T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ELEMANLARI GENEL SAYI DİZİLERİ OLAN SKEW CİRCULANT MATRİSLERİ ÜZERİNE

Tezi Hazırlayan
Fatih GÖK

Tezi Yöneten
Yrd.Doç.Dr. Yasin YAZLIK

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Mart 2015
NEVŞEHİR

T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ELEMANLARI GENEL SAYI DİZİLERİ OLAN SKEW CİRCULANT MATRİSLERİ ÜZERİNE

Tezi Hazırlayan
Fatih GÖK

Tezi Yöneten
Yrd. Doç. Dr. Yasin YAZLIK

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Mart 2015
NEVŞEHİR

Yrd. Doç. Dr. Yasin Yazlık danışmanlığında **Fatih GÖK** tarafından hazırlanan "Elemanları Genel Sayı Dizileri Olan Skew Circulant Matrisleri Üzerine" adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

17/03/ 2015

JÜRİ: **İMZA:**

Başkan : Doç. Dr. Aytekin ERYILMAZ

Üye : Yrd. Doç. Dr. Mustafa BAHŞİ

Üye : Yrd. Doç. Dr. Yasin YAZLIK

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulunun 19.03.2015 tarih ve 2015/16-02 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

20/03/2015

Doç. Dr. Şahlan ÖZTÜRK

Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİM SAYFASI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada yer alan bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu ve bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Fatih GÖK

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans ve tez çalışmalarım süresince büyük yardım ve desteğini gördüğüm tez danışmanım Sayın Yrd. Doç. Dr. Yasin YAZLIK'a, hiçbir konuda yardımlarını esirgemeyen Sayın Doç. Dr. Mehmet ŞENGÖNÜL ve Sayın Doç. Dr Aytekin ERYILMAZ'a, çalışmalarım sırasında gösterdikleri fedakarlık ve anlayıştan dolayı eşim N. Nalan GÖK ve kızlarım Berfin ve Yağmur Burcu GÖK'e en içten duygularımla teşekkür ederim.

ELEMANLARI GENEL SAYI DİZİLERİ OLAN SKEW CİRCULANT MATRİSLERİ ÜZERİNE

(Yüksek Lisans Tezi)

Fatih GÖK

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Mart 2015

ÖZET

Bu çalışmanın amacı elemanları genelleştirilmiş *k*-Horadam sayıları olan skew circulant ve skew left circulant matrisleri tanımlamak ve bu matrislerin determinantları ve terslerini genelleştirilmiş *k*-Hordam sayıları ile karakterize etmektir.

Anahtar Kelimeler:* *Skew Circulant Matris, Skew Left Circulant Matris, Genelleştirilmiş k-Horadam Dizisi, Determinant, Ters

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Yasin YAZLIK

Sayfa Adeti: 46

ON THE SKEW CIRCULANT MATRICES INVOLVING GENERAL NUMBER SEQUENCE

(M.Sc.Thesis)

Fatih GÖK

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
March 2015

ABSTRACT

The aim of this study is to define the skew circulant and skew left circulant matrices whose entries are generalized *k*-Horadam numbers and to characterize determinants and inverses of these matrices with generalized *k*-Horadam numbers.

Keywords:* *Skew Circulant Matrix, Skew Left Circulant Matrix, Generalized k-Horadam Sequence, Determinant, Inverse

Thesis Supervisor: Assist. Prof. Dr. Yasin YAZLIK

Number of Page: 46

İÇİNDEKİLER

4. BÖLÜM

5. BÖLÜM

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\in$	:	Elemanıdır sembolü
$\mathbb{R}$	:	Reel (gerçel) sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar kümesi
F_n	:	*n*. Fibonacci sayısı
L_n	:	*n*. Lucas sayısı
P_n	:	*n*. Pell sayısı
Q_n	:	*n*. Pell Lucas sayısı
q_n	:	*n*. Modified Pell sayısı
J_n	:	*n*. Jacobsthal sayısı
j_n	:	*n*. Jacobsthal-Lucas sayısı
W_n	:	*n*. Horadam sayısı
$F_{k,n}$	:	*n*. *k*-Fibonacci sayısı
$L_{k,n}$	:	*n*. *k*-Lucas sayısı
$H_{k,n}$	:	*n*. genelleştirilmiş *k*-Horadam sayısı
H_n^S	:	Elemanları genelleştirilmiş *k*-Horadam sayıları olan skew circulant matris
H_n^{SL}	:	Elemanları genelleştirilimiş *k*-Horadam sayıları olan skew left circulant matris

$\det\left(H_n^S\right)$: Elemanları genelleştirilmiş *k*-Horadam sayıları olan skew circulant matrisin determinantı

1.BÖLÜM

GİRİŞ

Güzellik ölçülemeyen bir kavram olmasına karşın, güzellikle bağlantılı olan uyum, formüllerle açıklanabilir. Matematiksel güzelliği tanımlamanın olabilirliği güç görünse de bu güçlük her tür güzellik konusunda geçerlidir. Matematikçiler için matematiğin doğasında bulunan güzellik yadsınamaz. Bu güzellikleri görmek için kar taneciklerini incelemek, mineral kristallerine bakmak, tavus kuşunun kuyruğunu kabartması durumunda çift yönlü oluşan sarmalları seyretmek, çam kozalağına, arıların yaptıkları peteklerdeki geometrik yapıya, bazı bitki ve ağaç dallarındaki gelişime bakmak yeterli olacaktır. Buna matematiğin estetiği denir. Perspektif, orantı ve simetri her koşulda ölçülebilir. Bu nedenle sanatın da ölçülebilir yanları vardır ve matematiksel olarak elde edilen simetri ile doğanın sayılarını barındırır. Bu kavramlar matematiğin estetiği alanına girer [1].

Çok farklı disiplinlerden bilim insanlarının, düşünürlerin, din adamlarının birbirlerinden binlerce kilometre uzakta, onlarca asır ötede olsalar bile ortaklaşa yaptıklarını söyleyebileceğimiz çalışmaları; insanoğluna neyin güzel göründüğüne dair bazı formüller ortaya koymuştur. Bu formüllerin en etkili olanlarından birinin kökü olan $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ irrasyonel sayısına "Altın Oran" denir. Bu oran antik çağdan beri matematikçilerin, fizikçilerin, filozofların, sanatçıların ve hatta müzisyenlerin ilgilendiği bir konu olmuştur. Genellikle Yunanca' da kesmek anlamına gelen kelimenin baş harfi olan τ karakteri ile gösterilen ve değeri 1,61803… olan bu sayı altın ortalama, altın bölüm, altın kesit, ilahi (kutsal) orantı, Fibonacci sayısı ve Phidias ortalaması şeklinde de adlandırılır. Bu oran, bazen özelliklerini inceleyen matematikçi Phidias'ın adının ilk harfi olan ϕ ile gösterilse de daha yaygın olarak τ ile belirtilir. Altın oran ve Fibonacci sayılarını, Dünyanın yedi harikasından biri olarak kabul edilen Piramitlerde, Antik Yunan sanatçılarının ortaya koymuş olduğu eserlerinde, Rönesans sanatçılarının tuvallerinde, Gotik kiliselerin cephelerinde veya katedral çözümlemelerinde, bitkilerin büyümeleri ve bazı belli katıların kristalografik yapılarından veri tabanlarında arama yapmak için yazılan bilgisayar algoritmalarının geliştirilmesine kadar çok geniş uygulama alanlarında rastlanır [6].

Günümüzde, matematik ile diğer bilimler arasında gitgide artan oranda bir birliktelik doğmuştur. Bu birliktelikte matrislerin, matrisler arasında da circulant matrislerin ayrı bir önemi vardır. Circulant matris ailesi birçok problemi modellemek için kullanılır. Özellikle, circulant ve skew circulant matrisler bilimsel çalışmalarda ve mühendislik uygulamalarında giderek daha sık ortaya çıkmaktadır. Bu matrisler çeşitli diferansiyel denklemlerin çözümlerinde önemli rol oynamaktadır [3]. Ayrıca Circulant ve Skew circulant matrisler dijital filtreler [4,9], haberleşme [17], görüntü işleme [13,33], sinyalizasyon [24], şifreleme [12], pre-conditioner, Toeplitz matrisleri çözme gibi önemli disiplinler içeren uygulamalara da sahiptir Çünkü; mühendislik, tıp, istatistik ve diğer pek çok alanda matrislerle karşılaşılmaktadır.

1.1 Amaç ve Kapsam

Bu çalışmanın temel amacı, elemanları keyfi bir parametrenin polinomları olan genelleştirilmiş *k*-Horadam dizilerinden oluşan Skew-circulant ve Skew-left circulant matrisleri tanımlayarak, bu matrislerin determinantlarını ve terslerini genelleştirilmiş *k*-Horadam dizisinin elemanları cinsinden karakterize etmektir. Ayrıca, genelleştirilmiş *k*-Horadam dizisi ikinci mertebeden lineer özel sayı dizilerinin bir genellemesi olduğundan literatürde yer alan Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas, modified Pell, Jacobsthal, Jacobsthal-Lucas, *k*-Fibonacci, *k*-Lucas vb gibi sayı dizileri içinde Skew-circulant ve Skew-left circulant matrislerin determinantları ve tersleri de hesaplanmış olacaktır.

1.2. Kaynak Araştırması

Çalışmanın bu kısmında, ikinci mertebeden lineer özel sayı dizileri ve bu sayı dizileri yardımıyla tanımlanan circulant matrisler üzerine literatürde yapılmış olan çalışmalardan bahsedilecektir.

"*Basic properties of a certain generalized sequence of numbers*" isimli çalışmasında Horadam dizisini tanımlamış, tanımlanan dizinin genel özelliklerini incelemiştir [13].

“A Fibonacci circulant” isimli çalışmasında elemanları Fibonacci sayıları olan circulant ve ters circulant matrisleri tanımlayarak, bu matrislerin determinantlarını birimin *n*. dereceden pirimitif kökünü kullanarak elde etmiştir [22].

“Circulant Matrices“ isimli kitabında circulant matrislerle ilgili genel bilgiler verilerek, circulant matris çeşitlerini, onların özelliklerini ve bazı geometrik uygulamaları ele alınmıştır [5].

“*On the Norms of Circulant Matrices with the Fibonacci and Lucas numbers*” isimli makalesinde elemanları Fibonacci ve Lucas sayılarından oluşan circulant matrislerin spektral ve Euclidean normları için sınırlar elde etmiştir [28].

“*Circulant, negacyclic and semi circulant matrices with the modified Pell, Jacobstahal and Jacobsthal-Lucas numbers*” isimli makalesinde modified Pell, Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayılarının bazı özelliklerini vermiştir. Ayrıca bu dizilerin circulant, negacyclic ve semicirculant matrisleri tanımlayıp, bu matrislerin normlarını, öz değerlerini ve determinantlarını elde etmiştir [20].

“*On k-Fibonacci numbers of arithmetic indexes*” isimli çalışmalarında indisleri aritmetik dizi olan *k*-Fibonacci sayılarının toplamları elde edilmiştir. Böylece bu tür sayıların toplamları için çeşitli formüller elde edilmesine olanak sağlamışlardır [8].

“*On the boundsfort he norms of r-circulant matrices with the Fibonacci and Lucas numbers*” isimli çalışmada elemanları Fibonacci ve Lucas sayılarından oluşan $A = C_r(F_0, F_1, \ldots, F_{n-1})$ ve $B = C_r(L_0, L_1, \ldots, L_{n-1})$ *r*-circulant matrislerin spektral normları için sınırlar elde edilmiştir. Ayrıca *A* ve *B* matrislerinin Kronecker ve Hadamard çarpımlarının spectral normları için bazı sınırlar elde edilmiştir [26].

“*On the spectral norms of circulant matrices with classical Fibonacci and Lucas numbers entries*” isimli çalışmasında [Solak, S., 2005, On the Norms of Circulant Matrices with the Fibonacci and Lucas numbers, *Applied Mathematics and Computations* 160, 125-132] yaptığı çalışmayı geliştirerek elemanları Fibonacci ve Lucas sayılarından oluşan circulant matrislerin spektral normlarını hesaplamıştır [15].

“*On the k-Lucas numbers*” isimli çalışmasında *k*-Lucas dizisini tanımlamış, tanımlanan dizinin özelliklerini incelemiş ve bu dizinin, *k*-Fibonacci sayıları ile arasındaki ilişkilerini sunmuştur [7].

"The computation of the square roots of circulant matrices" isimli çalışmalarında circulant ve quasi-skew circulant matrislerin köklerini bulmak için iki etkili algoritma geliştirmişlerdir. Bu metotlar Shur ayrışımına dayanan tridiagonal algoritmadan daha hızlıdır [23].

"The inverse of circulant matrix" isimli çalışmasında elemanları, circulant matrisin $g(z)$ ve $g'(z)$ karakteristik polinomunun sıfır noktasındaki fonksiyonları olan ve mühendislikte önemli uygulamaları bulunan circulant matrisin tersini elde etmek için yeni bir yöntem vermiştir [10].

