T.C.
NEVŞEHİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

STURM–LİOUVİLLE FARK OPERATÖRÜNÜN SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ

Tezi Hazırlayan
Musa BAŞBÜK

Danışman
Yrd. Doç. Dr. Aytekin ERYILMAZ

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Eylül 2010
NEVŞEHİR

T.C.
NEVŞEHİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

STURM–LİOUVİLLE FARK OPERATÖRÜNÜN SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ

Tezi Hazırlayan
Musa BAŞBÜK

Danışman
Yrd. Doç. Dr. Aytekin ERYILMAZ

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Eylül 2010
NEVŞEHİR

Yrd. Doç. Dr. Aytekin ERYILMAZ danışmanlığında **Musa BAŞBÜK** tarafından hazırlanan **"Sturm Liouville Fark Operatörünün Spektral Özellikleri"** adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans** tezi olarak kabul edilmiştir.

20/09/2010

JÜRİ:

Başkan : Doç. Dr. Hacı AKTAŞ

Üye : Yrd. Doç. Dr. Nazmiye KERVAN

Üye : Yrd. Doç. Dr. Aytekin ERYILMAZ

ONAY:

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulu 03/11/2010 tarih ve 2010/31-2 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Selçuk KERVAN

03/11/2010 Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın belirlenmesi ve yürütülmesi esnasında ilgi ve desteğini hep gördüğüm Nevşehir Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nün değerli öğretim üyeleri, Doç. Dr. Hacı AKTAŞ'a, danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Aytekin ERYILMAZ'a ve Yrd. Doç. Dr. Mehmet ŞENGÖNÜL'e teşekkürlerimi sunarım.

ÖZET

STURM–LİOUVİLLE FARK OPERATÖRÜNÜN SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ

Musa BAŞBÜK
Nevşehir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Yüksek Lisans Tezi, Eylül 2010
Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Aytekin ERYILMAZ

Bu tez çalışmasında öncelikle konunun tarihsel gelişimi anlatılmıştır. Daha sonra spektral analizin temel tanım ve teoremleri hatırlatılmış ve disipatif operatörün tanımı verilerek, bir disipatif operatör kurmak için gerekli tanım ve teoremler verilmiş ve kısaca fark operatörü ve fark denklemlerinden bahsedilmiştir.
Fark Sturm-Liouville sınır değer problemi ele alınmış ve bu probleme uygun maksimal disipatif operatör oluşturulmuştur. Fark Sturm-Liouville sınır değer problemi ve disipatif operatörün özvektörler ve asosye vektörler sistemi incelenmiştir.

ANAHTAR KELİMELER : Kendine eş operatör, disipatif operatör, maksimal operatör, Sturm–Liouville fark operatörü.

2010, 44 sayfa

ABSTRACT

SPECTRAL PROPERTIES OF THE STURM–LIOUVILLE DIFFERENCE OPERATOR

Musa BAŞBÜK
Nevşehir University, Graduate School of Natural and Applied Sciences
M.Sc. Thesis, September 2010
Thesis Supervisor: Assist. Prof. Dr. Aytekin ERYILMAZ

In this thesis study, firstly the historical progress of the subject is considered. Then some basic definitions and main theorems of spectral analysis are recalled. In addition essential definitions and theorems of a dissipative operator are given to construct dissipative operator. Difference operator and difference equations are investigated.
At the end, difference Sturm-Liouville boundary value problem is studied and maximal dissipative operator is constructed. Furthermore eigenvectors and associated vectors of the dissipative operator and difference Sturm-Liouville boundary value problem are investigated.

KEYWORDS: Selfadjoint operator, dissipative operator, maximal operator, Sturm–Liouville difference operator.

2010, 44 pages

İÇİNDEKİLER

KISALTMA ve SİMGELER

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\mathbb{Z}^+$	: Pozitif tam sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
Δ	: Fark operatörü
E	: Kaydırma (shift) operatörü
(y_k)	: y_k dizisi
$\overline{z}$	: z karmaşık sayısının eşleniği
$D(A)$	: A operatörünün tanım kümesi
$\overline{D(A)}$	: $D(A)$ kümesinin kapanışı
$R(A)$	: A operatörünün değer kümesi
A^*	: A operatörünün eş (adjoint) operatörü
$W_n(U,V)$	: U ile V çözümlerinin wronskiyeni
ℓy	: Fark ifadesi
$A^\perp$	: A kümesinin dikey (ortogonal) tümleyeni
L	: Maksimal operatör
L_0	: Minimal simetrik operatör
$def\, L_0$	: L_0 operatörünün defekt sayısı
A_h	: Maksimal disipatif operatör
$\widetilde{A}$	: A operatörünün genişlemesi
$\operatorname{Im}\lambda$	: λ karmaşık sayısının sanal (imajiner) kısmı
R_λ	: $(A-\lambda I)$ operatörünün değer kümesi
$\mathcal{N}_\lambda$	: A operatörünün defekt uzayı
$\dim \mathcal{N}_\lambda$	: A operatörünün defekt uzayının boyutu
H	: Hilbert uzayı
$\|A\|$	: A sınırlı operatörünün normu
$\|x\|$	: x vektörünün normu
$\forall$	: Evrensel niceleyici

$(.,.)$	: İç çarpım
$\subseteq$	: Alt küme (içerme) işlemi
$\cup$	: Kümelerde birleşim işlemi
$<$	: Küçüktür
$A \times B$	: A ve B kümelerinin kartezyen çarpımı
y_k^h	: Fark denkleminin homojen kısmının çözümü
$y_k^{ö}$	: Fark denkleminin özel çözüm
y_k^G	: Fark denkleminin genel çözümü
$\in$	: Elemanıdır
∞	: Sonsuz

1. BÖLÜM

GİRİŞ

Doğada gerçekleşen fiziksel olayların incelenmesi, fizik alanında bilimsel gelişmelere yol açmıştır. Fizik alanındaki bu bilimsel çalışmalar matematik biliminin gelişmesinde büyük ölçüde etkili olmuştur. Matematiksel fiziğin ve mühendisliğin pek çok problemi diferansiyel denklemlerden oluşan sınır değer problemleri içermektedir. İlk defa 1836 yılında Charles Sturm ve Joseph Liouville tarafından ortaya konulan, literatürde Sturm-Liouville problemi olarak adlandırılan sınır değer problemi de bu problemlerden birisidir. Başlangıçta ısı iletimi problemlerine uygulanan Sturm-Liouville teorisi günümüzde bir çok fiziksel problemin araştırılmasında en etkin yöntemlerden biri olarak bilinmektedir. Genellikle kısmî türevli denklemlerde değişkenlerin ayrılması yöntemi kullanıldıktan sonra Sturm-Liouville denklemleri ile bağlantılı sınır değer problemleri ortaya çıkmıştır.

x bağımsız değişkeninin sürekli olduğu durumlarda, $y(x)$'in değişimi $y(x)$ fonksiyonunun türevleri yardımıyla açıklanabilmektedir. Ancak x'in sürekli olmadığı discrete (kesikli) değerler alması durumunda değişim türevler yardımıyla açıklanamaz. Bundan dolayı, bu çalışmada x'in tamsayı değerler aldığı durumlarda ortaya çıkan ve içinde sonlu farkların bulunduğu Sturm-Liouville fark denklemleri üzerinde durulacaktır.

Tezde fark denklemleri ve kendine eş Sturm-Liouville fark operatörünün sınır koşulları, sınır değer problemine karşılık gelen operatörün spektral özellikleri incelenmiştir. Daha sonra problemin özdeğerleri ve özfonksiyonları incelenmiştir.

2. BÖLÜM

ÖN BİLGİLER

Tanım 2.1 : $V \neq \phi$ herhangi bir küme ve K herhangi bir cisim olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa V 'ye K üzerinde lineer uzay denir.

a) $(V,+)$ cebirsel yapısı değişmeli bir gruptur. Yani,

1. $\forall x, y \in V$ için $x + y \in V$ 'dir.
2. $\forall x, y, z \in V$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$ 'dir.
3. $\forall x \in V$ için $x + 0 = 0 + x = x \in V$ olacak şekilde bir tek $0 \in V$ vardır.
4. $\forall x \in V$ için $x + (-x) = (-x) + x = 0$ olacak şekilde bir tek $-x \in V$ vardır.
5. $\forall x, y \in V$ için $x + y = y + x$ 'dir.

b) $x, y \in V$ ve $\alpha, \beta \in K$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır.

1. $\alpha .x \in V$ 'dir.
2. $\alpha(x + y) = \alpha .x + \alpha .y$ 'dir.
3. $(\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x$ 'dir.
4. $(\alpha.\beta)x = \alpha.(\beta.x)$'dir.
5. $\forall x \in V$ için $1.V = V$ olacak şekilde $1 \in K$ vardır. Burada 1, K cisminin birim elemanıdır.

$K = \mathbb{R}$ olması halinde V 'ye reel lineer uzay, $K = \mathbb{C}$ olması halinde V 'ye kompleks lineer uzay denir [1].

Tanım 2.2 : Lineer uzaylarda tanımlı dönüşümlere operatör denir [2].

Tanım 2.3 **:** $K=\mathbb{R}$ veya $K=\mathbb{C}$ olmak üzere X bir vektör uzayı (lineer uzay) olsun.

$$(.,.):X\times X\to K \tag{2.1}$$

dönüşümü aşağıdaki özellikleri sağlar ise $(.,.)$'ye X üzerinde bir iç çarpım, $(X,(.,.))$ ikilisine de iç çarpım uzayı (veya ön Hilbert uzayı) denir [2].

i. $\forall x\in X$ için $(x,x)\geq 0$ ve $(x,x)=0 \Leftrightarrow x=0$

ii. $\forall x,y\in X$ için $(x,y)=\overline{(y,x)}$

iii. $\forall x,y\in X$ ve $\alpha\in K$ için $(\alpha x,y)=\alpha(x,y)$

iv. $\forall x,y,z\in X$ için $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$

Tanım 2.4 **:** $(X,(\,.\,,\,.\,))$ bir iç çarpım uzayı ve $x\in X$ olsun. x vektörünün normu,

$$\|x\|=(x,x)^{1/2}=\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\varepsilon_j\right|^2\right)^{1/2} \tag{2.2}$$

olarak tanımlanır. Bu norma göre $(X,(\,.\,,\,.\,))$ iç çarpım uzayı bir normlu vektör uzayı olur [2].

Tanım 2.5 **:** Bir $(X,(\,.\,,\,.\,))$ iç çarpım uzayı,

$$\|x\|=(x,x)^{1/2} \tag{2.3}$$

normuna göre tam ise, yani $(X,(\,.\,,\,.\,))$ içindeki her Cauchy dizisi yakınsak ise, bu iç çarpım uzayına Hilbert uzayı denir [2].

Tanım 2.6 **:** H Hilbert uzayının her hangi bir $D\subseteq H$ lineer alt uzayı ve bir L operatörü için,

$$L:\ D\subseteq H\ \to\ H \tag{2.4}$$

dönüşümü verilsin. Eğer her $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{C}$ ve her $x_1,x_2\in D$ için,

$$L\left(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2\right)=\alpha_1Lx_1+\alpha_2Lx_2 \tag{2.5}$$

eşitliği sağlanıyorsa L dönüşümüne lineer operatör, D'ye ise L operatörünün tanım bölgesi denir ve $D(L)$ ile gösterilir. L operatörünün değer kümesi de $\mathrm{Im}(L)$ veya $\mathrm{R}(L)$ ile gösterilir [2].

