T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HERMITE-HADAMARD TİPLİ EŞİTSİZLİKLER VE GENELLEŞTİRMELERİ

Tezi Hazırlayan
Tuba BOZKURT

Tez Danışmanı
Prof. Dr. Necdet BATIR

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Nisan 2017
NEVŞEHİR

T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HERMITE-HADAMARD TİPLİ EŞİTSİZLİKLER VE GENELLEŞTİRMELERİ

Tezi Hazırlayan
Tuba BOZKURT

Tez Danışmanı
Prof. Dr. Necdet BATIR

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Nisan 2017
NEVŞEHİR

Prof. Dr. Necdet BATIR danışmanlığında **Tuba Bozkurt** tarafından hazırlanan **"Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler ve Genelleştirmeleri"** başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

07.04.2017

JÜRİ

Başkan : Prof. Dr. Hüseyin YILDIRIM

Üye : Prof. Dr. Necdet BATIR

Üye : Doç. Dr. Sezer SORGUN

ONAY:

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun.19/04/2017...tarih ve...18/129...
sayılı kararı ile onaylanmıştır.

19/04/2017

Prof. Dr. Şahlan ÖZTÜRK
Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİM SAYFASI

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Tuba BOZKURT

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanma sürecinde bana yardımcı olan danışman hocam Prof. Dr. Necdet BATIR'a ve maddi manevi her türlü desteğini esirgemeyen sevgili eşim ve aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım. 10/04/2017

Tuba BOZKURT

HERMITE-HADAMARD TİPLİ EŞİTSİZLİKLER VE GENELLEŞTİRMELERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Tuba BOZKURT

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Nisan 2017

ÖZET

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, giriş kısmına ayrılarak genel bir literatür bilgisi verilmiştir. İkinci bölümde, gerekli temel kavramlardan ve Hermite-Hadamard Eşitsizliği ile ilgili kestirimler ve genelleştirmelerden bahsedilmiştir. Üçüncü bölüm; quasi-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafı üzerine bazı yaklaşımlar, s-konveks fonksiyonlar ve birinci türevinin mutlak değeri s-konveks olan fonksiyon için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sol tarafı üzerine bazı yaklaşımlar içermektedir. Ayrıca bu eşitsizliklerle ilişkili lemmalar ve bu lemmalara bağlı olarak elde edilen eşitsizlikler bulunmaktadır. Son bölüm ise, üçüncü bölümde verilen genelleştirmeler için trapezoidal formda uygulamalar ve özel ortalamalar ile ilgili uygulamalardan oluşmaktadır.

Anahtar sözcükler: *Hermite-Hadamard Eşitsizliği, quasi-konveks fonksiyon, s-konveks fonksiyon, trapezoidal form*
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Necdet BATIR
Sayfa Adeti: 73

THE HERMITE-HADAMARD TYPE INEQUALITY AND GENERALIZATION
(Master of Science Thesis)

Tuba BOZKURT

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE, DEPARTMENT OF MATHEMATICS

APRIL 2017

ABSTRACT

This thesis consists of four chapters. The first chapter is devoted to the introduction section and provide a general knowledge of literature. In the second chapter, we have given about the basic concepts needed, refinement and generalization of Hermite-Hadamard type inequalities. In the third chapter, we have given some estimates of the right hand side of a Hermite-Hadamard type inequalities in which some quasi-convex functions are involved and several inequalities of the left hand side of a Hermite-Hadamard type inequalities are obtained for s-convex function and functions whose first derivatives absolute values are s-convex. This section also involves lemmas related to these inequalities and inequalities obtained through these lemmas. The last chapter, some error estimates for the Trapezoidal Formula are given and also applications to some special means are given for the generalizations which is in the third chapter.

Key Words: *Hermite-Hadamard inequality, quasi-convex, s-convex, trapezoidal form*
Thesis Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Necdet BATIR
Page Number: 73

İÇİNDEKİLER

KABUL ONAY SAYFASI....i

TEZ BİLDİRİM SAYFASI....ii

TEŞEKKÜR SAYFASI....iii

ÖZET....iv

ABSTRACT....v

İÇİNDEKİLER....vi

SİMGELER....vii

1. GİRİŞ....1

2. KURAMSAL KAVRAMLAR....4

2.1. TEMEL KAVRAMLAR....4

2.2. HERMITE-HADAMARD TİPLİ EŞİTSİZLİKLER İLE İLGİLİ KESTİRİMLER VE GENELLEŞTİRMELERİ....14

3. FARKLI KONVEKSLİK TÜRLERİ İÇİN HERMITE-HADAMARD TİPLİ EŞİTSİZLİKLER....29

3.1. QUASİ-KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN KESTİRİMLER VE GENELLEŞTİRMELERİ....29

3.2. S-KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN KESTİRİMLER VE GENELLEŞTİRMELERİ....38

4. UYGULAMALAR....61

4.1. TRAPEZOİDAL FORMDA UYGULAMALAR....61

4.2. ÖZEL ORTALAMALAR İÇİN UYGULAMALAR....66

5. KAYNAKLAR....69

ÖZGEÇMİŞ....73

SİMGELER

$\mathbb{N}$	: Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$	: n-boyutlu Öklit Uzayı
$\mathbb{R}^{+}$	: Pozitif Reel Sayılar Kümesi
I	: $\mathbb{R}$ nin içinde bir aralık
I^{O}	: I nın içi
f'	: f in birinci türevi
$L(.,.)$	: Logaritmik Ortalama
$A(.,.)$	: Aritmetik Ortalama
$G(.,.)$	: Geometrik Ortalama
$W(.,.)$	: Weighted Ortalama

1 GİRİŞ

22 Kasım 1881 de Ch. Hermite (1822-1901) Mathesis dergisine bir mektup gönderdi. Bu mektubun bir özeti 1883 de derginin 3. sayısında yayımlandı. Mektupta, “Sur deux limites d’une intégrale définie. Soit $f(x)$ une fonction qui varie toujours dans le même sens de $x = a$, á $x = b$. On aura les relations

$$(b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right) < \int_a^b f(x)\,dx < (b-a)\,\frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{1.1}$$

ou bien

$$(b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right) > \int_a^b f(x)\,dx > (b-a)\,\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

suivant que la courbe y = f (x) tourne sa convexité ou sa concavité vers l’axe desabcisses.
En faisant dans ces formules $f(x) = 1/(1+x), a = 0, b = x$ il vient

$$x - \frac{x^2}{2+x} < \log(1+x) < x - \frac{x^2}{2(1+x)}.\text{”}$$

yazılıydı. Etraflıca yapılan araştırmalardan anlıyoruz ki daha sonraları literatürde bu nota ve bu önemli eşitsizliğin Hermite’e ait olduğuna hiç değinilmedi. Hermite in kısa notu ne Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik dergisinde ne de Sous les auspices de l’Académie des sciences de Paris par Émile Picard, membre de l’Institut de basılan kendi toplu makalelerinde yer almadı[1].
P. Mansion [2] kitapçığında Hermite’in yazılarının bir biyografisini yayınladı fakat Mathesis dergisindeki nottan hiç bahsetmedi.
E. F. Beckenbach [4, s. 44], (1.1) deki eşitsizliğin sol tarafının 1893 te Hadamard [5, s. 174-176, 186] tarafından ispatlandığını belirtti. (1.1) deki birinci eşitsizliğin on yıl önce Hermite tarafından yayımlanmasına rağmen Beckenbach bu eşitsizliği Hadamard’a mal etmek için büyük çaba sarfetti. Burada şunu belirtmek gerekir ki Beckenbach’ın kendisi konveks fonksiyonlar ve tarihi konusunda uzman biriydi ve gerçekten Hermite’in sonucundan haberi yoktu.

Hardy, Littlewood, Pólya [6, s.98] 1934 deki klasik çalışmasında,
"$f(x)$ sürekli fonksiyonunun (a,b) de konveks olması için gerek ve yeter şart $a \leqq x-h < x < x+h \leqq b$ için,

$$f(x) \leqq \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)\,dt \tag{1.2}$$

olmasıdır." yazılıydı. Bu sonucun f in $[a,b]$ de sürekli olması durumunda Hermite'in (1.1) deki ilk eşitsizliğe eşdeğer olduğu gösterilebilir.
Ancak (1.1) eşitsizliğinden (1.2) deki konvekslik kriterine dönüşümü kimin ne zaman yaptığı açık değildir. Dahası (1.1) deki ikinci eşitsizlikten benzer bir kriter oluşturulabileceğini göstermek zor değildir. Gerçekte (1.1) deki birinci ve ikinci eşitsizlikler eşdeğerdir.
Hermite'in sonucu (1.1) formunda Timan ve Trofimoff'un [7, s. 182], Lacković'in [8] ve Hortman'ın [9, s.351] eserlerinde yer almaktadır, ancak bu eşitsizliklerin Hermite'e ait olduğu belirtilmemektedir.
Şu anda Hermite'in eşitsizliklerinin bazıları oldukça basit olan birçok ispatı vardır. Eşitsizlikler sürekli konveks fonksiyonların temel özelliklerinin bir sonucu olan basit bir geometrik yoruma sahiptir. Ancak bu Hermite'in eşitsizliklerinin önemini azaltmaz.
(1.1) deki ilk eşitsizlik ayrıntılı bir şekilde çalışılmakta olan altharmonik fonksiyonlarla yakın bir şekilde ilişkilidir. Örnek için Radó'nun[10] ve Fejer'in [11] eserlerine göz atınız.
T. Radó [10] daki monografının girişinde konveks ve altharmonik fonksiyonlar arasındaki benzerliği incelikle inceledi. (1.1) deki Hermite'in ilk eşitsizliği bu benzerlik için kesinlikle temeldir. Bu nedenle altharmonik fonksiyonlar teorisinin birçok sonuç konveks fonksiyonlar teorisindeki kaynaklara sahiptir.
Hermite'in eşitsizliklerinin önemi (1.2) tarafından belirtilen konvekslik kriteri ile bir şekilde bilinebilir. Bir çok özel veya genel lineer konvekslik kriterleri literatürde bulunabilir ve onlar (1.2) şeklindeki şart tarafından ilham alınmıştır.
T. Rado [10] tarafından elde edilen lineer olmayan konvekslik kriterlerinin ve onların (1.1) in temel sonucuna dayandığını düşünmek özellikle önemlidir.

Fejer (1880-1959) 1906 da trigonometrik polinomlar üzerine çalışırken Hermite'in sonucundan hiç bahsetmeksizin Hermite'in (1.1) deki eşitsizliğini genelleştiren şu eşitsizliği ispatladı.

"f (a,b) aralığında konveks, g yine (a,b) aralığında pozitif değerli birer fonksiyon ve her $t \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ için,

$$g(a+t) = g(b-t)$$

olsun. Bu takdirde,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b g(x)\,dx$$

dir[11]. Özel olarak $g(x) = 1$ ve $t \in [a,b]$ alınırsa bu Hermite'in (1.1) eşitsizliğini verir. Bu eşitsizlik (1.1) eşitsizliğinin Hermite'e atfedilmemesinin sebeplerinden birisidir. Hermite'in sonucu basıldıktan 25 yıldan daha fazla bir zaman sonra J.L.W.V. Jensen(1905-1906) Hermite'in (1.1) eşitsizliğinin bir sonucu olan

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliğini baz alarak konveks fonksiyonları tanımlamıştır[12].

(1.1) eşitsizliği bu sebeplerden dolayı uzun yıllar sadece Hadamard eşitsizliği olarak adlandırıldı. (1.1) eşitsizliğini Hermite Hadamard eşitsizliği olarak tanımlayan ilk eserler "Hermite and Convexity" ve "Convex functions, Partial Orderings and Statistical Applications" adlı eserlerdir.

2 KURAMSAL KAVRAMLAR

2.1 Temel Kavramlar

Bu bölümde çalışmamız için gerekli olan tanım, teorem, bazı eşitsizlikler ve temel özellikler verilecektir. Gerekli görülenler için ispatlar yapılarak birer örnek verilecektir.

Tanım 2.1.1 Lineer uzaydan reel(kompleks) uzaya olan dönüşümlere fonksiyonel denir.

Tanım 2.1.2 Fonksiyonlar cümlesini fonksiyonlar cümlesine dönüştüren dönüşüme *operatör* denir.

Tanım 2.1.3 $I \subset \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $\forall x \in I$ için $|f(x)| \leq K$ olacak şekilde bir K pozitif reel sayısı varsa f fonksiyonuna $sınırlı\ fonksiyon$ denir.

Tanım 2.1.4 (Lipschitz Şartı) $[a, b]$ kapalı aralığında her x ve y noktaları için,

$$|f(x) - f(y)| \leq K |x - y|$$

şartını sağlayan bir K sabiti varsa f,$[a, b]$ aralığında $Lipschitz\ sartını\ sağlıyor$ denir (Bayraktar 2010).

Tanım 2.1.5 (Mutlak Süreklilik) $[a, b]$ nin ayrık açık alt aralıklarının ailesi $\{(a_i, b_i)\}_1^n$ için

$$\sum_1^n (b_i - a_i) < \delta$$

olduğunda,

$$\sum_1^n |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$$

olacak şekilde herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, bir $\delta > 0$ bulunabiliyorsa, f, $[a, b]$ de $mutlak\ süreklidir$ denir (Carter ve Brust 2000).

Tanım 2.1.6 (Konveks Fonksiyon) Her $x, y \in I$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

eşitsizliğini sağlayan $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna konveks fonksiyon denir (eşdeğer olarak λ, $(0, 1)$ aralığında da seçilebilir).Geometrik olarak bu eşitsizlik,

f fonksiyonunun grafiği kirişlerinin altından geçer anlamındadır (Pecaric ve ark. 1992).

Aşağıdaki kriterler konveks fonksiyon tanımına eşdeğerdir (Roberts ve Varberg 1973).

(a) I aralığı üzerinde f fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart herhangi bir $c \in I$ noktası için, $f(x)-f(c)/(x-c)$ fonksiyonunun I aralığında artan olmasıdır.

(b) $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart her $c, x \in (a,b)$ için,

$$f(x) - f(c) = \int_c^x g(t)\, dt$$

olacak şekilde $g : (a,b) \to \mathbb{R}$ artan fonksiyonun olmasıdır.

(c) f diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere, f in konveks olması için gerek ve yeter şart f' fonksiyonunun artan olmasıdır.

(d) f'', (a,b) de mevcut olsun. Bu durumda f in konveks olması için gerek ve yeter şart $f''(x) \geq 0$ olmasıdır.

(e) $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart her $x_0 \in (a,b)$ için f fonksiyonun en az bir destek doğrusuna sahip olmasıdır. Yani

$$f(x) \geq f(x_0) + \lambda(x - x_0) \qquad \forall x \in (a,b)$$

eşitsizliğini sağlamasıdır. Burada λ, x_0 a bağlıdır ve eğer f' varsa o zaman $\lambda = f'(x_0)$ ya da $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$ ise $\lambda \in \left[f'_-(x_0), f'_+(x_0)\right]$ dir.

(f) $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart P, Q ve R noktaları f fonksiyonun grafiği üzerinde herhangi üç nokta olmak üzere,

$$e\breve{g}imPQ \leq e\breve{g}imPR \leq e\breve{g}imQR$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

Konveks Fonksiyonun Özellikleri

i. Kapalı aralıkta tanımlı konveks fonksiyon sınırlıdır.

ii. $f : I \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyon ise, I^0(I nın içi) inde herhangi bir $[a, b]$ kapalı aralığında Lipschitz şartını sağlar. Bu nedenle f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında de mutlak sürekli ve I^0 de süreklidir.

iii. $f : I \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyon ise, I^0 de $f'_-(x)$ ve $f'_+(x)$ vardır ve artandır.

iv. $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I açık aralığında konveks ise, sayılabilir bir E kümesi haricinde f' mevcuttur ve süreklidir.

v. k tane fonksiyon $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ye konveks fonksiyonlar olsun. Bu takdirde;

$$f(x) = \sum_{j=1}^{k} a_j f_j(k), a_j > 0; (j = 1, 2, 3, ..., k)$$

fonksiyonuda konvekstir.

vi. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ azalmayan ve konveks fonksiyon ayrıca $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konveks olsun. Bu takdirde; $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = (g \circ h)(x)$ olarak tanımlanan f bileşke fonksiyonu da konvekstir.

vii. $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ konveks ve h, $h(x) = Ax + B$ formunda $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konveks olmak üzere (Burada A uygun matristir.)

$$f(x) = g(h(x))$$

fonksiyonu konveks fonksiyondur.

Teorem 2.1.1 (Hermite Hadamard Eşitsizliği) $f : I \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyon olmak üzere, her $a, b \in I$ ve $a < b$ için,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliğine Hermite Hadamard Eşitsizliği denir. Burada f fonksiyonunun konkav olması eşitsizliği tersine çevirir (Pachpatte 2005).

İspat. f fonksiyonu sürekli ve sınırlı olduğundan dolayı $[a, b]$ aralığında integrallenebilirdir. Konvekslik tanımından,

$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğin her iki tarafının $[0,1]$ aralığında t ye göre integrali alınırsa,

$$\begin{aligned}\int_0^1 f\left(ta+(1-t)b\right) &\leq \int_0^1 tf(a)+\int_0^1 (1-t)f(b)\\ &= \frac{f\left(a\right)+f\left(b\right)}{2}\end{aligned}$$

elde edilip soldaki eşitsizlikte $x=ta+(1-t)b,\ t\in[0,1]$ dönüşümü uygulanırsa $H.-H.$ eşitsizliğinin sağ tarafı elde edilir. Sol tarafını ispat etmek için,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(x\right)dx=\frac{1}{b-a}\left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} f\left(x\right)dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^b f\left(x\right)dx\right]$$

eşitliğinin sağındaki integrandlara sırasıyla $x=a+t\left(b-a\right)/2$ ve $x=b-t\left(b-a\right)/2$ değişken değişimi uygulanırsa,

$$\begin{aligned}\frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(x\right)dx &= \frac{1}{2}\int_0^1\left[f\left(a+\frac{t\left(b-a\right)}{2}\right)+f\left(b-\frac{t\left(b-a\right)}{2}\right)\right]dt\\ &\geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)\end{aligned}$$

elde edilip $H.-H.$ eşitsizliğinin sol tarafı ispatlanmış olur.