“*A note on generalized k-Horadam sequence*” isimli çalışmada Genelleştirilmiş *k*-Horadam dizilerini tanımlamışlar, bu dizinin bazı özelliklerini determinant yardımıyla ispat etmişlerdir [29].

“*Spectral norm, eigenvaluesand determinant of circulant matrix involving generalized k-Horadam numbers*” isimli çalışmarında elemanları genelleştirilmiş *k*-Horadam sayılarından oluşan circulant matrisi tanımlamışlar, bu matrisin spectral normunu, öz değerlerini ve determinantını hesaplamıştır [31].

"On the norms of an r-circulant matrix with the generalized k-Horadam numbers" isimli çalışmalarında elemanları genelleştirilimiş *k*-Horadam sayıları olan r-circulant matrisleri tanımlayarak, matrisin spectral normlarının alt ve üst sınırlarını hesaplamışlardır [30].

"*On the determinants and Inverses of skew circulant and skew left circulant matrices with Fibonacci and Lucas Numbers*" isimli çalışmalarında elemanları Fibonacci ve Lucas sayıları olan skew ve skew-left circulant matrislerin determinantlarını ve terslerini Fibonacci ve Luccas sayılarıyla karakterize etmişlerdir [11].

" Circulant Type Matrices with the Sum and Product of Fibonacci and Lucas Numbers" isimli çalışmalarında Fibonacci ve Lucas sayılarının çarpımı ve toplamıyla g-circulant, left-circulant ve circulant matrislerinin determinantlarını ve terslerini elde etmişlerdir [18].

"Exact Determinants of Some Special Circulant Matrices Involving Four Kinds of Famous Numbers" isimli çalışmalarında elemanları Perrin, Padovan, Tribonacci and genelleştirilmiş Lucas sayıları olan RSFPLR circulant ve RSLPFL circulant matrislerinin determinantlarını polinomların çarpım terslerini kullanarak elde ettiler [16].

"On the norms of r-circulant matrices with the hyper-Fibonacci and Lucas numbers" isimli çalışmalarında elemanları hyper-Fibonacci ve Lucas sayıları olan *r*-circulant matrisi tanımlayarak matrisin normlarını elde etmişlerdir [2].

1.3. Tezin Yapısı

Elemanları genel sayı dizileri olan skew circulant matrisleri üzerine isimli bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde; kaynak taraması ve özel sayı dizileri ile matrislerin kullanım alanları ile ilgili kısa bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde; sayı dizileri ve circulant matrislerin tanımları verilmiştir. Üçüncü bölümde; sırasıyla elemanları genelleştirilmiş *k*-Horadam sayıları olan skew circulant ve skew left circulant matrisler tanımlanmış ve onların determinantları ve tersleri elde edilmiştir. Son bölümde ise bu çalışmada elde edilen sonuçlar ile ilgili nümerik örnekler verilmiştir.

2. BÖLÜM

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, çalışmamızla ilgili temel kavramlar verilecektir.

2.1. Sayı Dizileri

Bu kısımda, literatürde yer alan ve birçok matematikçinin çalışması konusu olmuş ve uygulama alanları geniş olan ikinci mertebeden lineer özel sayı dizileri hakkında temel tanım ve özellikler verilecektir.

Tanım 2.1.1. $F_0 = 0$ *ve* $F_1 = 1$ olmak üzere,

$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, şeklinde tanımlanan rekürans bağıntılarından elde edilen sayılara *Fibonacci sayıları* denir. Bu rekürans bağıntısının ürettiği tamsayılar dizisine *Fibonacci dizisi* denir ve $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ile gösterilir. Burada F_n, *n*. Fibonacci sayısını gösterir [32].

$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ rekürans bağıntısı ikinci mertebeden sabit katsayılı lineer fark denklemi olduğundan, bu denkleme ait $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ karakteristik denkleminin kökleri $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ olup,

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta},\ n \in \mathbb{N}_0,$$

ifadesine Fibonacci sayılarının Binet formülü denir.Binet formülünden hareketle,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \alpha$$

olduğu kolayca görülmektedir. Buradan, ardışık iki Fibonacci sayısının oranının altın orana yakınsadığı görülür [32].

Tanım 2.1.2. $L_0 = 2$ *ve* $L_1 = 1$ olmak üzere,

$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, ile tanımlı sayılara *Lucas sayıları* denir. Bu sayılardan oluşan diziye de $\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *Lucas dizisi* denir. Burada L_n, *n*. Lucas sayısını gösterir. Lucas sayılarının rekürans bağıntısı Fibonacci sayılarının rekürans bağıntısıyla aynı olduğundan,

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ ve } \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

olmak üzere, Lucas sayılarına ait Binet formülü

$$L_n = \alpha^n + \beta^n$$

şeklindedir. Ayrıca Fibonacci ve Lucas sayıları arasında birçok bağıntı bulunmakta olup bunlardan bir kaç tanesi,

$$F_{n-1} + F_{n+1} = L_n,$$
$$F_{n+2} - F_{n-2} = L_n,$$
$$F_{2n} = F_n L_n,$$
$$F_n + 2F_{n-1} = L_n.$$

şeklindedir [21].

Tanım 2.1.3. $P_0 = 0,\ P_1 = 1$ olmak üzere,

$P_{n+2} = 2P_{n+1} + P_n,\ n \in \mathbb{N}_0$, ile tanımlanan $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ sayı dizisine *Pell dizisi* ve bu dizinin elemanlarına da *Pell sayıları* denir. Pell dizisine ait karakteristik denklem $\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$ olup denkleminin kökleri

$$\gamma = 1+\sqrt{2} \text{ ve } \delta = 1-\sqrt{2}$$

olmak üzere Pell sayılarının Binet Formülü

$$P_n = \frac{\gamma^n - \delta^n}{\gamma - \delta}$$

dir. P_n, n. Pell sayısı ve $\gamma = 1+\sqrt{2}$ (gümüş oran) olmak üzere, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{P_{n+1}}{P_n} = \gamma$' dır [13].

Tanım 2.1.4. $Q_0 = 2$ *ve* $Q_1 = 2$ olmak üzere,

$Q_{n+2} = 2Q_{n+1} + Q,\ n \in \mathbb{N}_0$, ile tanımlanan $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ sayı dizisine *Pell-Lucas sayı dizisi* denir. Pell-Lucas sayılarının Binet Formülü, $\gamma = 1+\sqrt{2}\ ve\ \delta = 1-\sqrt{2}$ olmak üzere,

$$Q_n = \gamma^n + \delta^n$$

şeklindedir. Pell ve Pell-Lucas dizilerinin rekürans bağıntıları aynı olduğundan, Pell ve Pell-Lucas sayıları arasındaki bazı bağıntılar,

$$Q_n = \frac{P_{n+1} + P_{n-1}}{2},$$

$$Q_n^2 = 2P_n^2 + (-1)^n$$

şeklindedir [13].

Tanım 2.1.5. $q_0 = 1\ ve\ q_1 = 1$ olmak üzere,

$q_{n+2} = 2q_{n+1} + q_n,\ n \in \mathbb{N}_0$, şeklinde tanımlanan rekürans bağıntısından elde edilen sayılara *Modify-Pell* sayıları denir. Buradan üretilen tamsayılar dizisine Modify-Pell dizisi denir ve $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ile gösterilir. Modify-Pell sayılarının Binet Formülü, $\gamma = 1+\sqrt{2}\ ve\ \delta = 1-\sqrt{2}$ olmak üzere

$$q_n = \frac{\gamma^n + \delta^n}{\gamma + \delta}$$

dır. Modify-Pell ve Pell sayıları arasında,

$$q_n = P_{n+1} + P_{n-1}$$

Modify-Pell ve Pell-Lucas sayıları arasında ise

$$q_n = Q_n - Q_{n-1}$$

şeklinde bağıntı vardır [13].

Tanım 2.1.6. $J_0 = 0$ *ve* $J_1 = 1$ olmak üzere,

$J_{n+2} = J_{n+1} + 2J_n,\ n \in \mathbb{N}_0,$ şeklinde tanımlanan diziye *Jacobsthal dizisi* denir ve $\{J_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ şeklinde gösterilir. Bu dizinin elemanlarına da *Jacobsthal sayıları* denir. $J_{n+2} = J_{n+1} + 2J_n,\ n \in \mathbb{N}_0,$ rekürans bağıntısına ait karakteristik denklem $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ olup denkleminin kökleri $\phi = 2$ ve $\varphi = -1$ olmak üzere Jacobsthal sayılarının Binet Formülü,

$$J_n = \frac{\phi^n - \varphi^n}{\phi - \varphi} = \frac{2^n - (-1)^n}{3}$$

dir [13].

Tanım 2.1.7. $j_0 = 2$ ve $j_1 = 1$ olmak üzere,

$j_{n+2} = j_{n+1} + 2j_n,\ n \in \mathbb{N}_0,$ şeklinde tanımlanan diziye *Jacobsthal-Lucas dizisi* denir ve $\{j_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ şeklinde gösterilir. Bu dizinin elemanlarına da *Jacobsthal-Lucas sayıları* denir. $\phi = 2$ *ve* $\varphi = -1$ olmak üzere Jacobsthal-Lucass sayılarının Binet Formülü,

$$j_n = \phi^n + \varphi^n = 2^n + (-1)^n$$

şeklindedir. Jacobsthal sayıları ile Jacobsthal-Lucas sayıları arasındaki bağıntılardan bazıları

$$j_n = J_{n+1} + 2J_{n-1},$$

$$j_n J_n = J_{2n},$$

şeklindedir [13].

Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas, modified Pell, Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas dizilerinin ilk terimlerinden bazıları aşağıdaki tabloda verilmiştir.

n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**…**
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	…
L_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199	322	…
P_n	0	1	2	5	12	29	70	169	408	985	2378	5741	13860	…
Q_n	2	2	6	14	34	82	198	478	1154	2786	6726	16238	39202	…
q_n	1	1	3	7	17	41	99	239	577	1393	3363	8119	19601	…
J_n	0	1	1	3	5	11	21	43	85	171	341	683	1365	…
j_n	2	1	5	7	17	31	65	127	257	511	1025	2047	4097	…

Tanım 2.1.8. $a,b,p,q \in \mathbb{Z}$ *ve* $W_0 = a,\ W_1 = b$ olmak üzere,

$$W_{n+2} = pW_{n+1} - qW_n$$

Şeklinde tanımlanan $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ sayı dizisine *Horadam dizisi* ve bu dizinin elemanlarına da *Horadam sayıları* denir.

$\lambda^2 - p\lambda + q = 0$ karakteristik denkleminin kökleri,

$\psi = \dfrac{p+\sqrt{p^2-4q}}{2}$ *ve* $\eta = \dfrac{p-\sqrt{p^2-4q}}{2}$ olmak üzere $A = \dfrac{b-a\eta}{\psi-\eta}$ *ve* $B = \dfrac{b-a\psi}{\psi-\eta}$ için Horadam sayılarının Binet formülü,

$$W_n = A\psi^n + B\eta^n$$

şeklindedir [13].

Tanım 2.1.9. Her pozitif *k* reel sayısı için $F_{k,0}=0,\ F_{k,1}=1$ olmak üzere,

$$F_{k,n+2}=kF_{k,n+1}+F_{k,n}$$

ile tanımlanan $\{F_{k,n}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ sayı dizisine *k-Fibonacci* dizisi ve bu dizinin elemanlarına da *k-Fibonacci sayıları* denir. *k*-Fibonacci dizisi, Fibonacci dizisinin bir genellemesidir. $k\geq 1$ tamsayısı için farklı diziler elde edilir. Eğer $F_{k,n+2}=kF_{k,n+1}+F_{k,n}$ rekürans bağıntısında *k*=1 için, Fibonacci dizisi, *k*=2 için Pell dizisi elde edilir. *k-Fibonacci* dizisine ait rekürans bağıntısının karakteristik denklemi olup bu denklemin kökleri,

$$\alpha_k=\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2} \text{ ve } \beta_k=-\frac{1}{\alpha_k}=\frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}$$

olmak üzere *k*-Fibonacci sayılarının Binet Formülü,

$$F_{k,n}=\frac{\alpha_k^n-\beta_k^n}{\alpha_k-\beta_k}$$

şeklindedir. Karakteristik denklemin pozitif kökü olan α_k'ya *k-altın oran* denir. $k=1,2,3$ değerleri için, $\alpha_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ifadesine altın oran, $\alpha_2=1+\sqrt{2}$ ifadesine gümüş oran, $\alpha_3=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ ifadesine ise bronz oran adı verilir [8].