Tanım 2.7 : $K=\mathbb{R}$ veya $K=\mathbb{C}$ olmak üzere X, K üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$$f: X \to K \tag{2.6}$$

operatörüne fonksiyonel denir [2].

Tanım 2.8 : Eğer f lineer ise f'ye lineer fonksiyonel denir [2].

Tanım 2.9 : Lineer fonksiyoneller, lineer operatör olarak sınırlı ise yani,

$$|f(x)| \leq c\|x\| \tag{2.7}$$

olacak şekilde $c \geq 0$ reel sayısı varsa f'ye sınırlı lineer fonksiyonel denir [2].

Tanım 2.10 : H Hilbert uzayında tanımlanan bir lineer A operatörü için, $\forall x \in H$ olmak üzere,

$$\|Ax\| \leq c\|x\| \tag{2.8}$$

olacak şekilde bir c sayısı varsa A'ya sınırlı operatör denir. Bu c sayılarının en küçüğüne A sınırlı operatörünün normu denir ve $\|A\|$ ile gösterilir.

$$\|A\| = \sup_{\|x\|<1}\|Ax\| = \sup_{\|x\|\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \tag{2.9}$$

eşitliği yardımı ile A sınırlı operatörünün normu hesaplanır [2].

Teorem 2.11 : Sınırlı her lineer A operatörü süreklidir [2].

Tanım 2.12 : $\forall x \in H$ için $(Ax, x) \geq 0$ ise A'ya pozitif lineer operatör denir [2].

Tanım 2.13 : A, $D(A)$ tanım bölgesinde sınırlı lineer bir operatör olmak üzere,

$$Ay = \lambda y \tag{2.10}$$

eşitliğini sağlayan $y \neq 0$ vektörü mevcut ise, λ sayısına A operatörünün özdeğeri, y vektörüne ise özvektörü denir [3].

Tanım 2.14 : H Hilbert uzayı ise ve A, H 'de bir operatör olmak üzere A'nın tanım kümesi $D(A)$, H kompleks Hilbert uzayında yoğun, yani $\overline{D(A)} = H$ olsun. $f \in D(A)$ için,

$$(Af, g) = (f, A^* g) \tag{2.11}$$

eşitliğini sağlayan A^* operatörüne A'nın adjoint operatörü denir. Bu eşitliği sağlayan $g \in H$ vektörler kümesine A^* 'ın tanım kümesi denir ve $D(A^*)$ ile gösterilir [2].

Tanım 2.14'ten aşağıdaki özellikler elde edilir.

i) $(A^*)^* = A$

ii) $(A + B)^* = A^* + B^*$

iii) $(AB)^* = B^* A^*$

iv) $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*, \quad \lambda \in K$

v) $\|A^*\| = \|A\|, \quad$ (A sınırlı ise)

Tanım 2.15 : Eğer $A = A^*$ ise A operatörüne self adjoint (kendine eş) operatör denir [4].

Tanım 2.16 : $A : D(A) \to H$ lineer bir operatör ve $\overline{D(A)} = H$ yani $D(A)$, H 'de yoğun olmak üzere her f, $g \in D(A)$ için,

$$(Af, g) = (f, Ag) \tag{2.12}$$

ise, $A \subset A^*$ ise A'ya simetrik operatör denir. Adjoint operatör kapalı olduğundan $A \subset A^*$ bağıntısı simetrik operatörü kapanabilir olduğunu ifade eder [2].

Tanım 2.17 **:** $D(A)$, A operatörünün tanım bölgesi olmak üzere her $x, y \in D(A)$ için,

$$(A_x, A_y) = (x, y) \tag{2.13}$$

ise A'ya izometrik operatör denir [2].

Tanım 2.18 **:** Bir A izometrik operatörünün tanım ve değer kümesi H Hilbert uzayı ise A'ya üniter operatör denir. H üzerinde, A tersi alınabilir bir operatör olmak üzere $A^* = A^{-1}$ veya $A^* A = AA^* = I$ ise A'ya ortogonal veya üniter operatör denir [2].

Tanım 2.19 **:** $f \in D(A)$ için $\widetilde{A}f = Af$ ve $D(\widetilde{A}) \supset D(A)$ ise $\widetilde{A}$ operatörüne A operatörünün genişlemesi denir. A'ya ise $\widetilde{A}$ operatörünün kısıtlaması denir [2].

Tanım 2.20 **:** A, H Hilbert uzayında simetrik bir operatör, λ keyfi bir kompleks sayı, R_λ ve $R_{\overline{\lambda}}$ sırasıyla, $(A - \lambda I)$ ve $(A - \overline{\lambda} I)$ operatörlerinin değer kümesi olmak üzere,

$$\mathcal{N}_\lambda = \mathcal{H} \Theta R_\lambda \tag{2.14}$$

$$\mathcal{N}_{\overline{\lambda}} = \mathcal{H} \Theta R_{\overline{\lambda}} \tag{2.15}$$

uzaylarına A operatörünün defekt uzayları denir [2].

Lemma 2.21 **:** Bir A operatörünün maksimal simetrik olması için gerekli ve yeterli koşul A operatörünün diğer simetrik genişlemelerinin bulunmamasıdır [2].

Lemma 2.22 **:** Her self adjoint (kendine eş) A operatörü maksimal simetrik operatördür fakat tersi doğru değildir [2].

Tanım 2.23 **:** $\operatorname{Im}\lambda > 0$ ve

$$m = \dim \mathcal{N}_\lambda \tag{2.16}$$

$$n = \dim \mathcal{N}_{\overline{\lambda}} \tag{2.17}$$

olmak üzere, (m, n) ikilisine A operatörünün indis defekti adı verilir [2].

Lemma 2.24 : Bir kapalı simetrik operatörünün kendine eş (self-adjoint) olması için gerek ve yeter koşul bu operatörün indis defektinin (0,0) olmasıdır [2].

Tanım 2.25 : A lineer operatörünün $D(A)$ tanım kümesi H Hilbert uzayında yoğun olmak üzere her $f \in D(A)$ için,

$$\operatorname{Im}(Af, f) \geq 0 \tag{2.18}$$

ise, A operatörüne disipatif operatör denir. Her $f \in D(A)$ için,

$$\operatorname{Im}(Af, f) \leq 0 \tag{2.19}$$

ise, A operatörüne akretif operatör denir [5].

Tanım 2.26 : Bir disipatif operatörün diğer disipatif genişlemeleri yoksa maksimal disipatif adını alır [5].

Teorem 2.27 : Her disipatif operatör maksimal bir disipatif genişlemeye sahiptir [6].

Tanım 2.28 : Elemanları reel veya kompleks sayılardan oluşan,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty, \ \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2 < \infty \tag{2.20}$$

olacak şekilde $f = \{x_n\}_1^\infty$ ve $g = \{y_n\}_1^\infty, \ldots$ dizilerinin uzayı ℓ^2 ile gösterilir. $x_1, x_2, x_3, \ldots$ sayılarına f vektörünün bileşenleri denir. ℓ^2 uzayındaki iç çarpım,

$$(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y}_n \tag{2.21}$$

şeklinde tanımlanır [7].

3. BÖLÜM

FARK DENKLEMLERİ

3.1 Giriş

x'in tamsayı değerler aldığı durumlarda ortaya çıkan ve içinde sonlu farkların bulunduğu denklemlere fark denklemleri denir.

$$y_{k+1} - y_k = 2 \tag{3.1}$$

denklemini ele alalım. Bu denklem; bir dönem sonraki y büyüklüğü ile şu andaki y büyüklüğü arasındaki farkın sabit ve 2'ye eşit olduğunu ortaya koymaktadır. Ardışık işlemler sonunda y_k hesaplanabilir.

$$\begin{aligned}
&y_1 = 2 + y_0 \\
&y_2 = 2 + y_1 = 2 + 2 + y_0 = 2.2 + y_0 \\
&y_3 = 2 + y_2 = 2 + 2.2 + y_0 = 3.2 + y_0 \\
&y_4 = 2 + y_3 = 2 + 3.2 + y_0 = 4.2 + y_0 \\
&\vdots \\
&y_k = 2.k + y_0
\end{aligned} \tag{3.2}$$

sonucu yazılabilir.

Tanım kümesi doğal sayılar kümesi olan her fonksiyona bir dizi denir ve (y_k) ile gösterilir.

$$y_{k+n} = f(k, y_{k+n-1}, y_{k+n-2}, \ldots, y_k) \tag{3.3}$$

biçiminde tanımlanan bağıntı adi bir fark denklemidir.

Tanım 3.1: Bir fark denkleminin mertebesi denklemde bulunan en büyük ve en küçük indislerin farkıdır [8].

(3.3)’de verilen bağıntı n. mertebeden bir fark denklemidir.

Tanım 3.2: Bir fark denklemi; $a_i(k)$ $i = 1,2,3,\ldots,n$ ve $f(k)$ k’nın fonksiyonları olmak üzere,

$$y_{k+n} + a_1(k)y_{k+n-1} + a_2(k)y_{k+n-2} + \ldots + a_n(k)y_k = f(k) \tag{3.4}$$

biçiminde yazılabiliyorsa lineerdir [8].

3.1.1 Fark Denklemlerinin Çıkarılışı

(y_k) dizisinin genel terimi y_k, $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ n tane keyfi sabit ve $f(k)$, k’nın bir fonksiyonu olsun y_k’nın n. dereceden bir fark denklemini sağladığı görülebilir.

Kabulden;

$$\begin{aligned} y_k &= f(k, c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n) \\ y_{k+1} &= f(k+1, c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n) \\ &\vdots \\ y_{k+n} &= f(k+n, c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n) \end{aligned} \tag{3.5}$$

dir.

Bunlar $n+1$ tane denklemin kümesidir. Eğer n tane c_i sabitleri yok edilirse bağıntı,

$$G(k, y_k, y_{k+1}, y_{k+2}, \ldots, y_{k+n}) = 0 \tag{3.6}$$

olur.

Bu bir n. mertebeden fark denklemidir. Eğer genel terimi y_k olan (y_k) dizisi, n tane keyfi sabit ve k’nın bir fonksiyonu gibi ifade edilirse, y_k n. dereceden bir fark denklemini sağlar.

Eğer bağımlı değişken birinci dereceden ise bu tür denkleme lineerdir denir.

$$y_{k+1} - 3y_k + y_{k-1} = e^{-k} \quad \text{(ikinci mertebeden, lineer)}$$

$$y_{k+4} - y_k = k2^k \quad \text{(dördüncü mertebeden, lineer)}$$

$$y_{k+1} - y_k^2 = 0 \quad \text{(birinci mertebeden, lineer değil)}$$

$$y_{k+3} - \cos y_k = 0 \quad \text{(üçüncü mertebeden, lineer değil)}$$

(3.4) denkleminde $a_i(k)$ $\quad i = 1, 2, 3, \ldots, n$ fonksiyonları sabit iseler, (3.4) denklemine sabit katsayılı lineer fark denklemi denir. Eğer (3.4) denkleminde $f(k) = 0$ ise denkleme lineer homojen fark denklemi denir [8].

