T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KONİK METRİK UZAYLARIN TEMEL ÖZELLİKLERİ

Tezi Hazırlayan
Abdulkadir KURAG

Tez Danışmanı
Doç. Dr. Necdet BATIR

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Kasım 2014
NEVŞEHİR

T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KONİK METRİK UZAYLARIN TEMEL ÖZELLİKLERİ

Tezi Hazırlayan
Abdulkadir KURAG

Tez Danışmanı
Doç. Dr. Necdet BATIR

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Kasım 2014
NEVŞEHİR

Doç. Dr. Necdet BATIR danışmanlığında **Abdulkadir KURAG** tarafından hazırlanan ''**Konik Metrik Uzayların Temel Özellikleri**'' başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

04/11/2014

JÜRİ

Başkan : (Doç. Dr. Harun Reşit YAZAR) imza

Üye : (Doç. Dr. Necdet BATIR) imza

Üye : (Yrd. Doç. Dr. Sezer SORGUN) imza

ONAY:

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun 13/11/2014 tarih ve 2014/43-07........ sayılı kararı ile onaylanmıştır.

20/11/2014

Doç. Dr. Şahlan ÖZTÜRK

Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİM SAYFASI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada yer alan bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu ve bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Abdulkadir KURAG

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanma sürecinde bana yardımcı olan danışman hocam Doç. Dr. Necdet BATIR' a ve maddi manevi her türlü desteğini esirgemeyen eşime, çocuklarıma ve değerli meslektaşım Osman KURAN hocama teşekkürlerimi sunuyorum.

KONİK METRİK UZAYLARIN TEMEL ÖZELLİKLERİ
(Yüksek Lisans Tezi)

Abdulkadir KURAG

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Kasım 2014

ÖZET

Metrik uzayların birçok genelleştirilmiş hali vardır. Bunlardan bazıları; fuzzy metrik uzayı, soyut (konik) metrik uzay, K- metrik ve K- normlu uzay, menger uzay, dikdörtgen metrik uzay, dikdörtgensel konik metrik uzay.

2007 yılında Çinli matematikçiler Huang ve Zang 20. Yy. da tanımlanmış olan ve kullanılmış olan K-metrik ve K-normlu uzayların varlığından habersiz olarak konik metrik uzayları tanımladılar. Her ikisinde de reel sayılar kümesi yerine E Banach uzayını aldılar. Bununla birlikte Huang ve Zang daha da ilerisini yaparak dizilerin yakınsaklığını da tanımladılar. Bu yaklaşım tarzı konikin normal olmadığı durumlarda da bu uzayları araştırma imkanı verdiler. Bu durum akademik camiada büyük bir heyecan uyandırdı. Kısa bir zamanda bu konuyla ilgili altı yüzden fazla makalenin yayınlanması bu heyecanın en canlı örneğidir. Tezimiz beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm tezin giriş kısmından oluşmaktadır. Tezimizin ikinci bölümünde bazı temel kavramlara yer verdik. Üçüncü bölümde ise konik metrik uzayların tanımını yaparak konik metrik uzayların temel özelliklerini ele aldık. Dördüncü bölümde sabit nokta teoremlerini ele aldık. Son olarak beşinci bölümde ise sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

Anahtar kelimeler: Metrik uzaylar, konik metrik uzaylar, sabit nokta teoremleri
Tez Danışman: Doç. Dr. Necdet BATIR
Sayfa adedi: 49

MAIN PROPERTIES OF CONE METRİC SPACES
(M. Sc. Thesis)

Abdulkadir KURAG

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ UNİVERSİTY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLİED SCİENCES

November 2013

ABSTRACT

There are many generalization form of metric spaces. Some of them are; fuzzy metric space, abstract (cone) metric space, K- metric space, rectangular metric spaces.

In 2007, Chinese mathematicians Zang and Huang introduced the cone metric spaces as using the K- metric and K-normed which was defined and used in the 20th century. Both drave of reel number were replaced with E Banach space. Besides Huang and Zang defined the proximity of interior point by using the definition of E Banach space. So, that is provided to discovery the cone space without neecessary to the norm of cone space. This case aroused great excitement in the scholary community. In a short time the most vivid examples of this excitement that was published more than six hundred articles about this subject.The thesis organized as follows. Our thesis consists five sections. In the first part of this thesis, we have introduced some basic concept. In the second part, we discussed the structural properties of metric spaces by defining cone metric spaces. In the third section we discussed fixed point theorems. Finally, in the fourth and last section, conclusions and recommendations have been given.

Keywords: Metric spaces, cone metric spaces, fixed point theorems
Thesis Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Necdet BATIR
Page Number: 49

İÇİNDEKİLER

1.BÖLÜM

GİRİŞ

Matematiğin evrensel gelişimi analizin çalışma metotlarından etkilenmiştir. Bununla birlikte kümelerin bazı cebirsel özellikleri analizin gelişmesine yeterince katkıyı yapmadığından metrik uzaylara ihtiyaç duyulmuştur. Örneğin boştan farklı bir kümenin metrik ve iki nokta arası uzaklık kavramının nasıl tanımlanacağı matematiğin temel problemlerinden biri olmuştur. Metrik uzay kavramını ilk kez 1906 yılında Maurice Fréchet vermiştir. Fréchet boştan farklı bir küme üzerindeki metrik yapısı üzerinde çalışmış, kümenin farklı iki elemanı arasındaki uzaklığın pozitif bir reel sayı olması gerektiğini göstermiştir. Bu da klasik analizden modern analize geçişin ilk adımı olmuştur. Ayrıca topoloji teorisinde soyut olan bazı kavramlar, metrik uzay teorisinde daha somut kavramlarla açıklanma imkanı bulur.

Metrik uzayların birçok genelleştirilmiş hali vardır. Bunlardan bazıları; fuzzy metrik uzayı, soyut metrik uzay, K- metrik ve K- normlu uzay, menger uzay, dikdörtgensel metrik uzay, dikdörtgensel konik metrik uzay.

2007 yılında Çinli matematikçiler Huang ve Zang 20. Yy. da tanımlanmış olan ve kullanılmış olan K-metrik ve K-normlu uzayların varlığından habersiz olarak konik metrik uzayları tanımladılar. Her ikisinde de reel sayılar kümesi yerine E Banach uzayını aldılar. Bununla birlikte Huang ve Zang daha da ilerisini yaparak dizilerin yakınsaklığını da tanımladılar. Bu yaklaşım tarzı konikin normal olmadığı durumlarda da bu uzayları araştırma imkanı verdiler.

Huang ve Zhang sabit noktayı incelemek için metrik uzayların tamamen yeterli olmadığını ve metrik uzaylardan daha kapsamlı bir uzayın olabileceğini gördüler ve bu sorunun üstesinden gelmek için de konik metrik uzay kavramını verdiler.

Yukarıda belirtilen bilgiler ışığında bu tezin amacı konik metrik uzayların bazı temel özelliklerini açıklamak ve konik metrik uzaylarda bazı sabit nokta teoremlerini ve bunların ispatlarını geniş biçimde incelemektir. Tezin ikinci bölümünde ise bazı temel tanım ve kavramlar verilmiştir. Ayrıca bu bölümde literatürde temel teşkil eden bazı önemli teorem ve sonuçlar da yer almaktadır.

Üçüncü bölümde ise öncellikle konikin tanımı ve bazı konik örnekleri verilmiştir. Ayrıca sıralı Banach uzaylarında koniklerin normalliği incelenmiştir. Bu bölümde ayrıca konik metrik uzayların tanımı verilmiş, konik metrik uzaylarla ilgili örnekler ve bazı teoremlere yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde, sabit nokta teoremleri ve ispatlarına genişçe yer verilmiştir. Ayrıca sabit nokta teoremlerinin bazı sonuçları da ispatlarıyla birlikte verilmiştir.

Son olarak beşinci bölümde sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

2.BÖLÜM

TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

2.1. Metrik Uzaylar

Tanım 2.1.1. Boş olmayan bir X kümesi ve bir $\rho : X \times X \to \mathbb{R}^+$,

$$(x, y) \to \rho(x, y)$$

dönüşümü verilsin. Eğer bu ρ dönüşümü her $x, y, z \in X$ için

(M1) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

(M2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

(M3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$; (üçgen eşitsizliği)

özelliklerini sağlıyorsa X üzerinde uzaklık fonksiyonu ya da metrik adını alır ve bu durumda (X, ρ) ikilisine bir metrik uzay denir. Burada (M1) – (M3) özelliklerine metrik aksiyomları denir [1].

Örnek 2.1.2: X en az iki elemanlı bir küme ve $x, y \in X$ olsun. O zaman

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 0; x = y \\ 1; x \neq y \end{cases}$$

tanımlarsak ρ, X üzerinde bir metriktir. Bu metrik uzaya ayrık ya da diskrit metrik uzay denir [1].

Örnek 2.1.3. Gerçel sayılar kümesinde

$$\rho(x,y) = |x - y|$$

uzaklığı ile bir metrik uzaydır ve $\mathbb{R}'$ ile gösterilir.

Örnek 2.1.4. $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2} \tag{2.1}$$

tanımlarsak ($\mathbb{R}^n$, ρ) bir metrik uzaydır. Bu uzaya n boyutlu Öklid uzayı denir [2]. (2.1) ile tanımlanan $\rho(x,y)$ fonksiyonu Tanım 2.1.1 deki (M1) ve (M2) özelliklerini sağlar. Ayrıca (M3) in üçgen eşitsizliğini sağladığı kolayca görülür. Gerçekten,

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$a_k = x_k - y_k$, $b_k = y_k - z_k$ (k =1,2,...n)

olsun. Bu durumda üçgen eşitsizliği

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k - z_k)^2} < \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(y_k - z_k)^2}$$

(2.2) ya da

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^2} < \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} \tag{2.3}$$

eşitsizliğine denktir.

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k b_k)^2} < \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\ \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} \tag{2.4}$$

Couchy – Schwarz eşitsizliğine göre ise

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k{}^2 + 2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} b_k{}^2$$

$$< \sum_{k=1}^{n} a_k{}^2 + 2\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2} + \sum_{k=1}^{n} b_k^2$$

$$= \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}\right)^2$$

biçiminde elde edilir. Karekökünü aldığımızda (2.3) ü, buradan da (2.2) yi elde ederiz.

Örnek 2.1.5. $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$$\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k| \tag{2.5}$$

tanımlayalım. O zaman ρ' nun (2.5) ün tanım 2.1.1 de verilen üç özelliği de sağladığı kolayca görülür. Buna karşılık gelen metrik uzay $\mathbb{R}_1^n$ ile gösterilir [1].

Örnek 2.1.6. $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ olsun.

$$\rho_0(x, y) = \max_{1 \le k \le n} |x_k - y_k| \tag{2.6}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda da bir metrik uzay elde etmiş oluruz. $\mathbb{R}_0^n$ olarak gösterilen uzay çoğu zaman Öklid uzayı $\mathbb{R}^n$ kadar kullanışlıdır [1].

Tanım 2.1.7. (X, ρ) bir metrik uzay ve $x_0 \in X$ ve $r > 0$ olsun.

$$B(x_0, r) = \{x \in X : \rho(x, x_0) < r\}$$

kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı açık yuvar,

$$B[x_0, r] = \{x \in X : \rho(x, x_0) \le r\}$$

kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı kapalı yuvar,

$$S[x_0, r] = \{x \in X : \rho(x, x_0) = r\}$$

kümesine de küre (yuvar yüzeyi) denir [3].

Tanım 2.1.8. Herhangi bir F cismi üzerinde bir V vektör uzayını göz önüne alalım. Eğer $N : V \to \mathbb{R}^+$dönüşümü aşağıdaki şartları sağlarsa bu dönüşüme norm denir. Normlu bir vektör uzayına da normlu uzay denir. Ayrıca norm $x \in V$ için $N(x) = \| x \|$ şeklinde gösterilir [4].

N1) Her $x \in V$ $için$ $\| x \| \geq 0$ dir. (pozitiflik aksiyomu)

N2) $x \in V$ $için$ $\| x \| = 0$ için gerek ve yeter koşul $x = 0$ dır.

N3) Her $x \in V$ ve $\alpha \in$ F için $\| \alpha x \| = |\alpha| \; \| x \|$ dir. (homojenlik aksiyomu)

N4) Her $x, y \in$ V için $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$ dir. (üçgen eşitsizliği)

Örnek 2.1.9. $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ üzerinde sırasıyla,

$$\| . \| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \|x\| = |x|$$

$$\| . \| : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad \|z\| = |z|$$

fonksiyonları göz önüne alınırsa $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ birer normlu uzaydır [4].

Örnek 2.1.10. $\mathbb{R}^n$ ve $\mathbb{C}^n$ üzerinde, $x \in \mathbb{R}^n$ ve $x \in \mathbb{C}^n$ olmak üzere

$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$, $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_1|^2}$, $\|x\|_\infty = \max \; \{ \; |x_i| : i = 1,2...n \; \}$ biçiminde tanımlanan $\|x\|_1$, $\|x\|_2$, $\|x\|_\infty$ birer normdur. Böylece $\mathbb{R}^n$ ve $\mathbb{C}^n$ birer metrik uzaydır [4].