Tanım 2.1.10. Her *k* pozitif reel sayısı için $L_{k,0}=2$, $L_{k,1}=k$ olmak üzere,

$$L_{k,n+2}=kL_{k,n+1}+L_{k,n}$$

ile tanımlanan $\{L_{k,n}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ sayı dizisine, *k-Lucas dizisi* ve bu dizinin elemanlarına da *k-Lucas sayıları* denir. *k*-Lucas dizisi, Lucas dizisinin bir genellemesidir. $k\geq 1$ tamsayısı için farklı diziler elde edilir. $L_{k,n+2}=kL_{k,n+1}+L_{k,n}$, *k*=1 alınırsa Lucas dizisi, *k*=2 alınırsa Pell-Lucas dizisi elde edilir.

$$\alpha_k=\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2} \text{ ve } \beta_k=-\frac{1}{\alpha_k}=\frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}$$

olmak üzere k-Lucas sayılarının Binet Formülü,

$$L_{k,n} = \alpha_k^n + \beta_k^n$$

şeklindedir [7].

Tanım 2.1.11. $k > 0$, $f(k)$ *ve* $g(k)$ k'nın skaler değerli polinomları olsun. $f^2(k) + 4g(k) > 0,\ H_{k,0} = a,\ H_{k,1} = b$ olmak üzere

$$H_{k,n+2} = f(k)H_{k,n+1} + g(k)H_{k,n}$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanan $\{H_{k,n}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ sayı dizisine *genelleştirilmiş k-Horadam dizisi* ve bu dizinin elemanlarına da *genelleştirilmiş k-Horadam sayıları* denir $H_{k,n+2} = f(k)H_{k,n+1} + g(k)H_{k,n}$ rekürans bağıntısı, 2. mertebeden bir fark denklemi olup karakteristik denklemi, $r^2 - f(k)r - g(k) = 0$ şeklindedir. Bu denklemin kökleri,

$$r_1 = \frac{f(k) + \sqrt{f^2(k) + 4g(k)}}{2} \ \ ve \ \ r_2 = \frac{f(k) - \sqrt{f^2(k) + 4g(k)}}{2};$$

$r_1 > r_2$ olmak üzere kökler arasında,

$$r_1 + r_2 = f(k),\ r_1 r_2 = -g(k),\ r_1 - r_2 = \sqrt{f^2(k) + 4g(k)}$$

bağıntıları elde edilir.

Genelleştirilmiş k-Horadam dizisinin Binet formülü $X = b - ar_2$ ve $Y = b - ar_1$

olmak üzere, $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$H_{k,n} = \frac{Xr_1^n - Yr_2^n}{r_1 - r_2}$$

dir [29].

Genelleştirilmiş k-Horadam dizisinin rekürans bağıntısında $f(k)$, $g(k)$, a ve b nin özel değerleri için literatürde yer alan diğer sayı dizilerine indirgenir.

Şöyle ki $\{H_{k,n}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ dizisinde;

- ✓ $f(k)=g(k)=1,\ a=0,\ b=1$ için, $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}=\{0,1,1,2,3,...\}$ Fibonacci dizisine,
- ✓ $f(k)=g(k)=1,\ a=2,\ b=1$ için, $\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}=\{2,1,3,4,7,...\}$ Lucas dizisine,
- ✓ $f(k)=2,\ g(k)=1,\ a=0,\ b=1$ için, $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}=\{0,1,2,5,12,...\}$ Pell dizisine,
- ✓ $f(k)=2,\ g(k)=1,\ a=2,\ b=2$ için, $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}=\{2,2,6,14,34,...\}$ Pell-Lucas dizisine,
- ✓ $f(k)=2,\ g(k)=1,\ a=1,\ b=1$ için, $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}=\{1,1,3,7,17,...\}$ Modify-Pell dizisine,
- ✓ $f(k)=1,\ g(k)=2,\ a=0,\ b=1$ için, $\{J_n\}_{n\in N}=\{0,1,1,3,5,...\}$ Jacobsthal dizisine,
- ✓ $f(k)=1,\ g(k)=2,\ a=2,\ b=1$ için, $\{j_n\}_{n\in N}=\{2,1,5,7,17,...\}$ Jacobsthal-Lucas dizisine,
- ✓ $f(k)=k,\ g(k)=1,\ a=0,\ b=1$ için,

  $\{F_{k,n}\}_{n\in N}=\{0,1,k,k^2+1,k^3+2k,k^4+3k^2+1,k^5+4k^3+3k,k^6+5k^4+6k^2+1,$
  $k^7+6k^5+10k^3+4k,k^8+7k^6+15k^4+10k^2+1,k^9+8k^7+21k^5+20k^3+5k,...\}$

  k-Fibonacci dizisine,
- ✓ $f(k)=k,\ g(k)=1,\ a=2,\ b=k$ için,

  $\{L_{k,n}\}_{n\in N}=\{2,k,k^2+2,k^3+3k,k^4+4k^2+2,k^5+5k^3++5k,k^6+6k^4+9k^2+2,$
  $k^7+7k^5+14k^3+7k,k^8+8k^6+20k^4+16k^2+2,k^9+9k^7+27k^5+30k^3+9k,...\}$

  k-Lucas dizisine,
- ✓ $f(k)=p,\ g(k)=-q$ için,

  $\{W_n\}_{n\in N}=\{a,b,bp-aq,bp^2-aqp-bq,bp^3-aqp^2-2bpq+aq^2,$
  $bp^4-aqp^3-3bqp^2+2apq^2+bq^2,bp^5-aqp^4-4bqp^3+3ap^2q^2+bpq^2-aq^3,...\}$

  Horadam dizisine indirgenir.

2.2. Circulant Matrisler

Literatürde, *k*-circulant, *f*-circulant, *g*-circulant, *r*-circulant, *α*-circulant, a row skew first-minus-last right (RSFMLR) circulant, a row skew last-minus-first left (RSLMFL) circulant, skew circulant, skew left circulant, gibi birçok circulant-matris çeşidi bulunmaktadır.

Tanım 2.2.1. $C=(c_{ij})$, $n\times n$ mertebesinde bir matris olmak üzere, elemanları $j-i\equiv k\left(\bmod n\right)$ biçiminde tanımlı matrise circulant matris denir ve $C=circ\left(c_0,c_1,c_2,...,c_{n-1}\right)$ şeklinde gösterilir. C circulant matrisi açık olarak,

$$C=\begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-2} \\ c_{n-2} & c_{n-1} & c_0 & \cdots & c_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_0 \end{pmatrix}$$

biçiminde yazılır. Genel anlamda $n\times n$ boyutlu bir circulant matris n elemanlı bir vektörle temsil edilebilir. Bu vektör matrisin ilk satırını oluşturur. Bu matristeki her satır vektörü, bir önceki satır vektörünün birer eleman sağa kaydırılmasıyla oluşur (sondaki eleman alt satırın ilk elemanı olur) [5].

Bir circulant matrisin esas köşegeni üzerindeki elemanları eşittir. Esas köşegene paralel köşegenlerde de aynı durum söz konusudur. Aşağıda $2\times 2,\ 3\times 3,\ 4\times 4$ mertebeli genel circulant matrisler verilmiştir.

$$C=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$$

Circulant matrislerin bazı özellikleri aşağıda verilmiştir.

i) A ve B $n\times n$ tipinde iki circulant matris ve a ve b iki skaler olmak üzere $aA+bB$ matrisi de bir circulant matristir [5].

Örnek 2.2.2.

$A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ ve $B=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 5 & 2\end{pmatrix}$ circulant matrisler, $a=2\ ve\ b=4$ alınırsa

$$aA+bB=\begin{pmatrix}1.2 & 3.2\\ 3.2 & 1.2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2.4 & 5.4\\ 5.4 & 2.4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 26\\ 26 & 10\end{pmatrix}$$

$aA+bB$ matrisi circulant matris olduğu kolaylıkla görülür.

ii) Aynı mertebeli iki circulant matrisin çarpımı da bir circulant matristir [5].

Örnek 2.2.3.

$A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 5 & 1\end{pmatrix}$ circulant matris olmak üzere,

$$A.B=\begin{pmatrix}2.1+3.5 & 2.5+3.1\\ 3.1+2.5 & 3.5+2.1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17 & 13\\ 13 & 17\end{pmatrix}$$

şeklinde çarpımın da yine bir circulant matris olduğu görülür.

iii) Aynı mertebeli iki circulant matrisin çarpımının değişme özelliği vardır [5].

Örnek 2.2.4.

Örnek 1.3.2.3. de ki A ve B matrislerini ele alınırsa

$$BA=\begin{pmatrix}2.1+3.5 & 2.5+3.1\\ 3.1+2.5 & 3.5+2.1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17 & 13\\ 13 & 17\end{pmatrix}=AB$$

olduğu açıkça görülür.

iv) Bir circulant matrisin transpozu (devriği) da circulant matristir [5].

Örnek 2.2.5.

$A=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$ circulant matrisinin transpozu olan $A^T=\begin{pmatrix} a & d & c & b \\ b & a & d & c \\ c & b & a & d \\ d & c & b & a \end{pmatrix}$ matrisi de yine bir circulant matristir.

v) $n\times n$ tipinde bir A matrisinin circulant matris olması için gerek ve yeter şart,

$$\pi=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

olmak üzere, $A\pi=\pi A$ olmasıdır [5].

Örnek 2.2.6.

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ olsun. $\pi=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ olmak üzere,

$$A\pi=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}=\pi A$$

eşitliği sağlanmadığından A matrisi circulant matris değildir.

Örnek 2.2.7.

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ olsun. $\pi=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ olmak üzere,

$$A\pi = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \pi A$$

olduğundan A matrisi circulant matristir.

Tanım 2.2.8. İlk satırı $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ olan skew circulant matris

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ -a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ -a_{n-1} & -a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_2 & -a_3 & -a_4 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}_{\mathrm{nxn}}$$

biçiminde tanımlanan bir kare matristir ve bu matris $SCirc(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ biçiminde gösterilir.

Tanım 2.2.9. İlk satırı $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ olan skew left circulant matris

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n & -a_1 \\ a_3 & a_4 & \cdots & -a_1 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_n & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}_{\mathrm{nxn}}$$

şeklinde tanımlanan bir kare matristir ve $SLCirc(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.10. $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $i^2 = -1$ olmak üzere $w^n = 1$ denkleminin $w_k = e^{\frac{2i\pi k}{n}}$, $(k = 0,1,2,\ldots,n-1)$ köklerine *birimin n. mertebeden kökleri* denir. Eğer k ile n aralarında asal ise w_k köküne *birimin primitif kökü* denir.

Bu çalışmada $k = 1$ durumu $w_1 = w = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ primitif kökü ele alınacaktır.

Teorem 2.2.11. $A = SCirc(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ bir skew circulant matris olsun. Bu durumda;

i) A matrisinin terslenebilir olması için gerek ve yeter şart $f\left(w^k\eta\right)\neq 0\ \left(k=0,1,2,\dots,\mathrm{n}-1\right)$ olmasıdır. Burada $f\left(x\right)=\sum_{j=1}^{n} a_j x^{j-1}$, $w=\mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{n}}$ ve $\eta=\mathrm{e}^{\frac{\pi i}{n}}$.

ii) Eğer A matrisi terslenebilir bir matris ise o zaman A^{-1} skew circulant matristir [17].

Teorem 2.2.12. Aşağıdaki ifadeler doğrudur.

i) $\Theta:=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}$ ortogonal matris ise

$SCirc\left(a_1,a_2,\dots,\mathrm{a}_n\right)=\Theta SLCirc\left(a_1,a_2,\dots,\mathrm{a}_n\right).$

ii) $\left[SCirc\left(a_1,a_2,...,a_n\right)\right]^{-1}=\left[SCirc\left(b_1,b_2,...,b_n\right)\right]$ ise,

$\left[SLCirc\left(a_1,a_2,...,a_n\right)\right]^{-1}=\left[SLCirc\left(b_1,-b_n,...,-b_2\right)\right]$ [17].

3. BÖLÜM

SKEW CIRCULANT VE SKEW LEFT CIRCULANT MATRİSLER

Bu bölümde, elemanları genelleştirilmiş *k*-Horadam sayıları olan skew ve skew left circulant matrisler tanımlanarak bu matrislerin terslenebilir olduğu gösterilip, determinantları ve tersleri genelleştirilmiş *k*-Horadam sayıları ile karakterize edilmiştir.

Tanım 3.1. Elemanları genelleştirilmiş *k*-Horadam sayılarından oluşan nxn mertebeden bir skew circulant matris

$$H_n^S = \begin{pmatrix} H_{k,1} & H_{k,2} & H_{k,3} & \cdots & H_{k,n} \\ -H_{k,n} & H_{k,1} & H_{k,2} & \cdots & H_{k,n-1} \\ -H_{k,n-1} & -H_{k,n} & H_{k,1} & \cdots & H_{k,n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -H_{k,2} & -H_{k,3} & -H_{k,4} & \cdots & H_{k,1} \end{pmatrix}_{\text{n}\times\text{n}} \qquad (3)$$

şeklinde tanımlanır ve $H_n^S = SCirc(H_{k,1}, H_{k,2}, ..., H_{k,n})$ şeklinde gösterilir.