Tanım 2.1.7 (Logaritmik Konveks Fonksiyon) $f:I\rightarrow[0,\infty)$ fonksiyonu,

i. Her $x,y\in I$ ve $\lambda\in[0,1]$ için,

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq\left[f\left(x\right)\right]^{\lambda}\left[f\left(y\right)\right]^{1-\lambda}$$

ii. $\log f$ konveks

şartlarından birini sağlıyorsa f fonksiyonuna $logaritmik\ konveks\ fonksiyon$ denir (Dragomir and Pearce 2000).

Teorem 2.1.2 $f:I\rightarrow[0,\infty)$ fonksiyonu logaritmik konveks ise konvekstir (Dragomir and Pearce 2000).

İspat. f fonksiyonu logaritmik konveks fonksiyon olduğundan, $\log f$ fonksiyonu I aralığında konvekstir ve $g\left(x\right)=e^x$ fonksiyonu tüm reel sayılar kümesinde artan ve konveks bir fonksiyon olduğundan, özellik (vi) den dolayı,

$$f=\exp\left(\log f\right)$$

olup f fonksiyonu konveks olur. Diğer yoldan direk olarak konveksliğin ve logaritmik konveksliğin tanımı kullanılarak AO-GO eşitsizliğinden de benzer sonuç elde edilebilir.

Teorem 2.1.3 $f : I \to \mathbb{R}$ logaritmik konveks fonksiyon, $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \exp\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)\, dx\right] \\ &\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b G\left(f(x), f(a+b-x)\right) dx \\ &\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx \\ &\leq L\left(f(a), f(b)\right) \end{aligned}$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Burada $G(a, b)$ pozitif reel sayılar için geometrik ortalama ve $L(p, q)$ ayrık pozitif reel sayılar için logaritmik ortalama anlamındadır (Dragomir and Pearce 2000).

Tanım 2.1.8 (Quasi Konveks Fonksiyon) Her $x, y \in I$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için,

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna $quasi\ konveks\ fonksiyon$ denir.

Yukarıdaki tanımlardan dolayı

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1-\lambda)y) &\leq [f(x)]^{\lambda}[f(y)]^{1-\lambda} \\ &\leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \\ &\leq \max\{f(x), f(y)\} \end{aligned}$$

eşitsizliklerine sahip olabiliriz. Yani quasi-konveks fonksiyon ailesi log-konveks fonksiyon ailesini, log-konveks fonksiyon aileside konveks fonksiyon ailesini kapsar (Dragomir and Pearce 2000).

Tanım 2.1.9 (Birinci Anlamda s-Konveks Fonsiyon) $0 < s < 1$ olsun. $\mathbb{R}^+ := [0, \infty)$ olmak üzere $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna, her $u, v \in \mathbb{R}^+$ ve $\alpha, \beta \geq 0$ ile

$\alpha^s + \beta^s = 1$ için,

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)$$

şartını sağlıyorsa birinci anlamda s-konveks fonksiyon denir. Reel fonksiyonların bu sınıfı K_s^1 ile gösterilir (Breckner 1978).

Tanım 2.1.10 (İkinci Anlamda s-Konveks Fonksiyon) Her $u, v \geq 0$ $\alpha + \beta = 1$ olacak şekilde $\alpha, \beta \geq 0$ ve $s \in (0, 1]$ için,

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)$$

sağlanıyorsa $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna ikinci anlamda s-konveks fonksiyon denir. Reel fonksiyonların bu sınıfı K_s^2 ile gösterilir (Breckner 1978).

Tanım 2.1.11 (Özel Ortalamalar) α, β reel sayılar ve $\alpha \neq \beta$ olmak üzere,

$G(\alpha,\beta) = \sqrt{\alpha\beta}$,	$\alpha, \beta \in \mathbb{R}/\{0\}$	$Geometrik\ Ortalama$
$A(\alpha,\beta) = \frac{\alpha+\beta}{2}$,	$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$	$Aritmetik\ Ortalama$
$\bar{L}(\alpha,\beta) = \frac{\beta-\alpha}{\ln\lvert\beta\rvert - \ln\lvert\alpha\rvert}$	$\alpha, \beta \in \mathbb{R}/\{0\}$	$Logaritmik\ Ortalama$
$L_n(\alpha,\beta) = \left[\frac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{(n+1)(\beta-\alpha)}\right]^{\frac{1}{n}}$	$\alpha \neq \beta,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$	$Genellestirilmis$ $Logaritmik\ Ortalama$
$W(\alpha,\beta) = \lambda a + (1-\lambda) b$	$\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \lambda \in [0,1]$	$Weighted\ Ortalama$

şeklindedir (Dragomir and Pearce 2000).

Teorem 2.1.4 (Jensen Eşitsizliği) f fonksiyonu (a, b) aralığında konveks ve $x_i \in (a, b)$ olsun. Bu durumda $\alpha_i > 0$ ve $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ ise,

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinović 1970).

İspat. (a) Tanım 2.6 daki (e) aksiyomundan dolayı f fonksiyonu her $x_0 \in (a, b)$ için bir destek doğruya sahiptir. Yani her x_0 noktası için $f(x) \geq f(x_0) + m(x - x_0)$ olacak şekilde x_0 a bağlı bir m noktası vardır. Bu eşitsizlikte özel olarak $i = 1, 2, ..., n$ için $x_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ seçilirse,

$$f(x_i) \geq f(x_0) + m(x_i - x_0)$$

eşitsizlikleri elde edilir. Bu eşitsizlikler α_i ile çarpılır, taraf tarafa toplanır ve düzenlenirse Jensen Eşitsizliği elde edilir.

(b)

1. Durum: $n = 2$ ve $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$ için, konveks fonksiyon tanımında $\lambda = \frac{1}{2}$ seçilerek elde edilebilen $J - konveks$ fonksiyonun tanımını elde ederiz. İlk olarak Pečarić'in [13] de kullandığı tümevarım yöntemiyle $\alpha_i = 1/n, i = 1, ..., n$ için,

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \tag{1.3}$$

eşitsizliğini ispatlayalım.

Varsayalım ki $2 \leq k \leq n$ için (1.3) eşitsizliği geçerli olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1} x_i\right) \\ = \; & f\left(\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{n-1}{n}.\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1} x_i + \frac{1}{n}x_{n+1}\right]\right) \\ \leq \; & \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) + f\left(\frac{n-1}{n}.\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1} x_i + \frac{1}{n}x_{n+1}\right)\right] \\ \leq \; & \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) + \frac{1}{n}\left\{(n-1) f\left(\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1} x_i\right) + f(x_{n+1})\right\}\right] \end{aligned}$$

elde edilir. Sondaki eşitsizlite $f\left(\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1} x_i\right)$ terimli ifadeler eşitsizliğin sol tarafında toplanırsa,

$$f\left(\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1} x_i\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu ise bizlere $k = n+1$ içinde (1.3) eşitsizliğinin geçerli olduğunu gösterir. O halde tümevarım aksiyomundan dolayı (1.3) eşitsizliği bütün n doğal sayıları için geçerlidir.

2. Durum: $\alpha_1, ..., \alpha_n$ negatif olmayan rasyonel sayıları için $\alpha_i = \frac{p_i}{m}, i = 1, ..., n$ şartını sağlayan $m = p_1 + ... + p_n$ $(p_1, ..., p_n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\})$ olacak şekilde m doğal

sayısı bulunabilir. Bu durumda hipotezdeki eşitsizlikten,

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{(x_1+...+x_1)+...+(x_n+...+x_n)}{m}\right) \\ \leq \quad & \frac{(f(x_1)+...+f(x_1))+...+(f(x_n)+...+f(x_n))}{m} \end{aligned}$$

eşitsizliğinin geçerli olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Burada ilk parantezde p_1 tane ve son parantezde p_n tane terim olduğuna dikkat edin. Böylece Jensen eşitsizliğine eşdeğer olan,

$$f\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{m} f(x_i)$$

eşitsizliğini elde ederiz ve $\alpha_i = \frac{p_i}{m}, i = 1, ..., n$ seçilirse, Teorem (2.1.4) ün ispatı tamamlanır.

Teorem 2.1.5 (İntegraller için Jensen Eşitsizliği) $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyon, $h : I \to (0, \infty)$ ve $u : I \to \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ integrallenebilir fonksiyonlar olmak üzere,

$$f\left(\frac{\int_a^b h(t)\,u(t)\,dt}{\int_a^b h(t)\,dt}\right) \leq \frac{\int_a^b h(t)\,f(u(t))\,dt}{\int_a^b h(t)\,dt}$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinović 1970).

İspat. f fonksiyonu konveks olduğundan dolayı, bir support doğruya sahiptir. Yani $\gamma > 0$ için,

$$f(t) - f(\gamma) \geq \lambda(t-\gamma), \ \forall t \geq 0$$

olacak şekilde bir λ sabiti vardır. Burada $t = u(t)$ seçilir ve eşitsizliğin her iki tarafı $h(t)$ ile çarpılıp $[a, b]$ aralığında t ye göre integral alınırsa,

$$\begin{aligned} & \int_a^b h(t)\,f(u(t))\,dt - f(\gamma)\int_a^b h(t)\,dt \\ \geq \quad & \lambda\left\{\int_a^b h(t)\,u(t)\,dt - \gamma\int_a^b h(t)\,dt\right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Son bulunan eşitsizlikte,

$$\gamma = \frac{\int_a^b h(t)\,u(t)\,dt}{\int_a^b h(t)\,dt}$$

yerine yazılırsa ispat tamamlanır.

Teorem 2.1.6 (AO-GO Eşitsizliği) Eğer her $i = 1, 2, ..., n$ için $x_i \geq 0$, $\alpha_i > 0$ ve $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ ise,

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinović 1970).

İspat. en az bir i için $x_i = 0$ ise ispat aşikardır. $x_i > 0$ durumunda, $y_i = \log x_i$ seçilirse,

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i\right)$$

olup $f(t) = e^t$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ de konveks olduğundan Jensen Eşitsizliğini uygularsak,

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} &= f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(y_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \end{aligned}$$

elde edilip ispat tamamlanmış olur. Özel olarak $n = 2$, $\alpha_1 = \frac{1}{p}$, $\alpha_2 = \frac{1}{q}$, $x_1 = x^p$ ve $x_2 = y^q$ seçilirse Yooung Eşitsizliği olarak bilinen,

$$xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 2.1.7 (Hölder Eşitsizliği) $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n > 0$, $p, q > 1$ öyleki $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsiliğine Hölder Eşitsilizliği denir. Özel olarak $p = q = 2$ seçilirse yukardaki eşitsizlik Cauchy-Buniakowsky-Schwartz eşitsizliği elde edilir (Mitrinović 1970).

İspat. Yukarıdaki eşitsizlikte x_i ve y_i lerden en az birinin sıfırdan farklı olduğunu düşünebiliriz. O halde $u = (\sum_{i=1}^{n} x_i^p)^{\frac{1}{p}}$ ve $v = (\sum_{i=1}^{n} y_i^q)^{\frac{1}{q}}$ her ikiside pozitiftir, Young Eşitsizliğinde $x = x_i/u$ ve $y = y_i/v$ seçersek,

$$\frac{x_i}{u} \cdot \frac{y_i}{v} \leq \frac{1}{p}\left(\frac{x_i}{u}\right)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{y_i}{v}\right)^q$$

elde edilip bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa,

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{uv} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

olup Hölder Eşitsizliği elde edilir.

Tanım 2.1.12 (İntegraller İçin Hölder Eşitsizliği) $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. f ve g, $[a, b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x) g(x)| \, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinović 1970).

2.2 Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler ile İlgili Kestirimler ve Genelleştirmeleri

Bu bölümde Hermite Hadamard Eşitsizliğinin bir ispatı ve bu eşitsizliğe dair kestirimler ve genelleştirmeleri verilmektedir. Çeşitli genelleştirmeler üzerine incelemeler [17] ve [20] de bulunabilir. Hermite Hadamard tiplli eşitsizliklerin muhtemel en iyi tarifi [19] da Fink tarafından sunulmuştur. Hermite Hadamard Eşitsizliği üzerine ayrıntılar [21] de bulunabilir.

Farissi tarafından [14] de Hermite Hadamard eşitsizliğinin farklı bir ispatı yapılmıştır. İlk olarak bu ispata geçmeden önce gerekli olan lemmayı verelim.

Lemma 2.2.1 f, I üzerinde integrallenebilen bir fonksiyon olmak üzere,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \int_0^1 f(\lambda b+(1-\lambda)a)\,d\lambda \tag{2.1}$$

$$= \int_0^1 f(\lambda a+(1-\lambda)b)\,d\lambda \tag{2.2}$$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat. (2.1) ve (2.2) eşitliklerinin sağ tarafındaki integrandlara sırasıyla $x = \lambda b+(1-\lambda)a$ ve $x = \lambda a+(1-\lambda)b$ değişken değişimi uygulanırsa ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.2.1 (Hermite Hadamard Eşitsizliği) $f : I \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyon olmak üzere, her $a, b \in I$ ve $a < b$ için,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{2.3}$$

eşitsizliğine Hermite Hadamard Eşitsizliği denir. Burada f fonksiyonunun konkav olması eşitsizliği tersine çevirir.

Şimdi Teorem 2.2.1 için Farissi'nin [14] deki ispatını verelim.

İspat. f konveks fonksiyon olduğundan, her $\lambda \in [0,1]$ için,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= f\left(\frac{\lambda b+(1-\lambda)\,a+\lambda a+(1-\lambda)\,b}{2}\right) \\ &= f\left(\frac{1}{2}(\lambda b+(1-\lambda)\,a)+\frac{1}{2}(\lambda a+(1-\lambda)\,b)\right) \\ &\leq \frac{1}{2}f(\lambda b+(1-\lambda)\,a)+\frac{1}{2}f(\lambda a+(1-\lambda)\,b) \\ &\leq \frac{\lambda f(b)+(1-\lambda)\,f(a)+\lambda f(a)+(1-\lambda)\,f(b)}{2} \leq \frac{f\,(a)+f\,(b)}{2} \end{aligned}$$

ve

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(\lambda b+(1-\lambda)\,a)+f(\lambda a+(1-\lambda)\,b)}{2} \leq \frac{f\,(a)+f\,(b)}{2}$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin her tarafı [0,1] de λ ya göre integre edilirse (2.3) eşitsizliği bulunup ispat tamamlanır.

Son zamanlarda [18] de yazarlar (2.3) eşitsizliğini iki kez diferansiyellenebilen fonksiyonlar için kurdular ve f in konveks olması durumunda (2.3) den daha iyi bir yaklaşık değer olup olmadığını bulmak için onlar şu soruyu sordular:

f, I üzerinde konveks fonksiyon olmak üzere,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \ell\,(\lambda) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f\,(x)\,dx \leq L\,(\lambda) \leq \frac{f\,(a)+f\,(b)}{2}$$

eşitsizliğini sağlayan ℓ ve L reel sayıları var mıdır? Farissi [14] de bu şekilde ℓ ve L reel sayılarını aşağıdaki gibi bulmuştur. Bu aynı zamanda Hermite Hadamard eşitsizliğinin bir kestirimidir.

Teorem 2.2.2 $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I üzerinde konveks olsun. Bu durumda her $\lambda \in [0,1]$ için,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \ell\,(\lambda) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f\,(x)\,dx \leq L\,(\lambda) \leq \frac{f\,(a)+f\,(b)}{2} \tag{2.4}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada

$$\ell(\lambda)=\lambda f\left(\frac{\lambda b+(2-\lambda)a}{2}\right)+(1-\lambda)f\left(\frac{(1+\lambda)b+(1-\lambda)a}{2}\right)$$

ve

$$L(\lambda)=\frac{1}{2}f(\lambda b+(1-\lambda)a)+\lambda f(a)+(1-\lambda)f(b)$$

dır.

İspat. f I da konveks fonksiyon olsun. $\lambda\neq 0$ için $[a,\lambda b+(1-\lambda)a]$ alt aralığında (2.3) ü uygularsak,

$$f\left(\frac{\lambda b+(2-\lambda)a}{2}\right)\leq\frac{1}{\lambda(b-a)}\int_a^{\lambda b+(1-\lambda)a}f(x)\,dx\leq\frac{f(\lambda b+(1-\lambda)a)+f(a)}{2} \tag{2.5}$$

elde edilir. Benzer şekilde $\lambda\neq 0$ için, $[\lambda b+(1-\lambda)a,b]$ de (2.3) ü uygularsak,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{(1+\lambda)b+(1-\lambda)a}{2}\right) &\leq \frac{1}{(1-\lambda)(b-a)}\int_{\lambda b+(1-\lambda)a}^{b}f(x)\,dx \\ &\leq \frac{f(\lambda b+(1-\lambda)a)+f(b)}{2} \end{aligned} \tag{2.6}$$

bulunur. (2.5) i λ ile, (2.6) yı $(1-\lambda)$ ile çarpıp taraf tarafa toplarsak,

$$\begin{aligned} &\lambda f\left(\frac{\lambda b+(2-\lambda)a}{2}\right)+(1-\lambda)f\left(\frac{(1+\lambda)b+(1-\lambda)a}{2}\right) \\ \leq\ &\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)\,dx \\ \leq\ &\frac{(1-\lambda)f(b)+f(\lambda b+(1-\lambda)a)+\lambda f(a)}{2} \end{aligned}$$

ve

$$\ell(\lambda)\leq\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)\,dx\leq L(\lambda) \tag{2.7}$$

bulunur.

