T.C.
NEVŞEHİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER VE LİNEER OLMAYAN DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ İÇİN TAYLOR MATRİS YÖNTEMİ

Tezi Hazırlayan
Halil ZEYBEK

Tezi Yöneten
Yrd.Doç.Dr. İhsan Timuçin DOLAPCİ

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Mayıs 2011
NEVŞEHİR

Yrd.Doç.Dr İhsan Timuçin DOLAPCİ danışmanlığında **Halil ZEYBEK** tarafından hazırlanan **"Lineer ve Lineer Olmayan Diferansiyel Denklem Sistemlerinin Yaklaşık Çözümü İçin Taylor Matris Yöntemi"** adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

11.05.2011

JÜRİ :

Başkan : Prof.Dr. İhsan SOLAK

Üye : Doç.Dr. Nazmiye KERVAN

Üye :Yrd.Doç.Dr. İhsan Timuçin DOLAPCİ(Danışman)

ONAY :

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulunun 24.05.2011 tarih ve 2011/20-1 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

24./05/2011

Doç.Dr. Selçuk KERVAN
Enstitü Müdürü

T.C. NEVŞEHİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

TEŞEKKÜR

"Lineer ve Lineer Olmayan Diferansiyel Denklem Sistemlerinin Yaklaşık Çözümü İçin Taylor Matris Yöntemi" konulu tez çalışmasının seçiminde, yürütülmesinde, sonuçlandırılmasında ve sonuçlarının değerlendirilmesinde maddi ve manevi destek ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam sayın Yrd.Doç.Dr. İhsan Timuçin DOLAPCİ' ya teşekkür ederim.

LİNEER VE LİNEER OLMAYAN DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ İÇİN TAYLOR MATRİS YÖNTEMİ

Halil ZEYBEK
Nevşehir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Yüksek Lisans Tezi, Mayıs 2011
Tez Danışmanı: Yrd.Doç.Dr. İhsan Timuçin DOLAPCİ

ÖZET

Bu tez çalışmasında, lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklem sistemlerinin yaklaşık çözümü için Taylor matris yöntemi önerilmektedir. Bu yöntem temel olarak diferansiyel denklem sistemlerindeki fonksiyonların Taylor serisine açılımına ve bu açılımların matris formatının denklem sistemlerinde yerine yazılmasına bağlıdır. Bu şekilde elde edilen matris denklemleri Mathematica da çözülür ve bilinmeyen Taylor katsayıları yaklaşık olarak bulunur.

Bu yöntem ile stiff sistemler gibi lineer ve lineer olmayan çeşitli türlerden diferansiyel denklem sistem örnekleri çözülerek, denklem sistemlerinin yaklaşık çözümleri elde edilmiştir. Elde edilen bu yaklaşık çözümler ile denklem sistemlerinin diğer çözüm yöntemlerinden elde edilen yaklaşık veya tam çözümleri karşılaştırılmıştır. Sonuç olarak, bu karşılaştırmada bize önerilen yöntemin doğruluğunu ve güvenilirliğini kanıtlamaktadır.

Anahtar Kelimeler: Taylor matris yöntemi; Taylor sıralama yöntemi; Taylor polinomları ve serileri; lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklem sistemleri; stiff diferansiyel denklem sistemi.

TAYLOR MATRIX METHOD FOR THE APPROXIMATE SOLUTION OF LINEAR AND NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATION SYSTEMS

Halil ZEYBEK
Nevşehir University, Graduate School of Natural and Applied Sciences
M.Sc. Thesis, May 2011
Thesis Supervisor: Assist.Prof.Dr. İhsan Timuçin DOLAPCİ

ABSTRACT

In this thesis study, Taylor matrix method for the approximate solution of linear and nonlinear differential equation systems is proposed. This method is essentially based on the expansion of the functions in differential equation systems to Taylor series and substituting the matrix forms of these expansions into the given equation systems. Matrix equations obtained are solved in Mathematica and the unknown Taylor coefficients are found approximately.

Using this method, samples from various linear and nonlinear differential equation systems as well as stiff systems are solved and approximate solutions of equation systems are obtained. These approximate solutions are then compared with approximate or exact solutions obtained from other solution methods of equation systems. As a result, this comparison demonstrates that the proposed method is accurate and reliable.

Keywords: Taylor matrix method; Taylor collocation method; Taylor polynomial and series; linear and nonlinear differential equation systems; stiff differential equation system.

İÇİNDEKİLER

KISALTMALAR VE SİMGELER

Sembol	Açıklamalar
$y^{(t)}(c)$	Taylor serisinin katsayıları.
W	Denklem sisteminin lineer kısmının genişletilmiş matrisi.
C	Denklem sisteminin lineer olmayan kısmının genişletilmiş matrisi.
G	Denklem sisteminin sağ tarafının genişletilmiş matrisi.
W^*	Denklem sisteminin lineer kısmının koşulları kullanılmış yeni genişletilmiş matrisi.
C^*	Denklem sisteminin lineer olmayan kısmının koşulları kullanılmış yeni genişletilmiş matrisi.
G^*	Denklem sisteminin sağ tarafının koşulları kullanılmış yeni genişletilmiş matrisi.
$L_i[y_1, y_2, \dots, y_n]$	İ. diferansiyel denklemin lineer kısmı.
$N_i[y_1, y_2, \dots, y_n]$	İ. diferansiyel denklemin lineer olmayan kısmı.

TABLOLAR LİSTESİ

1. BÖLÜM

GENEL BİLGİLER

1.1 Giriş

Uygulamalı bilimlerin birçok alanında diferansiyel denklem sistemleri karşımıza çıkmaktadır. Diferansiyel denklem sistemlerinin varsa tam analitik çözümlerini bulmak en iyi tercihtir. Bunun mümkün olmadığı durumlarda da yaklaşık analitik çözümleri bulmak tercih edilir. Şayet bu da mümkün olmazsa, analitik olarak çözümü zor veya olanaksız olan problemlerin çözümlenebilmesi için uygun ve en iyi yaklaşım yöntemi olan nümerik yöntemlerle çözümleri elde etmek kaçınılmaz hale gelir. Bazı durumlarda da kısmen analitik kısmen de nümerik yöntemlerin karışımını uygulamak gerekebilir.

Nümerik yöntemler çok önceden beri matematikçiler tarafından kullanıla gelmiştir. 1950 den sonra gelişmeye başlayan bilgisayar ile birlikte daha yaygın olarak kullanılmaya başlanmıştır. Bu çalışmada amaç nümerik bir yöntem olan Taylor matris yöntemini diferansiyel denklem sistemlerine uygulamaktır. Diferansiyel denklem sistemleri daha önce çeşitli nümerik yöntemlerle çözülmüştür. Stiff diferansiyel denklem sistemlerinin çözümü için 1986'da Lambert tarafından Euler yöntemi verilmiştir [1]. 1993'de Burrden ve arkadaşları tarafından Euler yöntemi, Taylor yöntemi ve Runge-Kutta yöntemi diferansiyel denklem sistemlerinin çözümü için nümerik yöntemlere giriş olarak verilmiştir [2]. Güzel ve arkadaşları [4] tarafından stiff sistemlerin çözümü için kuvvet serisi yöntemi verilmiştir. Kaya [3], Adomian ve arkadaşları, Biazar ve arkadaşları [6-9] tarafından diferansiyel denklem sistemlerinin çözümü için Adomian ayrışım yöntemi verilmiştir. He ve arkadaşları, Biazar ve arkadaşları, Tatari ve arkadaşları tarafından Varyasyon İterasyon yöntemi verilmiştir [10-20]. Zhou, Abdel-Halim Hassan, Thongmoon ve arkadaşları [21-23] diferansiyel denklem sistemlerinin çözümü için diferansiyel dönüşüm yöntemini sunmuşlardır.

Taylor matris ve Taylor sıralama yöntemi daha önce birçok araştırmacı tarafından diferansiyel ve integral denklemlerin çözümü için kullanılmıştır. 1989'da Kanwal ve Liu integral denklemlerin çözümü için Taylor açılımı yaklaşımını vermiştir [24]. 1994' den bugüne kadar da Taylor matris ve Taylor sıralama yöntemi Sezer ve arkadaşları, Nas ve arkadaşları, Yalçınbaş ve arkadaşları, Karamete ve arkadaşları, Keşan, Gülsu ve arkadaşları, Kurt ve arkadaşları, Çenesiz ve arkadaşları, Sorkun ve arkadaşları tarafından lineer diferansiyel, integral, integro diferansiyel, fark, integro fark, lineer homojen olmayan fark, diferansiyel fark, Riccati, lineer karmaşık diferansiyel, Bagley-Torvik denklemlerinin ve integro diferansiyel denklem sistemlerinin, tek dereceli freedom sistemlerinin ve Volterra integral denklem sistemlerinin çözümü için verilmiştir [5], [25-43].

Bu çalışmada ise Taylor matris yöntemi daha önce çeşitli nümerik yöntemlerle çözülmüş olan birinci mertebeden lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklem sistemlerine uygulanmıştır. Bölüm 1'de diferansiyel denklem sisteminin genel hali ve yöntem için genel bilgiler verilmiştir. Bölüm 2'de yöntemin birinci mertebeden lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklem sistemlerine uygulanması teorik olarak anlatılmıştır. Bölüm 3'de ise teorik olarak anlatılan yöntem, sayısal örneklere uygulanmış ve denklem sistemlerinin çözümlerinin diğer yöntemlerden elde edilen çözümleriyle karşılaştırılması ekler kısmında tablo halinde verilmiştir.