Aşağıdaki teoremde, elemanları genelleştirilmiş *k*-Horadam sayıları olan skew circulant matrislerin determinantı, genelleştirilmiş *k*-Horadam sayıları ile karakterize edilmiştir.

Teorem 3.2. $H_n^S = SCirc(H_{k,1}, H_{k,2}, ..., H_{k,n})$ skew circulant matris olsun. $n > 2$ olmak üzere H_n^S matrisinin determinantı,

$$\det\left(H_n^S\right) = H_{k,1}\vartheta^{n-1} - H_{k,1}\xi^{n-2}\sum_{i=1}^{n-1}\left(H_{k,i+2} - \frac{H_{k,2}H_{k,i+1}}{H_{k,1}}\right)\left(\frac{\vartheta}{\xi}\right)^{i-1}$$

dır. Burada

$\xi = -g(k)\left(H_{k,n} + H_{k,0}\right)$, $\vartheta = H_{k,1} + H_{k,n+1}$ ve $H_{k,n}$, *n*. genelleştirilmiş *k*-Horadam sayısıdır.

İspat. $\xi = -g(k)\left(H_{k,n} + H_{k,0}\right)$, $\vartheta = H_{k,1} + H_{k,n+1}$ olsun. Teoremi ispatlamak için $n \times n$ tipindeki Γ ve Π_1 matrislerini

$$\Gamma=\begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & & \\ \frac{H_{k,2}}{H_{k,1}} & 0 & & & & & 1 \\ g(k) & 0 & & 0 & & 1 & -f(k) \\ 0 & 0 & & & 1 & -f(k) & -g(k) \\ \vdots & \vdots & & & \iddots & \iddots & \\ 0 & 0 & & \iddots & \iddots & \iddots & \\ 0 & 0 & 1 & -f(k) & \iddots & 0 & \\ 0 & 1 & -f(k) & -g(k) & & & \end{pmatrix},\ \Pi_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{\xi}{\vartheta}\right)^{n-2} & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \left(\frac{\xi}{\vartheta}\right)^{n-3} & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \frac{\xi}{\vartheta} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlayalım. Burada $\xi=-g(k)\left(H_{k,n}+H_{k,0}\right)$, $\vartheta=H_{k,1}+H_{k,n+1}$ dir. H_n^s, Γ ve Π_1 matrislerin tanımlarından ve matrislerin çarpımından

$$\Gamma H_n^s \Pi_1=\begin{pmatrix} H_{k,1} & h_n^{'} & H_{k,n-1} & H_{k,n-2} & \dots & H_{k,3} & H_{k,2} \\ 0 & h_n & h_{23} & h_{24} & \dots & h_{2(n-1)} & h_{2n} \\ 0 & 0 & \vartheta & & & & \\ & & -\xi & \vartheta & & 0 & \\ & & & -\xi & \ddots & & \\ 0 & 0 & & & \ddots & \vartheta & \\ 0 & 0 & & 0 & & -\xi & \vartheta \end{pmatrix}$$

elde edilir. Burada $h_n=H_{k,1}+\frac{H_{k,2}H_{k,n}}{H_{k,1}}-\sum_{i=1}^{n-2}\left(H_{k,i+2}-\frac{H_{k,2}H_{k,i+1}}{H_{k,1}}\right)\left(\frac{\xi}{\vartheta}\right)^{n-(i+1)}$,

$h_n^{'}=\sum_{j=1}^{n-1}H_{k,j+1}\left(\frac{\xi}{\vartheta}\right)^{n-(j+1)}$, $h_{2j}=-\left(H_{k,n+3-j}-\frac{H_{k,2}H_{k,n+2-j}}{H_{k,1}}\right)$, $(j=3,4,\dots,n)$,

$\xi=-g(k)\left(H_{k,n}+H_{k,0}\right)$, $\vartheta=H_{k,1}+H_{k,n+1}$ dir. Öte yandan Γ ve Π_1 matrislerinin determinantı $\det\Gamma=\det\Pi_1=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}\det\left(\Gamma H_n^s\Pi_1\right) &= \det\left(\Gamma\right)\det\left(H_n^s\right)\det\left(\Pi_1\right)\\ &= H_{k,1}\vartheta^{n-2}h_n\\ &= H_{k,1}\left(H_{k,1}+H_{k,n+1}\right)^{n-2}\left(H_{k,1}+\frac{H_{k,2}H_{k,n}}{H_{k,1}}-\sum_{i=1}^{n-2}\left(H_{k,i+2}-\frac{H_{k,2}H_{k,i+1}}{H_{k,1}}\right)\left(\frac{\xi}{\vartheta}\right)^{n-(i+1)}\right)\\ &= H_{k,1}\left(H_{k,1}+H_{k,n+1}\right)^{n-2}\left(H_{k,1}+H_{k,n+1}-\sum_{i=1}^{n-1}\left(H_{k,i+2}-\frac{H_{k,2}H_{k,i+1}}{H_{k,1}}\right)\left(\frac{\xi}{\vartheta}\right)^{n-(i+1)}\right)\\ &= H_{k,1}\left(H_{k,1}+H_{k,n+1}\right)^{n-1}-H_{k,1}\left(H_{k,1}+H_{k,n+1}\right)^{n-2}\sum_{i=1}^{n-1}\left(H_{k,i+2}-\frac{H_{k,2}H_{k,i+1}}{H_{k,1}}\right)\left(\frac{\xi}{\vartheta}\right)^{n-(i+1)}\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlikte gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\det\left(\Gamma H_n^s\Pi_1\right)=H_{k,1}\left(H_{k,1}+H_{k,n+1}\right)^{n-1}-H_{k,1}\xi^{n-2}\sum_{i=1}^{n-1}\left(H_{k,i+2}-\frac{H_{k,2}H_{k,i+1}}{H_{k,1}}\right)\left(\frac{\vartheta}{\xi}\right)^{i-1}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. □

Teorem 3.2.' den faydalanılarak bazı özel durumlar aşağıda verilmiştir:

- ✓ $f(k)=g(k)=b=1\ ve\ a=0$ için, F_n *n*. Fibonacci sayısı olmak üzere elemanları Fibonacci sayıları olan skew circulant matrisin determinantı

  $$(\det(F_n^S)=(1+F_{n+1})^{n-1}-(-F_n)^{n-2}\sum_{i=1}^{n-1}F_i\left(\frac{1+F_{n+1}}{-F_n}\right)^{i-1}$$

  şeklindedir.
- ✓ $f(k)=g(k)=1, a=2\ ve\ b=1$ için, L_n *n*. Lucas sayısı olmak üzere elemanları Lucas sayıları olan skew circulant matrisin determinantı

  $$\det\left(L_n^S\right)=\left(1+L_{n+1}\right)^{n-1}-\left(-L_n-2\right)^{n-2}\sum_{i=1}^{n-1}\left(L_{i+1}-3L_{i+1}\right)\left(-\frac{1+L_{n+1}}{2+L_n}\right)^{i-1}$$

  şeklindedir.
- ✓ $f(k)=2,\ g(k)=1, a=0\ ve\ b=1$ için, P_n *n*. Pell sayısı olmak üzere elemanları Pell sayıları olan skew circulant matrisin determinantı

  $$\det(P_n^S)=(1+P_{n+1})^{n-1}-(-P_n)^{n-2}\sum_{i=1}^{n-1}P_i\left(\frac{1+P_{n+1}}{-P_n}\right)^{i-1}$$ elde edilir.

- ✓ $f(k)=2,\ g(k)=1,\ a=b=2$ için, Q_n n. Pell-Lucas sayısı olmak üzere elemanları Pell-Lucas sayıları olan skew circulant matrisin determinantı

$$\det(Q_n^S)=2(2+Q_{n+1})^{n-1}-2(-Q_n-2)^{n-2}\sum_{i=1}^{n-1}[Q_{i+2}-3Q_{i+1}]\left(-\frac{2+Q_{n+1}}{2+Q_n}\right)^{i-1}$$

şeklindedir.

- ✓ $f(k)=2,\ g(k)=1,\ a=b=1$ için q_n n. Modified-Pell sayısı olmak üzere elemanları Modified Pell sayıları olan skew circulant matrisin determinantı

$$\det(q_n^S)=(1+q_{n+1})^{n-1}-(-1-q_n)^{n-2}\sum_{i=1}^{n-1}[q_{i+2}-3q_{i+1}]\left(-\frac{1+q_{n+1}}{1+q_n}\right)^{i-1}$$

şeklindedir.

- ✓ $f(k)=1,\ g(k)=2,\ a=0\ ve\ b=1$ için, J_n n. Jacobsthal sayısı olmak üzere elemanları Jacobsthal sayıları olan skew circulant matrisin determinantı

$$\det(J_n^S)=(1+J_{n+1})^{n-1}-(-2J_n)^{n-2}2\sum_{i=1}^{n-1}J_i\left(-\frac{1+J_{n+1}}{2J_n}\right)^{i-1}$$

şeklindedir.

- ✓ $f(k)=1,\ g(k)=2,\ a=2\ ve\ b=1$ için, j_n n. Jacobsthal-Lucas sayısı olmak üzere elemanları Jacobsthal-Lucas sayıları olan skew circulant matrisin determinantı

$$\det(j_n^S)=(1+j_{n+1})^{n-1}-(-4-2j_n)^{n-2}\sum_{i=1}^{n-1}[J_{i+2}-5j_{i+1}]\left(-\frac{1+j_{n+1}}{4+2j_n}\right)^{i-1}$$

şeklindedir.

Teorem 3.3 ($H_n^S=SCirc(H_{k,1},H_{k,2},...,H_{k,n})$ skew circulant matris olsun. O zaman $n>2$ için H_n^S matrisi tersinir bir matristir.

İspat. Teorem 2.2.11. ' de verilen $f(w^m\eta)\neq 0$ olduğunu göstermek teoremi ispatlamak için yeterli olacaktır. Genelleştirilmiş *k*-Horadam sayılarına ait Binet formülünden

$$
\begin{aligned}
f(w^m\eta) &= \sum_{j=1}^{n} H_{k,j}\left(w^m\eta\right)^{j-1} \\
&= \frac{1}{r_1-r_2}\left[X\sum_{j=1}^{n} r_1^j\left(w^m\eta\right)^{j-1} - Y\sum_{j=1}^{n} r_2^j\left(w^m\eta\right)^{j-1}\right] \\
&= \frac{1}{r_1-r_2}\left[X\frac{r_1\left(1+r_1^n\right)}{1-r_1w^m\eta} - Y\frac{r_2\left(1+r_2^n\right)}{1-r_2w^m\eta}\right]
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada $1-r_1w^m\eta \neq 0$ ve $1-r_2w^m\eta \neq 0$ olacağı açıktır. Öte yandan yukarıda ki son eşitlik düzenlenirse, $m=1,2,...,n-1$ için,

$$
\begin{aligned}
f(w^m\eta) &= \frac{H_{k,1}+H_{k,n+1}+g(k)w^m\eta(H_{k,0}+H_{k,n})}{1-(r_1+r_2)w^m\eta + r_1r_2w^{2m}\eta^2} \\
&= \frac{H_{k,1}+H_{k,n+1}+g(k)w^m\eta(H_{k,0}+H_{k,n})}{1-f(k)w^m\eta + g(k)w^{2m}\eta^2}
\end{aligned}
$$

bulunur. Varsayalım ki $m=1,2,...,n-1$ için, $f(w^m\eta)=0$ olsun.

$1-f(k)w^m\eta+g(k)w^{2m}\eta^2 \neq 0$ olduğundan $H_{k,1}+H_{k,n+1}+g(k)w^m\eta(H_{k,0}+H_{k,n})=0$

olacaktır. Buradan, $w^m\eta = \dfrac{H_{k,1}+H_{k,n+1}}{-g(k)(H_{k,0}+H_{k,n})}$ ifadesi bir gerçel sayıdır. Diğer taraftan,

$$
\begin{aligned}
w^m\eta &= \exp\left(\frac{(2m+1)\pi i}{n}\right) \\
&= \cos\frac{(2m+1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2m+1)\pi}{n},
\end{aligned}
$$

olduğu göz önüne alınırsa $\sin\dfrac{(2m+1)\pi}{n}=0$ olacağı açıktır. Diğer taraftan

$0<\dfrac{(2m+1)\pi}{n}<2\pi$ için $w^m\eta=-1$ elde edilir. Fakat $x=-1$,

$H_{k,1}+H_{k,n+1}+g(k)w^m\eta(H_{k,0}+H_{k,n})=0\,(n>2)$ eşitliğinin bir kökü değildir. Bu ise kabulümüz ile çelişeceğinden $m=1,2,...,n-1$ için $f(w^m\eta)\neq 0$ elde edilir. Teorem 2.2.11. ' den ispat tamamlanır□.

