T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ MATRİSLERİNİN MOORE-PENROSE TERSLERİ VE UYGULAMALARI

Tezi Hazırlayan
Özge ÖZSOY

Tez Danışmanı
Doç. Dr. Yasin YAZLIK

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Haziran 2019
NEVŞEHİR

Doç. Dr. Yasin YAZLIK danışmanlığında **Özge ÖZSOY** tarafından hazırlanan **"Genelleştirilmiş Fibonacci Matrislerinin Moore-Penrose Tersleri ve Uygulamaları"** başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

25/06/2019

JÜRİ

Başkan : Dr. Öğr. Üyesi Hasan Hüseyin GÜLEÇ

Üye : Doç. Dr. Yasin YAZLIK

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Sure KÖME

ONAY:

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun 17.07.2019 tarih ve 2019.12.433 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

.../.../ 2019

Prof. Dr. Şahlan ÖZTÜRK

Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİM SAYFASI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada yer alan bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu ve bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Özge ÖZSOY

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim ve tez çalışmam süresince tüm bilgilerini benimle paylaşan, bana yön veren, destekleyen, düşünceleriyle yolumu açan, kıymetli zamanını bana harcayan ve tezimde büyük emeği olan sayın hocam Doç. Dr. Yasin YAZLIK'a,

Maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen değerli eşim Kürşad ÖZSOY ve oğlum Vatan Canberk ÖZSOY, annem Fatma VARDAR ve kardeşim Göksu ALPKAYA'ya yürek dolusu teşekkürlerimi sunarım.

GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ MATRİSLERİNİN MOORE-PENROSE TERSLERİ VE UYGULAMALARI

(Yüksek Lisans Tezi)

Özge ÖZSOY

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Haziran 2019

ÖZET

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde literatür özeti ve çalışmanın amacı verilmiştir.

İkinci bölümde, çalışma ile ilgili bazı temel kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde ise sıfırdan farklı elemanları klasik Horadam sayıları olan $\mathscr{U}_n^{(s,k)}$ altüçgen Toeplitz matrisinin (s,k)-tipi tanımlanmıştır. $s<0$ için $\mathscr{U}_n^{(s,k)}$ altüçgen Toeplitz matrisinin Moore-Penrose tersi sadece Horadam sayıları ile karakterize edilmiş ve $\mathscr{U}_n^{(0,k)}$ altüçgen Toeplitz matrisinin tersi verilmiştir. Son olarak Horadam sayıları ve genelleştirilmiş Fibonacci sayılarını içeren bazı kombinatoriyel eşitlikler elde edilmiştir.

Bu çalışmanın 4. bölümünde ise sıfırdan farklı elemanları klasik Horadam sayıları olan $\mathscr{U}_n^{(a,b,s)}$ matrisinin s-tipi kavramı tanımlanmıştır. $s=-1$ singüler durumu için $\mathscr{U}_n^{(a,b,-1)}$ matrisinin Moore-Penrose tersi verilmiştir. Ayrıca $\mathscr{U}_n^{(a,b,-1)}$ matrisi ile genelleştirilmiş Pascal matrisi arasındaki ilişkiler tartışılmış Horadam sayılarını içeren bazı kombinatoriyel eşitlikler elde edilmiştir.

Anahtar kelimeler:* *Moore-Penrose Tersi, Horadam Sayısı, Genelleştirilmiş Fibonacci Sayısı, Genelleştirilmiş Fibonacci Matrisi, Genelleştirilmiş Pascal Matrisi,
Tez Danışmanları: Doç. Dr. Yasin YAZLIK
Sayfa sayısı: 52

MOORE-PENROSE INVERSE OF GENERALIZED FIBONACCI MATRIX AND ITS APPLİCATIONS

(M.Sc. Thesıs)

Özge ÖZSOY

NEVŞEHIR HACI BEKTAŞ VELI UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

Jun 2019

ABSTRACT

This thesis consists of five chapters.

In the first section, the literature summary and the purpose of study were given.

In the second section, some bacis concepts related to the study were given.

In the third section, a class of lower triangular Toeplitz matrices $\mathscr{U}_n^{(s,k)}$ of type-*(s,k)* whose non-zero entries are the classical Horadam numbers was defined. For $s<0$, the Moore-Penrose inverse of lower triangular Toeplitz matrix $\mathscr{U}_n^{(s,k)}$ was only characterized by Horadam numbers and the inverse of lower triangular Toeplitz matrix $\mathscr{U}_n^{(o,k)}$ was given. Finally, some combinatorial identities involving Horadam numbers and generalized Fibonacci numbers were obtained.

In the last chapter, the notation of the matrix $\mathscr{U}_n^{(a,b,s)}$ of type-s whose non-zero entries are the classical numbers was defined. For the singular case $s=-1$, the Moore Penrose inverse of the matrix $\mathscr{U}_n^{(a,b,-1)}$ was obtained. Also the relations between the matrix $\mathscr{U}_n^{(a,b,-1)}$ and generalized Pascal matrix were discussed and some combinatorial identities including Horadam numbers were obtained.

Keywords: Moore-Penrose inverse, Horadam numbers, Generalized Fibonacci number, Generalized Fibonacci matrix, Generalized Pascal matrix
Thesis Supervisors: Assoc. Prof. Dr. Yasin YAZLIK
Pages: 52

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{N}$: Doğal sayılar kümesi

$\mathbb{C}$: Kompleks sayılar kümesi

$\mathbb{C}^{m\times n}$: Elemanları kompleks sayılar olan $m\times n$ tipindeki matrislerin kümesi

A^{*} : A matrisinin eşlenik transpozu

$\mathrm{A}^{\dagger}$: A matrisinin Moore-Penrose tersi

$\mathscr{F}_n$: n. Fibonacci matrisi

$\mathcal{P}_n$: n. Pascal matrisi

$\mathscr{L}_n$: n. Lucas matrisi

$U_n^{(a,b)}$: n. Horadam sayısı

$\mathscr{U}_n^{(a,b,s)}$: $n\times n$ tipindeki sıfırdan farklı elemanları Horadam sayıları olan altüçgen Toeplitz matrisinin s-tipi matrisi

$\mathcal{P}_n^{(s)}[x]$: Birinci çeşit geneleştirilmiş Pascal matrisinin s-tipi

$\mathcal{Q}_n^{(s)}[x]$: İkinci çeşit geneleştirilmiş Pascal matrisinin s-tipi

F_n : n. Fibonacci sayısı

L_n : n. Lucas sayısı

P_n : n. Pell sayısı

Q_n : n. Pell-Lucas sayısı

J_n : n. Jacobsthal sayısı

j_n : n. Jacobsthal-Lucas sayısı

G_n : n. Genelleştirilmiş Fibonacci sayıları

$F_{k,n}$: n. k-Fibonacci sayısı

$L_{k,n}$: n. k-Lucas sayısı

$G_{k,n}$: n. genelleştirilmiş k-Fibonacci ve k-Lucas sayısı

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Elemanları özel sayı dizilerinin elemanları olan matrisler ve Pascal matrisleri ile ilgili literatürde birçok çalışma vardır. Bu bölümde bu konular ile ilgili yapılan çalışmaların bir kısmı göz önüne alınmıştır.

Brawer ve Pirovino (1992), elemanları $P_n(i,j)=\binom{i}{j}$ pascal matrisini ve elemanları $q_n(i,j)=\binom{i+j}{j}$ olan Q_n simetrik matrisini tanımlamışlardır. Q_n matrisinin Cholesky ayrışımının $P_nP_n^T$ olduğunu göstermişlerdir. P_n özel eklemeli matrisler yardımıyla çarpanlara ayrılabileceğini göstermişlerdir [1].

Zhang ve Liu (1998), iki değişkenli $\phi(x,y)$ genişletilmiş genelleştirilmiş alt üçgen Pascal matrislerini ve iki değişkenli $\psi_n(x,y)$ genişletilmiş genelleştirilmiş simetrik Pascal matrislerini tanımlamışlardır. $\phi(x,y)$ genişletilmiş genelleştirilmiş Pascal matrisinin özel eklemeli matrisler yardımıyla çarpanlarına ayrılabildiğini göstermişlerdir. $\psi_n(x,y)$ simetrik genişletilmiş genelleştirilmiş Pascal matrisinin ise tersini ve determinantlarını hesaplamışlardır [2].

Bayat ve Teimoori (1999), faktöriyel binomial polinomları tanımlayarak Pascal matrislerini genelleştirmişlerdir. Bu genellemeyi kullanarak iki değişkenli Pascal matrislerini ve onunla ilişkili teoremleri belirlemiş ve ispatlamışlardır. Son olarak $a=\{a_n\}_{n\geq 0}$ dizisi ile ilişkili Pascal fonksiyonel matrisini tanımlamış ve bazı önemli kombinatoriyel eşitlikler elde etmişlerdir [3].

El-Mikkawy ve Cheon (2003), elemanları ${}_2F_1(a,b;c;x)$ Hyper-geometrik fonksiyonla ilişkili genelleştirilmiş Pascal matrisi gösterilmiş ve bu matrisin Cholesky ayrışımı elde edilmiştir. Sonuç olarak a ve b negatif olmayan tamsayılar olmak üzere ${}_2F_1(-a,-b;1;x)=\sum_{k=0}^{\min(a,b)}\binom{a}{k}\binom{b}{k}x^k$ ifadesinin $x(1-x)y''+\left[1+(a+b-1)x\right]y'-aby=0$

Gauss Hyper-geometrik diferensiyel denkleminin bir çözümü olduğunu göstermişlerdir [5].

Lee, Kim ve Cho (2003), Fibonacci matrislerinden elde edilen birinci ve ikinci çeşit Stirling matrisleri ve Pascal matrislerini çalışmışlardır. Ayrıca Fibonacci matrisi ve ikinci çeşit Stirling matrisi, birinci çeşit Stirling ve Pascal matrislerinin matris gösterimlerinden kombinatoriyel eşitlikler elde etmişlerdir [6].

Stanica (2005), Fibonacci matrisleri ile Stirling, Pascal, Lucas dizileri ile ilişkili matrislerin faktorizasyonları üzerine bazı sonuçları genişletmiştir. Bir *r*-inci mertebeden rekürans dizisi ile ilişkili matrisle, herhangi bir matrisin açık faktorizasyonlarını bulmuştur. Bu dizi ile ilişkili simetrik matris için Cholesky faktorizasyonunu da elde etmiştir [9].

Zhang ve Zhang (2007), Lucas matrisini tanımlamışlardır. $P_n[x]$ ve $Q_n[x]$ sırasıyla birinci ve ikinci çeşit genelleştirilmiş Pascal matrisleri ve $\mathcal{G}_n, \mathcal{H}_n, \mathcal{S}_n\left[x\right]$ ve $\mathcal{T}_n\left[x\right]$, $n \times n$ tipinde alt üçgen matrisler olmak üzere $P_n[x] = \mathcal{L}_n \mathcal{G}_n = \mathcal{H}_n \mathcal{L}_n$ ve $Q_n[x] = \mathcal{L}_n \mathcal{S}_n\left[x\right] = T_n\left[x\right]\mathcal{L}_n$ olduğunu göstermişlerdir. Bu matris gösterimlerinden Lucas sayılarını içeren bazı ilginç eşitlikler elde etmişlerdir [7].

Stanimirović, Nikolov, Stanimirović (2008), elemanları genel ikinci mertebeden sayı dizisiyle tanımlanmış $\mathscr{U}_n^{(a,b,s)}$ matrisinin *s*-tipi tanımlanmış ve sıfırdan farklı elemanları genelleştirilmiş Fibonacci sayıları olan, genelleştirilmiş Fibonacci kavramını incelemişlerdir. Ayrıca $\mathscr{U}_n^{(a,b,s)}$ matrisinin tersini elde etmişlerdir. $\mathscr{U}_n^{(a,b,s)}$, $\mathscr{F}_n^{(a,b,s)}$ ve genelleştirilmiş Pascal matrisleri arasındaki ilişkiyi de vermişlerdir. Son olarak, genelleştirilmiş Fibonacci sayılarını içeren bazı binomial eşitlikler vermişlerdir [11].

Falcon (2011), klasik Fibonacci matrislerinin bir genişlemesi olan *k*-Fibonacci matrislerini tanımlamıştır. *k*-Fibonacci matrisi *R* ve *L* gibi iki yeni matris içeren Pascal matrislerinin iki faktorizasyonunu vermiştir. Sonuç olarak *k*-Fibonacci sayılarını içeren bazı kombinatoriyel formüller elde etmiştir [8].

Taşçı, Tuğlu, Aşçı (2011), *k*-Fibonacci ve *k*-Pell matrislerini içiren Fibo-Pascal isimli fibonamiel katsayıları vasıtasıyla Pascal matrislerinin yeni faktorizasyonları elde etmişlerdir. Bu faktorizasyonlar hakkında açıklayıcı örnekler de vermişlerdir [10].

Stanimirović (2011), Pascal matrisinin bir genellemesini tanımlayarak bazı özellikleri sağladığını göstermiştir. Tanımlanan matrisin çeşitli faktorizasyonlarını incelemiştir. Genelleştirilmiş Pascal matrisinin tersi için açık bir formül vermiştir. İlaveten tam, rasyonel, ve irrasyonel üsler için genelleştirilmiş Pascal matrislerinin kuvvetlerinin açık gösterimini elde etmiştir. Son olarak genel Pascal matris ve birim matrisin lineer kombinasyonunun tersini bulmak için genelleştirilmiş Pascal matrisinin kuvvetlerini kullanmıştır [21].

Bu çalışmanın 3. bölümünde Shen ve arkadaşlarının "*Inverse and moore-penrose, inverse of Toeplitz matrices with classical Horadam numbers*" isimli çalışması detaylı bir şekilde incelenmiştir [16]. İlk olarak $s, k,\ s \leq 0\ ve\ k \geq 0$ koşullarını sağlayan herhangi iki tamsayı olmak üzere, sıfırdan farklı elemanları klasik Horadam sayıları olan $\mathscr{U}_n^{(s,k)}$ alt üçgen Toeplitz matrisinin *(s,k)*-tipi tanımlanmıştır. Horadam sayılarını içeren bir konvolüsyon formülü elde edilmiştir. Bu formül kullanılarak Horadam sayıları ve genelleştirilmiş fibonacci sayılarını içeren bazı kombinatoriyel eşitlikler elde edilmiştir. İlaveten $\mathscr{U}_n^{(0,k)}$ alt üçgen matrisinin tersi ve sadece Horadam sayılarını ile karakterize edilen $\mathscr{U}_n^{(s,k)}\,(s<0)$ alt üçgen Toeplitz matrisinin Moore-Penrose tersi elde edilmiştir.