3.1.2 Δ ve E Operatörleri

$$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k \tag{3.7}$$

biçiminde tanımlanan operatöre Δ operatörü denir.

$$y_{k+1} - y_k \tag{3.8}$$

ifadesine y_k 'nın farkı denir. Δ birinci fark operatörüdür. İkinci fark operatörü

$$\Delta^2 = \Delta.\Delta$$

$$\begin{aligned}
\Delta^2 y_k &= \Delta(\Delta y_k) \\
&= \Delta(y_{k+1} - y_k) \\
&= \Delta y_{k+1} - \Delta y_k \\
&= (y_{k+2} - y_{k+1}) - (y_{k+1} - y_k) \\
&= y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k
\end{aligned} \tag{3.9}$$

biçiminde ifade edilir. Genel olarak,

$$\Delta(\Delta^n y_k) = \Delta^{n+1} y_k \tag{3.10}$$

dır.

m ve $n \in \mathbb{Z}^{+}$ olmak üzere,

$$\Delta^{m}\Delta^{n}y_{k}=\Delta^{n}\Delta^{m}y_{k}=\Delta^{m+n}y_{k} \tag{3.11}$$

dır.

$m=0$ olduğunda,

$$\Delta^{0}\Delta^{n}y_{k}=\Delta^{n+0}y_{k}=\Delta^{n}\Delta^{0}y_{k} \tag{3.12}$$

dır. Δ^{0} 'ın birim operatör olduğu görülür.

Ayrıca,

$$\begin{gathered}\Delta(x_k+y_k)=\Delta x_k+\Delta y_k\\ \Delta(cy_k)=c\Delta y_k\\ \Delta(c_1x_k+c_2y_k)=c_1\Delta x_k+c_2\Delta y_k\end{gathered} \tag{3.13}$$

olduğundan Δ lineer bir operatördür.

Şimdi E operatörünü ele alalım. $p \in \mathbb{Z}$ olmak üzere,

$$\begin{gathered}E^{p}y_k=y_{k+p}\\ Ey_k=y_{k+1}\\ E^{2}y_k=y_{k+2}\end{gathered} \tag{3.14}$$

E operatörü shift (kaydırma) operatörüdür.

$p, q \in \mathbb{Z}$ olmak üzere,

$$E^{p}(c_1x_k+c_2y_k)=c_1x_{k+p}+c_2y_{k+p} \tag{3.15}$$

ve

$$E^{p}E^{q}y_k=E^{q}E^{p}y_k=E^{p+q}y_k \tag{3.16}$$

dır.

Δ ve E 'nin tanımlarından,

$$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k \tag{3.17}$$

ve

$$\begin{aligned} E^p y_k &= y_{k+1} \Delta y_k \\ &= E y_k - y_k \\ &= (E-1) y_k \end{aligned} \tag{3.18}$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\Delta = E - 1 \tag{3.19}$$

veya

$$E = \Delta + 1 \tag{3.20}$$

dir.

3.1.4 Temel Fark Operatörleri

x_k ve y_k, k 'nın fonksiyonları olsun.

Çarpımın Farkı:

$$\begin{aligned} \Delta(x_k y_k) &= x_{k+1} y_{k+1} - x_k y_k \\ &= x_{k+1} y_{k+1} - x_{k+1} y_k + x_{k+1} y_k - x_k y_k \\ &= x_{k+1}(y_{k+1} - y_k) + y_k (x_{k+1} - x_k) \\ &= x_{k+1} \Delta y_k + y_k \Delta x_k \end{aligned} \tag{3.21}$$

Farklar için Leibnitz Teoremi

$$\begin{aligned} \Delta^n (x_k y_k) &= x_k \Delta^n y_k + \binom{n}{1} \left(\Delta x_k\right)\left(\Delta^{n-1} y_{k+1}\right) \\ &+ \binom{n}{2} \left(\Delta^2 x_k\right)\left(\Delta^{n-2} y_{k+2}\right) + \ . \ . \ . + \binom{n}{n} \left(\Delta^n x_k\right)\left(y_{k+n}\right) \end{aligned} \tag{3.22}$$

Bölümün Farkı:

$$\Delta\left(\frac{x_k}{y_k}\right)=\frac{x_{k+1}}{y_{k+1}}-\frac{x_k}{y_k}=\frac{x_{k+1}y_k-y_{k+1}x_k}{y_k y_{k+1}}$$

$$=\frac{x_{k+1}y_k-x_k y_k+x_k y_k-y_{k+1}x_k}{y_k y_{k+1}} \tag{3.23}$$

$$=\frac{y_k(x_{k+1}-x_k)-x_k(y_{k+1}-y_k)}{y_k y_{k+1}}$$

$$=\frac{y_k\Delta x_k+x_k\Delta y_k}{y_k y_{k+1}}=\frac{y_k\Delta x_k+x_k\Delta y_k}{y_k y_{k+1}}$$

Sonlu Toplamın Farkı:

$$S_k=y_1+y_2+y_3+\ldots+y_k \tag{3.24}$$

olsun,

$$S_{k+1}=y_1+y_2+y_3+\ldots+y_k+y_{k+1} \tag{3.25}$$

olur.

$$\Delta S_k=S_{k+1}-S_k=y_{k+1} \tag{3.26}$$

dır.

3.1.5 Δ^{-1} Operatörü ve Toplam Analizi

$$\Delta(\Delta^{-1}y_k)=y_k \tag{3.27}$$

olacak şekilde $\Delta^{-1}y_k$ tanımlayalım.

$$z_k=\Delta^{-1}y_k \tag{3.28}$$

olsun,

$$\begin{aligned}\Delta z_k &= z_{k+1} - z_k \\ &= \Delta(\Delta^{-1} y_k) \\ &= y_k\end{aligned} \tag{3.29}$$

olur. Bu durumda;

$$\begin{aligned} z_{k+1} - z_k &= y_k \\ z_k - z_{k-1} &= y_{k-1} \\ z_{k-1} - z_{k-2} &= y_{k-2} \\ &\vdots \\ z_2 - z_1 &= y_1 \end{aligned} \tag{3.30}$$

Taraf tarafa toplanırsa,

$$z_{k+1} - z_1 = y_1 + y_2 + y_2 + \ . \ . \ . \ + y_k \tag{3.31}$$

veya

$$z_{k+1} = z_1 + \sum_{r=1}^{k} y_r \tag{3.32}$$

ve

$$z_k = z_1 + \sum_{r=1}^{k-1} y_r \tag{3.33}$$

elde edilir. (3.33) eşitliğinde (3.28) yerine yazılırsa,

$$\Delta^{-1} y_k = \sum_{r=1}^{k-1} y_r + z_1 \tag{3.34}$$

elde edilir. Burada z_1 sabit sayıdır. Genel olarak,

$$\Delta^{-n} y_k = \Delta^{-1}(\Delta^{-n+1} y_k) \tag{3.35}$$

dır.

3.2 Lineer Fark Denklemleri

3.2.1 Giriş

k_1 ve k_2 sonlu veya büyüklük olarak sınırsız olmak üzere,

$$k_1 \le k \le k_2 \tag{3.36}$$

ve $a_0(k),\, a_1(k),\, a_2(k),\, \ldots, a_n(k)$ ve R_k tamsayılar üzerinde tanımlı fonksiyonlar olsun,

$$a_0(k)y_{k+n} + a_1(k)y_{k+n-1} + a_2(k)y_{k+n-2} + \ldots + a_n(k)y_k = R_k \tag{3.37}$$

biçiminde bir denkleme lineerdir denir.

Bu denklemin derecesinin *n* olması için gerek ve yeter koşul, her *n* için,

$$a_0(k)a_n(k) \neq 0 \tag{3.38}$$

olmasıdır.

(3.38)'de verilen koşuldan ve eşitliğin her iki tarafını $a_0(k)$ ile bölerek *n*. mertebeden lineer fark denklemi şöyle,

$$y_{k+n} + a_1(k)y_{k+n-1} + a_2(k)y_{k+n-2} + \ldots + a_n(k)y_k = R_k \tag{3.39}$$

yazılabilir.

Eğer (3.36) ile verilen aralıktaki k değerleri için $R_k = 0$ ise (3.39) denklemi homojendir denir. Eğer $R_k \neq 0$ ise (3.39) denklemi homojen olmayan bir denklemdir.

$$y_{k+n} + a_1(k)y_{k+n-1} + a_2(k)y_{k+n-2} + \ldots + a_n(k)y_k = 0 \tag{3.40}$$

(3.40) denklemi homojendir [8].

Teorem 3.2.2 c keyfi bir sabit olmak üzere y_k (3.40) denkleminin bir çözümü ise, cy_k da (3.40) denkleminin bir çözümüdür [8].

İspat 3.2.2 :

$$c\left[y_{k+n} + a_1(k)y_{k+n-1} + a_2(k)y_{k+n-2} + \ldots + a_n(k)y_k\right] = 0 \tag{3.41}$$

Bu denklem,

$$x_{k+n} + a_1(k)x_{k+n-1} + a_2(k)x_{k+n-2} + \ldots + a_n(k)x_k = 0 \tag{3.42}$$

biçiminde yazılabilir. Burada,

$$x_k = cy_k \tag{3.43}$$

dır. (3.40) ve (3.42) aynı denklemler olması nedeniyle x_k (3.40) denkleminin çözümüdür.

Sonuç olarak cy_k da (3.40) denkleminin bir çözümüdür.

Teorem 3.2.3: c_1 ve c_2 keyfi sabitler olsun; $y_k^{(1)}$ ve $y_k^{(2)}$ (3.40) denkleminin çözümleri ise,

$$y_k = c_1 y_k^{(1)} + c_2 y_k^{(2)} \tag{3.44}$$

ifadesi de (3.40) denkleminin bir çözümüdür. [8].

İspat 3.2.3 : c_1 keyfi sabit, $y_k^{(1)}$ (3.40) denkleminin çözümü ise,

$$y_{k+n}^{(1)} + a_1(k)y_{k+n-1}^{(1)} + a_2(k)y_{k+n-2}^{(1)} + \ldots + a_n y_k^{(1)} = 0 \tag{3.45}$$

$$c_1\left[y_{k+n}^{(1)} + a_1(k)y_{k+n-1}^{(1)} + a_2(k)y_{k+n-2}^{(1)} + \ldots + a_n y_k^{(1)}\right] = 0 \tag{3.46}$$

buradan,

$$c_1 y_{k+n}^{(1)} + a_1(k)c_1 y_{k+n-1}^{(1)} + a_2(k)c_1 y_{k+n-2}^{(1)} + \ldots + a_n c_1 y_k^{(1)} = 0 \tag{3.47}$$

elde edilir.

Aynı şekilde, c_2 keyfi sabit, $y_k^{(2)}$ (3.40) denkleminin çözümü ise,

$$y_{k+n}^{(2)} + a_1(k)y_{k+n-1}^{(2)} + a_2(k)y_{k+n-2}^{(2)} + \ldots + a_n y_k^{(2)} = 0 \tag{3.48}$$

$$c_2\left[y_{k+n}^{(2)} + a_1(k)y_{k+n-1}^{(2)} + a_2(k)y_{k+n-2}^{(2)} + \ldots + a_n y_k^{(2)}\right] = 0 \tag{3.49}$$

buradan,

$$c_2 y_{k+n}^{(2)} + a_1(k)c_2 y_{k+n-1}^{(2)} + a_2(k)c_2 y_{k+n-2}^{(2)} + \ldots + a_n c_2 y_k^{(2)} = 0 \tag{3.50}$$

elde edilir.

