T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GRAFLARIN SPEKTRAL YARIÇAPI İÇİN NORDHAUS-GADDUM TİPİ SINIRLAR

Tezi Hazırlayan
Zekiye YAZAR

Tez Danışmanı
Doç. Dr. Sezer SORGUN

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Haziran 2019
NEVŞEHİR

T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GRAFLARIN SPEKTRAL YARIÇAPI İÇİN NORDHAUS-GADDUM TİPİ SINIRLAR

Tezi Hazırlayan
Zekiye YAZAR

Tez Danışmanı
Doç. Dr. Sezer SORGUN

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Haziran 2019
NEVŞEHİR

Doç. Dr. Sezer SORGUN danışmanlığında **Zekiye YAZAR** tarafından hazırlanan **"Grafların Spektral Yarıçapı İçin Nordhaus-Gaddum Tipi Sınırlar"** adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

28/06/2019

JÜRİ:

BAŞKAN : DOÇ. DR. HALİS BİLGİL

ÜYE : DOÇ. DR. SEZER SORGUN

ÜYE : DOÇ. DR. SEYDİ BATTAL GAZİ KARAKOÇ

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulunun 10/07/2019 tarih ve 41-416 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

26/07/2019

Prof. Dr. Şahlan ÖZTÜRK
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİM SAYFASI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada yer alan bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu ve bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Zekiye YAZAR

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanışı sırasında benden yardımlarını esirgemeyen, bilgi ve deneyimleriyle bana yol gösteren danışman Hocam Doç. Dr. Sezer SORGUN’ a,

Eğitim ve öğretim hayatım boyunca maddi ve manevi destekleri için sevgili eşime ve aileme teşekkürlerimi sunarım.

GRAFLARIN SPEKTRAL YARIÇAPI İÇİN NORDHAUS-GADDUM TİPİ SINIRLAR

(Yüksek Lisans Tezi)

Zekiye YAZAR

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Haziran 2019

ÖZET

G bir graf ve $\mathcal{P}$ herhangi bir graf değişmezi olmak üzere $\mathcal{P}(G).\mathcal{P}(\bar{G})$ ve $\mathcal{P}(G) + \mathcal{P}(\bar{G})$ ifadeleri için elde edilen alt veya üst sınırlar Nordhaus-Gaddum tipi sınırlar olarak bilinir.

Bu tez çalışmasında, G graf olmak üzere G'nin komşuluk matrisine göre öz değerleri için literatürde yer alan Nordhaus-Gaddum tipi eşitsizlikler geniş bir biçimde derlenmiştir. İkinci bölümde çalışmanın ana fikrini oluşturan temel tanım ve kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde grafların spektral yarıçapı hariç diğer öz değerleri ile ilgili sonuçlar yer almaktadır. Dördüncü bölümde ise grafın spektral yarıçapı için Nordhaus-Gaddum tipi eşitsizlikler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: ***Graf, Komşuluk Matrisi, Kromatik Sayı, Nordhaus-Gaddum Tipi***
Tez Danışman: Doç. Dr. Sezer SORGUN
Sayfa adeti: 38

NORDHAUS GADDUM TYPE BOUNDS FOR THE SPECTRAL RADIUS OF GRAPHS

(M.Sc. Thesis)

Zekiye YAZAR

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELI UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

June 2019

ABSTRACT

Let G be graph and let $\mathcal{P}$ be any invariant of the graph. The upper or lower bounds of the expressions $\mathcal{P}(G).\mathcal{P}(\bar{G})$ and $\mathcal{P}(G) + \mathcal{P}(\bar{G})$ are known as Nordhaus-Gaddum type bounds.

In this study, Nordhaus-Gaddum type inequalities which are in the literature for the spectrum of G with respect to adjacency matrix of G are compiled. In the second chapter, basic definitions and concepts that constitute the main idea of the study are given. In the third chapter, there are results related to other eigenvalues except the spectral radius of the graphs. In the fourth chapter, Nordhaus-Gaddum type inequalities are given for the spectral radius of the graph.

Key Words: ***Graph, Adjacency Matrix, Chromatic number, Nordhaus-Gaddum Type***
Thesis Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Sezer SORGUN
Page Number: 38

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER LİSTESİ

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

G=(V,E)	Graf
n	Grafın nokta sayısı
e	Grafın kenar sayısı
V	Grafın noktalar kümesi
E	Grafın kenarlar kümesi
v_i	V'ye ait noktalar
e_i	E' ye ait kenarlar
d_v	Nokta derecesi
$\bar{G}$	G grafının tümleyeni(complementi)
$\Delta(G)$	G grafındaki noktaların maksimum derecesi
$\delta(G)$	G grafındaki noktaların minumum derecesi
A(G)	Komşuluk matrisi
D(G)	Derece matrisi
$N(v_i)$	Nokta komşuluk kümesi
d(v).	v noktasına bağlı kenar sayısı
$\mathcal{X}(G)$	G grafının kromatik sayısı
$\lambda(G)$	G grafının spektral yarıçapı
$spek(A)$	A matrisine ait özdeğerlerin kümesi
P_n	Yol graf
C_n	Çevre graf
K_n	Tam graf
$W_{1,n}$	Tekerlek Graf
$S_{1,n}$	Yıldız graf
N_n	Sıfır graf (null)

$d(u, v)$	u noktası ile v noktası arasındaki en yakın yol sayısı
$diam(G)$.	İki nokta arasındaki en büyük uzaklık
$\oplus_n$	Toplama işlemi *(modn)*
$v_i \sim v_j$	Komşu noktalar
$\gamma(G)$	Dominant sayı
$\mathcal{P}(G)$	Spektral graf parametresi
$\omega(G)$	G grafının klik sayısı
$CS(n, p)$	Tam split (bölünmüş)graf
$\tau(G)$	G grafının örtü sayısı
$G_1 \times G_2$	G_1 ve G_2 graflarının kartezyen çarpımı
$G_1 \cup G_2$	G_1 ve G_2 graflarının birleşimi
s^+	G ‘nin pozitif öz değerlerinin karelerinin toplamı olan spektral parametre
s^-	G ‘nin negatif öz değerlerinin karelerinin toplamı olan spektral parametre
NGT	Nordhaus-Gaddum Tipi
NG_2	İkinci en büyük öz değere göre Nordhaus-Gaddum sınırı

1.BÖLÜM

GİRİŞ

Guthrie tarafından 1852 yılında ortaya atılan dört renk problemi ile $\mathcal{X}$ kromatik sayısı incelenmeye başlanmıştır. 1890 da Heawood [1] ve 1879 da Kempe [2] graf değişmezleri hakkında ayrıntılı olarak çalışmışlardır. 1956'ya kadar kromatik sayılar hakkında yapılan çalışmalarda yalnızca bir tek G grafı düşünüldü. Daha sonra Nordhaus ve Gaddum n noktalı bir G grafı ile bu G grafının tümleyeni ile birlikte kromatik sayıları üzerinde çalışmışlardır. Çalışmalarında n noktalı bir G grafı için $\mathcal{X}(G)$ ve $\mathcal{X}(\bar{G})$ kromatik sayılarının toplamları ve çarpımları üzerinde alt ve üst sınırları bulmuşlardır [3]. Daha sonra Nordhaus-Stewart tarafından ilk sonuçlar ayrıntılı bir biçimde ele alınmıştır [4].

Nordhaus ve Gaddum çalışmalarından esinlenerek $\mathcal{P}$ bir graf parametresi olmak üzere $\mathcal{P}(G).\mathcal{P}(\bar{G})$ ve $\mathcal{P}(G)+\mathcal{P}(\bar{G})$ işlemleri için elde edilen sınırlar da literatürde Nordhaus-Gaddum (NG)-tipi eşitsizlikler olarak isimlendirilmiştir. Bazı graf parametlerine göre NG-tipi sınırlar [5,6,7] referanslarında çalışılmıştır.

$G,\ n$ noktalı bir graf ve G komşuluk matrsinin özdeğerleri $\lambda_1(G) \geq \cdots \ldots \geq \lambda_n(G)$ olmak üzere ilk bilinen spektral Nordhaus-Gaddum tipi eşitsizlikler Nosal'a aittir[8]. Son otuz yılda, araştırmacılar $\lambda(G)$ için sınırlar elde edilmiştir [9,10,24]. Çalışmalarda her zaman daha keskin bir sınır elde etmek amaçlanmıştır.

Bu yüzden NG-tipi sınırlar üzerinde her zaman iyileştirilme hedefler arasında yer almıştır.

Bu araştırmalar sonucunda ikinci bölümde; bazı temel tanım ve teoremler, graf değişmezleri, diğer bölümlerde kullanılmak üzere komşuluk matrisi ve spektral yarı çapı için bazı sınırlar verildi. Üçüncü bölümde; spektral Nordhaus-Gaddum tipi eşitsizlikler hakkında literatür taraması yapılarak geniş biçimde derleme yapılmıştır. Dördüncü bölümde ise spektral yarıçapı için Nordhaus-Gaddum tipi eşitsizlikler incelenmiştir.

2. BÖLÜM

TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Graf Tanım Ve Kavramları

Tanım 2.1 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ bir nokta kümesi , E=$\left\{\{v_i, v_j\}; 1 \leq i \leq n\,,\; 1 \leq j \leq n\right\}$ kenar kümesi olmak üzere G =(V, E) sıralı ikilisine graf denir. G nin kenarlarının sayısı $m = |E|$, G nin noktalarının sayısı $n = |V|$ dir.

Bir G grafı tek bir noktada bir kenar oluşturmuyor ve aynı iki noktanın oluşturduğu birden fazla kenarlara sahip değilse bu grafa basit graf denir.

Bir G grafında her iki farklı nokta yine G de en az bir yolun sonu ise G grafına bağlantılıdır (connected) denir. Aksi durumda G bağlantısızdır (disconnected) denir ve maksimal bağlantılı türetilmiş alt graflarına G nin bileşenleri (component) denir.

Tanım 2.2

i. Bir grafta iki nokta bir kenar oluşturuyorsa bu iki noktaya birbirlerine komşudur denir. {i, j}∈E ya da i ∼ j biçiminde gösterilir.

ii. Bir grafta herhangi bir noktaya bağlı kenar sayısına o noktanın derecesi denir ve

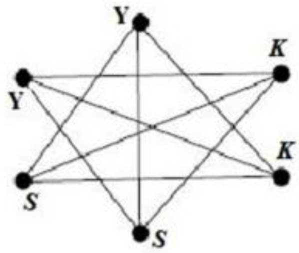
$v \in V$, $deg(v) = d(v)$ şeklinde gösterilir. Bir G grafında ki derecelerin en büyüğüne maksimum derece ve en küçüğüne de minimum derece denir. Sırasıyla $\Delta(G) = \Delta$ ve $\delta(G) = \delta$ ile gösterilir. $v \in V(G)$ noktası için, m(v), v noktasının komşularının ortalama derecesini verir, $m(v) = \frac{1}{d(v)} \sum_{u \sim v} d(u)$ olarak tanımlanır.