Bu çalışmanın 4. bölümünde ise Shen ve arkadaşlarının "*Moore-Penrose inverse of generalized fibonacci matrix and its applications*" isimli çalışması detaylı bir şekilde incelenmiştir [13]. *s* herhangi bir tamsayı olmak üzere sıfırdan farklı elemanları klasik Horadam sayıları olan $\mathscr{U}_n^{(a,b,s)}$ matrisinin *s*-tipi verilmiştir. $s=-1$ singüler durumu için $\mathscr{U}_n^{(a,b,-1)}$ matrisinin Moore-Penrose tersi verilmiştir. $A=B=1$ durumunda $\mathscr{F}_n^{(a,b,-1)}$ genelleştirilmiş Fibonacci matrisinin Psedoinverse elde edilmiştir. İlaveten genelleştirilmiş Pascal matrisleri ve $\mathscr{U}_n^{(a,b,-1)}$ matrisleri arasındaki ilişkiler verilmiş ve Horadam sayılarını içeren kombinatoriyel eşitlikler elde edilmiştir

BÖLÜM 2

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tezin temel sonuçları ile ilgili üçüncü ve dördüncü bölümde yararlanılacak temel kavramlar verilmiştir.

2.1. Sayı Dizileri

Tanım 2.1.1 [11]. $a,b \in \mathbb{R}$, $A^2+4B>0$ olacak biçimde A ve B reel sayıları için $U_0^{(a,b)}=a$, $U_1^{(a,b)}=b$ ve $U_{n+2}^{(a,b)}=AU_{n+1}^{(a,b)}+BU_n^{(a,b)}$, $n\in\mathbb{N}$, rekürans bağıntısı ile tanımlanan $\left\{U_n^{(a,b)}\right\}_{n=0}^{\infty}$ reel sayı dizisine *Horadam dizisi* denir. Bu dizinin elemanlarına da Horadam sayıları denir. Horadam sayılarının rekürans bağıntısına ait karakteristik denklemi $\lambda^2-A\lambda-B=0$ olup, bu denklemin kökleri $\alpha=\dfrac{A+\sqrt{A^2+4B}}{2}, \beta=\dfrac{A-\sqrt{A^2+4B}}{2}$ dir. $n.$ Horadam sayısı için Binet Formülü

$$U_n^{(a,b)}=c_1\alpha^n+c_2\beta^n \tag{2.1}$$

şeklindedir. Burada $c_1=\dfrac{a\left(A^2+4B\right)+\left(2b-aA\right)\sqrt{A^2+4B}}{2\left(A^2+4B\right)}$,

$c_2=\dfrac{a\left(A^2+4B\right)-\left(2b-aA\right)\sqrt{A^2+4B}}{2\left(A^2+4B\right)}$ dır. Horadam dizisine ait üreteç fonksiyonu ise $\sum_{n=0}^{\infty}U_n^{(a,b)}x^n=\dfrac{a+x(b-Aa)}{1-Ax-Bx^2}$ şeklindedir.

Lemma 2.1.2 [13] $aB+bA\neq 0$ koşulunu sağlayan Horadam dizileri için aşağıdaki ifadeler doğrudur.

(i) Eğer $\alpha=-bB/\left(aB+bA\right)\neq 0$ ise $b=a\beta, U_n^{(a,b)}=a\beta^n$.

(ii) Eğer $\beta=-bB/\left(aB+bA\right)\neq 0$ ise $b=a\alpha, U_n^{(a,b)}=a\alpha^n$.

Horadam dizisine ait rekürans bağıntısında A, B, a, b' ye uygun değerler verilerek literatürde yer alan özel sayı dizilerinden bazıları aşağıdaki gibi verilmiştir.

- $A=1$, $B=1$, $a=0$, $b=1$ alınırsa, literatürde iyi bilinen Fibonacci dizisinin rekürans bağıntısı $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$; $F_0=0$, $F_1=1$ elde edilir [19].
- $A=1$, $B=1$, $a=2$, $b=1$ alınırsa, literatürde iyi bilinen Lucas dizisinin rekürans bağıntısı $L_{n+2}=L_{n+1}+L_n$; $L_0=2$, $L_1=1$ elde edilir [19].
- $A=2$, $B=1$, $a=0$, $b=1$ alınırsa, literatürde iyi bilinen Pell dizisinin rekürans bağıntısı $P_{n+2}=2P_{n+1}+P_n$; $P_0=0$, $P_1=1$ elde edilir [19].
- $A=2$, $B=1$, $a=2$, $b=2$ alınırsa, literatürde iyi bilinen Pell-Lucas dizisinin rekürans bağıntısı $Q_{n+2}=2Q_{n+1}+Q_n$; $Q_0=2$, $Q_1=2$ elde edilir [19].
- $A=1$, $B=2$, $a=0$, $b=1$ alınırsa, literatürde iyi bilinen Jacobsthal dizisinin rekürans bağıntısı $J_{n+2}=J_{n+1}+2J_n$; $J_0=0$, $J_1=1$ elde edilir [19].
- $A=1$, $B=2$, $a=2$, $b=1$ alınırsa, literatürde iyi bilinen Jacobsthal-Lucas dizisinin rekürans bağıntısı $j_{n+2}=j_{n+1}+2j_n$; $j_0=2$, $j_1=1$ elde edilir [19].
- $A=k$, $B=1$, $a=0$, $b=1$ alınırsa, litaratürde iyi bilinen $k-$Fibonacci dizisinin rekürans bağıntısı $F_{k,n+2}=kF_{k,n+1}+F_{k,n}$; $F_{k,0}=0$, $F_{k,1}=1$ elde edilir [18].
- $A=k$, $B=1$, $a=2$, $b=k$ alınırsa, literatürde iyi bilinen k-Lucas dizisinin rekürans bağıntısı $L_{k,n+2}=kL_{k,n+1}+L_{k,n}$; $L_{k,0}=2$, $L_{k,1}=k$ elde edilir [18].
- $A=k$, $B=1$ alınırsa, literatürde iyi bilinen genelleştirilmiş k-Fibonacci ve k-Lucas dizisinin rekürans bağıntısı $G_{k,n+2}=kG_{k,n+1}+G_{k,n}$; $G_{k,0}=a$, $G_{k,1}=b$ elde edilir [20].

2.2. Elemanları Özel Sayı Dizileri Olan Matrisler

Tanım 2.2.1 [11] $U_n^{(a,b)}$ $n.$ Horadam sayısı ve elemanları

$$u_{i,j}^{(a,b,s)}=\begin{cases} U_{i-j+1}^{(a,b)}, & i-j+s\geq 0 \\ 0, & i-j+s<0 \end{cases}$$

olan $n\times n$ tipindeki $\mathscr{U}_n^{(a,b,s)}=\left[u_{i,j}^{(a,b,s)}\right]$ matrisine $\mathscr{U}_n^{(a,b,s)}$ matrisinin $s-$tipi denir.

Örneğin $\mathscr{U}_n^{(a,b,s)}$ matrisinin $s-$tipinde

- $s=1$ alınırsa, 4×4 tipindeki $\mathscr{U}_4^{(a,b,1)}$ matrisi

$$\mathscr{U}_4^{(a,b,1)}=\begin{bmatrix} b & a & 0 & 0 \\ Ab+aB & b & a & 0 \\ bB+A(Ab+aB) & Ab+aB & b & a \\ B(Ab+aB)+A(bB+A(Ab+aB)) & bB+A(Ab+aB) & Ab+aB & b \end{bmatrix},$$

- $s=0$ alınırsa, 4×4 tipindeki $\mathscr{U}_4^{(a,b,0)}$ matrisi

$$\mathscr{U}_4^{(a,b,0)}=\begin{bmatrix} b & 0 & 0 & 0 \\ Ab+aB & b & 0 & 0 \\ bB+A(Ab+aB) & Ab+aB & b & 0 \\ B(Ab+aB)+A(bB+A(Ab+aB)) & bB+A(Ab+aB) & Ab+aB & b \end{bmatrix},$$

- $s=-1$ alınırsa 4×4 tipindeki $\mathscr{U}_4^{(a,b,-1)}$ matrisi

$$\mathscr{U}_4^{(a,b,-1)}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ Ab+aB & 0 & 0 & 0 \\ bB+A(Ab+aB) & Ab+aB & 0 & 0 \\ B(Ab+aB)+A(bB+A(Ab+aB)) & bB+A(Ab+aB) & Ab+aB & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Tanım 2.2.1' de $A=1$, $B=1$ alınırsa elemanları

$$f_{i,j}^{(a,b,s)}=\begin{cases} F_{i-j+1}^{(a,b)}, & i-j+s\geq 0 \\ 0, & i-j+s<0 \end{cases}$$

olan $n\times n$ tipinde genelleştirilmiş Fibonacci matrisinin s-tipine indirgenir [11]. Benzer şekilde genelleştirilmiş Fibonacci matrisinin s-tipinde

- $s=-1$ alınırsa, 6×6 tipindeki $\mathscr{F}_6^{(a,b,-1)}$ matrisi

$$\mathscr{F}_6^{(a,b,-1)}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a+b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a+2b & a+b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2a+3b & a+2b & a+b & 0 & 0 & 0 \\ 3a+5b & 2a+3b & a+2b & a+b & 0 & 0 \\ 5a+8b & 3a+5b & 2a+3b & a+2b & a+b & 0 \end{bmatrix},$$

- $s=0$ alınırsa, 6×6 tipindeki $\mathscr{F}_6^{(a,b,0)}$ matrisi

$$\mathscr{F}_6^{(a,b,0)}=\begin{bmatrix} b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ a+b & b & 0 & 0 & 0 & 0\\ a+2b & a+b & b & 0 & 0 & 0\\ 2a+3b & a+2b & a+b & b & 0 & 0\\ 3a+5b & 2a+3b & a+2b & a+b & b & 0\\ 5a+8b & 3a+5b & 2a+3b & a+2b & a+b & b \end{bmatrix},$$

- $s=1$ alınırsa, 6×6 tipindeki $\mathscr{F}_6^{(a,b,1)}$ matrisi

$$\mathscr{F}_6^{(a,b,1)}=\begin{bmatrix} b & a & 0 & 0 & 0 & 0\\ a+b & b & a & 0 & 0 & 0\\ a+2b & a+b & b & a & 0 & 0\\ 2a+3b & a+2b & a+b & b & a & 0\\ 3a+5b & 2a+3b & a+2b & a+b & b & a\\ 5a+8b & 3a+5b & 2a+3b & a+2b & a+b & b \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

$\mathscr{U}_n^{(a,b,s)}$ matrisinde s,a,b,A,B nin farklı değerleri için literatürde yer alan elemanları özel sayı dizileri ile tanımlanmış bazı matrislere indirgenir. Örneğin yukarıdaki $\mathscr{U}_n^{(a,b,s)}$ matrisinin tanımında;

- $s=1$, $A=1$, $B=1$, $a=0$, $b=1$ alınırsa, elemanları

$$f_{i,j}=\begin{cases} F_{i-j+1}, & i-j+1\geq 0\\ 0, & i-j+1<0 \end{cases}$$

olan $n\times n$ tipinde Fibonacci matrisine indirgenir [12]. 6×6 tipindeki Fibonacci matrisi

$$\mathscr{F}_6=\begin{bmatrix} F_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ F_2 & F_1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ F_3 & F_2 & F_1 & 0 & 0 & 0\\ F_4 & F_3 & F_2 & F_1 & 0 & 0\\ F_5 & F_4 & F_3 & F_2 & F_1 & 0\\ F_6 & F_5 & F_4 & F_3 & F_2 & F_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 5 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0\\ 8 & 5 & 3 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

örnek olarak verilebilir.

- $s=0$, $A=1$, $B=1$, $a=2$, $b=1$ alınırsa, elemanları

$$l_{i,j}=\begin{cases} L_{i-j+1,} & i-j\geq 0\\ 0, & i-j<0 \end{cases} \tag{2.2}$$

olan $n\times n$ tipinde Lucas matrisine indirgenir [7]. 6×6 tipindeki Lucas matrisi

$$\mathscr{L}_6=\begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ L_2 & L_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ L_3 & L_2 & L_1 & 0 & 0 & 0 \\ L_4 & L_3 & L_2 & L_1 & 0 & 0 \\ L_5 & L_4 & L_3 & L_2 & L_1 & 0 \\ L_6 & L_5 & L_4 & L_3 & L_2 & L_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 11 & 7 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

örnek olarak verilebilir.

- $s=0,\ A=k,\ B=1,\ a=0,\ b=1$ alınırsa, elemanları

$$f_{i,j}(k)=\begin{cases} F_{k,i-j+1}, & i-j\geq 0 \\ 0, & i-j<0 \end{cases}$$

olan $n\times n$ tipindeki $\mathscr{F}_n(k)=\left[f_{i,j}(k)\right]$, $k-$Fibonacci matrisine indirgenir [8].

6×6 tipindeki $k-$Fibonacci matrisi

$$\mathscr{F}_6(k)=\begin{bmatrix} F_{k,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F_{k,2} & F_{k,1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F_{k,3} & F_{k,2} & F_{k,1} & 0 & 0 & 0 \\ F_{k,4} & F_{k,3} & F_{k,2} & F_{k,1} & 0 & 0 \\ F_{k,5} & F_{k,4} & F_{k,3} & F_{k,2} & F_{k,1} & 0 \\ F_{k,6} & F_{k,5} & F_{k,4} & F_{k,3} & F_{k,2} & F_{k,1} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k^2+1 & k & 1 & 0 & 0 & 0 \\ k^3+2k & k^2+1 & k & 1 & 0 & 0 \\ k^4+3k^2+1 & k^3+2k & k^2+1 & k & 1 & 0 \\ k^5+4k^3+3k & k^4+3k^2+1 & k^3+2k & k^2+1 & k & 1 \end{bmatrix}$$

örnek olarak verilebilir. Yine $\mathscr{U}_n^{(a,b,s)}$ matrisinin tanımında s,A,B,a,b sayılarına değerler verilerek literatürde yer alan başka matrislere de indirgenir.