Tanım 2.1.11. X normlu lineer uzay olsun. Eğer X norm metriğine göre tam ise X uzayına Banach uzayı denir. Buradaki tamlık ; $x_n \in X$ için $\|x_m - x_n\| \to 0$ $(m, n \to \infty)$ olduğunda $\|x_n - x\| \to 0$ $(n \to \infty)$ olacak şekilde bir $x \in X$ vardır demektir.

2.2. Sabit Nokta ve Daraltma Dönüşümleri

Tanım 2.2.1. $X \neq \emptyset$ bir küme ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda $Tx_0 = x_0$ olacak şekilde bir $x_0 \in$ X varsa, x_0 noktasına T' nin X'de bir sabit noktası denir. Eğer $\forall x \in \mathbb{R}$ için $\rho\,(Tx, Ty) < \alpha\, \rho\,(x,y)$ olacak şekilde bir $0 < \alpha < 1$ reel sayısı varsa T'ye daraltma dönüşümü denir. Her daraltma dönüşümü kendiliğinden süreklidir [4].

Çünkü daraltma $x_n \to x$ olduğunda $x_n \to Tx$ dir.

Aşağıdaki örneklerden de görüleceği gibi $T : X \rightarrow X$ ile tanımlanan bir T dönüşümünün bir tek sabit noktası olabilir veya birden çok olabilir veya hiç olmayabilir.

Örnek 2.2.2. $X = [\ 0,\ \infty\ )$ ve $T : X \rightarrow X$, $Tx = \frac{x}{2}$ olsun. Bu durumda $x_0 = 0$ bu dönüşümün bir tek sabit noktasıdır [4].

Örnek 2.2.3. $X = [\ 0, \infty\ )$ ve $T : X \rightarrow X$, $T\ x = x^2$ olsun. Bu durumda $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ bu dönüşümün iki sabit noktasıdır [4].

Örnek 2.2.4 $X = (\ -\infty, \infty\ )$ ve $T : X \rightarrow X$, $Tx = x^3$ olsun. Bu da $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ bu dönüşümün üç sabit noktası olduğunu gösterir. [4].

Örnek 2.2.5. $X = [\ 0, \infty\ )$ ve $T : X \rightarrow X$, $Tx = x^2 + b$, $b > 0$ olsun. Bu durumda T nin hiçbir sabit noktası yoktur. I, X üzerindeki birim dönüşüm olmak üzere $T : X \rightarrow X$ dönüşümünün sabit noktası aslında $(T - I)(\ x\ ) = 0$ denkleminin çözümleridir. O halde bu denklemin çözümünü bulmak için standart teknik, buna karşılık gelen dönüşümün sabit noktalarını bulmaktır.

Teorem 2.2.6. (X, ρ) bir tam metrik uzay olsun. Eğer $T : X \rightarrow X$ bir daraltma dönüşümü ise T’ nin tek bir sabit noktası vardır [5].

İspat : Bir $x_o \in \mathbb{R}$ için

$$x_1 = Tx_o,\ x_2 = Tx_1 = T^2x_o,\ \ldots,\ x_n = Tx_{n-1} = T^nx_o, \ldots \tag{2.7}$$

olsun . Bu durumda (x_n) dizisi cauchy dizisi olur. Biraz daha açıklayacak olursak ;

n < m için

$$\rho(\ x_n, x_m\ ) = \rho\ (T^n x_0,\ T^m x_0) \leq \alpha^n\ \rho(x_o,\ x_{m-n})$$

$$< \alpha\ [\ \rho(x_o, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \ldots + \rho\left(x_{m-n-1}, x_{m-n}\right)]$$

$$< \alpha^n\ \rho(x_o, x_1)\ [1 + \alpha + \alpha^2\ + \ldots +\ \alpha^{m-n-1}\ ]$$

$$< \alpha^n \ \rho \ (x_o, x_1) \frac{1}{1-\alpha}$$

elde ederiz. X tam ve (x_n) cauchy dizi olduğundan sağdaki ifade keyfi olarak yeterince büyük n için küçültülebilir. Ayrıca x= $\lim_{n\to\infty} x_n$ gibi bir limite sahiptir. Sonra da T nin sürekliliğinden

$$Tx = T \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} Tx_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x$$

elde edilir. Bu da x gibi sabit bir noktanın varlığını ispatlar. x in tekliğini ispatlamak için, Tx=x ve Ty=y ise tanım 2.2.1den ρ (x, y) < $\alpha \ \rho$ (x, y) haline gelir. Fakat buradan da ρ (x, y)< 0 olur. Çünkü α<1 dir. Bundan dolayı da x = y olur.

Not **:** Sabit nokta teoremi,çeşitli türlerdeki denklemlerin çözülmesi için, varlık ve teklik teoremlerinin ispatında kullanılabilir. Sabit nokta teoremi Tx = x formunda bir denklemin tek bir çözümü olduğunu göstermenin yanı sıra çözümü bulmada pratik bir yöntem sağlar. Örneğin (2.7) "ardıl yaklaşımların" hesaplanmasında kullanılabilir. Aslında ispatta da görüldüğü gibi (2.7) yaklaşımları gerçekte de Tx = x denkleminin çözümüne yaklaşmaktadır. Bu nedenle sabit nokta teoremi çoğunlukla ardıl yaklaşımlar yöntemi olarak bilinir.

Örnek 2.2.7. I= [a, b] ve f : I $\rightarrow$ I dönüşüm olsun. Ayrıca K<1 için,

$$\left| f(x_1) - f(x_2) \right| < K \left| x_1 - x_2 \right| \qquad (2.8)$$

Lipschitz koşulunu sağlasın. (x_n) dizisini , $x_n = f(x_{n-1}), n \in \mathbb{N}$şeklinde tanımlayalım. Teorem 2.2.6 dan dolayı (x_n) dizisi $f(x) - x = 0$ denkleminin bir köküne yakınsar.

Örnek 2.2.8. $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_i \qquad (i = 1,...,n) \qquad (2.9)$$

diyelim. $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dönüşümü Tx = $(y_1, y_2, ..., y_n)$ şeklinde tanımlansın.

Eğer T bir daraltma dönüşümü ise Tx = x denkleminin çözümü için ardıl yaklaşımlar yöntemini kullanabiliriz. T' nin hangi koşullarda daraltma dönüşümü olacağı seçilen metriğe bağlıdır. Şimdi şu üç durumu inceleyelim.

1. $\mathbb{R}_0^n$ uzayı

$$\rho(x,y) = \max_{1 \le i \le n} |x_i - y_i|$$

metriği ile ele alındığında,

$$\rho(y,\tilde{y}) = \max_i |y_i - \tilde{y}_i| = \max_i \left| \sum_j a_{ij} (x_j - \tilde{x}_j) \right|$$

$$\le \max_i \sum_j |a_{ij}| |x_j - \tilde{x}_j|$$

$$\le \max_i \sum_j |a_{ij}| \max_j |x_j - \tilde{x}_j|$$

$$= \left(\max_i \sum_j |a_{ij}| \right) \rho\,(x,\tilde{x})$$

ve daraltma koşulu

$$\sum_j |a_{ij}| \le \alpha < 1 \qquad \text{(i=1,...,n)} \tag{2.10}$$

olur.

2. $\mathbb{R}_1^n$ uzayı

$$\rho \;\; \text{(x, y)} = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

metriği ile ele alındığında

$$\rho\ (y,\tilde{y}) = \sum_i |y_i - \tilde{y}_i| = \sum_i \left| \sum_j a_{ij}\left(x_j - \tilde{x}_j\right) \right|$$

$$\leq \sum_i \sum_j \ |a_{ij}||x_j - \tilde{x}_j|$$

$$\leq \left(\max_j \sum_i |a_{ij}| \right) \rho\ (x,\tilde{x})$$

ve daraltma koşulu

$$\sum_i |a_{ij}| \leq \alpha < 1 \quad (j = 1,\ldots,n) \tag{2.11}$$

3. Basit Öklid uzayı $\mathbb{R}^n$

$$\rho\ (x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

metriği ile ele alındığında

$$\rho^2(y,\tilde{y}) = \sum_i \left(\sum_j \ a_{ij}\left(x_j - \tilde{x}_j\right) \right)^2 \leq \left(\sum_i \sum_j \quad {a_{ij}}^2 \right) \rho^2(x,\tilde{x})$$

$$\sum_i \ \sum_j {a_{ij}}^2 \leq \alpha < 1 \tag{2.12}$$

daraltma koşuluyla olur. Bu nedenle, eğer bu koşullardan en az biri geçerli olursa

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_J + b_i, \quad (i = 1,\ldots,n) \tag{2.13}$$

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ gibi bir tek nokta vardır. $x = Ax$ denkleminin çözümü ardıl yaklaşımların dizisi

$$x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$$

$$x^{(1)} = \left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}\right)$$

.

.

.

$$x^{(k)} = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}\right)$$

.

.

.

olduğunda, şu formlardan birini alır.

$$x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^k + b_{ij}$$

ve herhangi bir nokta $x^{(0)}$ ı “sıfırıncı yaklaşım” olarak alabiliriz. (2.10)–(2.12) koşullarından her biri ardıl yaklaşımlar yönteminin kullanılması için yeterlidir, fakat hiçbiri gerekli değildir.

Teorem 2.2.6 sonradan işe yarayabilecek aşağıdaki yararlı genellemelere sahiptir.

Teorem 2.2.9. R bir tam metrik uzay, T: R $\to$ R sürekli dönüşüm ve T^n de bir daraltma dönüşümü olsun. ($n \in Z, n > 1$). Bu durumda T bir tek sabit noktaya sahiptir [5].

İspat**:** $x_0 \in$ R gibi herhangi bir nokta seçelim ve x = $\lim_{k\to\infty} T^{kn} x_0$ olsun. Bu durumda T’nın sürekliliğinden

Tx = $\lim_{k\to\infty} T\, T^{kn} x_0$

olur. Fakat T^n bir daraltma dönüşümü olduğundan $\alpha < 1$ için

$$\rho\left(T^{kn}Tx_0, T^{kn}x_0\right) \leq \alpha\, \rho\,(T^{(k-1)^n}Tx_0, T^{(k-1)n}x_0) < \ldots < \alpha^k \rho\left(Tx_0, x_0\right)$$

olur. Buradan da

$$\rho\left(Tx, x\right) = \lim_{k\to\infty} \rho\left(TT^{kn}x_0, T^{kn}x_0\right) = 0$$

elde edilir.

Tanım 2.2.10. X ile Y herhangi kümeler olmak üzere, X x Y çarpım kümesinin herhangi bir alt kümesine X den Y ye bir bağıntı adı verilir. Özel olarak, X x X çarpım kümesinin herhangi bir alt kümesine de X üzerinde bir bağıntı denir.

Tanım 2.2.11. X üzerinde alınan bir β bağıntısı

i) $\forall x \in X$ için $(x, x) \in \beta$ (yansıma)

ii) $\forall (x, y) \in \beta$ iken $(y, x) \in \beta$ (simetrik)

iii) $\forall (x, y) \in \beta$ ve $(y, z) \in \beta$ iken $(x, z) \in \beta$ (geçişken)

koşulları sağlanıyorsa β bağıntısına bir denklik bağıntısıdır denir.

Tanım 2.2.13 X üzerinde alınan bir β bağıntısı

i) $\forall x \in X$ için $(x, x) \in \beta$ (yansıma)

ii) $\forall (x, y) \in \beta$ ve $x \neq y$ iken $(y, x) \notin \beta$ (ters simetri)

iii) $\forall (x, y) \in \beta$ ve $(y, z) \in \beta$ iken $(x, z) \in \beta$ (geçişken)

koşulları sağlanıyorsa β bağıntısına kısmi sıralama bağıntısı bu bağıntıyla birlikte X kümesine ise kısmi sıralı küme denir. Kısmi sıralama bağıntısı genellikle '≤' ile gösterilir. X kısmi sıralı kümesinde alınan x ve y gibi herhangi iki öğe bu bağıntıya göre karşılaştırılabilirse (yani $x \leq y$ veya $y \leq x$ ise), bu durumda X' e bir tam sıralı küme, söz konusu bağıntıya da tam sıralama bağıntısı adı verilir.

3.BÖLÜM

KONİK METRİK UZAYLARIN TEMEL ÖZELLİKLERİ

3.1. Konik Metrik Uzaylar

Tanım 3.1.1 E bir gerçel Banach uzayı ve P, E' nin bir alt kümesi olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa P' ye koniktir denir.

1) P kapalı, boştan farklı ve $P \neq \{0\}$

2) $a, b \in IR$, $a, b \geq 0$ $x, y \in P \Rightarrow ax + by \in P$

3) $x \in P$ ve $-x \in P \Rightarrow x = 0$

Burada '' $\leq$ '' ifadesi $x, y \in E$ için $x \leq y \Leftrightarrow y - x \in P$ tanımlanan E üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısıdır. $x < y$ olduğunda bu $x \leq y$ fakat $x \neq y$ demektir. $x << y$ ifadesini de $y - x \in$ içP şeklinde tanımlayalım. Bundan sonra E daima bir reel Banach uzayını, $P \neq 0$ ve P, E' de bir koniki temsil edecektir [6].