(3.47) ve (3.50) denklemleri taraf tarafa toplanıp,

$$x_k = c_1 y_k^{(1)} + c_2 y_k^{(2)} \tag{3.51}$$

alınırsa, (3.42) denklemi elde edilir. Yani $c_1 y_k^{(1)} + c_2 y_k^{(2)}$ (3.40) denkleminin çözümü olur.

3.2.2 Lineer Bağımsız Fonksiyonlar

Eğer $k_1 \le k \le k_2$ aralığı üzerinde

$$c_1 f_1(k) + c_2 f_2(k) + \ldots + c_n f_n(k) = 0 \tag{3.52}$$

olacak şekilde, hepsi birden sıfır olmayan *n* tane $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ sabitler kümesi var ise $f_1(k), f_2(k), f_3(k), \ldots, f_n(k)$ fonksiyonlar kümesi lineer bağımlıdır denir.

$f_1(k), f_2(k), f_3(k), \ldots, f_n(k)$ fonksiyonlar kümesinin Casorati (Wronskiyen) determinantı şöyle tanımlanır [8].

$$C_k = \begin{vmatrix} f_1(k) & f_2(k) & \cdots & f_n(k) \\ f_1(k+1) & f_2(k+1) & \cdots & f_n(k+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(k+n-1) & f_2(k+n-1) & \cdots & f_n(k+n-1) \end{vmatrix} \tag{3.53}$$

Teorem 3.2.4: Eğer $f_1(k), f_2(k), f_3(k), \ldots, f_n(k)$ lineer bağımlı n tane fonksiyon ise bunların Casorati (Wronskiyen) determinantı her k için sıfırdır [8].

Teorem 3.2.5: Eğer $f_1(k), f_2(k), f_3(k), \ldots, f_n(k)$ gibi n tane fonksiyonun Casorati (Wronskiyen) determinantı sıfır ise bu n tane fonksiyon lineer bağımlıdırlar [8].

3.2.3 Lineer Homojen Fark Denklemleri

$$y_{k+1} - Ay_k = 0 \tag{3.54}$$

lineer homojen birinci mertebeden sabit katsayılı fark denklemidir. $k = 0$'dan başlayarak ardışık olarak çözülmeye çalışılırsa,

$$\begin{gathered} y_1 = Ay_0 \\ y_2 = Ay_1 = A(Ay_0) = A^2 y_0 \\ \vdots \\ y_n = A^n y_0 \end{gathered} \tag{3.55}$$

Eğer $y_0 = c$ kabul edilirse,

$$y_n = cA^n \tag{3.56}$$

bulunur.

Şimdi genel olarak n. mertebeden homojen bir fark denkleminin çözümüne bakalım.

$$y_{k+n} + A_{n-1}y_{k+n-1} + A_{n-2}y_{k+n-2} + \ldots + A_1 y_{k+1} + A_0 y_k = 0 \tag{3.57}$$

lineer homojen fark denklemi,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}y_k &= y_{k+1} \\
\mathrm{E}^2 y_k &= y_{k+2} \\
&\vdots \\
\mathrm{E}^n y_k &= y_{k+n}
\end{aligned}
\tag{3.58}
$$

konularak,

$$(\mathrm{E}^n + A_{n-1}\mathrm{E}^{n-1} + A_{n-2}\mathrm{E}^{n-2} + \ldots + A_1\mathrm{E} + A_0)y_k = 0 \tag{3.59}$$

halini alır. (3.59) denkleminde,

$$y_k = r^k \tag{3.60}$$

şeklinde çözümler aranırsa,

$$
\begin{aligned}
y_{k+1} &= r^{k+1} \\
y_{k+2} &= r^{k+2} \\
&\vdots \\
y_{k+n} &= r^{k+n}
\end{aligned}
\tag{3.61}
$$

konulsun,

$$r^n + A_{n-1}r^{n-1} + A_{n-2}r^{n-2} + \ldots + A_1 r + A_0 = 0 \tag{3.62}$$

bulunur.

(3.62) denklemine (3.59) denkleminin karakteristik denklemi denir.

Eğer karakteristik denklemde sol taraf çarpanlarına ayrılabiliyorsa,

$$(r - r_1)(r - r_2).....(r - r_n) = 0 \tag{3.63}$$

biçiminde yazılabilir. Böylece $r_1, r_2, \ldots, r_n$ karakteristik denklemin kökleri olur.

Bu durumda,

$$\begin{aligned} y_1 &= r_1^k \\ y_2 &= r_2^k \\ &\vdots \\ y_n &= r_n^k \end{aligned} \tag{3.64}$$

(3.57) denkleminin çözümleridir.

Bu çözümlerin sabitlerle çarpımlarının toplamı da çözüm olacağından,

$$y_k = c_1 r_1^k + c_2 r_2^k + \ldots + c_n r_n^k \tag{3.65}$$

genel çözüm olur [8].

3.2.4 Homojen Olmayan Lineer Fark Denklemleri

$$y_{k+n} + a_1(k) y_{k+n-1} + a_2(k) y_{k+n-2} + \ . \ . \ . \ + a_n(k) y_k = R_k \tag{3.66}$$

denklemi göz önüne alınırsa, homojen kısmın çözümü,

$$y_k^h = c_1 y_k^1 + c_2 y_k^2 \tag{3.67}$$

dır. (3.66) denkleminin sağ tarafının çözümü $y_k^ö$ olsun.

Bu durumda genel çözüm,

$$y_k^G = y_k^h + y_k^ö \tag{3.68}$$

biçiminde olacaktır.

Özel çözüm (3.66) denkleminin sağ tarafındaki ifadenin türüne göre aşağıdaki şekilde aranacaktır [8].

r_k	p_k
a^k	Aa^k
$\sin(bk)$	$A\sin(bk)+B\cos(bk)$
$\cos(bk)$	$A\sin(bk)+B\cos(bk)$
k^n	$A_0 + A_0 k + A_2 k^2 + \ldots + A_n k^n$
$k^n a^k$	$a^k\left(A_0 + A_0 k + A_2 k^2 + \ldots + A_n k^n\right)$

Teorem 3.2.6:

$$y_{k+n} + a_1(k)y_{k+n-1} + a_2(k)y_{k+n-2} + \; . \; . \; . \; + a_n(k)y_k = \phi_1(k) \tag{3.69}$$

denkleminin bir çözümü F_1^k,

$$y_{k+n} + a_1(k)y_{k+n-1} + a_2(k)y_{k+n-2} + \; . \; . \; . \; + a_n(k)y_k = \phi_2(k) \tag{3.70}$$

denkleminin bir çözümü F_2^k ise,

$$y_{k+n} + a_1(k)y_{k+n-1} + a_2(k)y_{k+n-2} + \; . \; . \; . \; + a_n(k)y_k = \phi_1(k) + \phi_2(k) \tag{3.71}$$

denkleminin bir çözümü $F_1^k + F_2^k$ 'dır [8].

İspat 3.2.6 : F_1^k (3.69) denkleminin, F_2^k (3.70) denkleminin çözümü ise,

$$F_1^{k+n} + a_1(k)F_1^{k+n-1} + a_2(k)F_1^{k+n-2} + \; . \; . \; . \; + a_n(k)F_1^k = \phi_1(k) \tag{3.72}$$

$$F_2^{k+n} + a_1(k)F_2^{k+n-1} + a_2(k)F_2^{k+n-2} + \; . \; . \; . \; + a_n(k)F_2^k = \phi_2(k) \tag{3.73}$$

olur.

(3.72) ve (3.73) denklemleri taraf tarafa toplanır ve $x_k = F_1^k + F_2^k$ alınırsa,

$$x_{k+n} + a_1(k)x_{k+n-1} + a_2(k)x_{k+n-2} + \; . \; . \; . \; + a_n(k)x_k = \phi_1(k) + \phi_2(k) \tag{3.74}$$

denklemi elde edilir. Yani, $F_1^k + F_2^k$ (3.71) denkleminin bir çözümüdür.

4. BÖLÜM

STURM–LİOUVİLLE FARK OPERATÖRÜNÜN SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ

4.1 Giriş

a_{n-1}, a_n, b_n n'nin fonksiyonları olmak üzere,

$$a_{n-1}y_{n-1} - b_n y_n + a_n y_{n+1} = 0 \tag{4.1}$$

ikinci mertebeden homojen fark denklemini ele alalım. Bu denklem;

$$\Delta\left(p_{n-1}\Delta y_{n-1}\right) + s_n y_n = 0 \tag{4.2}$$

p_n ve s_n fonksiyonlarının uygun seçilmesiyle (4.2) denklemi,

$$p_n y_{n+1} - \left(p_n + p_{n-1} - s_n\right) y_n + p_{n-1}y_{n-1} = 0 \tag{4.3}$$

şekline dönüşür. (4.1) denklemi ile (4.3) denklemini karşılaştırdığımızda,

$$\begin{aligned} p_n &= a_n \\ p_n + p_{n-1} - s_n &= -b_n \\ p_{n-1} &= a_{n-1} \end{aligned} \tag{4.4}$$

elde edilir. Birinci ve üçüncü ifadeleri oranlarsak;

$$p_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} p_{n-1} \tag{4.5}$$

bulunur. (4.4) denklemini s_n için çözerek,

$$\frac{p_n}{a_n} = 1 \tag{4.6}$$

eşitliğini kullanırsak;

$$s_n = p_n + p_{n-1} + b_n = p_n + p_{n-1} + \left({b_n}\big/{a_n} \right) p_n \tag{4.7}$$

elde edilir.

a_n, b_n, a_{n-1} n'nin fonksiyonları olduğu için, (4.5) p_n'i bulmak için kullanılabilir.
λ, k'dan bağımsız bir parametre olmak üzere,

$$s_n = -q_n + \lambda \tag{4.8}$$

olsun. Bu durumda (4.2) denklemi,

$$-\Delta\left(p_{n-1} \Delta y_{n-1} \right) + \left(q_n - \lambda \right) y_n = 0 \tag{4.9}$$

şeklini alır.

$1 \le n \le N-1$ olmak üzere (4.9) denklemine Sturm–Liouville fark denklemi denir.

a_0, a_1, a_N ve a_{N+1} verilen sabitler,

$$\begin{aligned} a_0 y_0 + a_1 y_1 &= 0 \\ a_N y_N + a_{N+1} y_{N+1} &= 0 \end{aligned} \tag{4.10}$$

(4.10) sınır koşulları ile (4.9) denklemi Sturm–Liouville sistemi oluşturur.

Sturm–Liouville denkleminin karakteristik değerlerine veya özdeğerlerine karşılık gelen çözümlerine karakteristik fonksiyon veya özfonksiyon (özvektör) denir [8].

$n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere y_n kompleks sayılarının dizisi $y = \{y_n\}$ olsun.

$$\left(\ell y \right)_n = -a_{n-1} y_{n-1} + b_n y_n - a_n y_{n+1} = \lambda y_n \tag{4.11}$$

(4.11) ikinci mertebeden fark denklemini ele alalım. Burada λ bir spektral parametre, $a_{\mathrm{n}} \neq 0$ ve $a_n, b_n \in \mathbb{R} = \left(-\infty, +\infty \right)$, $n \in \mathbb{Z}$ olsun.