1.2 Problemin Tanıtımı

Bu çalışmada birinci mertebeden,

$$
\begin{aligned}
A_1(x)y_1'(x) &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\
A_2(x)y_2'(x) &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\
\vdots \qquad &\qquad \vdots \\
A_n(x)y_n'(x) &= f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

şeklindeki diferansiyel denklem sistemi ele alınacaktır. Denklem (1.1) ile verilen diferansiyel denklem sistemi, yöntemin anlatımına kolaylık sağlaması açısından, $L_i[y_1, y_2, \dots, y_n]$ diferansiyel denklemin lineer kısmı, $N_i[y_1, y_2, \dots, y_n]$ diferansiyel denklemin lineer olmayan kısmı ve $G_i(x)$ diferansiyel denklemin homojen olmayan terimi olmak üzere,

$$A_i(x)y_i^{'}(x) + L_i[y_1, y_2, \dots, y_n] + N_i[y_1, y_2, \dots, y_n] = G_i(x) \quad ,$$

$$i = 1,2, \dots, n \quad , \quad a \leq x \leq b \tag{1.2}$$

biçiminde ele alınacak ve başlangıç koşulları,

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} y_j(x_0) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \beta_{ijk} \, y_j(x_0) y_k(x_0) = \lambda_i \quad ,$$

$$i = 1,2, \dots, n \quad , \quad a \leq x_0 \leq b \tag{1.3}$$

şeklinde olan diferansiyel denklem sistemlerinin Taylor matris yöntemiyle yaklaşık çözümünü bulmaya çalışacağız.

Burada, x bağımsız değişken ve $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ ’ler de n tane bilinmeyen fonksiyondur. Ayrıca,

$$L_i[y_1, y_2, \dots, y_n] = \sum_{j=1}^{n} B_{ij}(x) y_j(x) \quad ; \quad i = 1,2, \dots, n \tag{1.4}$$

$$N_i[y_1, y_2, \dots, y_n] = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} C_{ijk}(x) \, y_j(x) y_k(x) \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{1.5}$$

olarak alınmıştır.

1.3 Bir Fonksiyonun Taylor Serisine Açılımı

Bir $y(x)$ fonksiyonunun $x = c$ noktası civarındaki Taylor serisine açılımı,

$$y(x) = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{y^{(t)}(c)(x-c)^t}{t!} \quad ; \quad a \leq x \leq b \quad , \quad a \leq c \leq b \tag{1.6}$$

şeklindedir. Eğer fonksiyonu $x = 0$ noktası civarındaki Maclaurin serisine açarsak,

$$y(x) = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{y^{(t)}(0)x^t}{t!} \tag{1.7}$$

şeklinde olur. Fonksiyonun Taylor serisine açılımı, sonlu N sayısında kesilirse, seri açılımı fonksiyona,

$$y(x) \cong \sum_{t=0}^{N} \frac{y^{(t)}(c)(x-c)^t}{t!} \tag{1.8}$$

olarak yakınsar. Burada $y^{(t)}(c)$' ler $(t = 0, 1, \dots, N)$ bilinmeyen Taylor katsayılarıdır.

1.4 Leibnitz Türev Kuralı

$u(x)$ ve $v(x)$ iki ayrı fonksiyon olmak üzere, $u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonlarının çarpımının x' e göre yüksek mertebeden türevinin formülü Leibnitz türev kuralıyla,

$$[u(x)v(x)]_x^{(t)} = \sum_{m=0}^{t} \binom{t}{m} u^{(t-m)}(x)v^{(m)}(x) \tag{1.9}$$

olarak yazılabilir.

2. BÖLÜM

LİNEER VE LİNEER OLMAYAN DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ İÇİN TAYLOR MATRİS YÖNTEMİ

Burada amaç denklem (1.2) ile verilen diferansiyel denklem sistemindeki ve denklem (1.3) ile verilen başlangıç koşullarındaki fonksiyonların denklem (1.8)'deki Taylor serisine açılımını matris olarak yazıp, denklem (1.2) diferansiyel denklem sistemini ve denklem (1.3) başlangıç koşullarını matris denklemine dönüştürmektir. Ardından, matris denkleminden bilinmeyen Taylor katsayılarını bulup, denklem (1.2) diferansiyel denklem sisteminin, denklem (1.3) başlangıç koşulları altında denklem (1.8) ile verilen yaklaşık çözümünü bulmaktır.

2.1 Diferansiyel Denklem Sisteminin Matris Denklemine Dönüştürülmesi

Bu çalışmada ele alacağımız denklem sisteminde $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ gibi n tane bilinmeyen fonksiyon olacağı için denklem (1.8) açılımı,

$$y_j(x) \cong \sum_{t=0}^{N} \frac{y_j{}^{(t)}(c)(x-c)^t}{t!} \quad ; \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{2.1}$$

olarak alınacaktır. Şimdi denklem (1.2) diferansiyel denklem sistemindeki fonksiyonların denklem (2.1) Taylor serisine açılımını matris olarak yazalım;

$$\boldsymbol{X} = [1 \quad (x-c) \quad (x-c)^2 \cdots (x-c)^N]_{1\times(N+1)} \quad ,$$

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \frac{1}{0!} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{1}{1!} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2!} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{N!} \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)} \quad , \quad \boldsymbol{Y_j} = \begin{bmatrix} y_j{}^{(0)}(c) \\ y_j{}^{(1)}(c) \\ y_j{}^{(2)}(c) \\ \vdots \\ y_j{}^{(N)}(c) \end{bmatrix}_{(N+1)\times 1} \tag{2.2}$$

olmak üzere,

$$\left[y_j(x)\right] = \boldsymbol{XMY_j} \tag{2.3}$$

biçiminde matris olarak yazılabilir.

Denklem(1.2) ile verilen denklem sistemindeki $B_{ij}(x)y_j(x)$ fonksiyonunu ele alırsak, bu fonksiyonun, $x = c$ noktası civarındaki, sonlu N sayısında kesilmiş Taylor serisine açılımı,

$$B_{ij}(x)y_j(x) = \sum_{t=0}^{N} \frac{\left[B_{ij}(x)y_j(x)\right]_{x=c}^{(t)}(x-c)^t}{t!} \tag{2.4}$$

biçimindedir. Leibnitz'in kuralı kullanılarak,

$$\left[B_{ij}(x)y_j(x)\right]_{x=c}^{(t)} = \sum_{m=0}^{t} \binom{t}{m} B_{ij}{}^{(t-m)}(c)y_j{}^{(m)}(c) \tag{2.5}$$

olarak yazılabilir. Denklem (2.5) ile verilen ifade denklem (2.4) açılımında yerine yazılırsa,

$$B_{ij}(x)y_j(x) = \sum_{t=0}^{N}\sum_{m=0}^{t} \frac{\binom{t}{m}B_{ij}^{(t-m)}(c)y_j^{(m)}(c)(x-c)^t}{t!} \tag{2.6}$$

olarak elde edilir. Denklem (2.6) ile verilen açılımı matris olarak yazacak olursak;

$$\boldsymbol{B_{ij}} = \begin{bmatrix} \frac{B_{ij}{}^{(0)}(c)}{0!\,0!} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{B_{ij}{}^{(1)}(c)}{1!\,0!} & \frac{B_{ij}{}^{(0)}(c)}{0!\,1!} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{B_{ij}{}^{(2)}(c)}{2!\,0!} & \frac{B_{ij}{}^{(1)}(c)}{1!\,1!} & \frac{B_{ij}{}^{(0)}(c)}{0!\,2!} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{B_{ij}{}^{(N)}(c)}{N!\,0!} & \frac{B_{ij}{}^{(N-1)}(c)}{(N-1)!\,1!} & \frac{B_{ij}{}^{(N-2)}(c)}{(N-2)!\,2!} & \cdots & \frac{B_{ij}{}^{(0)}(c)}{0!\,N!} \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)} \tag{2.7}$$

olmak üzere,

$$\left[B_{ij}(x)y_j(x)\right] = \boldsymbol{XB_{ij}Y_j} \tag{2.8}$$

biçiminde matris olarak yazılabilir.

Denklem (1.2) ile verilen denklem sistemindeki $A_i(x)y_i^{'}(x)$ fonksiyonunu ele alalım, bu fonksiyonun, $x = c$ noktası civarındaki, sonlu N sayısında kesilmiş Taylor serisine açılımı benzer yolla,

$$A_i(x)y_i^{'}(x) = \sum_{t=0}^{N}\sum_{m=0}^{t} \frac{\binom{t}{m}A_i^{(t-m)}(c)y_i^{(m+1)}(c)(x-c)^t}{t!} \tag{2.9}$$

olarak yazılabilir. Denklem (2.9) ile verilen açılımı matris olarak yazacak olursak,

$$\boldsymbol{A_i} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{A_i^{(0)}(c)}{0!\,0!} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dfrac{A_i^{(1)}(c)}{1!\,0!} & \dfrac{A_i^{(0)}(c)}{0!\,1!} & \dots & 0 \\ 0 & \dfrac{A_i^{(2)}(c)}{2!\,0!} & \dfrac{A_i^{(1)}(c)}{1!\,1!} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dfrac{A_i^{(N)}(c)}{N!\,0!} & \dfrac{A_i^{(N-1)}(c)}{(N-1)!\,1!} & \dots & \dfrac{A_i^{(1)}(c)}{1!\,(N-1)!} \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)} \tag{2.10}$$

olmak üzere,

$$[A_i(x)y_i^{'}(x)] = \boldsymbol{XA_iY_i} \tag{2.11}$$

biçiminde matris olarak yazılabilir.