Aşağıda elemanları genelleştirilmiş *k*-Horadam sayıları olan skew circulant matrisin tersini veren teoremi ispatlamak için ihtiyaç duyulan yeni bir matris verilecektir. $(n-2)\times(n-2)$ boyutlu $\Psi=\left[\psi_{ij}\right]_{i,j=1}^{n-2}$ alt üçgen matrisnin elemanları

$$\psi_{ij}=\begin{cases} H_{k,1}+H_{k,n+1}, & i=j \\ g(k)\left(H_{k,0}+H_{k,n}\right), & i=j+1 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}.$$

şeklinde tanımlansın. O halde $\Psi=\left[\psi_{ij}\right]_{i,j=1}^{n-2}$ alt üçgen matrisin tersi $\Psi^{-1}=\left[\psi'_{ij}\right]_{i,j=1}^{n-2}$,

$$\psi'_{ij}=\begin{cases} \dfrac{\left[-g(k)\left(H_{k,n}+H_{k,0}\right)\right]^{i-j}}{\left(H_{k,1}+H_{k,n+1}\right)^{i-j+1}}, & i\geq j \\ 0, & i<j \end{cases}, \tag{4}$$

şeklindedir.

Teorem 3.4. $n>2$ olsun. O zaman $H_n^S=SCirc(H_{k,1},H_{k,2},...,H_{k,n})$ matrisinin tersi $\left(H_n^S\right)^{-1}=SCirc\left(m_1,m_2,...,m_n\right)$ dir. Burada,

$$m_1=\frac{1}{h_n}\left(1-\sum_{i=1}^{n-2}\frac{\left(H_{k,n+2-i}-\dfrac{H_{k,2}H_{k,n+1-i}}{H_{k,1}}\right)\left(-g(k)\left(H_{k,n}+H_{k,0}\right)\right)^{i-1}}{\left(H_{k,1}+H_{k,n+1}\right)^{i}}\right),$$

$$m_2=\frac{1}{h_n}\left(-\frac{H_{k,2}}{H_{k,1}}-g(k)\sum_{i=1}^{n-2}\frac{\left(H_{k,n+1-i}-\dfrac{H_{k,2}H_{k,n-i}}{H_{k,1}}\right)\left(-g(k)\left(H_{k,n}+H_{k,0}\right)\right)^{i-1}}{\left(H_{k,1}+H_{k,n+1}\right)^{i}}\right),$$

$$m_j=\frac{1}{h_n}\left(\frac{\left(H_{k,3}-\dfrac{H^2{}_{k,2}}{H_{k,1}}\right)\left(-g(k)\left(H_{k,n}+H_{k,0}\right)\right)^{j-3}}{\left(H_{k,1}+H_{k,n+1}\right)^{j-2}}\right)\left(j=3,4,...,n\right),$$

$\xi=-g(k)\left(H_{k,n}+H_{k,0}\right)$, $\vartheta=H_{k,1}+H_{k,n+1}$

ve

$$h_n=H_{k,1}+\frac{H_{k,2}H_{k,n}}{H_{k,1}}-\sum_{i=1}^{n-2}\left(H_{k,i+2}-\frac{H_{k,2}H_{k,i+1}}{H_{k,1}}\right)\left(\frac{\xi}{\vartheta}\right)^{n-(i+1)}$$

dır.

İspat. Teoremi ispatlamak için öncelikle Π_2 matrisini

$$\Pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{h_n^{'}}{H_{k,1}} & \dfrac{h_{13}}{H_{k,1}} & \dfrac{h_{14}}{H_{k,1}} & \cdots & \dfrac{h_{1n}}{H_{k,1}} \\ 0 & 1 & \dfrac{h_{23}}{h_n} & \dfrac{h_{24}}{h_n} & \cdots & \dfrac{h_{2n}}{h_n} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlayalım. Burada $\xi = -g(k)(H_{k,n} + H_{k,0}),\ \vartheta = H_{k,1} + H_{k,n+1}$,

$h_n^{'} = \sum_{j=1}^{n-1} H_{k,j+1} \left(\frac{\xi}{\vartheta}\right)^{n-(j+1)}$, $h_n = H_{k,1} + \frac{H_{k,2}H_{k,n}}{H_{k,1}} - \sum_{i=1}^{n-2}(H_{k,i+2} - \frac{H_{k,2}H_{k,i+1}}{H_{k,1}})\left(\frac{\xi}{\vartheta}\right)^{n-(i+1)}$

$h_{1j} = \frac{h_n^{'}}{h_n}\left(\frac{H_{k,2}H_{k,n+2-j}}{H_{k,1}} - H_{k,n+3-j}\right) - H_{k,n-j+2},\ h_{2,j} = H_{k,n+3-j} - \frac{H_{k,2}H_{k,n+2-j}}{H_{k,1}}$' dir. $\oplus$ verilen

iki matrisin direkt toplamı ve $\Omega = \begin{pmatrix} H_{k,1} & 0 \\ 0 & h_n \end{pmatrix}$ olmak üzere, H_n^S, Π_1 *ve* Γ matrislerinin

tanımlarından

$$\Gamma H_n^S \Pi_1 \Pi_2 = \Omega \oplus \Psi \tag{5}$$

elde edilir. Öte yandan $\Pi = \Pi_1\Pi_2$ olsun. (5)' te verilen matrisin tersi

$$\left(H_n^S\right)^{-1} = \Pi\left(\Omega^{-1} \oplus \Psi^{-1}\right)\Gamma \tag{6}$$

şeklinde olacaktır. Teorem 1.3.2.11.'den H_n^S skew circulant matrisinin tersi de skew circulant matris olacağından $\left(H_n^S\right)^{-1} = SCirc(m_1, m_2, ..., m_n)$ şeklinde yazılır. Ayrıca Π matrisinin son satırının elemanları sırasıyla $0, 1, \frac{h_{23}}{h_n}, \frac{h_{24}}{h_n}, ..., \frac{h_{2n}}{h_n}$ şeklindedir. Dahası $\Psi = \left[\psi_{ij}\right]_{i,j=1}^{n-2}$ matrisi ve Teorem 1.3.2.11 göz önüne alınırsa, $\left(H_n^S\right)^{-1}$ matrisinin son satırının elemanları aşağıdaki gibi olacaktır.

$$-m_2=\frac{H_{k,2}}{h_nH_{k,1}}+\frac{g(k)}{h_n}\sum_{i=1}^{n-2}\frac{\left(H_{k,n+1-i}-\frac{H_{k,2}H_{k,n-i}}{H_{k,1}}\right)\xi^{i-1}}{\vartheta^i},$$

$$-m_3=\frac{H_{k,3}-\frac{H_{k,2}^2}{H_{k,1}}}{h_n\vartheta},$$

$$-m_4=-\frac{f(k)}{h_n\vartheta}\left(H_{k,3}-\frac{H_{k,2}^2}{H_{k,1}}\right)+\frac{1}{h_n}\sum_{i=1}^{2}\frac{\left(H_{k,5-i}-\frac{H_{k,2}H_{k,4-i}}{H_{k,1}}\right)\xi^{i-1}}{\vartheta^i},$$

$$-m_5=-\frac{g(k)}{h_n}\frac{H_{k,3}-\frac{H_{k,2}^2}{H_{k,1}}}{\vartheta}-\frac{f(k)}{h_n}\sum_{i=1}^{2}\frac{\left(H_{k,5-i}-\frac{H_{k,2}H_{k,4-i}}{H_{k,1}}\right)\xi^{i-1}}{\vartheta^i}+\frac{1}{h_n}\sum_{i=1}^{3}\frac{\left(H_{k,6-i}-\frac{H_{k,2}H_{k,5-i}}{H_{k,1}}\right)\xi^{i-1}}{\vartheta^i},$$

$$\vdots$$

$$-m_n=-\frac{g(k)}{h_n}\sum_{i=1}^{n-4}\frac{\left(H_{k,n-1-i}-\frac{H_{k,2}H_{k,n-2-i}}{H_{k,1}}\right)\xi^{i-1}}{\vartheta^i}-\frac{f(k)}{h_n}\sum_{i=1}^{n-3}\frac{\left(H_{k,n-i}-\frac{H_{k,2}H_{k,n-1-i}}{H_{k,1}}\right)\xi^{i-1}}{\vartheta^i}$$

$$+\frac{1}{h_n}\sum_{i=1}^{n-2}\frac{\left(H_{k,n+1-i}-\frac{H_{k,2}H_{k,n-i}}{H_{k,1}}\right)\xi^{i-1}}{\vartheta^i},$$

$$m_1=\frac{1}{h_n}-\frac{g(k)}{h_n}\sum_{i=1}^{n-3}\frac{\left(H_{k,n-1-i}-\frac{H_{k,2}H_{k,n-2-i}}{H_{k,1}}\right)\xi^{i-1}}{\vartheta^i}-\frac{f(k)}{h_n}\sum_{i=1}^{n-2}\frac{\left(H_{k,n-i}-\frac{H_{k,2}H_{k,n-1-i}}{H_{k,1}}\right)\xi^{i-1}}{\vartheta^i}.$$

Şimdi $j=1,2,\dots,n-2$ için $S_n^{(j)}=\sum_{i=1}^{j}\frac{\left(H_{k,j+3-i}-\frac{H_{k,2}H_{k,j+2-i}}{H_{k,1}}\right)\xi^{i-1}}{\vartheta^i}$ şeklinde tanımlansın.

O zaman,

$$f(k)S_n^{(1)}-S_n^{(2)}f(k)=\frac{H_{k,3}-\frac{H_{k,2}^2}{H_{k,1}}}{\vartheta}-\sum_{i=1}^{2}\frac{\left(H_{k,5-i}-\frac{H_{k,2}H_{k,4-i}}{H_{k,1}}\right)\xi^{i-1}}{\vartheta^i}$$

$$=\frac{\left(H_{k,3}-\frac{H_{k,2}^2}{H_{k,1}}\right)\left(-g(k)(H_{k,n}+H_{k,0})\right)}{\left(H_{k,1}+H_{k,n+1}\right)^2}$$

elde edilir.

Benzer şekilde,

$$g(k)S_n^{(n-3)} + f(k)S_n^{(n-2)} = g(k)\sum_{i=1}^{n-3}\frac{\left(H_{k,n-i} - \frac{H_{k,2}H_{k,n-1-i}}{H_{k,1}}\right)\xi^{i-1}}{\vartheta^i} + f(k)\sum_{i=1}^{n-2}\frac{\left(H_{k,n+1-i} - \frac{H_{k,2}H_{k,n-i}}{H_{k,1}}\right)\xi^{i-1}}{\vartheta^i}$$

$$= g(k)\frac{\left(H_{k,2} - \frac{H_{k,2}H_{k,1}}{H_{k,1}}\right)\xi^{n-3}}{\vartheta^{n-2}} + g(k)\sum_{i=1}^{n-3}\frac{\left(H_{k,n-i} - \frac{H_{k,2}H_{k,n-1-i}}{H_{k,1}}\right)\xi^{i-1}}{\vartheta^i}$$

$$+ f(k)\sum_{i=1}^{n-2}\frac{\left(H_{k,n+1-i} - \frac{H_{k,2}H_{k,n-i}}{H_{k,1}}\right)\xi^{i-1}}{\vartheta^i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n-2}\frac{\left(H_{k,n+2-i} - \frac{H_{k,2}H_{k,n+1-i}}{H_{k,1}}\right)(-g(k)(H_{k,0}+H_{k,n}))^{i-1}}{\left(H_{k,1}+H_{k,n+1}\right)^i}$$

bulunur. Ayrıca

$$g(k)S_n^{(j)} + f(k)S_n^{(j+1)} - S_n^{(j+2)} = g(k)\sum_{i=1}^{j}\frac{\left(H_{k,j+3-i} - \frac{H_{k,2}H_{k,j+2-i}}{H_{k,1}}\right)\xi^{i-1}}{\vartheta^i} + f(k)\sum_{i=1}^{j+1}\frac{\left(H_{k,j+4-i} - \frac{H_{k,2}H_{k,j+3-i}}{H_{k,1}}\right)\xi^{i-1}}{\vartheta^i}$$

$$-\sum_{i=1}^{j+2}\frac{\left(H_{k,j+5-i} - \frac{H_{k,2}H_{k,j+4-i}}{H_{k,1}}\right)\xi^{i-1}}{\vartheta^i}$$

$$== f(k)\frac{\left(H_{k,3} - \frac{H_{k,2}^2}{H_{k,1}}\right)\xi^i}{\vartheta^{j+1}} - \frac{\left(H_{k,4} - \frac{H_{k,2}H_{k,3}}{H_{k,1}}\right)\xi^i}{\vartheta^{j+1}} - \frac{\left(H_{k,3} - \frac{H_{k,2}^2}{H_{k,1}}\right)\xi^{j+1}}{\vartheta^{j+2}}$$

$$= -\frac{\left(H_{k,3} - \frac{H_{k,2}^2}{H_{k,1}}\right)(-g(k)(H_{k,n}+H_{k,0}))^{j+1}}{(H_{k,1}+H_{k,n+1})^{j+2}}, (j = 1, 2, ..., n-4)$$

olup, buradan

$$m_1 = \frac{1}{h_n}\left(1 - \sum_{i=1}^{n-2}\frac{\left(H_{k,n+2-i} - \frac{H_{k,2}H_{k,n+1-i}}{H_{k,1}}\right)(-g(k)(H_{k,n}+H_{k,0}))^{i-1}}{\left(H_{k,1}+H_{k,n+1}\right)^i}\right),$$

$$m_2 = \frac{1}{h_n}\left(-\frac{H_{k,2}}{H_{k,1}} - g(k)\sum_{i=1}^{n-2}\frac{\left(H_{k,n+1-i} - \frac{H_{k,2}H_{k,n-i}}{H_{k,1}}\right)(-g(k)(H_{k,n}+H_{k,0}))^{i-1}}{\left(H_{k,1}+H_{k,n+1}\right)^i}\right),$$

$$m_j = \frac{1}{h_n}\left(-\frac{\left(H_{k,3} - \frac{H_{k,2}^2}{H_{k,1}}\right)(-g(k)(H_{k,n}+H_{k,0}))^{j-3}}{\left(H_{k,1}+H_{k,n+1}\right)^{j-2}} \right),\ (j=3,4,...,n),$$

bulunur ki ispat tamamlanır. □

Teorem 3.4. den faydalanılarak bazı özel durumlar aşağıda verilmiştir.