Önerme 3.1.2. E bir reel Banach uzayı, $P \subset E$ bir konik ve $\lambda > 0$ reel sayı olsun. Aşağıdaki ifadeler doğrudur [7].

(i) İçP + İçP $\subset$ İçP.

(ii) λİçP $\subset$ İçP.

İspat. (i) $x \in$ İçP ve $y \in$ İçP olsun. Bu durumda $B(x, \varepsilon_1) \subset P$ ve $B(y, \varepsilon_2) \subset P$ olacak şekilde en az $\varepsilon_1 > 0$ ve $\varepsilon_2 > 0$ vardır. Şimdi $B = B(x + y, \varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}) \subset P$ olduğunu göstereceğiz. Şimdi $z \in B$ olsun. Bu durumda $\|z - x - y\| < \varepsilon$ olur. Bu ise aşağıdaki

$$\|z - x - y\| < \varepsilon_1 \text{ ve } \|z - x - y\| < \varepsilon_2$$

olmasını gerektirir. Buradan $(z - x) \in B(y, \varepsilon_2) \subset P$ ve $(z - y) \in B(x, \varepsilon_1) \subset P$ dir. Konik tanımının (2) özelliğinden, $(2z - x - y) \in P$ dir. $x \in P$ olduğundan $(2z - x - y + x) \in P$ olur. Buradan $(2z - y) \in P$ dir. $y \in P$ olduğundan $(2z - y + y) \in P$ dir. Buradan $2z \in P$

dir. Aynı şekilde konik tanımı (2) özelliğinden $\frac{1}{2}2z \in$ P olur ve böylece $z \in$ P'dir. Yani $B(x + y, \varepsilon) \subset P$ olur. O halde $(x + y) \in$ İçP olur.

(ii) $\lambda > 0$ bir reel sayı ve $x \in$ İçP olsun. Bu durumda $x \in B(x, \varepsilon) \subset P$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ vardır. $\lambda x \in$ İçP olduğunu göstermek için $B(\lambda x, \lambda\varepsilon) \subset P$ olduğunu göstereceğiz. $z \in B(\lambda x, \lambda\varepsilon)$ olsun. Bu ise $\|z - \lambda x\| < \lambda\varepsilon$ ve $\lambda\left\|\frac{1}{\lambda}z - x\right\| < \lambda\varepsilon$ ve $\left\|\frac{1}{\lambda}z - x\right\| < \varepsilon$ elde edilir. Bu ise $\frac{1}{\lambda}z \in$ P dir. (P2) den $z \in$ P demektir. Böylece $B(\lambda x, \lambda\varepsilon) \subset P$ dir. Yani $\lambda x \in$ İçP olur.

Önerme 3.1.3. E üzerinde P' ye göre $\forall x, y \in E$ için $x \le y \Leftrightarrow y - x \in P$ şeklinde tanımlanan "$\le$" bağıntısı bir kısmi sıralama bağıntısıdır.

İspat: (i) $\forall x \in E$ için $x - x = 0 \in P \Rightarrow x \le x$.

(ii) $x \le y$, $y \le x \Rightarrow y - x \in P$ ve $x - y = -(y - x) \in P \Rightarrow y - x = 0 \Rightarrow y = x$

(iii) $x \le y$, $y \le z \Rightarrow y - x \in P$, $z - y \in P \Rightarrow y - x + z - y = z - x \in P \Rightarrow x \le z$ olur.

O halde "$\le$" bağıntısı bir kısmi sıralama bağıntısıdır.

Tanım 3.1.4. E bir reel Banach uzayı ve $P \subseteq E$ bir konik olsun. Eğer $\forall$ $x, y \in E$ için $0 \le x \le y$ olduğunda $\|x\| \le K\|y\|$ olacak şekilde bir $K > 0$ varsa P koniğine bir normal konik denir. Yukarıdaki eşitsizliği sağlayan en küçük K sayısına P' nin normal sabiti denir [6].

Tanım 3.1.5. Eğer P deki artan her dizi üstten sınırlı ise P düzgün (regüler) koniktir deriz. Yani, eğer (x_n) P' de $y \in E$ için $x_1 \le x_2 \le ..... \le y$ şeklinde bir dizi ise

$\|x_n - x\| \to 0$ $(n \to \infty)$ şeklinde bir $x \in E$ vardır. Denk olarak her azalan dizi alttan sınırlı ve yakınsak ise P' ye düzgündür denir [3].

Tanım 3.1.6. X boş olmayan bir küme ve E bir reel Banach uzayı olsun. Eğer d : X x X $\rightarrow$ E aşağıdaki şartları sağlarsa d'ye X üzerinde konik metriktir denir ve (X, d)' ye konik metrik uzay denir [3].

(1) Her x, y $\in$ X için 0 < d(x, y) ve d(x, y) = 0 ancak ve ancak x = y

(2) Her x, y $\in$ X için d(x, y) = d(y, x)

(3) Her x, y, z $\in$ X için d(x, y) $\leq$ d(x, z) + d(z, y).

Örnek 3.1.7. E = IR^2, P = $\{(x, y) \in IR^2 \mid x, y \geq 0\} \subset IR^2$, X = IR ve d: X x X $\rightarrow$ E ve d(x, y) = $(|x-y|, \alpha|x-y|)$, $\alpha \geq 0$ bir sabit olsun. O halde (X, d) bir konik metrik uzaydır. Şimdi öncellikle P' nin bir konik olduğunu gösterelim.

(i) P kapalı ve $\theta \in P$ olduğundan $P \neq \emptyset$ dır.

$(x,y)=(1,0) \in P$ alırsak $P \neq \{\theta\}$

(ii) a, b $\in \mathbb{R}$, a, b ≥ 0 ve $z=(x_1, y_1)$ *ve* $t=(x_2, y_2) \in P$ olsun.

Bu durumda

$$x_1, y_1 \geq 0 \text{ ve } x_2, y_2 \geq 0 \Rightarrow ax_1 \geq 0,\ ay_1 \geq 0,\ bx_2 \geq 0,\ by_2 \geq 0$$

$$\Rightarrow ax_1 + bx_2 \geq 0 \text{ ve } ay_1 + by_2 \geq 0$$

$$\Rightarrow az + bt = a(x_1, y_1) + b(x_2, y_2)$$

$$= (ax_1 + bx_2, ay_1 + by_2) \in P.$$

(iii) z=(x, y), –z=(–x, –y)$\in$P olsun.

Bu durumda x, y≥0 ve –x, –y≥0 $\Rightarrow$ x≥0 , –x≥0 ve y≥0, –y≥0

$\Rightarrow$x=0 ve y=0

$\Rightarrow$z=(0, 0)=$\theta \in$P

olup konik olma şartları sağlanır. Yani P, E' de bir koniktir. Şimdi (X , d) nin bir konik metrik uzay olduğunu gösterelim;

(1) $d(x, y) - \theta = (|x-y|, \alpha|x-y|) - (0,0) = (|x-y|, \alpha|x-y|) \in P$ olduğundan

$$\theta \leq d(x, y) \text{ ve}$$

$$d(x, y)) = \theta \Leftrightarrow (|x-y|, \ \alpha|x-y|) = (0, 0)$$

$$\Leftrightarrow |x-y| = 0 \ \ ve \ \ \alpha|x-y| = 0$$

$$\Leftrightarrow x = y \text{ veya } \alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow x = y$$

(2) Her $x, y \in IR$ için $d(x, y) = (|x-y|, \ \alpha|x-y|)$

$$= d(x, y) = (|y-x|, \ \alpha|y-x|)$$

$$= d(y, x)$$

elde edilir. Bu da $d(x, y) = d(y, x)$ demektir.

(3) $x,y,z \in IR$ için $d(x, y)) = (|x-y|, \ \alpha|x-y|)$

$$= (|x-z+z-y|, \alpha|x-z+z-y|)$$

$$\leq (|x-z| + |z-y|, \ \alpha(|x-z| + |z-y|)).$$

Böylece $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ elde edilir. Metrik koşulları sağlandığından d, X üzerinde bir konik metrik (X,d) bir konik metrik uzaydır.

Örnek 3.1.8. $E = \mathbb{R}^n$, $P = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E : x_i \geq 0\}$, $X = \mathbb{R}$ ve $d: X \times X \to E$ olmak üzere

$$d(x, y) = (|x-y|, \alpha_1|x-y|, \alpha_2|x-y|, \ldots, \alpha_{n-1}|x-y|)$$

olsun. Her $1 \leq i \leq n-1$ için $\alpha_i \geq 0$, (X, d) bir konik metrik uzaydır.

3.2. Sıralı Banach Uzaylarında Koniklerin Normalliği

Sonuç 3.2.1. K < 1 normal sabiti ile bir normal konik yoktur [7].

İspat: (X, d) bir konik metrik uzay ve P ise K < 1 normal sabiti ile normal konik olsun.

K < 1 – ε ve 0 < ε < 1 olacak şekilde bir x ∈ P bir elemanını seçelim. O zaman (1 – ε)x ≤ x olur. Fakat (1 – ε)$\|x\|$ > K$\|x\|$ olduğundan bu bir çelişkidir. O halde K > 1 olmalıdır.

Örnek 3.2.2. E = C_{IR}([0, 1]) Supremum normla birlikte tanımlansın ve P = {f ∈ E: f ≥ 0} olsun. O zaman P, K = 1 normal sabitiyle birlikte koniktir. Öncellikle P bir koniktir çünkü;

(i) P kapalıdır. f = θ ∈ P alırsak P ≠ ∅. Aynı şekilde f = 1 ∈ P alırsak P ≠ {θ } dir

(ii) a, b ∈ IR , a, b ≥ 0 ve f , g ∈ P ⇒ f ≥ θ ve g ≥ θ dır. Her x∈[0,1] için f (x) ≥ 0 ve g (x) ≥ 0 ⇒ (af) (x) ≥0 ve (bg) (x) ≥ 0 ⇒ (af+bg)(x) ≥0 ⇒ af+bg ≥ θ ⇒ af+bg ∈ P olduğu görülür.

(iii) f ve − f ∈ P ⇒ f ≥ θ ve − f ≥ θ dır. Her x∈[0,1] için f (x) ≥ 0 ve − f (x) ≥ 0 ⇒f = θ elde edilir. Böylece P'nin konik olma koşulları sağlanmış olur. Şimdi P' nin K = 1 normal sabiti ile bir normal konik olduğunu gösterelim; θ ≤ f ≤ g olacak şekilde herhangi f , g ∈ E elemanlarını alalım. Bu durumda

$$\|f\| = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| \quad ve \quad \|g\| = \sup_{t\in[0,1]} |g(t)|$$

ve θ ≤ f ≤ g olduğundan g–f ∈ P , yani g−f ≥ θ dır.

Her t ∈[0,1] için f(t) ≤ g(t) ⇒ | f(t) | ≤ | g(t) |

$$\Rightarrow \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| \leq \sup_{t\in[0,1]} |g(t)|$$

⇒ Böylece K=1 olmak üzere $\|f\| \leq K \|g\|$ olduğu görülür. Yani P; K=1 normal sabitiyle birlikte normal koniktir.

Örnek 3.2.3. $E = l_1 = \left\{\{x_n\}: \sum_{n=1}^{\infty}|x_n| < \infty\right\}$ ve $P = \{\{x_n\}_{n\geq 1} \in E: x_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^+\}$ olmak üzere

P; K=1 normal sabitiyle birlikte bir koniktir.

Öncellikle P bir koniktir çünkü;

P kapalıdır.

(i) Eğer $(x_n)_{n\geq 1} = (0, 0, \dots, 0) = \theta \in P$alırsak P $\neq \emptyset$ olur.

Eğer $(x_n)_{n\geq 1} = (1, 1, \dots, 1) \in P$ alırsak P $\neq \{\ \theta\ \}$ olur.

(ii) a, b $\in \mathbb{R}$, a, b ≥ 0 ve $x = (x_n)_{n\geq 1}$, $y = (y_n)_{n\geq 1} \in P$ olsun.

Her $n \in \mathbb{N}^+$ ve $a, b \in \mathbb{R}^+$ için $x_n \geq 0$ ve $y_n \geq 0 \Rightarrow ax_n \geq 0$ ve $by_n \geq 0$

$$\Rightarrow ax_n + by_n \geq 0$$

$$\Rightarrow a(x_n)_{n\geq 1} + b(y_n)_{n\geq 1} \in \mathrm{P}$$

$$\Rightarrow ax + by \in \mathrm{P}$$

(iii) $x = (x_n)_{n\geq 1}$,$-x = (-x_n)_{n\geq 1}$ $\in$ P olsun.