Şimdi de denklem (1.2) ile verilen denklem sistemindeki $C_{ijk}(x)y_j(x)y_k(x)$ fonksiyonunu ele alalım;

$$Y_{jk}(x) = y_j(x)y_k(x) \tag{2.12}$$

olmak üzere, bu fonksiyonun, $x = c$ noktası civarındaki, sonlu N sayısında kesilmiş Taylor serisine açılımı benzer yolla,

$$C_{ijk}(x)Y_{jk}(x) = \sum_{t=0}^{N}\sum_{m=0}^{t} \frac{\binom{t}{m}C_{ijk}^{(t-m)}(c)Y_{jk}^{(m)}(c)(x-c)^t}{t!} \tag{2.13}$$

olarak yazılabilir. Denklem (2.13) ile verilen açılımı matris olarak yazacak olursak,

$$\boldsymbol{C_{ijk}} = \begin{bmatrix} \frac{C_{ijk}{}^{(0)}(c)}{0!\,0!} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{C_{ijk}{}^{(1)}(c)}{1!\,0!} & \frac{C_{ijk}{}^{(0)}(c)}{0!\,1!} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{C_{ijk}{}^{(2)}(c)}{2!\,0!} & \frac{C_{ijk}{}^{(1)}(c)}{1!\,1!} & \frac{C_{ijk}{}^{(0)}(c)}{0!\,2!} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{C_{ijk}{}^{(N)}(c)}{N!\,0!} & \frac{C_{ijk}{}^{(N-1)}(c)}{(N-1)!\,1!} & \frac{C_{ijk}{}^{(N-2)}(c)}{(N-2)!\,2!} & \cdots & \frac{C_{ijk}{}^{(0)}(c)}{0!\,N!} \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)},$$

$$\boldsymbol{Y_{jk}} = \begin{bmatrix} Y_{jk}^{(0)}(c) \\ Y_{jk}^{(1)}(c) \\ Y_{jk}^{(2)}(c) \\ \vdots \\ Y_{jk}^{(N)}(c) \end{bmatrix}_{(N+1)\times 1} \tag{2.14}$$

olmak üzere,

$$\left[C_{ijk}(x)y_j(x)y_k(x)\right] = \left[C_{ijk}(x)Y_{jk}(x)\right] = \boldsymbol{XC_{ijk}Y_{jk}} \tag{2.15}$$

biçiminde matris olarak yazılabilir.

Son olarak denklem (1.2) ile verilen denklem sistemindeki $G_i(x)$ fonksiyonunu ele alalım, bu fonksiyonun, $x = c$ noktası civarındaki, sonlu N sayısında kesilmiş Taylor serisine açılımı,

$$G_i(x) = \sum_{t=0}^{N} \frac{G_i^{(t)}(c)(x-c)^t}{t!} \tag{2.16}$$

olarak yazılabilir. Denklem (2.16) ile verilen açılımı matris olarak yazacak olursak,

$$\boldsymbol{G_i} = \begin{bmatrix} G_i^{(0)}(c) \\ G_i^{(1)}(c) \\ G_i^{(2)}(c) \\ \vdots \\ G_i^{(N)}(c) \end{bmatrix}_{(N+1)\times 1} \tag{2.17}$$

olmak üzere,

$$[G_i(x)] = \boldsymbol{XMG_i} \tag{2.18}$$

biçiminde matris olarak yazılabilir [38].

Denklem (1.2) diferansiyel denklem sistemindeki fonksiyonların, elde edilen denklem (2.8) , denklem (2.11) , denklem (2.15) ve denklem (2.18) ile verilen matris gösterimleri, denklem (1.2) diferansiyel denklem sisteminde yerine yazılarak,

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{XA_1Y_1 + XB_{11}Y_1 + XB_{12}Y_2 + \cdots + XB_{1n}Y_n + XC_{111}Y_{11}} \\
\boldsymbol{+XC_{112}Y_{12} + \cdots + XC_{1nn}Y_{nn} = XMG_1} \\
\boldsymbol{XA_2Y_2 + XB_{21}Y_1 + XB_{22}Y_2 + \cdots + XB_{2n}Y_n + XC_{211}Y_{11}} \\
\boldsymbol{+XC_{212}Y_{12} + \cdots + XC_{2nn}Y_{nn} = XMG_2} \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
\boldsymbol{XA_nY_n + XB_{n1}Y_1 + XB_{n2}Y_2 + \cdots + XB_{nn}Y_n + XC_{n11}Y_{11}} \\
\boldsymbol{+XC_{n12}Y_{12} + \cdots + XC_{nnn}Y_{nn} = XMG_n}
\end{gathered} \tag{2.19}$$

matris denklem sistemi elde edilir. Denklem (2.19) matris denklem sistemini daha basit olarak,

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{X(A_1Y_1 + B_{11}Y_1 + B_{12}Y_2 + \cdots + B_{1n}Y_n + C_{111}Y_{11}} \\
\boldsymbol{+C_{112}Y_{12} + \cdots + C_{1nn}Y_{nn}) = X(MG_1)} \\
\boldsymbol{X(A_2Y_2 + B_{21}Y_1 + B_{22}Y_2 + \cdots + B_{2n}Y_n + C_{211}Y_{11}} \\
\boldsymbol{+C_{212}Y_{12} + \cdots + C_{2nn}Y_{nn}) = X(MG_2)} \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
\boldsymbol{X(A_nY_n + B_{n1}Y_1 + B_{n2}Y_2 + \cdots + B_{nn}Y_n + C_{n11}Y_{11}} \\
\boldsymbol{+C_{n12}Y_{12} + \cdots + C_{nnn}Y_{nn}) = X(MG_n)}
\end{gathered} \tag{2.20}$$

şeklinde yazabiliriz. Denklem (2.20) matris denklem sistemindeki $\boldsymbol{X}$ ’leri sadeleştirirsek,

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{A_1Y_1+B_{11}Y_1+B_{12}Y_2+\cdots+B_{1n}Y_n+C_{111}Y_{11}} \\
&\qquad\qquad\boldsymbol{+C_{112}Y_{12}+\cdots+C_{1nn}Y_{nn}=MG_1} \\
&\boldsymbol{A_2Y_2+B_{21}Y_1+B_{22}Y_2+\cdots+B_{2n}Y_n+C_{211}Y_{11}} \\
&\qquad\qquad\boldsymbol{+C_{212}Y_{12}+\cdots+C_{2nn}Y_{nn}=MG_2} \\
&\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\
&\boldsymbol{A_nY_n+B_{n1}Y_1+B_{n2}Y_2+\cdots+B_{nn}Y_n+C_{n11}Y_{11}} \\
&\qquad\qquad\boldsymbol{+C_{n12}Y_{12}+\cdots+C_{nnn}Y_{nn}=MG_n}
\end{aligned} \tag{2.21}$$

matris denklem sistemi elde edilir. Denklem (2.21)'deki matris yapısını daha basit bir hale getirmek istersek;

$$\boldsymbol{W}=\begin{bmatrix} A_1+B_{11} & B_{12} & B_{13} & \dots & B_{1n} \\ B_{21} & A_2+B_{22} & B_{23} & \dots & B_{2n} \\ B_{31} & B_{32} & A_3+B_{33} & \dots & B_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{n1} & B_{n2} & B_{n3} & \dots & A_n+B_{nn} \end{bmatrix}_{n(N+1)\times n(N+1)} ,$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} C_{111} & \dots & C_{11n} & C_{121} & \dots & C_{12n} & \dots & C_{1n1} & \dots & C_{1nn} \\ C_{211} & \dots & C_{21n} & C_{221} & \dots & C_{22n} & \dots & C_{2n1} & \dots & C_{2nn} \\ C_{311} & \dots & C_{31n} & C_{321} & \dots & C_{32n} & \dots & C_{3n1} & \dots & C_{3nn} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ C_{n11} & \dots & C_{n1n} & C_{n21} & \dots & C_{n2n} & \dots & C_{nn1} & \dots & C_{nnn} \end{bmatrix}_{n(N+1)\times n^2(N+1)} ,$$

$$\overline{\boldsymbol{Y}}=[Y_{11} \quad Y_{12} \quad \cdots \quad Y_{1n} \quad Y_{21} \quad Y_{22} \quad \cdots \quad Y_{2n} \quad \cdots \quad Y_{n1} \quad Y_{n2} \quad \cdots \quad Y_{nn}]^T{}_{n^2(N+1)\times 1} ,$$

$$\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}_{n(N+1)\times 1} , \quad \boldsymbol{G}=\begin{bmatrix} MG_1 \\ MG_2 \\ \vdots \\ MG_n \end{bmatrix}_{n(N+1)\times 1} \tag{2.22}$$

olmak üzere,

$$\boldsymbol{WY+C\overline{Y}=G} \tag{2.23}$$

olur. Denklem (2.23) matris denklemi denklem (1.2) denklem sisteminin temel matris bağıntısıdır.