Tanım 2.3 Bir G grafı ile aynı nokta kümesine sahip ve G'de kenar oluşturmayan tüm noktaların birleştirilmesiyle elde edilen kenar kümesine sahip olan grafa G grafının tümleyeni (komplementi) denir ve $\bar{G}$ ile gösterilir.

Tanım 2.4

i. Bir G grafının komşu noktalarını farklı renkte boyamak için ihtiyaç duyulan en az renk sayısına G' nin kromatik sayısı denir ve $\mathcal{X}\ (G)$ ile gösterilir.

ii. Bir G grafının klik sayısı, graftaki en büyük tam grafın nokta sayısı olup, ω(G) ile gösterilir.



Şekil 2.1. Örnek bir Graf

Şekil 2.1' de verilen G grafının noktalarını K (kırmızı), S (sarı) ve Y (yeşil) ile renklendirecek olursak, kromatik sayı 3 olarak bulunur. En büyük tam alt grafı oluşturan nokta sayısı 3 olduğundan klik sayısı 3 dir.

Tanım 2.5 Bir G grafı iki parçalı ve aynı parçaya ait noktalar eşit dereceye sahip ise bu G grafına yarı düzenli iki parçalı graf denir. Her bir parçadaki nokta sayıları r ve s olmak üzere (r,s)- yarı düzenli iki parçalı olarak ifade edilir.

Tanım 2.6 H ve G birer graf olmak üzere; $V(H)\subseteq V(G)$ ve $E(H) \subseteq E(G)$ ise H grafına G' nin bir *alt grafı* denir. G grafından nokta veya kenar silinerek G' nin bir *alt grafı* elde edilebilir. Alt graf, bir grafın herhangi bir parçası şeklinde de düşünülebilir. Ayrıca alt graf için aşağıda verilen özellikler sağlanır.

i. Her graf kendisinin alt grafıdır.

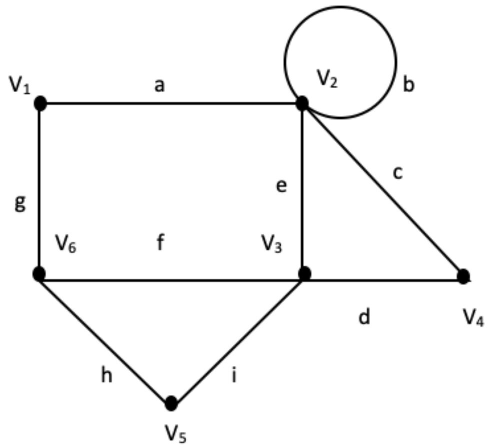
ii. Bir grafın herhangi bir noktası tek başına bir alt grafıdır.

iii. G'deki tek bir kenar kendi başlangıç ve bitiş noktaları ile birlikte G'nin alt grafıdır.

Tanım 2.7

i. Bir nokta ile başlayıp herhangi bir nokta ile biten, noktalar arasındaki bağlantıları o noktalar ile bağlantılı kenarların kurduğu hareketler zincirine *yürüyüş (walk)* denir. Bir yürüyüş içerisinde bir kenar iki kez kullanılmazken, bir nokta birden fazla kullanılabilir. Yürüyüş aynı zamanda *kenar dizisi* veya *zincir* olarak da adlandırılır. Bir yürüyüşü (walk) oluşturan kenar ve noktalar kümesi, açıktır ki, verilen grafın bir *alt grafıdır*. Yürüyüşün başlangıç ve bitiş noktaları *uç noktaları* olarak adlandırılır. Başlangıç ve bitiş noktaları aynı olan *yürüyüş kapalı yürüyüş,* başlangıç ve bitiş noktaları farklı olan *yürüyüş* ise açık *yürüyüş* olarak tanımlanır.

ii. Her noktanın bir kez kullanıldığı *açık yürüyüş yol (path)* olarak adlandırılır. Başka bir ifade ile noktalarından iki tanesinin derecesi 1, diğer tüm noktalarının dereceleri 2 olan graf yol grafdır. P_n ile gösterilir. *Yol* içindeki kenarların sayısı ile *y*ol uzunluğu elde edilir. *Yürüyüş* içerisinde döngü bulunabilir ancak *yol* içerisinde döngü bulunamaz. Bir yolun başlangıç ve bitiş noktaları aynı ise bu yola *kapalı yol* denir [11].



Şekil 2.2. Örnek bir Graf

Şekil 2.2' de verilen adımda v_1 ve v_4 noktaları herhangi uç noktalarıdır, $v_1av_2ev_3dv_4$ ve $v_1av_2ev_3fv_6gv_1$ sırasıyla açık ve kapalı yürüyüştür. $v_1av_2ev_3dv_4$ bir yoldur, ancak $v_1av_2bv_2ev_3dv_4$ bir yol değildir. Ayrıca $v_5hv_6fv_3iv_5$ yolu ise kapalı yoldur.

Tanım 2.8 Bir G grafının kuvveti G^k ile gösterilir. G^k daki her bir eleman *k* uzunluklu yola eşittir.

Tanım 2.9

i. Her noktanın derecesi 2 olan grafa çevre graf denir. n noktalı bir çevre graf C_n ile gösterilir. n noktalı bir çevre grafın kenar sayısı n tanedir [12].

ii. G, n noktalı m kenarlı bir graf olmak üzere, herhangi iki nokta arasında bir kenar var ise bu grafa tam graf denir. Yani her i için d_i = n-1 ise G tam graf olarak adlandırılır ve K_n ile gösterilir.

iii. G, n noktalı m kenarlı bir graf olmak üzere, $(n+1)$ noktalı bir çevre grafın her bir noktası, bir tek noktayla (bu nokta çevre grafa ait değildir) birer kenar ilave edilmesiyle elde edilen grafa *tekerlek graf* denir. n noktalı bir tekerlek graf $W_{1,n}$ ile gösterilir.

iv. $(n + 1)$ noktalı bir G grafında bir noktanın derecesi n, diğer noktaların derecesi 1 ise, bu grafa yıldız graf denir. Yıldız graflar $S_{1,n}$ ile gösterilir [13].

v. G,n noktalı, m kenarlı bir graf olmak üzere $n = m$-1 ise G bir ağaç (tree) grafdır denir. Ağaçlar çevre içermeyen basit graflardır.

Tanım 2.10 Bir grafta bağımsız (independent) küme birbirleriyle komşu olmayan noktaları içeren kümedir. Bir G grafında bağımsız kümedeki her nokta klikte bulunan her noktaya komşu olacak biçimde klik ve bağımsız kümeye parçalanıyorsa G ye tam bölünmüş (complete split) graf denir. p independent sayısı olmak üzere , $1 \leq p \leq n, n$ noktalı bir G graf tam bölünmüş graf $CS(n, p)$ olarak gösterilir.

Tanım 2.11 Bir G grafında alınan herhangi iki nokta çifti arasındaki en büyük uzaklığa

G 'nin çapı (diameter) denir ve diam(G) biçiminde gösterilir.

Tanım 2.12 G_1 ve G_2 iki graf olmak üzere G_1 nin herhangi iki noktasını birleştiren kenarların sayısı G_2 nin karşılık gelen noktalarını birleştiren kenarların sayısına eşit olmak üzere G_1 ve G_2 nin noktaları arasında birebir eşleme varsa G_1 ve G_2 ye izomorftur denir ve $G_1 \cong G_2$ biçiminde gösterilir.

Tanım 2.13 $G = (V, E)$ basit bir graf olmak üzere $C \subseteq V$ alalım. Grafın bütün kenarları C deki noktalarla ilişkiliyse C noktalar kümesine G nin bir örtüsüdür denir. G nin bir örtüsünün en küçük nokta sayısına G nin örtü sayısı denir ve $\tau(G)$ ile gösterilir.

Tanım 2.14 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ tipinde bir kare matris olmak üzere $AX = \lambda X$ denklemini sağlayan herhangi bir λ skaleri için sıfırdan farklı X vektörüne A matrisinin özvektörü denir, λ skalerine de A matrisinin özdeğeri denir.

Tanım 2.15 I birim matris ve A matrisinin karakteristik polinomu $K_A(\lambda)$ olmak üzere

$K_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$ denklemine A matrisinin karakteristik denklemi denir. Bu karakteristik denklemin n tane λ köklerine de A matrisinin özdeğerleri denir.

Tanım 2.16 G grafının noktalarının kümesi $V_G = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ olsun. G komşuluk matrisi $n \times n$ tipinde simetrik bir matristir ve

$$A(G) = (a_{ij}) = \begin{cases} 1 \ ; v_i \sim v_j \\ 0 \ ; \text{ diğer durumlarda} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır [14].

Tanım 2.17 A bir matris ve $A \in M_n$ olmak üzere, A matrisine ait öz değerleri $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ olmak üzere A matrisine ait öz değerlerinin kümesi

$spek(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ şeklinde gösterilir.

$\sigma(A) = max\{|\lambda_i| : 1 \leq i \leq n\}$ ifadesine A matrisinin spektral yarıçapı denir.

Tanım 2.18 G, n noktalı bir graf olsun. G grafı ve bu G grafının tümleyeninin kromatik sayıları sırasıyla $\mathcal{X}(G) ve\ \mathcal{X}(\bar{G})$ olsun. $\mathcal{X}(G)$ ve $\mathcal{X}(\bar{G})$ kromatik sayılarının toplamları ve çarpımları için ifade edilen sınırlara Nordhaus ve Gaddum tipi sınırlar denir. $\mathcal{P}$ bir graf parametresi olmak üzere $\mathcal{P}(G).\mathcal{P}(\bar{G})$ ve $\mathcal{P}(G) + \mathcal{P}(\bar{G})$ işlemleri için de elde edilen eşitsizlikler Nordhaus-Gaddum tipi eşitsizlikler olarak bilinir.Bilinen ilk sınır aşağıda verilmiştir.

Teorem 2.19 G, n noktalı bir graf olmak üzere;

$$2\sqrt{n} \leq \mathcal{X}(G) + \mathcal{X}(\bar{G}) \leq n + 1$$

ve

$$n \leq \mathcal{X}(G)\mathcal{X}(\bar{G}) \leq \frac{(n+1)^2}{4}$$

dir [3].