Burada $\ell(\lambda)$ ve $L(\lambda)$ Teorem 2.2.2 de tanımlandığı gibidir. f nin konveksliğini kullanarak,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= f\left(\lambda\frac{\lambda b+(2-\lambda)a}{2}+(1-\lambda)\frac{(1+\lambda)b+(1-\lambda)a}{2}\right) \\ &\leq \lambda f\left(\frac{\lambda b+(1-\lambda)a+a}{2}\right)+(1-\lambda)f\left(\frac{\lambda b+(1-\lambda)a+b}{2}\right) \\ &\leq \frac{1}{2}(\lambda f(b)+(1-\lambda)a+\lambda f(a)+(1-\lambda)f(b)) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \end{aligned} \tag{2.8}$$

(2.7) ve (2.8) tarafından (2.4) e sahip oluruz.

Sonuç 2.2.3 $f: I \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyon olmak üzere, her $\lambda \in [0,1]$ için,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \sup_{\lambda\in[0,1]} \ell(\lambda) \leq \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)\,dx \leq \inf_{\lambda\in[0,1]} L(\lambda) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

dir. Burada $\ell(\lambda)$ ve $L(\lambda)$ Teorem 2.2.2 de tanımlandığı gibidir.

Gao [23] de Farissi'nin yukarıda verdiğimiz sonucundan daha genel bir sonuca ulaşmıştır. Bu genelleştirme için Jensen eşitsizliğini kullanmış ve λ ya indis vermiştir. Bu teoremi vermeden önce ispatı için gerekli olan lemmayı verelim.

Lemma 2.2.4(Jensen Eşitsizliği) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyon olmak üzere, keyfi $\Phi: I \to \mathbb{R}$ negatif olmayan reel değerli integrallenebilir fonksiyonu için,

$$f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \Phi(x)\,dx\right) \leq \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f\circ\Phi(x)\,dx$$

dir.

İspat. Bknz. [6]

Şimdi Gao'nun teoremini ve ispatını verelim.

Teorem 2.2.5 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyon olsun. O zaman $\Phi: I \to \mathbb{R}$ negatif olmayan reel değerli integrallenebilir fonksiyon ve $f\circ\Phi$ konveks olmak üzere $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_0 = 0$, $\lambda_{n+1} = 1$, ve keyfi $0 \leq \lambda_1 \leq ... \leq \lambda_n \leq 1$ için,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \Phi(x)\,dx\right) &\leq \ell(\lambda_1,...,\lambda_n) \leq \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f\circ\Phi(x)\,dx \\ &\leq L(\lambda_1,...,\lambda_n) \leq \frac{f\circ\Phi(a)+f\circ\Phi(b)}{2} \end{aligned}$$

dir. Burada,

$$\ell\left(\lambda_1,...,\lambda_n\right)=\sum_{k=0}^{n}\left(\lambda_{k+1}-\lambda_k\right)f\left(\frac{1}{\left(\lambda_{k+1}-\lambda_k\right)(b-a)}\int_{(1-\lambda_k)a+\lambda_k b}^{(1-\lambda_{k+1})a+\lambda_{k+1}b}\Phi(x)\,dx\right)$$

ve

$$L\left(\lambda_1,...,\lambda_n\right)=\sum_{k=0}^{n}\left(\lambda_{k+1}-\lambda_k\right)\frac{f\circ\Phi\left(\left(1-\lambda_k\right)a+\lambda_k b\right)+f\circ\Phi\left(\left(1-\lambda_{k+1}\right)a+\lambda_{k+1}b\right)}{2}$$

dir. Şimdi Lemma 2.2.4 yardımıyla Teorem 2.2.5 in ispatına geçelim.

İspat. $f(x)$ ve $f\circ\Phi(x)$ konveks olduğundan, $f(x)$ için Jensen eşitsizliğini ve $f\circ\Phi(x)$ için Hermite Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafını uygulayarak,

$$f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b\Phi(x)\,dx\right)\leq\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f\circ\Phi(x)\,dx\leq\frac{f\circ\Phi(a)+f\circ\Phi(b)}{2} \tag{2.9}$$

eşitsizliğine sahip oluruz.

$\lambda_0=0$ alırsak,

$$\left[a,\left(1-\lambda_1\right)a+\lambda_1 b\right]=\left[\left(1-\lambda_0\right)a+\lambda_0 b,\left(1-\lambda_1\right)a+\lambda_1 b\right]$$

olup $k=0,1,...,n$ için $\left[\left(1-\lambda_k\right)a+\lambda_k b,\left(1-\lambda_{k+1}\right)a+\lambda_{k+1}b\right]$ aralıklarında (2.9) eşitsizliklerini kurarsak,

$$\begin{aligned}
& f\left(\frac{1}{\left(\lambda_{k+1}-\lambda_k\right)(b-a)}\int_{(1-\lambda_k)a+\lambda_k b}^{(1-\lambda_{k+1})a+\lambda_{k+1}b}\Phi(x)\,dx\right)\\
\leq\; & \frac{1}{\left(\lambda_{k+1}-\lambda_k\right)(b-a)}\int_{(1-\lambda_k)a+\lambda_k b}^{(1-\lambda_{k+1})a+\lambda_{k+1}b}f\circ\Phi(x)\,dx\\
\leq\; & \frac{f\circ\Phi\left(\left(1-\lambda_k\right)a+\lambda_k b\right)+f\circ\Phi\left(\left(1-\lambda_{k+1}\right)a+\lambda_{k+1}b\right)}{2}
\end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitsizliklerin herbirini $\left(\lambda_{k+1}-\lambda_k\right)$ ile çarpıp taraf tarafa toplarsak,

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{n}\left(\lambda_{k+1}-\lambda_k\right)f\left(\frac{1}{\left(\lambda_{k+1}-\lambda_k\right)(b-a)}\int_{(1-\lambda_k)a+\lambda_k b}^{(1-\lambda_{k+1})a+\lambda_{k+1}b}\Phi(x)\,dx\right)\\
\leq\; & \frac{1}{(b-a)}\sum_{k=0}^{n}\int_{(1-\lambda_k)a+\lambda_k b}^{(1-\lambda_{k+1})a+\lambda_{k+1}b}f\circ\Phi(x)\,dx\\
\leq\; & \sum_{k=0}^{n}\left(\lambda_{k+1}-\lambda_k\right)\frac{f\circ\Phi\left(\left(1-\lambda_k\right)a+\lambda_k b\right)+f\circ\Phi\left(\left(1-\lambda_{k+1}\right)a+\lambda_{k+1}b\right)}{2}
\end{aligned}$$

yani

$$\ell(\lambda_1,...,\lambda_n) \le \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f\circ\Phi(x)\,dx \le L(\lambda_1,...,\lambda_n)$$

elde edilir. Burada $\ell(\lambda_1,...,\lambda_n)$ ve $L(\lambda_1,...,\lambda_n)$ Teorem 2.2.5 deki gibi tanımlıdır. Kalan eşitsizlikleri, yani

$$f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \Phi(x)\,dx\right) \le \ell(\lambda_1,...,\lambda_n) \le L(\lambda_1,...,\lambda_n) \le \frac{f\circ\Phi(a)+f\circ\Phi(b)}{2}$$

eşitsizliklerini ispatlarken $\sum_{k=0}^{n}(\lambda_{k+1}-\lambda_k)=1$ i elde etmek için f ve $f\circ\Phi$ fonksiyonlarının konveksliğini kullanacağız.

$$\begin{aligned}
& f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \Phi(x)\,dx\right) \\
= \;& f\left(\sum_{k=0}^{n}(\lambda_{k+1}-\lambda_k)\frac{1}{(\lambda_{k+1}-\lambda_k)(b-a)}\int_{(1-\lambda_k)a+\lambda_k b}^{(1-\lambda_{k+1})a+\lambda_{k+1}b}\Phi(x)\,dx\right) \\
\le \;& \sum_{k=0}^{n}(\lambda_{k+1}-\lambda_k) f\left(\frac{1}{(\lambda_{k+1}-\lambda_k)(b-a)}\int_{(1-\lambda_k)a+\lambda_k b}^{(1-\lambda_{k+1})a+\lambda_{k+1}b}\Phi(x)\,dx\right) \\
\le \;& \sum_{k=0}^{n}(\lambda_{k+1}-\lambda_k)\frac{f\circ\Phi((1-\lambda_k)a+\lambda_k b)+f\circ\Phi((1-\lambda_{k+1})a+\lambda_{k+1}b)}{2} \\
\le \;& \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(((1-\lambda_k)-(1-\lambda_{k+1}))((1-\lambda_k)+(1-\lambda_{k+1}))f\circ\Phi(a)) \\
& +\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}((\lambda_{k+1}-\lambda_k)(\lambda_{k+1}+\lambda_k)f\circ\Phi(b)) \\
= \;& \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(\left((1-\lambda_k)^2-(1-\lambda_{k+1})^2\right)f\circ\Phi(a)+\left(\lambda_{k+1}^2-\lambda_k^2\right)f\circ\Phi(b)\right) \\
= \;& \frac{f\circ\Phi(a)+f\circ\Phi(b)}{2}
\end{aligned}$$

olup ispat tamamlanır.

[24] de Dragomir birkaç fonksiyon tanımlamış ve bu fonksiyonlarla (2.3) ün sol tarafının bir kestirimini oluşturmuştur. Şimdi Dragomir'in bununla ilgili iki teoremini verelim.

Teorem 2.2.6 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyon ve $[0, 1]$ üzerinde H,

$$H(t) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f\left(tx + (1-t)\frac{a+b}{2}\right) dx$$

şeklinde tanımlansın. O halde H, $[0, 1]$ de artandır, konvekstir ve her $t \in [0, 1]$ için,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = H(0) \leq H(t) \leq H(1) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \qquad (2.10)$$

eşitsizliği geçerlidir.

Teorem 2.2.7 f, H Teorem 2.2.6. da verildiği gibi olsun ve $[0, 1]$ üzerinde F,

$$F(t) = \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b \int_a^b f(tx + (1-t)y)\, dxdy$$

şeklinde tanımlansın. O halde,

(i) F, $[0, 1]$ de konveks, $\frac{1}{2}$ civarında simetrik, $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ de azalan, $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ de artan ve her $t \in [0, 1]$ için,

$$\sup_{t \in [0,1]} F(t) = F(0) = F(1) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$$

ve

$$\inf_{t \in [0,1]} F(t) = F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b \int_a^b f\left(\frac{x+y}{2}\right) dxdy$$

şeklindedir.

(ii) Her $t \in [0, 1]$ için,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq F\left(\frac{1}{2}\right);\ H(t) \leq F(t)$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

[25] de Yang ve Hong, (2.3) eşitsizliğinin sağ tarafının bazı fonksiyonlar yardımıyla bir kestirimini oluşturmuştur.

Teorem 2.2.8 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyon ve $[0, 1]$ üzerinde P,

$$\begin{aligned} P(t) \quad &= \quad \frac{1}{2(b-a)} \int_a^b \left[f\left(\left(\frac{1+t}{2}\right) a + \left(\frac{1-t}{2}\right) x\right) \right. \\ &\quad \left. + f\left(\left(\frac{1+t}{2}\right) b + \left(\frac{1-t}{2}\right) x\right) \right] dx \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. O halde P, $[0,1]$ de konvekstir, artandır ve her $t \in [0,1]$ için,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = P(0) \leq P(t) \leq P(1) = \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{2.11}$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

[25] de Dragomir, Milosevic ve Sandor (2.3) ile ilgili eşitsizlikler oluşturdular.

Teorem 2.2.9 f, H Teorem 2.2.6. da verildiği gibi olsun. O halde,

(i)

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{2}{b-a}\int_{\frac{3a+b}{4}}^{\frac{3b+a}{4}} f(x)\,dx \leq \int_0^1 H(t) \\ &\leq \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right] \end{aligned}$$

(ii) f, $[a,b]$ de diferansiyellenebilir olmak üzere her $t \in [0,1]$ için,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx - H(t) \\ &\leq (1-t)\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right] \end{aligned}$$

ve

$$0 \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} - H(t) \leq \frac{\left(f'(a)+f'(b)\right)(b-a)}{4}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Teorem 2.2.10 f, H Teorem 2.2.6. da verildiği gibi olsun ve $[0,1]$ üzerinde G,

$$G(t) = \frac{1}{2}\left[f\left(ta+(1-t)\frac{a+b}{2}\right)+f\left(tb+(1-t)\frac{a+b}{2}\right)\right]$$

şeklinde tanımlansın. O halde,

(i) G, $[0,1]$ de konvekstir ve artandır.

(ii)

$$\begin{aligned} \inf_{t\in[0,1]} G(t) &= G(0) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ \sup_{t\in[0,1]} G(t) &= G(1) = \frac{f(a)+f(b)}{2} \end{aligned}$$

dir.

(iii) Her $t \in [0,1]$ için,

$$H(t) \leq G(t)$$

dir.

(iv)

$$\begin{aligned}\frac{2}{b-a}\int_{\frac{3a+b}{4}}^{\frac{a+3b}{4}} f(x)\,dx &\leq \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{3a+b}{4}\right)+f\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right] \\ &\leq \int_0^1 G(t) \leq \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f(a)+f(b)}{2}\right]\end{aligned}$$

dir.

(v) f, $[a,b]$ de diferansiyellenebilir olmak üzere her $t \in [0,1]$ için,

$$0 \leq H(t) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq G(t) - H(t)$$

dir.

Teorem 2.2.11 f, H, G Teorem 2.2.10 da verildiği gibi olsun ve $[0,1]$ üzerinde L,

$$L(t) = \frac{1}{2(b-a)}\int_a^b [f(ta+(1-t)x) + f(tb) + (1-t)x]\,dx$$

şeklinde tanımlansın. O halde,

(i) L, $[0,1]$ aralığında konvekstir.

(ii) Her $t \in [0,1]$ için,

$$\begin{aligned}G(t) &\leq L(t) \leq \frac{1-t}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx + t\frac{f(a)+f(b)}{2} \\ &\leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\end{aligned} \tag{2.12}$$

ve

$$\sup_{t\in[0,1]} L(t) = \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

dir.

(iii) Her $t \in [0,1]$ için,

$$H(1-t) \leq L(t) \text{ ve } \frac{H(t)+H(1-t)}{2} \leq L(t)$$

dir.

[26] da Tseng, Yang ve Hsu (2.3) eşitsizliğine dair bazı sonuçlara ulaşmıştır. Bu sonuçlara geçmeden önce ispatlarında kullanacağımız lemmaları verelim.

Lemma 2.2.12 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyon ve $a \leq A \leq C \leq D \leq B \leq b$, $A+B = C+D$ olsun. O halde

$$f(C) + f(D) \leq f(A) + f(B)$$

dir.

Lemma 2.2.12 deki varsayımları aşağıdaki lemmadaki gibi zayıflatabiliriz.

Lemma 2.2.13 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyon ve $a \leq A \leq C \leq B \leq b$, $a \leq A \leq D \leq B \leq b$, $A+B = C+D$ olsun. O halde

$$f(C) + f(D) \leq f(A) + f(B)$$

dir.

Teorem 2.2.14 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyon ve H, P Teorem 2.2.8 deki gibi tanımlansın. O halde aşağıdaki sonuçlara sahip oluruz:

(i)

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx &\leq \frac{2}{b-a}\int_{\left[a,\frac{3a+b}{4}\right]\cup\left[\frac{a+3b}{4},b\right]} f(x)\,dx \\ &\leq \int_0^1 P(t)\,dt \leq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx + \frac{f(a)+f(b)}{2}\right] \end{aligned} \tag{2.13}$$

(ii) Her $t \in [0,1]$ için,

$$\begin{aligned} L(t) &\leq P(t) \leq \frac{1-t}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx + t\frac{f(a)+f(b)}{2} \\ &\leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \end{aligned} \tag{2.14}$$

ve

$$0 \leq P(t) - G(t) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} - P(t) \tag{2.15}$$

dir.

(iii) f , $[a,b]$ de diferansiyellenebilir olmak üzere her $t \in [0,1]$ için,

$$\begin{aligned} 0 &\leq t\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] \\ &\leq P(t) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx, \end{aligned} \tag{2.16}$$

$$0 \leq P(t) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\left(f'(a)+f'(b)\right)(b-a)}{4} \tag{2.17}$$

ve

$$0 \leq P(t) - H(t) \leq \frac{\left(f'(a)+f'(b)\right)(b-a)}{4} \tag{2.18}$$

dir.