Eğer,

$$p_n = a_n$$
$$q_n = b_n - a_n - a_{n-1} \tag{4.12}$$

ve

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n \tag{4.13}$$

ifadeleri (4.11) denkleminde yazılırsa Sturm – Liouville biçiminde

$$-\Delta\left(p_{n-1}\Delta y_{n-1}\right) + q_n y_n = \lambda y_n \quad \left(n \in \mathbb{Z}\right) \tag{4.14}$$

fark denklemi elde edilir.

$y = \{\, y_n \}$ ve $z = \{\, z_n \}$ dizileri için $[y,z]$ dizisini aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$[y,z]_n = a_n\left(y_n \overline{z}_{n+1} - y_{n+1}\overline{z}_n\right) \tag{4.15}$$

biçiminde tanımlanan, $[y,z]_n$ bileşenlerinden oluşan dizi, $[y,z]$ dizisi olsun. Bu bölümde [9] A. Eryılmaz'ın doktora tezinden faydalanılmıştır.

Tanım 4.1.1 : $\forall m,n \in Z$ ve $n < m$ için,

$$\sum_{j=n}^{m}\left\{(\ell y)_j \overline{z}_j - y_j(\ell \overline{z})_j\right\} = \left[y,z\right]_m - \left[y,z\right]_{n-1} \tag{4.16}$$

eşitliğine Green formülü adı verilir [10].

$$\left(\ell y\right)_n = -a_{n-1}y_{n-1} + b_n y_n - a_n y_{n+1} \tag{4.17}$$

olmak üzere keyfi $y = \{y_n\}$ dizisi için, bileşenleri $\left(\ell y\right)_n$ olan diziye ℓy dizisi diyelim.

$$\left(y,z\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n \overline{z}_n \tag{4.18}$$

iç çarpımını sağlayan, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |y_n|^2 < \infty$ şeklindeki bütün kompleks değerli y dizilerinin oluşturduğu $\ell^2(\mathbb{Z})$ Hilbert uzayını kuralım.

$\ell y \in \ell^2(\mathbb{Z})$ olacak şekilde $y \in \ell^2(\mathbb{Z})$ vektörlerinin kümesini D ile gösterelim.

$$Ly = \ell y \tag{4.19}$$

konularak D de bir L maksimal operatörü tanımlayalım.

$y, z \in D$ vektörleri için,

$$\begin{aligned} [y,z]_{\infty} &= \lim_{n\to\infty}[y,z]_n \\ [y,z]_{-\infty} &= \lim_{n\to-\infty}[y,z]_n \end{aligned} \tag{4.20}$$

limitlerinin varlığı ve sonlu olduğu (4.16) formülünden elde edilir. Bundan dolayı, $n \to -\infty$ ve $n \to \infty$ için (4.16) formülünden (Green formülünden) limit hesaplanırsa, $y, z \in D$ için,

$$(Ly, z) - (y, Lz) = [y,z]_{\infty} - [y,z]_{-\infty} \tag{4.21}$$

elde edilir.

Sonlu sayıdaki elemanı sıfırdan farklı olan $y = \{y_n\}$ dizilerinin kümesi üzerinde $L_0'y = Ly$ ile tanımlı L_0' simetrik operatörünün kapanışını L_0 ile gösterelim. L_0 operatörü simetriktir ve $L_0^* = L$ 'dir [10].

L_0 'ın indis defektinin hesaplanması, yarı doğru üzerindeki indis defektinin hesaplanmasına indirgenebilir. Aslında $\ell^2(\mathbb{Z})$, $\ell^2(\mathbb{N}_-)$ $\left(\mathbb{N}_- = \{-1,-2,-3,...,\}\right)$ ve $\ell^2(\mathbb{N}_+)$ $\left(\mathbb{N}_+ = \{0,1,2,3,...,\}\right)$ uzaylarının ortogonal toplamıdır. $\ell^2(\mathbb{N}_-)$ ve $\ell^2(\mathbb{N}_+)$ uzaylarında ℓ ile üretilen minimal ve maksimal operatörler $L_0^-(L_-)$ ve $L_0^+(L_+)$ olsun ve $D_0^{\mp}(D_{\mp})$, $L_0^{\mp}(L_{\mp})$ operatörlerinin tanım kümesi olsun. $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ için L_0 'ın defekt sayısı,

$$def\ L_0 = \dim\left\{\left(L_0 - \lambda I\right)D\left(L_0\right)\right\}^{\perp} \tag{4.22}$$

için,

$$def\ L_0 = def\ L_0^- + def\ L_0^+ \tag{4.23}$$

eşitliği sağlanır. Bu ise $k = 0,1,2$ olmak üzere L_0 'ın indis defektinin (*k,k*) biçiminde olduğunu gerektirir. (0,0) indis defekti için L_0 operatörü kendine eştir. Yani,

$$L_0^* = L_0 = L \tag{4.24}$$

dir.

Kabül edelim ki simetrik L_0 operatörünün indis defekti (2,2) olsun. $\pm\infty$ 'da Weyl limit çember durumlarını garanti eden yeterli koşullar vardır [11, 12, 13].

L_0 'ın tanım kümesi,

$$\left[y,z\right]_{\infty} - \left[y,z\right]_{-\infty} = 0 \qquad (z \in D) \tag{4.25}$$

koşulunu sağlayan $y \in D$ vektörlerini içerir.

(4.11) denkleminin $y = \{y_n\}$ ve $z = \{z_n\}$ çözümlerinin Wronskiyeni;

$$W_n\left(y,z\right) = \left[y,\bar{z}\right]_n \tag{4.26}$$

olacak şekilde,

$$W_n\left(y,z\right) = a_n\left(y_n z_{n+1} - y_{n+1} z_n\right) \tag{4.27}$$

biçiminde tanımlanır.

Bu çözümler n 'ye bağlı değildir. Bu iki çözümün lineer bağımsız olması için gerek ve yeter koşul Wronskiyeninin sıfırdan farklı olmasıdır [10].

$$
\begin{aligned}
&U_{-1}(\lambda) = 0 \\
&U_0(\lambda) = 1 \\
&V_{-1}(\lambda) = -\frac{1}{a_{-1}} \\
&V_0(\lambda) = 0
\end{aligned}
\tag{4.28}
$$

koşullarını sağlayan (4.11) denkleminin çözümlerini,

$$
\begin{aligned}
&U(\lambda) = \{ U_n(\lambda) \} \\
&V(\lambda) = \{ V_n(\lambda) \}
\end{aligned}
\tag{4.29}
$$

ile gösterelim.

(4.28) koşulundan,

$$
\begin{aligned}
W_{-1}(U,V) &= a_{-1} \begin{vmatrix} U_{-1} & V_{-1} \\ U_0 & V_0 \end{vmatrix} \\
&= a_{-1}\left(U_{-1}V_0 - U_0V_{-1} \right) \\
&= a_{-1}\left[0.0 - 1.\left(-\frac{1}{a_{-1}} \right) \right] \\
&= 1
\end{aligned}
\tag{4.29}
$$

bulunur. Wronskiyenin değişmezliğinden $W_n(U,V) = 1$ olduğu elde edilir.

$U(\lambda)$ ve $V(\lambda)$, (4.11) denkleminin çözümlerinin temel sistemini oluşturur ve $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ için, $U(\lambda), V(\lambda) \in \ell^2(\mathbb{Z})$ 'dir. $u = U(0)$ ve $v = V(0)$ olsun, $u = \{ u_n \}$ ve $v = \{ v_n \}$ reel sayılar dizisi ve $[u, v]_n = 1$ olduğundan (4.15) denkleminin tabanı olduğu görülür [10].

Lemma 4.1.2: Keyfi $y = \{ y_n \}$ ve $z = \{ z_n \} \in D$ vektörleri için,

$$
[y, \bar{z}]_n = [y, u]_n [\bar{z}, v]_n - [y, v]_n [\bar{z}, u]_n, \quad \left(n \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\} \right) \tag{4.30}
$$

eşitliği sağlanır [10].

İspat 4.1.2: (4.14) denkleminden ve $\left[u,v\right]_n=1$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
\left[y,u\right]_n\left[\bar{z},v\right]_n-\left[y,v\right]_n\left[\bar{z},u\right]_n &=\left(y_nu_{n+1}-u_ny_{n+1}\right)\left(\bar{z}_nv_{n+1}-v_n\bar{z}_{n+1}\right)\\
&\quad-\left(y_nv_{n+1}-v_ny_{n+1}\right)\left(\bar{z}_nu_{n+1}-u_n\bar{z}_{n+1}\right)\\
&=y_nu_{n+1}\bar{z}_nv_{n+1}-y_nu_{n+1}v_n\bar{z}_{n+1}\\
&\quad-u_ny_{n+1}\bar{z}_nv_{n+1}+u_ny_{n+1}v_n\bar{z}_{n+1}\\
&\quad-y_nv_{n+1}\bar{z}_nu_{n+1}+y_nv_{n+1}u_n\bar{z}_{n+1}\\
&\quad+v_ny_{n+1}\bar{z}_nu_{n+1}-v_ny_{n+1}u_n\bar{z}_{n+1}\\
&=y_nv_{n+1}u_n\bar{z}_{n+1}-y_nu_{n+1}v_n\bar{z}_{n+1}\\
&\quad+v_ny_{n+1}\bar{z}_nu_{n+1}-u_ny_{n+1}\bar{z}_nv_{n+1}\\
&=y_n\bar{z}_{n+1}\left(v_{n+1}u_n-v_nu_{n+1}\right)\\
&\quad+y_{n+1}\bar{z}_n\left(v_nu_{n+1}-u_nv_{n+1}\right)\\
&=\left(y_n\bar{z}_{n+1}-y_{n+1}z_n\right)\left(v_{n+1}u_n-v_nu_{n+1}\right)\\
&=\left[y,\bar{z}\right]_n\left[u,v\right]_n\\
&=\left[y,\bar{z}\right]_n
\end{aligned}\tag{4.31}$$

$$\left[y,u\right]_n\left[\bar{z},v\right]_n-\left[y,v\right]_n\left[\bar{z},u\right]_n=\left[y,\bar{z}\right]_n\qquad\left(n\in\mathbb{Z}\cup\{-\infty,+\infty\}\right)$$

bulunur.

Teorem 4.1.3 : L_0 operatörünün tanım bölgesi D_0,

$$\left[y,u\right]_{-\infty}=\left[y,v\right]_{-\infty}=\left[y,u\right]_{\infty}=\left[y,v\right]_{\infty}=0\tag{4.32}$$

sınır koşullarını sağlayan $y\in D$ vektörlerini içerir [10].

İspat 4.1.3 : (4.25) denkleminden,

$$[y,\bar{z}]_{\infty}-[y,\bar{z}]_{-\infty}=0 \tag{4.33}$$

Lemma 4.1.2'den (4.32) denklemi,

$$[y,u]_{\infty}[\bar{z},v]_{\infty}-[y,v]_{\infty}[\bar{z},u]_{\infty}-[y,u]_{-\infty}[\bar{z},v]_{-\infty}-[y,v]_{-\infty}[\bar{z},u]_{-\infty}=0 \tag{4.34}$$

denklemine denktir.

Üstelik $[\bar{z},u]_{-\infty}$, $[\bar{z},v]_{-\infty}$, $[\bar{z},u]_{\infty}$ ve $[\bar{z},v]_{\infty}$ keyfi olabilir. Bundan dolayı, her $z\in D$ için (4.34) denkleminin mümkün olması için gerek ve yeter koşul (4.32) koşullarının sağlanmasıdır. Teorem ispatlanır.