Tanım 2.20 a, b ve n pozitif tam sayı olmak üzere a + b -1 $\leqq n \leqq a.b$ olsun. a satır ve b sütun olacak şekilde n nokta bir dikdörtgen şeklinde, ilk satır ve ilk sütun dolu ve n - a -b +1 nokta dikdörtgenin kalan kısımlarına rastgele dağıtılmış olarak düzenlensin. n nokta aşağıdaki gibi yapılandırılmış bir G grafını temsil eder.

i. Aynı satıra ait komşu iki nokta yoktur.

ii. Aynı sütuna ait herhangi iki nokta komşudur.

iii. Ne aynı satıra, ne de aynı sütuna ait herhangi iki nokta birbirine komşu olabilir. biçiminde bir graf olarak yazılabilir. Böyle grafa $T_1(n, a, b,)$ tip graf denir.

iv. Bir G grafı G_1, G_2, G_3 şeklinde karşılıklı ayrık kısmi graflar içermek üzere G_1,5 noktalı bir döngü; G_2, a noktalı tam graf; G_3, ikisi komşu olmayan n - a -5 nokta içersin. Bu durumda G grafı, $T_2(n,a)$ tipindedir denir.

Önerme 2.21 G grafı $T_1(n, a, b)$ tipinde bir graf ise $\bar{G}$ tümleyen grafı $T_1(n, b, a)$ tipindedir.

Üstelik $\mathcal{X}(G)$= a ve $\mathcal{X}(\bar{G})$ = b dır [15].

Teorem 2.22 G, n noktalı bir graf olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

i. $\mathcal{X}(G).\mathcal{X}(\bar{G}) = n$ ancak ve ancak n 'nin keyfi bir böleni d olduğunda

$G \cong T_1(n, \frac{n}{d}, d)$

ii. $2\sqrt{n} \leq \mathcal{X}(G) + \mathcal{X}(\bar{G}) < 2\sqrt{n} + 1$ ancak ve ancak $2\sqrt{n} \leq a + b < 2\sqrt{n} + 1$

eşitsizliğini sağlayan herhangi a ve b için $G \cong T_1(n,a, b)$

iii. $\mathcal{X}(G).\mathcal{X}(\bar{G}) = n$ ve $2\sqrt{n} \leq \mathcal{X}(G) + \mathcal{X}(\bar{G}) < 2\sqrt{n} + 1$ ancak ve ancak

n = $a.b$ ve

$\left|\sqrt{a} - \sqrt{b}\right| < 1$ olduğunda $G \cong T_1(n, a, b)$ [15].

Teorem 2.23

i. G,n noktalı bir graf olsun. $\mathcal{X}(G) + \mathcal{X}(\bar{G})$ = n +1 ancak ve ancak G ya da $\bar{G}$ herhangi bir 1≤ $a \leq n$ için T_1(n,a n,-a+1) tiptedir ya da herhangi bir 1≤ $a \leq n$-5 için $T_2(n, a)$ tiptedir.

ii. $\mathcal{X}(G).\mathcal{X}(\bar{G}) = \left\lfloor\frac{(n+1)^2}{4}\right\rfloor$ ancak ve ancak G ya da $\bar{G}$ tek n için $T_1(n,\frac{n+1}{2},\frac{n+1}{2})$ ve $T_2(n,\frac{n-5}{2})$ tipinden birindedir, ya da G ya da $\bar{G}$ $T_1(n,\frac{n}{2},\frac{n+2}{2})$, $T_1(n,\frac{n+2}{2},\frac{n}{2})$, $T_2(n,\frac{n-4}{2})$ tipinden birindedir.

Çift n için $T_2(n,\frac{n-6}{2})$ dır [15].

Teorem 2.24 G, n noktalı bir graf olsun.

$d(1) \geq d(2) \geq \cdots \geq d(n)$ derece dizisi olmak üzere;

$\mathcal{X}(G) \leq \max_{1\leq i\leq n} min\{d(i)+1, i\}$

dir [16].

Tanım 2.25 x keyfi bir reel sayı olsun x' den büyük en küçük tamsayıyı veren fonksiyona tavan (ceiling) fonksiyon denir ve $\lceil x\rceil$ ile gösterilir. Benzer olarak, x' den küçük en büyük tamsayıyı veren fonksiyona taban (flooring) fonksiyon denir ve $\lfloor x\rfloor$ ile gösterilir.

Teorem 2.26 G, n noktalı ve m kenarlı bir graf olsun. Buna göre;

$$A(n,m) = \begin{cases} n+1 & m=0 \\ n+2-m & 1\leq m\leq n' \\ \lceil 2\sqrt{n}\rceil & diğer\ durumlarda \end{cases}$$

$$B(n,m) = \begin{cases} n & m=0\ yada\ n\ asal\ değil\ ve\ m \geq \frac{n(n_1-1)}{2} \\ 2(n-m) & 1\leq m\leq n' \\ n+1 & diğer\ durumlarda \end{cases}$$

$$C(n,m) = \begin{cases} \left\lfloor\frac{(n+1)^2}{4}\right\rfloor & m \geq n'(n'-1) \\ k(n+1-k) & diğer\ durumlarda \end{cases}$$

ve $n' = \lceil n/2\rceil, n_1 \neq 1$ n nin en küçük böleni ve

$k, m = k(k-1)/2 + t\ ve\ 0 \leq t \leq k-1$ e karşılık gelen bir tam sayı olmak üzere

$A(n,m) \leq \mathcal{X}(G) + \mathcal{X}(\bar{G}) \leq n+1$

ve

$B(n,m) \leq \mathcal{X}(G).\mathcal{X}(\bar{G}) \leq C(n,m)$

eşitsizlikleri sağlanır [17].

Tanım 2.27 Bir $G = (V, E)$ grafının baskın (dominating) kümesi $D \subseteq V$ alt kümesidir öyle ki D de olmayan her nokta D'nin en az bir noktasına komşudur. G nin en küçük kümesindeki nokta sayısına baskın sayısı denir ve $\gamma(G)$ ile gösterilir [18].

Teorem 2.28 $G = (V, E)$, n noktalı bir graf olmak üzere

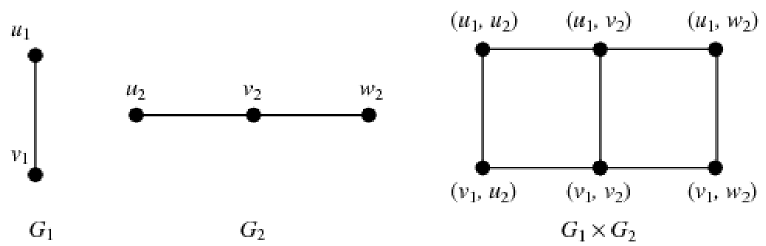
$$\gamma(G) + \gamma(\bar{G}) \leq n + 1$$

ve

$$\gamma(G).\gamma(\bar{G}) \leq n$$

dir. Üstelik eşitlik olması için gerek ve yeter koşul $\{\gamma(G), \gamma(\bar{G})\} = \{1, p\}, \{2, p/2\}$ ya da $\{3,3\}$ olmasıdır [19].

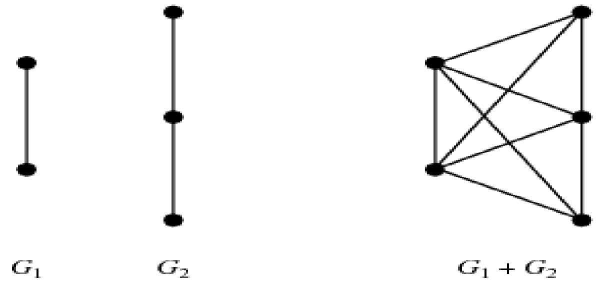
Tanım 2.29



G_1 ve G_2 iki graf olmak üzere kartezyen çarpımları, noktalar kümesi V_1 ve V_2 ve kenar kümesi X_1 ve X_2 ile birlikte noktalar kümesi $V_1 \times V_2$ olan ve u =(u_1, u_2), v= (v_1, v_2) ve

[u_1 = v_1 ve $u_2 \sim v_2$] veya [u_2 = v_2 ve $u_1 \sim v_1$] olacak biçimde bir graftır ve $G_1 \times G_2$ ile gösterilir [20].

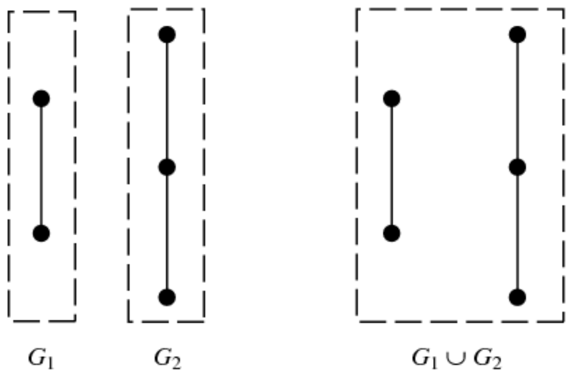
Tanım 2.30



$G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ iki graf olsun. Öyleki ayrık nokta kümeleri V_1 ve V_2

ve kenar kümeleri X_1 ve X_2 olan $G = G_1 + G_2$ bir birleşim graftır. $G_1 \cup G_2$ şeklinde gösterilir. Bu gösterimde V_1 ve V_2 deki bütün kenarların eklenmesi ile oluşan graftır [21].

Tanım 2.31



$G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ iki graf olsun. $G = G_1 \cup G_2$ işlemi $V = V_1 \cup V_2$ ve $X = X_1 \cup X_2$ şeklinde olan graftır. Bu işlem ayrık birleşim (disjoint union) olarak adlandırılır [22].

3.BÖLÜM

SPEKTRAL NORDHAUS GADDUM TİPİ EŞİTSİZLİKLER

G , n noktalı bir graf ve $A(G)$' nin öz değerleri $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ biçiminde sıralansın (λ_1 spektral yarıçap). Bu bölümde bir grafın komşuluk matrisinin öz değerleri (λ_1 hariç) için bilinen Nordhaus Gaddum tipi sınırlar derlenmiştir. λ_1 için sınırlar bir sonraki bölümde ayrıca verilecektir.

Lemma 3.1 $G, n \geq 5$ noktalı bir graf olsun. Bu durumda,

$$\lambda_2(G) + \lambda_2(\bar{G}) \leq -1 + \sqrt{\frac{n^2}{2} - n + 1}$$

dir [23].

Lemma 3.2 G, n noktalı bir graf olmak üzere;

$$\lambda_2(G) + \lambda_2(\bar{G}) \leq -1 + \frac{n}{\sqrt{2}}$$

dir [24].

Teorem 3.3 M ve N n.mertebeden Hermityen matrisler ve $1 \leq i \leq n$ ve $1 \leq j \leq n$ olmak üzere,

$$\alpha_i(M) + \alpha_j(N) \leq \alpha_{i+j-n}(M+N) \quad eğer \quad i+j \geq n+1 \tag{3.1}$$

$$\alpha_i(M) + \alpha_j(N) \geq \alpha_{i+j-1}(M+N) \quad eğer \quad i+j \leq n+1 \tag{3.2}$$

dir [23].

Teorem 3.4 Eğer T, n.mertebeden bir ağaç ise $\lambda_1(T) \leq \sqrt{n-1}$ dir. Eşitlik ancak ve ancak

$T \cong S_n$ olduğunda korunur, burada S_n n noktalı bir yıldızdır [25].