Tanım 2.2.2 [4] $1\leq i,j\leq n$ için elemanları

$$p_{i,j}^{(s)}[x]=\begin{cases} x^{i-j}\dbinom{i-1}{j-1}, & i-j+s\geq 0 \\ 0, & i-j+s<0 \end{cases}$$

olan $n\times n$ tipindeki $\mathcal{P}_n^{(s)}\left[x\right]=\left[p_{ij}^{(s)}[x]\right]$ matrisine birinci çeşit genelleştirilmiş Pascal matrisinin $s-$tipi denir. Örneğin birinci çeşit genelleştirlmiş Pascal matrisinin s-tipinde

- $s=-1$ alınırsa, 5×5 tipindeki $\mathcal{P}_5^{(-1)}\left[x\right]$ matrisi

$$\mathcal{P}_5^{(-1)}\left[x\right]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x^2 & 2x & 0 & 0 & 0 \\ x^3 & 3x^2 & 3x & 0 & 0 \\ x^4 & 4x^3 & 6x^2 & 4x & 0 \end{bmatrix},$$

- $s=0$ alınırsa, 5×5 tipindeki $\mathcal{P}_5^{(0)}\left[x\right]$ matrisi

$$\mathcal{P}_5^{(0)}\left[x\right]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x^2 & 2x & 1 & 0 & 0 \\ x^3 & 3x^2 & 3x & 1 & 0 \\ x^4 & 4x^3 & 6x^2 & 4x & 1 \end{bmatrix},$$

- $s=-2$ alınırsa, 5×5 tindeki $\mathcal{P}_5^{(-2)}\left[x\right]$ matrisi

$$\mathcal{P}_5^{(-2)}\left[x\right]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x^3 & 3x^2 & 0 & 0 & 0 \\ x^4 & 4x^3 & 6x^2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

örnek olarak verilebilir.

$\mathcal{P}_n^{(s)}\left[x\right]$ matrisinin tanımında $x=1$ alınırsa Pascal matrisinin $s-$tipine indirgenir. Yani elemanları

$$p_{i,j}^{(s)}=\begin{cases} \dbinom{i-1}{j-1}, & i-j+s\geq 0 \\ 0, & i-j+s<0 \end{cases}$$

olan $n\times n$ tipindeki $\mathcal{P}_n^{(s)}=\left[p_{ij}^{(s)}\right]$ matrise pascal matrisinin $s-$tipi denir [4]. Birinci çeşit genelleştirilmiş Pascal matrisinin s-tipinde;

- $s=0$ alınırsa, elemanları

$$p(x;i,j)=\begin{cases} x^{i-j}\dbinom{i-1}{j-1}, & i-j\geq 0 \\ 0, & i-j<0 \end{cases}$$

olan $n\times n$ tipindeki $\mathcal{P}_n[x]=\left[p(x;i,j)\right]$ matrisi birinci çeşit genelleştirilmiş Pascal matrisine indirgenir [2].

- $s=0$ ve $x=1$ alınırsa elemanları

$$p_{ij}=\begin{cases}\dbinom{i-1}{j-1}, & i-j\geq 0\\ 0, & i-j<0\end{cases}$$

olan $n\times n$ tipinde $P_n=\left[p_{ij}\right]$ Pascal matrisine indirgenir [1].

Tanım 2.2.3 [4] $1\leq i,j\leq n$ için elemanları

$$q_{i,j}^{(s)}[x]=\begin{cases}x^{i+j-2}\dbinom{i-1}{j-1}, & i-j+s\geq 0\\ 0, & i-j+s<0\end{cases}$$

olan $n\times n$ tipindeki $\mathcal{Q}_n^{(s)}[x]=\left[q_{i,j}^{(s)}[x]\right]$ matrisine ikinci çeşit genelleştirilmiş Pascal matrisinin $s-$tipi denir. İkinci çeşit genelleştirilmiş Pascal matrisinin *s*-tipinde;

- $s=0$ alınırsa, 5×5 tipindeki $\mathcal{Q}_5^{(0)}[x]$ matrisi

$$\mathcal{Q}_5^{(0)}[x]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ x & x^2 & 0 & 0 & 0\\ x^2 & 2x^3 & x^4 & 0 & 0\\ x^3 & 3x^4 & 3x^5 & x^6 & 0\\ x^4 & 4x^5 & 6x^6 & 4x^7 & x^8\end{bmatrix},$$

- $s=-1$ alınırsa, 5×5 tipindeki $\mathcal{Q}_5^{(-1)}[x]$ matrisi

$$\mathcal{Q}_5^{(-1)}[x]=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ x & 0 & 0 & 0 & 0\\ x^2 & 2x^3 & 0 & 0 & 0\\ x^3 & 3x^4 & 3x^5 & 0 & 0\\ x^4 & 4x^5 & 6x^6 & 4x^7 & 0\end{bmatrix},$$

- $s=-2$ alınırsa, 5×5 tipindeki $\mathcal{Q}_5^{(-2)}[x]$ matrisi

$$\mathcal{Q}_5^{(-2)}[x]=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ x^2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ x^3 & 0 & 0 & 0 & 0\\ x^4 & 4x^5 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

örnek olarak verilebilir.

$\mathcal{Q}_n^{(s)}\left[x\right]$ matrisinde $s=0$ alınırsa, elemanları

$$q(x;i,j)=\begin{cases} x^{i+j-2}\binom{i-1}{j-1}, & i-j\geq 0 \\ 0, & i-j<0 \end{cases}$$

olan $n\times n$ tipinde $\mathcal{Q}_n[x]=\left[q(x;i,j)\right]$ matrisinin ikinci çeşit genelleştirilmiş Pascal matrisine indirgenir [2].

Tanım 2.2.4 [16] $u=\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$ ve $v=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ n elemanlı iki küme olsun. u ve v nin $*$ konvolüsyon çarpımı

$$u*v=\sum_{i=1}^{n}u_i v_{n-i+1}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.5 [17] $\mathbb{C}^{n\times m}$ kompleks matrislerin bir kümesi olsun. $\forall A\in\mathbb{C}^{n\times m}$ matrisi için

$$\mathrm{AA^{\dagger}A=A},\ \mathrm{A^{\dagger}AA^{\dagger}=A^{\dagger}},\ \left(\mathrm{AA^{\dagger}}\right)^{*}=\mathrm{AA^{\dagger}},\ \left(\mathrm{A^{\dagger}A}\right)^{*}=\mathrm{A^{\dagger}A}$$

koşullarını sağlayan $n\times m$ tipindeki $\mathrm{A}^{\dagger}$ matrisine A matrisinin Moore-Penrose tersi denir. Burada A^{*}, A matrisinin eşlenik transpozudur. Eğer A matrisi regüler ise $\mathrm{A}^{\dagger}=\mathrm{A}^{-1}$ olur ki Moore-Penrose daki dört şartı sağladığı açıktır.

Teorem 2.2.6 [17] $\forall A\in\mathbb{C}^{n\times m}$ matrisi için Moore-Penrose koşullarını sağlayan $\mathrm{A}^{\dagger}\in\mathbb{C}^{m\times n}$ matrisi vardır.

Teorem 2.2.7 [17]. $\forall A\in\mathbb{C}^{n\times m}$ matrisinin bir tek Moore-Penrose tersi vardır.

Lemma 2.2.8 [17]. $rank(A)=r$ koşulunu sağlayan $A\in\mathbb{C}^{n\times m}$ matrisi olsun. O zaman $A=FR$ olacak şekilde $rank(F)=rank(R)=r$ koşulunu sağlayan $F\in\mathbb{C}^{n\times r}$ ve $R\in\mathbb{C}^{r\times m}$ matrisleri vardır.

Teorem 2.2.9 [17]. A,R,F sırasıyla $A\in\mathbb{C}^{n\times m}$, $F\in\mathbb{C}^{n\times r}$, $R\in\mathbb{C}^{r\times m}$ mertebeli üç matris $A=FR$ ve $rank(A)=rank(F)=rank(R)=r$ olsun. Bu takdirde $A^{\dagger}=R^{*}\left(RR^{*}\right)^{-1}\left(F^{*}F\right)^{-1}F^{*}$ dır.

BÖLÜM 3

ELEMANLARI HORADAM SAYILARI OLAN TOEPLİTZ MATRİSİNİN TERSİ VE MOORE-PENROSE TERSİ

Bu bölümde, Shen ve arkadaşlarının [16] makalesi detaylı olarak incelenmiştir. İlk önce Horadam sayılarını içeren bir konvolüsyon formülü elde edilmiştir. Bu konvolüsyon formülünü kullanarak, [11,14] deki genelleştirilmiş Fibonacci sayıları ve Horadam sayılarını içeren bazı iyi bilinen kombinatoriyel eşitlikler elde edilmiştir.

3.1. Konvolüsyon Temelinde Kombinasyonla İlgili Özdeşlikler

İlk olarak, $m \geq 0$ ve $U_{m+1}^{(a,b)} \neq 0$ için (*r-1*)-elemanlı $U_i^{(a,b)}$ Horadam sayılarını içeren küme ile (*r-1*) elemanlı $\frac{-BU_m^{(a,b)}}{U_{m+1}^{(a,b)}}$ ifadesinin kuvvetlerini içeren kümenin konvolüsyon çarpımı verilmiştir. Aşağıdaki teoremde hesap kolaylığı sağlaması için

$$Con(r,m) := \left\{U_{m+1}^{(a,b)},\ldots,U_{m+r-1}^{(a,b)}\right\} * \left\{1, \frac{-BU_m^{(a,b)}}{U_{m+1}^{(a,b)}},\ldots,\left(\frac{-BU_m^{(a,b)}}{U_{m+1}^{(a,b)}}\right)^{r-2}\right\} \tag{3.1}$$

notasyonu kullanılmıştır.

Teorem 3.1.1. m ve r, $m \geq 0$ ve $r \geq 2$ koşullarını sağlayan iki tamsayı ve $\left\{U_n^{(a,b)} \neq 0\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ Horadam dizisi olsun. Eğer $B \neq 0$, $U_{m+1}^{(a,b)} \neq 0$ ve $\alpha, \beta \neq \frac{-BU_m^{(a,b)}}{U_{m+1}^{(a,b)}}$ ise,

$$Con(r,m) = U_{m+1}^{(a,b)} \frac{U_m^{(a,b)}U_{m+r}^{(a,b)} - U_{m+1}^{(a,b)}U_{m+r-1}^{(a,b)}}{U_m^{(a,b)}U_{m+2}^{(a,b)} - \left[U_{m+1}^{(a,b)}\right]^2} \tag{3.2}$$

dir.

İspat. Eğer $U_m^{(a,b)} = 0$ ise Denklem (3.1)' den $Con(r,m) = U_{m+r-1}^{(a,b)}$ dir ki, Denklem (3.2)' nin doğruluğu kolayca görülür. Şimdi $U_m^{(a,b)} \neq 0$ olsun.

$$
\begin{aligned}
Con(r,m) &= \sum_{l=0}^{r-2} U_{l+m+1}^{(a,b)} \left(\frac{-BU_m^{(a,b)}}{U_{m+1}^{(a,b)}} \right)^{r-l-2} \\
&= \sum_{l=0}^{r-2} \left(c_1 \alpha^{l+m+1} + c_2 \beta^{l+m+1} \right) \left(\frac{-BU_m^{(a,b)}}{U_{m+1}^{(a,b)}} \right)^{r-l-2} \\
&= c_1 \alpha^{m+1} \left[\frac{-BU_m^{(a,b)}}{U_{m+1}^{(a,b)}} \right]^{r-2} \sum_{l=0}^{r-2} \left(\frac{-\alpha U_{m+1}^{(a,b)}}{BU_m^{(a,b)}} \right)^{l} + c_2 \beta^{m+1} \left[\frac{-BU_m^{(a,b)}}{U_{m+1}^{(a,b)}} \right]^{r-2} \sum_{l=0}^{r-2} \left(\frac{-\beta U_{m+1}^{(a,b)}}{BU_m^{(a,b)}} \right)^{l} \\
&= BU_m^{(a,b)} \left[\frac{-BU_m^{(a,b)}}{U_{m+1}^{(a,b)}} \right]^{r-2} \left(c_1 \alpha^{m+1} \frac{1 - \left[\frac{-\alpha U_{m+1}^{(a,b)}}{BU_m^{(a,b)}} \right]^{r-1}}{BU_m^{(a,b)} + \alpha U_{m+1}^{(a,b)}} + c_2 \beta^{m+1} \frac{1 - \left[\frac{-\beta U_{m+1}^{(a,b)}}{BU_m^{(a,b)}} \right]^{r-1}}{BU_m^{(a,b)} + \beta U_{m+1}^{(a,b)}} \right) \\
&= \frac{c_1 \left[(-1)^{r-2} \alpha^{m+1} \frac{\left(BU_m^{(a,b)} \right)^{r-1}}{\left(U_{m+1}^{(a,b)} \right)^{r-2}} + \alpha^{m+r} U_{m+1}^{(a,b)} \right] \left(BU_m^{(a,b)} + \beta U_{m+1}^{(a,b)} \right)}{\left(BU_m^{(a,b)} + \alpha U_{m+1}^{(a,b)} \right)\left(BU_m^{(a,b)} + \beta U_{m+1}^{(a,b)} \right)} \\
&\quad + \frac{c_2 \left[(-1)^{r-2} \beta^{m+1} \frac{\left(BU_m^{(a,b)} \right)^{r-1}}{\left(U_{m+1}^{(a,b)} \right)^{r-2}} + \beta^{m+r} U_{m+1}^{(a,b)} \right] \left(BU_m^{(a,b)} + \alpha U_{m+1}^{(a,b)} \right)}{\left(BU_m^{(a,b)} + \alpha U_{m+1}^{(a,b)} \right)\left(BU_m^{(a,b)} + \beta U_{m+1}^{(a,b)} \right)}
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

elde edilir. Öte yandan $\alpha\beta = -B, \alpha + \beta = A$ eşitliklerinden

$$
\left(BU_m^{(a,b)} + \alpha U_{m+1}^{(a,b)} \right)\left(BU_m^{(a,b)} + \beta U_{m+1}^{(a,b)} \right) = B\left(U_m^{(a,b)} U_{m+2}^{(a,b)} - \left[U_{m+1}^{(a,b)} \right]^2 \right)
$$

bulunur. Denklem (3.3)' ten

$$
\begin{aligned}
Con(r,m) &= \frac{1}{B(U_m^{(a,b)} U_{m+2}^{(a,b)} - \left[U_{m+1}^{(a,b)} \right]^2)} \\
&\quad \times \left[\begin{array}{l} -1^{\;r-2} c_1 \alpha^{m+1} \left(\frac{(BU_m^{(a,b)})^r}{(U_{m+1}^{(a,b)})^{r-2}} + \beta \frac{(BU_m^{(a,b)})^{r-1}}{(U_{m+1}^{(a,b)})^{r-3}} \right) + c_1 \alpha^{m+r} (BU_{m+1}^{(a,b)} U_m^{(a,b)} + \beta \left[U_{m+1}^{(a,b)} \right]^2) \\ + \; -1^{\;r-2} c_2 \beta^{m+1} \left(\frac{(BU_m^{(a,b)})^r}{(U_{m+1}^{(a,b)})^{r-2}} + \alpha \frac{(BU_m^{(a,b)})^{r-1}}{(U_{m+1}^{(a,b)})^{r-3}} \right) + c_2 \beta^{m+r} (BU_{m+1}^{(a,b)} U_m^{(a,b)} + \beta \left[U_{m+1}^{(a,b)} \right]^2) \end{array} \right] \\
&= \frac{1}{B(U_m^{(a,b)} U_{m+2}^{(a,b)} - \left[U_{m+1}^{(a,b)} \right]^2)} \\
&\quad \times \left[(-1)^{r-2} \left(U_{m+1}^{(a,b)} \frac{(BU_m^{(a,b)})^r}{(U_{m+1}^{(a,b)})^{r-2}} - BU_m^{(a,b)} \frac{(BU_m^{(a,b)})^{r-1}}{(U_{m+1}^{(a,b)})^{r-3}} \right) + BU_{m+r}^{(a,b)} U_{m+1}^{(a,b)} U_m^{(a,b)} - BU_{m+r-1}^{(a,b)} \left[U_{m+l}^{(a,b)} \right]^2 \right] \\
&= U_{m+1}^{(a,b)} \frac{U_m^{(a,b)} U_{m+r}^{(a,b)} - U_{m+1}^{(a,b)} U_{m+r-1}^{(a,b)}}{U_m^{(a,b)} U_{m+2}^{(a,b)} - \left[U_{m+1}^{(a,b)} \right]^2}
\end{aligned}
$$

elde edilir ki ispat tamamlanmış olur ■.