- ✓ $f(k)=g(k)=b=1\ ve\ a=0$ için, F_n n. Fibonacci sayısı olmak üzere elemanları Fibonacci sayıları olan skew circulant matrisin tersi,

  $\left(F_n^S\right)^{-1} = \frac{1}{f_n} SCirc(x_1, x_2, ..., x_n)'$ dir. Burada

  $$x_1 = 1 - \sum_{i=1}^{n-2} \frac{F_{n-i}(-F_n)^{i-1}}{\left(F_1+F_{n+1}\right)^i},\ \ x_2 = -1 - \sum_{i=1}^{n-2} \frac{F_{n-1-i}(-F_n)^{i-1}}{\left(F_1+F_{n+1}\right)^i},$$

  $$x_j = -\frac{(-F_n)^{j-3}}{\left(F_1+F_{n+1}\right)^{j-2}}, (j=3,4,...,n) \text{ ve } f_n = F_1 + F_n - \sum_{i=1}^{n-2} F_i \left(\frac{-F_n}{F_1+F_{n+1}}\right)^{n-(i+1)} \quad [11].$$

- ✓ $f(k)=g(k)=1,\ a=2$ ve $b=1$ için, L_n n. Lucas sayısı olmak üzere elemanları Lucas sayıları olan skew circulant matrisin tersi,

  $\left(L_n^S\right)^{-1} = \frac{1}{l_n} SCirc(x_1, x_2, ..., x_n)'$ dir. Burada,

  $$x_1 = 1 - \sum_{i=1}^{n-2} \frac{\left(L_{n+2-i} - 3L_{n+1-i}\right)(-L_n-2)^{i-1}}{\left(L_1+L_{n+1}\right)^i},\ \ x_2 = -3 - \sum_{i=1}^{n-2} \frac{\left(L_{n+1-i} - 3L_{n-i}\right)(-L_n-2)^{i-1}}{\left(L_1+L_{n+1}\right)^i},$$

  $$x_j = \frac{5\left(-L_n-2\right)^{i-3}}{\left(L_1+L_{n+1}\right)^{j-2}}, (j=3,4,...,n) \text{ ve } l_n = L_1 + 3L_n - \sum_{i=1}^{n-2}\left(L_{i+2} - 3L_{i+1}\right)\left(-\frac{L_n+2}{L_1+L_{n+1}}\right)^{n-(i+1)}.$$

- ✓ $f(k)=2,\ g(k)=1,\ a=0$ ve $b=1$ için, P_n n. Pell sayısı olmak üzere elemanları Pell sayıları olan skew circulant matrisin tersi,

  $\left(P_n^S\right)^{-1} = \frac{1}{p_n} SCirc(x_1, x_2, ..., x_n)'$dir. Burada,

  $$x_1 = 1 - \sum_{i=1}^{n-2} \frac{P_{n-i}(-P_n)^{i-1}}{\left(P_1+P_{n+1}\right)^i},\ \ x_2 = -2 - \sum_{i=1}^{n-2} \frac{P_{n-1-i}(-P_n)^{i-1}}{\left(P_1+P_{n+1}\right)^i},$$

  $$x_j = -\frac{(-P_n)^{j-3}}{\left(P_1+P_{n+1}\right)^{j-2}}, (j=3,4,...,n) \text{ ve } p_n = P_1 + 2P_n - \sum_{i=1}^{n-2} P_i \left(\frac{-P_n}{P_1+P_{n+1}}\right)^{n-(i+1)}$$

- ✓ $f(k)=1,\ g(k)=2,\ a=0$ ve $b=1$ için, J_n n. sayısı olmak üzere elemanları Jacobsthhal sayıları olan skew circulant matrisin tersi,

$$\left(J_n^S\right)^{-1}=\frac{1}{j_n}SCirc(x_1,x_2,...,x_n),$$

$$x_1=1-2\sum_{i=1}^{n-2}\frac{J_{n-i}(-2J_n)^{i-1}}{\left(J_1+J_{n+1}\right)^i},\quad x_2=-1-4\sum_{i=1}^{n-2}\frac{J_{n-1-i}(-2J_n)^{i-1}}{\left(J_1+J_{n+1}\right)^i},$$

$$x_j=-\frac{2(-2J_n)^{j-3}}{\left(J_1+J_{n+1}\right)^{j-2}},(j=3,4,...,n)\text{ ve } j_n=J_1+J_n-2\sum_{i=1}^{n-2}J_i\left(\frac{-2J_n}{J_1+J_{n+1}}\right)^{n-(i+1)}$$

dir.

Tanım 3.5. Elemanları genelleştirilmiş *k*-Horadam sayılarından oluşan nxn tipinde bir skew left circulant matris

$$H_n^{SL}=\begin{pmatrix} H_{k,1} & H_{k,2} & \cdots & H_{k,n-1} & H_{k,n} \\ H_{k,2} & H_{k,3} & \cdots & H_{k,n} & -H_{k,1} \\ H_{k,3} & H_{k,4} & \cdots & -H_{k,1} & -H_{k,2} \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ H_{k,\mathrm{n}} & -H_{k,1} & \cdots & -H_{k,n-2} & -H_{k,\mathrm{n}-1} \end{pmatrix}_{n\times n} \tag{7}$$

şeklinde tanımlanır ve $H_n^{SL}=SLCirc\left(H_{k,1},H_{k,2},\ldots,H_{k,n}\right)$ şeklinde gösterilir.

Teorem 2.2.12' den

$$\Theta:=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{nxn}$$

ortogonal matris olmak üzere, elemanları genelleştirilmiş *k*-Horadam sayıları olan skew circulant matris ile skew-left circulant matris arasında

$$SCirc\left(H_{k,1},H_{k,2},\ldots,\mathrm{H}_{k,n}\right)=\Theta SLCirc\left(H_{k,1},H_{k,2},\ldots,\mathrm{H}_{k,n}\right)$$

bağıntısı vardır. Ayrıca yine aynı teoremden

$\left[SCirc\left(a_1,a_2,...,a_n\right)\right]^{-1}=\left[SCirc\left(b_1,b_2,...,b_n\right)\right]$ ise,

$\left[SLCirc\left(a_1,a_2,...,a_n\right)\right]^{-1}=\left[SLCirc\left(b_1,-b_n,...,-b_2\right)\right]$ bağıntıları geçerlidir. Dolayısıyla bu bölümde verilen teoremler, II. Bölümde verilen teoremler ve Teorem 2.2.12. dikkate alınarak ispatsız şekilde sunulacaktır.

Teorem 3.6. $H_n^{SL}=SLCirc(H_{k,1},H_{k,2},...,H_{k,n})$ skew left circulant matris olsun. O zaman H_n^{SL} matrisinin determinantı

$$\det\left(H_n^{SL}\right)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\left(H_{k,1}\vartheta^{n-1}-H_{k,1}\xi^{n-2}\sum_{i=1}^{n-1}\left(H_{k,i+2}-\frac{H_{k,2}H_{k,i+1}}{H_{k,1}}\right)\left(\frac{\vartheta}{\xi}\right)^{i-1}\right)$$

şeklindedir. Burada $\xi=-g(k)(H_{k,n}+H_{k,0})$, $\vartheta=H_{k,1}+H_{k,n+1}$ ve $H_{k,n}$ n. genelleştirilmiş k-Horadam sayısıdır.

Teorem 3.7. $H_n^{SL}=SLCirc(H_{k,1},H_{k,2},...,H_{k,n})$ skew left circulant matris olsun. $n>2$ için H_n^{SL} tersinir bir matristir.

Teorem 3.8. $H_n^{SL}=SLCirc(H_{k,1},H_{k,2},...,H_{k,n})$ skew left circulant matris olsun. $n>2$ için $H_n^{SL}=SLCirc(H_{k,1},H_{k,2},...,H_{k,n})$ matrisinin tersi $\left(H_n^{SL}\right)^{-1}=SL(m'_1,m'_2,...,m'_n)$ dir. Burada,

$$m'_1=\frac{1}{h_n}\left(1-\sum_{i=1}^{n-2}\frac{\left(H_{k,n+2-i}-\frac{H_2H_{k,n+1-i}}{H_{k,1}}\right)(-g(k)(H_{k,n}+H_{k,0}))^{i-1}}{\left(H_{k,1}+H_{k,n+1}\right)^{i}}\right),$$

$$m'_j=\frac{1}{h_n}\left(\frac{\left(H_{k,3}-\frac{H_{k,2}^2}{H_{k,1}}\right)(-g(k)(H_{k,n}+H_{k,0}))^{n-j-1}}{\left(H_{k,1}+H_{k,n+1}\right)^{n-j}}\right),(j=2,3,...,n-1),$$

$$m'_n=\frac{1}{h_n}\left(\frac{H_{k,2}}{H_{k,1}}+g(k)\sum_{i=1}^{n-2}\frac{\left(H_{k,n+1-i}-\frac{H_{k,2}H_{k,n-i}}{H_{k,1}}\right)(-g(k)(H_{k,n}+H_{k,0}))^{i-1}}{\left(H_{k,1}+H_{k,n+1}\right)^{i}}\right),$$

$$\xi=-g(k)(H_{k,n}+H_{k,0}),\vartheta=H_{k,1}+H_{k,n+1},h_n=H_{k,1}+\frac{H_{k,2}H_{k,n}}{H_{k,1}}-\sum_{i=1}^{n-2}\left(H_{k,i+2}-\frac{H_{k,2}H_{k,i+1}}{H_{k,1}}\right)\left(\frac{\xi}{\vartheta}\right)^{n-(i+1)}.$$

4. BÖLÜM

UYGULAMALAR

Bu bölümde, III. bölümde verilen teoremlerle ilgili nümerik örnekler verilmiştir.

Örnek 4.1. Elemanları Fibonacci sayılarından oluşan 4x4 mertebeden skew circulant matrisin determinantını hesaplayarak bu matrisin tersini bulunuz.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \text{ matrisinin determinantı}$$

$$\det(F_n^S) = (1+F_{n+1})^{n-1} - (-F_n)^{n-2} \sum_{i=1}^{n-1} F_i \left(\frac{1+F_{n+1}}{-F_n} \right)^{i-1}$$

$$= (1+5)^3 - (-3)^2 \left[1\left(\frac{1+5}{-3} \right)^0 + 1(-2) + 2(-2)^2 \right]$$

$$= 153$$

tersi ise,

$$\left(F_n^S\right)^{-1} = \frac{1}{f_n} SCirc(x_1, x_2, ..., x_n),$$

$$f_n = F_1 + F_n - \sum_{i=1}^{n-2} F_i \left(\frac{-F_n}{F_1 + F_{n+1}} \right)^{n-(i+1)}$$

$$f_4 = 1 + 3 - \left[1\left(\frac{-3}{1+5} \right)^2 + 1\left(\frac{-3}{6} \right) \right] = \frac{17}{4}$$

$$x_1 = 1 - \sum_{i=1}^{n-2} \frac{F_{n-i}(-F_n)^{i-1}}{\left(F_1 + F_{n+1}\right)^i}$$

$$x_1 = 1 - \left[\frac{2(-3)^0}{1+5} + \frac{1(-3)}{(1+5)^2} \right] = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f_4} x_1 = \frac{4}{17} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{17}$$

$$x_2 = -1 - \sum_{i=1}^{n-2} \frac{F_{n-1-i}(-F_n)^{i-1}}{\left(F_1 + F_{n+1}\right)^i}$$

$$x_2 = -1 - \left[\frac{1(-3)^0}{1+5} + \frac{1(-3)}{(1+5)^2} \right] = -\frac{13}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f_4} x_2 = \frac{4}{17} \cdot \frac{(-13)}{12} = -\frac{13}{51}$$

$$x_j = -\frac{(-F_n)^{j-3}}{\left(F_1 + F_{n+1}\right)^{j-2}}, (j = 3, 4, \ldots, n)$$

$$x_3 = -\frac{(-3)^0}{1+5} = -\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f_4} x_3 = \frac{4}{17} \cdot \frac{(-1)}{6} = -\frac{2}{51}$$

$$x_4 = -\frac{(-3)^1}{(1+5)^2} = \frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f_4} x_4 = \frac{4}{17} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{51}$$

$$\left(F_4^S\right)^{-1} = SCirc\left(\frac{3}{17}, -\frac{13}{51}, -\frac{2}{51}, \frac{1}{51}\right)$$

olarak bulunur. Şimdi aynı matrisin determinantını ve tersini bir de maple programı ile bulalım.

```
> with(linalg);
```

```
>  O1:=matrix(4,4,[1,1,2,3,-3,1,1,2,-2,-3,1,1,-1,-2,-3,1]);
```

$$O1 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

```
>det(O1);
```

>inverse(O1);