İspat. **(i)** Temel integrasyon tekniklerini kullanarak,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \\ &= \frac{2}{b-a}\int_a^{\frac{a+b}{2}}\int_a^{\frac{1}{2}} \left[f(x)+f(a+b-x)\right] dtdx, \end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned} &\frac{2}{b-a}\int_{\left[a,\frac{3a+b}{4}\right]\cup\left[\frac{a+3b}{4},b\right]} f(x)\,dx \\ &= \frac{2}{b-a}\int_a^{\frac{a+b}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}} \left[f\left(\frac{a+x}{2}\right)+f\left(\frac{a+2b-x}{2}\right)\right] dtdx, \end{aligned} \tag{2.20}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 P(t)\,dt \\
= &\frac{1}{b-a}\int_a^{\frac{a+b}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}}\left[f(tx+(1-t)a)+f(ta+(1-t)x)\right]dtdx \\
&+\frac{1}{b-a}\int_a^{\frac{a+b}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}}\left[f(tb+(1-t)(a+b-x))\right. \\
&\left.+f(t(a+b-x)+(1-t)b)\right]dtdx
\end{aligned} \tag{2.21}$$

ve

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}+\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right] \\
= &\frac{1}{b-a}\int_a^{\frac{a+b}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}}\left[f(a)+f(x)\right]dtdx \\
&+\frac{1}{b-a}\int_a^{\frac{a+b}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}}\left[f(a+b-x)+f(b)\right]dtdx
\end{aligned} \tag{2.22}$$

eşitliklerine sahip oluruz. Her $t\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$ ve $x\in\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$ için Lemma 2.2.12 de $A=\frac{a+x}{2}$, $C=x$, $D=a+b-x$ ve $B=\frac{a+2b-x}{2}$ alınırsa,

$$f(x)+f(a+b-x)\leq f\left(\frac{a+x}{2}\right)+f\left(\frac{a+2b-x}{2}\right); \tag{2.23}$$

$A=tx+(1-t)a$, $C=D=\frac{a+x}{2}$ ve $B=ta+(1-t)x$ alınırsa,

$$f\left(\frac{a+x}{2}\right)\leq\frac{1}{2}\left[f(tx+(1-t)a)+f(ta+(1-t)x)\right]; \tag{2.24}$$

$A=tb+(1-t)(a+b-x)$, $C=D=\frac{a+2b-x}{2}$ ve $B=t(a+b-x)+(1-t)b$ alınırsa,

$$f\left(\frac{a+2b-x}{2}\right)\leq\frac{1}{2}\left[f(tb+(1-t)(a+b-x))+f(t(a+b-x)+(1-t)b)\right]; \tag{2.25}$$

$A=a$, $C=tx+(1-t)a$, $D=ta+(1-t)x$ ve $B=x$ alınırsa,

$$\frac{1}{2}\left[f(tx+(1-t)a)+f(ta+(1-t)x)\right]\leq\frac{1}{2}\left[f(a)+f(x)\right]; \tag{2.26}$$

$A = a + b - x$, $C = tb + (1-t)(a+b-x)$, $D = t(a+b-x) + (1-t)b$ ve $B = b$ alınırsa,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\left[f\left(tb + (1-t)(a+b-x)\right) + f\left(t(a+b-x) + (1-t)b\right)\right] \\ \leq \ & \frac{f(a+b-x) + f(b)}{2} \end{aligned} \tag{2.27}$$

eşitsizlikleri elde edilir. (2.23)-(2.27) eşitsizlikleri $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ de t ye göre integre edilip her iki tarafını $\frac{b-a}{2}$ ile bölüp (2.19)-(2.22) tanımları kullanılarak, (2.13) elde edilir.

(ii) İntegrasyon için değişken değişimi kurallarını kullanarak, her $t \in [0,1]$ için,

$$P(t) = \frac{1}{b-a}\int_a^{\frac{a+b}{2}} \left[f\left(ta + (1-t)x\right) + f\left(tb + (1-t)(a+b-x)\right)\right] dx \tag{2.28}$$

ve

$$\begin{aligned} L(t) \ = \ & \frac{1}{2}P(t) + \frac{1}{2(b-a)}\int_a^{\frac{a+b}{2}} \left[f\left(ta + (1-t)(a+b-x)\right) \right. \\ & \left. + f\left(tb + (1-t)x\right)\right] dx \end{aligned} \tag{2.29}$$

tanımlarına sahip oluruz. Lemma 2.2.13. de her $t \in [0,1]$ ve $x \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ için, $A = ta + (1-t)x$, $C = ta + (1-t)(a+b-x)$, $D = tb + (1-t)x$ ve $B = tb + (1-t)(a+b-x)$ alınırsa,

$$\begin{aligned} & f\left(ta + (1-t)(a+b-x)\right) + f\left(tb + (1-t)x\right) \\ \leq \ & f\left(ta + (1-t)x\right) + f\left(tb + (1-t)(a+b-x)\right) \end{aligned} \tag{2.30}$$

eşitsizliği geçerlidir. (2.30) eşitsizliğinin her iki tarafı $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ üzerinde integre edilip $2(b-a)$ ile bölünüp (2.28)-(2.29) tanımları kullanılarak (2.14) ilk kısmını elde ederiz. (2.3) ve f in konveksliği uygulanarak (2.14) nin ikinci ve üçüncü eşitsizliklerini elde ederiz. Bu (2.14) yi ispatlar.

Tekrar integrasyon için değişken değişimi kurallarını kullanarak, her $t \in [0,1]$ için,

$$P(t) = \frac{1}{b-a}\int_a^{\frac{3a+b}{4}} \left[f(ta+(1-t)x) + f\left(ta+(1-t)\left(\frac{3a+b}{2}-x\right)\right)\right. \tag{2.31}$$
$$\left. + f\left(tb+(1-t)\left(\frac{b-a}{2}+x\right)\right) + f(tb+(1-t)(a+b-x))\right] dx$$

tanımına sahip oluruz. Lemma 2.2.12 de her $t \in [0,1]$ ve $x \in \left[a, \frac{3a+b}{4}\right]$ için, $A = a$, $C = ta+(1-t)x$, $D = ta+(1-t)\left(\frac{3a+b-x}{2}\right)$ ve $B = ta+(1-t)\frac{a+b}{2}$ alınırsa,

$$f(ta+(1-t)x) + f\left(ta+(1-t)\left(\frac{3a+b-x}{2}\right)\right) \tag{2.32}$$
$$\leq f(a) + f\left(ta+(1-t)\frac{a+b}{2}\right);$$

$A = tb+(1-t)\frac{a+b}{2}$, $C = tb+(1-t)\left(\frac{b-a}{2}+x\right)$, $D = tb+(1-t)(a+b-x)$ ve $B = b$ alınırsa,

$$f\left(tb+(1-t)\left(\frac{b-a}{2}+x\right)\right) + f(tb+(1-t)(a+b-x)) \tag{2.33}$$
$$\leq f\left(tb+(1-t)\frac{a+b}{2}\right) + f(b)$$

eşitsizlikleri geçerlidir.(2.32) ve (2.33) eşitsizlikleri $\left[a, \frac{3a+b}{4}\right]$ üzerinde x e göre integre edilip $(b-a)$ ile bölünüp (2.31) tanımı kullanılarak, her $t \in [0,1]$ için,

$$P(t) \leq \frac{1}{2}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + G(t)\right] \tag{2.34}$$

eşitsizliğine sahip oluruz. (2.34) kullanılarak biz (2.31) nın ikinci eşitsizliğini elde ederiz. (2.15) ün ilk eşitsizliği (2.12) ve (2.14) den elde edilebilir. Bu (2.15)i ispatlar.

(iii) Kısmi integrasyon yöntemini kullanarak,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \left[(a-x) f'(x) + (x-a) f'(a+b-x)\right] dx \tag{2.35}$$
$$= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

eşitliğine sahip oluruz. İntegrasyonun altaralık kurallarını kullanarak,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^{\frac{a+b}{2}} \left[f(x) + f(a+b-x)\right] dx \tag{2.36}$$

tanımına sahip oluruz. şimdi f in konveksliğini kullanarak, her $t \in [0,1]$ ve $x \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ için,

$$f(ta + (1-t)x) - f(x) \geq t(a-x)f'(x)$$

ve

$$f(tb + (1-t)(a+b-x)) - f(a+b-x) \geq t(x-a)f'(a+b-x)$$

eşitsizliklerini elde ederiz. Bu eşitsizlikleri $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ de m e göre integre edip her tarafı $(b-a)$ ile bölüp (2.28), (2.35), (2.36) ve (2.3) ü kullanırsak, (2.16) yı elde ederiz.

Diğer taraftan

$$\frac{f(a) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{2} \leq \frac{1}{2}\left(a - \frac{a+b}{2}\right)f'(a) = \frac{a-b}{4}f'(a)$$

ve

$$\frac{f(b) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{2} \leq \frac{1}{2}\left(b - \frac{a+b}{2}\right)f'(b) = \frac{b-a}{4}f'(b)$$

eşitsizliklerini taraf tarafa toplarsak

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\left(f'(b) - f'(a)\right)(b-a)}{4} \tag{2.37}$$

elde edilir. Sonuçta (2.3), (2.10), (2.11) ve (2.35) den (2.15) ve (2.16) elde edilir ve ispat tamamlanır.

3 FARKLI KONVEKSLİK TÜRLERİ İÇİN HERMITE HADAMARD TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

Bu bölümde farklı konvekslik türleri için Hermite Hadamard eşitsizliği ile ilgili genelleştirmeler verilmiştir. İlk olarak Ion'un quasi-konveks fonksiyonlar için Hermite Hadamard tipi eşitsizliğinin sağ tarafı üzerine sonuçlarını vereceğiz. Daha sonra Alomari, Darus ve Kırmacı'nın quasi-konveks fonksiyonlar ve s-konveks fonksiyonlar için oluşturdukları Hermite Hadamard tipli eşitsizlikler için genelleştirmelerini vereceğiz. Son olarakta, Chen ve Feng'in birinci türevinin mutlak değeri s-konveks olan fonksiyon için Hermite Hadamard eşitsizliğinin sol tarafı ile ilgili bazı eşitsizliklerden bahsedeceğiz.

3.1 Quasi-Konveks Fonksiyon için Kestirimler ve Genelleştirmeleri

Ion [28] de quasi-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafı ile ilgili bazı sonuçlar öne sürmüştür. Ayrıca trapezoidal formda $\int_a^b f(x)\,dx$ integralinin yaklaşık hatası için bazı sonuçlar ve uygulamalar elde etmiştir. Ion'un teoremini vermeden önce ispat için gerekli olan lemmayı vererek başlayalım.

Lemma 3.1.1 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $(a.b)$ üzerinde diferansiyellenebilen fonksiyon, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.olsun.$\left|f'\right| \in L^1(a,b)$ olmak üzere

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \tag{3.1}$$

$$= \frac{(b-a)}{2}.\int_0^1 (1-2t)\,f'(ta+(1-t)b)\,dt$$

eşitsizliği geçerlidir. [28, Lemma 2.1]

İspat. Kısmi integrasyon yöntemiyle

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 (1-2t)\,f'(ta+(1-t)b)\,dt \\ &= \frac{f(ta+(1-t)b)}{a-b}(1-2t)\bigg|_0^1 + 2\int_0^1 \frac{f(ta+(1-t)b)}{a-b}dt \end{aligned}$$

eşitliğine sahip oluruz ve integrasyonda $x = ta + (1-t)\,b$ değişken değişimi ile

$$I = \frac{f(a)+f(b)}{b-a} - \frac{2}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)\,dx$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.2 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $(a.b)$ üzerinde diferansiyellenebilen fonksiyon olmak üzere $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ olsun. $\left|f'\right|^q$, $[a,b]$ üzerinde quasi-konveks fonksiyon ise

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq (b-a)\,\frac{\sup\left\{\left|f'(a)\right|, \left|f'(b)\right|\right\}}{4}$$

eşitisizliği geçerlidir. [28, Teorem 1]

İspat. $\left|f'\right|$, (a,b) de quasi-konveks olduğundan ve Lemma 3.1.1 yardımıyla

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \\
= \; & \left|\frac{(b-a)}{2}.\int_0^1 (1-2t)\,f'(ta+(1-t)\,b)\,dt\right| \\
\leq \; & \frac{b-a}{2}\int_0^1 |1-2t|\left|f'(ta+(1-t)\,b)\right| dt \\
\leq \; & \frac{b-a}{2}\int_0^1 |1-2t|\left|\sup\left\{\left|f'(a)\right|, \left|f'(b)\right|\right\}\right| dt \\
= \; & \frac{(b-a)\sup\left\{\left|f'(a)\right|, \left|f'(b)\right|\right\}}{2}\int_0^1 |1-2t|\,dt \\
= \; & (b-a)\,\frac{\sup\left\{\left|f'(a)\right|, \left|f'(b)\right|\right\}}{4}
\end{aligned}$$

olup ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.3 $f : [a,b] \to \mathbb{R},\ (a,b)$ üzerinde diferansiyellenebilen fonksiyon ve $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ olsun. $\left|f'\right|^{\frac{p}{p-1}}$, $[a,b]$ üzerinde quasi-konveks fonksiyon olmak üzere

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \tag{3.2}$$
$$\leq \frac{(b-a)}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}}.\left[\sup\left\{\left|f'(a)\right|^{\frac{p}{p-1}},\left|f'(b)\right|^{\frac{p-1}{p}}\right\}\right]^{\frac{p-1}{p}}$$

eşitsizliği geçerlidir. [28, Teorem 2]

Not. Dragomir [29] da Teorem 3.1.2 ve Teorem 3.1.3 ü genelleştirmiştir. Şimdi Teorem 3.1.3 ün ispatını verelim.

İspat. Öncelikle

$$\int_0^1 |1-2t|^p\,dt=\int_0^{\frac{1}{2}}(1-2t)^p\,dt+\int_{\frac{1}{2}}^1(2t-1)^p\,dt=2\int_0^{\frac{1}{2}}(1-2t)^p\,dt=\frac{1}{p+1}$$

olduğuna dikkat çekecek olursak, Lemma 3.1.1 ve Hölder eşitsizliği yardımıyla,

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \\
= &\ \frac{(b-a)}{2}.\int_0^1 |(1-2t)|\left|f'(ta+(1-t)b)\right|dt \\
\leq &\ \frac{(b-a)}{2}.\left(\int_0^1 |(1-2t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left|f'(ta+(1-t)b)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
\leq &\ \frac{(b-a)}{2}.\left(\int_0^1 |(1-2t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\sup\left\{\left|f'(a)\right|^q,\left|f'(b)\right|^q\right\}dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
= &\ \frac{(b-a)}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left[\sup\left\{\left|f'(a)\right|^q,\left|f'(b)\right|^q\right\}dt\right]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

dir.

Alomari ve arkadaşları [30] da quasi-konveks fonksiyonlar için Hadamard eşitsizliğinin bir kestirimini vermiş, özel ortalamalar için uygulamalar verip, trapezoidal formül için bazı yaklaşık hatalar elde etmiştir. Alomari'nin sonuçlarını vermeden önce ispat için gerekli olan lemmayı verelim.

Teorem 3.1.5 i ispatlamak için aşağıdaki lemmaya ihtiyaç duyulmuştur.

Lemma 3.1.4 $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I^0 üzerinde diferansiyellenebilir fonksiyon, $a, b \in I^0$ ve $a < b$ olsun. $f^{'} \in L[a,b]$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \\
=\ & \frac{b-a}{4}.\left[\int_0^1 (-t)\, f^{'}\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)dt+\int_0^1 tf^{'}\left(\frac{1+t}{2}b+\frac{1-t}{2}a\right)dt\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. [30, Lemma 2.1]

İspat. Kısmi integrasyon yöntemi ile

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 -tf^{'}\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)dt \\
&= -\frac{2}{a-b}f\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)t|_0^1+\frac{2}{a-b}\int_0^1 f\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)dt \\
&= -\frac{2}{a-b}f(a)+\frac{2}{a-b}\int_0^1 f\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)dt
\end{aligned}$$

bulunur. İntegrasyonda $x=\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b$, $dx=\frac{a-b}{2}dt$ değişken değişimi ile

$$I_1=\frac{2}{b-a}f(a)-\frac{4}{(a-b)^2}\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\,dx$$

bulunur. I_2 için aynı yöntemler uygulanırsa

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^1 tf^{'}\left(\frac{1+t}{2}b+\frac{1-t}{2}a\right)dt \\
&= \frac{2}{b-a}f(b)\,t+\frac{4}{(b-a)^2}\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\,dx
\end{aligned}$$

eşitliğine sahip oluruz. Böylece eşitlikler taraf tarafa toplanırsa

$$\frac{b-a}{4}\left[I_{1+}I_2\right]=\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right|$$

eşitliği elde edilir.

Alomari [28] de ki eşitsizlikten daha iyi olduğunu düşündüğü quasi-konveks fonksiyonlar için Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafı ile ilgili yeni sınırlarını bulduğu Teorem 3.1.5 aşağıda verilmiştir.

Teorem 3.1.5 $f: I\subset[0,\infty)\to\mathbb{R}, I^0$ üzerinde diferansiyellenebilir fonksiyon, $a,b\in I$ ve $a<b$ için $f'\in L[a,b]$ dir. $|f'|, [a,b]$ üzerinde quasi-konveks fonksiyon olmak üzere

$$\begin{aligned}&\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right|\\ \leq\ &\frac{b-a}{8}\left[\sup\left\{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|,\left|f'(a)\right|\right\}\right.\\ &\left.+\sup\left\{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|,\left|f'(b)\right|\right\}\right]\end{aligned}\tag{3.3}$$

eşitsizliği geçerlidir. [30, Teorem 2.2]

İspat. Lemma 3.1.4 den

$$\begin{aligned}&\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right|\\ =\ &\frac{b-a}{4}.\left|\int_0^1(-t)\,f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)dt+\int_0^1 tf'\left(\frac{1+t}{2}b+\frac{1-t}{2}a\right)dt\right|\end{aligned}$$

eşitliğine sahip oluruz ve $|f'|$, herhangi $t\in[0,1]$ için $[a,b]$ üzerinde quasi-konveks fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \\
&= \frac{b-a}{4}.\left[\int_0^1 |-t|\left|f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)\right|dt\right. \\
&\left.+\int_0^1 |t|\left|f'\left(\frac{1+t}{2}b+\frac{1-t}{2}a\right)\right|dt\right] \\
&\leq \frac{b-a}{4}\left[\int_0^1 t\sup\left\{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|,\left|f'(a)\right|\right\}dt\right. \\
&\left.+\int_0^1 t\sup\left\{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|,\left|f'(b)\right|\right\}dt\right] \\
&= \frac{b-a}{8}\left[\sup\left\{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|,\left|f'(a)\right|\right\}\right. \\
&\left.+\sup\left\{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|,\left|f'(b)\right|\right\}\right]
\end{aligned}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Sonuç f , Teorem 3.1.5 deki gibi tanımlanıyor ve burada

1) $\left|f'\right|$ artansa,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \frac{b-a}{8}\left[\left|f'(b)\right|+\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\right] \quad (3.4)$$

2) $\left|f'\right|$ azalansa,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \frac{b-a}{8}\left[\left|f'(a)\right|+\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\right] \quad (3.5)$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Not. (3.4) ve (3.5) quasi-konveks ve konveks fonksiyonlar Trapezoid eşitsizliğine dair iki yeni kestirimdir. Şimdi Teorem 3.1.6 yı verelim.