Teorem 3.1.1' de *m=0* alınırsa, aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1.2 [11] $b \neq 0$, $\alpha, \beta \neq \dfrac{-aB}{b}$ koşullarını sağlayan $\left\{U_n^{(a,b)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ Horadam dizisi ve $i \geq j+2$ koşulunu sağlayan *i* ve *j* tamsayıları için

$$\left(a^2B + abA - b^2\right)\sum_{k=j+2}^{i}(-1)^{k-j}\frac{a^{k-j-2}B^{k-j-1}}{b^{k-j+1}}U_{i-k+1}^{(a,b)} = \frac{aB}{b^2}U_{i-j}^{(a,b)} - \frac{B}{b}U_{i-j-1}^{(a,b)} \tag{3.4}$$

dir.

İspat. $B = 0$ için Denklem (3.4)' ün doğruluğu açıktır. $B \neq 0$ için Teorem 3.1.1'de $m = 0$ alınırsa

$$\sum_{l=2}^{r}U_{l-1}^{(a,b)}\left(\frac{-aB}{b}\right)^{r-l} = \frac{b\left(aU_r^{(a,b)} - bU_{r-1}^{(a,b)}\right)}{a^2B + abA - b^2}, \tag{3.5}$$

elde edilir. Öte yandan $r = i - j$ Denklem (3.5) yeniden düzenlenirse

$$\sum_{l=2}^{r}U_{l-1}^{(a,b)}\left(\frac{-aB}{b}\right)^{r-l} = \sum_{k=j+2}^{i}U_{i-k+1}^{(a,b)}\left(\frac{-aB}{b}\right)^{k-j-2}$$

elde edilir ki, istenendir ■.

Teorem 3.1.1'de $A = B = 1$ alınırsa, genelleştirilmiş Fibonacci sayılarını, $G_n \;{}_{n\in\mathbb{N}}$, içeren aşağıdaki kombinatoriyel özdeşlik elde edilir.

Sonuç 3.1.3 [14] $m \geq 0$ ve $r \geq 2$ koşullarını sağlayan iki tamsayı ve $\left\{G_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ genelleştirilmiş Fibonacci dizisi olsun. Eğer $G_{m+1} \neq 0$ ve $\alpha, \beta \neq \dfrac{-G_m}{G_{m+1}}$ ise

$$\sum_{l=2}^{r}G_{l+m-1}\left(\frac{-G_m}{G_{m+1}}\right)^{r-l} = G_{m+1}\frac{G_mG_{m+r} - G_{m+1}G_{m+r-1}}{G_{m+1}G_{m+2} - \left(G_{m+1}\right)^2} \tag{3.6}$$

dir.

3.2. $\mathscr{U}_n^{(s,k)}$ Matrislerinin Tersi ve Moore-Penrose Tersi

Bu bölümde, sıfırdan farklı elemanları $U_{k+1}^{a,b} \neq 0$ koşulunu sağlayan Horadam sayıları olan (s,k)-tipindeki alt üçgen Toeplitz matrislerinin bir sınıfı çalışılmıştır.

Tanım 3.2.1. $s,\ k,\ s\leq 0,\ k\geq 0$ koşulunu sağlayan iki tamsayı ve $\{U_n^{a,b}\}_{n\in\mathbb{N}}$, $U_{k+1}^{a,b}\neq 0$ koşulunu sağlayan Horadam dizisi olsun. $(s,k)-$tipindeki $n\times n$ boyutlu $\mathscr{U}_n^{(s,k)}=\left[u_{i,j}^{(s,k)}\right]$ matrisi

$$u_{i,j}^{(s,k)}=\begin{cases}U_{i-j+s+k+1}^{(a,b)}, & i-j+s\geq 0\\ 0, & i-j+s<0\end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Açıkça görüleceği üzere, Tanım 3.2.1'de $A=B=1$ alınırsa, $\mathscr{U}_n^{(s,k)}$ matrisinin [14]' te belirtilmiş olan $\mathscr{G}_n^{(s,k)}$ genelleştirilmiş Fibonacci matrisinin (s,k)-tipine indirgenir.

$b=0$ için $\mathscr{U}_n^{(k)}:=\mathscr{U}_n^{(0,k)}$ notasyonu kullanılacaktır. Bunu matrisin özel yapısı ile birlikte göz önünde bulundurulursa $\mathscr{U}_n^{(s,k)}$ ' nın blok formu aşağıdaki gibi

$$\mathscr{U}_n^{(s,k)}=\begin{pmatrix}\mathscr{O}_{(-s)\times(n+s)} & \mathscr{O}_{(-s)\times(-s)}\\ \mathscr{U}_{n+s}^{(k)} & \mathscr{O}_{(n+s)\times(-s)}\end{pmatrix}$$

yeniden yazılabilir. Burada $\mathscr{O}_{p\times q}$, $p\times q$ tipindeki sıfır matrisidir ve

$$\mathscr{U}_{n+s}^{(k)}=\begin{pmatrix}U_{k+1}^{(a,b)} & 0 & \cdots & 0\\ U_{k+2}^{(a,b)} & U_{k+1}^{(a,b)} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ U_{k+n+s}^{(a,b)} & U_{k+n+s-1}^{(a,b)} & \cdots & U_{k+1}^{(a,b)}\end{pmatrix} \tag{3.7}$$

şeklindedir.

Lemma 3.2.2. r herhangi bir pozitif tamsayı ve $\left\{U_n^{(a,b)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, $U_{k+1}^{(a,b)}\neq 0$ koşulunu sağlayan Horadam dizisi olsun. Eğer $\alpha=\dfrac{-BU_k^{(a,b)}}{U_{k+1}^{(a,b)}}$ yada $\beta=\dfrac{-BU_k^{(a,b)}}{U_{k+1}^{(a,b)}}$ ise, o zaman

$$U_{k+1}^{(a,b)}U_{r+k+1}^{(a,b)}-U_{k+2}^{(a,b)}U_{r+k}^{(a,b)}=0 \tag{3.8}$$

dır.

İspat. Eğer, $B=0$ ise $U_{k+1}^{(a,b)}U_{r+k+1}^{(a,b)}-U_{k+2}^{(a,b)}U_{r+k}^{(a,b)}=0$ eşitliğinin doğruluğu kolayca görülür. $B\neq 0$ olsun. Eğer $\alpha=\dfrac{-BU_k^{(a,b)}}{U_{k+1}^{(a,b)}}$ ise, $\dfrac{A+\sqrt{A^2+4B}}{2}=\dfrac{-BU_k^{(a,b)}}{U_{k+1}^{(a,b)}}$ olacaktır.

Horadam dizisinin $U_n^{(a,b)}=AU_{n-1}^{(a,b)}+BU_{n-2}^{(a,b)}$ rekürans bağıntısından

$$\alpha^2 = A\alpha + B$$

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{\alpha^2}{B} - \frac{A\alpha}{B} \\
&= \frac{B\left(U_k^{(a,b)}\right)^2}{\left(U_{k+1}^{(a,b)}\right)^2} + \frac{AU_k^{(a,b)}}{U_{k+1}^{(a,b)}} = \frac{U_k^{(a,b)}\left(BU_k^{(a,b)} + AU_{k+1}^{(a,b)}\right)}{\left(U_{k+1}^{(a,b)}\right)^2} = \frac{U_k^{(a,b)}U_{k+2}^{(a,b)}}{\left(U_{k+1}^{(a,b)}\right)^2}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Yukarıdaki eşitlikten $U_k^{(a,b)}U_{k+2}^{(a,b)} = \left(U_{k+1}^{(a,b)}\right)^2$ olduğu kolayca görülür. Öte yandan, $\alpha + \beta = A$, $\alpha - \beta = \sqrt{A^2 + 4B}$ olduğundan

$$c_1 = \frac{a}{2} + \frac{2b - aA}{2\sqrt{A^2 + 4B}} = \frac{a}{2} + \frac{2b - a(\alpha + \beta)}{2(\alpha - \beta)} = \frac{b - a\beta}{\alpha - \beta}$$

$$c_2 = \frac{a}{2} - \frac{2b - aA}{2\sqrt{A^2 + 4B}} = \frac{a}{2} - \frac{2b - a(\alpha + \beta)}{2(\alpha - \beta)} = \frac{a\alpha - b}{\alpha - \beta}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlik ve Horadam dizilerine ait Binet formülünden

$$U_k^{(a,b)}U_{k+2}^{(a,b)} - \left(U_{k+1}^{(a,b)}\right)^2 = c_1c_2\left(\alpha\beta\right)^k\left(\alpha - \beta\right)^2 = \left(-B\right)^k\left(a^2B + abA - b^2\right) = 0$$

olur ki $a^2B + abA - b^2 = 0$ dır.

$$\begin{aligned}
U_{k+1}^{(a,b)}U_{r+k+1}^{(a,b)} - U_{k+2}^{(a,b)}U_{r+k}^{(a,b)} &= c_1c_2\left(\alpha\beta\right)^{k+1}\left(\alpha - \beta\right)\left(\alpha^{r-1} - \beta^{r-1}\right) \\
&= \frac{\left(-B\right)^{k+1}\left(a^2B + abA - b^2\right)}{\sqrt{A^2 + 4B}}\left(\alpha^{r-1} - \beta^{r-1}\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Benzer şekilde Denklem (3.8) eşitliğinin doğruluğu $\beta = \dfrac{-BU_k^{(a,b)}}{U_{k+1}^{(a,b)}}$ içinde gösterilebilir ki ispat tamamlanmış olur ■.

Teorem 3.2.3. $\left\{U_n^{(a,b)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$**,** $U_{k+1}^{(a,b)} \neq 0$ koşulunu sağlayan Horadam dizisi olsun. O zaman $\mathscr{U}_n^{(k)}$ matrisinin tersi

$$r_{i,j}=\begin{cases}\dfrac{(-1)^k B^{k+1}\left(a^2B+abA-b^2\right)}{\left(U_{k+1}^{(a,b)}\right)^3}\left(\dfrac{-BU_k^{(a,b)}}{U_{k+1}^{(a,b)}}\right)^{i-j-2}, & i>j+1\\ -\dfrac{U_{k+2}^{(a,b)}}{\left(U_{k+1}^{(a,b)}\right)^2}, & i=j+1\\ \dfrac{1}{U_{k+1}^{(a,b)}}, & i=j\\ 0, & diğer\ durumlar\end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $\mathscr{R}_n=\left[r_{i,j}\right]_{n\times n}$ matrisidir. Burada k, $0\le k<n$ koşulunu sağlayan herhangi bir tamsayıdır.

İspat. $\mathscr{U}_n^{(k)}=\left[u_{i,j}^{(s,k)}\right]$ ve $\mathscr{U}_n^{k}\mathscr{R}_n$ matrislerinin çarpımı olarak ta $\mathscr{H}_n=\left[h_{i,j}\right]$ matrisi tanımlansın. O zaman

$i<j$ için

$$h_{i,j}=0,$$

$i=j$ için

$$h_{i,j}=u_{i,i}^{(k)}r_{i,i}=U_{k+1}^{(a,b)}.\frac{1}{U_{k+1}^{(a,b)}}=1,$$

$i=j+1$ için

$$\begin{aligned}h_{i,j}&=u_{j+1,j}^{(k)}r_{j,j}+u_{j+1,j+1}^{(k)}r_{j+1,j}\\&=U_{k+2}^{(a,b)}.\frac{1}{U_{k+1}^{(a,b)}}+U_{k+1}^{(a,b)}.\left[-\frac{U_{k+2}^{(a,b)}}{\left(U_{k+1}^{(a,b)}\right)^2}\right],\\&=0\end{aligned}$$

