “New numerical treatment for the generalized regularized long wave equation based on finite difference scheme”, *International Journal of Soft Computing and Engineering*, 4 (4), 16-24, 2014.
14. Kaya, D., “A numerical simulation of solitary-wave solutions of the generalized regularized long-wave equation”, *Applied Mathematics and Computation*, 149, 833-841, 2004.
15. Guo, P. F., Zhang, L. W., Liew, K. M., “Numerical analysis of generalized regularized long wave equation using the element-free kp-Ritz method”, *Applied Mathematics and Computation*, 240, 91-101, 2014.
16. Hamdi, S., Enright, W. H., Schiesser, W. E., Gottlieb, J. J., “Exact solutions and invariants of motion for general types of regularized long wave equations”, *Mathematics and Computers in Simulation*, 65, 535-545, 2004.
17. Zhang, L., “A finite difference scheme for generalized regularized long-wave equation”, *Applied Mathematics and Computation*, 168, 962-972, 2005.
18. Soliman, A. A., “Numerical simulation of the generalized regularized long wave equation by He’s variational iteration method”, *Mathematics and Computers in Simulation*, 70, 119-124, 2005.
19. Mokhtari, R., Mohammadi, M., “Numerical solution of GRLW equation using Sinccollocation method”, *Computer Physics Communications*, 181, 1266-1274, 2010.
20. Roshan, T., “A Petrov-Galerkin method for solving the generalized regularized long wave (GRLW) equation”, *Computers and Mathematics with Applications*, 63, 943-956, 2012.
21. Huang, D. M., Zhang, L. W., “Element-free approximation of generalized regularized long wave equation”, *Mathematical Problems in Engineering*, 2014, 1-10, 2014.
22. Hammad, D. A., El-Azab, M. S., “A  $2N$  order compact finite difference method for solving the generalized regularized long wave (GRLW) equation”, *Applied Mathematics and Computation*, 253, 248-261, 2015.



23. Mohammadi, R., “Exponential B-spline collocation method for numerical solution of the generalized regularized long wave equation”, *Chinese Physics B*, 24, 1-14, 2015.
24. Karakoc, S. B. G., Zeybek, H., Ak, T., “Numerical solutions of the Kawahara equation by the septik B-spline collocation method”, *Statistics Optimization and Information Computing*, 2 (3), 211-221, 2014.
25. Zaki, S. I., “A kuintik B-spline finite elements scheme for the KdVB equation”, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 188 (1), 121-134, 2000.
26. Ismail, M. S., “Numerical solution of complex modified Korteweg-de Vries equation by collocation method”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 14, 749-759, 2009.
27. Irk, D., Dağ, İ., “Kuintik B-spline collocation method for the generalized nonlinear Schrödinger equation”, *Journal of the Franklin Institute*, 348, 378-392, 2011.
28. Mittal, R. C., Jain, R. K., “Numerical solution of General Rosenau-RLW Equation using Kuintik B-splines Collocation Method”, *Communications in Numerical Analysis*, 2012,1-16, 2012.
29. Mittal, R. C., Tripathi, A., “Numerical solutions of generalized Burgers–Fisher and generalized Burgers–Huxley equations using collocation of cubic B-splines”, *International Journal of Computer Mathematics*, 93, 1053-1077, 2015.
30. Irk, D., “Bazı kısmi türevli diferensiyel denklem sistemlerinin B-spline sonlu elemanlar çözümleri”, *Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Doktora Tezi, s.1-148, Eskişehir, 2007.
31. Saka, B., “RLW ve K-S denklemlerinin B-spline kolokeyşin metodları ile çözümleri”, *Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Doktora Tezi, s.1-107, Eskişehir, 2002.
32. Karakoç S.B.G., Zeybek H. “ Solitary-wave solutions of the GRLW equation using septik B-spline collocation method ”, *Applied Mathematics and Computation*, 289, 159-171, 2016

33. Zeybek H. "GEW ve GRLW Denklemlerinin Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Sayısal Çözümleri ", *Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Doktora Tezi, s. 83-119, Nevşehir, 2016
34. Gardner, L. R. T., Gardner, G. A., Ayoub, F. A., Ameen, N. K., "Approximations of solitary waves of the MRLW equation by B-spline finite element", *Arabian Journal for Science and Engineering*, 22, 183–193, 1997.
35. Peregrine, D. H., "Calculations of the development of an undular bore", *Journal of Fluid Mechanics*, 25 (2), 321-330, 1966.
36. Dağ, İ., Saka, B., Irk, D., "Galerkin method for the numerical solution of the RLW equation using kuintik B-splines", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 190, 532-547, 2006.
37. Karakoc, S. B. G., Yağmurlu, N. M., Uçar, Y., "Numerical approximation to a solution of the modified regularized long wave equation using kuintik B-splines", *Boundary Value Problems*, 2013 (27), 1-17, 2013.
38. Khalifa, A. K., Raslan, K. R., Alzubaidi, H. M., "A collocation method with cubic Bsplines for solving the MRLW equation", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 212 (2), 406-418, 2008.
39. Ali, A., "Mesh Free Collocation Method for Numerical Solution of Initial-boundary Value Problems using Radial Basis Functions", Ph. D. thesis, Ghulam Ishaq Khan Institute of Engineering Sciences and Technology, Pakistan, 2009.
40. Esen, A., Kutluay, S., "Application of a lumped Galerkin method to the regularized long wave equation", *Applied Mathematics and Computation*, 174, 833-845, 2006.
41. Mei, L., Chen, Y., "Numerical solutions of RLW equation using Galerkin method with extrapolation techniques", *Computer Physics Communications*, 183, 1609-1616, 2012.
42. Zaki, S. I., "Solitary waves of the Korteweg-de Vries Burgers' equation", *Comput. Phys. Commun.*, 126, 207-218, 2000.

## ÖZGEÇMİŞ

17.03.1975 tarihinde Kayseri’de doğdu. İlk ve orta öğrenimini Kayseri’de, tamamladı. 1993 yılında Selçuk Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümü’nde lisans eğitimine başladı ve 1997 yılında mezun oldu. Mezun olduğu yıl, Milli Eğitim Bakanlığınca ataması yapılarak Kayseri’de matematik öğretmeni olarak göreve başladı. 1997-2014 yılları arasında Kayseri’de farklı devlet okullarında matematik öğretmeni olarak görev yaptı. 2014 yılında Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans eğitimine başladı. Halen Kayseri Kocasinan Furkan Doğan Anadolu İmam Hatip Lisesinde matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır. Evli ve üç çocuk babasıdır.

Adres: Kocasinan Furkan Doğan Anadolu İmam Hatip Lisesi  
Zümrüt mahallesi Kadir Has caddesi No:78 Kocasinan-KAYSERİ

Telefon: 0 505 488 45 47

e-posta : dilaversah@gmail.com