Teorem 3.1.6 $f : I \subset [0,\infty) \to \mathbb{R}$, I^0 üzerinde diferansiyellenebilir fonksiyon olsun öyle ki $a,b \in I$ ve $a < b$ için $f' \in L[a,b]$ dir. $|f'|^{\frac{p}{p-1}}$, $[a,b]$ üzerinde $p > 1$ için quasi-konveks fonksiyon olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \\
\leq\ & \frac{b-a}{4(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left[\left(\sup\left\{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^{\frac{p}{p-1}}, \left|f'(b)\right|^{\frac{p}{p-1}}\right\}\right)^{\frac{p-1}{p}}\right. \qquad (3.6)\\
&\left. + \left(\sup\left\{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^{\frac{p}{p-1}}, \left|f'(a)\right|^{\frac{p}{p-1}}\right\}\right)^{\frac{p-1}{p}}\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. [30, Teorem 2.3]

İspat. Lemma 3.1.4 ve Hölder İntegral eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \\
\leq\ & \frac{b-a}{4}.\left[\int_0^1 |-t|\left|f'\left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b\right)\right|dt + \int_0^1 |t|\left|f'\left(\frac{1+t}{2}b + \frac{1-t}{2}a\right)\right|dt\right] \\
\leq\ & \frac{b-a}{4}\left[\left(\int_0^1 t^p dt\right)^{1/p} + \left(\int_0^1 \left|f'\left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b\right)\right|^q dt\right)^{1/q}\right. \\
&\left. + \left(\int_0^1 t^p dt\right)^{1/p} + \left(\int_0^1 \left|f'\left(\frac{1+t}{2}b + \frac{1-t}{2}a\right)\right|^q dt\right)^{1/q}\right] \\
\leq\ & \frac{b-a}{4(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left[\left(\sup\left\{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q, \left|f'(b)\right|^q\right\}\right)^{1/q}\right. \\
&\left. + \left(\sup\left\{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q, \left|f'(a)\right|^q\right\}\right)^{1/q}\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir, ispat tamamlanır. Burada $(1/p + 1/q = 1)$ dir

Sonuç 3.1.7 f Teorem 3.1.6 daki gibi tanımlanıyor ve burada

1) $\left|f'\right|^{p/p-1}$ artansa,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \frac{b-a}{4(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left[\left|f'(b)\right|+\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\right]$$

2)$\left|f'\right|^{p/p-1}$ azalansa,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \frac{b-a}{4(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left[\left|f'(a)\right|+\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\right]$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Teorem 3.1.6 nın ilerlemiş şekli ve Teorem 3.1.5 in sonucunu sağlamlaştıran Teorem 3.1.8 nin ispatını verelim.

Teorem 3.1.8 $f : I^0 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, I^0$ üzerinde diferansiyellenebilir fonksiyon, $a, b \in I^0$ ve $a < b$ olsun. $|f'|^q, [a, b]$ üzerinde $q > 1$ için quasi-konveks fonksiyon olmak üzere

$$\begin{aligned} &\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \\ \leq\ & \frac{b-a}{8}\left[\left(\sup\left\{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q, \left|f'(b)\right|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\ &\left.+\left(\sup\left\{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q, \left|f'(a)\right|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}}\right] \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. [30, Teorem 2.4]

İspat. Lemma 3.1.4 ve power-mean eşitsizliği kullanılarak,

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \\
\leq\ & \frac{b-a}{4}.\left[\int_0^1 |-t|\left|f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)\right|dt+\int_0^1 |t|\left|f'\left(\frac{1+t}{2}b+\frac{1-t}{2}a\right)\right|dt\right] \\
\leq\ & \frac{b-a}{4}\left[\left(\int_0^1 tdt\right)^{1-1/q}+\left(\int_0^1 t\left|f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)\right|^q dt\right)^{1/q}\right. \\
& \left.+\left(\int_0^1 tdt\right)^{1-1/q}+\left(\int_0^1 t\left|f'\left(\frac{1+t}{2}b+\frac{1-t}{2}a\right)\right|^q dt\right)^{1/q}\right] \\
\leq\ & \frac{b-a}{8}\left[\left(\sup\left\{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q,\left|f'(b)\right|^q\right\}\right)^{1/q}\right. \\
& \left.+\left(\sup\left\{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q,\left|f'(a)\right|^q\right\}\right)^{1/q}\right]
\end{aligned}
$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

3.2 S-Konveks Fonksiyonlar için Kestirimler ve Genelleştirmeleri

Alomari [31] de s-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sol tarafı ile ilgili bazı varsayımlar öne sürmüştür. Alomari'nin teoremini vermeden önce [32] de Dragomir ve Fitzcpatric değişken değişimi uygulayarak Hermite-Hadamard eşitsizliğini s-konveks fonksiyonlar için oluşturmuşlardır. İlgili teoremi verdikten sonra ispat için gerekli lemmayı verelim.

Öncelikle Dragomir ve Fitzcpatric'in [32] de ki teoremini verelim.

Teorem 3.2.1 $f : [0,\infty) \to f : [0,\infty)$ s-konveks fonksiyon, $s \in (0,1]$, $a,b \in [0,\infty)$ ve $a < b$ olsun. $f \in L^{'}[0,1]$ olmak üzere

$$2^{s-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{s+1} \tag{3.7}$$

eşitsizliği geçerlidir. [31, Teorem 1.1]

Şimdi gerekli olan lemma ile devam edelim.

Lemma 3.2.2 $f : I \subset \mathbb{R} \to R$, I^0 üzerinde diferansiyellenebilir fonksiyon ve $a, b \in I$, $a < b$ olsun. $\left|f'\right| \in L[a,b]$ olmak üzere

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \\ = \; & \frac{b-a}{4}\left[\int_0^1 t f'\left(t\frac{a+b}{2} + (1-t)a\right) dt + \int_0^1 (t-1) f'\left(tb + (1-t)\frac{a+b}{2}\right) dt\right] \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. [31, Lemma 2.1]

İspat. Kısmi integrasyon yöntemiyle

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 t f'\left(t\frac{a+b}{2} + (1-t)a\right) dt \\ &= \frac{2}{b-a} t f\left(t\frac{a+b}{2} + (1-t)a\right)\Bigg|_0^1 - \frac{2}{b-a}\int_0^1 f\left(t\frac{a+b}{2} + (1-t)a\right) dt \\ &= \frac{2}{b-a} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{2}{b-a}\int_0^1 f\left(t\frac{a+b}{2} + (1-t)a\right) dt \end{aligned}$$

bulunur ve integrasyonda $x = t\frac{a+b}{2} + (1-t)a$, $dx = \frac{b-a}{2}dt$ değişken değişimi uygulanırsa

$$I_1 = \frac{2}{b-a} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{4}{(b-a)^2} \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\,dx$$

elde edilir. Benzer olarak

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^1 (t-1) f'\left(tb + (1-t)\frac{a+b}{2}\right) dt \\ &= \frac{2}{b-a} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{4}{(b-a)^2} \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\,dx \end{aligned}$$

olduğu görülür ve böylece eşitlikler taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned} I &= \frac{b-a}{4}\left[I_1 + I_2\right] = \frac{b-a}{4}\left[\frac{4}{(b-a)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)\,dx\right] \\ &= f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \end{aligned}$$

ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.3 $f : I \subset [0, \infty) \to R$, I^0 üzerinde diferansiyellenebilir fonksiyon olsun öyle ki $f \in L[a,b]$, $a, b \in I$ ve $a < b$ dir. f', $[a,b]$ üzerinde bazı $s \in (0,1]$ sabitleri için s-konveks fonksiyon olmak üzere

$$\begin{aligned} & \left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \right| \\ \leq\ & \frac{b-a}{4(s+1)(s+2)}\left[\left|f'(a)\right| + 2(s+1)\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| + \left|f'(b)\right|\right] \quad (3.8) \\ \leq\ & \frac{\left(2^{2-s}+1\right)(b-a)}{4(s+1)(s+2)}\left[\left|f'(a)\right| + \left|f'(b)\right|\right] \quad (3.9) \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. [31, Teorem 2.2]

İspat. Lemma 3.2.2 den yararlanarak

$$\begin{aligned}
& \left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \right| \\
\leq\ & \frac{b-a}{4}\left[\int_0^1 t\left|f'\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)a\right)\right|dt + \int_0^1 |t-1|\left|f'\left(tb+(1-t)\frac{a+b}{2}\right)\right|dt\right] \\
\leq\ & \frac{b-a}{4}\int_0^1 t\left[t^s\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| + (1-t)^s\left|f'(a)\right|\right]dt \\
& +\frac{b-a}{4}\int_0^1 (1-t)\left[(1-t)^s\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| + t^s\left|f'(b)\right|\right]dt \\
=\ & \frac{b-a}{4}\left[\frac{1}{s+2}\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| + \frac{1}{(s+1)(s+2)}\left|f'(a)\right|\right] \\
& +\frac{b-a}{4}\left[\frac{1}{(s+1)(s+2)}\left|f'(b)\right| + \frac{1}{(s+2)}\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\right] \\
=\ & \frac{b-a}{4(s+1)(s+2)}\left[\left|f'(a)\right| + 2(s+1)\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| + \left|f'(b)\right|\right] \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir ve böylece (3.8) ispatlanır. (3.9) eşitsizliğini ispatlamak için herhangi $t \in [0,1]$ için $\left|f'\right|$, $[a,b]$ üzerinde s-konveks olduğundan (3.7) eşitsizliği yardımıyla

$$2^{s-1}\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \leq \frac{\left|f'(a)\right| + \left|f'(b)\right|}{s+1} \qquad (3.11)$$

eşitsizliğine sahip oluruz. (3.10) ile (3.11) birleştirilerek,

$$
\begin{aligned}
&\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \\
\leq\ & \frac{b-a}{4(s+1)(s+2)}\left[\left|f'(a)\right|+2(s+1)\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|+\left|f'(b)\right|\right] \\
\leq\ & \frac{b-a}{4(s+1)(s+2)}\left[\left|f'(a)\right|+2(s+1)\,2^{1-s}\frac{|f'(a)|+|f'(b)|}{s+1}+\left|f'(b)\right|\right] \\
=\ & \frac{(2^{2-s}+1)(b-a)}{4(s+1)(s+2)}\left[\left|f'(a)\right|+\left|f'(b)\right|\right]
\end{aligned}
$$

olduğu görülür ve (3.9) un ispatı tamamlanır.

Alomari ve arkadaşlarının s-konveks fonksiyonlar için Hadamard eşitsizliğinin sol tarafının üst sınırını buldukları Teorem 3.2.4 aşağıda verilmiştir.

Teorem 3.2.4 $f : I \subset [0,\infty) \to R$, I^0 üzerinde diferansiyellenebilir fonksiyon olsun öyle ki $a,b \in I$ ve $a<b$ için $f' \in [a,b]$ dir. $|f'|^{\frac{p}{p-1}}$, $(p>1)$, $[a,b]$ üzerinde bazı $s \in (0,1]$ sabitleri için s-konveks fonksiyon olmak üzere

$$
\begin{aligned}
&\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \left(\frac{b-a}{4}\right)\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{s+1}\right)^{\frac{2}{q}} \\
&\left[\left(\left(2^{1-s}+s+1\right)\left|f'(a)\right|^q+2^{1-s}\left|f'(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right. \qquad (3.12) \\
&\left.+\left((2^{1-s}\left|f'(a)\right|^q+\left(2^{1-s}+s+1\right)\left|f'(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right]
\end{aligned}
$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada

$$q = p/(p-1)$$

dir. [31, Teorem 2.3]

İspat. $\mathbf{p>1}$ olduğunu varsayalım. Lemma 3.2.2 ve Hölder eşitsizliğini kullanarak

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right|$$

$$\leq \left[\frac{b-a}{4}\int_0^1 t\left|f'\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)\,a\right)\right|dt+\int_0^1(1-t)\left|f'\left(tb+(1-t)\,\frac{a+b}{2}\right)\right|dt\right]$$

$$\leq \frac{b-a}{4}\left(\int_0^1 t^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left|f'\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)\,a\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{b-a}{4}\left(\int_0^1(1-t)^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left|f'\left(tb+(1-t)\,\frac{a+b}{2}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliğine sahip oluruz ve $|f'|^q$ s-konveks olduğundan,

$$\int_0^1\left|f'\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)\,a\right)\right|dt\leq\int_0^1\left[t^s\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+(1-t)^s\left|f'(a)\right|^q\right]dt$$

$$=\frac{1}{s+1}\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+\frac{1}{s+1}\left|f'(a)\right|^q$$

ve

$$\int_0^1\left|f'\left(tb+(1-t)\,\frac{a+b}{2}\right)\right|^q dt \leq \int_0^1\left[t^s f'(b)^q+(1-t)^s\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right]dt$$

$$=\frac{1}{s+1}\left|\left|f'(b)\right|^q+\frac{1}{s+1}f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q$$

olur, böylece

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{4}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}} \tag{3.13}$$

$$\left[\left(\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+\left|f'(a)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+\left|f'(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

eşitsizliğini elde ederiz. Şimdi $\left|f'\right|^{q}$, herhangi $t \in [0,1]$ için $[a,b]$ üzerinde s-konveks olduğundan ve (3.7) eşitsizliğinden

$$2^{s-1}\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \leq \frac{\left|f'(a)\right|+\left|f'(b)\right|}{s+1} \tag{3.14}$$

(3.14) elde edilir. (3.13) ile (3.14) birleştirilirse

$$\begin{aligned}
&\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \\
\leq\ & \left(\frac{b-a}{4}\right)\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\left[\left(\frac{2^{1-s}}{s+1}\left(\left|f'(a)\right|^{q}+\left|f'(a)\right|^{q}+\left|f'(b)\right|^{q}\right)\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left(\left|f'(b)\right|^{q}+\frac{2^{1-s}}{s+1}\left(\left|f'(a)\right|^{q}+\left|f'(b)\right|^{q}\right)\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\
\leq\ & \left(\frac{b-a}{4}\right)\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{s+1}\right)^{\frac{2}{q}} \\
&\left[\left(\left(2^{1-s}+s+1\right)\left|f'(a)\right|^{q}+\left(2^{1-s}+s+1\right)\left|f'(b)\right|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left(\left(2^{1-s}\right)\left|f'(a)\right|^{q}+\left(2^{1-s}+s+1\right)\left|f'(b)\right|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}\right]
\end{aligned}$$

elde edilir ve burada

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

dir. Teorem 3.2.4 ten aşağıdaki sonuca ulaşılır.

Sonuç 3.2.5 $f : I \subset [0,\infty) \to R, I^{0}$ üzerinde diferansiyellenebilir fonksiyon olsun öyle ki $a,b \in I$ ve $a < b$ için $f' \in L[a,b]$ dir. $|f'|^{\frac{p}{p-1}}$, $(p>1)$, $[a,b]$ üzerinde bazı $s \in (0,1]$ sabitleri için s-konveks fonksiyon olmak üzere

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \right|$$

$$\leq \left(\frac{b-a}{4}\right)\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{s+1}\right)^{\frac{2}{q}}$$

$$\left\{2^{(1-s)/q} + \left(2^{1-s}+s+1\right)^{1/q}\right\}\left(\left|f'(a)\right| + \left|f'(b)\right|\right)$$

eşitsizliği elde edilir. Burada

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

dir.

İspat. **(**3.12**)** eşitsizliği üzerinde $a_1 = (2^{1-s}+s+1)\left|f'(a)\right|^q, b_1 = (2^{1-s})\left|f'(b)\right|^q, a_2 = (2^{1-s})\left|f'(a)\right|^q$ ve $b_2 = (2^{1-s}+s+1)\left|f'(b)\right|^q$ olsun. Burada $q > 1$ için $0 < 1/q < 1$ dir. Aslında

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^r \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^r + \sum_{i=1}^{n} b_i^r$$

$r = (0,1)\,,\ a_1, a_2, ..., a_n \geq 0$ ve $b_1, b_2, ..., b_n \geq 0$ olmak üzere yukarıdaki eşitsizliğe uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
& \left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \right| \\
\leq\ & \left(\frac{b-a}{4}\right)\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{s+1}\right)^{\frac{2}{q}} \\
& +\left[\left(\left(2^{1-s}+s+1\right)\left|f'(a)\right|^{q}+2^{1-s}\left|f'(b)\right|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
& \left. +\left(2^{1-s}\left|f'(a)\right|^{q}+\left(2^{1-s}+s+1\right)\left|f'(b)\right|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\
\leq\ & \left(\frac{b-a}{4}\right)\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{s+1}\right)^{\frac{2}{q}} \\
& \left\{2^{(1-s)/q}+\left(2^{1-s}+s+1\right)^{1/q}\right\}\left(\left|f'(a)\right|+\left|f'(b)\right|\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir ve aşağıdaki teorem sağlanır.