$\ell(y)$ fark ifadesi için aşağıdaki sınır değer problemini düşünelim.

$$\ell(y)=\lambda y\,,\ y\in D\ \ (n\in\mathbb{Z}) \tag{4.35}$$

$$\alpha_1[y,v]_{-\infty}-\alpha_2[y,u]_{-\infty}=\lambda\left(\alpha_1'[y,v]_{-\infty}-\alpha_2'[y,u]_{-\infty}\right) \tag{4.36}$$

$$[y,v]_{\infty}-h[y,u]_{\infty}=0\,,\ \operatorname{Im}h>0 \tag{4.37}$$

Burada λ, kompleks spektral parametre, $\alpha_1,\,\alpha_2,\,\alpha_1',\,\alpha_2'\in\mathbb{R}$ ve

$$\alpha=\begin{vmatrix}\alpha_1' & \alpha_1\\ \alpha_2' & \alpha_2\end{vmatrix}=\alpha_1'\alpha_2-\alpha_2'\alpha_1>0 \tag{4.38}$$

dır [9].

$$K_{-\infty}(y)=\alpha_1\left[y,v\right]_{-\infty}-\alpha_2\left[y,u\right]_{-\infty}$$

$$K_{-\infty}(y)=\alpha_1'\left[y,v\right]_{-\infty}-\alpha_2'\left[y,u\right]_{-\infty}$$

$$R_1^{\infty}(y)=\left[y,v\right]_{\infty}$$

$$R_2^{\infty}(y)=\left[y,u\right]_{\infty} \tag{4.39}$$

$$R_1^{-\infty}(y)=\left[y,v\right]_{-\infty}$$

$$R_2^{-\infty}\left(y\right)=\left[y,u\right]_{-\infty}$$

$$K_{\infty}(y)=R_1^{\infty}(y)-hR_2^{\infty}(y)$$

olsun.

Lemma 4.1.4: Keyfi $y,z\in D$ için,

$$\begin{aligned} K_{-\infty}(\bar{z})&=\overline{K_{-\infty}(z)}\\ K'_{-\infty}(\bar{z})&=\overline{K'_{-\infty}(z)}\\ R_1^{\infty}(\bar{z})&=\overline{R_1^{\infty}(z)}\\ R_2^{\infty}(\bar{z})&=\overline{R_2^{\infty}(z)} \end{aligned} \tag{4.40}$$

olmak üzere,

i) $\left[y,\bar{z}\right]_{\infty}=R_1^{\infty}(y)R_2^{\infty}(\bar{z})-R_1^{\infty}(\bar{z})R_2^{\infty}(y)$ (4.41)

ii) $\left[y,\bar{z}\right]_{-\infty}=\dfrac{1}{\alpha}\left[K_{-\infty}(y)\overline{K'_{-\infty}(z)}-\overline{K'}_{-\infty}(y)\overline{K_{-\infty}(z)}\right]$ (4.42)

dır.[9]

İspat 4.1.4:

i) $R_1^{\infty}(y)R_2^{\infty}(\bar{z})-R_1^{\infty}(\bar{z})R_2^{\infty}(y)=\left[y,v\right]_{\infty}\left[\bar{z},u\right]_{\infty}-\left[\bar{z},v\right]_{\infty}\left[y,u\right]_{\infty}$ (4.43)

Lemma 4.1.2'den dolayı,

$$=\left[y,\bar{z}\right]_{\infty}$$

ii) $\frac{1}{\alpha}\left[K_{-\infty}(y)\overline{K'_{-\infty}(z)}-K'_{-\infty}(y)\overline{K_{-\infty}(z)}\right]$

$$=\frac{1}{\alpha}\Big[\left(\alpha_1[y,v]_{-\infty}-\alpha_1[y,u]_{-\infty}\right)\left(\alpha_1'[\overline{z},v]_{-\infty}-\alpha_2'[\overline{z},u]_{-\infty}\right)$$

$$-\left(\alpha_1'[y,v]_{-\infty}-\alpha_2'[y,u]_{-\infty}\right)\left(\alpha_1[\overline{z},v]_{-\infty}-\alpha_2[\overline{z},u]_{-\infty}\right)\Big]$$

$$=\frac{1}{\alpha}\Big[\alpha_1'\alpha_2\left([y,v]_{-\infty}[\overline{z},u]_{-\infty}-[y,u]_{-\infty}[\overline{z},v]_{-\infty}\right) \tag{4.44}$$

$$-\alpha_1\alpha_2'\left([y,v]_{-\infty}[\overline{z},u]_{-\infty}-[y,u]_{-\infty}[\overline{z},v]_{-\infty}\right)\Big]$$

$$=\frac{1}{\alpha}\left[\left(\alpha_1'\alpha_2-\alpha_1\alpha_2'\right)\left([y,v]_{-\infty}[\overline{z},u]_{-\infty}-[y,u]_{-\infty}[\overline{z},v]_{-\infty}\right)\right]$$

Lemma 4.1.2’den dolayı

$$=[y,\overline{z}]_{-\infty}$$

4.2 Sınır Değer Probleminin Hilbert Uzayında Ürettiği Lineer Operatör

$f^{(1)}\in\ell^2(\mathbb{Z}),\ f^{(2)}\in\mathbb{C}$ olmak üzere,

$$\hat{f}=\begin{pmatrix} f^{(1)} \\ f^{(2)} \end{pmatrix} \tag{4.45}$$

şeklinde iki bileşenli elemanların lineer uzayını $H=\ell^2(\mathbb{N})\oplus\mathbb{C}$ şeklinde gösterelim.

Eğer,

$$\alpha=\begin{vmatrix} \alpha_1' & \alpha_1 \\ \alpha_2' & \alpha_2 \end{vmatrix} \tag{4.46}$$

olmak üzere $\alpha>0$ kabul edilirse,

$$\hat{f}=\begin{pmatrix} f^{(1)} \\ f^{(2)} \end{pmatrix},\ \hat{g}=\begin{pmatrix} g^{(1)} \\ g^{(2)} \end{pmatrix}\in H \tag{4.47}$$

olmak üzere,

$$\left(\hat{f},\hat{g}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n^{(1)}\overline{g}_n^{(1)}+\frac{1}{\alpha}f^{(2)}\overline{g}^{(2)} \tag{4.48}$$

şeklinde *H* lineer uzayında bir iç çarpım tanımlayalım [14]. Bu iç çarpıma göre *H* lineer uzayı bir Hilbert uzayı olur. Dolayısıyla verilmiş sınır değer problemine uygun Hilbert uzayı tanımlanmış olur.

Verilen sınır değer problemine uygun A operatörünü,

$$A_h : H \to H \tag{4.49}$$

$$D(A_h)=\left\{\begin{pmatrix} f^{(1)} \\ f^{(2)} \end{pmatrix}\in H : f^{(1)}\in D,\ \ \mathrm{K}_{\infty}\left(f^{(1)}\right)=0,\ \ f^{(2)}=K'_{-\infty}\left(f^{(1)}\right)\right\} \tag{4.50}$$

$$A_h\hat{f}=\tilde{\ell}\left(\tilde{f}\right)=\begin{pmatrix} \ell\left(f^{(1)}\right) \\ K_{-\infty}\left(f^{(1)}\right) \end{pmatrix} \tag{4.51}$$

eşitlikleri ile tanımlayalım [14].

Lemma 4.2.1: $H=\ell^2\left(\mathbb{N}\right)\oplus\mathbb{C}$ Hilbert uzayında A_h operatörü için,

$$\begin{aligned}\left(A_h\hat{f},\hat{g}\right)-\left(\hat{f},A_h\hat{g}\right)&=\left[f^{(1)},g^{(1)}\right]_{\infty}-\left[f^{(1)},g^{(1)}\right]_{-\infty}\\&+\frac{1}{\alpha}\left[K_{-\infty}\left(f^{(1)}\right)\overline{K'_{-\infty}\left(g^{(1)}\right)}-K'_{-\infty}\left(f^{(1)}\right)\overline{K_{-\infty}\left(g^{(1)}\right)}\right]\end{aligned} \tag{4.52}$$

eşitliği sağlanır [9].

İspat 4.2.1: (4.47) denkleminden,

$$\left(A_h \hat{f}, \hat{g}\right)_N = \sum_{n=-N}^{N}\left(a_{n-1}f_{n-1}^{(1)} + b_n f_n^{(1)} + a_n f_{n+1}^{(1)}\right)\overline{g_n^{(1)}} + \frac{1}{\alpha} f^{(2)}\overline{g^{(2)}}$$

$$= \sum_{n=-N}^{N}\left(a_{n-1}f_{n-1}^{(1)} + b_n f_n^{(1)} + a_n f_{n+1}^{(1)}\right)\overline{g_n^{(1)}} + \frac{1}{\alpha} f^{(2)}\overline{g^{(2)}}$$

$$= \sum_{n=-N}^{N}\left(a_{n-1}f_{n-1}^{(1)}\overline{g_n^1} + b_n f_n^{(1)}\overline{g_n^1} + a_n f_{n+1}^{(1)}\overline{g_n^1}\right) + \frac{1}{\alpha} f^{(2)}\overline{g^{(2)}} \tag{4.53}$$

$$= a_{-N-1}f_{-N-1}^{(1)}\overline{g}_{-N}^{(1)} + b_{-N}f_{-N}^{(1)}\overline{g}_{-N}^{(1)} + a_{-N}f_{-N+1}^{(1)}\overline{g}_{-N}^{(1)}$$

$$+ a_{-N}f_{-N}^{(1)}\overline{g}_{-N+1}^{1} + b_{-N+1}f_{-N+1}^{(1)}\overline{g}_{-N+1}^{1} + a_{-N+1}f_{-N+2}^{(1)}\overline{g}_{-N+1}^{1}$$

$$+ \ldots + a_{N-1}f_{N-1}^{(1)}\overline{g}_1^{(1)} + b_N f_N^{(1)}\overline{g}_N^{(1)} + a_N f_{N+1}^{(1)}\overline{g}_N^{(1)} + \frac{1}{\alpha} f^{(2)}\overline{g}^{(2)}$$

Diğer taraftan,

$$\left(\hat{f}, A_h \hat{g}\right) = \sum_{n=-N}^{N}\left(a_{n-1}\overline{g}_{n-1}^{(1)} + b_n\overline{g}_n^{(1)} + a_n g_{n+1}^{(1)}\right) f_n^{(1)} + \frac{1}{\alpha}\overline{f}^{(2)} g^{(2)}$$

$$= \sum_{n=-N}^{N}\left(a_{n-1}\overline{g}_{n-1}^{(1)} + b_n\overline{g}_n^{(1)} + a_n g_{n+1}^{(1)}\right) f_n^{(1)} + \frac{1}{\alpha}\overline{f}^{(2)} g^{(2)}$$

$$= \sum_{n=-N}^{N}\left(a_{n-1}f_n^{(1)}\overline{g}_{n-1}^{(1)} + b_n f_n^{(1)}\overline{g}_n^{(1)} + a_n f_n^{(1)} g_{n+1}^{(1)}\right) + \frac{1}{\alpha}\overline{f}^{(2)} g^{(2)} \tag{4.54}$$

$$= a_{-N-1}f_{-N}^{(1)}\overline{g}_{-N-1}^{(1)} + b_{-N}f_{-N}^{(1)}\overline{g}_{-N}^{(1)} + a_{-N}f_{-N}^{(1)}\overline{g}_{-N+1}^{(1)}$$

$$+ a_{-N}f_{-N+1}^{(1)}\overline{g}_{-N}^{(1)} + b_{-N+1}f_{-N+1}^{(1)}\overline{g}_{-N+1}^{(1)} + a_{-N+1}f_{-N+1}^{(1)}\overline{g}_{-N+2}^{(1)}$$

$$+ \ldots + a_{N-1}f_N^{(1)}\overline{g}_{N-1}^{(1)} + b_N f_N^{(1)}\overline{g}_N^{(1)} + a_N f_N^{(1)}\overline{g}_{N+1}^{(1)} + \frac{1}{\alpha}\overline{f}^{(2)} g^{(2)}$$

elde edilir.