$i>j+1$ için

$$\begin{aligned}h_{i,j}&=u_{i,j}^{(k)}r_{j,j}+u_{i,j+1}r_{j+1,j}+\sum_{l=2}^{i-j}u_{i,i-l+2}^{(k)}r_{i-l+2,j}\\&=\frac{u_{i,j}^{(k)}}{U_{k+1}^{(a,b)}}-\frac{U_{k+2}^{(a,b)}}{\left(U_{k+1}^{(a,b)}\right)^2}u_{i,j+1}^{(k)}\\&\quad+\frac{(-1)^k B^{k+1}\left(a^2B+abA-b^2\right)}{\left(U_{k+1}^{(a,b)}\right)^3}\sum_{l=2}^{i-j}u_{i,i-l+2}^{(k)}\left(\frac{-BU_k^{(a,b)}}{U_{k+1}^{(a,b)}}\right)^{i-j-l}\end{aligned}$$

olduğu kolayca görülür. Öte yandan $r=i-j$ olsun. O zaman $u_{i,j}^{(k)}=U_{k+r+1}^{(a,b)}$ ve $u_{i,j+1}^{(k)}=U_{k+r}^{(a,b)}$ eşitliklerinden

$$
\begin{aligned}
h_{i,j} &= \frac{U_{k+r+1}^{(a,b)}}{U_{k+1}^{(a,b)}} - \frac{U_{k+2}^{(a,b)}}{\left(U_{k+1}^{(a,b)}\right)^2} U_{k+r}^{(a,b)} \\
&\quad + \frac{(-1)^k B^{k+1}\left(a^2B + abA - b^2\right)}{\left(U_{k+1}^{(a,b)}\right)^3} \sum_{l=2}^{r} U_{l+k-1}^{(a,b)} \left(\frac{-BU_k^{(a,b)}}{U_{k+1}^{(a,b)}}\right)^{r-l} \\
&= \frac{U_{k+1}^{(a,b)}U_{k+r+1}^{(a,b)} - U_{k+2}^{(a,b)}U_{k+r}^{(a,b)}}{\left(U_{k+1}^{(a,b)}\right)^2} + \frac{(-1)^k B^{k+1}\left(a^2B + abA - b^2\right)}{\left(U_{k+1}^{(a,b)}\right)^3} Con(r,k)
\end{aligned}
$$

dır. Burada $B=0$ için $h_{i,j}=0$ olduğu açıktır. Eğer $\alpha = \frac{-BU_k^{(a,b)}}{U_{k+1}^{(a,b)}}$ yada $\beta = \frac{-BU_k^{(a,b)}}{U_{k+1}^{(a,b)}}$ ise Denklem (3.8) eşitliğine uygulanırsa $h_{i,j}=0$ olduğu kolayca görülür. Eğer $B \neq 0$ ve $\alpha, \beta = \frac{-BU_k^{(a,b)}}{U_{k+1}^{(a,b)}}$ ise Teorem 3.1.1' den

$$
\begin{aligned}
h_{i,j} &= \frac{U_{k+1}^{(a,b)}U_{k+r+1}^{(a,b)} - U_{k+2}^{(a,b)}U_{k+r}^{(a,b)}}{\left(U_{k+1}^{(a,b)}\right)^2} \\
&\quad + \frac{(-1)^k B^{k+1}\left(a^2B + abA - b^2\right)}{\left(U_{k+1}^{(a,b)}\right)^3} \left(\frac{U_{k+1}^{(a,b)}\left[U_k^{(a,b)}U_{k+r}^{(a,b)} - U_{k+1}^{(a,b)}U_{k+r-1}^{(a,b)}\right]}{U_k^{(a,b)}U_{k+2}^{(a,b)} - \left[U_{k+1}^{(a,b)}\right]^2}\right) \\
&= \frac{U_{k+1}^{(a,b)}U_{k+r+1}^{(a,b)} - U_{k+2}^{(a,b)}U_{k+r}^{(a,b)}}{\left(U_{k+1}^{(a,b)}\right)^2} + \frac{B\left(U_k^{(a,b)}U_{k+r}^{(a,b)} - U_{k+1}^{(a,b)}U_{k+r-1}^{(a,b)}\right)}{\left(U_{k+1}^{(a,b)}\right)^2} \\
&= \frac{U_{k+1}^{(a,b)}\left(U_{k+r+1}^{(a,b)} - BU_{k+r-1}^{(a,b)}\right) - U_{k+r}^{(a,b)}\left(U_{k+2}^{(a,b)} - BU_k^{(a,b)}\right)}{\left(U_{k+1}^{(a,b)}\right)^2} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan $\mathscr{H}_n$ matrisinin $n \times n$ tipinde birim matris olduğu gösterilmiş olur. Benzer şekilde $\mathscr{R}_n \mathscr{U}_n^k$ çarpımının da birim matrise eşit olduğu gösterilebilir. Böylelikle ispat tamamlanmış olur ■.

Teorem 3.2.3 de $k=0$ alınırsa, $\mathscr{U}_n^{(a,b,0)}$ regüler matrisin tersi elde edilir.

Sonuç 3.2.4 [11]. $\left\{U_n^{(a,b)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, $b \neq 0$ koşulunu sağlayan, Horadam dizisi olsun. O zaman $\mathscr{U}_n^{(a,b,0)}$ matrisinin tersi

$$x_{i,j}=\begin{cases}(-1)^{i-j}\dfrac{a^2B+abA-b^2}{b^{i-j+1}}a^{i-j-2}B^{i-j-1}, & i>j+1\\ -\dfrac{aB+bA}{b^2}, & i=j+1\\ \dfrac{1}{b}, & i=j\\ 0, & \textit{diğer durumlar}\end{cases}$$

ile tanımlanan $\mathscr{X}_n=\left[x_{i,j}\right]_{n\times n}$ matrisidir.

Teorem 3.2.3' te $A=B=1$ alınırsa, genelleştirilmiş Fibonacci sayılarını içeren $\mathscr{G}_n^k$ matrisinin tersi elde edilir.

Sonuç 3.2.5. $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $G_{k+1}\neq 0$ koşulunu sağlayan, genelleştirilmiş Fibonacci dizisi olsun. O zaman $\mathscr{G}_n^k$ matrisinin tersi

$$y_{i,j}=\begin{cases}\dfrac{(-1)^k\left(a^2+ab-b^2\right)}{\left(G_{k+1}\right)^3}\left(-\dfrac{G_k}{G_{k+1}}\right)^{i-j-2}, & i>j+1\\ -\dfrac{G_{k+2}}{\left(G_{k+1}\right)^2}, & i=j+1\\ \dfrac{1}{G_{k+1}}, & i=j\\ 0, & \textit{diğer durumlar}\end{cases}$$

ile tanımlanan $\mathscr{Y}_n=\left[y_{i,j}\right]_{n\times n}$ matrisidir. Burada k, $0\leq k<n$ koşulunu sağlayan herhangi bir tamsayıdır.

Tanım 3.2.1 ile verilen $\mathscr{U}_n^{(s,k)}(s<0)$ singüler matrisi için Moore-Penrose tersi aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 3.2.6. s,k, $s<0$, $k\geq 0$ koşullarını sağlayan iki tamsayı ve $\left\{U_n^{(a,b)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, $U_{k+1}\neq 0$ koşulunu sağlayan, genelleştirilmiş Fibonacci dizisi olsun. O zaman $\mathscr{U}_n^{(s,k)}$ matrisinin Moore-Penrose tersi

$$\mathscr{D}_n=\begin{pmatrix}\mathscr{O}_{(n+s)\times(-s)} & \mathscr{R}_{n+s}\\ \mathscr{O}_{(-s)\times(-s)} & \mathscr{O}_{(-s)\times(n+s)}\end{pmatrix}$$

ile verilen $n\times n$ blok matristir.

Burada $\mathscr{R}_{n+s}=\left[r_{i,j}\right]$

$$r_{i,j}=\begin{cases}\dfrac{(-1)^k B^{k+1}\left(a^2B+abA-b^2\right)}{\left(U_{k+1}^{(a,b)}\right)^3}\left(\dfrac{-BU_k^{(a,b)}}{U_{k+1}^{(a,b)}}\right)^{i-j-2}, & i>j+1\\ -\dfrac{U_{k+2}^{(a,b)}}{\left(U_{k+1}^{(a,b)}\right)^2}, & i=j+1\\ \dfrac{1}{U_{k+1}^{(a,b)}}, & i=j\\ 0, & \textit{diğer durumlar}\end{cases}$$

ile verilen $(n+s)\times(n+s)$ tipinde bir matristir.

İspat. $\mathscr{U}_{n+s}^{(s,k)}$ Denklem (3.7)' de verilen alt üçgen matris olmak üzere $\mathscr{U}_n^{(s,k)}$ matrisi

$$\mathscr{U}_n^{(s,k)}=\begin{pmatrix}\mathscr{O}_{(-s)\times(n+s)} & \mathscr{O}_{(-s)\times(-s)}\\ \mathscr{U}_{n+s}^{(k)} & \mathscr{O}_{(n+s)\times(-s)}\end{pmatrix}$$

şeklinde ifade edilebildiğinden, $\mathscr{U}_n^{(s,k)}$ matrisinin Moore-Penrose tersi aşağıdaki matris ile

$$\left[\mathscr{U}_n^{(s,k)}\right]^{\dagger}=\begin{pmatrix}\mathscr{O}_{(n+s)\times(-s)} & \left[\mathscr{U}_{n+s}^{(k)}\right]^{-1}\\ \mathscr{O}_{(-s)\times(-s)} & \mathscr{O}_{(-s)\times(n+s)}\end{pmatrix}$$

gösterilir. Böylece Teorem 3.2.3' ün sonucu kullanılarak istenilen elde edilir ■.

Teorem 3.2.6' da $s=-1,\ k=1$ alınırsa, $\mathscr{U}_n^{(a,b,-1)}$ matrisinin Moore-Penrose tersini elde edilir.

Sonuç 3.2.7 [13]. $\left\{U_n^{(a,b)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, $aB+bA\neq 0$ koşulunu sağlayan Horadam dizisi olsun. O zaman $\mathscr{U}_n^{(a,b,-1)}$ matrisinin Moore-Penrose tersi

$$v_{i,j}=\begin{cases}-(-Bb)^{i-j-1}\dfrac{B^2\left(a^2B+abA-b^2\right)}{(aB+bA)^{i-j+2}}, & i>j, i\neq n, j\neq 1\\ -\dfrac{aAB+\left(A^2+B\right)b}{(aB+bA)^2}, & i=j, i\neq 1, i\neq n\\ \dfrac{1}{aB+bA}, & i+1=j\\ 0, & \textit{diğer durumlar}\end{cases}$$

ile tanımlanan $\mathscr{V}_n = \left[v_{i,j} \right]_{n \times n}$ matrisidir ■.

Teorem 3.2.6' da $A = B = 1$ alınırsa, $\mathscr{G}_n^{(s,k)} (s < 0)$ singüler matrisinin Moore-Penrose tersi elde edilir.

Sonuç 3.2.8 [14] s, k, $s < 0$, $k \geq 0$ koşullarını sağlayan herhangi iki tamsayı ve $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $G_{k+1} \neq 0$ koşulunu sağlayan genelleştirilmiş Fibonacci dizisi olsun. O zaman $\mathscr{G}_n^{(s,k)}$ matrisinin Moore-Penrose tersi

$$\mathscr{W}_n = \begin{pmatrix} \mathscr{O}_{(n+s)\times(-s)} & \mathscr{Y}_{n+s} \\ \mathscr{O}_{(-s)\times(-s)} & \mathscr{O}_{(-s)\times(n+s)} \end{pmatrix}$$

ile verilen $n \times n$ tipinde $\mathscr{W}_n$ blok matrisidir. Burada $\mathscr{Y}_{n+s} = \left[y_{i,j} \right]$

$$y_{i,j} = \begin{cases} \dfrac{(-1)^k \left(a^2 + ab - b^2\right)}{\left(G_{k+1}\right)^3} \left(-\dfrac{G_{k+1}}{G_{k+1}} \right)^{i-j-2}, & i > j+1 \\ -\dfrac{G_{k+2}}{\left(G_{k+1}\right)^2}, & i = j+1 \\ \dfrac{1}{G_{k+1}}, & i = j \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

ile tanımlanan $(n+s) \times (n+s)$ tipinde bir matristir.

BÖLÜM 4

GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ MATRİSLERİNİN MOORE-PENROSE TERSİ VE UYGULAMALARI

4.1. $\mathcal{U}_n^{(a,b,-1)}$ Matrisinin Moore-Penrose Tersi

Bu bölümde, $\mathcal{U}_n^{(a,b,-1)}$ singüler matrisinin Moore-Penrose tersi hesaplanmıştır. $A=B=1$ olduğu durumda, [15] 'te $\mathcal{F}_n^{(a,b,-1)}$ genelleştirilmiş Fibonacci matrisinin Moore-Penrose tersi hakkında bilinen sonuçlar elde edilmiştir.

Lemma 4.1.1. $\left\{U_n^{(a,b)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, $aB+bA\neq 0$, $\alpha,\beta\neq -bB/(aB+bA)$ koşullarını sağlayan Horadam dizisi ve i,j, $i\geq j+2$ koşulunu sağlayan herhangi iki tamsayı için aşağıdaki eşitlik

$$\sum_{k=j+1}^{i-1} U_{i-k+1}^{(a,b)} \frac{B^2\left(a^2B+abA-b^2\right)(-bB)^{k-j-1}}{(aB+bA)^{k-j+2}} = -\frac{bB}{(aB+bA)^2}U_{i-j+1}^{(a,b)} + \frac{B}{aB+bA}U_{i-j}^{(a,b)} \tag{4.1}$$

sağlanır.

İspat. $\alpha=0$ veya $\beta=0$ için $B=0$ olur ki, Denklem (4.1)' in doğruluğu kolayca görülür. $\alpha,\beta\neq 0$ için, $I=\sum_{k=j+1}^{i-1} U_{i-k+1}^{(a,b)} \frac{(-bB)^{k-j-1}}{(aB+bA)^{k-j+2}}$ olsun. $\alpha,\beta\neq -bB/(aB+bA)$ olduğundan, Denklem (2.1) ve basit hesaplardan

$$I = \sum_{k=j+1}^{i-1} \left(c_1\alpha^{i-k+1} + c_2\beta^{i-k+1}\right) \frac{(-bB)^{k-j-1}}{(aB+bA)^{k-j+2}}$$

$$= \sum_{k=j+1}^{i-1} \left[\frac{-bB}{\alpha(aB+bA)}\right]^{k-j-1} \frac{c_1\alpha^{i-j}}{(aB+bA)^3} + \sum_{k=j+1}^{i-1} \left[\frac{-bB}{\beta(aB+bA)}\right]^{k-j-1} \frac{c_2\beta^{i-j}}{(aB+bA)^3}$$

$$= \frac{1}{(aB+bA)^3}\left(c_1\alpha^{i-j} \frac{1-\left(\frac{-bB}{\alpha(aB+bA)}\right)^{i-j-1}}{1+\frac{bB}{\alpha(aB+bA)}} + c_2\beta^{i-j} \frac{1-\left(\frac{-bB}{\beta(aB+bA)}\right)^{i-j-1}}{1+\frac{bB}{\beta(aB+bA)}} \right)$$

$$= \frac{1}{(aB+bA)^3}\left(c_1 \frac{\alpha^{i-j+1} - \alpha^2\left(\frac{-bB}{aB+bA}\right)^{i-j-1}}{\alpha+\frac{bB}{aB+bA}} + c_2 \frac{\beta^{i-j+1} - \beta^2\left(\frac{-bB}{aB+bA}\right)^{i-j-1}}{\beta+\frac{bB}{aB+bA}} \right)$$

$$= \frac{c_1\beta + \left(\frac{bB}{aB+bA}\right)\left[\alpha^{i-j+1} - \alpha^2\left(\frac{-bB}{aB+bA}\right)^{i-j-1}\right]}{(aB+bA)^3\left(\alpha+\frac{bB}{aB+bA}\right)\left(\beta+\frac{bB}{aB+bA}\right)}$$

$$+ \frac{c_2\left(\alpha+\frac{bB}{aB+bA}\right)\left[\beta^{i-j+1} - \beta^2\left(\frac{-bB}{aB+bA}\right)^{i-j-1}\right]}{(aB+bA)^3\left(\alpha+\frac{bB}{aB+bA}\right)\left(\beta+\frac{bB}{aB+bA}\right)}$$

elde edilir. $\alpha, \beta \neq 0$, $\alpha + \beta = A$ ve Denklem (2.1)' den

$$\left(\alpha+\frac{bB}{aB+bA}\right)\left(\beta+\frac{bB}{aB+bA}\right) = \frac{-B^2\left(a^2B+abA-b^2\right)}{(aB+bA)^2}$$

bulunur. Buradan

$$I=\frac{\alpha\beta\left(c_1\alpha^{i-j}+c_2\beta^{i-j}\right)-\alpha\beta\left(c_1\alpha+c_2\beta\right)\left(\frac{-bB}{aB+bA}\right)^{i-j-1}}{-B^2\left(aB+bA\right)\left(a^2B+abA-b^2\right)}$$

$$+\frac{\left(c_1\alpha^{i-j+1}+c_2\beta^{i-j+1}\right)\frac{bB}{aB+bA}+\left(c_1\alpha^2+c_2\beta^2\right)\left(\frac{-bB}{aB+bA}\right)^{i-j}}{-B^2\left(aB+bA\right)\left(a^2B+abA-b^2\right)}$$

$$=\frac{-BU_{i-j}^{(a,b)}+BU_1^{(a,b)}\left(\frac{-bB}{aB+bA}\right)^{i-j-1}+\frac{bB}{aB+bA}U_{i-j+1}^{(a,b)}+U_2^{(a,b)}\left(\frac{-bB}{aB+bA}\right)^{i-j}}{-B^2\left(aB+bA\right)\left(a^2B+abA-b^2\right)}$$

$$=\frac{\frac{bB}{aB+bA}U_{i-j+1}^{(a,b)}-BU_{i-j}^{(a,b)}}{-B^2\left(aB+bA\right)\left(a^2B+abA-b^2\right)}$$

elde edilir ki ispat tamamlanmış olur ■.