Teorem 3.2.6 $f : I \subset [0,\infty) \to \mathbb{R}$, I^0 üzerinde diferansiyellenebilir fonksiyon olsun öyle ki $a, b \in I$ ve $a < b$ için $f' \in L[a,b]$ dir. $|f'|^q$, $(q \geq 1)$, $[a,b]$ üzerinde bazı $s \in (0,1]$ sabitleri için s-konveks fonksiyon olmak üzere.

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \ \leq\ & \left(\frac{b-a}{8}\right)\left(\frac{2}{(s+1)(s+2)}\right)^{\frac{1}{q}} \\
& \left[\left\{\left(2^{1-s}+1\right)\left|f'(a)\right|^{q}+2^{1-s}\left|f'(b)\right|^{q}\right\}^{\frac{1}{q}}\right. \\
& \left. +\left\{\left(2^{1-s}+1\right)\left|f'(b)\right|^{q}+2^{1-s}\left|f'(a)\right|^{q}\right\}^{\frac{1}{q}}\right]
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

eşitsizliği geçerlidir. [31, Teorem 2.4]

İspat. $p \geq 1$ olduğunu varsayalım. Lemma 3.2.2 ve power-mean eşitsizliği kullanılarak

$$
\begin{aligned}
&\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \\
\leq\ & \frac{b-a}{4}\left[\int_o^1 t\left|f'\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)\,a\right)\right|dt+\int_o^1 (1-t)\left|f'\left(tb+(1-t)\,\frac{a+b}{2}\right)\right|dt\right] \\
\leq\ & \frac{b-a}{4}\left(\int_o^1 tdt\right)^{1-1/q}\left(\int_o^1 t\left|f'\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)\,a\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
& +\frac{b-a}{4}\left(\int_o^1 (1-t)\,dt\right)^{1-1/q}\left(\int_o^1 (1-t)\left|f'\left(tb+(1-t)\,\frac{a+b}{2}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}
$$

eşitsizliğine sahip oluruz ve $|f'|^q$ s-konveks olduğundan

$$
\begin{aligned}
& \int_o^1 t\left|f'\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)\,a\right)\right|^q dt \\
\leq\ & \int_o^1 \left[t^{s+1}\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+t\,(1-t)^s\left|f'(a)\right|^q\right]dt \\
=\ & \frac{1}{s+2}\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+\frac{1}{(s+1)\,(s+2)}\left|f'(a)\right|^q
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
& \int_o^1 (1-t)\left|f'\left(tb+(1-t)\,\frac{a+b}{2}\right)\right|^q dt \\
& \int_o^1 \left[(1-t)\,t^s\left|f'(b)\right|^q+(1-t)^{s+1}\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right]dt \\
=\ & \frac{1}{s+2}\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+\frac{1}{(s+1)\,(s+2)}\left|f'(b)\right|^q
\end{aligned}
$$

bulunur. Böylece,

$$\begin{aligned} & \left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \right| \\ \leq \quad & \left(\frac{b-a}{8}\right)\left(\frac{2}{(s+1)(s+2)}\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (3.16) \\ & \left[\left((s+1)\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q + \left|f'(a)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \left. + \left(\left|f'(b)\right|^q + (s+1)\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right] \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Şimdi $|f'|^q$, $[a,b]$ üzerinde bazı $t \in (0,1]$ sabitleri için s-konveks fonksiyon olduğundan ve (3.7) eşitsizliği kullanılarak

$$2^{s-1}\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q \leq \frac{\left|f'(a)\right|^q + \left|f'(b)\right|^q}{s+1} \qquad (3.17)$$

olduğu görülür. (3.16) ile (3.17) birleştirilerek

$$\begin{aligned}
&\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \\
\leq\ &\left(\frac{b-a}{8}\right)\left(\frac{2}{(s+1)(s+2)}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\left[\left((s+1)\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+\left|f'(a)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left(\left|f'(b)\right|^q+(s+1)\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\
\leq\ &\left(\frac{b-a}{8}\right)\left(\frac{2}{(s+1)(s+2)}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\left[\left(\left(2^{1-s}\left|f'(a)\right|^q+\left|f'(b)\right|^q\right)+\left|f'(a)\right|\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left|f'(b)\right|^q+2^{1-s}\left(\left|f'(a)\right|^q+\left|f'(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\
=\ &\left(\frac{b-a}{8}\right)\left(\frac{2}{(s+1)(s+2)}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\left[\left\{\left(2^{1-s}+1\right)\left|f'(a)\right|^q+2^{1-s}\left|f'(b)\right|^q\right\}^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left\{\left(2^{1-s}+1\right)\left|f'(b)\right|^q+2^{1-s}\left|f'(a)\right|^q\right\}^{\frac{1}{q}}\right]
\end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 3.2.7 f ,Teorem 3.2.6 daki gibi tanımlansın, $q \geq 1$ için olmak üzere

$$\begin{aligned} & \left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \right| \\ \leq \quad & \left(\frac{b-a}{8}\right)\left(\frac{2}{(s+1)(s+2)}\right)^{\frac{1}{q}} \\ & \left\{ \left(2^{1-s/q} + \left(2^{1-s}+1\right)^{1/q}\right)\left(\left|f'(a)\right| + 2^{1-s}\left|f'(b)\right|\right) \right\} \end{aligned} \tag{3.18}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Teorem 3.2.8 $f : I \subset [0,\infty) \to R$, I^0 üzerinde diferansiyellenebilir fonksiyon olsun öyle ki $a,b \in I$ ve $a < b$ için $f' \in L[a,b]$ dir. $|f'|^q, (q \geq 1)$ için $[a,b]$ üzerinde bazı $s \in (0,1]$ sabitleri için konkav fonksiyon olmak üzere

$$\begin{aligned} & \left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \right| \\ \leq \quad & \left(\frac{b-a}{4}\right)\left(\frac{q-1}{2q-1}\right)^{1-\frac{1}{q}} \left[\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right| + \left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|\right] \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. [31, Teorem 2.5]

İspat. $q > 1$ ve $p = q/(q-1)$ için Lemma 3.2.2 ve Hölder eşitsizliği kullanılarak,

$$\begin{aligned} & \left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \right| \\ \leq \quad & \frac{b-a}{4}\left[\int_0^1 t\left|f'\left(t\frac{a+b}{2} + (1-t)a\right)\right| dt \right. \\ & \left. + \int_o^1 (1-t)\left|f'\left(tb + (1-t)\frac{a+b}{2}\right)\right| dt\right] \\ \leq \quad & \frac{b-a}{4}\left(\int_0^1 t^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 \left|f'\left(t\frac{a+b}{2} + (1-t)a\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\ & + \frac{b-a}{4}\left(\int_0^1 (1-t)^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_o^1 \left|f'\left(tb + (1-t)\frac{a+b}{2}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Burada $(1/p+1/q=1)$ dir. $|f'|^q$, $[a,b]$ üzerinde her $x,y\in[a,b]$ için konkav olduğundan ve power-mean eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}\left|f'(\lambda x+(1-\lambda)y)\right|^q &\geq \lambda\left|f'(x)\right|^q+(1-\lambda)\left|f'(y)\right|^q\\ &\geq \left(\lambda\left|f'(x)\right|+(1-\lambda)\left|f'(y)\right|\right)^q\end{aligned}$$

Bu yüzden,

$$\left|f'(\lambda x+(1-\lambda)y)\right|\geq\lambda\left|f'(x)\right|+(1-\lambda)\left|f'(y)\right|$$

olur, böylece $\left|f'\right|$ aynı zamanda konkavdır. Jensen integral eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned}\int_0^1\left|f'\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)\,a\right)\right|dt &\leq \left(\int_o^1 t^0dt\right)\left|f'\left(\frac{\int_0^1\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)\,a\right)dt}{\int_o^1 t^0dt}\right)\right|^q dt\\ &\leq \left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q\end{aligned}$$

sağlanır ve benzer olarak

$$\int_o^1\left|f'\left(tb+(1-t)\,\frac{a+b}{2}\right)\right|dt\leq\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^q$$

elde edilir. Bütün eşitsizlikler birleştirilerek sonuca ulaşılır.

Şimdi Alomari [31] de bulmuş olduğu kestirimlere dair bir notu verelim.

Not. Eşitsizlik (3.8) ile (3.9) da $s=1$ verilirse [34] de Kırmacı'nın ispatladığı

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\leq\frac{b-a}{8}\left[\left|f'(a)\right|+\left|f'(b)\right|\right]$$

eşitsizliğinin yeni bir kestirimi bulunur. Ayrıca (3.15) ile [35] de Pearce ve Pecaric'in ispatladığı

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right|\leq\frac{b-a}{4}\left[\frac{|f(a)|^q+|f(b)|^q}{2}\right]^{1/q}$$

eşitsizliğinin ve (3.12), (3.18) ve Sonuç 3.2.5 ile [35] de Pearce ve Pecaric'in ispatladığı

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right|\leq\frac{b-a}{4}\left[\frac{|f(a)|^q+|f(b)|^q}{2}\right]^{1/q}$$

eşitsizliğinin yeni sınırları bulunur.

Şimdi Chen ve Feng'in [33] de birinci türevinin mutlak değeri s-konveks olan fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sol tarafına dair teoremlerini verelim. Chen ve Feng'in teoremine geçmeden gerekli olan lemma ile başlayalım.

Lemma 3.2.9 $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I^0 üzerinde diferansiyellenebilir fonksiyon ve $a, b \in I$, $a < b$ dir. $f' \in L[a,b]$ olmak üzere $\forall\lambda \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned}
& f(\lambda a+(1-\lambda)b)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt \\
= \;& (b-a)(1-\lambda)^2\int_0^1 tf'(\lambda a+(1-\lambda)b+(1-t)a)\,dt \\
& +(b-a)\lambda^2\int_0^1 (t-1)f'(tb+(1-t)b+(\lambda a+(1-\lambda)b))\,dt
\end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir. [33, Lemma 2.1]

İspat. Kısmi integrasyon yöntemiyle

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 tf'\left(t\left(\lambda a+(1-\lambda)b\right)+(1-t)a\right)dt \\
&= \frac{1}{(b-a)(1-\lambda)} tf\left(t\left(\lambda a+(1-\lambda)b\right)+(1-t)a\right)dt\Big|_0^1 \\
&\quad -\frac{1}{(b-a)(1-\lambda)}\int_0^1 f\left(t\left(\lambda a+(1-\lambda)b\right)+(1-t)a\right)dt \\
&= \frac{1}{(b-a)(1-\lambda)} f\left(\lambda a+(1-\lambda)b\right) \\
&\quad -\frac{1}{(b-a)(1-\lambda)}\int_0^1 f\left(t\left(\lambda a+(1-\lambda)b\right)+(1-t)a\right)dt
\end{aligned}
$$

ve integrasyonda $x = t\left(\lambda a+(1-\lambda)b\right)+(1-t)a$, $dx = (b-a)(1-\lambda)\,dt$ değişken değişimi ile,

$$
I_1 = \frac{1}{(b-a)(1-\lambda)} f\left(\lambda a+(1-\lambda)b\right) - \frac{1}{(b-a)^2(1-\lambda)^2}\int_a^{\lambda a+(1-\lambda)b} f(x)\,dx
$$

bulunur. Benzer olarak,

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^1 (t-1)f'\left(tb+(1-t)\left(\lambda a+(1-\lambda)b\right)\right)dt \\
&= \frac{1}{(b-a)\lambda} f\left(\lambda a+(1-\lambda)b\right) - \frac{1}{(b-a)^2\lambda^2}\int_{\lambda a+(1-\lambda)b}^{b} f(x)\,dx
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilir. Böylece

$$
\begin{aligned}
I &= (b-a)(1-\lambda)^2 I_1 + (b-a)\lambda^2 I_2 \\
&= f\left(\lambda a+(1-\lambda)b\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx
\end{aligned}
$$

ispat tamamlanır. Burada $\lambda = 1/2$ için Lemma 3.2.2 elde edilir.

Teorem 3.2.10 $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I^0 üzerinde diferansiyellenebilir fonksiyon, $f' \in L[a,b]$, $a,b \in I$ ve $a < b$ dir. $|f'|$, $(q \geq 1)$ olacak şekilde $[a,b]$ üzerinde bazı $s \in (0,1]$ sabitleri ve $\forall\lambda \in [0,1]$ için s-konveks fonksiyon olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\left| f(\lambda a + (1-\lambda) b) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\, dt \right| \\
\leq\ & (b-a)(1-\lambda)^2 \left(\frac{1}{(s+1)(s+2)} \left| f'(a) + \frac{1}{s+2} f'(\lambda a + (1-\lambda) b) \right| \right) \\
& + (b-a)\lambda^2 \left(\frac{1}{(s+1)(s+2)} \left| f'(b) + \frac{1}{s+2} f'(\lambda a + (1-\lambda) b) \right| \right)
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. [33, Teorem 3.1]

İspat. Lemma 3.2.9 kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\left| f(\lambda a + (1-\lambda) b) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\, dt \right| \\
\leq\ & (b-a)(1-\lambda)^2 \int_0^1 t \left| f'(\lambda a + (1-\lambda) b) + (1-t) a \right| dt \\
& + (b-a)\lambda^2 \int_0^1 (1-t) \left| f' tb + (1-t)(\lambda a + (1-\lambda) b) \right| dt
\end{aligned}$$

eşitsizliğine sahip olunur ve $|f'|$ s-konveks olduğundan,

$$\left|f(\lambda a+(1-\lambda)b)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt\right|$$

$$\leq (b-a)(1-\lambda)^2\int_0^1 t\left(t^s\left|f'(\lambda a+(1-\lambda)b)\right|+(1-t)^s\left|f'(a)\right|\right)dt$$

$$+(b-a)\lambda^2\int_0^1(1-t)\left(t^s\left|f'(b)+(1-t)^s\right|f'(\lambda a+(1-\lambda)b)\right)dt$$

$$= (b-a)(1-\lambda)^2\left(\frac{1}{(s+1)(s+2)}\left|f'(a)+\frac{1}{s+2}f'(\lambda a+(1-\lambda)b)\right|\right)$$

$$+(b-a)\lambda^2\left(\frac{1}{(s+1)(s+2)}\left|f'(b)+\frac{1}{s+2}f'(\lambda a+(1-\lambda)b)\right|\right)$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır. Teorem 3.2.11 ile devam edelim.

Teorem 3.2.11 $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I^0 üzerinde diferansiyellenebilir fonksiyon olsun öyle ki $f' \in L[a,b]$, burada $a,b \in I$ ve $a<b$ dir. $|f'|^{p/p-1}$, $(p>1)$ olacak şekilde $[a,b]$ üzerinde bazı $s \in (0,1]$ sabitleri ve $\forall\lambda \in [0,1]$ için s-konveks fonksiyon olmak üzere $(q = p/p-1)$

$$\left|f(\lambda a+(1-\lambda)b)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt\right|$$

$$\leq (b-a)\left(\frac{1}{p+1}\right)^{1/p}\left(\frac{1}{s+1}\right)^{1/q}$$

$$\left((1-\lambda)^2\left[(\lambda^s+1)\left|f'(a)\right|^q+(1-\lambda)^s\left|f'(b)\right|^q\right]^{1/q}\right.$$

$$\left.+\lambda^2\left[\lambda^s\left|f'(a)\right|^q+((1-\lambda)^s+1)\left|f'(b)\right|^q\right]^{1/q}\right)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $(q = p/(p-1))$ dir. [33, Teorem 3.2]

İspat. Lemma 3.2.9 ve Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\left|f(\lambda a+(1-\lambda)b)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt\right|$$

$$\leq \quad (b-a)(1-\lambda)^2\int_0^1 t\left|f'(t(\lambda a+(1-\lambda)b)+(1-t)a)\right|dt$$

$$+(b-a)\lambda^2\int_0^1(1-t)\left|f'(tb+(1-t)(\lambda a+(1-\lambda)b))\right|dt$$

$$\leq \quad (b-a)(1-\lambda)^2\left(\int_0^1 t^p dt\right)^{1/p}\left(\int_0^1\left|f'(t(\lambda a+(1-\lambda)b)+(1-t)a)\right|^q dt\right)^{1/q}$$

$$+(b-a)\lambda^2\left(\int_0^1(1-t)^p\,dt\right)^{1/p}\left(\int_0^1\left|f'(tb+(1-t)(\lambda a+(1-\lambda)b))\right|^q dt\right)^{1/q}$$

elde edilir ve $|f'|^q$ s-konveks fonksiyon o halde

$$\int_0^1\left|f'(t(\lambda a+(1-\lambda)b)+(1-t)a)\right|^q dt\leq\frac{|f'(\lambda a+(1-\lambda)b)|^q+|f'(a)|^q}{s+1}$$

ve

$$\int_0^1\left|f'(tb+(1-t)(\lambda a+(1-\lambda)b))\right|^q dt\leq\frac{|f'(b)|^q+|f'(\lambda a+(1-\lambda)b)|^q}{s+1}$$

olur, böylece

$$\left|f(\lambda a+(1-\lambda)b)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt\right|\leq(b-a)\left(\frac{1}{p+1}\right)^{1/p}\left(\frac{1}{s+1}\right)^{1/q}$$

$$(1-\lambda)^2\left[\left|f'(\lambda a+(1-\lambda)b)\right|^q+\left|f'(a)\right|^q\right]^{1/q}$$

$$+\lambda^2\left[\left|f'(\lambda a+(1-\lambda)b)\right|^q+\left|f'(b)\right|^q\right]^{1/q}$$