Bu matris denkleminin genişletilmiş matris formu,

$$\boldsymbol{W}=[w_{i,j}]=\begin{bmatrix} w_{1,1} & w_{1,2} & \cdots & w_{1,n(N+1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_{(N+1)-1,1} & w_{(N+1)-1,2} & \cdots & w_{(N+1)-1,n(N+1)} \\ w_{(N+1)+1,1} & w_{(N+1)+1,2} & \cdots & w_{(N+1)+1,n(N+1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_{2(N+1)-1,1} & w_{2(N+1)-1,2} & \cdots & w_{2(N+1)-1,n(N+1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_{(n-1)(N+1)+1,1} & w_{(n-1)(N+1)+1,2} & \cdots & w_{(n-1)(N+1)+1,n(N+1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_{n(N+1)-1,1} & w_{n(N+1)-1,2} & \cdots & w_{n(N+1)-1,n(N+1)} \\ w_{(N+1),1} & w_{(N+1),2} & \cdots & w_{(N+1),n(N+1)} \\ w_{2(N+1),1} & w_{2(N+1),2} & \cdots & w_{2(N+1),n(N+1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_{n(N+1),1} & w_{n(N+1),2} & \cdots & w_{n(N+1),n(N+1)} \end{bmatrix}_{n(N+1)\times n(N+1)}$$

$$; \quad i,j=1,2,\ldots,n(N+1)$$

$$\boldsymbol{C}=[c_{i,j}]=\begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,n^2(N+1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{(N+1)-1,1} & c_{(N+1)-1,2} & \cdots & c_{(N+1)-1,n^2(N+1)} \\ c_{(N+1)+1,1} & c_{(N+1)+1,2} & \cdots & c_{(N+1)+1,n^2(N+1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{2(N+1)-1,1} & c_{2(N+1)-1,2} & \cdots & c_{2(N+1)-1,n^2(N+1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{(n-1)(N+1)+1,1} & c_{(n-1)(N+1)+1,2} & \cdots & c_{(n-1)(N+1)+1,n^2(N+1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n(N+1)-1,1} & c_{n(N+1)-1,2} & \cdots & c_{n(N+1)-1,n^2(N+1)} \\ c_{(N+1),1} & c_{(N+1),2} & \cdots & c_{(N+1),n^2(N+1)} \\ c_{2(N+1),1} & c_{2(N+1),2} & \cdots & c_{2(N+1),n^2(N+1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n(N+1),1} & c_{n(N+1),2} & \cdots & c_{n(N+1),n^2(N+1)} \end{bmatrix}_{n(N+1)\times n^2(N+1)},$$

$$; \quad i=1,2,\ldots,n(N+1) \quad ; \quad j=1,2,\ldots,n^2(N+1)$$

$$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}\frac{G_1^{(0)}(c)}{0!} & \cdots & \frac{G_1^{(N-1)}(c)}{(N-1)!} & \cdots & \frac{G_n^{(0)}(c)}{0!} & \cdots & \frac{G_n^{(N-1)}(c)}{(N-1)!} & \frac{G_1^{(N)}(c)}{N!} & \cdots & \frac{G_n^{(N)}(c)}{N!}\end{bmatrix}^T_{n(N+1)\times 1} \tag{2.24}$$

olarak yazılmak üzere,

$$[\boldsymbol{W}\,;\boldsymbol{C}\,;\boldsymbol{G}] \tag{2.25}$$

şeklinde yazılabilir.

2.2 Başlangıç Koşullarının Matris Denklemine Dönüştürülmesi

Şimdi,

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} y_j(x_0) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \beta_{ijk}\, y_j(x_0) y_k(x_0) = \lambda_i \quad , \quad i = 1,2,\dots,n \quad , \quad a \le x_0 \le b$$

başlangıç koşullarını ele alalım. Ele aldığımız bu başlangıç koşullarındaki fonksiyonları matris formunda yazalım;

Denklem (2.1)'de $x = x_0$ noktasında $y_j(x_0)$ fonksiyonunun seri açılımı,

$$y_j(x_0) \cong \sum_{t=0}^{N} \frac{y_j^{(t)}(c)(x_0 - c)^t}{t!} \quad ; \quad j = 1,2,\dots,n \tag{2.26}$$

şeklindedir. Bu serinin matris formu,

$$[y_j(x_0)] = \boldsymbol{X_0 M Y_j} \tag{2.27}$$

olarak elde edilir. Burada,

$$\boldsymbol{X_0} = [1 \quad (x_0 - c) \quad (x_0 - c)^2 \cdots (x_0 - c)^N]_{1\times(N+1)} \tag{2.28}$$

ile verilir.

Diğer yandan denklem (2.13) açılımında $C_{ijk}(x) = 1$ ve $x = x_0$ olarak alınırsa $y_j(x_0)y_k(x_0)$ fonksiyonunun seri açılımının matris gösterimi,

$$[y_j(x_0)y_k(x_0)] = [Y_{jk}(x_0)] = \boldsymbol{X_0 M Y_{jk}} \tag{2.29}$$

biçimindedir.

Denklem (1.3) ile verilen başlangıç koşullarındaki fonksiyonların yerine, bunlara karşılık gelen denklem (2.27) ve denklem (2.29) matris formları yazılırsa, denklem sisteminin matris formu,

$$\alpha_{11}\boldsymbol{X_0MY_1} + \cdots + \alpha_{1n}\boldsymbol{X_0MY_n} + \beta_{111}\boldsymbol{X_0MY_{11}} + \cdots + \beta_{1nn}\boldsymbol{X_0MY_{nn}} = \lambda_1$$

$$\alpha_{21}\boldsymbol{X_0MY_1} + \cdots + \alpha_{2n}\boldsymbol{X_0MY_n} + \beta_{211}\boldsymbol{X_0MY_{11}} + \cdots + \beta_{2nn}\boldsymbol{X_0MY_{nn}} = \lambda_2$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \tag{2.30}$$

$$\alpha_{n1}\boldsymbol{X_0MY_1}+\cdots+\alpha_{nn}\boldsymbol{X_0MY_n}+\beta_{n11}\boldsymbol{X_0MY_{11}}+\cdots+\beta_{nnn}\boldsymbol{X_0MY_{nn}}=\lambda_n$$

şeklinde yazılabilir. Elde edilen bu matris denklem sistemi,

$$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix}\alpha_{11}\boldsymbol{X_0M} & \alpha_{12}\boldsymbol{X_0M} & \alpha_{13}\boldsymbol{X_0M} & \dots & \alpha_{1n}\boldsymbol{X_0M}\\ \alpha_{21}\boldsymbol{X_0M} & \alpha_{22}\boldsymbol{X_0M} & \alpha_{23}\boldsymbol{X_0M} & \dots & \alpha_{2n}\boldsymbol{X_0M}\\ \alpha_{31}\boldsymbol{X_0M} & \alpha_{32}\boldsymbol{X_0M} & \alpha_{33}\boldsymbol{X_0M} & \dots & \alpha_{3n}\boldsymbol{X_0M}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha_{n1}\boldsymbol{X_0M} & \alpha_{n2}\boldsymbol{X_0M} & \alpha_{n3}\boldsymbol{X_0M} & \dots & \alpha_{nn}\boldsymbol{X_0M}\end{bmatrix}_{n\times n(N+1)}, \quad \boldsymbol{\lambda}=\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_n\end{bmatrix}_{n\times 1},$$

$$\boldsymbol{V}=\begin{bmatrix}\beta_{111}\boldsymbol{X_0M} & \dots & \beta_{11n}\boldsymbol{X_0M} & \dots & \beta_{1n1}\boldsymbol{X_0M} & \dots & \beta_{1nn}\boldsymbol{X_0M}\\ \beta_{211}\boldsymbol{X_0M} & \dots & \beta_{21n}\boldsymbol{X_0M} & \dots & \beta_{2n1}\boldsymbol{X_0M} & \dots & \beta_{2nn}\boldsymbol{X_0M}\\ \beta_{311}\boldsymbol{X_0M} & \dots & \beta_{31n}\boldsymbol{X_0M} & \dots & \beta_{3n1}\boldsymbol{X_0M} & \dots & \beta_{3nn}\boldsymbol{X_0M}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ \beta_{n11}\boldsymbol{X_0M} & \dots & \beta_{n1n}\boldsymbol{X_0M} & \dots & \beta_{nn1}\boldsymbol{X_0M} & \dots & \beta_{nnn}\boldsymbol{X_0M}\end{bmatrix}_{n\times n^2(N+1)} \tag{2.31}$$

olmak üzere,

$$\boldsymbol{UY}+\boldsymbol{V\overline{Y}}=\boldsymbol{\lambda} \tag{2.32}$$

olur. Sonuç olarak, denklem (1.3) ile verilen başlangıç koşulları denklem (2.32) matris denklemine dönüştürülmüş olur. Bu matris denkleminin genişletilmiş matris formu,

$$\boldsymbol{U}=[u_{i,j}]=\begin{bmatrix}u_{1,1} & u_{1,2} & \dots & u_{1,n(N+1)}\\ u_{2,1} & u_{2,2} & \dots & u_{2,n(N+1)}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ u_{n,1} & u_{n,2} & \dots & u_{n,n(N+1)}\end{bmatrix}_{n\times n(N+1)}$$

$$;\ i=1,2,\dots,n,\ \ j=1,2,\dots,n(N+1)$$

$$\boldsymbol{V}=[v_{i,j}]=\begin{bmatrix}v_{1,1} & v_{1,2} & \dots & v_{1,n^2(N+1)}\\ v_{2,1} & v_{2,2} & \dots & v_{2,n^2(N+1)}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ v_{n,1} & v_{n,2} & & v_{n,n^2(N+1)}\end{bmatrix}_{n\times n^2(N+1)}$$

$$;\ i=1,2,\dots,n,\ \ j=1,2,\dots,n^2(N+1)$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}_{n\times 1} \tag{2.33}$$

olmak üzere,

$$[\boldsymbol{U}\,;\boldsymbol{V}\,;\boldsymbol{\lambda}] \tag{2.34}$$

şeklinde yazılabilir.