Lemma 4.1.2. $aB+bA\neq 0$ ve elemanları

$$r_{i,j}^{(a,b)}=\begin{cases}-\left(-bB\right)^{i-j-1}\dfrac{B^2\left(a^2B+abA-b^2\right)}{\left(aB+bA\right)^{i-j+2}}, & i>j,\ i\neq n,\ j\neq 1\\ -\dfrac{aAB+\left(A^2+B\right)b}{\left(aB+bA\right)^2}, & i=j,\ i\neq 1,\ i\neq n\\ \dfrac{1}{aB+bA}, & i+1=j\\ 0, & \textit{diğer durumlar}\end{cases} \tag{4.2}$$

şeklinde tanımlanan $\mathcal{R}_n^{(a,b)}=\left[r_{i,j}^{(a,b)}\right]$, $n\times n$ tipinde bir matris olsun. O zaman

$$\mathcal{V}_n=\left[v_{i,j}\right],\ v_{i,j}=\begin{cases}1, & i=j,\ i\neq 1,\\ 0, & \textit{diğer durumlar}\end{cases}$$

ile verilen $n\times n$ tipinde bir matris olmak üzere, $\mathcal{U}_n^{(a,b,-1)}\mathcal{R}_n^{(a,b)}=\mathcal{V}_n$ dir.

İspat. $x_{i,j}=\sum_{k=1}^{n} u_{i,k}^{(a,b,-1)} r_{k,j}^{(a,b)}$ olsun. $i<j$ için $x_{i,j}=0$ olduğu açıktır. $i=j+1$ için

$$\begin{aligned}
x_{j+1,j} &= u_{j+1,j-1}^{(a,b,-1)} r_{j-1,j}^{(a,b)} + u_{j+1,j}^{(a,b,-1)} r_{j,j}^{(a,b)} \\
&= \frac{U_3^{(a,b)}}{aB+bA} - \frac{aAB+\left(A^2+B\right)b}{\left(aB+bA\right)^2} U_2^{(a,b)} \\
&= \frac{aAB+\left(A^2+B\right)b}{aB+bA} - \left(aB+bA\right)\frac{aAB+\left(A^2+B\right)b}{\left(aB+bA\right)^2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

dir. $i>j+1$ için

$$\begin{aligned}
x_{i,j} &= u_{i,j-1}^{(a,b,-1)} r_{j-1,j}^{(a,b)} + u_{i,j}^{(a,b,-1)} r_{j,j}^{(a,b)} + \sum_{k=j+1}^{i-1} u_{i,k}^{(a,b,-1)} r_{k,j}^{(a,b)} \\
&= \frac{1}{aB+bA} U_{i-j+2}^{(a,b)} - \frac{aAB+\left(A^2+B\right)b}{\left(aB+bA\right)^2} U_{i-j+1}^{(a,b)} \\
&\quad - \sum_{k=j+1}^{i-1} U_{i-k+1}^{(a,b)} \frac{B^2\left(a^2B+abA-b^2\right)\left(-bB\right)^{k-j-1}}{\left(aB+bA\right)^{k-j+2}}
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Eğer $\alpha=-bB/\left(aB+bB\right)\neq 0$ ise, Lemma 2.1.2 ve $\alpha\beta=-B$, $\alpha+\beta=A$ eşitliklerinden $aB+bA=b\beta$,

$a^2B+abA-b^2=a^2B+a^2\beta(\alpha+\beta)-\alpha^2\beta^2=a^2B+a^2\alpha\beta=0$ ve

$$\frac{abA+\left(A^2+B\right)b}{\left(aB+bA\right)^2}=\frac{(aB+bA)A+bB}{b^2\beta^2}=\frac{b\beta\left(\alpha+\beta\right)-b\alpha\beta}{b^2\beta^2}=\frac{1}{b}$$

yazılabilir. Buradan

$$x_{i,j}=\frac{U_{i-j+2}^{(a,b)}}{b\beta}-\frac{U_{i-j+1}^{(a,b)}}{b}=\frac{a\beta^{i-j+2}-\beta.a\beta^{i-j+1}}{b\beta}=0$$

dır. Benzer şekilde $\beta=-bB/\left(aB+bA\right)\neq 0$ için $x_{i,j}=0$ olduğu gösterilebilir. Eğer $\alpha,\beta\neq -bB/\left(aB+bA\right)$, Lemma 4.1.1 den

$$
\begin{aligned}
x_{i,j} &= \frac{U_{i-j+2}^{(a,b)}}{aB+bA} - \frac{abA+\left(A^2+B\right)b}{\left(aB+bA\right)^2} U_{i-j+1}^{(a,b)} - \left(-\frac{bB}{\left(aB+bA\right)^2} U_{i-j+1}^{(a,b)} + \frac{B}{aB+bA} U_{i-j}^{(a,b)} \right) \\
&= \frac{1}{aB+bA} U_{i-j+2}^{(a,b)} - \frac{A\left(aB+bA\right)}{\left(aB+bA\right)^2} U_{i-j+1}^{(a,b)} - \frac{B}{aB+bA} U_{i-j}^{(a,b)} \\
&= \frac{1}{aB+bA} \left(U_{i-j+2}^{(a,b)} - AU_{i-j+1}^{(a,b)} - BU_{i-j}^{(a,b)} \right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

dir.

$i = j > 1$ için $x_{i,i} = u_{i,i-1}^{(a,b,-1)} r_{i-1,i}^{(a,b)} = \dfrac{1}{aB+bA} U_2^{(a,b)} = \dfrac{aB+bA}{aB+bA} = 1$

Sonuç olarak, $x_{1,1} = 0$ olur ki ispat tamamlanır ■.

Lemma 4.1.3. $\mathcal{R}_n^{(a,b)} = \left[r_{i,j}^{(a,b)} \right]$, Denklem (4.2)' de tanımlanan $n \times n$ tipinde bir matris olsun. O zaman $\mathcal{W}_n = \left[w_{i,j} \right]$

$$
w_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j,\ i \neq n \\ 0, & \textit{diğer durumlar} \end{cases}
$$

ile verilen $n \times n$ tipinde bir matris olmak üzere $\mathcal{R}_n^{(a,b)} \mathcal{U}_n^{(a,b,-1)} = \mathcal{W}_n$ dir.

İspat. Lemma 4.1.2' nin ispatına benzer şekilde yapılabilir.

Teorem 4.1.4. $\mathcal{U}_n^{(a,b,-1)} = \left[u_{i,j}^{(a,b,-1)} \right]$**,** $n \times n$ tipinde bir matris olsun. Eğer $aB + bA \neq 0$ ise, Denklem (4.2)' de tanımlanan $\mathcal{R}_n^{(a,b)}$ matrisi, $\mathcal{U}_n^{(a,b,-1)}$ matrisinin Moore-Penrose tersidir.

İspat. Lemma 4.1.2 ve Lemma 4.1.3' teki sonuçlar uygulanırsa

$$
\mathcal{U}_n^{(a,b,-1)} \mathcal{R}_n^{(a,b)} \mathcal{U}_n^{(a,b,-1)} = \mathcal{V}_n \mathcal{U}_n^{(a,b,-1)} = \mathcal{U}_n^{(a,b,-1)}
$$

$$
\mathcal{R}_n^{(a,b)} \mathcal{U}_n^{(a,b,-1)} \mathcal{R}_n^{(a,b)} = \mathcal{W}_n \mathcal{R}_n^{(a,b)} = \mathcal{R}_n^{(a,b)}
$$

$\mathcal{V}_n^* = \mathcal{V}_n$ ve $\mathcal{W}_n^* = \mathcal{W}_n$ olduğundan

$$
\left(\mathcal{U}_n^{(a,b,-1)} \mathcal{R}_n^{(a,b)} \right)^* = \mathcal{V}_n^* = \mathcal{V}_n = \mathcal{U}_n^{(a,b,-1)} \mathcal{R}_n^{(a,b)}
$$

$$
\left(\mathcal{R}_n^{(a,b)} \mathcal{U}_n^{(a,b,-1)} \right)^* = \mathcal{W}_n^* = \mathcal{W}_n = \mathcal{R}_n^{(a,b)} \mathcal{U}_n^{(a,b,-1)}
$$

yazılabilir ki Moore-Penrose tersinin tanımından ispat tamamlanır ■.

Bu bölümün sonuna kadar $\mathcal{R}_n^{(a,b)}$ matrisi için $\mathcal{U}_n^{\dagger(a,b,-1)} = \left[u_{i,j}^{\dagger(a,b,-1)}\right]$ notasyonu kullanılacaktır.

Örnek 4.1.5. Eğer $aB+bA \neq 0$ ise, $\mathcal{U}_5^{(a,b,-1)}$ matrisinin $\mathcal{U}_5^{\dagger(a,b,-1)}$ Moore-Penrose tersi

$$\mathcal{U}_5^{\dagger(a,b,-1)} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{aB+bA} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{abA+\left(A^2+B\right)b}{\left(aB+bA\right)^2} & \frac{1}{aB+bA} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{B^2\left(a^2B+abA-b^2\right)}{\left(aB+bA\right)^3} & -\frac{abA+\left(A^2+B\right)b}{\left(aB+bA\right)^2} & \frac{1}{aB+bA} & 0 \\ 0 & \frac{bB^3\left(a^2B+abA-b^2\right)}{\left(aB+bA\right)^4} & -\frac{B^2\left(a^2B+abA-b^2\right)}{\left(aB+bA\right)^3} & -\frac{abA+\left(A^2+B\right)b}{\left(aB+bA\right)^2} & \frac{1}{aB+bA} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dir.

Teorem 4.1.4' te $A=B=1$ alındığında [15]' te verilen $\mathcal{F}_n^{(a,b,-1)}$ genelleştirilmiş Fibonacci matrisinin Moore-Penrose tersi elde edilir.

Sonuç 4.1.6. $a \neq -b$ ve $\mathcal{F}_n^{(a,b,-1)} = \left[f_{i,j}^{(a,b,-1)}\right]$, $n \times n$ tipinde bir matris olsun. $\mathcal{F}_n^{(a,b,-1)}$ matrisinin $\mathcal{F}_n^{\dagger(a,b,-1)} = \left[f_{i,j}^{\dagger(a,b,-1)}\right]$ Pseudoinverse tersi

$$f_{i,j}^{\dagger(a,b,-1)} = \begin{cases} -(-b)^{i-j-1}\dfrac{a^2+ab-b^2}{(a+b)^{i-j+2}}, & i>j,\ i\neq n,\ j\neq 1 \\ -\dfrac{a+2b}{(a+b)^2}, & i=j,\ i\neq 1,\ i\neq n \\ \dfrac{1}{a+b}, & i+1=j \\ 0, & diğer durumlar \end{cases}$$

dir.

4.2. $\mathcal{U}_n^{(a,b,-1)}$ Genelleştirilmiş Pascal Matrisleri

Bu bölümde genelleştirilmiş Pascal matrisleri ile $\mathcal{U}_n^{(a,b,-1)}$ arasındaki ilişki incelenmiştir. İlk olarak aşağıdaki teoremde birinci çeşit genelleştirilmiş Pascal matrisi $\mathcal{P}_n^{(-1)}[x]$ ve $\mathcal{U}_n^{(a,b,-1)}$ arasındaki bir bağıntıyı veren $n\times n$ tipindeki $\mathcal{G}_n^{(a,b,-1)}[x]$ matrisi tanımlanmıştır.

Teorem 4.2.1. $x\neq 0,\ aB+bA\neq 0$ olmak üzere,

$$g_{i,j}^{(a,b-1)}(x)=\begin{cases} x^{-j}\left(\begin{array}{l}\dfrac{x^{i+1}}{aB+bA}\dbinom{i}{j-1}-\dfrac{aAB+\left(A^2+B\right)b}{\left(aB+bA\right)^2}x^i\dbinom{i-1}{j-1}\\ -\displaystyle\sum_{k=j+1}^{i-1}\left(-bB\right)^{i-k-1}\dfrac{B^2\left(a^2B+abA-b^2\right)}{\left(aB+bA\right)^{i-k+2}}x^k\dbinom{k-1}{j-1}\end{array}\right), & i>j,\ i\neq n\\ \dfrac{i}{aB+bA}x, & i=j,\ i\neq n\\ 0, & \textit{diğer durumlar}\end{cases} \tag{4.3}$$

olan $\mathcal{G}_n^{(a,b,-1)}[x]=\left[g_{i,j}^{(a,b,-1)}(x)\right]$ matrisi verilsin. O zaman

$$\mathcal{P}_n^{(-1)}[x]=\mathcal{U}_n^{(a,b,-1)}\mathcal{G}_n^{(a,b,-1)}[x] \tag{4.4}$$

dır.