$Her\ n \in \mathbb{N}^+$ için $x_n \geq 0$ ve $-x_n \geq 0 \Longrightarrow x_n = 0 \Longrightarrow x = 0$

olur. Böylece konik olma şartları sağlanmış oldu. Şimdi P' nin K = 1 normal sabiti ile bir normal konik olduğunu gösterelim:

$\theta \leq x \leq y$ olacak şekilde $x = (x_n)_{n\geq 1}$, $y = (y_n)_{n\geq 1} \in E$ alalım. O zaman $y - x \in P$ dir. Bu durumda

$$y_n - x_n \geq 0 \Rightarrow x_n \leq y_n \Rightarrow |x_n| \leq |y_n| \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}|x_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty}|y_n| \Rightarrow \|x\|_1 \leq \|y\|_1 \Rightarrow \|x\|_1 \leq K\|y\|_1$$

Yani K = 1 olur . O halde P, K = 1 normal sabiti ile bir normal koniktir.

Sonuç 3.2.4. Her düzgün konik bir normal koniktir [7] .

İspat: P bir düzgün konik olsun fakat normal konik olmasın. Her n ≥ 1 için $t_n - s_n \in P$ ve $n^2\|t_n\| < \|s_n\|$ olacak şekilde $t_n, s_n \in P$ seçelim. Her n ≥ 1, $y_n = \frac{t_n}{\|t_n\|}$ ve $x_n = \frac{s_n}{\|t_n\|}$ olsun. O zaman her n ≥ 1 için $y_n - x_n \in P$, $\|y_n\| = 1$ ve $n^2 < \|x_n\|$ olur. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\|y_n\|$ serisi yakınsak ve P kapalı olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\|y_n\| = y$ olacak şekilde bir $y \in P$ vardır. Şimdi

$$0 \leq x_1 \leq x_1 + \frac{1}{2^2}x_2 \leq x_1 + \frac{1}{2^2}x_2 + \frac{1}{3^2}x_3 \leq \ldots \leq y$$

alalım. Dolayısıyla P düzgün olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}x_n$ yakınsaktır. Sonuç olarak,

$\lim_{n\to\infty}\frac{\|x_n\|}{n^2} = 0$. Bu bir çelişkidir. İspat tamamlanır.

Aşağıdaki örnek koniğin normal olmayabileceğini gösterir [8].

Örnek 3.2.5. $E = C^2_{IR}([0, 1])$ banach uzayı, $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ normuyla tanımlı ve

$P = \{f \in E: f \geq 0\}$ E de bir konik olsun. Her k ≥ 1 için f(x) = x ve $g(x) = x^{2k}$ alalım. Bu durumda, $0 \leq g \leq f$ ve

$$\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

$$= \sup\{|x| : x \in [0,1]\} + \sup\{|1| : x \in [0,1]\}$$

$$= 1+1=2 \text{ ve}$$

$$\|g\| = \|g\|_\infty + \|g'\|_\infty$$

$$= \sup\{|x^{2k}| : x \in [0,1], k \geq 1\} + \sup\{|2kx^{2k-1}| : x \in [0,1], k \geq 1\}$$

$$= 1 + 2k$$

olduğundan $2k = k\|f\| < \|g\| = 1+2k$ ve böylece $\|f\| = 2$ ve $\|g\| = 2k + 1$olur.

k$\|f\|$ < $\|g\|$ olduğundan k, P nin normal sabiti değildir. Böylece, P normal olmayan bir koniktir.

Şimdi sonuç 3.2.1 kullanılarak K = 1 normal sabiti ile normal koniğin bulunabileceğine dair bir örnek verelim.

Örnek 3.2.6. E = C_{IR} ([0, 1]) supremum normu ve P = {f $\in$ E: f $\geq \theta$} olsun. P, K = 1 normal sabiti ile koniktir. Şimdi elemanları E de olan azalan ve alttan sınırlı fakat E' de yakınsak olmayan $x \geq x^2 \geq x^3 \geq \ldots \geq \theta$ dizisini ele alalım. O zaman, sonuç 3.2.4 ün tersi doğru değildir.

Tanım 3.2.7. P $\subseteq$ E bir konik olsun. O zaman

1) Her x, y $\in$ E için sup{x, y} varsa P' ye minihedral denir.

2) Eğer E' nin üstten sınırlı her alt kümesinin bir supremumu varsa P' ye kuvvetli minihedral denir.

3) Eğer İçP $\neq \emptyset$ ise P' ye katı (solid) denir.

4) Eğer E = P – P ise P' ye üretilmiş (generating) denir [9].

Örnek 3.2.8. E = IR^n olsun. O zaman P = {(x_1, x_2, …, x_n): $x_i \geq 0$ her i= 1, 2, …, n}

normal, üretilmiş, minihedral, kuvvetli minihedral ve katıdır [9].

Örnek 3.2.9. $D \subset R^n$ kompakt bir küme ve P : ={f$\in$E: f(x) $\geq$ 0 her x$\in$D} bir konik olsun. P koniki normal, katı, üretilmiş, minihedraldir fakat kuvvetli minihedral değildir ve düzgün değildir.

Tanım 3.2.10. (X, d) bir konik metrik uzay, (x_n), X de bir dizi ve x $\in$ X olsun. Eğer $\theta \ll c$ şeklindeki $\forall$ c $\in$ E için n > m iken d(x_n, x) $\ll$ c olacak şekilde bir m$\in$N varsa (x_n) dizisine yakınsaktır denir ve n $\to \infty$ için $x_n \to$ x ya da $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ şeklinde gösterilir [9].

Sonuç 3.2.11. P, E reel banach uzayında bir konik olsun. O zaman

(i) Eğer $0 \leq x \leq y$ ve $a \geq 0, a \in \mathbb{R}$ ise $0 \leq ax \leq ay$ dir.

(ii) Eğer $0 \leq x_n \leq y_n$, $n \in \mathbb{N}$ ve $lim\, x_n = x$, $lim\, y_n = y$ ise $0 \leq x \leq y$ dir [10].

Sonuç 3.2.12. P, E reel banach uzayında bir konik ise $a, b, c \in E$ için

(i) Eğer $a \leq b$ ve $b \ll c$ ise $a \ll c$ dir.

(ii) Eğer $a \ll b$ ve $b \ll c$ ise $a \ll c$ dir [11].

Sonuç 3.2.13. (X, d) bir konik metrik uzay olsun. Her bir $c \in E$ de $\theta << c$ olacak şekilde verilsin. Bu durumda $\|x\| < \delta$ olduğunda $c - x \in$ İçP olacak şekilde bir $\delta > 0$ vardır.

(yani $x << c$ dir) [6].

İspat: $\theta << c$, $c \in E$ olduğundan $c \in$ İçP dir. $\{x \in E : \|x - c\| < \delta\} \subset$ İçP olacak şekilde bir $\delta > 0$ bulabiliriz. Şimdi $\|x\| < \delta$ ise $\|c - x - c\| = \|-x\| = \|x\| < \delta$ olur. Buradan $\|(c - x) - c\| < \delta$ olur. Bu ise $c - x \in$ İçP olduğunu verir.

Tanım 3.2.14. P; E Banach uzayında bir konik olsun.

1. Eğer $\forall$ x, y $\in$ E için $\theta \leq x \leq y$ olması $\|x\| \leq \|y\|$ olmasını gerektiriyorsa P' ye monoton denir

2. Eğer $\forall$ x, y $\in$ E için $\theta \leq x \leq y$ olmak üzere $\|x\| \leq K\|y\|$ olacak şekilde bir $K > 0$ varsa P' ye yarı monoton denir [10].

Sonuç 3.2.15. E Banach uzayında P koniği $\|.\|$ normuyla birlikte aşağıdaki şartlar denktir [12].

1. P normal

2. E de keyfi (x_n), (y_n), (z_n) dizileri için ($\forall$ n) $x_n \leq y_n \leq z_n$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = x$ ise $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x$ dir.(sandwich teoremi)

3. P yarı monotondur.

4. E' de $\|.\|$' a eşit olan öyle bir $\|.\|_1$ norm vardır ki P, $\|.\|_1$ bağlı olarak monotondur.

Aşağıdaki örnek P normal konik olmadığında sandwich teo'nin sağlanmayabileceğini gösterir [9].

Örnek 3.2.16. E = $C_{IR}^{'}[0, 1]$ ve x ∈ E için, $\|x\| = \|x\|_\infty + \|x'\|_\infty$ tanımlayalım. P = {x ∈ E: x(t) ≥ 0} olsun. Bu konik normal değildir. Şimdi $x_n(t) = \frac{t^n}{n}$ ve $y_n(t) = \frac{1}{n}$ olsun. O zaman $0 \le x_n \le y_n$ ve $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ fakat

$$\max_{t\in[0,1]}\left|\frac{t^n}{n}\right| + \max_{t\in[0,1]}|t^{n-1}| = \frac{1}{n} + 1 > 1$$

Yani x_n sıfıra yakınsamaz. Bu da sandwich teoreminin sağlanmayabileceğini gösterir.

Örnek 3.2.17. E = $C_{IR}^2([0,1])$, $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ ve P = {f ∈ E: f ≥ 0} olsun. $x_n = \frac{1-sinnt}{n+2}$ ve $y_n = \frac{1+sinnt}{n+2}$ alalım.

Böylece $0 \le x_n \le x_n + y_n$, $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$ *ve* $\|x_n + y_n\| = \frac{2}{n+2} \to 0$.

Aşağıdaki örnek de K>1 olduğunda P nin normal konik olabileceğini göstermektedir.

Örnek 3.2.18. k > 1 verilsin. E = {ax + b : a, b ∈ IR; x ∈ $\left[1 - \frac{1}{k}, 1\right]$} reel vektör uzayını alalım. E'de supremum norm tanımlanmış olsun.

P= {ax+b ∈ E : a ≥ 0, b≤0 }

tanımlayalım. O zaman P, düzgün ve normal koniktir.

Örnek 3.2.19. E = $\left(C_{IR}([0,\infty), \|.\|_\infty)\right)$, P = {f ∈ E: f(x) ≥ 0} olsun. (X, ρ) bir metrik uzay ve d: X x X → E ve d(x, y) = ρ(x, y)φ şeklinde tanımlansın.

Burada φ : [0, 1] →IR^+ süreklidir. Böylece (X, d) bir normal konik metrik uzaydır ve P nin normal sabiti K = 1 dir.

Örnek 3.2.20. $q > 0$, $E = l^q$, $P = \{\{x_n\}_{n \geq 1} \in E : x_n \geq 0$, her n için$\}$, (X, ρ) bir metrik uzay ve $d(x, y) = \left\{ \left(\frac{P(x,y)}{2^n} \right)^{\frac{1}{q}} \right\}_{n \geq 1}$ olsun. Böylece (X, d) bir konik metrik uzaydır ve P' nin normal sabiti K = 1 dir.

Örnek 3.2.21. $E = \left(C_{IR}\ ([0, \infty), \|.\|_{\infty}) \right)$, $P = \{f \in E: f(x) \geq 0\}$, (X, ρ) bir metrik uzay ve $d : X \times X \rightarrow E$, $d(x, y) = f_{x, y}$ şeklinde tanımlı ve $f_{x, y}(t) = |x - y|t$ olsun. Böylece (X, d) bir normal konik metrik uzaydır ve P nin normal sabiti K = 1 dir.

3.3. Konik Metrik Uzaylarda Yakınsaklık ve Limit

Sonuç 3.3.1. (X, d) bir konik metrik uzay P, normal sabit K ile normal konik (x_n), X içinde bir dizi olsun. Bu durumda (x_n) dizisinin X içinde yakınsak olması için gerek ve yeter şart $n \rightarrow \infty$ iken $d(x_n, x) \rightarrow \theta$ olmasıdır [6].

İspat: $(\Rightarrow)$ $x_n \rightarrow x$ olsun. $\forall\ \varepsilon > 0$ için $\theta \ll c$ ve $K\|c\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $c \in E$ seçebiliriz. Bu durumda her $n > N$ için $d(x_n, x) \ll c$ olacak şekilde en az bir $N \in IR$ vardır. Böylece, $n > N$ iken $\|d(x_n, x)\| \leq K\|c\| < \varepsilon$ olur. Bu da $n \rightarrow \infty$ iken $d(x_n, x) \rightarrow \theta$ olduğunu verir.

$(\Leftarrow)$ $n \rightarrow \infty$ iken $d(x_n, x) \rightarrow \theta$ olsun. Bu durumda $\theta \ll c$ ve $c \in E$ için $\|x\| < \delta$ iken

$c - x \in$ İçP olacak şekilde bir $\delta > 0$ vardır. Bu δ için de her $n \in IR$ için $\|d(x_n, x)\| \ll c$ olacak şekilde $N \in IR$ vardır demektir. Bu nedenle (x_n) dizisi noktasına yakınsar.

Sonuç 3.3.2. (X, d) konik metrik uzay, K normal sabiti ile P bir normal konik, (x_n), X' de bir dizi olsun. $(x_n) \rightarrow x$ ve $(x_n) \rightarrow y$ ise $x = y$ dir. Yani (x_n) dizisinin limiti tektir [6].