(4.53) ve (4.54) eşitlikleri (4.52)'de yerine yazılınca,

$$\left(A_h \hat{f}, \hat{g}\right)_N - \left(\hat{f}, A_h \hat{g}\right)_N = a_{-N-1} f_{-N-1}^{(1)} \overline{g}_{-N}^{(1)} - a_{-N-1} f_{-N}^{(1)} \overline{g}_{-N-1}^{(1)}$$

$$+ a_N f_{N+1}^{(1)} \overline{g}_N^{(1)} - a_N f_N^{(1)} \overline{g}_{N+1}^{(1)} + \frac{1}{\alpha} f^{(2)} \overline{g}^{(2)} - \frac{1}{\alpha} \overline{f}^{(2)} g^{(2)}$$

$$= a_{-N-1} (f_{-N-1}^{(1)} \overline{g}_{-N}^{(1)} - f_{-N}^{(1)} \overline{g}_{-N-1}^{(1)}) - a_N \left(f_N^{(1)} \overline{g}_{N+1}^{(1)} - f_N^{(1)} \overline{g}_N^{(1)} \right) \tag{4.55}$$

$$+ \frac{1}{\alpha} \left[f^{(2)} \overline{g}^{(2)} - \overline{f}^{(2)} g^{(2)} \right]$$

$$= \left[f^{(1)}, g^{(1)} \right]_{-N-1} - \left[f^{1}, g^{(1)} \right]_N + \frac{1}{\alpha} \left[f^{(2)} \overline{g^{(2)}} - \overline{f^{(2)}} g^{(2)} \right]$$

bulunur.

$N \to \infty$ için,

$$\begin{aligned} (A_h \hat{f}, \hat{g}) - (\hat{f}, A_h \hat{g}) &= \left[f^{(1)}, g^{(1)} \right]_{\infty} - \left[f^{(1)}, g^{(1)} \right]_{-\infty} \\ &+ \frac{1}{\alpha} \left[f^{(2)} \overline{g^{(2)}} - \overline{f^{(2)}} g^{(2)} \right] \\ &= \left[f^{(1)}, g^{(1)} \right]_{-\infty} - \left[f^{(1)}, g^{(1)} \right]_{\infty} \\ &+ \frac{1}{\alpha} \left[K_{-\infty}\left(f^{(1)}\right) \overline{K'_{-\infty}\left(g^{(1)}\right)} - K'_{-\infty}\left(f^{(1)}\right) \overline{K_{-\infty}\left(g^{(1)}\right)} \right] \end{aligned} \tag{4.56}$$

olur.

$$\begin{aligned} \left(A_h \hat{f}, \hat{g}\right) - \left(\hat{f}, A_h \hat{g}\right) &= \left[f^{(1)}, g^{(1)} \right]_{\infty} - \left[f^{(1)}, g^{(1)} \right]_{-\infty} \\ &+ \frac{1}{\alpha} \left[K_{-\infty}\left(f^{(1)}\right) \overline{K'_{-\infty}\left(g^{(1)}\right)} - K'_{-\infty}\left(f^{(1)}\right) \overline{K_{-\infty}\left(g^{(1)}\right)} \right] \end{aligned} \tag{4.57}$$

elde edilir.

Teorem 4.2.2 : A_h operatörü H uzayında disipatiftir [9].

İspat 4.2.2 : $\hat{y}=\{\hat{y}_n\}\in D(A_h)$ ve $\overline{D(A_h)}=H$ için (4.52) eşitliğinden,

$$
\begin{aligned}
\left(A_h\hat{y},\hat{y}\right)-\left(\hat{y},\,A_h\hat{y}\right) &= \sum_n^m(-a_{n-1}y_{n-1}+b_ny_n-a_ny_{n+1})\overline{y}_n+\frac{1}{\alpha}f^{(2)}\overline{g}^{2} \\
&\quad -\sum_n^m(a_{n-1}y_{n-1}+b_n\overline{y}_n+a_n\overline{y}_{n+1})y_n-\frac{1}{\alpha}\overline{f}^{(2)}g^{(2)} \\
&= -a_{n-1}y_{n-1}\overline{y_n}+a_{n-1}y_n\overline{y}_{n-1}-a_my_{m+1}\overline{y}_m+a_my_m\overline{y}_{m+1} \\
&\quad +\frac{1}{\alpha}f^{(2)}\overline{g}^{(2)}-\frac{1}{\alpha}\overline{f}^{(2)}\overline{g}^{(2)} \\
&= \left[y^{(1)},\overline{y}^{(1)}\right]_m-\left[y^{(1)},\overline{y}^{(1)}\right]_{n-1}+\frac{1}{\alpha}\left[f^{(2)}\overline{g}^{(2)}-\overline{f}^{(2)}g^{(2)}\right]
\end{aligned}
\tag{4.58}
$$

$m\to\infty$ ve $n-1\to-\infty$ için,

$$
\begin{aligned}
\left(A_h\hat{y},\hat{y}\right)-\left(\hat{y},\,A_h\hat{y}\right) &= \left[y^{(1)},\overline{y}^{\,(1)}\right]_{\infty}-\left[y^{(1)},\overline{y}^{\,(1)}\right]_{-\infty} \\
&\quad +\frac{1}{\alpha}\left[K_{-\infty}\left(y^{(1)}\right)\overline{K'_{-\infty}\left(y^{(1)}\right)}-K'_{-\infty}\left(y^{(1)}\right)\overline{K_{-\infty}\left(y^{(1)}\right)}\right]
\end{aligned}
\tag{4.59}
$$

bulunur. (4.41)'den dolayı,

$$
\begin{aligned}
\left(A_h\hat{y},\hat{y}\right)-\left(\hat{y},\,A_h\hat{y}\right) &= \left[y^{(1)},\overline{y}^{\,(1)}\right]_{\infty} \\
&= R_1^{\infty}(y^{(1)})R_2^{\infty}(\overline{y}^{(1)})-R_1^{\infty}(\overline{y}^{(1)})R_2^{\infty}(y^{(1)})
\end{aligned}
\tag{4.60}
$$

olur.

$$K_{\infty}\left(y^{(1)}\right)=0 \tag{4.61}$$

$K_{\infty}\left(y^{(1)}\right)$ koşulu sağlanacağından,

$$R_1^{\infty}\left(y^{(1)}\right)=hR_2^{\infty}\left(y^{(1)}\right) \tag{4.62}$$

bulunur.

$$\left(A_h\hat{y},\hat{y}\right)-\left(\hat{y},A_h\hat{y}\right)=hR_2^{\infty}\left(y^{(1)}\right)R_2^{\infty}\overline{(y^{(1)})}-\overline{h}R_2^{\infty}\overline{(y^{(1)})}R_2^{\infty}\left(y^{(1)}\right)$$

$$=\left(h-\overline{h}\right)\left(R_2^{\infty}(y^{(1)})R_2^{\infty}(y^{(1)})\right) \tag{4.63}$$

$$=2i\,\mathrm{Im}\,\mathrm{h}\left|R_2^{\infty}\left(y^{(1)}\right)\right|^2$$

olur. Buradan,

$$\mathrm{Im}\left(A_h\hat{y},\hat{y}\right)=\mathrm{Im}\,\mathrm{h}\left|R_2^{\infty}\left(y^{(1)}\right)\right|^2\geq 0\,,\ (\mathrm{Im}h>0) \tag{4.64}$$

dır. Yani A_h operatörü H 'de disipatiftir.

4.3 A_h Operatörünün Özdeğerleri ve Özvektörleri

$\lambda\in\mathbb{C}$ için,

$$R_1^{\infty}\left(\chi(\lambda)\right)=\left[\chi(\lambda),u\right]_{\infty}=1 \tag{4.65}$$

$$R_2^{\infty}\left(\chi(\lambda)\right)=\left[\chi(\lambda),v\right]_{\infty}=h \tag{4.66}$$

$$R_1^{-\infty}\left(\varphi(\lambda)\right)=\alpha_2-\lambda\alpha_2' \tag{4.67}$$

$$R_2^{-\infty}\left(\varphi(\lambda)\right)=\alpha_1-\lambda\alpha_1' \tag{4.68}$$

koşullarını sağlayan çözümler $\phi(\lambda)$ ve $\chi(\lambda)$ olsun. (4.41)'den bu çözümlerin $-\infty$ 'daki Wronskiyeni olan $\Delta_{-\infty}(\lambda)$,

$$\Delta(\lambda)=\Delta_{-\infty}(\lambda)=K_{-\infty}(\chi(\lambda))-\lambda K'_{-\infty}(\chi(\lambda)) \tag{4.69}$$

dır. (4.42)'den bu çözümlerin $+\infty$ 'daki Wronskiyeni olan $\Delta_{\infty}\left(\lambda\right)$,

$$\Delta(\lambda)=\Delta_{\infty}\left(\lambda\right)=-K_{\infty}(\varphi(\lambda)) \tag{4.70}$$

olarak hesaplanır. [11]

Lemma 4.3.1: (4.35) – (4.37) Sınır değer probleminin özdeğerleri ancak ve ancak $\Delta(\lambda)$ 'nın sıfır yerlerinden ibarettir [9].

$$\left(\Delta(\lambda)=\Delta_{-\infty}(\lambda)=\Delta_{\infty}(\lambda)\right) \tag{4.71}$$

İspat 4.3.1 : λ_0, $\Delta_0(\lambda)$ 'nın bir sıfırı olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$\Delta_0(\lambda_0) = \varphi_{-1}(\lambda_0)\chi_0(\lambda_0) - \varphi_0(\lambda_0)\chi_{-1}(\lambda_0) = 0 \tag{4.72}$$

dır.

$n = 0$ için $\Delta_0(\lambda)$, $\varphi(\lambda_0)$ ve $\chi(\lambda_0)$ vektörlerinin Wronskiyeni olduğundan (4.72) gereği $\varphi(\lambda_0)$ ve $\chi(\lambda_0)$ çözümleri lineer bağımlı olur. Yani,

$$\varphi(\lambda_0) = k\chi(\lambda_0) \tag{4.73}$$

olacak şekilde $k \neq 0$ sabit sayısı bulunur. (4.65) gereği $\varphi(\lambda_0)$ (4.35) – (4.36) sınır değer probleminin $\lambda = \lambda_0$ için bir çözümü olur. Yani $\lambda = \lambda_0$ bir özdeğerdir.