İspat. $y_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}u_{i,k}^{\dagger(a,b,-1)}p_{k,j}^{(-1)}(x)$ olsun. O zaman $i=n$ ya da $i\leq j-1$ için $y_{i,j}=0=g_{i,j}^{(a,b,-1)}(x)$ olduğu açıktır. $i=j<n$ için

$$y_{i,i}=u_{i,i+1}^{\dagger(a,b,-1)}p_{i+1,i}^{(-1)}(x)=\frac{1}{aB+bA}x^{(i+1)-i}\binom{i}{i-1}=\frac{i}{aB+bA}x=g_{i,i}^{(a,b-1)}(x)$$

dir. $n>i>j$ için Lemma 4.1.2’ nin sonuçları uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
y_{i,j} &= \sum_{k=j+1}^{i-1} u_{i,k}^{\dagger(a,b,-1)} p_{k,j}^{(-1)}(x) + u_{i,i}^{\dagger(a,b,-1)} p_{i,j}^{(-1)}(x) + u_{i,i+1}^{\dagger(a,b,-1)} p_{i+1,j}^{(-1)}(x) \\
&= -\sum_{k=j+1}^{i-1} \left(-bB\right)^{i-k-1} \frac{B^2\left(a^2B+abA-b^2\right)}{\left(aB+bA\right)^{i-k+2}} x^{k-j} \binom{k-1}{j-1} \\
&\quad - \frac{aAB+\left(A^2+B\right)b}{\left(aB+bA\right)^2} x^{i-j} \binom{i-1}{j-1} + \frac{1}{aB+bA} x^{i-j+1} \binom{i}{j-1} \\
&= x^{-j}\left[\frac{x^{i+1}}{aB+bA}\binom{i}{j-1} - \frac{aAB+\left(A^2+B\right)b}{\left(aB+bA\right)^2} x^{i}\binom{i-1}{j-1} - \sum_{k=j+1}^{i-1}\left(-bB\right)^{i-k-1}\frac{B^2\left(a^2B+abA-b^2\right)}{\left(aB+bA\right)^{i-k+2}} x^{k}\binom{k-1}{j-1}\right] \\
&= g_{i,j}^{(a,b,-1)}(x)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece, $\mathcal{U}_n^{\dagger(a,b,-1)}\mathcal{P}_n^{(-1)}[x] = \mathcal{G}_n^{(a,b,-1)}\left[x\right]$ eşitliği sağlanır. Buradan

$$\mathcal{U}_n^{(a,b,-1)}\mathcal{G}_n^{(a,b,-1)}[x] = \mathcal{U}_n^{(a,b,-1)}\mathcal{U}_n^{\dagger(a,b,-1)}\mathcal{P}_n^{(-1)}[x] = \mathcal{V}_n\mathcal{P}_n^{(-1)}\left[x\right] = \mathcal{P}_n^{(-1)}\left[x\right]$$

eşitliğinin doğruluğu kolayca görülür.

Sonuç 4.2.2. [15] $aB+bA\neq 0$ ve elemanları

$$
g_{i,j}^{(a,b,-1)} = \begin{cases}
\dfrac{\left(-bB\right)^{i-j-1}}{\left(aB+bA\right)^{i-j+2}}\left[\begin{array}{l} b^2B^2\dbinom{i}{j-1} + bB\left(aAB+\left(A^2+B\right)b\right)\dbinom{i-1}{j-1} \\ -B^2\left(a^2B+abA-b^2\right)\left(\dbinom{i-1}{j}-1\right)\end{array}\right], & i>j,\ i\neq n \\
-\dfrac{bBi}{\left(aB+bA\right)^2}, & i=j,\ i\neq n \\
0, & \textit{diğer durumlar}
\end{cases} \tag{4.5}
$$

olan $\mathcal{G}_n^{(a,b,-1)}[-bB/aB+bA] = \left[g_{i,j}^{(a,b,-1)}\right]$ matrisi verilsin. O zaman

$$\mathcal{P}_n^{(-1)}\left[\frac{-bB}{aB+bA}\right] = \mathcal{U}_n^{(a,b,-1)}\mathcal{G}_n^{(a,b,-1)}\left[\frac{-bB}{aB+bA}\right] \tag{4.6}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. $bB=0$ için Denklem (4.6)' nın doğruluğu kolayca görülebilir. $bB\neq 0$ için Teorem 4.2.1' de $x=-bB/\left(aB+bA\right)$ alınırsa

$i=j<n$ için

$$g_{i,j}^{(a,b,-1)}\left[\frac{-bB}{aB+bA}\right]=\frac{i}{aB+bA}\left(\frac{-bB}{aB+bA}\right)=-\frac{bBi}{\left(aB+bA\right)^2}=g_{i,i}^{(a,b,-1)}$$

elde edilir.

$n>i>j$ için

$$\begin{aligned}g_{i,j}^{(a,b,-1)}\left[\frac{-bB}{aB+bA}\right]&=\left(\frac{-bB}{aB+bA}\right)^{-j}\left[\frac{1}{aB+bA}\left(\frac{-bB}{aB+bA}\right)^{i+1}\binom{i}{j-1}\right.\\&\quad-\frac{aAB+\left(A^2+B\right)b}{\left(aB+bA\right)^2}\left(\frac{-bB}{aB+bA}\right)^{i}\binom{i-1}{j-1}\\&\quad\left.-\sum_{k=j+1}^{i-1}\left(-bB\right)^{i-k-1}\frac{B^2\left(a^2B+abA-b^2\right)}{\left(aB+bA\right)^{i-k+2}}\left(\frac{-bB}{aB+bA}\right)^{k}\binom{k-1}{j-1}\right]\\&=\frac{\left(-bB\right)^{i-j-1}}{\left(aB+bA\right)^{i-j+2}}\left[\left(-bB\right)^2\binom{i}{j-1}+bB\left(aAB+\left(A^2+B\right)b\right)\binom{i-1}{j-1}\right.\\&\quad\left.-B^2\left(a^2B+abA-b^2\right)\sum_{k=j+1}^{i-1}\binom{k-1}{j-1}\right]\end{aligned}$$

dir. Yukarıdaki son eşitlikte

$$\sum_{k=j+1}^{i-1}\binom{k-1}{j-1}=\binom{i-1}{j}-1$$

binomial eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}g_{i,j}^{(a,b,-1)}\left[\frac{-bB}{aB+bA}\right]&=\frac{\left(-bB\right)^{i-j-1}}{\left(aB+bA\right)^{i-j+2}}\left[b^2B^2\binom{i}{j-1}+bB\left(aAB+\left(A^2+B\right)b\right)\binom{i-1}{j-1}\right.\\&\quad\left.-B^2\left(a^2B+abA-b^2\right)\left(\binom{i-1}{j}-1\right)\right]\\&=g_{i,j}^{(a,b,-1)}\end{aligned}$$

elde edilir ki ispat tamamlanır ■.

Teorem 4.2.1' de $A=B=1$ alınırsa, [15]' te verilen $\mathcal{F}_n^{(a,b,-1)}$ genelleştirilmiş Fibonacci matrisinin -1-tipi için bilinen bir sonuç elde edilir.

Sonuç 4.2.3. $x\neq 0,\ a\neq -b$ ve elemanları

$$g_{i,j}^{(a,b,-1)}(x)=\begin{cases} x^{-j}\begin{bmatrix} \dfrac{1}{a+b}x^{i+1}\dbinom{i}{j-1}-\dfrac{a+2b}{(a+b)^2}x^{i}\dbinom{i-1}{j-1}- \\ \displaystyle\sum_{k=j+1}^{i-1}\frac{(-b)^{i-k-1}\left(a^2+ab-b^2\right)}{(a+b)^{i-k+2}}x^{k}\binom{k-1}{j-1} \end{bmatrix}, & i>j,\ i\neq n \\ \dfrac{i}{a+b}x, & i=j,\ i\neq n \\ 0, & \textit{diğer durumlar} \end{cases}$$

olan $\mathscr{G}_n^{(a,b,-1)}[x]=\left[g_{i,j}^{(a,b,-1)}(x)\right](x\neq 0,\ a\neq -b)$ matrisi verilsin. O zaman $\mathscr{P}_n^{(-1)}[x]=\mathscr{F}_n^{(a,b,-1)}\mathscr{G}_n^{(a,b,-1)}[x]$

dir.

Teorem 4.2.4. $x\neq 0,\ aB+bA\neq 0$ ve elemanları

$$h_{i,j}^{(a,b,-1)}(x)=\begin{cases} x^{i}\begin{pmatrix} \dfrac{x^{-j+1}}{aB+bA}\dbinom{i-1}{j-2}-\dfrac{aAB+\left(A^2+B\right)b}{(aB+bA)^2}x^{-j}\dbinom{i-1}{j-1} \\ \displaystyle -\sum_{k=j+1}^{i-1}(-bB)^{k-j-1}\frac{B^2\left(a^2B+abA-b^2\right)}{(aB+bA)^{k-j+2}}x^{-k}\binom{i-1}{k-1} \end{pmatrix}, & i>j,\ j\neq 1 \\ \dfrac{i-1}{aB+bA}x, & i=j,\ j\neq 1 \\ 0, & \textit{diğer durumlar} \end{cases}$$

olan $\mathscr{H}_n^{(a,b,-1)}[x]=\left[h_{i,j}^{(a,b,-1)}(x)\right]$ matrisi verilsin. O zaman

$\mathscr{P}_n^{(-1)}[x]=\mathscr{H}_n^{(a,b,-1)}[x]\mathscr{U}_n^{(a,b,-1)}$

eşitliği sağlanır.

İspat. Teoremin ispatı, Teorem 4.2.1' in ispatına benzer şekilde yapılabilir.

Teorem 4.2.5. $x\neq 0,\ \ aB+bA\neq 0$ ve elemanları

$$s_{i,j}^{(a,b,-1)}(x)=\begin{cases} x^{j}\left[\begin{array}{l} \dfrac{x^{i-1}}{aB+bA}\dbinom{i}{j-1}-\dfrac{aAB+\left(A^{2}+B\right)b}{\left(aB+bA\right)^{2}}x^{i-2}\dbinom{i-1}{j-1} \\ -\displaystyle\sum_{k=j+1}^{i-1}\left(-bB\right)^{i-k-1}\dfrac{B^{2}\left(a^{2}B+abA-b^{2}\right)}{\left(aB+bA\right)^{i-k+2}}x^{k-2}\dbinom{k-1}{k-1}\end{array}\right], & i>j, i\neq n \\ \dfrac{i}{aB+bA}x^{2i-1}, & i=j, i\neq n \\ 0, & \textit{diğer durumlar}\end{cases}$$

olan $\mathcal{S}_{n}^{(a,b,-1)}[x]=\left[s_{i,j}^{(a,b,-1)}(x)\right]$ matrisi ve elemanları

$$t_{i,j}^{(a,b,-1)}(x)=\begin{cases} x^{i}\left[\begin{array}{l} \dfrac{x^{j-3}}{aB+bA}\dbinom{i-1}{j-2}-\dfrac{aAB+\left(A^{2}+B\right)b}{\left(aB+bA\right)^{2}}x^{j-2}\dbinom{i-1}{j-1} \\ -\displaystyle\sum_{k=j+1}^{i-1}\left(-bB\right)^{k-j-1}\dfrac{B^{2}\left(a^{2}B+abA-b^{2}\right)}{\left(aB+bA\right)^{k-j+2}}x^{k-2}\dbinom{i-1}{k-1}\end{array}\right], & i>j, j\neq 1 \\ \dfrac{i-1}{aB+bA}x^{2i-3}, & i=j, j\neq 1 \\ 0, & \textit{diğer durumlar}\end{cases}$$

olan $\mathcal{T}_{n}^{(a,b,-1)}[x]=\left[t_{i,j}^{(a,b,-1)}(x)\right]$ matrisi verilsin. O zaman

$$\mathcal{Q}_{n}^{(-1)}[x]=\mathcal{U}_{n}^{(a,b,-1)}\mathcal{S}_{n}^{(a,b,-1)}[x]$$

$$\mathcal{Q}_{n}^{(-1)}[x]=\mathcal{T}_{n}^{(a,b,-1)}[x]\,\mathcal{U}_{n}^{(a,b,-1)}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. Teoremin ispatı Teorem 4.2.1’ in ispatına benzer şekilde yapılabilir.

Sonuç 4.2.6 [15] $aB+bA\neq 0$ için elemanları

$$s_{i,j}^{(a,b,-1)}=\begin{cases}\dfrac{(-bB)^{i+j-3}}{(aB+bA)^{i+j}}\begin{bmatrix}b^2B^2\binom{i}{j-1}+bB\left(aAB+\left(A^2+B\right)b\right)\binom{i-1}{j-1}\\-B^2\left(a^2B+abA-b^2\right)\left(\binom{i-1}{j}-1\right)\end{bmatrix}, & i>j,\ i\neq n\\ -\dfrac{(bB)^{2i-1}i}{(aB+bA)^{2i}}, & i=j,\ i\neq n\\ 0, & \textit{diğer durumlar}\end{cases}$$

olan $\mathcal{S}_n^{(a,b,-1)}[-bB/aB+bA]=\left[s_{i,j}^{(a,b,-1)}\right]$ matrisi verilsin. O zaman

$$\mathcal{Q}_n^{(-1)}\left[\frac{-bB}{aB+bA}\right]=\mathcal{U}_n^{(a,b,-1)}\mathcal{S}_n^{(a,b,-1)}\left[\frac{-bB}{aB+bA}\right]$$

eşitliği sağlanır.

İspat. İspat, Sonuç 4.2.2' nin ispatına benzer şekilde yapılabilir.

Teorem 4.2.5' te $A=B=1$ alınırsa genelleştirilmiş Fibonacci matrislerinin $-1-$tipi için bilinen sonuçlar elde edilir.

Sonuç 4.2.7. $x\neq 0,\ a\neq b$ için elemanları

$$s_{i,j}^{(a,b,-1)}(x)=\begin{cases}x^j\begin{bmatrix}\dfrac{1}{a+b}x^{i-1}\binom{i}{j-1}-\dfrac{a+2b}{(a+b)^2}x^{i-2}\binom{i-1}{j-1}\\-\displaystyle\sum_{k=j+1}^{i-1}\dfrac{(-b)^{i-k-1}\left(a^2+ab-b^2\right)}{(a+b)^{i-k+2}}x^{k-2}\binom{k-1}{j-1}\end{bmatrix}, & i>j,\ i\neq n\\ \dfrac{i}{a+b}x^{2i-1}, & i=j,\ i\neq n\\ 0, & \textit{diğer durumlar}\end{cases}$$

olan $\mathcal{S}_n^{(a,b,-1)}[x]=\left[s_{i,j}^{(a,b,-1)}(x)\right]$ matrisi verilsin. O zaman

$$\mathcal{Q}_n^{(-1)}[x]=\mathcal{F}_n^{(a,b,-1)}\mathcal{S}_n^{(a,b,-1)}[x]$$

eşitliği sağlanır.

Bundan sonra Horadam sayıları ve binomial katsayıları içeren bazı kombinatoriyel eşitlikler verilmiştir.