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{17} & \frac{-13}{51} & \frac{-2}{51} & \frac{1}{51} \\ \frac{-1}{51} & \frac{3}{17} & \frac{-13}{51} & \frac{-2}{51} \\ \frac{2}{51} & \frac{-1}{51} & \frac{3}{17} & \frac{-13}{51} \\ \frac{13}{51} & \frac{2}{51} & \frac{-1}{51} & \frac{3}{17} \end{pmatrix}$$

Örnek 4.2. Elemanları Lucas sayılarından oluşan 4x4 mertebeden skew circulant matrisin determinantını hesaplayarak bu matrisin tersini bulunuz.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ -7 & 1 & 3 & 4 \\ -4 & -7 & 1 & 3 \\ -3 & -4 & -7 & 1 \end{pmatrix}$$ matrisinin determinantı

$$\det\left(L_n^S\right) = \left(1+L_{n+1}\right)^{n-1} - \left(-L_n - 2\right)^{n-2} \sum_{i=1}^{n-1}\left(L_{i+1} - 3L_{i+1}\right)\left(-\frac{1+L_{n+1}}{2+L_n}\right)^{i-1}$$

$$= \left(1+11\right)^3 - \left(-9\right)^2 \left[\left(4-3.3\right)\left(-\frac{4}{3}\right)^0 + \left(7-3.4\right)\left(-\frac{4}{3}\right) + \left(11-3.7\right)\left(-\frac{4}{3}\right)^2\right]$$

$$= 3033$$

tersi ise,

$$\left(L_n^S\right)^{-1} = \frac{1}{l_n} SCirc(x_1, x_2, ..., x_n),$$

$$l_n = L_1 + 3L_n - \sum_{i=1}^{n-2}\left(L_{i+2} - 3L_{i+1}\right)\left(-\frac{L_n+2}{L_1+L_{n+1}}\right)^{n-(i+1)}$$

$$l_4 = 1 + 3.7 - \left[\left(4-3.3\right)\left(-\frac{7+2}{1+11}\right)^2 + \left(7-3.4\right)\left(-\frac{7+2}{1+11}\right)\right] = \frac{337}{16}$$

$$x_1 = 1 - \sum_{i=1}^{n-2} \frac{\left(L_{n+2-i} - 3L_{n+1-i}\right)(-L_n - 2)^{i-1}}{\left(L_1 + L_{n+1}\right)^i}$$

$$x_1 = 1 - \left[\frac{(11-3.7)(-7-2)^0}{12} + \frac{(7-3.4)(-7-2)}{(12)^2} \right] = \frac{73}{48}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{l_4} x_1 = \frac{16}{337} \cdot \frac{73}{48} = \frac{73}{1011}$$

$$x_2 = -3 - \sum_{i=1}^{n-2} \frac{\left(L_{n+1-i} - 3L_{n-i}\right)(-L_n - 2)^{i-1}}{\left(L_1 + L_{n+1}\right)^i}$$

$$x_2 = -3 - \left[\frac{(7-3.4)(-7-2)^0}{12} + \frac{(4-3.3)(-7-2)}{(12)^2} \right] = -\frac{139}{48}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{l_4} x_2 = \frac{16}{337} \cdot \left(-\frac{139}{48} \right) = -\frac{139}{1011}$$

$$x_j = \frac{5\left(-L_n - 2\right)^{i-3}}{\left(L_1 + L_{n+1}\right)^{j-2}}, (j = 3, 4, ..., n)$$

$$x_3 = \frac{5\left(-7-2\right)^0}{12} = \frac{5}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{l_4} x_3 = \frac{16}{337} \cdot \frac{5}{12} = \frac{20}{1011}$$

$$x_4 = \frac{5\left(-7-2\right)}{(12)^2} = -\frac{5}{16}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{l_4} x_3 = \frac{16}{337} \cdot \left(-\frac{5}{16} \right) = -\frac{5}{337}$$

$$\left(L_4^S\right)^{-1} = SCirc\left(\frac{73}{1011}, -\frac{139}{1011}, \frac{20}{1011}, -\frac{5}{337} \right)$$

olarak bulunur. Şimdi de bu matrisin determinantının ve tersinin maple programı ile bulunmuş, ekran görüntüsünü verelim.

```
> with(linalg);

> O2:=matrix(4,4,[1,3,4,7,-7,1,3,4,-4,-7,1,3,-3,-4,-7,1]);
```

$$O2 := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ -7 & 1 & 3 & 4 \\ -4 & -7 & 1 & 3 \\ -3 & -4 & -7 & 1 \end{pmatrix}$$

>det(O2);

$$3033$$

>inverse(O2);

$$\begin{pmatrix} \frac{73}{1011} & \frac{-139}{1011} & \frac{20}{1011} & \frac{-5}{337} \\ \frac{5}{337} & \frac{73}{1011} & \frac{-139}{1011} & \frac{20}{1011} \\ \frac{-20}{1011} & \frac{5}{337} & \frac{73}{1011} & \frac{-139}{1011} \\ \frac{139}{1011} & \frac{-20}{1011} & \frac{5}{337} & \frac{73}{1011} \end{pmatrix}$$

Örnek 4.3. Elemanları Pell sayılarından oluşan 4x4 mertebeden skew circulant matrisin determinantını hesaplayarak bu matrisin tersini bulunuz.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 12 \\ -12 & 1 & 2 & 5 \\ -5 & -12 & 1 & 2 \\ -2 & -5 & -12 & 1 \end{pmatrix}$ matrisinin determinantı

$$\det(P_n^S) = (1+P_{n+1})^{n-1} - (-P_n)^{n-2} \sum_{i=1}^{n-1} P_i \left(\frac{1+P_{n+1}}{-P_n} \right)^{i-1}$$

$$= (1+29)^3 - (-12)^2 \left[1\left(-\frac{10}{4}\right)^0 + 2\left(-\frac{10}{4}\right) + 5\left(-\frac{10}{4}\right)^2 \right]$$

$$= 23076$$

tersi ise,

$$\left(P_n^S\right)^{-1} = \frac{1}{p_n} SCirc(x_1, x_2, ..., x_n),$$

$$p_n = P_1 + 2P_n - \sum_{i=1}^{n-2} P_i \left(\frac{-P_n}{P_1 + P_{n+1}} \right)^{n-(i+1)}$$

$$p_4 = 1 + 24 - \left[1\left(\frac{-12}{30} \right)^2 + 2\left(\frac{-12}{30} \right) \right] = \frac{641}{25}$$

$$x_1 = 1 - \sum_{i=1}^{n-2} \frac{P_{n-i}(-P_n)^{i-1}}{\left(P_1 + P_{n+1}\right)^i}$$

$$x_1 = 1 - \left[\frac{5.(12)^0}{30} + \frac{2.(-12)}{(30)^2} \right] = \frac{43}{50}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p_4} x_1 = \frac{25}{641} \cdot \frac{43}{50} = \frac{43}{1282}$$

$$x_2 = -2 - \sum_{i=1}^{n-2} \frac{P_{n-1-i}(-P_n)^{i-1}}{\left(P_1 + P_{n+1}\right)^i}$$

$$x_2 = -2 - \left[\frac{2.(-12)^0}{30} + \frac{1.(-12)}{(30)^2} \right] = -\frac{154}{75}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p_4} x_2 = \frac{25}{641} \cdot \left(-\frac{154}{75} \right) = -\frac{154}{1923}$$

$$x_j = -\frac{(-P_n)^{j-3}}{\left(P_1 + P_{n+1}\right)^{j-2}}, (j = 3, 4, \dots, n)$$

$$x_3 = -\frac{(-12)^0}{30} = -\frac{1}{30}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p_4} x_3 = \frac{25}{641} \cdot \left(-\frac{1}{30} \right) = -\frac{5}{3846}$$

$$x_4 = -\frac{(-12)}{(30)^2} = \frac{1}{75}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p_4} x_4 = \frac{25}{641} \cdot \frac{1}{75} = \frac{1}{1923}$$

$$\left(P_4^S\right)^{-1} = SCirc\left(\frac{43}{1282}, -\frac{154}{1923}, -\frac{5}{3846}, \frac{1}{1923} \right)$$

olarak bulunur. Şimdi de bu matrisin determinantının ve tersinin maple programı ile bulunmuş, ekran görüntüsünü verelim.

```
> with(linalg);

> O3:=matrix(4,4,[1,2,5,12,-12,1,2,5,-5,-12,1,2,-2,-5,-12,1]);
```

$$O3 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 12 \\ -12 & 1 & 2 & 5 \\ -5 & -12 & 1 & 2 \\ -2 & -5 & -12 & 1 \end{pmatrix}$$

```
>det(O3);
```

$$23076$$

```
>inverse(O3);
```

$$\begin{pmatrix} \frac{43}{1282} & \frac{-154}{1923} & \frac{-5}{3846} & \frac{1}{1923} \\ \frac{-1}{1923} & \frac{43}{1282} & \frac{-154}{1923} & \frac{-5}{3846} \\ \frac{5}{3846} & \frac{-1}{1923} & \frac{43}{1282} & \frac{-154}{1923} \\ \frac{154}{1923} & \frac{5}{3846} & \frac{-1}{1923} & \frac{43}{1282} \end{pmatrix}$$

Teorem 1.3.2.12' den yararlanarak Örnek 4.3.' de verilen skew circulant matristen aşağıdaki skew left ciculant matris elde edilir.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 12 \\ -12 & 1 & 2 & 5 \\ -5 & -12 & 1 & 2 \\ -2 & -5 & -12 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 12 \\ 2 & 5 & 12 & -1 \\ 5 & 12 & -1 & -2 \\ 12 & -1 & -2 & -5 \end{pmatrix} = SLCirc(1,2,5,12)$$

buradan skew left circulant matrisin determinantının

$$\det(P_n^S) = \det(P_n^{SL}) = 23076$$

olduğu görülür.

Yine Teorem 1.3.2.12' den skew left circulant matrisin tersinin de aşağıdaki gibi olduğu kolayca görülür.

$$\begin{pmatrix} \frac{43}{1282} & \frac{-154}{1923} & \frac{-5}{3846} & \frac{1}{1923} \\ \frac{-1}{1923} & \frac{43}{1282} & \frac{-154}{1923} & \frac{-5}{3846} \\ \frac{5}{3846} & \frac{-1}{1923} & \frac{43}{1282} & \frac{-154}{1923} \\ \frac{154}{1923} & \frac{5}{3846} & \frac{-1}{1923} & \frac{43}{1282} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{43}{1282} & \frac{-1}{1923} & \frac{5}{3846} & \frac{154}{1923} \\ \frac{-1}{1923} & \frac{5}{3846} & \frac{154}{1923} & \frac{-43}{1282} \\ \frac{5}{3846} & \frac{154}{1923} & \frac{-43}{1282} & \frac{1}{1923} \\ \frac{154}{1923} & \frac{-43}{1282} & \frac{1}{1923} & \frac{-5}{3846} \end{pmatrix}$$

$$\left[SCirc(1,2,5,12)\right]^{-1} = SCirc\left(\frac{43}{1282},\frac{-154}{1923},\frac{-5}{3846},\frac{1}{1923}\right)$$

$$\left[SLCirc(1,2,5,12)\right]^{-1} = SLCirc\left(\frac{43}{1282},\frac{-1}{1923},\frac{5}{3846},\frac{154}{1923}\right)$$

Örnek 4.4. Elemanları Jacobsthal sayılarından oluşan 4x4 mertebeden skew circulant matrisin determinantını hesaplayarak bu matrisin tersini bulunuz.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ -5 & 1 & 1 & 3 \\ -3 & -5 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$ matrisinin determinantı,

$$\det(J_n^S) = (1+J_{n+1})^{n-1} - (-2J_n)^{n-2} 2\sum_{i=1}^{n-1} J_i \left(-\frac{1+J_{n+1}}{2J_n}\right)^{i-1}$$

$$= (1+11)^3 - (-10)^2 \left[2\left(-\frac{6}{5}\right)^0 + 2\left(-\frac{6}{5}\right) + 6\left(-\frac{6}{5}\right)^2\right]$$