Şimdi bunun tersinin de doğru olduğunu gösterelim. Yani $\lambda = \lambda_0$ özdeğer ise $\Delta_0(\lambda_0) = 0$ ve $\Delta_\infty(\lambda_0)$ olduğunu gösterelim. $\lambda = \lambda_0$ özdeğer için $\Delta_0(\lambda_0) \neq 0$ ve $\Delta_\infty(\lambda_0) \neq 0$ olduğunu kabul edelim. $\Delta_0(\lambda_0) \neq 0$ ve $(\lambda_0) \neq 0$ ise $\varphi(\lambda_0)$ ve $\chi_n(\lambda_0)$ vektörleri lineer bağımsız olur. Buna göre (4.35) denkleminin genel çözümü

$$y(\lambda_0) = c_1(\lambda_0)\varphi(\lambda_0) + c_2\chi(\lambda_0) \tag{4.74}$$

şeklinde yazılabilir. (4.37) sınır koşulu gereği,

$$[y,v]_\infty - h[y,u]_\infty = 0 \tag{4.75}$$

eşitliği sağlanır. Buradan (4.72) koşulu dikkate alınırsa,

$$c_1\left(\varphi_o(\lambda_0) + h\varphi_{-1}(\lambda_0)\right) + c_2\left(\chi_0(\lambda_0) + h\chi_{-1}(\lambda_0)\right) = 0 \tag{4.76}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte $\varphi(\lambda_0)$ çözüm vektörünün (4.41) sınır koşulunu sağladığı göz önüne alınırsa,

$$c_2\left(\chi_0(\lambda_0) + h\chi_{-1}(\lambda_0)\right) = c_2\Delta_0(\lambda_0) = 0 \tag{4.77}$$

bulunur.

Kabul gereği $\Delta_0(\lambda_0)\neq 0$ olduğundan $c_2=0$ olur. (4.42) koşulundan ve $c_2=0$ olmasından,

$$c_1\left\{[\varphi(\lambda_0),v]_\infty\left(\alpha_1-\lambda\alpha_1'\right)-[\varphi(\lambda_0,u)]_\infty\left(\alpha_2-\lambda\alpha_2'\right)\right\}=c_1\Delta_\infty(\lambda_0)=0 \qquad (4.78)$$

dır.

$\Delta_\infty(\lambda_0)\neq 0$ olduğundan $c_1=0$ olur. Sonuç olarak $y(\lambda_0)=0$ olur. Bu λ_0'ın özdeğer olması ile çelişir. Böylece ispat tamamlanır. $\Delta_0(\lambda)$ ve $\Delta_\infty(\lambda)$ fonksiyonlarının sıfırlarını λ_n $(n=0,1,\ldots)$ şeklinde gösterirsek,

$$\hat{\chi}_n=\begin{pmatrix}\chi(\lambda_n)\\ K'_\infty\left(\chi(\lambda_n)\right)\end{pmatrix}\in D\left(A_h\right) \qquad (4.79)$$

vektörleri,

$$A_h\hat{\chi}_n=\lambda_n\hat{\chi}_n \qquad (4.80)$$

eşitliğini sağlar. Yani $\hat{\chi}_n$'ler A_h operatörünün özvektörleridir. $\Delta_0(\lambda)$ ve $\Delta_\infty(\lambda)$ fonksiyonlarının sıfırlarını λ_n $(n=0,1,\ldots)$ şeklinde gösterirsek,

$$\hat{\varphi}_n=\begin{pmatrix}\varphi(\lambda_n)\\ K'_{-\infty}\left(\varphi(\lambda_n)\right)\end{pmatrix}\in D\left(A_h\right) \qquad (4.81)$$

vektörleri,

$$A_h\hat{\phi}_n=\lambda_n\hat{\phi}_n \qquad (4.82)$$

eşitliğini sağlar. Yani $\hat{\phi}_n$'ler A_h operatörünün özvektörleridir.

Tanım 4.3.2: Eğer λ_0 özdeğerine karşılık gelen,

$$\begin{aligned} &\ell(y)_0 = \lambda_0 y_0 \\ &K_{-\infty}(y_0) - \lambda_0 K'_{-\infty}(y_0) = 0 \\ &K_{\infty}(y_0) = 0 \\ &\ell(y_s)_n - \lambda_0 y_s - y_{s-1} = 0 \\ &K_{-\infty}(y_s) - \lambda_0 K'_{-\infty}(y_s) - K'_{-\infty}(y_{s-1}) = 0 \\ &K_{\infty}(y_s) = 0, \qquad s = 1, 2, ..., n \end{aligned} \tag{4.83}$$

şartlarını sağlıyorsa, $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$ vektörler sistemine (4.35) – (4.37) sınır değer probleminin öz ve birleştirilmiş (asosye) vektörler zinciri denir [9].

Lemma 4.3.3: (4.35) – (4.37) sınır değer probleminin özdeğerleri ve A_h disipatif operatörünün özdeğerleri çakışır. Yani, (4.35) – (4.37) sınır değer probleminin λ_0 özdeğerine karşılık gelen her bir özvektörler zinciri ve birleştirilmiş vektörleri, A_h disipatif operatörünün aynı λ_0 özdeğerine karşılık gelen $y_0, y_1, y_2, ..., y_n$ birleştirilmiş vektörler ve özvektörler zincirine karşılık gelir.

Bu durumda,

$$\hat{y}_k = \begin{pmatrix} y_k \\ K'_{\infty}(y_k) \end{pmatrix}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n \tag{4.84}$$

eşitliği sağlanır [9].

İspat 4.3.3: Eğer,

$$\begin{aligned} &\hat{y}_0 \in D(A_h) \\ &A_h \hat{y}_0 = \lambda_n \hat{y}_0 \end{aligned} \tag{4.85}$$

ise,

$$-\lambda_0 K'_{\infty}(y_0) = 0 \tag{4.86}$$

eşitlikleri sağlanır. Yani (4.35) – (4.37) sınır değer probleminin özvektörü y_0 'dır.

Tersine olarak, eğer (4.83) şartları varsa,

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ K'_{\infty}(y_0) \end{pmatrix} = \hat{y}_0 \in D(A_h)$$
$$A_h \hat{y}_0 = \lambda_n \hat{y}_0 \tag{4.87}$$

dır. Yani $\hat{y}_0$, A_h operatörünün özvektörüdür.

Ayrıca, eğer A_h operatörünün λ_0 özdeğerine karşılık gelen $y_0, y_1, y_2, ..., y_n$ birleştirilmiş vektörleri ve özvektörler zinciri ise,

$$\hat{y}_k \in D(A_h) \quad (k = 0,1,2,...,n) \tag{4.88}$$

ve

$$A_h \hat{y}_0 = \lambda_0 \hat{y}_0$$
$$A_h \hat{y}_s = \lambda_0 \hat{y}_s + \hat{y}_{s-1} \qquad s = 0,1,2,...,n \tag{4.89}$$

şartları ile birlikte (4.83) eşitliğini elde ederiz. Burada $y_0, y_1, y_2, ..., y_n$ 'ler $\hat{y}_0, \hat{y}_1, \hat{y}_2, ..., \hat{y}_n$ vektörlerinin birinci bileşenleridir.

Eğer, (4.35) – (4.37) problemine karşılık gelen $y_0, y_1, y_2, ..., y_n$ bileşenleri,

$$\hat{y}_k = \begin{pmatrix} y_k \\ K'_{\infty}(y_k) \end{pmatrix} \in D(A_h), \qquad k = 0,1,2,...,n \tag{4.90}$$

(4.85)'de yerine yazılırsa, (4.89) elde edilir.

Yani (4.35) – (4.37) sınır değer probleminin özdeğerleri ve A_h disipatif operatörünün özdeğerleri çakışır.

5. BÖLÜM

SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu çalışmada fark denklemleri hakkında bilgi verildikten sonra Fark Sturm-Liouville problemi olarak adlandırılan sınır değer problemi incelenmiştir. Maksimal disipatif operatörü oluşturulmuş, problemin özdeğer ve özvektörleri incelenmiştir. Fark Sturm-Liouville sınır değer problemi ve disipatif operatörün özvektörler ve asosye vektörler sistemi incelenmiştir.

Sonuç olarak, Fark Sturm-Liouville sınır değer problemi ile A_h disipatif operatörün özvektörlerinin çakıştığı görülmüştür. Elde edilen sonuçlar giriş bölümünde de bahsedildiği gibi bir çok fiziksel probleme uygulanabilir.

KAYNAKLAR

1. Bozkurt, D., ve Türen, B., Lineer Cebir, Selçuk Üniversitesi Yayınları, Konya, 2000.

2. Naimark, M.A., Linear Differential Operators, 2nd ed., Nauka Moskow, 1968, English transl., of 1st ed. Vols. 1, 2, Ungar, New York, 1969.

3. Kostyuchenko, A.G. and Sargsyan, I.S., Distribution of Eigenvalues, Nauka, Moskow (Russian), 1979.

4. Kreyszig, E., Introductory Functional Analysis with Applications, John Willey and Sons, New York, 1978.

5. Kuzhel, A.V., Characteristics Functions and Models of Nonselfadjoint Operators, Kluwer Academic Publisher, Boston, London, 1996.

6. Gorbachuk, M.L. and Gorbachuk, V.I., Boundary Value Problems for Operator Differential Equations, Naukova Dumka, Kiev, 1984; English transl. Birkhauser Verlag, 1991.

7. Akhiezer, N.I., and Glazman, I.M., Theory of Linear Operators in Hilbert Space, New York, 1963.

8. Mickens, R.E., Difference Equations: Theory and Applications Van Nostrand Reinhold, New York, 1990.

9. Eryılmaz, A., Fark Operatörlerinin Spektral Teorisi, Doktora Tezi, Süleyman Demirel Üniversitesi, Isparta, 2006.

10. Allahverdiev, B.P., Dissipative Second-Order Difference Operators with General Boundary Conditions, Journal of Difference Equations and Applications, Vol. 10: 1-16, 2004.

11. Welstead, S, T., Boundary Conditions at Infinity for Difference Equations of Limit Circle Type, J.Math. Anal. Appl. 89: 442-461, 1982.

12. Berezanski, Yu. M., Expansion in Eigenfunctions of Selfadjoint Operators, Naukova Dumka, Kiev, English transl. Amer. Math Soc., 1968.

13. Clark, S.L., A Spectral Analysis for Self-Adjoint Operators Generated a Class of Second Order Difference Equations, J.Math. Anal. Appl. 197, 267-285, 1996.

14. Fulton, C.T., Two-Point Boundary Value Problems with Eigenvalues parameter Contained in the Boundary Conditions, Proc. Royal Soc., Edinburg, 77A: 293-308, 1977.

ÖZGEÇMİŞ

Musa BAŞBÜK 1976 yılında Nevşehir'de doğdu. İlk ve orta öğrenimini Nevşehir'de tamamladı. 1987 yılında Nevşehir Anadolu Lisesini kazandı. 1995'de kazandığı Orta Doğu Teknik Üniversitesi Eğitim Fakültesi Orta Öğretim Matematik Öğretmenliği Bölümünden 1999 yılında mezun oldu. 1999 yılında Milli Eğitim Bakanlığında öğretmen olarak göreve başladı ve halen Nevşehir 2000 Evler Anadolu Lisesinde matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır. 2008 yılında Nevşehir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalında Yüksek Lisansa başladı. Evli olup bir çocuk babasıdır.

Adres : 2000 Evler Anadolu Lisesi / NEVŞEHİR
Telefon : 0 384 2151144
E-posta : basbukmusa@yahoo.com