İspat: $\theta \ll c$ olacak şekilde herhangi bir $c \in E$ olsun. (x_n) yakınsak olduğundan $\forall\ n > N$ için $d(x_n, x) \ll c$ ve $d(x_n, y) \ll c$ olacak şekilde $\exists\ N \in IR$ vardır. Bu nedenle

$$d(x, y) \leq d(x_n, x) + d(x_n, y) \leq 2c$$

olur. Böylece $\|d(x, y)\| \leq 2K\|c\| \rightarrow 0$ olur. O halde $d(x, y) = \theta$ olur. Sonuç olarak $x = y$ olur. Bu da (x_n) dizisinin limitinin tek olduğunu gösterir.

Tanım 3.3.3. (X, d) bir konik metrik uzay ve (x_n), X de bir dizi olsun. Eğer $\theta << c$ şeklindeki her $c \in E$ için $n, m > N \Rightarrow d(x_n, x_m) << c$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ varsa (x_n) dizisine X de bir Cauchy dizisi denir [13].

Tanım 3.3.4. Bir (X, d) konik metrik uzayındaki her Cauchy dizisi X de bir noktaya yakınsarsa (X, d) ikilisine tam konik metrik uzay denir.

Sonuç 3.3.5. (X, d) bir konik metrik uzay ve (x_n), X içinde bir dizi olsun. (x_n), X içinde x noktasına yakınsıyorsa (x_n), X de bir Cauchy dizidir. Yani konik metrik uzaylarda yakınsak her dizi bir Cauchy dizisidir [6].

İspat: $\theta << c$ olacak şekilde herhangi bir $c \in E$ alalım. O zaman $\forall$ n, m > N için

$d(x_n, x) << \frac{c}{2}$ ve $d(x_m, x) << \frac{c}{2}$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x)\ k + d(x_m, x) = \frac{c}{2} + \frac{c}{2} = c$$

elde edilir. O halde (x_n) bir Cauchy dizisidir.

Sonuç 3.3.6. (X, d) bir konik metrik uzay, P normal K sabiti ile normal konik ve (x_n), X içinde bir dizi olsun. (x_n) dizisinin X içinde Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter koşul $n, m \to \infty$ iken $d(x_n, x_m) \to \theta$ olmasıdır [6].

İspat: $(\Rightarrow)\{x_n\}$ bir Cauchy dizisi olsun. $\forall\ \varepsilon > 0$ için $\theta << c$ ve $K\|c\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $c \in E$ seçelim. O zaman $\forall$ n, m > N için $d(x_n, x_m) << c$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan, $\|d(x_n, x_m)\| \leq K\|c\| < \varepsilon$ elde edilir. O halde $n, m \to \infty$ iken $d(x_n, x_m) \to \theta$.

$(\Leftarrow)$: $n, m \to \infty \Rightarrow d(x_n, x_m) \to \theta$ olsun. $\theta << c$ olacak şekilde $c \in E$ seçelim. $\|x\| < \delta$ iken Sonuç 3.2.13'ten $c - x \in$ İçP olacak şekilde $\exists\ \delta > 0$ vardır. Buradan da her n, m > N için $d(x_n, x_m) < \delta$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ vardır. Öyle ise, $c - d(x_n, x_m) \in$ İçP dir. Bu ise $d(x_n, x_m) << c$ demektir. Bu nedenle (x_n) bir Cauchy dizisidir.

Sonuç 3.3.7. (X, d) bir konik metrik uzay, K normal sabiti ile P bir normal konik, (x_n) ve (y_n), X içinde iki dizi ve $n \to \infty$ için $x_n \to x$, $y_n \to y$ olsun. Eğer her n için $x_n \leq y_n$ ise $x \leq y$ olur [6].

İspat: $x_n \leq y_n$ olsun. $x_n \leq y_n$ ise $(y_n - x_n) \in P$ olur. $x_n \to x$, $y_n \to y$ olduğundan, $(y_n - x_n) \to (y - x)$ olur. P kapalı olduğundan $(y - x) \in P$ dir. Bu ise $x \leq y$ olduğunu gösterir.

Sonuç 3.3.8. (X, d) bir konik metrik uzay, P normal sabit K ile bir normal konik ve (x_n), X içinde bir dizi olsun. (x_n) ve (y_n), X içinde iki dizi ve $n \to \infty$ iken $x_n \to x$ ve $y_n \to y$ olsun. O zaman $n \to \infty$ iken $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$ olur [6].

İspat: $\forall\ \varepsilon > 0$ için $\theta \ll c$ ve $\|c\| \leq \frac{\varepsilon}{4k+2}$ olacak şekilde bir $c \in E$ seçelim. $x_n \to x$ ve $y_n \to y$ olduğundan $\forall\ n > N$ için $d(x_n, x) \ll c$ ve $d(y_n, x) \ll c$ olacak şekilde $\exists N \in \mathbb{R}$ vardır. Yine

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n) \leq d(x, y) + 2c, \tag{3.1}$$

$$d(x, y) \leq d(x_n, x) + d(x_n, y_n) + d(y, y_n) \leq d(x_n, y_n) + 2c, \tag{3.2}$$

dır. Böylece, 3.1 Eşitliksizliğinden

$\theta \leq d(x, y) + 2c - d(x_n, y_n)$

ve 3.2 Eşitliksizliğinden,

$\theta \leq d(x_n, y_n) + 2c + 2c - d(x_n, y_n) = 4c$

elde edilir. O halde

$\theta \leq d(x, y) + 2c - d(x_n, y_n) \leq 4c$ ve

$$\begin{aligned} \|d(x_n, y_n) - d(x, y)\| &= \|d(x, y) - d(x_n, y_n) + 2c - 2c\| \\ &\leq \|d(x, y) + 2c - d(x_n, y_n)\| + \|2c\| \leq 4K\|c\| + 2\|c\| \\ &= (4K + 2)\|c\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Bu da $n \to \infty$ için $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$ demektir.

Tanım 3.3.9. (X, d) bir konik metrik uzay, $A \subset X$ ve $x_n \to x$ olsun. A'daki (x_n) dizisi için $x \in A$ ise A ya dizisel kapalı denir.

Tanım 3.3.10. (X, d) bir konik metrik uzay olsun ve $A \subset X$ olsun. Eğer $\forall x, y \in A$ için

$d(x, y) \leq c$ ve $\theta << c$ olacak şekilde $\exists\, c \in E$ varsa A ya üstten sınırlı küme denir.Yani

$\delta(A) = \sup\{d(x, y): x, y \in A\}$ varsa A ya sınırlı küme denir. Eğer supremum yoksa A ya sınırsız küme denir.

Sonuç 3.3.11. (X, d) bir konik metrik uzay olsun. Ayrıca her $c_1, c_2 \in E$ için $c_1 >> \theta$ ve $c_2 >> \theta$ şeklinde olsun. O zaman $\theta << c$ ve $c << c_1$, $c << c_2$ şeklinde bir $c \in E$ vardır [8].

İspat: $c_2 >> \theta$ olsun. Sonuç 3.2.13' ten $\|x\| < \delta$ iken $x << c_2$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ bulabiliriz. $\frac{1}{n_0} < \frac{\delta}{\|c_1\|}$ olacak şekilde bir $n_0 \in IR$ sayısı seçelim. $c = \frac{c_1}{n_0}$ olsun. Bu durumda $\|c\| = \left\|\frac{c_1}{n_0}\right\| = \frac{\|c_1\|}{n_0} < \delta$ olur ve $c << c_2$ dir. Fakat aynı zamanda $\theta << c$ ve $c = \frac{c_1}{n_0}$ olduğundan $c << c_1$ ve $c_1 \neq c$ açıktır. Bu ise $c << c_1$ demektir. O halde $c << c_1$ ve $c << c_2$ dir.

4. BÖLÜM

SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Bu bölümde bazı sabit nokta teoremlerini ispatlayacağız.

Teorem 4.1.1. (X, d) bir tam konik metrik uzay ve P normal K sabitiyle birlikte normal bir konik olsun. T:X→X dönüşümü aşağıdaki daraltma şartlarını sağlasın.

$d(Tx,Ty) \leq k\, d(x,y)$, her x, y$\in$ X, k$\in$ [0, 1) bir sabit.

O zaman T, X' de sabit tek bir noktaya sahiptir ve her x$\in$ X için (T^nx) dizisi bu sabit noktaya yakınsar [6].

İspat: $x_0 \in X$ seçelim. (x_n) dizisini

$x_1 = T x_0$

$x_2 = T x_1 = T^2 x_0$

.

.

.

$x_{n+1} = T x_n = T^{n+1} x_0$

$$d(x_{n+1},x_n) = d(Tx_n,Tx_{n-1}) \leq k\, d(x_n,x_{n-1}) \leq k^2\, d(x_{n-1},x_{n-2}) \leq \ldots \leq k^n d(x_1,x_0)$$

elde ederiz. Böylece her n > m için

$$d(x_n,x_m) \leq d(x_n,x_{n-1}) + d(x_{n-1},x_{n-2}) + \ldots\ldots + d(x_{m+1},x_m)$$

$$\leq (k^{n-1} + k^{n-2} + \ldots + k^m) d(x_1,x_0) \leq \frac{k^m}{1-k} d(x_1,x_0)$$

olur. Buradan da

$$\|d(x_n, x_m)\| \leq \frac{k^m}{1-k} K \|d(x_1, x_0)\|$$

elde ederiz. Bu da $d(x_n, x_m) \to 0$ (n,m$\to \infty$) olmasını gerektirir. Yani; (x_n) bir Cauchy dizisidir. X tam olduğundan $x_n \to x^*$ olacak şekilde bir x^* $\in$ X vardır. Buradan

$$d(Tx^*, x^*) \leq d(Tx_n, Tx^*) + d(Tx_n, x^*) \leq kd(x_n, x^*) + d(x_{n+1}, x^*),$$

ve P normal konik olduğundan

$$\|d(Tx^*, x^*)\| \leq K(k\|d(x_n, x^*)\| + \|d(x_{n+1}, x^*)\|) \to 0.$$

olur. Yani $\|d(Tx^*, x^*)\|$ = 0 dır. Bu $Tx^* = x^*$ demektir.Bu da x^* bir sabit noktadır. Şimdi y^*, T' de başka bir sabit nokta olsun. O zaman

$$d(x^*, y^*) = d(Tx^*, Ty^*) \leq kd(x^*, y^*)$$

olur. Buradan $\|d(x^*, y^*\|$ = 0 ve $x^* = y^*$ Sonuç olarak T' nin sabit noktası tektir.

Sonuç 4.1.2. (X, d) bir tam konik metrik uzay, P normal K sabitiyle birlikte normal bir konik olsun. 0<<c olacak şekilde bir $c \in$ E ve $x_0 \in X$ için

$B(x_0, c) = \{ x \in X : d(x_0, x) \leq c \}$ verilsin. T : X $\to$ X dönüşümü aşağıdaki daraltma şartlarını sağlasın. $d(Tx,Ty) \leq$ k $d(x, y)$, her x, y$\in$ $B(x_0, c)$, k$\in$ [0, 1) bir sabit ve $d(Tx_0, x_0) \leq (1-k)c$. O zaman T , $B(x_0, c)$ de tek bir sabit noktaya sahiptir [6].

İspat: $B(x_0, c)$ ' nin tam olduğunu her x $\in$ $B(x_0, c)$ için T x $\in$ $B(x_0, c)$ olduğunu ispatlamak yeterlidir. (x_n), $B(x_0, c)$' de bir Cauchy dizisi olsun. (x_n), X' te de bir Cauchy dizisidir. X tam olduğundan bir x $\in$ X için $x_n \to x$ (n$\to \infty$) olur.

$d(x_0,x) \le d(x_n,x_0) + d(x_n,x) \le d(x_n,x) + c$ $x_n \to x$, (n$\to \infty$) olduğundan $d(x_n,x) \to 0$ dır. Böylece $d(x_0,x) \le c$ ve x $\in B(x_0,c)$. Yani (x_n), $B(x_0,c)$' de yakınsak bir dizidir. Bu da $B(x_0,c)$' nin tam bir konik metrik uzay olduğunu gösterir.

Her x $\in B(x_0,c)$ için

$d(x_0,Tx) \le d(Tx_0,x_0) + d(Tx_0,Tx) \le (1-k)c + kd(x_0,x) \le (1-k)c + kc$ = c.

Bu nedenle $Tx \in B(x_0,c)$ .Bu da $T_{I_{B(x_0,c)}}: B(x_0,c) \to B(x_0,c)$ daraltma dönüşümüdür.

Teorem 4.1.1. dan dolayı T' nin $B(x_0,c)$' de bir tek sabit noktası vardır.

Sonuç 4.1.3. (X,d) bir tam konik metrik uzay, P normal K sabitiyle birlikte normal bir konik olsun. Bir n$\in$ N için T : X → X dönüşümü aşağıdaki daraltma şartlarını sağlasın. $d(T^n x, T^n y) \le kd(x,y)$, her x, y$\in$ X, k$\in$ [0,1) bir sabit. Böylece T, X' de tek bir sabit noktaya sahiptir [6].