2.3 Çözüm Yöntemi

Denklem (1.2) diferansiyel denklem sisteminin denklem (1.3) ile verilen başlangıç koşullarına göre denklem (2.1) ile verilen Taylor yaklaşık çözümünü bulabilmek için aşağıdaki yol izlenecektir:

Önce, verilen denklem (1.2) diferansiyel denklem sistemi, denklem (2.23) matris denklemine dönüştürülür. Elde edilen bu matris denkleminin elemanları, açıkça yazılarak, denklem (2.25) ile verilen genişletilmiş matris formu elde edilir. Aynı şekilde, denklem (1.3) ile verilen başlangıç koşulları, denklem (2.32) matris denklemine dönüştürülür. Elde edilen bu matris denkleminin elemanları, açıkça yazılarak, denklem (2.34) ile verilen genişletilmiş matris formu elde edilir.

Daha sonra, denklem (2.25) ile verilen genişletilmiş matris formunun son n tane satırı silinerek, yerine sırasıyla denklem (2.34) genişletilmiş matris formunun $1, 2, \ldots, n$. satırları yazılır. Böylece yeni genişletilmiş matris,

$$\boldsymbol{W}^{*}=\begin{bmatrix} w_{1,1} & w_{1,2} & \cdots & w_{1,n(N+1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_{(N+1)-1,1} & w_{(N+1)-1,2} & \cdots & w_{(N+1)-1,n(N+1)} \\ w_{(N+1)+1,1} & w_{(N+1)+1,2} & \cdots & w_{(N+1)+1,n(N+1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_{2(N+1)-1,1} & w_{2(N+1)-1,2} & \cdots & w_{2(N+1)-1,n(N+1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_{(n-1)(N+1)+1,1} & w_{(n-1)(N+1)+1,2} & \cdots & w_{(n-1)(N+1)+1,n(N+1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_{n(N+1)-1,1} & w_{n(N+1)-1,2} & \cdots & w_{n(N+1)-1,n(N+1)} \\ u_{1,1} & u_{1,2} & \cdots & u_{1,n(N+1)} \\ u_{2,1} & u_{2,2} & \cdots & u_{2,n(N+1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{n,1} & u_{n,2} & \cdots & u_{n,n(N+1)} \end{bmatrix}_{n(N+1)\times n(N+1)},$$

$$\boldsymbol{C}^{*}=\begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,n^2(N+1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{(N+1)-1,1} & c_{(N+1)-1,2} & \cdots & c_{(N+1)-1,n^2(N+1)} \\ c_{(N+1)+1,1} & c_{(N+1)+1,2} & \cdots & c_{(N+1)+1,n^2(N+1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{2(N+1)-1,1} & c_{2(N+1)-1,2} & \cdots & c_{2(N+1)-1,n^2(N+1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{(n-1)(N+1)+1,1} & c_{(n-1)(N+1)+1,2} & \cdots & c_{(n-1)(N+1)+1,n^2(N+1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n(N+1)-1,1} & c_{n(N+1)-1,2} & \cdots & c_{n(N+1)-1,n^2(N+1)} \\ v_{1,1} & v_{1,2} & \cdots & v_{1,n^2(N+1)} \\ v_{2,1} & v_{2,2} & \cdots & v_{2,n^2(N+1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{n,1} & v_{n,2} & \cdots & v_{n,n^2(N+1)} \end{bmatrix}_{n(N+1)\times n^2(N+1)},$$

$$\boldsymbol{G}^{*}=\begin{bmatrix} \frac{G_1^{(0)}(c)}{0!} & \cdots & \frac{G_1^{(N-1)}(c)}{(N-1)!} & \cdots & \frac{G_n^{(0)}(c)}{0!} & \cdots & \frac{G_n^{(N-1)}(c)}{(N-1)!} & \lambda_1 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}^{T}_{n(N+1)\times 1} \quad (2.35)$$

olmak üzere,

$$[\boldsymbol{W}^{*}\,;\boldsymbol{C}^{*};\boldsymbol{G}^{*}] \quad (2.36)$$

şeklinde yazılabilir. Bu yeni genişletilmiş matris formu da kısaca,

$$\boldsymbol{W}^{*}\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{C}^{*}\overline{\boldsymbol{Y}}=\boldsymbol{G}^{*} \quad (2.37)$$

şeklindeki matris denklemine dönüştürülür.

Son olarak, denklem (2.37) matris denkleminden bilinmeyen Taylor katsayıları $y_j^{(t)}(c)$'ler $(t = 0,1, \dots, N)$ bulunur. Sonuç olarak, denklem (1.2) diferansiyel denklem sisteminin, denklem (1.3) ile verilen başlangıç koşullarına göre Taylor yaklaşık çözümü,

$$y_j(x) \cong \sum_{t=0}^{N} \frac{y_j^{(t)}(c)(x-c)^t}{t!} \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, n \tag{2.38}$$

şeklinde bulunur.

2.4 Çözümün Kontrolü

Denklem (2.38) ile verilen Taylor serisi denklem (1.2) ile verilen denklem sisteminin yaklaşık çözümü olduğu için, $y_j(x)$ $(j = 1, 2, \dots, n)$ çözümleri ve bunun $y_j'(x)$ türevleri denklem (1.2) ile verilen denklem sisteminde yerine konulduğunda, her $i = 1,2, \dots, n$ ve $x_r \in [a\,,b]$ değeri için sonuçlar denklem sistemini yaklaşık olarak sağlamalıdır. Yani, her $i = 1,2, \dots, n$ ve $x_r \in [a\,,b]$ değeri için;

$$E_i(x_r) = \left| A_i(x_r)y_i'(x_r) + L_i[y_1, y_2, \dots, y_n] + N_i[y_1, y_2, \dots, y_n] - G_i(x_r) \right| \cong 0$$

veya

$$E_i(x_r) \leq 10^{-k_{i,r}}$$

olmalıdır. Eğer $\max(10^{-k_{i,r}}) = 10^{-k}$ $(k \in Z^+)$ önceden verilirse, o zaman N kesme sınırı, x_r noktalarının her birisinde $E_i(x_r)$ farkı istenilen 10^{-k} sayısından küçük oluncaya kadar artırılır. Böylece 10^{-k} sayısını sıfıra çok yakın seçerek çözümü iyileştirebiliriz [47].

3. BÖLÜM

UYGULAMALAR

Bu bölümde birinci mertebeden lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklem sistemlerinin verilen koşullarda çözümleri bulunmuştur. Çözümlerde Taylor matris yöntemi kullanılmış, çözümler tam çözümlerle veya diğer çözüm yöntemleriyle karşılaştırılmıştır.

ÖRNEK 1:

$$\frac{dy_1(x)}{dx} + 20y_1(x) + 0.25y_2(x) + 19.75y_3(x) = 0$$

$$\frac{dy_2(x)}{dx} - 20y_1(x) + 20.25y_2(x) - 0.25y_3(x) = 0 \tag{3.1}$$

$$\frac{dy_3(x)}{dx} - 20y_1(x) + 19.75y_2(x) + 0.25y_3(x) = 0$$

başlangıç şartları;

$$y_1(0) = 1$$

$$y_2(0) = 0 \tag{3.2}$$

$$y_3(0) = -1$$

olan stiff diferansiyel denklem sistemini ele alalım. Bu diferansiyel denklem sisteminin tam çözümü;

$$y_1(x) = \frac{1}{2}\left[e^{-\frac{1}{2}x} + e^{-20x}(\cos(20x) + \sin(20x))\right]$$

$$y_2(x) = \frac{1}{2}\left[e^{-\frac{1}{2}x} - e^{-20x}(\cos(20x) - \sin(20x))\right] \tag{3.3}$$

$$y_3(x) = -\frac{1}{2}\left[e^{-\frac{1}{2}x} + e^{-20x}(\cos(20x) - \sin(20x))\right]$$

olarak verilmiştir [4], [22].