Önerme 3.5 T, n mertebeden bir ağaç olsun.Bu durumda

$$\lambda_2(T) + \lambda_2(\bar{T}) \leq -1 + \sqrt{\frac{n^2}{2} - n + 1} \tag{3.3}$$

dir. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul $T \cong P_4$ olmasıdır [26].

İspat: Eşitsizlik (3.3) den takip edilerek altı noktalı bütün ağaçlar için ve bunların arasından yalnızca P_4, $\lambda_2(P_4) + \lambda_2(\overline{P_4}) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ olması nedeniyle eşitliğin korunacağı kolaylıkla kontrol edilebilir.

Kabul edelim ki, $n \geq 7$ olsun. Eşitsizlik (3.1) ve (3.2) ‘den,

$\lambda_2(\bar{T}) \leq -1 - \lambda_n(T)$

$\lambda_n(T) = -\lambda_1(T)$ olduğundan, Teorem 3.4 ‘den elimizde;

$$\lambda_2(\bar{T}) \leq -1 + \sqrt{n-1} \tag{3.4}$$

elde ederiz.

Eşitsizlik (3.4) den;

$$\lambda_2(T) \leq \sqrt{\frac{n}{2} - 1} \tag{3.5}$$

dir.

Eşitsizlik (3.4) ve (3.5) kullanılarak, aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\begin{aligned}\lambda_2(T) + \lambda_2(\bar{T}) &\leq -1 + \sqrt{\frac{n}{2} - 1} + \sqrt{n-1} \\ &\leq -1 + \sqrt{2\left(n - 1 + \frac{n}{2} - 1\right)} \\ &= -1 + \sqrt{3n-4} \qquad (3.6)\end{aligned}$$

$n \geq 7$ için,

$$\begin{aligned}3n - 4 &= \left(\frac{n^2}{2} - n + 1\right) - \left(\frac{n^2}{2} - 4n + 5\right) \\ &< \frac{n^2}{2} - n + 1 \qquad (3.7)\end{aligned}$$

Böylece (3.6) ve (3.7) eşitsizlikleri ile bu sonuçlar elde edilir.

Önerme 3.6 $G,$ n noktalı, tek döngülü bir graf; n noktalı r-regüler iki parçalı bir graf; k-döngülü ve $n \geq 5 + \sqrt{16k+31}$ graflar ise,

$$\lambda_2(G) + \lambda_2(\bar{G}) \leq -1 + \sqrt{\frac{n^2}{2} - n + 1}$$

eşitsizliği sağlanır [27].

Önerme 3.7 $n \geq 2$ için, eğer $G \ncong K_n$ n noktalı bir graf ise $\lambda_2(G) \geq 0$ olması için gerek ve yeter koşul G tam çok parçalı graftır [28].

Önerme 3.8 $n \geq 3$ olmak üzere G en az bir kenarlı graf olsun. Bu durumda, aşağıdaki ifadeler sağlanır.

i. Eğer $G \ncong K_n$ ise böylece $\lambda_2(G) + \lambda_2(\bar{G}) \geq 0$ dir. Üstelik G izole noktalara sahip değilse, $\lambda_2(G) + \lambda_2(\bar{G}) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul G tam bölünmüş graftır.

ii. $\lambda_2(G) + \lambda_2(\bar{G}) = -1$ ancak ve ancak $G \ncong K_n$.

iii. $\lambda_2(G) + \lambda_2(\bar{G}) \in (-1,0)$ şeklinde bir graf yoktur [28].

Önerme 3.9

i. $G, n \geq 2$ mertebeli bir graf ve $min\{\lambda_2(G), \lambda_2(\bar{G})\} \leq 1$ ise;

ii. $G, \lambda_n(G) \geq -2$ olacak biçimde bir graf ise,

$$\lambda_2(G) + \lambda_2(\bar{G}) \leq -1 + \sqrt{\frac{n^2}{2} - n + 1}$$

eşitsizliği sağlanır [29].

Tanım 3.10. H bir graf ve noktalar kümesi $V(H) = \{v_i; 1 \leq i \leq k\}$ olsun.

Burada $\mathcal{F} = \{G_i; 1 \leq i \leq k\}$ G_i' nin n_i ninci mertebeden bir graf ailesi olsun.
Her bir $v_i \in V(H)$ için $G_i \in \mathcal{F}$ dir. v_i G grafının
H-bağı, $G = H[G_1, G_2, \ldots . G_k]$ tarafından $\mathcal{F}$ de tanımlanmış olup $\mathcal{F}$ nin noktalar kümesi

$$V(G) = \left(\bigcup_{i=1}^{k} V(G_i)\right)$$

ve kenar kümesi

$$E(G) = \left(\bigcup_{i=1}^{k} E(G_i)\right) \bigcup \left(\bigcup_{v_i v_{j \in E(H)}} \{uw : u \in V(G_i), w \in V(G_j)\}\right)$$

Eğer $H \approx P_4, p, q \geq 1$ ve $n = 2(p+q)$, böylece

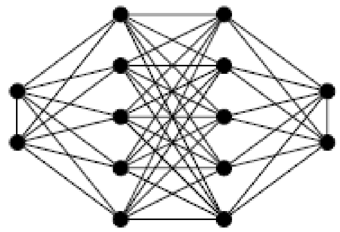
$H_{p,q,q,p} = P_4\left[K_P, \overline{K_q}, \overline{K_q}, K_P\right]$

$n = 2(p+q) + 1$ için,

$H_{p,q,q,p+1} = P_4[K_P, \overline{K_q}, \overline{K_q}, K_{P+1}]$

Buna göre graf ailesi aşağıdaki gibi tanımlanır

$\mathcal{H}(P_4) = \{H_{p,q,q,p}, H_{p,q,q,p+1}; p, q \geq 1\}$



$H_{2,5,5,2} \in \mathcal{H}(P_4)$

Şekil 3.1. $H_{2,5,5,2} \in \mathcal{H}(P_4)$ ile verilen H-bağ graf.

Burada tümleyen operasyonun $\mathcal{H}(P_4)$ ailesinde kapalı olduğunu görmek ancak ve ancak eğer

n çift ise mümkündür. Yani

$\overline{H_{p,q,q,p}} = \overline{P_4(K_P, \overline{K_q}, \overline{K_q}, K_P)} = P_4(K_q, \overline{K_p}, \overline{K_p}, K_q) = H_{q,p,p,q} \in \mathcal{H}(P_4)$

ve

$$\overline{H_{p,q,q,p+1}} = \overline{P_4(K_P, \overline{K_q}, \overline{K_q}, K_{P+1})} = P_4(K_q, \overline{K_p}, \overline{K_{p+1}}, K_q) \notin \mathcal{H}(P_4)$$

$1 \leq p \leq q$ tamsayılar olsun örneğin $n = 2(p+q)$ ve $r = p - q - 1$,

$s = q(q + 2p + 2) + (p-1)^2$ ve $t = q(q + 6p - 2) + (p-1)^2$ olsun.

Cardoso ve arkadaşları, $H_{p,q,q,p}$ nin spektrumunu

$Spec(H_{p,q,q,p}) = \left\{\frac{r-\sqrt{t}}{2}, \frac{r+2q-\sqrt{s}}{2}, -1^{(2p-2)}, 0^{(2q-2)}, \frac{r+\sqrt{t}}{2}, \frac{r+2q+\sqrt{s}}{2}\right\}$

şeklinde tanımlamıştır [30].

Önerme 3.11 p ve q ,$1 \leq p \leq q$ şeklinde doğal sayılar olsun. Bu durumda

$\lambda_2(\overline{H_{p,q,q,p}}) = \lambda_2(H_{p,q,q,p}) + q - p$

dir.

Her bir $n \equiv 0(mod\ 4)$ için, $H_{\frac{n}{4},\frac{n}{4},\frac{n}{4},\frac{n}{4}}$'nın bir P_4-bağ ki bu NG_2-sınırı için extremaldır. [30]

Önerme 3.12 Eğer $G \cong H_{p,q,q,p}$ ise,bu durumda

$$\lambda_2(H_{p,q,q,p}) + \lambda_2(\overline{H_{p,q,q,p}}) = -1 + \sqrt{(q+6p-2)q+(p-1)^2}$$

Bunun yanında, toplam için maksimum değer ancak ve ancak eğer $p = \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor\ ve\ q = \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil$ olduğunda elde edilir [30].

Sonuç 3.13 Eğer $G, n \geq 6$ mertebeli bir graf ise G yada $\bar{G}$ üç noktaya sahiptir. Bu sonuca göre ifade edilen önermeler üç noktalı bir çok grafın olduğunu ve NG_2-sınırını sağladığını gösterir. Bu sonuçlar ayrıca ilave olarak bilgisayar destekli deneylerde bütün graflar için sekiz noktaya çıkılabileceğini göstermektedir. Bu kabullenim bizi takip eden sonuca götürür [31].

Varsayım 3.14 G,n noktalı bir graf olsun, bu durumda ;

$$\lambda_2(G) + \lambda_2(\bar{G}) \leq -1 + \sqrt{\frac{n^2}{2} - n + 1}$$

dir. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul $G \cong H_{\frac{n}{4},\frac{n}{4},\frac{n}{4},\frac{n}{4}} n \equiv 0(mod\ 4)$ dir [31].

Teorem 3.15 G, n noktalı bir graf olsun. Bu durumda

$$n - 1 \leq \lambda(G) + \lambda(\bar{G}) < \sqrt{2}n \qquad (3.8)$$

dir [32].

Teorem 3.16 G, n noktalı bir graf olsun. G ve $\bar{G}$ graflarının klik sayıları sırasıyla $\omega(G)$ ve $\omega(\bar{G})$ olmak üzere

$$\lambda(G) + \lambda(\bar{G}) \leq \sqrt{\left(2 - \frac{1}{\omega(G)} - \frac{1}{\omega(\bar{G})}\right) n(n-1)} \qquad (3.9)$$

dir [33].

Lemma 3.17 $\lambda_2(G)$ ve $\lambda_n(G)$ için aşağıdaki eşitlikler tanımlanabilir.

$$\lambda_2(G) = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor^2 - \left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor},$$

$$\lambda_n(G) = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + 2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor^2 - \left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor},$$

den $\lambda_2(G)$ ve $\lambda_n(G)$ için aşağıdaki eşitsizlikler tanımlanır.

$$-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor^2 - \left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor} \leq \lambda_2(G) \leq -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 2\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil^2 - \left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil} \tag{3.10}$$

$$-\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + 2\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil^2 - \left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil} \leq \lambda_n(G) \leq -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + 2\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor^2 - \left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor} \tag{3.11}$$

[34].

Lemma 3.18 G, n noktalı bir graf olsun. Bu durumda,

$$\frac{\sqrt{2}}{2}n - 3 < \lambda_2(G) + \lambda_2(\bar{G}) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}n$$

dir [34].