İspat: Teorem 3.1' den T^n, x^* tek bir sabit noktasına sahiptir. $T^n(Tx^*) = T(T^n x^*) = Tx^*$, böylece Tx^* de bir sabit nokta olur. Yani, $Tx^* = x^*$, x^* bir sabit noktadır. T'nin sabit

noktası T^n nin de sabit noktası olduğundan T'nin sabit noktası tektir.

Teorem 4.1.4. (X, d) dizisel kompakt konik metrik uzay ve P düzgün konik olsun. T : X → X dönüşümü aşağıdaki daraltma şartlarını sağlasın. Her x, y$\in$ X ve x $\neq$ y için $d(Tx,Ty) \le d(x,y)$. O zaman T' nin X' de tek bir sabit noktası vardır [6] .

İspat: $x_0 \in X$ seçelim.

x_1=T x_0

x_2=T x_1=T^2 x_0

.

.

.

x_{n+1}=T x_n =T $^{n+1}x_0$,

.

.

.

Eğer bazı n' ler için $x_{n+1}=x_n$ olursa x_n T' nin bir sabit noktası olur ve ispat biter.

Bu nedenle her n$\in$ N için $x_{n+1}\neq x_n$ olduğunu kabul edelim.

$d_n=d(x_n,x_{n+1})$ olsun.

O zaman

$d_{n+1}=d(x_{n+1},x_{n+2})=d(Tx_n,Tx_{n+1})<d(x_n,x_{n+1})=d_n$.

Yani her n$\in$ N için $d_{n+1}<d_n$ dır. Böylece (d_n) azalan bir dizidir ve $0\leq d_n$, d_n alttan sınırlıdır ve monoton azalan bir dizidir. P düzgün olduğundan n$\to\infty$, $d_n\to d^*$ olacak şekilde bir $d^*\in$ E vardır. X dizisel kompakt olduğundan (x_n)'in bir (x_{n_i}) alt dizisi vardır. i$\to\infty$, x_{n_i} = x^* diyelim. Her regüler konik aynı zamanda bir normal konik olduğundan $\| d(Tx_{n_i},Tx^*) \|\leq K\| d(x_{n_i},x^*) \|\to 0$ olacak şekilde bir K > 0 sayısı vardır. Sonuç 3.3.8' den; i$\to\infty$,d(x_{n_i} , x^*)$\to$0 olduğundan i$\to\infty$, $d(Tx_{n_i},Tx^*)$=0 olur. Bu da i $\to\infty$, $Tx_{n_i}=Tx^*$ demektir. Benzer şekilde $T^2x_{n_i}\to T^2x^*$, (i$\to\infty$). Sonuç 3.3.8'den dolayı; (i$\to\infty$) , $d(Tx_{n_i},x_{n_i})=d(Tx^*,x^*)$ ve (i$\to\infty$) , $d(T^2x_{n_i},Tx_{n_i})=d(T^2x^*,Tx^*)$ elde edilir. Şimdi $Tx^*=x^*$ olduğunu ispatlayalım. $Tx^*\neq x^*$ olsun. O zaman $d^*\neq 0$ elde ederiz. Böylece $d^* = d(T^2x^*, Tx^*) > d(T^2x^*, Tx^*) = \lim_{i\to\infty} d(T^2x_{n_i}, Tx_{n_i}) = \lim_{i\to\infty} d_{n_{i+1}} = d^*$.

Bu da bize çelişki verdi. Yani $Tx^* = x^*$ olmalıdır. Sonuç olarak x^*, T' nin sabit bir noktasıdır. Sabit noktanın tekliği açıktır.

Teorem 4.1.5. (X,d) bir tam konik metrik uzay, P normal K sabitiyle birlikte normal bir konik olsun. T:X$\rightarrow$X aşağıdaki daraltma şartlarını sağlasın.

$d(Tx, Ty) \leq k(d(Tx, x) + d(Ty, y))$, her x, y$\in$ X, k$\in [0, \frac{1}{2})$ bir sabit. O zaman T, X' de tek bir sabit noktaya sahiptir ve her x$\in$ X için (T^nx) öteleme (iterative) dizisi bu sabit noktaya yakınsar [6].

İspat: $x_0 \in X$ seçelim.

x_1=Tx_0

x_2=Tx_1=T$^2x_0$

.

.

.

x_{n+1}=Tx_n=T$^{n+1}x_0$,

.

.

.

$d(x_{n+1}, x_n) = d(Tx_n, Tx_{n-1}) \leq$ k($d(Tx_n, x_{n-1}) + d(Tx_{n-1}, x_n)$)

$\leq$ k($d(x_{n+1}, x_n) + d(x_n, x_{n-1})$)

olur. Buna göre yukarıdaki ifadeyi düzenlersek,

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \frac{k}{1-k} d(x_n, x_{n-1}) = \text{h}(d(x_n, x_{n-1})) ,$$

h= $\frac{k}{1-k}$ seçelim, n > m için

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + ... + d(x_{m+1}, x_m)$$

$$\leq (h^{n-1} + h^{n-2} + ...h^m) d(x_1, x_0) \leq \frac{h^m}{1-h} d(x_1, x_0)$$

olur. m $\to \infty$, $h^m \to 0$. m, n $\to \infty$, $\|d(x_n, x_m\| \to 0$. Bu da $d(x_n, x_m) \to 0$,(n,m $\to \infty$). Yani (x_n) X' de bir Cauchy dizisidir. X tam konik metrik uzay olduğundan (x_n), X' de yakınsaktır. $x^* \in$ X, $x_n \to x^*$, n $\to \infty$ diyelim.

$$d(Tx^*, x^*) \leq d(Tx_n, Tx^*) + d(Tx_n, x^*)$$

$$\leq k(d(Tx_n, x_n) + d(Tx^*, x^*)) + d(x_{n+1}, x^*),$$

$$d(Tx^*, x^*) \leq \frac{1}{1-k} (kd(Tx_n, x_n) + d(x_{n+1}, x^*)),$$

olduğundan

$$\| \quad d(Tx^*, x^*) \quad \| \leq K \frac{1}{1-k} (\text{k} \| d(x_{n+1}, x_n) \quad \| + \| d(x_{n+1}, x^*) \|) \to 0,$$

yani $\|d(Tx^*, x^*)\| = 0$ dır. Bu da $Tx^* = x^*$ olmasını gerektirir. Sonuç olarak x^*, T' nin bir sabit noktasıdır. Şimdi sabit noktanın tek olduğunu gösterelim. y^*,T' nin başka bir sabit noktası olsun.

$$d(x^*, y^*) = d(Tx^*, Ty^*) \leq k(d(Tx^*, x^*) + d(Ty^*, y^*)) = 0$$

Böylece $x^* = y^*$ elde edilir. Bu da sabit noktanın tek olduğunu gösterir.

Teorem 4.1.6. (X,d) bir tam konik metrik uzay, P normal K sabitiyle birlikte normal bir konik olsun. T : X $\to$X dönüşümü aşağıdaki daraltma şartlarını sağlasın.

$d(Tx,Ty) \leq k(d(Tx,y)+d(Ty,x))$, her x, y$\in$ X ve k$\in$ [0, $\frac{1}{2}$) bir sabit. O zaman T, X' de tek bir sabit noktaya sahiptir ve her x$\in$ X için (T^n x) ötelemeli (iterative) dizisi bu sabit noktaya yakınsar [6].

İspat: $x_0 \in X$ seçelim.

x_1= T x_0

x_2= T x_1 =T^2 x_0

.

.

.

x_{n+1} =T x_n =T^{n+1} x_0 ,

.

.

.

$$d(x_{n+1},x_n)=d(Tx_n,Tx_{n-1})$$

$$\leq k(d(Tx_n,x_{n-1})+d(Tx_{n-1},x_n))$$

$$\leq k(d(x_{n+1},x_n)+d(x_n,x_{n-1}))$$

olur. Buna göre yukarıdaki ifadeyi düzenlersek

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \frac{k}{1-k} d(x_n, x_{n-1}) = \text{h}\, d(x_n, x_{n-1}) \quad , \quad (\text{h} = \frac{k}{1-k})$$

n > m için

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + ... + d(x_{m+1}, x_m)$$

$$\leq (h^{n-1} + h^{n-2} + ...h^m) d(x_1, x_0) \leq \frac{h^m}{1-h} d(x_1, x_0) \text{ olur.}$$

m$\rightarrow \infty$, $h^m \rightarrow 0$ m, n$\rightarrow \infty$, $\|d(x_n, x_m\| \rightarrow 0$. Bu da $d(x_n, x_m) \rightarrow 0$,(n,m$\rightarrow \infty$).

Yani (x_n) X' de bir Cauchy dizisidir. X tam konik metrik uzay olduğundan (x_n) X' de yakınsaktır. $x^* \in$ X , $x_n \rightarrow x^*$, n$\rightarrow \infty$ diyelim.

$$d(Tx^*, x^*) \leq d(Tx_n, Tx^*) + d(Tx_n, x^*)$$

$$\leq k(d(Tx^*, x_n) + d(Tx_n \ , x^*)) + d(x_{n+1}, x^*)$$

$$\leq \text{k}(d(Tx^*, x^*) + d(x_n, x^*) + d(x_{n+1}, x^*)) + d(x_{n+1}, x^*).$$

$$d(Tx^*, x^*) \leq \frac{1}{1-k} (k(d(x_n, x^*) + d(x_{n+1}, x^*)) + d(x_{n+1}, x^*))$$

olduğundan

$$\| \ d(Tx^*, x^*) \ \| \leq K \frac{1}{1-k} (\text{k}(\|d(x_n, x^*) \ \| + \|d(x_{n+1}, x^*)\|) + \|d(x_{n+1}, x^*)\|) \rightarrow 0$$

Yani $\|d(Tx^*, x^*)\| = 0$. Bu da $Tx^* = x^*$ olmasını gerektirir. Sonuç olarak x^*, T' nin bir sabit noktasıdır. Şimdi sabit noktanın tek olduğunu gösterelim. y^*, T' nin başka bir sabit noktası olsun.

$$d(x^*, y^*) = d(Tx^*, Ty^*) \leq k(d(Tx^*, y^*) + d(Ty^*, x^*)) = 2kd(x^*, y^*)$$

olduğundan $d(x^*, y^*) = 0$ ve buradan da $x^* = y^*$ elde edilir. Bu da sabit noktanın tek olduğunu gösterir.

Teorem 4.1.7. (X,d) bir tam konik metrik uzay, P normal K sabitiyle birlikte normal bir konik olsun. f, g : X $\rightarrow$X dönüşümleri ve $\forall$ x, y$\in$ X ve k$\in$ (0,1) için aşağıdaki daraltma şartlarını sağlasın.

$$d(fx, fy) \leq k(d(fx, gy) + d(fy, gx), \tag{4.1}$$

Eğer g'nin değer kümesi f'nin değer kümesini kapsıyorsa ve g(X), X'in bir tam altuzayı ise f ve g çakışık bir noktaya sahiptirler ve böylece f ve g X'de tek ortak sabit bir noktaya sahiptirler [14].

İspat: Keyfi $x_0 \in X$ için öyle bir $x_1 \in X$ seçelim ki y_0= f(x_0) = g(x_1) olsun. f(X)⊆g(X) olduğundan y_1= f(x_1) = g(x_2) olacak şekilde bir $x_2 \in X$ seçebiliriz. Bu şekilde devam ederek $\forall$n $\in \mathbb{N}$ için $x_n \in X$ ve $x_{n+1} \in X$' i $y_n = f(x_n) = g(x_{n+1})$ şeklinde seçebiliriz. Böylece

$$d(y_n, y_{n-1}) = d(fx_n, fx_{n-1}) \leq k(d(fx_n, gx_{n-1}) + d(fx_{n-1}, gx_n))$$

elde edilir. (3.1) den

$$\leq k(d(gx_{n+1}, gx_n) + d(gx_n, gx_{n-1})) \tag{4.2}$$

$$\leq k\big(d(y_n, y_{n-1}) + d(y_{n-1}, y_{n-2})\big) \quad n = 2,3, \ldots.$$

$$d(y_n, y_{n-1}) - k(d(y_n, y_{n-1}) \leq d(y_{n-1}, y_{n-2}) \quad n = 2,3, \ldots.$$

$$d(y_n, y_{n-1}) \leq \frac{1}{1-k} d(y_{n-1}, y_{n-2}) \leq hd(y_{n-1}, y_{n-2}) \qquad h = \frac{1}{1-k}$$

$$d(y_n, y_{n-1}) \leq kd(y_{n-1}, y_{n-2}) \leq \ldots. \leq k^{n-1} d(y_1, y_0) \qquad \text{((4.2)den dolayı)}$$

Şimdi (y_n) dizisinin Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. n>m için üçgen eşitsizliğinden

$$d(y_n, y_m) \leq d(y_n, y_{n-1}) + d(y_{n-1}, y_{n-2}) + \ldots\ldots + d(y_{m+1}, y_{m+2})$$

elde edilir. P normal koni olduğundan

$$d(y_n, y_{n-1}) \leq kd(y_{n-1}, y_{n-2}) \leq .... \leq k^{n-1}d(y_1, y_0)$$

$$\| \; d(y_n, y_m) \; \| \leq L(\| \; d(y_n, y_{n-1}) + d(y_{n-1}, y_{n-2}) + ... + d(y_{m+1}, y_{m+2}) \; \|)$$

$$\leq L\| \; (d(p, gp) \; \| + 0$$

$\Rightarrow \|d(p, \mathrm{g}p)\| = 0$ elde edilir. Bu da $p = \mathrm{g}p$ demektir. Şimdi (4.1)den dolayı

$d(\mathrm{f}, p) = d(\mathrm{f}p, \mathrm{g}p) \leq k(\mathrm{f}(\mathrm{f}p, \mathrm{g}p) + d(\mathrm{f}p, \mathrm{g}p))$ elde ederiz.