ÇÖZÜM:

Ele aldığımız diferansiyel denklem sistemi lineer ve homojen olduğu için denklem (1.2)'de verilen,

$$N_i[y_1, y_2, y_3] = 0 \quad , \quad G_i(x) = 0 \quad ; \quad i = 1, 2, 3$$

olarak alınır. Denklem (3.1) ile verilen diferansiyel denklem sistemi için $n = 3$'dür. Denklem sisteminin yaklaşık çözümünü $c = 0$ noktası civarında ve $N = 3$ değeri için araştıralım. Böylece denklem (2.1) ile verilen yaklaşık çözüm,

$$y_j(x) \cong \sum_{t=0}^{3} \frac{y_j{}^{(t)}(0)x^t}{t!} \quad ; \quad j = 1, 2, 3$$

şeklinde olacaktır. Bu diferansiyel denklem sisteminde,

$$A_1(x) = 1 \quad , \quad B_{11}(x) = 20 \quad , \quad B_{12}(x) = 0.25 \quad , \quad B_{13}(x) = 19.75$$

$$A_2(x) = 1 \quad , \quad B_{21}(x) = -20 \quad , \quad B_{22}(x) = 20.25 \quad , \quad B_{23}(x) = -0.25$$

$$A_3(x) = 1 \quad , \quad B_{31}(x) = -20 \quad , \quad B_{32}(x) = 19.75 \quad , \quad B_{33}(x) = 0.25$$

olduğu için, denklem (2.7), denklem (2.10) ve denklem (2.17) kullanılırsa,

$$\boldsymbol{A_1} = \boldsymbol{A_2} = \boldsymbol{A_3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4\times4} \quad , \quad \boldsymbol{B_{11}} = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{10}{3} \end{bmatrix}_{4\times4} \quad ,$$

$$\boldsymbol{B_{12}} = \boldsymbol{B_{33}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} \end{bmatrix}_{4\times4} \quad , \quad \boldsymbol{B_{13}} = \boldsymbol{B_{32}} = \begin{bmatrix} \frac{79}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{79}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{79}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{79}{24} \end{bmatrix}_{4\times4}$$

$$\boldsymbol{B_{21}} = \boldsymbol{B_{31}} = \begin{bmatrix} -20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{10}{3} \end{bmatrix}_{4\times4} \quad , \quad \boldsymbol{B_{22}} = \begin{bmatrix} \frac{81}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{81}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{81}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{27}{8} \end{bmatrix}_{4\times4} ,$$

$$\boldsymbol{B_{23}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{24} \end{bmatrix}_{4\times4} \quad , \quad \mathbf{G_1} = \mathbf{G_2} = \mathbf{G_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{4\times1}$$

olarak bulunur. Ayrıca bu diferansiyel denklem sistemi için $N = 3$ ve $c = 0$ olarak alındığından, denklem (2.2),

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \frac{1}{0!} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1!} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2!} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3!} \end{bmatrix}_{4\times4} \quad , \quad \boldsymbol{Y_j} = \begin{bmatrix} y_j^{(0)}(0) \\ y_j^{(1)}(0) \\ y_j^{(2)}(0) \\ y_j^{(3)}(0) \end{bmatrix}_{4\times1} \quad ; \quad j = 1, 2, 3$$

olarak yazılabilir. Böylece denklem (3.1) ile verilen diferansiyel denklem sisteminin denklem (2.23) matris denklemi,

$$\boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} A_1 + B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & A_2 + B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & A_3 + B_{33} \end{bmatrix}_{12\times 12} \quad , \quad \boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix}_{12\times 1} \quad , \quad \boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} MG_1 \\ MG_2 \\ MG_3 \end{bmatrix}_{12\times 1}$$

olmak üzere,

$$\boldsymbol{WY} = \boldsymbol{G}$$

olarak yazılabilir. Bu matris denkleminin de denklem (2.25) ile verilen genişletilmiş matris formu,

$$[\boldsymbol{W}\,;\,\boldsymbol{G}] = \begin{bmatrix}
20 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{79}{4} & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\
0 & 20 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{79}{4} & 0 & 0 & ; & 0 \\
0 & 0 & 10 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & \frac{79}{8} & 0 & ; & 0 \\
-20 & 0 & 0 & 0 & \frac{81}{4} & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\
0 & -20 & 0 & 0 & 0 & \frac{81}{4} & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & ; & 0 \\
0 & 0 & -10 & 0 & 0 & 0 & \frac{81}{8} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{8} & 0 & ; & 0 \\
-20 & 0 & 0 & 0 & \frac{79}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 & ; & 0 \\
0 & -20 & 0 & 0 & 0 & \frac{79}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 1 & 0 & ; & 0 \\
0 & 0 & -10 & 0 & 0 & 0 & \frac{79}{8} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & ; & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{10}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} & 0 & 0 & 0 & \frac{79}{24} & ; & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\frac{10}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{27}{8} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{24} & ; & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\frac{10}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{79}{24} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} & ; & 0
\end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur.

Şimdi de başlangıç koşullarının genişletilmiş matris formunu bulalım:

Bu problemde verilen denklem (3.2) ile verilen başlangıç koşullarında $\beta_{ijk} = 0$’dır. Ayrıca $x_0 = 0$ ve $c = 0$ olduğundan denklem (2.28),

$$\boldsymbol{X_0} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]_{1\times 4}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla,

$$\boldsymbol{X_0M} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]_{1\times 4}$$

şeklinde bulunur. Denklem (3.2) ile verilen başlangıç koşullarında,

$$\alpha_{11} = 1 \ , \ \alpha_{12} = 0 \ , \ \alpha_{13} = 0 \ , \ \lambda_1 = 1$$

$$\alpha_{21} = 0 \ , \ \alpha_{22} = 1 \ , \ \alpha_{23} = 0 \ , \ \lambda_2 = 0$$

$$\alpha_{31} = 0 \ , \ \alpha_{32} = 0 \ , \ \alpha_{33} = 1 \ , \ \lambda_3 = -1$$

olduğundan, denklem (2.31),

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X_0M} & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{X_0M} & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{X_0M} \end{bmatrix}_{3\times 12} \quad , \quad \boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

olarak bulunur. Böylece denklem (3.2) ile verilen başlangıç koşullarının denklem (2.32) ile verilen matris denklemi,

$$\boldsymbol{UY} = \boldsymbol{\lambda}$$

şeklinde yazılabilir. Bu matris denkleminin de denklem (2.34) ile verilen genişletilmiş matris formu,

$$[\boldsymbol{U} \, ; \, \boldsymbol{\lambda}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & ; & -1 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

Denklem (3.1) ile verilen denklem sisteminin elde edilen genişletilmiş matris formunun son 3 tane satırı silinerek, yerine sırasıyla denklem (3.2) başlangıç koşullarının elde edilen genişletilmiş matris formunun $1, 2, 3$ ncü satırları yazılır. Böylece yeni genişletilmiş matris formu,

$$[\boldsymbol{W}^{*}\,;\,\boldsymbol{G}^{*}]=\left[\begin{array}{cccccccccccccc}
20 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{79}{4} & 0 & 0 & 0 & ; & 0\\
0 & 20 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{79}{4} & 0 & 0 & ; & 0\\
0 & 0 & 10 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & \frac{79}{8} & 0 & ; & 0\\
-20 & 0 & 0 & 0 & \frac{81}{4} & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & ; & 0\\
0 & -20 & 0 & 0 & 0 & \frac{81}{4} & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & ; & 0\\
0 & 0 & -10 & 0 & 0 & 0 & \frac{81}{8} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{8} & 0 & ; & 0\\
-20 & 0 & 0 & 0 & \frac{79}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 & ; & 0\\
0 & -20 & 0 & 0 & 0 & \frac{79}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 1 & 0 & ; & 0\\
0 & 0 & -10 & 0 & 0 & 0 & \frac{79}{8} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & ; & 0\\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & ; & -1
\end{array}\right]$$

şeklinde yazılabilir. Bu yeni genişletilmiş matris formu kısaca

$$\boldsymbol{W}^{*}\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{G}^{*}$$

matris denklemine dönüştürülür. Bu matris denkleminden bilinmeyen Taylor katsayıları,

$$y_1{}^{(0)}(0)=1\ ,\ y_1{}^{(1)}(0)=-\frac{1}{4}\ ,\ y_1{}^{(2)}(0)=-\frac{3199}{8}\ ,\ y_1{}^{(3)}(0)=\frac{255999}{16}\ ,$$

$$y_2{}^{(0)}(0)=0\ ,\ y_2{}^{(1)}(0)=\frac{79}{4}\ ,\ y_2{}^{(2)}(0)=-\frac{3199}{8}\ ,\ y_2{}^{(3)}(0)=-\frac{1}{16}\ ,$$

$$y_3{}^{(0)}(0)=-1\ ,\ y_3{}^{(1)}(0)=\frac{81}{4}\ ,\ y_3{}^{(2)}(0)=-\frac{3201}{8}\ ,\ y_3{}^{(3)}(0)=\frac{1}{16}$$

olarak bulunur. Bunları Taylor açılımında yerine koyarsak çözüm,

$$y_1(x)\cong 1-\frac{x}{4}-\frac{3199x^2}{16}+\frac{85333x^3}{32}$$

$$y_2(x)\cong\frac{79x}{4}-\frac{3199x^2}{16}-\frac{x^3}{96}$$

$$y_3(x)\cong -1+\frac{81x}{4}-\frac{3201x^2}{16}+\frac{x^3}{96}$$

olur. Bu denklem sisteminin $N=5$ için çözümü,

$$y_1(x) \cong 1-\frac{x}{4}-\frac{3199x^2}{16}+\frac{85333x^3}{32}-\frac{3413333x^4}{256}-\frac{x^5}{7680}$$

$$y_2(x) \cong \frac{79x}{4}-\frac{3199x^2}{16}-\frac{x^3}{96}+\frac{10240001x^4}{768}-\frac{273066667x^5}{2560}$$

$$y_3(x) \cong -1+\frac{81x}{4}-\frac{3201x^2}{16}+\frac{x^3}{96}+\frac{3413333x^4}{256}-\frac{819199999x^5}{7680}$$

ve $N=7$ için çözümü,

$$y_1(x) \cong 1-\frac{x}{4}-\frac{3199x^2}{16}+\frac{85333x^3}{32}-\frac{3413333x^4}{256}-\frac{x^5}{7680}$$
$$+\frac{3640888889x^6}{10240}-\frac{2621440000001x^7}{1290240}$$

$$y_2(x) \cong \frac{79x}{4}-\frac{3199x^2}{16}-\frac{x^3}{96}+\frac{10240001x^4}{768}-\frac{273066667x^5}{2560}$$
$$+\frac{3640888889x^6}{10240}-\frac{x^7}{1290240}$$

$$y_3(x) \cong -1+\frac{81x}{4}-\frac{3201x^2}{16}+\frac{x^3}{96}+\frac{3413333x^4}{256}-\frac{819199999x^5}{7680}$$
$$+\frac{32767999999x^6}{92160}+\frac{x^7}{1290240}$$

olarak bulunur. Bu sonuçların [4] ve [22] de verilen sonuçlarla aynı olduğu görülür. N' nin değişik değerleri için ve diğer çözüm yöntemlerinden elde edilen sonuçlar Tablo 1.1., 1.2. ve 1.3. de verilmiştir.