Lemma 3.19 G, n noktalı bir graf olmak üzere,

$$|\lambda_n(G)| + |\lambda_n(\bar{G})| > \frac{\sqrt{2}}{2}n - 3$$

dir [34].

Varsayım 3.20

$$|\lambda_n(G)| + |\lambda_n(\bar{G})| = \frac{\sqrt{2}}{2}n + O(1)$$

Bununla birlikte $|\lambda_n(G)| + |\lambda_n(\bar{G})| < \left(\sqrt{3}/2\right)n$

dir [34].

Teorem 3.21 G, n noktalı bir graf olmak üzere

$$\lambda_n{}^2(G) + \lambda_n{}^2(\bar{G}) \leq \frac{3}{8}n^2$$

dir [35].

Tanım 3.22 $|\lambda_k(G)| + |\lambda_k(\bar{G})|$'nin $2 < k < n$ aralığında basit sınırları şu şekildedir. k sınıfları ile birlikte n. mertebeden Turan grafları için yazılabilir. T_k(n) tümleyen $k-$

parçalı (k- partite) graftır. Bunun nokta sınıfları en fazla 1 boyutunda farklıdır. k sabit sayı ve n yeterince büyük alınsın. Bu nedenle,

$$\lambda_k(T_k(n) = 0 \; ve \; \lambda_{n-k}(T_k(n) \leq -\lfloor n/k \rfloor$$

nin büyük olduğu durumlarda yazılabilir.

Buradan aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$|\lambda_k(G)|+|\lambda_k(\bar{G})| \geq \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor - 1$$

$$|\lambda_{n-k}(G)|+|\lambda_{n-k}(\bar{G})| \geq \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor + 1$$

dir [35].

Teorem 3.23 k sabit sayı ve n. mertebeden yeterince büyük herhangi bir G grafı için

$$|\lambda_k(G)| + |\lambda_k(\bar{G})| < \sqrt{\frac{2}{k}}n \tag{3.12}$$

ve

$$|\lambda_{n-k}(G)| + |\lambda_{n-k}(\bar{G})| < \sqrt{\frac{2}{k}}n \tag{3.13}$$

dir [35].

Lemma 3.24 G , n noktalı bir graf ve $\lambda_1(G) \geq \cdots ... \geq \lambda_n(G)$ komşuluk matrisinin özdeğerleri olmak üzere, $s \geq 2$ ve $n \geq 15(s-1)$ ise

$$|\lambda_s(G)| + |\lambda_s(\bar{G})| \leq \frac{n}{\sqrt{2(s-1)}} - 1$$

dir.

Ayrıca $s \geq 1$ ve $n \geq 4^s$ ise

$|\lambda_{n-s+1}(G)| + |\lambda_{n-s+1}(\bar{G})| \leq \frac{n}{\sqrt{2s}} + 1$ dir.

Eğer $s = 2^k + 1$ (k bir tamsayı) ise, bu sınırlar asimtotik olarak uygundur [36].

Lemma 3.25 s ve n değerleri için aşağıdaki fonksiyonlar tanımlanmıştır

$$f_s(n) = \max_{v(G)=n} |\lambda_s(G)| + |\lambda_s(\bar{G})|$$

ve

$$f_{n-s}(n) = \max_{v(G)=n} |\lambda_{n-s+1}(G)| + |\lambda_{n-s+1}(\bar{G})|$$

Birçok sınırlar [9] nolu referansta ispatlandı; Bunların arasında en uygun olanı

$f_2(n)$ için ;

$$\frac{n}{\sqrt{2}} - 3 < f_2(n) < \frac{n}{\sqrt{2}}$$

dir [9].

Teorem 3.26 Eğer $s \geq 2, n \geq 3s-2$ ve G, n noktalı bir graf olsun.

$$\sum_{i=2}^{s}\left({\lambda_i}^2(G) + {\lambda_i}^2(\bar{G})\right) < \frac{n^2}{4} \tag{3.14}$$

dir.

Önerme 3.27 $s \geq 2, n \geq 3s-2$ ve G, n noktalı bir graf olsun.

$$\sum_{i=2}^{s}(|\lambda_i(G)| + |\lambda_i(\bar{G})|) < n\sqrt{(s-1)/2}$$

dir[10].

Bununla birlikte Teorem 3.26'dan doğrudan bir sonuç elde edilemedi, bunun için ayrı bir ispat yapılmalıdır.

Teorem 3.28 Eğer $s \geq 2, n \geq 3s-2$ ve G, n noktalı bir graf olsun

$$ {\lambda_s}^2(G) + {\lambda_s}^2(\bar{G}) < \frac{n^2}{4(s-1)} \tag{3.15}$$

dir.

Eşitsizlik (3.15)'in sol tarafına Aritmetik ve Kuadratik Ortalama uygulayarak, aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir.

$$|\lambda_s(G)| + |\lambda_s(\bar{G})| \leq \frac{n}{\sqrt{2(s-1)}}$$

Bu $f_s(n)$ üzerinde yeni bir sınırdır[37].

Teorem 3.29 $s \geq 2, n \geq 15(s-1)$ ve $G,\ n$ noktalı bir graf olsun.

$|\lambda_s(G)| + |\lambda_s(\bar{G})| \leq \frac{n}{\sqrt{2(s-1)}}$ -1

dir [37].

Son sınır asimtotik sınırdır.

Teorem 3.30 Eğer $s \geq 1, n \geq 2s$ ve G, n noktalı graf olsun;

$$\sum_{i=1}^{s}\left(\left(\left|\lambda_{n-i+1}{}^{2}(G)\right| + \left|\lambda_{n-i+1}{}^{2}(\bar{G})\right|\right)\right) \leq \left(\frac{n}{2}+s\right)^{2}$$

Eşitsizliğinden faydalanarak Nordhaus-Gaddum sonuçlarından başka bir tanesini kolayca elde edilir [36].

Teorem 3.31 Eğer $s \geq 1, n \geq 2s$ ve $G, n.$ dereceden bir graf ise böylece

$$\sum_{i=1}^{s}(|\lambda_{n-i+1}(G)| + |\lambda_{n-i+1}(\bar{G})|) \leq \left(\frac{n}{2}+s\right)\sqrt{2s}$$

dir [36].

Önerme 3.32 Eğer $s \geq 1, n \geq 4^s$ ve G, n.dereceden bir graf ise;

$$\lambda_{n-s+1}{}^{2}(G) + \lambda_{n-s+1}{}^{2}(\bar{G}) \leq \frac{1}{s}\left(\frac{n}{2}+s\right)^{2} \quad (3.16)$$

Dikkat edilecek olursa, eşitsizlik (3.16)’nın sağ tarafı düşük mertebeden terimler içerir. Bu terimler belki indirgenebilir fakat tamamen ortadan kaldırılamaz, en azından s'nin bazı değerleri için.

Örneğin eğer s=1 ise, tümleyen dengede biparite graf $K_{n/2,n/2,}$ alınarak aşağıdaki durumu görebiliriz.

$$\lambda_{n-s+1}{}^{2}\left(K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2},}\right) + \lambda_{n-s+1}{}^{2}\left(\overline{K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2},}}\right) \leq \frac{n^{2}}{4}+1$$

dir [36].

Teorem 3.33 $s \geq 1, n \geq 4^s$ ve G, n noktalı bir graf olmak üzere

$(|\lambda_{n-s+1}(G)| + |\lambda_{n-s+1}(\bar{G})|) \leq \frac{n}{\sqrt{2s}} + 1$

dir [36].

Yukardaki tüm sınırlar $s = 2^k + 1$ ve n yeterince büyük olduğunda.kuvvetli sınırlardır

Teorem 3.34 $s = 2^{k-1} + 1\ ve\ k \geq 1$ bazı tam sayılar için sonsuz sayıda n noktalı

G grafı vardır ∋ $2 \leq i \leq s$ için

$$\lambda_i(G) \geq \frac{n}{2\sqrt{2(s-1)}} - 1, \qquad \lambda_{n-i+2}(G) \leq -\frac{n}{2\sqrt{2(s-1)}}$$

$$\lambda_i(\bar{G}) \geq \frac{n}{2\sqrt{2(s-1)}} - 1, \qquad \lambda_{n-i+2}(\bar{G}) \leq -\frac{n}{2\sqrt{2(s-1)}}$$

dir [36].

Lemma 3.35 G, n noktalı bir graf olsun. $X \subset \{2, \dots . n\}$ olmak üzere

$$\sum_{i \in X} \lambda_i^2(G) \leq n^2/4$$

dir [36].

Lemma 3.36 G, n noktalı bir graf olsun. $n \geq s \geq 2$ ve $\lambda_s \leq 0$ olmak üzere

$$|\lambda_s| \leq \frac{n}{2\sqrt{n-s+1}}$$

dir [36].

Teorem 3.37 $G\ , n$ noktalı bir graf olsun**.** $k \geq 0$ ve $n \geq 4^k$ olmak üzere

$\lambda_{n-k+1}(G) \leq -1$ ve $\lambda_{n-k+1}\overline{(G)} \leq 0$ yada

$\lambda_{n-k+1}\overline{(G)} \leq -1$ ve $\lambda_{n-k+1}(G) \leq 0$

dir [37].

Lemma 3.38 (Weyl) G, n noktalı bir graf olsun. $2 \leq k \leq n$ olmak üzere

$$\lambda_k(G) + \lambda_{n-k+2}(\bar{G}) \leq -1 \tag{3.17}$$

ve

$$\lambda_k(G) + \lambda_{n-k+2}(\bar{G}) \geq -1 \tag{3.18}$$

dir [37].

Tanım 3.39 G, n noktalı bir graf ve $\lambda(G)$ spektral yarıçap olmak üzere

s^+, G nin pozitif özdeğerlerinin karelerinin toplamını ifade eder.Bu durumda

$$\sqrt{s^+(G)} + \sqrt{s^+(\bar{G})} < \sqrt{2n}$$

ve

$$\sqrt{s^+(G)} + \sqrt{s^+(\bar{G})} \leq \frac{4n}{3} - 1$$

dir[38].

Tanım 3.40 G, n noktalı bir graf olmak üzere A(G) komşuluk matrisinin sabit (p, v, s) üçlüsüdür (inertia).Burada p pozitif özdeğer sayısı, v negatif özdeğer sayısı, s sıfır özdeğer sayısıdır.

s^+, G 'nin pozitif özdeğerlerinin karelerinin toplamı ve s^-, G'nin negatif özdeğerlerinin karelerinin toplamı olan spektral parametreler olmak üzere

$$s^+ = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^{\,2} \quad ve \quad s^- = \sum_{i=n-v+1}^{n} \lambda_i^{\,2}$$

dir [39].

Sonuç 3.41

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{\,2} = s^+ + s^- = tr(A^2) = 2m,$$

Burada $tr(A^2)$, A^2 nin iz (trace) matrisini belirler [39].