=904

bulunur. Tersi ise,

$$\left(J_n^S\right)^{-1}=\frac{1}{j_n}SCirc(x_1,x_2,\dots,x_n),$$

$$j_n=J_1+J_n-2\sum_{i=1}^{n-2}J_i\left(\frac{-2J_n}{J_1+J_{n+1}}\right)^{n-(i+1)}$$

$$j_4=1+5-2\left[1\left(-\frac{5}{6}\right)^2+1\left(-\frac{5}{6}\right)\right]=\frac{113}{18}$$

$$x_1=1-2\sum_{i=1}^{n-2}\frac{J_{n-i}(-2J_n)^{i-1}}{\left(J_1+J_{n+1}\right)^i}$$

$$x_1=1-2\left[\left(\frac{3.(-10)^0}{12}\right)+\left(\frac{1.(-10)}{(12)^2}\right)\right]=\frac{23}{36}$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{j_4}x_1=\frac{18}{113}\cdot\frac{23}{36}=\frac{23}{226}$$

$$x_2=-1-4\sum_{i=1}^{n-2}\frac{J_{n-1-i}(-2J_n)^{i-1}}{\left(J_1+J_{n+1}\right)^i}$$

$$x_2=-1-4\left[\frac{1.(-10)^0}{12}+\frac{1.(-10)}{(12)^2}\right]=-\frac{19}{18}$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{j_4}x_2=\frac{18}{113}\cdot\left(-\frac{19}{18}\right)=-\frac{19}{113}$$

$$x_j=-\frac{2(-2J_n)^{j-3}}{\left(J_1+J_{n+1}\right)^{j-2}},(j=3,4,\dots,n)$$

$$x_3=-\frac{2.(-10)^0}{12}=-\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{j_4}x_3=\frac{18}{113}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)=-\frac{3}{113}$$

$$x_4=-\frac{2.(-10)}{(12)^2}=\frac{5}{36}$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{j_4}x_4=\frac{18}{113}\cdot\frac{5}{36}=\frac{5}{226}$$

$$\left(J_4^S\right)^{-1} = SCirc\left(\frac{23}{226}, -\frac{19}{113}, -\frac{3}{113}, \frac{5}{226}\right)$$

olarak bulunur. Şimdi de bu matrisin determinantının ve tersinin maple programı ile bulunmuş, ekran görüntüsünü verelim.

```
> with(linalg);

>  O4:=matrix(4,4,[1,2,5,12,-12,1,2,5,-5,-12,1,2,-2,-5,-12,1]);
```

$$O4 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ -5 & 1 & 1 & 3 \\ -3 & -5 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

```
>det(O4);
```

$$904$$

```
>inverse(O4);
```

$$\begin{pmatrix} \frac{23}{226} & \frac{-19}{113} & \frac{-3}{113} & \frac{5}{226} \\ \frac{-5}{226} & \frac{23}{226} & \frac{-19}{113} & \frac{-3}{113} \\ \frac{3}{113} & \frac{-5}{226} & \frac{23}{226} & \frac{-19}{113} \\ \frac{19}{113} & \frac{3}{113} & \frac{-5}{226} & \frac{23}{226} \end{pmatrix}$$

Teorem 2.2.12’ den yararlanarak Örnek 4.4.’ te verilen skew circulant matristen aşağıdaki skew left ciculant matris elde edilir.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ -5 & 1 & 1 & 3 \\ -3 & -5 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & -1 \\ 3 & 5 & -1 & -1 \\ 5 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} = SLCirc(1,1,3,5)$$

buradan skew left circulant matrisin determinantının
$\det(J_n^S) = \det(J_n^{SL}) = 904$ olduğu görülür.

Yine Teorem 1.3.2.12 den skew left circulant matrisin tersinin aşağıdaki gibi olduğu kolayca görülür.

$$\begin{pmatrix} \frac{23}{226} & \frac{-19}{113} & \frac{-3}{113} & \frac{5}{226} \\ \frac{-5}{226} & \frac{23}{226} & \frac{-19}{113} & \frac{-3}{113} \\ \frac{3}{113} & \frac{-5}{226} & \frac{23}{226} & \frac{-19}{113} \\ \frac{19}{113} & \frac{3}{113} & \frac{-5}{226} & \frac{23}{226} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{23}{226} & \frac{-5}{226} & \frac{3}{113} & \frac{19}{113} \\ \frac{-5}{226} & \frac{3}{113} & \frac{19}{113} & \frac{-23}{226} \\ \frac{3}{113} & \frac{19}{113} & \frac{-23}{226} & \frac{5}{226} \\ \frac{19}{113} & \frac{-23}{226} & \frac{5}{226} & \frac{-3}{113} \end{pmatrix}$$

$$\left[SCirc(1,1,3,5)\right]^{-1} = SCirc\left(\frac{23}{226}, \frac{-19}{113}, \frac{-3}{113}, \frac{5}{226}\right)$$

$$\left[SLCirc(1,1,3,5)\right]^{-1} = SLCirc\left(\frac{23}{226}, \frac{-5}{226}, \frac{3}{113}, \frac{19}{113}\right)$$

5.BÖLÜM

TARTIŞMA VE SONUÇLAR

Bu çalışmada elemanları genelleştirilmiş k-Horadam sayıları olan skew ve skew left circulant matrisler tanımlanarak bu matrislerin determinantları, terslenebilir oldukları ve tersleri genelleştirilmiş k-Horadam sayıları ile karakterize edilmiştir. Son bölümde elde edilen teoremlerle ilgili nümerik örnekler verilmiştir. Çalışmanın içeriğinden de görülmektedir ki, elde edilen veriler literatürde yer alan 2. mertebeden özel sayı dizilerinin genellemeleridir.

Elemanları genelleştirilmiş *k*-Horadam sayılarından seçilen skew ve skew left circulant matrislerin normları da incelenebilir.

.

KAYNAKLAR

1. Akdeniz, F., “Doğada, Sanatta, Mimaride Altın Oran ve Fibonacci Sayıları”, *Nobel Kitabevi*, IV, Ankara, 2000.
2. Bahsi, M. and Solak, S., “On the norms of r-circulant matrices with the hyper-Fibonacci and Lucas numbers”, *Journal of Mathematical Inequalities* 8(4), 693-705, 2014.
3. Bertaccini, D. and Ng, M. K., ‘‘Skew circulant preconditioners for systems of LMF-based,’’ in *Numerical analysis and Its Applications,* 93-101, 2001.
4. Daher, A., Baghious, E. H. and Burel, G., “Fast algorithm for optimal design of block digital filters based on circulant matrices”, *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 15, 637–640, 2008.
5. Davis, P.J., “Circulant Matrices”, *John Wiley and Sons*, New York, 1979.
6. Dunlap, R. A.,”The Golden Ratio and Fibonacci Numbers”, Bekir AKTAŞ, *Tübitak Popüler Bilim Kitapları*, 1, Ankara, 2011.
7. Falcon, S., “On the k-Lucas numbers”, *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences* 6(21), 1039-1050, 2011.
8. Falcon, S., Plaza A., “On the Fibonacci k-numbers”, Chaos, Solitons and Fractals 32, 1615-1624, 2009.
9. Fu, D. Q., Jiang, Z. L., Cui, Y. F. and Jhang, S. T., “A new fastalgorithm for optimal design of block digital filters by skew-cyclic convolution”, *IET Signal Processing*, p. 6, 2014.
10. Fuyong, L., “The inverse of circulant matrix”, *Applied Mathematics and Computation*, 217, 8495–8503, 2011.
11. Gao, Y., Jiang, Z., ve Gong, Y. "On the determinants and inverses of skew circulant and skew left circulant matrices with fibonacci and Lucas numbers" *WSEAS Transactions on Mathematics* 4(12), 472-481, 2013.
12. Gulliver, T. A. and Harada, M. “New nonbinary self-dual codes,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 54, no. 1, 415–417, 2008.
13. Horadam, A.F., “Basic properties of a certain generalized sequence of numbers”, *The Fibonacci Quarterly,* 3, 161-176, 1965.

14. Huang, X., Ye, G. and Wong, K.-W. "Chaotic image encryption algorithm based on circulant operation",*Abstract and Applied Analysis*, vol. 2013, Article ID 384067, 8 pages, 2013.
15. İpek, A., "On the speckral norms of circulant matrices with classical Fibanocci and Lucas numbers entries", *Applied Mathematics and Computations,* 217, 6011-6012, 2011.
16. Jiang, X. and Hong, K. "Exact Determinants of Some Special Circulant Matrices Involving Four Kinds of Famous Numbers", *Abstract and Applied Analysis*, Volume Article ID 273680, 12, 2014.
17. Jing. Y. and Jafarkhani, H. "Distributed differential space-time coding for wireless relay networks,"*IEEE Transactions on Communications*, vol. 56, no. 7, 1092–1100, 2008.
18. Jiang, Z., Gong, Y. and Gao, Y. "Circulant Type Matrices with the Sum and Product of Fibonacci and Lucas Numbers", *Abstract and Applied Analysis*, Volume Article ID 375251, 12, 2014.
19. Karner, H., Schneıd, J. and Ueberhuber, C.W. "Spectral decomposition of real circulant matrices", *Linear Algebra Appl.*, 367, 301-311, 2003.
20. Kocer, E.G., "Circulant, negacyclic and semicirculant matrices with the modified Pell, Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas numbers", *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics* 36(2), 301-311, 2007.
21. Koshy T., "Fibonacci and Lucas Numbers with Applications", John Wiley & Sons, New York, 2001.
22. Lind, D.A., "A Fibanocci circulant", *The Fibonacci Quarterly* 8(5), 449-455, 1970.
23. Lu, C. and Gu, C. "The computation of the square roots of circulant matrices", *Applied Mathematics and Computation*, 217, 6819–6829, 2011.
24. Narasimha, M. J. "Linear convolution using skew-cyclic convolutions", *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 14, no. 3, 173–176, 2007.
25. . Shen, S., "On the bounds fort he norms of r-circulant matrices with the Fibanocci and Lucas numbers", *Applied Mathematics and Computations*, 216, 2891-2897, 2010.

26. Shen, S., Cen, J., “On the speckral norms of r-circulant matrices with the *k*-Fibanocci and *k*-Lucas numbers”, *İnternational Journal of Contemporary Mathematical Scienses,* 5(12), 569-578, 2010.
27. Shen, S., Cen, J., Hao, Y., “On the determinants and inverses of circulant matrices with Fibanocci and k-Lucas numbers”, *Applied Mathematics and Computations,* 217, 9790-9797, 2011.
28. Solak, S., “On the Norms of Circulant Matrices with the Fibanocci and Lucas numbers”, *Applied Mathematics and Compitations* 160, 125-132, 2005.
29. Yazlik, Y., Taskara, N., “A not on generalized *k*-Horadam sequence”, *Computers and Mathematics with Applications,* 63, 36-41, 2012.
30. Yazlik, Y. and Taskara, N. “On the norms of an r-circulant matrix with the generalized k-Horadam numbers”, *Journal of Inequalities and applications*, 2013 394, 2013.
31. Yazlik, Y., Taskara, N., “Spectral norm , eigenvalues and determinant of circulant matrix involving generalized k-Horadam numbers”, Ars Combinatoria, 104, 505-512, 2012.
32. Vajda S., “Fibonacci and Lucas and The Golden Section”, *Ellis Horwood Limited,* Chichester, England, 1989.
33. Wittsack, H.-J., Wohlschläger, A. M., Ritzl, E. K. et al., “CT-perfusion imaging of the human brain: advanced deconvolution analysis using circulant singular value decomposition”, *Computerized Medical Imaging and Graphics,* vol. 32, no. 1, pp. 67–77, 2008.

ÖZGEÇMİŞ

Fatih GÖK, 1974 yılında Kırşehir'de doğdu. İlk ve orta öğrenimini Kırşehir'de tamamladı. 1991 yılında girdiği Atatürk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden 1995 yılında mezun oldu. 1995 yılında Hakkari, Yüksekova, 5 Mayıs İlköğretim Okuluna sınıf öğretmeni olarak atanıp bir yıl sonra asıl branşına geçiş yaptı.1996-1997 yılları arası askerlik hizmetini tamamladı.1999-2001 yıllarında Kayseri, Sarıoğlan, Palas İlköğretim Okulu, 2001-2003 yıllarında Kayseri, Ziya Gökalp İlköğretim Okulu, 2003-2005 yıllarında Kayseri Fevzi Çakmak Lisesi, 2005-2010 yıllarında Suudi Arabistan, Riyad Uluslararası Türk Okulu'nda çalıştı. 2011 yılından itibaren Kayseri, Talas Anadolu Lisesi'nde çalışmaktadır. 2013 yılında Nevşehir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans eğitimine başladı. Evli ve iki çocuk babasıdır.

Tel : 533 384 40 32

e-posta: gokyusufoglu@hotmail.com