ÖRNEK 2:

$$\frac{dy_1(x)}{dx}-y_3(x)=-\cos x$$

$$\frac{dy_2(x)}{dx}-y_3(x)=-e^x \tag{3.4}$$

$$\frac{dy_3(x)}{dx} - y_1(x) + y_2(x) = 0$$

başlangıç şartları;

$$y_1(0) = 1$$

$$y_2(0) = 0 \qquad (3.5)$$

$$y_3(0) = 2$$

olan homojen olmayan lineer diferansiyel denklem sistemini ele alalım. Bu diferansiyel denklem sisteminin tam çözümü de;

$$y_1(x) = e^x$$

$$y_2(x) = \sin x \qquad (3.6)$$

$$y_3(x) = e^x + \cos x$$

olarak verilmiştir [19].

ÇÖZÜM:

Ele aldığımız diferansiyel denklem sistemi lineer olduğu için denklem (1.2)'de,

$$N_i[y_1, y_2, y_3] = 0 \quad ; \quad i = 1, 2, 3$$

olarak alınır. Diferansiyel denklem sistemi için $n = 3$'dür. Denklem sisteminin yaklaşık çözümünü $c = 0$ noktası civarında ve $N = 3$ değeri için araştıralım. Böylece denklem (2.1) ile verilen yaklaşık çözüm,

$$y_j(x) \cong \sum_{t=0}^{3} \frac{{y_j}^{(t)}(0)x^t}{t!} \quad ; \quad j = 1, 2, 3$$

şeklinde olacaktır. Bu diferansiyel denklem sisteminde,

$$A_1(x) = 1 \ , \ B_{11}(x) = 0 \ , \ B_{12}(x) = 0 \ , \ B_{13}(x) = -1 \ , \ G_1(x) = -\cos x$$

$$A_2(x) = 1 \ , \ B_{21}(x) = 0 \ , \ B_{22}(x) = 0 \ , \ B_{23}(x) = -1 \ , \ G_2(x) = -e^x$$

$$A_3(x) = 1 \ \ , \ \ B_{31}(x) = -1 \ \ , \ \ B_{32}(x) = 1 \ \ , \ \ B_{33}(x) = 0 \ \ , \ \ G_3(x) = 0$$

olduğu için, denklem (2.7), denklem (2.10) ve denklem (2.17),

$$\boldsymbol{A_1} = \boldsymbol{A_2} = \boldsymbol{A_3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4\times4} , \boldsymbol{B_{13}} = \boldsymbol{B_{23}} = \boldsymbol{B_{31}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}_{4\times4}$$

$$\boldsymbol{B_{32}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}_{4\times4} \ , \ \boldsymbol{B_{11}} = \boldsymbol{B_{12}} = \boldsymbol{B_{21}} = \boldsymbol{B_{22}} = \boldsymbol{B_{33}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4\times4} \ ,$$

$$\boldsymbol{G_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{4\times1} \ , \ \boldsymbol{G_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}_{4\times\mathbf{1}} \ , \ \boldsymbol{G_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{4\times1}$$

olarak bulunur. Ayrıca bu diferansiyel denklem sistemi için $N = 3$ ve $c = 0$ olarak alındığından, denklem (2.2),

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \frac{1}{0!} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1!} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2!} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3!} \end{bmatrix}_{4\times4} \ , \ \boldsymbol{Y_j} = \begin{bmatrix} y_j^{(0)}(0) \\ y_j^{(1)}(0) \\ y_j^{(2)}(0) \\ y_j^{(3)}(0) \end{bmatrix}_{4\times1} \ ; \ \ j = 1, 2, 3$$

olarak yazılabilir. Böylece denklem (3.4) ile verilen diferansiyel denklem sisteminin denklem (2.23) matris denklemi,

$$\boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} A_1 + B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & A_2 + B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & A_3 + B_{33} \end{bmatrix}_{12\times12} \ , \ \boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix}_{12\times1} \ , \ \boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} MG_1 \\ MG_2 \\ MG_3 \end{bmatrix}_{12\times1}$$

olmak üzere,

$$\boldsymbol{WY} = \boldsymbol{G}$$

olarak yazılabilir. Bu matris denkleminin de denklem (2.25) ile verilen genişletilmiş matris formu,

$$[\boldsymbol{W}\,;\,\boldsymbol{G}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & ; & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & ; & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & ; & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & ; & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & ; & \frac{-1}{2} \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & ; & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & ; & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & ; & \frac{-1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur.

Şimdi de başlangıç koşullarının genişletilmiş matris formunu bulalım:

Bu problemde verilen denklem (3.5) başlangıç koşullarında $\beta_{ijk} = 0$ ’dır. Ayrıca $x_0 = 0$ ve $c = 0$ olduğundan denklem (2.28),

$$\boldsymbol{X_0} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]_{1\times 4}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla,

$$\boldsymbol{X_0 M} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]_{1\times 4}$$

şeklinde bulunur. Denklem (3.5) ile verilen başlangıç koşullarında,

$$\alpha_{11} = 1 \;\;,\;\; \alpha_{12} = 0 \;\;,\;\; \alpha_{13} = 0 \;\;,\;\; \lambda_1 = 1$$

$$\alpha_{21} = 0 \;\;,\;\; \alpha_{22} = 1 \;\;,\;\; \alpha_{23} = 0 \;\;,\;\; \lambda_2 = 0$$

$$\alpha_{31} = 0 \ \ , \ \ \alpha_{32} = 0 \ \ , \ \ \alpha_{33} = 1 \ \ , \ \ \lambda_3 = 2$$

olduğundan, denklem (2.31),

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X_0 M} & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{X_0 M} & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{X_0 M} \end{bmatrix}_{3\times 12} \quad , \ \boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

olarak bulunur. Böylece denklem (3.5) ile verilen başlangıç koşullarının denklem (2.32) matris denklemi,

$$\boldsymbol{UY} = \boldsymbol{\lambda}$$

şeklinde yazılabilir. Bu matris denkleminin de denklem (2.34) ile verilen genişletilmiş matris formu,

$$[\boldsymbol{U} \, ; \, \boldsymbol{\lambda}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & ; & 2 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

Denklem (3.4) ile verilen denklem sisteminin elde edilen genişletilmiş matris formunun son 3 tane satırı silinerek, yerine sırasıyla denklem (3.5) başlangıç koşullarından elde edilen genişletilmiş matris formunun $1, 2, 3$ ncü satırları yazılır. Böylece yeni genişletilmiş matris formu,

$$[\boldsymbol{W}^* \, ; \, \boldsymbol{G}^*] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & ; & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & ; & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & ; & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & ; & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & ; & \frac{-1}{2} \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & ; & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & ; & 2 \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Bu yeni genişletilmiş matris formu kısaca

$$\boldsymbol{W}^{*}\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{G}^{*}$$

matris denklemine dönüştürülür. Bu matris denkleminden bilinmeyen Taylor katsayıları,

$$y_1{}^{(0)}(0) = 1 \;\;,\;\; y_1{}^{(1)}(0) = 1 \;\;,\;\; y_1{}^{(2)}(0) = 1 \;\;,\;\; y_1{}^{(3)}(0) = 1 \;\;,$$

$$y_2{}^{(0)}(0) = 0 \;\;,\;\; y_2{}^{(1)}(0) = 1 \;\;,\;\; y_2{}^{(2)}(0) = 0 \;\;,\;\; y_2{}^{(3)}(0) = -1 \;\;,$$

$$y_3{}^{(0)}(0) = 2 \;\;,\;\; y_3{}^{(1)}(0) = 1 \;\;,\;\; y_3{}^{(2)}(0) = 0 \;\;,\;\; y_3{}^{(3)}(0) = 1$$

olarak bulunur. Bunları Taylor açılımında yerine koyarsak çözüm,

$$y_1(x) \cong 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

$$y_2(x) \cong x - \frac{x^3}{6}$$

$$y_3(x) \cong 2 + x + \frac{x^3}{6}$$

şeklinde bulunur. Bu denklem sisteminin $N = 5$ için çözümü,

$$y_1(x) \cong 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}$$

$$y_2(x) \cong x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

$$y_3(x) \cong 2 + x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{120}$$

şeklinde bulunur ve $N = 7$ için çözümü,

$$y_1(x) \cong 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \frac{x^7}{5040}$$

$$y_2(x) \cong x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}$$

$$y_3(x) \cong 2 + x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^7}{5040}$$

şeklinde bulunur. N nin değişik değerleri için ve diğer çözüm yöntemlerinden elde edilen sonuçlar Tablo 2.1., 2.2. ve 2.3.'de verilmiştir.