Teorem 4.2.8. i, j, $i \geq j+3$ koşulunu sağlayan pozitif tamsayılar ve $aB+bA \neq 0$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned}\left[\frac{-bB}{aB+bA}\right]^{i-j}\binom{i-1}{j-1} &= -U_{i-j+1}^{(a,b)}\frac{bBj}{(aB+bA)^2} + U_{i-j}^{(a,b)}\left[2aAB + \left(2A^2 + (j+3)B\right)b\right] \\ &\times \frac{bBj}{2(aB+bA)^3} + \sum_{k=j+2}^{i-1}\frac{(-bB)^{k-j-1}U_{i-k+1}^{(a,b)}}{(aB+bA)^{k-j+2}} \\ &\times\left[b^2B^2\binom{k}{j-1} + bB\left(aAB + \left(A^2+B\right)b\right)\binom{k-1}{j-1}\right. \\ &\left. -B^2\left(a^2B + abA - b^2\right)\left(\binom{k-1}{j} - 1\right)\right]\end{aligned} \tag{4.7}$$

dır.

İspat. Sonuç 4.2.2' den

$$g_{j,j}^{(a,b,-1)}\left[\frac{-bB}{aB+bA}\right] = -\frac{bBj}{(aB+bA)^2}$$

$$\begin{aligned}g_{j+1,j}^{(a,b,-1)}\left[\frac{-bB}{aB+bA}\right] &= \frac{bB}{(aB+bA)^3}\left[bB\frac{j(j+1)}{2} + \left(aAB + \left(A^2+B\right)b\right)j\right] \\ &= \frac{bBj}{2(aB+bA)^3}\left[2aAB + \left(2A^2 + (j+3)B\right)b\right]\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece $i \geq j+3$ için

$$\begin{aligned}\left[\frac{-bB}{aB+bA}\right]^{i-j}\binom{i-1}{j-1} = p_{i,j}^{(-1)}\left[\frac{-bB}{aB+bA}\right] &= u_{i,j}^{(a,b,-1)}g_{j,j}^{(a,b,-1)}\left[\frac{-bB}{aB+bA}\right] \\ &+ u_{i,j+1}^{(a,b,-1)}g_{j+1,j}^{(a,b,-1)}\left[\frac{-bB}{aB+bA}\right] + \sum_{k=j+2}^{i-1}u_{i,k}^{(a,b,-1)} \\ &\times g_{k,j}^{(a,b,-1)}\left[\frac{-bB}{aB+bA}\right]\end{aligned}$$

eşitliği ve $\mathcal{U}_n^{(a,b,s)}$ matrisinin tanımından Denklem (4.7)' nin doğruluğu kolayca görülür.

Teorem 4.2.9. i, j, $i \geq j+3$ koşulunu sağlayan pozitif tamsayılar ve $aB+bA \neq 0$ ise

$$\left[\frac{-bB}{aB+bA}\right]^{i+j+2}\binom{i-1}{j-1}=-U_{i-j+1}^{(a,b)}\frac{(bB)^{2j-1}j}{(aB+bA)^{2j}}+U_{i-j}^{(a,b)}\left[2aAB+\left(2A^2+(j+3)B\right)b\right]$$
$$\times\frac{(bB)^{2j-1}j}{2(aB+bA)^{2j+1}}+\sum_{k=j+2}^{i-1}\frac{(-bB)^{k+j-3}U_{i-k+1}^{(a,b)}}{(aB+bA)^{k+j}}$$
$$\times\left[b^2B^2\binom{k}{j-1}+bB\left(aAB+\left(A^2+B\right)b\right)\binom{k-1}{j-1}\right.$$
$$\left.-B^2\left(a^2B+abA-b^2\right)\left(\binom{k-1}{j}-1\right)\right] \tag{4.8}$$

dır.

İspat. Sonuç 4.2.6' dan

$$s_{j,j}^{(a,b,-1)}\left[\frac{-bB}{aB+bA}\right]=-\frac{(bB)^{2j-1}j}{(aB+bA)^{2j}}$$

$$s_{j+1,j}^{(a,b,-1)}\left[\frac{-bB}{aB+bA}\right]=\frac{(-bB)^{2j-2}}{(aB+bA)^{2j+1}}\left[b^2B^2\frac{j(j+1)}{2}+bB\left(aAB+\left(A^2+B\right)b\right)j\right]$$
$$=\frac{(bB)^{2j-1}j}{2(aB+bA)^{2j+1}}\left[2aAB+\left(2A^2+(j+3)B\right)b\right]$$

eşitlikleri yazılabilir. Buradan $i\geq j+3$ için

$$\left[\frac{-bB}{aB+bA}\right]^{i+j-2}\binom{i-1}{j-1}=q_{i,j}^{(-1)}\left[\frac{-bB}{aB+bA}\right]=u_{i,j}^{(a,b,-1)}s_{j,j}^{(a,b,-1)}\left[\frac{-bB}{aB+bA}\right]$$
$$+u_{i,j+1}^{(a,b,-1)}s_{j+1,j}^{(a,b,-1)}\left[\frac{-bB}{aB+bA}\right]$$
$$+\sum_{k=j+2}^{i-1}u_{i,k}^{(a,b,-1)}s_{k,j}^{(a,b,-1)}\left[\frac{-bB}{aB+bA}\right]$$

eşitliği ve $\mathcal{U}_n^{(a,b,s)}$ matrisinin tanımından Denklem (4.8)' in doğruluğu kolayca görülür.

Teorem 4.2.10. $1\leq r<n$ ve $aB+bA\neq 0$ için

$$\binom{n-1}{r-1}=U_{n-r+1}^{(a,b)}\frac{r}{aB+bA}+\sum_{l=r+1}^{n-1}U_{n-l+1}^{(a,b)}\left[\frac{1}{aB+bA}\binom{l}{r-1}-\frac{aAB+\left(A^2+B\right)b}{(aB+bA)^2}\binom{l-1}{r-1}\right.$$
$$\left.-\sum_{k=r+1}^{l-1}(-bB)^{l-k-1}\frac{B^2\left(a^2B+abA-b^2\right)}{(aB+bA)^{l-k+2}}\binom{k-1}{r-1}\right] \tag{4.9}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Teorem 4.2.1' de $x=1$ alınırsa elemanları

$$g_{i,j}^{(a,b,-1)}(1)=\begin{cases}\dfrac{1}{aB+bA}\dbinom{i}{j-1}-\dfrac{aAB+\left(A^2+B\right)}{\left(aB+bA\right)^2}\dbinom{i-1}{j-1} & \\ -\displaystyle\sum_{k=j+1}^{i-1}\left(-bB\right)^{i-k-1}\dfrac{B^2\left(a^2B+abA-b^2\right)}{\left(aB+bA\right)^{i-k+2}}\dbinom{k-1}{j-1}, & i>j,\ i\neq n\\ \dfrac{i}{aB+bA}, & i=j,\ i\neq n\\ 0, & diğer\ durumlar\end{cases}$$

olan $\mathcal{G}_n^{(a,b,-1)}$ matrisi için $\mathcal{P}_n^{(-1)}\left[x\right]=\mathcal{U}_n^{(a,b,-1)}\mathcal{G}_n^{(a,b,-1)}\left[1\right]$ eşitliği yazılır. Böylece son eşitlikte

$$\binom{n-1}{r-1}=p_{n,r}^{(-1)}=U_{n-r+1}^{(a,b)}g_{r,r}^{(a,b,-1)}\left[1\right]+\sum_{l=r+1}^{n-1}U_{n-l+1}^{(a,b)}g_{l,r}^{(a,b,-1)}\left[1\right]$$

eşitliği göz önüne alınırsa Denklem (4.9)' un doğruluğu kolayca görülür ■.

Teorem 4.3.3' te $A=B=1$ alınırsa [6]' da elde edilen aşağıdaki eşitlik elde edilir.

Sonuç 4.2.11. $1\leq r<n$ ve $a\neq -b$ için

$$\binom{n-1}{r-1}=F_{n-r+1}^{(a,b)}\frac{r}{a+b}+\sum_{l=r+1}^{n-1}F_{n-l+1}^{(a,b)}\left[\frac{1}{a+b}\binom{l}{r-1}-\frac{a+2b}{\left(a+b\right)^2}\binom{l-1}{r-1}\right.$$
$$\left.-\sum_{k=r+1}^{l-1}\frac{\left(-b\right)^{l-k-1}\left(a^2+ab-b^2\right)}{\left(a+b\right)^{l-k+2}}\binom{k-1}{r-1}\right]$$

eşitliği sağlanır.

BÖLÜM 6

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmanın 3. bölümünde Shen ve arkadaşlarının "*Inverse and moore-penrose, inverse of Toeplitz matrices with classical Horadam numbers*" isimli çalışması detaylı bir şekilde incelenmiştir. İlk olarak $s, k,\ s \leq 0$ *ve* $k \geq 0$ koşullarını sağlayan herhangi iki tamsayı olmak üzere sıfırdan farklı elemanları klasik Horadam sayıları olan $\mathscr{U}_n^{(s,k)}$ altüçgen Toeplitz matrisinin *(s,k)*-tipi tanımlanmıştır. Horadam sayılarını içeren konvolüsyon formülünden yararlanarak Horadam sayıları ve genelleştirilmiş Fibonacci sayılarını içeren kombinatoriyel eşitlikler elde edilmiştir. Sadece Horadam sayılarından oluşan $s < 0$ için $\mathscr{U}_n^{(s,k)}$ Toeplitz matrisinin Moore-Penrose tersi elde edilmiştir.

Bu çalışmanın 4. bölümünde ise Shen ve arkadaşlarının "*Moore-Penrose inverse of generalized fibonacci matrix and its applications*" isimli çalışması detaylı bir şekilde incelenmiştir. Burada *s* herhangi bir tamsayı olmak üzere sıfırdan farklı elemanları Horadam sayıları olan $\mathscr{U}_n^{(a,b,s)}$ matrisinin *s*-tipi tanımlanmıştır. $s = -1$ için $\mathscr{U}_n^{(a,b,-1)}$ matrisinin Moore-Penrose tersi elde edilmiştir. $\mathscr{U}_n^{(a,b,-1)}$ matrisi ile genelleştirilmiş Pascal matrisleri arasındaki ilişkiler tartışılmış ve Horadam sayılarını içeren bazı kombinatoriyel eşitlikler elde edilmiştir

Bu tezde yapılan çalışmalar gibi elemanları farklı mertebeden ya da periyodik katsayılı ikinci mertebeden özel sayı dizileri ile tanımlı matrisler alınarak Moore-Penrose tersi incelenebilir.

KAYNAKLAR

1. Brawer, R., Pirovino, M., “The linear algebra of the Pascal matrix”, *Linear Algebra and Its Applications*, 174, 13-23, 1992.

2. Zhang, Z., Liu, M., “An extension of the generalized Pascal matrix and its algebraic properties”, *Linear Algebra and Its Applications*, 271, 169-177, 1998.

3. Bayat, M., Teimoori, H., “The linear algebra of the generalized Pascal functional matrix ”, *Linear Algebra and Its Appications,* 205, 81-89, 1999.

4. Stanimirović, S., Miladinović, M., “Singular case of generalized Fibonacci and Lucas matrices”, *Journal of the Korean Mathematical Society,* 48, 33-48, 2011.

5. El-Mikkawy, M., Cheon, G.-S., “A connection between a generalized Pascal matrix and the Hypergeometric function”, *Applied Mathematics Letters,* 16, 239-1243, 2003.

6. Lee, G.-Y., Kim, J.S., Cho, S.-H., “Some combinatorial identities via Fibonacci numbers”, *Discrete Applied Mathematics*, 130, 527-534, 2003.

7. Zhang, Z., Zhang,Y., “The Lucas matrix and some combinatorial identities”, *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 38, 457-465, 2007.

8. Falcon, S., “The *k*- Fibonacci matrix and the Pascal matrix”, *Central European Journal of Mathematics,* 9(6), 1403-1410, 2011.

9. Stanica, P., “Cholesky factorizations of matrices associated with *r*-Order recurrent sequences”, *Electronic Journal of Combinatorial Number Theory,* 5(2), 2005.

10. Taşçı, D., Tuğlu, N., Aşçı, M., “On Fibo-Pascal matrix involving *k*-Fibonacci and *k*-Pell matrices”, *Arabian Journal for Science and Engineering,* 36, 1031-1037, 2011.

11. Stanimirović, P., Nikolov, J., Stanimirović I., “A generalization of Fibonacci and Lucas matrices”, *Discrete Applied Mathematics,* 156, 2606-2619, 2008.

12. Lee, G.Y., Kim, J. S., Lee, S.G., “Factorizations and eigenvalues of Fibonacci and symmetric Fibonacci matrices”, *Fibonacci Quarterly,* 40, 203-211, 2002.

13. Shen, S.Q., He, J.J., “Moore-Penrose inverse of generalized Fibonacci matrix and its applications”, *International Journal of Computer Mathematics*, 93, 1756-1770, 2016.

14. Stanimirović, P., Miladinović, M., “Inversion of the generalized Fibonacci matrix by convolution”, *International Journal of Computer Mathematics*, 88, 1519-1532, 2011.

15. Miladinović, M., Stanimirović, P., “Singular case of generalized Fibonacci and Lucas matrices”, *Journal of the Korean Mathematical Society,* 48, 33-48, 2011.

16. Shen, S., Liu, W., Feng, L., “Inverse and moore-penrose inverse of Toeplitz matrices with classical Horadam numbers”, *Operator and Matrices,* 11(4), 929-939, 2017.

17. MacAusland, R., “The Moore-Penrose inverse and least squares”, *Advanced Topics in Linear Algebra*, 420, 2014.

18. Falcon, S., “On the *k*-Lucas numbers”, *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, 6(21), 1039-1050, 2011.

19. Koshy, T., “Fibonacci and Lucas numbers with applications”, *John Wiley and Sons Inc. NY,* 2001.

20. Uslu, K., Taskara, N., Köse, H., “The generalized *k*-Fibonacci and *k*-Lucas numbers”, *Ars Combinatoria,* 99, 25-32, 2011.

21. Stanimirović, P., “A generalization of the Pascal matrix and its properties”, *FACTA UNIVERSITATIS, Series Mathematics and Informatics*, 26, 17-27, 2011.

ÖZGEÇMİŞ

Soyadı, Adı	: ÖZSOY, Özge
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 29.11.1978- ANKARA
Medeni hali	: Evli
Telefon	: 0 (505) 357 69 29
Adres	: Avanos Anadolu Lisesi Nevşehir / Avanos
e-mail	: ozsoyozge@gmail.com

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet tarihi**
Lisans	Ankara Üniversitesi	Matematik Bölümü 2001
Lise	Ankara Lisesi	1995

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**
2005-	Avanos Anadolu Lisesi
2001-2004	Şırnak Anadolu Lisesi