Teorem 3.42 s^+ ve s^- spektral parametreler olmak üzere

$$1+\frac{s^+}{s^-}\leq \chi(G)$$

dir [39].

Teorem 3.43 s^+ ve s^- spektral parametreler için

$$1+max\left(\frac{s^+}{s^-},\frac{s^-}{s^+}\right)\leq \chi(G) \qquad (3.19)$$

sağlanır [40].

Teorem 3.44 s^+ spektral parametresi için

$$\sqrt{s^+}\leq \frac{\sqrt{8m+1}-1}{2}$$

dir [41].

Tanım 3.45 n noktalı G grafı için

$$n-1\leq \lambda(G)+\lambda(\bar{G})<\sqrt{2}(n-1)$$

dir ve regüler graflar için alt sınır kesindir [33].

Teorem 3.46 G , n noktalı bir grafı olsun;

$$s^+=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i^{\,2} \quad ve \quad s^-=\sum_{i=n-v+1}^{n}\lambda_i^{\,2}$$

olmak üzere,

$$n-1\leq\sqrt{s^+(G)}+\sqrt{s^+(\bar{G})}<\sqrt{2}n$$

dir [9].

İspat: Tümleyen graflar için alt sınır açık ve kesindir ki,

Eşitsizlik (3.19) dan

$$s^+(G)\leq 2m(\chi(G)-1)/\chi(G)$$

yazılabilir. Böylece;

$$\sqrt{s^+(G)}+\sqrt{s^+(\bar{G})}\leq\sqrt{2m\frac{(\chi(G)-1)}{\chi(G)}}+\sqrt{(n(n-1)-2m)\frac{(\chi(\bar{G})-1)}{\chi(\bar{G})}}$$

elde edilir. Cauchy Schwarz eşitsizliği kullanılarak,

$$\sqrt{s^+(G)} + \sqrt{s^+(\bar{G})} \le \sqrt{\left(2 - \tfrac{1}{\chi(G)} - \tfrac{1}{\chi(\bar{G})}\right) n(n-1)} < \sqrt{2}n \qquad (3.20)$$

elde edilir.

Benzer şekilde, G ve $\bar{G}$ den en az biri bağlantılıdır. G nin bağlantılı olmadığını kabul edersek ki

Elphick ve arkadaşlarının [29] bağlantılı graflar için varsayımları olan

$$\min(s^+, s^-) \ge n - 1. \quad \text{yada} \quad max\,(s^+, s^-) \le 2m - n + 1 \qquad (3.21)$$

eşitsizlikleri doğru olur; böylece;

$$\sqrt{s^+(G)} + \sqrt{s^+(\bar{G})} \le \sqrt{2m} + \sqrt{n(n-1) - 2m - n + 1}$$

dir.

Lemma 3.47 G, n noktalı bir graf olsun

$$f_1 = \max_{\mathrm{v(G)}=n} (\lambda(G) + \lambda(\bar{G}))$$

eşitliği için

$$\tfrac{4n}{3} - 2 \le f_1 \le \tfrac{4n}{3} + O(1) \qquad (3.22)$$

dir [9]

Varsayım 3.48 G, n noktalı basit bir graf olsun . $f(n) = 0$ eğer $n \equiv 2(mod3)$ olmak üzere ve

$f_1 = \max \quad {}_{\mathrm{v(G)}=n}(\lambda(G) + \lambda(\bar{G}))$ eşitliği için

$$f_1 = \frac{4n}{3} - \frac{5}{3} + f(n)$$

dir.

$$f(n) = \left(\sqrt{(3n-2)^2 + 8} - (3n-2))/6\right) \text{ eğer } n \equiv 1(mod3)$$

ve

$f(n) = \left(\sqrt{(3n-1)^2+8} - (3n-1))/6\right)$ eğer $n \equiv 0(mod3)$

Bu sınır açıktır ki $\left[\frac{n}{3}\right]$ noktalarından bağımsızbir küme ile birlikte G ya da $\bar{G}$ tam bölünmüş

grafdır .($\left[\frac{n}{3}\right]$ noktaları üzerine eğer $n \equiv 2(mod3)$)

Bu varsayım AGX programı ile 40 noktaya kadar test edilmiş olup herhangi ters örnek bulunamamıştır [38].

Teorem 3.49 G, n noktalı basit bir graf olmak üzere

$\lambda\,(G) + \lambda\,(\bar{G}) \leq \frac{(1+\sqrt{3})n}{2} - 1$

dir [36].

4.BÖLÜM

GRAFLARIN SPEKTRAL YARIÇAPI İÇİN NORDHAUS-GADDUM TİPİ SINIRLAR

Tanım 4.1 Herhangi bir $u \in V(G)$ noktası için, u üzerinde özvektör bileşeni $v(u)$ olmak üzere v_i nin nokta komşuluk kümesi $N(v_i)$ ve $\overline{N(v_i)}$ şeklinde tanımlıdır.

Burada $\overline{N(v_i)}$, $V - N(v_i)$ kümesidir. G ve H iki bağlantısız (disjoint) graflar olmak üzere

$G \cup H$ bağlantısız olduklarını ve $G\nabla H$ ise G ve H nin bağlantılı olduklarını ifade eder [42].

Teorem 4.2 G ve $\bar{G}$ graf ve $\lambda_1(G) + \lambda_1(\bar{G})$ spektral yarıçapları ve

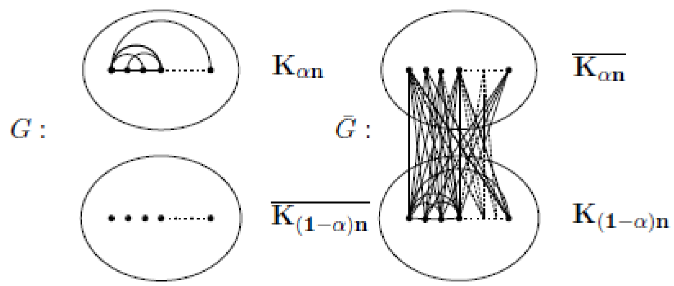
$\gamma = (\lambda_1(G) + \lambda_1(\bar{G}))$ olmak üzere;

i) $\gamma \leq \frac{4}{3}n + O(1)$ dir. γ için diğer bir sonuç da aşağıdadır;

ii) $\gamma \leq \sqrt{2n(n-1) - 4\delta(n-1-\Delta) + 1} - 1$

dir [43].

Burada $G = K_{\alpha n} \cup \overline{K_{(1-\alpha)n}}$ grafı için α sabiti elde edilmiştir. $\gamma = (\lambda_1(G) + \lambda_1(\bar{G}))$ için elde edilen sınır Nikiforov [9] tarafından araştırılmıştır.



Şekil 4.1. $G = K_{\alpha n} \cup \overline{K_{(1-\alpha)n}}$ ve $\bar{G} = \overline{K_{\alpha n}} \nabla K_{(1-\alpha)n}$

G, $n \geq 2$ olmak üzerine basit bir graf olsun. Böylece,

$0 \leq \alpha \leq 1$ için G=$K_{\alpha n} \cup \overline{K_{(1-\alpha)n}}$ ve $\bar{G} = \overline{K_{\alpha n}} \nabla K_{(1-\alpha)n}$ olsun. Bu durum Şekil 4.1' de gösterildiği gibidir. λ_1, $\bar{G}$ nin bir özdeğeridir.

Bu özdeğeri elde etmek için aşağıdaki teoremler kullanılmıştır[44].

Varsayım 4.3 G, n noktalı keyfi bir graf olsun

$$\lambda_1(G) + \overline{\lambda_1}(G) \leq \frac{4}{3}n + O(1) \qquad (4.1)$$

dir [9].

Önerme 4.4 G, n noktalı m kenarlı ve izole olmamış bir graf olmak üzere, $\Delta = \Delta(G)$ ve $\delta(G)$ olsun. Böylece;

$$(2m - \Delta n + \Delta\delta + \Delta - \delta)^{1/2} \leq \lambda_1(G) \leq (2m - \delta n + \Delta\delta + \Delta - \delta)^{1/2} \quad \text{dir.}$$

Bununla birlikte, eğer G bağlantılı bir graf ise ancak ve ancak G regüler olduğunda ilk eşitlik korunur [45] ve ikinci eşitlik bir yıldız graf ya da regüler graf ise geçerlidir. Önerme 4.4'de üst sınır Cao ve Das ve arkadaşları tarafından belirlenmiştir [46].

Teorem 4.5 G, n noktalı, m kenarlı ve bir graf olmak üzere, $\Delta = \Delta(G)$ ve $\delta = \delta(G)$ olsun. Eğer,

$\Delta < 2n - 1 - [(2n-1)^2 - 8m - 1]^{1/2}$ ise,

$\lambda_1(G) \leq \frac{1}{2}\left(\Delta - 1 - \sqrt{(\Delta+1)^2 + 4(2m - \Delta n)}\right)$ ya da

$$\frac{1}{2}\left(\Delta - 1 - \sqrt{(\Delta+1)^2 + 4(2m - \Delta n)}\right)$$

$\leq \lambda_1(G) \leq \frac{1}{2}(\delta - 1 - \sqrt{(\delta+1)^2 + 4(2m - \delta n)})$ dir[47].

Teorem 4.6 G, n noktalı bir graf olsun.

$\lambda_1(G) + \lambda_1(\bar{G}) \leq \sqrt{2[(n-1)]^2 - 2\delta n + 2\Delta\delta - \Delta + 3\delta}$

dir [42].

Bununla beraber, eğer G ve $\bar{G}$ her ikisi de bağlantılı graflar ise yukarıdaki eşitlik ancak ve ancak $G, (n-1)/2$ de regüler ise korunmaktadır.

İspat: Kabul edelim ki, $f(m,\Delta,\delta) = (2m - \delta n + \Delta\delta - \Delta + \delta)^{1/2}$ olsun. Dikkat edilecek olursa;

$\Delta(\bar{G}) = n - 1 - \delta, \delta(\bar{G}) = n - 1 - \Delta$ ve $m(\bar{G}) = \binom{n}{2} - m$ şeklindedir. Önerme 4.4 den

$\lambda_1(G) \leq f(m,\Delta,\delta) \quad ve \ \lambda_1(\bar{G}) \leq f\left(\binom{n}{2} - m, n-1-\delta, n-1-\Delta\right)$ dir.

Burada $g(m) = f(m,\Delta,\delta) + f\left(\binom{n}{2} - m, n-1-\delta, n-1-\Delta\right)$ olur. Böylece;

$\lambda_1(\mathrm{G}) + \lambda_1(\bar{G}) \leq \mathrm{g(m)}$ dir.

Bu nedenle,

$\frac{dg}{dm} = 1/f(m,\Delta,\delta) - 1/f\left(\binom{n}{2} - m, n-1-\delta, n-1-\Delta\right)$ olur.