≤ 0 (çünkü $\mathrm{f}p = \mathrm{g}p$)

$\Rightarrow \|d(\mathrm{fp}, \mathrm{p})\| = 0$

Bu da $\mathrm{f}p = \mathrm{g}p$ demektir. $\mathrm{f}p = \mathrm{g}p$ olduğundan $\mathrm{f}p = \mathrm{g}p = p$. Böylece f ve g'nin ortak bir sabit noktası vardır. Bu ortak noktanın tekliğini ispatlayalım. p_1 başka bir ortak sabit nokta olsun. $d(p, p_1) = \mathrm{d}(\mathrm{f}p, \mathrm{g}p_1)$

$= \mathrm{d}(\mathrm{f}p, \mathrm{f}p_1)$

$\leq k(d(\mathrm{f}p, \mathrm{g}p_1) + d(\mathrm{f}p_1, \mathrm{g}p)$ (4.1)den

$\leq k(d(p, p_1) + d(p_1, p))$

$\leq 2k.\, d(p_1, p)$

Yani $d(p, p_1) = 0$ bu da $p = p_1$ demektir. Sonuç olarak f ve g tek bir ortak sabit noktaya sahiptirler.

Teorem 4.1.8. (X,d), P düzgün koniğiyle birlikte bir tam konik metrik uzay ve x, y$\in$X, x $\neq$ y ve d(x, y) $\in$ içP olsun. Φ : içP $\cup$ $\{0\}$$\rightarrow$ içP $\cup$ $\{0\}$ sürekli, monoton artan bir fonksiyon ve Φ aşağıdaki şartları sağlasın:

(i) Φ(t)=0 ancak ve ancak t=0;

(ii) $\Phi(t) \ll t$, $t \in$ içP için

(iii) Ya $\Phi(t) \leq d(x,y)$ ya da $d(x,y) \leq \Phi(t)$, $t \in$ içP $\cup \{0\}$ ve x, y$\in$X için.

$T : X \rightarrow X$

$$d(Tx,Ty) \leq d(x,y) - \Phi(d(x,y)) \qquad x,y \in X \text{ için} \tag{4.3}$$

eşitsizliğini sağlayan bir dönüşüm olsun. O halde T' nin X' de tek sabit noktası vardır [15].

İspat: $x_0 \in$ X olsun. $x_n = Tx_{n-1}$, $n \geq 1$ olacak şekilde (x_n) dizisi oluşturalım. Eğer bazı n'ler için $x_{n+1} = x_n$ ise T' nin X de sabit bir noktası olduğu açıktır.

Eğer $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} \neq x_n$ olursa

$$d(x_n, x_{n+1}) = (Tx_{n-1}, Tx_n)$$

$$\leq d(x_{n-1}, x_n) - \Phi(d(x_{n-1}, x_n))$$

elde edilir. Φ'nin özelliğinden dolayı $\forall t \in$ içP$\cup\{0\}$ için $0 \leq \Phi(t)$ olur. Böylece

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq d(x_{n-1}, x_n)$$

olur. Bu da $(d(x_n, x_{n+1}))$ dizisinin monoton azalan olduğunu gösterir. P koniği düzgün ve $n \in \mathbb{N}$ için $0 \leq d(x_n, x_{n+1})$ olduğundan $d(x_n, x_{n+1}) \rightarrow r, n \rightarrow \infty$, olacak şekilde bir $r \geq 0$ vardır. Φ sürekli ve

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq d(x_{n-1}, x_n) - \Phi(d(x_{n-1}, x_n))$$

$n \rightarrow \infty$ olursa

$$r \leq r - \phi(r)$$

elde edilir. Bu da ($r = 0$ dışında) bir çelişkidir. Yani $d(x_n, x_{n+1}) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ dir.

Şimdi keyfi bir $0 \ll c$, $c \in E$ alalm. $d(x_n, x_{n+1}) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ olduğundan

$$d(x_m, x_{m+1}) << \Phi(\phi(c/2))$$

olacak şekilde bir $m \in \mathbb{N}$ vardır.B(x_m, c)={$x \in X$: d$(x_m, x) << c$} olsun. $x_m \in$ B(x_m, c) olduğundan B(x_m, c) boş kümeden farklı olduğu açıktır. Şimdi $x \in$ B(x_m, c) için $Tx \in$B(x_m, c) olduğunu gösterelim. $x \in$ B(x_m, c) olsun. Φ'nin (iii) özelliğinden dolayı aşağıdaki iki durum oluşabilir.

Durum (i): d$(x, x_m) \leq \phi(c/2)$ ve

Durum (ii): $\phi(c/2) <$ d$(x, x_m) << c$.

Böylece

Durum (i) :

$$\begin{aligned} d(Tx, x_m) &\leq d(Tx, Tx_m) + d(Tx_m, x_m) \\ &\leq d(x, x_m) - \Phi(d(x, x_m)) + d(x_m, x_{m+1}) \\ &\leq d(x, x_m) - \Phi(d(x, x_m)) + d(x_{m+1}, x_m) \\ &\leq d(x, x_m) + d(x_{m+1}, x_m) \\ &\leq \phi(c/2) + \phi(c/2) \\ &= c \end{aligned}$$

Durum (ii) :

$$\begin{aligned} d(Tx, x_m) &\leq d(Tx, Tx_m) + d(x_m, Tx_m) \\ &\leq d(x, x_m) - \Phi(d(x, x_m)) + d(x_m, x_{m+1}) \\ &\leq d(x, x_m) - \Phi(d(x, x_m)) + d(x_{m+1}, x_m) \\ &\leq d(x, x_m) - \phi(\phi(c/2)) + \phi(\phi(c/2)) \end{aligned}$$

$\leq \mathrm{d}(x, x_m)$

$<<$ c.

Bu nedenle T, $(\mathrm{f}x_m, c)$ den $(\mathrm{f}x_m, c)'$ ye bir dönüşümüdür. $x_m \in$ B(x_m, c) ve $x_n = Tx_{n-1}$, $n \geq 1$ olduğundan her $n \geq m$ için $x_n \in$ B(x_m, c) dir. Burada yine c keyfi keyfi bir sayıdır. Bu da (x_n) dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. X tam olduğundan bazı $x \in$ X için $x_n \rightarrow x$ dir. Şimdi

$$\mathrm{d}(x_n, Tx) = \mathrm{d}(\mathrm{T}x_{n-1}, \mathrm{T}x)$$

$$\leq \mathrm{d}(x_{n-1}, x) - \Phi(\mathrm{d}(x_{n-1}, x)$$

elde edilir. Eğer $n \rightarrow \infty$ olursa $\mathrm{d}(x, Tx) \leq 0$ olur. Böylece $\mathrm{d}(x, Tx) = 0$ elde ederiz. Bu da $x = \mathrm{T}x$ demektir. Sonuç olarak x noktası T'nin bir sabit noktası oldu. Şimdi T' nin çakışık noktasının tek olduğunu gösterelim. Diyelim ki $y \neq x$ olmak üzere $y \in$ X, T'nin başka bir çakışık nokta olsun. O zaman

$$\mathrm{d}(x, y) = \mathrm{d}(Tx, Ty)$$

$$\leq \mathrm{d}(x, y)) - \Phi(\mathrm{d}(x, y))$$

Bu nedenle $\Phi(\mathrm{d}(x, y)) \leq 0$ olur. Bu da Φ'nin özelliğiyle çelişki oluşturdu. Sonuç olarak T'nin X'de bir tek sabit noktası vardır.

Örnek 4.1.9. $X = [0,1]$, $E = \mathbb{R}\, x\, \mathbb{R}$ mutlak değerli reel Banach uzayı ve $P = \{ (x, y) \in E : x, y \geq 0 \}$ düzgün konik olsun. E'de P koniğine bağlı olarak kısmi sıralama bağıntısını $'' \leq ''$ alalım. $d : X\, x\, X \rightarrow E$ ve $x, y \in X$ için

$$d(x, y) = (|x - y|, |x - y|)$$

şeklinde tanımlayalım. Yani$x, y \in X$ ve $x \neq y$ için $\mathrm{d}(x, y) \in$ içP olmak üzere (X, d) bir tam konik metrik uzaydır. Şimdi

Φ : içP ∪ $\{0\} \rightarrow$ içP ∪ $\{0\}$ dönüşümünü şöyle tanımlayalım:

$$\Phi(t) = (\frac{t_1^2}{2}, \frac{t_1^2}{2}),\ t = (t_1, t_2) \in içP \cup \{0\}\ ve\ t_1 \leq t_2$$

Φ' nin istenen bütün özelliklere sahip olduğu açıktır. Şimdi T : X→X dönüşümünü şöyle tanımlayalım:

$$Tx = x - \frac{x^2}{2},\ \ x \in X$$

Genelliği kaybetmeden $x, y \in X, x > y$ alalım. Şimdi aşağıdaki verilenleri göz önüne alırsak

$$\begin{aligned} d(Tx, Ty) &= d\left(x - \frac{x^2}{2}, y - \frac{y^2}{2}\right) \\ &= \left((x-y) - \frac{(x-y)(x+y)}{2}, (x-y) - \frac{(x-y)(x+y)}{2}\right) \\ &\leq (x-y, x-y) - \left(\frac{(x-y)^2}{2}, \frac{(x-y)^2}{2}\right) \\ &\leq d(x,y) - \Phi(d(x,y)). \end{aligned}$$

Böylece 0 ∈ X noktası T' nin tek ortak sabit noktası olur [15].

Tanım 4.1.10. (X, d) bir metrik uzay ve f : X → X olsun. Φ : [0,∞)→ [0,∞) sürekli ve azalmayan bir fonksiyon ve Φ(t)=0 ancak ve ancak t=0 olmak üzere eğer x, y∈X için

d(Tx,Ty) ≤ d(fx,fy)–Φ(d(fx,fy))

eşitsizliği sağlanıyorsa T : X → X dönüşümüne f–zayıf daraltma dönüşümü denir [2].

Teorem 4.1.11. (X,d) P düzgün koniğiyle birlikte bir konik metrik uzay ve x,y∈X, x ≠ y ve d(x,y) ∈ içP olsun. Φ : içP ∪ {0}→ içP ∪ {0} sürekli, monoton artan bir fonksiyon ve Φ aşağıdaki şartları sağlasın:

(i) Φ(t)=0 ancak ve ancak t=0;

(ii) Φ(t)<<t, t∈içP için

(iii) Ya $\Phi(t) \leq d(fx,fy)$ ya da $d(fx,fy) \leq \Phi(t)$, $t \in$ iç$P \cup \{0\}$ ve $x, y \in X$ olmak üzere $f : X \to X$ ve $T : X \to X$

$$d(Tx,Ty) \leq d(fx,fy) - \Phi(d(fx,fy)) \tag{4.4}$$

$x, y \in X$ için eşitsizliğini sağlayan bir dönüşüm olsun. Eğer $TX \subseteq fX$ ve fX, X'in bir tam altuzayı ise f ve T'nin X'de bir tek çakışık noktası vardır. Üstelik, z çakışık noktasında $ffz=fz$ ise f ve T'nin X'de ortak bir sabit noktası vardır [2].

İspat: $x_0 \in X$ olsun. $TX \subseteq fX$ olduğundan $fx_n = Tx_{n-1}$, olacak şekilde (fx_n) dizisi oluşturalım. Eğer bazı n'ler için $fx_{n+1} = fx_n$ ise f ve T' nin X de sabit bir noktası olduğu açıktır. Eğer $n \in \mathbb{N}$ için $fx_{n+1} \neq fx_n$ olursa

$$\begin{aligned} d(fx_n, fx_{n+1}) &= (Tx_{n-1}, Tx_n) \\ &\leq d(fx_{n-1}, fx_n) - \Phi(d(fx_{n-1}, fx_n)) \end{aligned}$$

elde edilir. Φ'nin özelliğinden dolayı $\forall t \in$ iç$P \cup \{0\}$ için $0 \leq \Phi(t)$ olur. Böylece

$$d(fx_n, fx_{n+1}) \leq d(fx_{n-1}, fx_n)$$

olur. Bu da $(d(fx_n, fx_{n+1}))$ dizisinin monoton azalan olduğunu gösterir. P koniği düzgün ve $n \in \mathbb{N}$ için $0 \leq d(fx_n, fx_{n+1})$ olduğundan $d(fx_n, fx_{n+1}) \to r, n \to \infty$ olacak şekilde bir $r \geq 0$ vardır. Φ sürekli ve

$$d(fx_n, fx_{n+1}) \leq d(fx_{n-1}, fx_n) - \Phi(d(fx_{n-1}, fx_n))$$

$n \to \infty$ olursa

$$r \leq r - \Phi(r)$$

elde edilir. Bu da ($r = 0$ dışında) bir çelişkidir. Yani $d(fx_n, fx_{n+1}) \to 0, n \to \infty$ dir.