Şimdi $|f'|^q$, $[a,b]$ üzerinde herhangi $\lambda\in[0,1]$ için s-konveks olduğundan

$$\left|f'(\lambda a+(1-\lambda)b)\right|^q\leq\lambda^s\left|f'(a)\right|^q+(1-\lambda)^s\left|f'(b)\right|^q$$

bulunur. Yukarıdaki eşitsizliklerin tamamı birleştirilerek,

$$\left|f\left(\lambda a+(1-\lambda)b\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt\right|\leq (b-a)\left(\frac{1}{p+1}\right)^{1/p}\left(\frac{1}{s+1}\right)^{1/q}$$

$$(1-\lambda)^2\left[\lambda^s\left|f'(a)\right|^q+(1-\lambda)^s\left|f'(b)\right|^q+\left|f'(a)\right|^q\right]^{1/q}$$

$$+\lambda^2\left[\lambda^s\left|f'(a)\right|^q+(1-\lambda)^s\left|f'(b)\right|^q+\left|f'(b)\right|^q\right]^{1/q}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.12 $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I^0 üzerinde diferansiyellenebilir fonksiyon olsun öyle ki $a, b \in I$, $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ dir. $|f'|^q$, $[a, b]$ üzerinde $q \geq 1$, bazı $s \in (0, 1]$ sabitleri ve $\forall\lambda \in [0, 1]$ için s-konveks fonksiyon olmak üzere

$$\left|f\left(\lambda a+(1-\lambda)b\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt\right|\leq (b-a)\left(\frac{1}{(s+1)(s+2)}\right)^{1/q}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$(1-\lambda)^2\left[\left((s+1)\lambda^s+1\right)\left|f'(a)\right|^q+(s+1)(1-\lambda)^s\left|f'(b)\right|^q\right]^{1/q}$$

$$+\lambda^2\left[(s+1)\lambda^s\left|f'(a)\right|^q+\left((s+1)(1-\lambda)^s+1\right)\left|f'(b)\right|^q\right]^{1/q}$$

eşitsizliği geçerlidir. [33, Teorem 3.3]

İspat. Lemma 3.2.9 ve Power-mean eşitsizliği kullanılarak,

$$
\begin{aligned}
& \left| f\left(\lambda a+(1-\lambda) b\right)-\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\, dt\right| \\
\leq\ & (b-a)(1-\lambda)^2 \int_0^1 t\left|f'\left(t\left(\lambda a+(1-\lambda) b\right)+(1-t) a\right)\right| dt \\
& +(b-a) \lambda^2 \int_0^1 (1-t)\left|f'\left(t b+(1-t)\left(\lambda a+(1-\lambda) b\right)\right)\right| dt \\
\leq\ & (b-a)(1-\lambda)^2\left(\int_0^1 t dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 t\left|f'\left(t\left(\lambda a+(1-\lambda) b\right)+(1-t) a\right)\right|^q dt\right)^{1/q} \\
& +(b-a) \lambda^2\left(\int_0^1 (1-t)\, dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 (1-t)\left|f'\left(t b+(1-t)\left(\lambda a+(1-\lambda) b\right)\right)\right|^q dt\right)^{1/q}
\end{aligned}
$$

elde edilir. $|f'|^q$ s-konveks olduğundan

$$
\begin{aligned}
& \int_0^1 t\left|f'\left(t\left(\lambda a+(1-\lambda) b\right)+(1-t) a\right)\right|^q dt \\
\leq\ & \int_0^1 \left(t^{s+1}\left|f'\left(\lambda a+(1-\lambda) b\right)\right|^q+t(1-t)^s\left|f'(a)\right|^q\right) dt \\
=\ & \frac{1}{(s+1)(s+2)}\left|f'(a)\right|^q+\frac{1}{(s+2)}\left|f' \lambda a+(1-\lambda) b\right|^q
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
& \int_0^1 (1-t)\left|f'\left(t b+(1-t)\left(\lambda a+(1-\lambda) b\right)\right)\right|^q dt \\
\leq\ & \int_0^1 \left((1-t) t^s\left|f'(b)\right|^q+(1-t)^{s+1}\left|f'\left(\lambda a+(1-\lambda) b\right)\right|^q\right) dt \\
=\ & \frac{1}{(s+1)(s+2)}\left|f'(b)\right|^q+\frac{1}{(s+2)}\left|f'\left(\lambda a+(1-\lambda) b\right)\right|^q
\end{aligned}
$$

bulunur, böylece,

$$\left|f(\lambda a+(1-\lambda)b)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt\right|\leq (b-a)\left(\frac{1}{(s+1)(s+2)}\right)^{1/q}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\left((1-\lambda)^2\left[(s+1)\left|f'(\lambda a+(1-\lambda)b)\right|^q+\left|f'(a)\right|^q\right]^{1/q}\right.$$

$$\left.+\lambda^2\left[(s+1)\left|f'(\lambda a+(1-\lambda)b)\right|^q+\left|f'(b)\right|^q\right]^{1/q}\right]$$

eşitsizliği elde edilir. Şimdi $|f'|^q$, $[a,b]$ üzerinde $\forall\lambda\in[0,1]$ için s-konveks olduğundan

$$\left|f'(\lambda a+(1-\lambda)b)\right|^q\leq\lambda^s\left|f'(a)\right|^q+(1-\lambda)^s\left|f'(b)\right|^q$$

$$(1-\lambda)^2\left[(s+1)\left|f'(\lambda a+(1-\lambda)b)\right|^q+\left|f'(a)\right|^q\right]^{1/q}$$

$$+\lambda^2\left[(s+1)\left|f'(\lambda a+(1-\lambda)b)\right|^q+\left|f'(b)\right|^q\right]^{1/q}$$

eşitsizliği elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikler birleştirilerek,

$$\left|f(\lambda a+(1-\lambda)b)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt\right|\leq (b-a)\left(\frac{1}{(s+1)(s+2)}\right)^{1/q}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$(1-\lambda)^2\left[((s+1)\lambda^s+1)\left|f'(a)\right|^q+(s+1)(1-\lambda)^s\left|f'(b)\right|^q\right]^{1/q}$$

$$+\lambda^2\left[(s+1)\lambda^s\left|f'(a)\right|^q+((s+1)(1-\lambda)^s+1)\left|f'(b)\right|^q\right]^{1/q}$$

eşitsizliğine sahip oluruz. Şimdi s-konkav fonksiyon ile ilgili Teorem 3.2.13 ü verelim.

Teorem 3.2.13 $f:I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, I^0 üzerinde diferansiyellenebilir fonksiyon olsun öyle ki $a,b\in I$, $a<b$ ve $f'\in L[a,b]$ dir. $|f'|^q$, $[a,b]$ üzerinde $q>1$ için bazı $s\in(0,1]$ sabitleri ve $\forall\lambda\in[0,1]$ için s-konkav fonksiyon olmak üzere

$$\left|f\left(\lambda a+(1-\lambda)b\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt\right|\leq (b-a)\left(\frac{q-1}{2q-1}\right)^{1-1/q}2^{\frac{s-1}{q}}$$

$$(1-\lambda)^2\left|f'\left(\frac{(1+\lambda)a+(1-\lambda)b}{2}\right)\right|+\lambda^2\left|f'\left(\frac{\lambda a+(2-\lambda)b}{2}\right)\right|$$

eşitsizliği sağlanır. [33, Teorem 3.4]

İspat. Lemma 3.2.9 ve Hölder eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\left|f\left(\lambda a+(1-\lambda)b\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt\right|\\
\leq\ &(b-a)(1-\lambda)^2\int_0^1 t\left|f'\left(t\left(\lambda a+(1-\lambda)b\right)+(1-t)a\right)\right|dt\\
&+(b-a)\lambda^2\int_0^1(1-t)\left|f'\left(tb+(1-t)\left(\lambda a+(1-\lambda)b\right)\right)\right|dt\\
\leq\ &(b-a)(1-\lambda)^2\left(\int_0^1 t^p dt\right)^{1/p}\left(\int_0^1\left|f'\left(t\left(\lambda a+(1-\lambda)b\right)+(1-t)a\right)\right|^q dt\right)^{1/q}\\
&+(b-a)\lambda^2\left(\int_0^1(1-t)^p\,dt\right)^{1/p}\left(\int_0^1\left|f'\left(tb+(1-t)\left(\lambda a+(1-\lambda)b\right)\right)\right|^q dt\right)^{1/q}
\end{aligned}$$

bulunur. $\left|f'\right|^q$ konkav olduğundan [33] de (1.3) den

$$\int_0^1\left|f'\left(tb+(1-t)\left(\lambda a+(1-\lambda)b\right)\right)\right|^q dt\leq 2^{s-1}\left|f'\left(\frac{(1+\lambda)a+(1-\lambda)b}{2}\right)\right|^q$$

ve

$$\int_0^1\left|f'\left(t\left(\lambda a+(1-\lambda)b\right)+(1-t)a\right)\right|^q dt\leq 2^{s-1}\left|f'\left(\frac{\lambda a+(2-\lambda)b}{2}\right)\right|^q$$

olur, böylece

$$\left|f\left(\lambda a+(1-\lambda)b\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt\right|$$

$$\leq \quad (b-a)\left(\frac{1}{p+1}\right)^{1/p}2^{\frac{s-1}{q}}(1-\lambda)^2$$

$$\left(\left|f'\left(\frac{(1+\lambda)a+(1-\lambda)b}{2}\right)\right|+\lambda^2\left|f'\left(\frac{\lambda a+(2-\lambda)b}{2}\right)\right|\right)$$

$$\leq \quad (b-a)\left(\frac{q-1}{2q-1}\right)^{1-1/q}2^{\frac{s-1}{q}}$$

$$\left((1-\lambda)^2\left|f'\left(\frac{(1+\lambda)a+(1-\lambda)b}{2}\right)\right|+\lambda^2\left|f'\left(\frac{\lambda a+(2-\lambda)b}{2}\right)\right|\right)$$

istenen sonuca ulaşılır ve ispat tamamlanır.

Not. Teorem 3.2.13 de $\lambda=1/2$ verilirse,

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt\right|$$

$$\leq \quad \frac{b-a}{4}\left(\frac{q-1}{2q-1}\right)^{1-1/q}2^{\frac{s-1}{q}}\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|+\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|$$

$$\leq \quad \frac{b-a}{4}\left(\frac{q-1}{2q-1}\right)^{1-1/q}2^{\frac{s-1}{q}}\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|+\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|$$

elde edilir öyle ki Teorem 3.2.8 olduğu görülür.

4 UYGULAMALAR

Bu bölümde şimdiye kadar tezimizde sunmuş olduğumuz Hermite-Hadamard eşitsizliğine dair inceltmeler ve farklı konvekslik türleri için 3. bölümde vermiş olduğumuz genelleştirmelerin uygulamalarını vereceğiz. İlk olarak Ion ve Alomari'nin bazı teoremleri için trapezoidal formda uygulamalar ve sonrasında özel ortalamalar ile ilgili uygulamalar verilmiştir.

4.1 Trapezoidal Formda Uygulamalar

Ion [28] de Teorem 3.1.2 ve Teorem 3.1.3, Alomari ve arkadaşları [30] daki teoremler için trapezoidal formda $\int_a^b f(x)\,dx$ integralinin yaklaşık hatası ile ilgili bazı sonuçlar ve uygulamalar elde etmiştir.

Trapezoidal formda yazılışlar verilmeden önce gerekli olan Trapezoidal formunun tanımını vererek başlayalım.

Trapezoidal form 4.1.1 "Δ" nın $[a,b]$ nı

$$\Delta: \ a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$$

şeklinde böldüğünü düşünelim. O halde $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ olmak üzere verilen fonksiyonun trapezoidal formulü

$$T(f,\Delta) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} (x_{i+1-}x_i)$$

şeklinde bulunur.

f, (a,b) üzerinde iki kez diferansiyellenebilir fonksiyon ve $M = \sup_{x\in(a,b)} \left|f''(x)\right| < \infty$ olmak üzere

$$\int_a^b f(x)\,dx = T(f,\Delta) + E(f,\Delta) \tag{4.1}$$

şeklindedir. Burada $\int_a^b f(x)\,dx$ integralinin yaklaşık hatası $E(f,\Delta)$ ile gösterilmekte ve trapezoidal formulü için

$$|E(f,\Delta)| \leq \frac{M}{12}\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1-}x_i)^3 \tag{4.2}$$

eşitsizliği sağlanır.

Açıkça f fonksiyonu iki kez diferansiyellenemiyorsa veya f in ikinci türevi (a,b) üzerinde sınırlı değilse (4.2) eşitsizliği doğru değildir. Bu durumda $E(f,\Delta)$ üzerine bazı yaklaşımların elde edilmesi için Ion'un Teorem 3.1.2 için oluşturduğu trapezoidal form ile devam edelim.

Sonuç 4.1.2 $f : [a,b] \to \mathbb{R}, (a,b)$ üzerinde $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$ olacak şekilde diferansiyellenebilen fonksiyon olsun. $\left|f'\right|$, $[a,b]$ üzerinde $[a,b]$ nin her Δ ayrımı için quasi-konveks fonksiyon olmak üzere

$$|E(f,\Delta)| \leq \frac{\sup\left\{\left|f'(a)\right|,\left|f'(b)\right|\right\}}{4}\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1-}x_i)^2 \tag{4.3}$$

eşitsizliğine sahip oluruz.

İspat. Δ ayrımının $[x_{i,}x_{i+1}]$ alt aralıkları üzerinde $i=\overline{0,n-1}$ Teorem 3.1.2 ye uygulanarak, $i=0$ dan $i=n-1$ e toplanırsa

$$\left|T(f,\Delta)-\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1-}x_i)^2\sup\left\{\left|f'(x_i)\right|,\left|f'(x_{i+1})\right|\right\} \tag{4.4}$$

sonucu çıkarılır. Diğer taraftan, $\forall\ x_i \in [a,b]$ için, $\alpha_i\,[0,1]$ vardır ve $x_{i=}\alpha_i a+(1-\alpha_i)\,b$ dir. Ayrıca $\left|f'\right|$ quasi-konveks fonksiyon olduğundan

$$\left|f'(x_i)\right| \leq \sup\left\{\left|f'(a)\right|,\left|f'(b)\right|\right\}, \forall i=\overline{0,n}$$

dir. Böylece,

$$\sup\left\{\left|f'(x_i)\right|,\left|f'(x_{i+1})\right|\right\} \leq \sup\left\{\left|f'(a)\right|,\left|f'(b)\right|\right\}, \forall i=\overline{0,n-1} \tag{4.5}$$

olduğu görülür. (4.5) ile (4.4) eşitsizlikleri (4.3) nin sağlandığını gösterir ve ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.3 ün ispatı için Sonuç 4.1.2 ile benzer yöntemler kullanılarak ispat yapılabilir. Teorem 3.1.2 ye dayanarak aşağıdaki sonucu verelim.

Sonuç 4.1.3 $f : [a,b] \to \mathbb{R}, (a,b)$ üzerinde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ olacak şekilde diferansiyellenebilen fonksiyon olsun. $p \in \mathbb{R}$ ve $p > 1$ olduğunu kabul edelim. $\left|f'\right|^{\frac{p}{p-1}}$, $[a,b]$ üzerinde $[a,b]$ nin her Δ ayrımı için quasi-konveks fonksiyon olmak üzere

$$|E(f,\Delta)| \leq \frac{\sup\left\{\left|f'(a)\right|, \left|f'(b)\right|\right\}}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1-}x_i)^2$$

eşitsizliği sağlanır.

Şimdi Alomari'nin [30] da yukarıdaki eşitsizlikleri kullanarak birinci türevin kullanımıyla ilgili $E(f,d)$ için bazı yaklaşımlarını verelim. Teorem 3.1.5 ile ilgili Önerme 4.1.4 aşağıda verilmiştir.

Önerme 4.1.4 $f : I^0 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I^0 üzerinde diferansiyellenebilir fonksiyon, $a, b \in I^0$ ve $a < b$ olsun. $|f'|$, $[a,b]$ üzerinde $[a,b]$ aralığının her "d" ayrımı için quasi-konveks fonksiyon ve (4.1) den

$$\begin{aligned}
|E(f,d)| &\leq \frac{1}{8} \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1-}x_i) \left[\sup\left\{\left|f'\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)\right|, \left|f'(x_{i+1})\right|\right\}\right] \\
&\leq \sup\left\{\left|f'\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)\right|, \left|f'(x_i)\right|\right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. d ayrımının $[x_i, x_{i+1}]$ alt aralıkları üzerinde $(i = 0, 1, ..., n-1)$ Teorem 3.1.5 de uygulanırsa

$$\begin{aligned}
&\left|(x_{i+1-}x_i) \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} - \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx\right| \\
\leq\ & (x_{i+1-}x_i) \left[\sup\left\{\left|f'\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)\right|, \left|f'(x_{i+1})\right|\right\}\right. \\
&+ \left.\left(\sup\left\{\left|f'\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)\right|, \left|f'(x_i)\right|\right\}\right)\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. $i = 0$ dan $i = n-1$ e toplanır ve $|f'|$ quasi-konveks olduğundan

$$
\begin{aligned}
& T(f,d) - \int_a^b f(x)\,dx \\
\leq\; & \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{n-1}(x_{i+1-}x_i)\left[\sup\left\{\left|f'\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)\right|, \left|f'(x_{i+1})\right|\right\}\right. \\
& \left. +\left(\sup\left\{\left|f'\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)\right|, \left|f'(x_i)\right|\right\}\right)\right]
\end{aligned}
$$

hesaplanır ve ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.5 $f : I^0 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I^0 üzerinde diferansiyellenebilir fonksiyon, $a, b \in I^0$ ve $a < b$ olsun ve $f' \in L[a,b]$ dir. $|f'|$, $[a,b]$ üzerinde $[a,b]$ aralığının her "d" ayrımı için quasi-konveks fonksiyon ve (4.1) den

1) $\left|f'\right|$ artansa,

$$|E(f,d)| \leq \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{n-1}(x_{i+1-}x_i)\left(\left|f'\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)\right| + \left|f'(x_{i+1})\right|\right) \qquad (4.6)$$

2) $\left|f'\right|^{p/p-1}$ azalansa,

$$|E(f,d)| \leq \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{n-1}(x_{i+1-}x_i)\left(\left|f'\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)\right| + \left|f'(x_i)\right|\right) \qquad (4.7)$$

eşitsizliklerine sahip oluruz.