Burada ancak ve ancak

$f(m,\Delta,\delta) \leq f\left(\binom{n}{2} - m, n-1-\delta, n-1-\Delta\right)$ olduğunda $\frac{dg}{dm} \geq 0$ kontrol etmek kolaydır.

Örneğin $m \leq [(n-1)^2 + \Delta + \delta]/4$ ise;

$$\lambda_1(G) + \lambda_1(\bar{G}) \leq g(\frac{[(n-1)^2 + \Delta + \delta]}{4})$$

$$= 2f(\frac{[(n-1)^2+\Delta+\delta]}{4}, \Delta, \delta)$$

$$= \sqrt{2[(n-1)]^2 - 2\delta n + 2\Delta\delta - \Delta + 3\delta}$$

Eğer spektral yarıçap üst sınırlara kadar ulaşabiliyorsa, böylece spektral yarıçaplar her ikisi G ve $\bar{G}$ de en üst sınıra ulaşacaklardır ve $m = [(n-1)^2 + \Delta + \delta]/4$ olacaktır. Eğer G ve $\bar{G}$ her ikisi de bağlantılı ise bu durumda Önerme 4.4, $\Delta = \delta$ durumunu sağlar. Bu nedenle,

$2\delta n = (n-1)^2 + 2\delta$ olur.

$\delta = (n-1)/2$ olduğunu ortaya koyar ve buradan hareketle G, $(n-1)/2$ de regülerdir. Bunun tersi durum ise eğer G, $(n-1)/2$ ise böylece

$\lambda_1(G) + \lambda_1(\bar{G}) = n - 1$ olur.

Teorem 4.7 G , n mertebeden bir graf olsun. Bu durumda;

$$\lambda_1(G) + \lambda_1(\bar{G}) \leq \frac{\{n-\Delta+\delta-3+\sqrt{2[(n-\Delta)^2+4n(\Delta-\delta)-(\delta+1)^2]}\}}{2}$$

dir.

Üstelik, eğer G ve $\bar{G}$ her ikisi de bağlantılı graflar ise yukarıdaki eşitlik ancak ve ancak G $(n-1)/2$ de regüler ise korunmaktadır [42].

İspat: Kabul edelim ki, $f(m,\Delta,\delta) = [(\delta+1)^2 + 4(2m-\delta n)]^{1/2}$ olsun. Dikkat edilecek olursa;

$\Delta(\bar{G}) = n-1-\delta, \delta(G^c) = n-1-\Delta$ ve $m(\bar{G}) = m$ şeklindedir. Teorem 4.5' den;

$\lambda_1(G) \leq [\delta - 1 + f(m,\Delta,\delta)]/2$ ve

$\lambda_1(\bar{G}) \leq \left[n-\Delta-2+f\left(\binom{n}{2}-m, n-1-\delta, n-1-\Delta\right)\right]/2$ dir.

Burada $g(m) = f(m,\Delta,\delta) + f\left(\binom{n}{2}-m, n-1-\delta, n-1-\Delta\right)$ dir. Böylece;

$\lambda_1(\mathrm{G}) + \lambda_1(\bar{G}) \leq [\mathrm{n}-\Delta+\delta-3+\mathrm{g}(m)]/2$ ve

$\frac{dg}{dm} = 4/f(m,\Delta,\delta) - 4/f\left(\binom{n}{2}-m, n-1-\delta, n-1-\Delta\right)$ dir.

Burada ancak ve ancak;

$f(m,\Delta,\delta) \leq f\left(\binom{n}{2}-m, n-1-\delta, n-1-\Delta\right)$ olduğunda $\frac{dg}{dm} \geq 0$ kontrol etmek kolaydır.

Örneğin $m \leq [(n-\Delta)^2 + 4n(\Delta+\delta) - (\delta+1)^2]/16$ ise;

$$\lambda_1(G) + \lambda_1(\bar{G}) \leq \frac{\left\{n-\Delta+\delta-3+g\left(\frac{[(n-\Delta)^2+4n(\Delta+\delta)-(\delta+1)^2]}{16}\right)\right\}}{2}$$

$$= \frac{\left\{n-\Delta+\delta-3+2f\left(\frac{[(n-\Delta)^2+4n(\Delta+\delta)-(\delta+1)^2]}{16,\Delta,\delta}\right)\right\}}{2}$$

$$= \frac{\left\{n-\Delta+\delta-3+\sqrt{2[(n-\Delta)^2+4n(\Delta-\delta)-(\delta+1)^2]}\right\}}{2}$$

Eğer spektral yarıçap üst sınırlara kadar ulaşabiliyorsa, böylece spektral yarıçapların her ikisi G ve$\bar{G}$ de en üst sınıra ulaşacaklardır ve

$m = \left(\frac{[(n-\Delta)^2+4n(\Delta+\delta)-(\delta+1)^2]}{16}\right)$ olacaktır. Eğer G ve $\bar{G}$ her ikisi de bağlantılı graflar ise bu durumda Teorem 4.5 den $\Delta = \delta$ durumunu sağlar. Bu nedenle,

$8\delta n = (n-\delta)^2 + 8\delta n - (\delta-1)^2$ dir.

$\delta = (n-1)/2$ olduğunu ortaya koyar ve buradan hareketle G, $(n-1)/2$ de regülerdir. Tersine, G, $(n-1)/2$ ise $\lambda_1(G) + \lambda_1(\bar{G}) = n-1$ dir.

Teorem 4.8 G_i , $(i = 1,2)$ n_i noktalı r_i regüler bir graf olsun

$P(A(G_i),)$ G_i nin karekteristik polinomu ise

$$P(A(G_1 \nabla G_2), \lambda = \frac{P(A(G_1),\lambda)P(A(G_2),\lambda)}{(\lambda-r_1)(\lambda-r_2)}[(\lambda-r_1)(\lambda-r_2) - n_1n_2] \qquad (4.2)$$

dir [48].

Varsayım 4.9 G, n noktalı basit bir graf olsun. Bu durumda

$$\lambda_1(G) + \overline{\lambda_1}(G) \leq \frac{4n-5+4\sqrt{n^2-n+1}}{6} \qquad (4.3)$$

dir [9].

Teorem 4.10 T, n mertebeden bir ağaç ve S_n, n noktalı bir yıldız olsun.

Bu durumda $\lambda_1(T) \leq \sqrt{n-1}$ dir $\Leftrightarrow T \cong S_n$ dir.

Eşitlik ancak ve ancak olduğunda korunur, burada n noktalı bir yıldızdır[25].

Önerme 4.11 G, n noktalı bir graf olsun,

$x = \frac{n^2}{2} - n + 1$ ve $y = -1 + \sqrt{x}$ olmak üzere

$\lambda_1(G) \leq \frac{\sqrt{x}}{2}$ ise $\lambda_2(G) + \lambda_2(\bar{G}) \leq y$

dir[49].

Önerme 4.12 G, n noktalı, tek döngülü bir graf olmak üzere

$2 \leq \lambda_1(G) \leq \lambda_1(S_n^+)$

dir. Ayrıca, $\forall n \geq 9$ için, $\lambda_1(S_n^+) \leq \sqrt{n}$ dir [49].

Önerme 4.13 G, n noktalı bir graf ve $n \geq 5$ döngülü olmak üzere

$$\lambda_1(G) \leq min\{\Delta, \sqrt{n-1}\}$$

dir [50].

Tanım 4.14 G, n noktalı ve m kenarlı bir graf ve $\lambda_1(G) \geq \cdots \geq \lambda_n(G)$ ve $1 \leq k \leq n$ olmak üzere

$$f_k(n) = \max_{v(G)=n} |\lambda_k(G)| + |\lambda_k(\bar{G})|$$

şeklinde tanımlanır. Bununla birlikte

$$\frac{4}{3}n - 2 \leq \lambda_1(G) + \lambda_1(\bar{G}) < \left(\sqrt{2} - c\right)n \tag{4.4}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}n - 3 < \lambda_2(G) + \lambda_2(\bar{G}) < \frac{\sqrt{2}}{2}n \tag{4.5}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}n - 3 < \lambda_n(G) + \lambda_n(\bar{G}) < \frac{\sqrt{3}}{2}n \tag{4.6}$$

eşitsizlikleri sağlanır [9].

Teorem 4.15 G, n noktalı m kenarlı bir graf olmak üzere

$$S(G) = \sum_{u \in v(G)} \left| d(u) - \frac{2m}{n} \right|$$

dir [37].

Önerme 4.16 G, n noktalı m kenarlı bir graf olsun.

$$\frac{S^2(G)}{2n^2\sqrt{2m}} \leq \lambda_1(G) - \frac{2m}{n} \leq \sqrt{S(G)} \tag{4.7}$$

ve

$$\lambda_n(G) + \lambda_n(\bar{G}) \leq -1 - \frac{S^2(G)}{2n^3} \tag{4.8}$$

dir [37].

Teorem 4.17 n noktalı bir G grafı için $c \geq 10^{-7}$ olduğunda,

$$\lambda_1(G) + \lambda_1(\bar{G}) \leq \left(\sqrt{2} - c\right)n$$

dir [37].

İspat: Aksini kabul edelim ki $\varepsilon = 10^{-7}$ ve $G, n.$ dereceden bir graf olsun

$$\lambda_1(G) + \lambda_1(\bar{G}) > \left(\sqrt{2} - \varepsilon\right)n$$

ve

G grafının komşuluk matrisi $\mathrm{A}(G)$ olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i{}^2(G) = tr\left(A^2(G)\right) = 2e(G) \tag{4.9}$$

yerine koyulursa

$$\lambda_1{}^2(G) + \lambda_n{}^2(G) + \lambda_1{}^2(\bar{G}) + \lambda_n{}^2(\bar{G}) \leq 2e(G) + 2e(\bar{G}) < n^2$$

Aşağıdaki ifadeden faydalanarak;

$$\lambda_1{}^2(G) + \lambda_1{}^2(\bar{G}) \geq \frac{1}{2}\left(\lambda_1(G) + \lambda_1(\bar{G})\right)^2 > \left(1 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)^2 n^2 > \left(1 - \sqrt{2}\varepsilon\right)n^2$$

Buradan bulabiliriz ki;

$$|\lambda_n(G)| + |\lambda_n(\bar{G})| \leq \sqrt{2(\lambda_n{}^2(G) + \lambda_n{}^2(\bar{G})} < \sqrt{2\sqrt{2}\varepsilon n}, \tag{4.10}$$

ve böylece

$\lambda_n(G) + \lambda_n(\bar{G}) > -2^{3/4}\varepsilon^{1/2}n$ elde edilir. Eşitsizlik (4.8) den $s^2(G) \leq 2^{7/4}g^{1/2}n^4$ dir. Diğer taraftan Eşitsizlik (4.7) ile $s(G) = s(\bar{G})$ görülebilir, Böylece;

$$\lambda_1(G) + \lambda_1(\bar{G}) \leq n - 1 + 2\sqrt{s(G)} < n + 2\sqrt{s(G)} \leq n + 2^{23/16}\varepsilon^{1/8}n,$$

Eşitsizlik (4.10) ile;

$$(\sqrt{2} - \varepsilon)n < n + 2^{23/16}\varepsilon^{1/8}n.$$

Her iki tarafı n ile bölersek;

$(\sqrt{2} - 1) < \varepsilon + 2^{23/16}\varepsilon^{1/8}$, elde edilir. Bu da $\varepsilon = 10^{-7}$ için bir çelişkidir

Lemma 4.18 $\forall\ 1 \leq r < n$ için bir G grafı ve $K_r\ ve\ \overline{K}_{n-r}$ tanımlansın

$$\lambda_1(G) + \lambda_1(\bar{G}) = \frac{r-1}{2} + \sqrt{nr - \frac{3r^2+2r-1}{4}} + n - r - 1$$

$$= n - \frac{r+3}{2} + \sqrt{nr - \frac{3r^2+2r-1}{4}}$$

Bu eşitliğin sağ tarafı r'de $0 \leq r \leq (n-1)/3$ için artmaktadır ve

$|\lambda_1(G)|+|\lambda_1(\bar{G})| > \frac{4n}{3} - 2$

dir [47].