Şimdi keyfi bir $0 \ll c$, $c \in E$ alalm. $d(fx_n, fx_{n+1}) \to 0, n \to \infty$ olduğundan

$$d(fx_m, fx_{m+1}) \ll \Phi(\Phi(c/2))$$

olacak şekilde bir $m \in \mathbb{N}$ vardır. B(fx_m, c) ={f $x \in X$: d(fx_m, fx) $<< c$} olsun. f$x_m \in$ B(fx_m, c) olduğundan B(fx_m, c) boş kümeden farklı olduğu açıktır. Şimdi f$x \in$ B(fx_m, c) için $Tx \in$ B(fx_m, c) olduğunu gösterelim. $x \in$ B(fx_m, c) olsun. Φ'nin (iii) özelliğinden dolayı aşağıdaki iki durum oluşabilir.

Durum (i): d(fx, fx_m) $\leq$ Φ(c⁄2) ve

Durum (ii): Φ(c⁄2) < d(fx, fx_m) << c. Böylece

Durum (i) :

$$
\begin{aligned}
d(Tx, fx_m) &\leq d(Tx, Tx_m) + d(Tx_m, fx_m) \\
&\leq d(fx, fx_m) - \Phi(d(fx, fx_m)) + d(Tx_m, fx_m) \\
&\leq d(fx, fx_m) - \Phi(d(fx, fx_m)) + d(fx_{m+1}, fx_m) \\
&\leq d(fx, fx_m) + d(fx_{m+1}, fx_m) \\
&\leq \Phi(c/2) + \Phi(c/2) \\
&= c
\end{aligned}
$$

Durum (ii) :

$$
\begin{aligned}
d(Tx, fx_m) &\leq d(Tx, Tx_m) + d(Tx_m, fx_m) \\
&\leq d(fx, fx_m) - \Phi(d(fx, fx_m)) + d(Tx_m, fx_m) \\
&\leq d(fx, fx_m) - \Phi(d(fx, fx_m)) + d(fx_{m+1}, fx_m) \\
&\leq d(fx, fx_m) - \Phi(\Phi(c/2)) + \Phi(\Phi(c/2)) \\
&\leq d(fx, fx_m \\
&<< c.
\end{aligned}
$$

Bu nedenle T , $(\mathrm{f}x_m, c)$ den $(\mathrm{f}x_m, c)'$ ye $\mathrm{f}x_m \in$ B bir dönüşümdür. $\mathrm{f}x_n = Tx_{n-1}$, $n \geq 0$ olduğundan her $n \geq m$ için $\mathrm{f}x_n \in B(\mathrm{f}x_m, c)$ dir. Burada yine c keyfi keyfi bir sayıdır. Bu da $(\mathrm{f}x_n)$ dizisinin fX'de bir Cauchy dizisini oluşturur. fX tam olduğundan bazı $x \in$ X için $\mathrm{f}x_n \to \mathrm{f}x$ dir. Şimdi,

$$d(\mathrm{f}x_n, Tx) = d(\mathrm{T}x_{n-1}, \mathrm{T}x)$$

$$\leq d(\mathrm{f}x_{n-1}, \mathrm{f}x) - \Phi(d(\mathrm{f}x_{n-1}, \mathrm{f}x_n))$$

göz önüne alalım. Eğer $n \to \infty$ olursa $d(\mathrm{f}x, Tx) \leq 0$ olur. Böylece $d(\mathrm{f}x, Tx) = 0$ elde ederiz. Bu da $\mathrm{f}x = \mathrm{T}x$ demektir. Sonuç olarak x noktası f ve T'nin çakışık noktası oldu. Şimdi f ve T'nin çakışık noktasının tek olduğunu gösterelim. Diyelim ki $y \neq x$ olmak üzere $y \in$ X, f ve T'nin başka bir çakışık nokta olsun. O zaman

$$d(\mathrm{f}x, \mathrm{f}y) = d(Tx, Ty)$$

$$\leq d(\mathrm{f}x, \mathrm{f}y)) - \Phi(d(\mathrm{f}x, \mathrm{f}y)).$$

Bu nedenle $\Phi(d(\mathrm{f}x, \mathrm{f}y)) \leq 0$ olur. Bu da Φ'nin özelliğiyle çelişki oluşturdu. Sonuç olarak f ve T'nin X'de bir tek çakışık noktası vardır. Şimdi de bu çakışık noktanın ortak sabit nokta olduğunu gösterelim. z; f ve T'nin çakışık noktası olsun. $\mathrm{ff}z = \mathrm{f}z$ olduğundan ve z; f ve T'nin çakışık noktası olduğundan $\mathrm{ff}z = \mathrm{f}z = Tz$ olur.(4.4) eşitsizliğinden

$$d(\mathrm{Tf}z, \mathrm{T}z) \leq d(\mathrm{ff}z, \mathrm{f}z) - \Phi(d(\mathrm{ff}z, \mathrm{f}z))$$

$$= 0 - \Phi(0)$$

$$= 0$$

Bu nedenle $\mathrm{Tf}z = \mathrm{T}z$ ve bu da $\mathrm{f}z = \mathrm{ff}z = T\mathrm{f}z$ elde edilir. Sonuç olarak f z; f ve T'nin ortak sabit noktasıdır.

Eğer Teorem 4.1.11' deki f : X $\to$ X dönüşümü birim dönüşüm olsaydı o zaman Teorem 4.1.11, Teorem 4.1.8' e dönüşürdü.

Sonuç 4.1.12. (X,d),P düzgün koniğiyle birlikte bir tam konik metrik uzay ve x, y∈X, x ≠ y ve d(x,y) ∈ içP olsun. Φ : içP ∪ {0}→ içP ∪ {0} sürekli, monoton artan bir fonksiyon ve Φ aşağıdaki şartları sağlasın:

(i) Φ(t)=0 ancak ve ancak t=0;
(ii) Φ(t)<<t, t∈içP için

(iii) Ya Φ(t)≤ d(x, y) ya da d(x, y) ≤ Φ(t), t∈içP ∪ {0} ve x, y∈X olmak üzere

T : X → X

d(Tx, Ty) ≤ d(x,y)–Φ(d(x, y))

x, y∈X için eşitsizliğini sağlayan bir dönüşüm olsun. O zaman T' nin X'de bir tek sabit noktası vardır [2].

Örnek 4.1.13. $X = [0,1]$, $E = \mathbb{R}^2$ mutlak değerli reel Banach uzayı ve

$P = \{ (x,y) \in E : x, y \geq 0 \}$ düzgün konik olsun. E'de P koniğine bağlı olarak kısmi sıralama bağıntısını $" \leq "$ alalım. $d : X\, x\, X \to E$ ve $x, y \in X$ için $d(x,y) = (|x-y|, |x-y|)$ şeklinde tanımlayalım. O halde $x, y \in X$ ve $x \neq y$ için d(x,y)∈içP olmak üzere (X, d) bir tam konik metrik uzaydır. Şimdi

Φ : içP ∪ {0}→ içP ∪ {0} dönüşümünü şöyle tanımlayalım:

$$\Phi(t) = \begin{cases} (t_1^2, t_1^2),\ t = (t_1, t_2) \in i\c{c}P \cup \{0\}\ ve\ t_1 \leq t_2\,; \\ (t_2^2, t_2^2),\ t = (t_1, t_2) \in i\c{c}P \cup \{0\}\ ve\ t_1 > t_2\,. \end{cases}$$

Φ' nin istenen bütün özelliklere sahip olduğu açıktır. Şimdi f : X → X ve T : X→X dönüşümlerini de şöyle tanımlayalım:

$$\text{f}x = \frac{x}{2} \ \text{ ve } \ Tx = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2}, \ \ x \in X$$

Genelliği kaybetmeden $x, y \in X, x > y$ alalım. Şimdi aşağıdaki verilenleri göz önüne alırsak

$$d(Tx, Ty) = d\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4}, \frac{y}{2} - \frac{y^2}{4}\right)$$

$$= \left(\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4}\right) - \left(\frac{y}{2} - \frac{y^2}{4}\right), \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4}\right) - \left(\frac{y}{2} - \frac{y^2}{4}\right)\right)$$

$$= \left(\frac{x-y}{2} - \frac{x^2-y^2}{4}, \frac{x-y}{2} - \frac{x^2-y^2}{4}\right)$$

$$= \left(\frac{x-y}{2} - \frac{(x-y)(x+y)}{4}, \frac{x-y}{2} - \frac{(x-y)(x+y)}{4}\right)$$

$$\leq \left(\frac{x-y}{2} - \frac{(x-y)(x-y)}{4}, \frac{x-y}{2} - \frac{(x-y)(x-y)}{4}\right)$$

$$= \left(\frac{x-y}{2}, \frac{x-y}{2}\right) - \left(\frac{(x-y)(x-y)}{4}, \frac{(x-y)(x-y)}{4}\right)$$

$$= d(fx, fy) - \Phi(d(fx, fy)).$$

Sonuç olarak $0 \in X$ noktası f ve T' nin tek ortak sabit noktası olur [2].

5. BÖLÜM

TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER

2007 yılında Çinli matematikçiler Huang ve Zhang konik metrik uzayları tanımladılar ve böylece bazı sabit nokta teoremlerinin ispatlarını ve uygulamalarını çok daha kolay bir şekilde oluşturdular. Konik metrik uzaylar, metrik uzaylardaki bazı kavramları, tanım ve teoremleri daha da genelleyerek geniş bir çalışma alanı oluşturmuştur.

Kısa zamanda konik metrik uzaylar matematik camiasında merak uyandıran bir alan haline gelmiştir. Günümüzde bu alan halen geliştirilmeye uygun bir alan olduğu düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

[1] Dshalalow, J. and H., Real Analysis, S. 1– 50, *Chapman and Hall/CRC*, Boca Raton, 2000.

[2] Sintunavarat, W. and Kumam, P."Common fixed points of f– weak contractions in cone metric spaces ", *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*,2:293–303, 2012

[3] Bayraktar M., Fonksiyonel Analiz, Gazi Kitabevi, Ankara, 2006.

[4] Soykan, Y., Normlu Uzaylar, Fonksiyonel Analiz, Zonguldak Karaelmas Üniversitesi, Ankara, 2008

[5] Karayılan, H., "w– uzaklık fonksiyonu ve sabit nokta teoremleri ", *Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, *Doktora Tezi*, s.3–20, Edirne, 2000.

[6] Huang, L. G. and Zhang, X., "Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings", *J. Math. Anal. Appl.*, 332:1468–1476, 2007.

[7] Abuloha, M., "Konik metrik uzaylar ve bazı sabit nokta teoremleri " *,Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, *Doktora Tezi*, s.18, Ankara, 2009.Ricardo, H. J., 2009. A Modern Introduction to Differential Equations. Academic Press, Canada, 535 pp.

[8] Bilgili, N., "Konik metrik uzaylarda büzülme dönüşümü prensibi ve sabit nokta teoremleri ", *Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, *Yüksek Lisans Tezi*, s. 25, Ankara, 2009.

[9] Assadi, M.and Soleimani, H., "Examples in Cone Metric Spaces", arXiv:1102.4675v1, 2011.

[10] Ilic, D. and Rakocevic, V., "Quasi–contraction on a cone metric space '', *Appl. Math. Lett*., 2: 728–731, 2009.

[11] Jungck, G. and friends, "Common fixed point theorems for weakly compatible pairs on cone metric spaces'', *Theory appl.*, ID 643840, 2009.

[12] Jankovic, S . and Kadelburg, Z. "On cone metric spaces: A survey'', *Nonlinear Analysis*,75:2591–2601, 2011.

[13] Abbas, M., "Fixed and periodic point results in cone metric spaces'' , *Appl. Math. Lett*., 511–515, 2008.

[14] Prudhvi,K., "Common fixed points in cone metric spaces ", *American Journal of Mathematical Analysis*,2:25–27, 2013.

[15] Choudhury, B.,S. and Metiya, N.,’’Fixed points of weak contractions in cone metric spaces’’, *Nonlinear Analysis*, 72 (3–4), 1589–1593, 2010.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı, Soyadı	: Abdulkadir KURAG
Uyruğu	: Türkiye (TC)
Doğum Tarihi ve Yeri	: 4 Nisan 1982, Şanlurfa
Medeni Durumu	: Evli
E-mail	: matakadir@yahoo.com

EĞİTİM

Derece	**Kurum**	**Mezuniyet Tarihi**
Lisans	Hacettepe Ü. Fen Fakültesi	2006
Lise	Toros Gübre Lisesi, Ceyhan/ Adana	2000

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görev**
2006-2008	Dersane	Uzman Öğretici
2008- Halen	MEB	Öğretmen

YABANCI DİL

İngilizce