İspat. İspatı Sonuç 3.1.7 kullanılarak Önerme 4.1.4 e benzer şekilde yapılır.

Alomari'nin Teorem 3.1.6 için öne sürdüğü yaklaşımı verelim.

Önerme 4.1.6 $f : I^0 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, I^0$ üzerinde diferansiyellenebilir fonksiyon, $a, b \in I^0$ ve $a < b$ olsun. $|f'|^{p/p-1}$, $[a,b]$ üzerinde $p > 1$ ve $[a,b]$ aralığının her "d" ayrımı için quasi-konveks fonksiyon olmak üzere ve (4.1) yardımıyla

$$
\begin{aligned}
E(f,d) \leq\ & \frac{1}{4(p+1)^{1/p}} \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1-}x_i) \\
& \left[\left(\sup \left\{ \left| f'\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right) \right|^{p/p-1}, \left| f'(x_{i+1}) \right|^{p/p-1} \right\} \right)^{p-1/p} \right. \\
& \left. + \left(\sup \left\{ \left| f'\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right) \right|^{p/p-1}, \left| f'(x_i) \right|^{p/p-1} \right\} \right)^{p-1/p} \right]
\end{aligned}
$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. İspatı Teorem 3.1.6 kullanılarak Önerme 4.1.4 e benzer şekilde yapılır.

Sonuç 4.1.7 $f : I^0 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I^0 üzerinde diferansiyellenebilir fonksiyon, $a, b \in I^0$**,** $a < b$ ve $f' \in L[a,b]$ dir. $|f'|^{p/p-1}$, $[a,b]$ üzerinde $[a,b]$ aralığının her "d" ayrımı için quasi-konveks fonksiyon olmak üzere ve (4.1) yardımıyla

1) $\left|f'\right|$ artansa,

$$
|E(f,d)| \leq \frac{1}{4(p+1)^{1/p}} \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1-}x_i) \left(\left| f'\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right) \right| + \left| f'(x_{i+1}) \right| \right)
$$

2)$\left|f'\right|^{p/p-1}$ azalansa,

$$
|E(f,d)| \leq \frac{1}{4(p+1)^{1/p}} \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1-}x_i) \left(\left| f'\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right) \right| + \left| f'(x_i) \right| \right)
$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat. İspatı Teorem 3.1.6 kullanılarak Önerme 4.1.6 ya benzer şekilde yapılır.

Alomarinin bir diğer önermesi ile devam edelim.

Önerme 4.1.8 $f : I^0 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I^0 üzerinde diferansiyellenebilir fonksiyon, $a, b \in I^0$ ve $a < b$ olsun. $|f'|^q$, $[a,b]$ üzerinde $q \geq 1$ için $[a,b]$ aralığının her "d" ayrımı için quasi-konveks fonksiyon ve (4.1) yardımıyla

$$
\begin{aligned}
|E(f,d)| \leq\ & \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{n-1}(x_{i+1-}x_i)\left[\left(\sup\left\{\left|f'\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)\right|^q,\left|f'(x_{i+1})\right|^q\right\}\right)^{1/q}\right. \\
& \left.+\left(\sup\left\{\left|f'\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)\right|^{1/q},\left|f'(x_i)\right|^q\right\}\right)\right]^{1/q}
\end{aligned}
$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. İspatı Teorem 3.1.8 kullanılarak Önerme 4.1.6 ya benzer şekilde yapılır.

4.2 Özel Ortalamalar için Uygulamalar

Bu bölüm Alomari'nin [30] ve [31] de, Chen ve Feng'in [33] de özel ortalamalarla ilgili vermiş olduğu uygulamalardan oluşmaktadır. İlk olarak Alomari'nin quasi-konveks fonksiyonların sonucunu kullanarak oluşturduğu uygulamalarını verelim. Teorem 3.1.5 ile başlayalım.

Önerme 4.2.1 $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, $n\in N, n\geq 2$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
|L_n^n(a,b)-A(a^n,b^n)| \leq\ & \frac{b-a}{8}\left[\left(\sup\left(\left|\frac{a+b}{2}\right|^{n-1},|a|^{n-1}\right)\right)\right. \\
& \left.+\left(\sup\left(\left|\frac{a+b}{2}\right|^{n-1},|b|^{n-1}\right)\right)\right]
\end{aligned}
$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $f(x)=x^n$ quasi-konveks fonksiyonu $x\in\mathbb{R}$ olacak şekilde Teorem 3.1.5 e uygulanırsa yukarıdaki sonuca ulaşılır.

Alomari'nin Teorem 3.1.6 nın sonucunu kullanarak oluşturduğu uygulamasını verelim.

Önerme 4.2.3 $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, $0\notin[a,b]$ olmak üzere $\forall q\geq 1$ için

$$
\begin{aligned}
L^{-1}(a,b)-A\left(a^{-1},b^{-1}\right) \leq\ & \frac{b-a}{4(p+1)^{1/p}}\left[\left(\sup\left(\left|\frac{a+b}{2}\right|^{-\frac{2p}{p-1}},|a|^{-\frac{2p}{p-1}}\right)\right)^{p-1/p}\right. \\
& \left.+\left(\sup\left(\left|\frac{a+b}{2}\right|^{-\frac{2p}{p-1}},|a|^{-\frac{2p}{p-1}}\right)\right)^{p-1/p}\right]
\end{aligned}
$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $f(x) = 1/x$ quasi-konveks fonksiyonu $x \in [a,b]$ olmak üzere Teorem 3.1.6 ya uygulanırsa yukarıdaki sonuca ulaşılır.

Alomari'nin Teorem 3.1.8 in sonucunu kullanarak oluşturduğu uygulamasını verelim.

Önerme 4.2.4 $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $0 \notin [a,b]$ olmak üzere $\forall q \geq 1$ için

$$\begin{aligned}
\left|L_s^s(a,b) - A^s(a,b)\right| &\leq n\left(\frac{b-a}{8}\right)\left[\left(\sup\left(\left|\frac{a+b}{2}\right|^{(n-1)q}, |a|^{(n-)q}\right)\right)^{1/q}\right. \\
&\quad \left. + \left(\sup\left(\left|\frac{a+b}{2}\right|^{(n-1)q}, |a|^{(n-1)q}\right)\right)^{1/q}\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $f(x) = x^n$ quasi-konveks fonksiyonu $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere Teorem 3.1.8 e uygulanırsa yukarıdaki sonuca ulaşılır.

Şimdi Alomari [31] de s-konveks fonksiyonların sonucunu kullanarak oluşturduğu uygulamalarını verelim. $f : [0,1] \to [0,1]$, $f(x) = x^s$ s-konveks fonksiyonu için aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır.($n \in Z \setminus \{-1,0\}$)

Önerme 4.2.5 $a.b \in I^0$, $a < b$ ve $0 < s < 1$ için

$$\begin{aligned}
\left|L_s^s(a,b) - A^s(a,b)\right| &\leq \left(\frac{b-a}{4(s+1)(s+2)}\right)\left(|a|^{s-1} + 2(s+1)\left|\frac{a+b}{2}\right|^{s-1} + |b|^{s-1}\right) \\
&\leq s\frac{\left(2^{2-s}+1\right)(b-a)}{4(s+1)(s+2)}\left(|a|^{s-1} + |b|^{s-1}\right)
\end{aligned}$$

Önerme 4.2.6 $a.b \in I^0$, $a < b$ ve $0 < s < 1$ ve $\forall\, q > 1$ için

$$\begin{aligned}
&\left|L_s^s(a,b) - A^s(a,b)\right| \\
&\leq s\left(\frac{b-a}{4}\right)\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{s+1}\right)^{\frac{2}{q}}\left[2^{(1-s)/q} + \left(2^{1-s}+s+1\right)^{1/q}\right]\left(|a|^{s-1} + |b|^{s-1}\right)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Önerme 4.2.7 $a.b \in I^0$, $a < b$ ve $0 < s < 1$ ve $\forall\, q > 1$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
&\left|L_s^s(a,b) - A^s(a,b)\right| \\
\leq\ & \frac{s}{2^{\frac{1}{p}}}\left(\frac{b-a}{4}\right)\left(\frac{1}{(s+1)(s+2)}\right)^{\frac{1}{q}}\left[2^{(1-s)/q} + \left(2^{1-s}+1\right)^{1/q}\right]\left(|a|^{s-1} + |b|^{s-1}\right)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir.

Son olarakta Chen ve Feng'in [33] de s-konveks fonksiyonların sonucunu kullanarak oluşturduğu uygulamalarını verelim.

$f : [0,1] \to [0,1]$, $f(x) = x^s$ s-konveks fonksiyonlar için aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır. $(n \in N)$

Önerme 4.2.8 $a.b \in I^0$, $a < b$, $0 < s < 1$ ve her $\lambda \in [0,1]$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
&\left|W^s(a,b) - L_s^s(a,b)\right| \\
\leq\ & s(b-a)(1-\lambda)^2\left(\frac{s}{(s+1)(s+2)}|a|^{s-1} + \frac{s}{s+2}|\lambda a + (1-\lambda)b|^{s-1}\right) \\
& + (b-a)\lambda^2\left(\frac{s}{(s+1)(s+2)}|b|^{s-1} + \frac{s}{s+2}|\lambda a + (1-\lambda)b|^{s-1}\right)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği sağlanır.

Önerme 4.2.9 $a.b \in I^0$, $a < b$, $0 < s < 1$, $q > 1$ ve her $\lambda \in [0,1]$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
&\left|W^s(a,b) - L_s^s(a,b)\right| \\
\leq\ & s(b-a)\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\left((1-\lambda)^2\left[(\lambda^s+1)|a|^{q(s-1)} + (1-\lambda)^s|b|^{q(s-1)}\right]^{\frac{1}{q}}\right. \\
& \left. +\lambda^2\left[\lambda^s|a|^{q(s-1)} + ((1-\lambda)^s+1)|b|^{q(s-1)}\right]^{\frac{1}{q}}\right)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği sağlanır.

5 KAYNAKLAR

References

[1] D. S. Mitrinović and I. B. Lacković, Hermite and convexity, Aequationes Mathematicae, 28 (1985), 229-232.

[2] Picard, É. (ed.), Oeuvres de Charles Hermite, 1-4, Paris, 1905-1917.

[3] Jordan, C. and Mansion, P., Charles Hermite (1822-1901). Paris, 1901.

[4] Beckenbach, E. F., Convex functions. Bull. Amer. Math. Soc.54 (1948), 439-460.

[5] Hadamard, J., Étude sur les propriétés des fonctions entiéres et en particulier d'une fonction considéréé par Riemann. J. Math. Pures Appl. 58 (1893), 171-215.

[6] Hardy, G. H., Littlewood, J. E., and Pólya, G., Inequalities. Cambridge University Press. 1934.

[7] Timan, A. F. and Trofimoff, V. N., Introduction to theory of harmonic functions (Russian). Moscow, 1968, p.182.

[8] Lacković, I. B., On some inqualities for convex functions (Serbian). InMathematička Biblioteka 42, Belgrade, 1970, pp. 138-141.

[9] Hortman, P., Convex functions and mean value inequalities. Duke Math. J. 39 (1972), 251-360.

[10] Radó, T., Subharmonic functions. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Vol. 5, Berlin, 1937.

[11] L. Fejer, Über die Fourierreihen, II, Math. Naturwiss, Anz. Ungar. Akad. Wiss, 24 (1906), 369-390.

[12] J. L. W. V. Jensen, Sur les fontions convexes et les inégalités entre les voleurs mogernmes, Acta. Math, 30(1906), 100-111.

[13] Pečarić, J. E., Proschan, F. & Tong, Y. L. 1992. Convex functions, partial orderings, and statistical applications. London, Academic Press.

[14] A. E. Farissi, " Simple proof and refinement of Hermite-Hadamard inequality", Journal of Mathematical Inequalities, vol. 4, no. 3, pp. 365-369, 2010.

[15] M. BESSENYEI AND Zs. PÁLES, Higher-order generalizations of Hadamard's inequality, Publ. Math. Debrecen, 61, 3-4 (2004), 623-643.

[16] M. BESSENYEI AND Zs. PÁLES, Hadamard-Type Inequalities for Twice Differentiable Functions, RGMIA Research Report collection. 12, 1 (2009), Art. 6.

[17] Dragomir, S. & Pearce, C. 2000. Selected topics on Hermite-Hadamard inequalities and applications. Victoria University: RGMIA Monographs, [http://ajmaa.org/RGMIA/monographs/hermite hadamard.html].

[18] A. EL FARİSSİ, Z. LATREUCH, B. BELAIDI, Hadamard-Type inequalities for Twice Differentiable Functions, RGMIA Research Report collection, 12, 1 (2009), Art. 6.

[19] A. M. FINK, A best possible Hadamard inequality, Math. Inequal. Appl., 58 (1893), 171-215.

[20] C. NICULESCU AND L. E. PERSSON, Old and new on the Hermite-Hadamard inequality, Real Analysis Exchange, 2004.

[21] C. NICULESCU AND L. E. PERSSON, Convex Functions and Their Applications. A Contemporary Approach, CMS Books in Mathematics, Vol. 23, Springer-Verlag, New York, 2006.

[22] J. ŚANDOR, Some integral inequalites, El. Math., 43 (1988), 177-180.

[23] X. Gao, "A note on the Hermite-Hadamard inequality", Journal of Mathematical Inequalites, vol. 4, no. 4, pp.587-591, 2010.

[24] S. S. Dragomir, Two Mappings in Connection to Hadamard’s Inequalities, J. Math. Anal. Appl., 167 (1992), 49-56.

[25] G. S. Yang and M. C. Hong, A Note on Hadamard’s Inequality, Tamkang J. Math., 28(1) (1997), 33-37.

[26] S. S. Dragomir, D. S. Milosević ve József Sándor, On Some Refinements of Hadamard’s Inequalities and Applications, Univ. Belgrad. publ. Elek. fa. Sci. math., 4 (1993), 3-10.

[27] K. L. Tseng, G. S. Yang, and K. C. Hsu, On some inequalities of Hadamard’s type and applications, Taiwanese J. Math., 13(6B) (2009), 1929-1948.

[28] D. A. Ion, Some estimates on the Hermite-Hadamard inequality through quasi-convex functions, Annals of University of Craiova Math. Comp. Sci. Ser., 34 (2007), 82-87.

[29] S. S. Dragomir and R. P. Agarwal, two Inequalities for Differentiable Mappings and Applications to Special Means of Real Numbers and to Trapezoidal Formula, Appl. Math. Lett. 11 (5) (1998), 91-95.

[30] M. Alomari, M Darus and U. S. Kirmaci, Refinements of Hadamard’s type inequalities for quasi-convex functions with applications to trapezoidal formula and to special means, Computers and Math. with Appl., 59, pp:225-232, 2010.

[31] M. Alomari, M Darus and U. S. Kirmaci, "Some inequalities of Hermite-Hadamard type for s-convex functions," Acta Mathematica Scientia B, vol. 31, no. 4, pp. 1643-1652, 2011.

[32] Dragomir S S, Fiztpatrick S. The Hadamard's inequality for s-convex functions in the second sense. Demonsratio Math, 1999, 32(4): 687-696

[33] CHEN, F.X., FENG, Y.M., New inequalities of Hermite-Hadamard type for functions whose first derivatives absolute values are s-convex, Italian J. Pure Appl. Maths., 32 (2014), 213-222.

[34] Kirmaci, U. S., Bakula, M. K., ¨Ozdemir, M. E. & Pe■cari´c, J. 2007. Hadamard-type inequalities for s-convex functions. Applied Mathematics and Computation 193: 26–35.

[35] Pearce C E M Pecaric J Inequalities for differentiable mappings with application to special means and quadrature formula. Appl Math Lett, 2000 13: 51-55

[36] Mitrinović D. S., Analytic inequalities, Springer-Verlag, (1970).

[37] Bayraktar M., Analiz, Nobel Akademik Yayıncılık, (2010).

[38] Breckner W. W., Stetigkeitsaussagen für eine klasse verallgemeinerter konvexer funktionen in topologischen linearen raumen, Pupl. Inst. Math., 23 (1978) 13–20.

[39] Pachpatte B.G., Mathematical inequalities, North-Holland Mathematical Library, 67 (2005).

[40] Roberts A. W. and Varberg D. E., Convex functions, Academic Press, (1973).

[41] Carter M. and van Brunt B., The Lebesgue-Stieltjes integral: a practical introduction, Springer-Verlag, (2000).

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:**	Tuba BOZKURT
Uyruğu	**:**	TC
Doğum Yeri ve Tarihi	**:**	KAYSERİ 02/04/1985
Telefon	**:**	05072063261
e-mail	**:**	tubahakanbozkurt@gmail.com

EĞİTİM

Derece	**Adı**	**Bitirme Yılı**
Üniversite :	Niğde Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü	2008
Yüksek Lisans :	Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı	2017

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2015-2016	Yunus Emre İmamhatip İlköğretim okulu	Öğretmen
2013-2014	BEF/Kayseri	Eğitmen

YABANCI DİLLER: İngilizce (Konuşma yazma iyi seviyede)