$k = 1$ durumu için, $\lambda_1(G) + \lambda_1(\bar{G}) \leq \frac{4}{3}n - 1$ dir [51].

5.BÖLÜM

SONUÇ VE ÖNERİLER

Graf teorinin uygulanması ve tamamlanmasıyla kromatik sayıların toplam ve çarpımlarına ait alt ve üst sınırlar belirlenmiştir ve bu sınırlar Nordhaus-Gaddum tipi sınırlar olarak ifade edilebilir.

Bu sınırlar ve eşitsizliklerin araştırılmasının tarihçesi birimci bölümde anlatılmıştır.

Bu eşitsizliklere ve graf değişmezlerine ait temel tanım ve teoremler ikinci bölümde literatür araştırması olarak incelenmiştir.

Üçüncü bölümde spektral Nordhaus-Gaddum tipi eşitsizliklere ait tanım, teorem ve önermeler derlenmiştir.

Dördüncü bölümde grafların spektral yarıçapı için Nordhaus-Gaddum tipi sınırlar ile ilgili araştırmaları kapsayan tanım ve teoremler incelenmiştir.

Bu çalışmada incelenen ve derlenen bilgiler ışığında tespit edilen NGT-eşitsizlikleri ve spektral yarıçapla ilgili problemler sonraki aşamalarda çözülebilir.

KAYNAKLAR

1. Heawood, P. J., “Map Color Theorems.”, Quart. J. Math. 24, 332–338, 1890
2. Kempe, B., “On the Geographical Problem of Four Colors.” , Amer. J. Math. 2 193– 204, 1879
3. Nordhaus, E. A. and Gaddum, J., “On Complementary Graphs.” , Amer. Math. Monthly 63, 175–177, 1956
4. Nordhaus, E. A. and Stewart, B. M., “Triangles in an Ordinary Graph.” Canad. J. Math. 15 33–41, 1963
5. Brigham, R. C. and Dutton, R. D. , “Graphs which, with their Complements, have Certain Clique Covering Numbers” , Discrete Math. 34, 1–7, 1981
6. Achuthan, N. , Achuthan N. R. and Caccetta, L. , “ On the Nordhaus–Gaddum Class Problems” , Australas. J. Combin. 25–27, 1990
7. A.T.Amin,S.L.Hakimi,Upper bounds on the order of a clique of a graph,SIAMJ.Appl.Math.22(1972)569–573.
8. E. Nosal, Eigenvalues of graphs, Master Thesis, University of Calgary, 1970.
9. V. Nikiforov, Eigenvalue problems of Nordhaus–Gaddum type, Discrete Math.307(2007)774–780.
10. M. Aouchiche and P. Hansen, A survey of Nordhaus-Gaddum type relations, Discrete. Appl. Math., 161 (2013)466-546.
11. Ersoy, F. ‘‘Grafların Komşuluk Matrisleri’’, Uludağ Üniversitesi Fen BilimleriEnstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 12-14, Bursa, 2013.
12. Gross, J. L., Yellen, J., ‘‘Handbook of Graph Theory’’, ISBN: 1584880902, *CRCPress*, 19-20, New York, 2004.
13. Birgin, K.‘‘Yönlü ve Yönsüz Grafların Enerjisi’’,Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 6-9, Nevşehir, Eylül,2014.
14. Zumstein, P., ‘‘Comparison of Spectral Method Sthroughthe Komşuluk Matrix and

the Laplacian of a Graph'', *ETH Zurich*, *Doctoraldissertation Diploma Thesis*,13, Zürih, 2005.

15. Finck, H. J., "On the Chromatic Numbers of a Graph and its Complement" In Theory of Graphs (Proc. Coll. Tihany), pp. 99–113,1968
16. Welsh, D.J.A., Powell, M.B., "An upper bound for the chromatic number of a graph and its application to timetable problems", Comput. J. 10, 85–86, 1967
17. N. Achuthan, N.R. Achuthan, L. Caccetta, On the Nordhaus–Gaddum class problems, Australas. J. Combin. 2 (1990) 5–27.
18. E. Cockayne, Variations on the Domination Number of a Graph, Lecture at the University of Natal, May 1988.
19. F. Jaeger & C. Payan, Relations du type Nordhaus-Gaddum pour le nombre d'absorption d'un graphe simple, C.R. Acad. Sci. Ser. A 274 (1972), 728–730.
20. C. Payan & N.H. Xuong, Domination-balanced graphs, J. Graph Theory 6 (1982), 23–32.
21. Skiena, S. "Joins of Graphs." ,*Combinatorics and Graph Theory with Mathematica.* Reading, MA: Addison-Wesley, pp. 131-132, 1990
22. Harary, F. *Graph Theory.* Reading, MA: Addison-Wesley, p. 21, 1994. Gross, J. T. and Yellen, J. *Graph Theory and Its Applications, 2nd ed.* Boca Raton, FL: CRC Press, 2006.
23. R. A. Horn, C. R. Johnson: Matrix Analysis. Cambridge University Press, New York, 1992
24. V. Nikiforov, X. Yuan: More eigenvalue problems Nordhaus–Gaddum type. Linear Algebra and its Applications, 451 (2014), 231–245.
25. L. Collatz, U. Sinogowitz: Spektren Endlicher Grafen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 21 (1957), 63–77.
26. J.Y. Shao: On the largest kth eigenvalues of trees. Linear Algebra and its Applications, 221 (1995), 131–157.
27. Y. Hong: A bound on the spectral radius of graphs. Linear Algebra and its Applica-

tions, 108 (1988), 135–139.

28. J. H. Smith: Some properties of the spectrum of a graph. In Combinatorial Structures and Their Applicarions, Science Publ., pp. 403–406. Gordon and Breach, New York– London–Paris, 1970.
29. R. C. Read, R. J. Wilson: An Atlas of Graphs. Oxford: Clarendon Press, New York, 1998.
30. D. M. Cardoso, M. A. de Freitas, E. A. Martins, M. Robbiano: Spectra of graphs obtained by a generalization of the join graph operation. Discrete Mathematics, 313 (2013), 733–741.
31. F. Harary: Graph Theory. Addison-Wesley, Philippines, 1969.
32. E. Nosal, Eigenvalues of graphs, Master's Thesis, University of Calgary, 1970.
33. V. Nikiforov, Some inequalities for the largest eigenvalue of a graph, Combin. Probab. Comput. 11 (2002) 179–189.
34. R. Horn, C. Johnson, Matrix Analysis, Cambridge University Press, Cambridge, 1985 xiii+561pp.
35. B. Bollobás, Modern Graph Theory, Graduate Texts in Mathematics, vol. 184, Springer, New York, 1998, xiv+394pp.
36. V. Nikiforov, X. Yuan / Linear Algebra and its Applications 451 (2014) 231–245
37. V. Nikiforov, Eigenvalues and degree deviation in graphs, Linear Algebra Appl. 414 (2006) 347–360.
38. T. Terpai, Proof of a conjecture of V. Nikiforov, Combinatorica, 31, (2011), 739 - 754.
39. P. Wocjan and C. Elphick, New spectral bounds on the chromatic number encompassing all eigenvalues of the adjacency matrix, Electron. J. Combin. 20(3), (2013),
40. T. Ando and M. Lin, Proof of a conjectured lower bound on the chromatic number of a graph, Linear Algebra Appl., 485, (2015), 480 -484.
41. B. Wu and C. Elphick. Upper bounds for the achromatic and coloring numbers of a

graph, (2015), math arXiv:1511.00537v2 and submitted to a journal.

42. E. A. Nordhaus and J. W. Gaddum. On Complementary Graphs. Amer. Math. Monthly,

43. X. Li, The relations between the spectral radius of the graphs and their complements, J. North China Technol. Inst. 17 (1996) 297–299.

44. L. Shi, Bounds on the (Laplacian) spectral radius of graphs, Linear Algebra Appl., 422 (2007) 755–770.

45. K.Ch. Das, P. Kumar, Some new bounds on the spectral radius of graphs, Discrete Math. 281 (2004) 149–161.

46. D. Cao, Bounds on eigenvalues and chromatic numbers, Linear Algebra Appl. 270 (1998) 1–13.

47. Y. Hong, J. Shu, K. Fang, A sharp upper bound of the spectral radius of graphs, J. Combin. Theory Ser. B 81 (2001) 177–183.

48. H. Sayamai, Estimation of Laplacian spectra of direct and strong product graphs, Discrete Appl. Math., 205 (2016) 160–170.

49. S. Simić: On the largest eigenvalue of unicyclic graphs. Publications de L'institut Mathematique (Beograd), 42(56) (1987), 13–19.

50. V. Nikiforov: Bounds on graph eigenvalues I. Linear Algebra and its Applications, 420 (2007), 667–671.

51. A. T. Amin and S. L. Hakimi, Upper Bounds on the Order of a Clique of a Graph. SIAM J. Appl. Math. 22 (1972) 569–573.

ÖZGEÇMİŞ

Zekiye YAZAR 1977 yılında Niğde'de doğdu. İlk ve orta öğrenimini Niğde'de tamamladı. 2000 yılında Kırıkkale Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden mezun oldu. Aynı yıl Millî Eğitim Bakanlığında matematik öğretmeni olarak göreve başladı. Halen Nevşehir Lisesinde matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır. 2016 yılında Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalında Yüksek Lisansa başlamıştır. Evli, üç çocuk annesidir.

Adres: Güzelyurt Mah.212.Sok.Öztan Sitesi A Blok.No:31/12

Nevşehir

Telefon: 0 535 088 85 99

e-posta: author_zehra@hotmail.com