ÖRNEK 3:

$$\frac{dy_1(x)}{dx} + y_1(x) = 0$$

$$\frac{dy_2(x)}{dx} - y_1(x) + y_2^2(x) = 0 \qquad (3.7)$$

$$\frac{dy_3(x)}{dx} - y_2^2(x) = 0$$

başlangıç şartları;

$$y_1(0) = 1$$

$$y_2(0) = 0 \qquad (3.8)$$

$$y_3(0) = 0$$

olan lineer olmayan diferansiyel denklem sistemini ele alalım.

ÇÖZÜM:

Ele aldığımız diferansiyel denklem sistemi homojen olduğu için denklem (1.2)'de,

$$G_i(x) = 0 \;\; ; \;\; i = 1, 2, 3$$

olarak alınır. Diferansiyel denklem sistemi için $n = 3$ dür. Denklem sisteminin yaklaşık çözümünü $c = 0$ noktası civarında ve $N = 3$ değeri için araştıralım. Böylece denklem (2.1) yaklaşık çözümü,

$$y_j(x) \cong \sum_{t=0}^{3} \frac{y_j^{(t)}(0)x^t}{t!} \;\; ; \;\; j = 1, 2, 3$$

şeklinde olacaktır. Bu diferansiyel denklem sisteminde,

$$A_1(x) = 1 \ \ , \ B_{11}(x) = 1 \ \ , \ B_{12}(x) = 0 \ \ , \ B_{13}(x) = 0$$

$$A_2(x) = 1 \ \ , \ B_{21}(x) = -1 \ \ , \ B_{22}(x) = 0 \ \ , \ B_{23}(x) = 0$$

$$A_3(x) = 1 \ \ , \ B_{31}(x) = 0 \ \ , \ B_{32}(x) = 0 \ \ , \ B_{33}(x) = 0$$

$$C_{111}(x) = C_{112}(x) = C_{113}(x) = C_{121}(x) = C_{122}(x) = C_{123}(x) = C_{131}(x)$$

$$= C_{132}(x) = C_{133}(x) = 0 \ \ ,$$

$$C_{211}(x) = C_{212}(x) = C_{213}(x) = C_{221}(x) = C_{223}(x) = C_{231}(x) = C_{232}(x)$$

$$= C_{233}(x) = 0 \ \ , \ C_{222}(x) = 1 \ \ ,$$

$$C_{311}(x) = C_{312}(x) = C_{313}(x) = C_{321}(x) = C_{323}(x) = C_{331}(x) = C_{332}(x)$$

$$= C_{333}(x) = 0 \ \ , \ C_{322}(x) = -1$$

olduğu için, denklem (2.7), denklem (2.10), denklem (2.14) ve denklem (2.17) denklemi,

$$\boldsymbol{A_1} = \boldsymbol{A_2} = \boldsymbol{A_3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4\times 4} \ , \ \boldsymbol{B_{11}} = \boldsymbol{C_{222}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}_{4\times 4} \ ,$$

$$\boldsymbol{B_{21}} = \boldsymbol{C_{322}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}_{4\times 4} \ , \ \mathbf{G_1} = \mathbf{G_2} = \mathbf{G_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{4\times 1} \ ,$$

$$\boldsymbol{B_{12}} = \boldsymbol{B_{13}} = \boldsymbol{B_{22}} = \boldsymbol{B_{23}} = \boldsymbol{B_{31}} = \boldsymbol{B_{32}} = \boldsymbol{B_{33}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4\times 4} \ ,$$

$$\boldsymbol{C}_{111} = \boldsymbol{C}_{112} = \boldsymbol{C}_{113} = \boldsymbol{C}_{121} = \boldsymbol{C}_{122} = \boldsymbol{C}_{123} = \boldsymbol{C}_{131} = \boldsymbol{C}_{132} = \boldsymbol{C}_{133} = \boldsymbol{C}_{211}$$

$$= \boldsymbol{C}_{212} = \boldsymbol{C}_{213} = \boldsymbol{C}_{221} = \boldsymbol{C}_{223} = \boldsymbol{C}_{231} = \boldsymbol{C}_{232} = \boldsymbol{C}_{233} = \boldsymbol{C}_{311} = \boldsymbol{C}_{312} = \boldsymbol{C}_{313}$$

$$= \boldsymbol{C}_{321} = \boldsymbol{C}_{323} = \boldsymbol{C}_{331} = \boldsymbol{C}_{332} = \boldsymbol{C}_{333} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4\times 4}$$

olarak bulunur. Ayrıca bu diferansiyel denklem sistemi için $N = 3$ ve $c = 0$ olarak alındığından, denklem (2.2) ve denklem (2.14),

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \frac{1}{0!} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1!} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2!} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3!} \end{bmatrix}_{4\times 4} , \quad \boldsymbol{Y_j} = \begin{bmatrix} y_j^{(0)}(0) \\ y_j^{(1)}(0) \\ y_j^{(2)}(0) \\ y_j^{(3)}(0) \end{bmatrix}_{4\times 1} , \quad \boldsymbol{Y_{jk}} = \begin{bmatrix} Y_{jk}^{(0)}(0) \\ Y_{jk}^{(1)}(0) \\ Y_{jk}^{(2)}(0) \\ Y_{jk}^{(3)}(0) \end{bmatrix}_{4\times 1} \quad ; \quad j,k = 1,2,3$$

olarak yazılabilir. Böylece denklem (3.7) ile verilen diferansiyel denklem sisteminin denklem (2.23) matris denklemi,

$$\boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} A_1 + B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & A_2 + B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & A_3 + B_{33} \end{bmatrix}_{12\times 12} , \quad \boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix}_{12\times 1} , \quad \boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} MG_1 \\ MG_2 \\ MG_3 \end{bmatrix}_{12\times 1} ,$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} C_{111} & C_{112} & C_{113} & C_{121} & C_{122} & C_{123} & C_{131} & C_{132} & C_{133} \\ C_{211} & C_{212} & C_{213} & C_{221} & C_{222} & C_{223} & C_{231} & C_{232} & C_{233} \\ C_{311} & C_{312} & C_{313} & C_{321} & C_{322} & C_{323} & C_{331} & C_{332} & C_{333} \end{bmatrix}_{12\times 36} ,$$

$$\overline{\boldsymbol{Y}} = [Y_{11} \quad Y_{12} \quad Y_{13} \quad Y_{21} \quad Y_{22} \quad Y_{23} \quad Y_{31} \quad Y_{32} \quad Y_{33}]^T{}_{36\times 1}$$

olmak üzere,

$$\boldsymbol{WY} + \boldsymbol{C}\overline{\boldsymbol{Y}} = \boldsymbol{G}$$

olarak yazılabilir. Bu matris denkleminin de denklem (2.25) ile verilen genişletilmiş matris formu,

$$\boldsymbol{W}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{12\times 12},$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{12\times 36}, \quad \boldsymbol{G}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{12\times 1}$$

olmak üzere,

$$[\boldsymbol{W}\,;\ \boldsymbol{C}\,;\ \boldsymbol{G}]$$

şeklinde bulunur.

Şimdi de başlangıç koşullarının genişletilmiş matris formunu bulalım:

Bu problemde verilen denklem (3.8) başlangıç koşullarında $\beta_{ijk}=0$ ’dır. Ayrıca $x_0=0$ ve $c=0$ olduğundan denklem (2.28),

$$\boldsymbol{X_0} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]_{1\times4}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla,

$$\boldsymbol{X_0M} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]_{1\times4}$$

şeklinde bulunur. Denklem (3.8) başlangıç koşullarında,

$$\alpha_{11} = 1 \ , \ \alpha_{12} = 0 \ , \ \alpha_{13} = 0 \ , \ \lambda_1 = 1$$

$$\alpha_{21} = 0 \ , \ \alpha_{22} = 1 \ , \ \alpha_{23} = 0 \ , \ \lambda_2 = 0$$

$$\alpha_{31} = 0 \ , \ \alpha_{32} = 0 \ , \ \alpha_{33} = 1 \ , \ \lambda_3 = 0$$

olduğundan, denklem (2.31) denklemi,

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X_0M} & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{X_0M} & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{X_0M} \end{bmatrix}_{3\times12} \ , \ \boldsymbol{V} = [\boldsymbol{0}]_{3\times36} \ , \ \boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{3\times1}$$

olarak bulunur. Böylece denklem (3.8) başlangıç koşullarının denklem (2.32) matris denklemi,

$$\boldsymbol{UY} + \boldsymbol{V\overline{Y}} = \boldsymbol{\lambda}$$

şeklinde yazılabilir. Bu matris denkleminin de denklem (2.34) genişletilmiş matris formu,

$$[\boldsymbol{U}\,;\boldsymbol{V}\,;\boldsymbol{\lambda}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 & \dots & 0 & ; & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 & \dots & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 & \dots & 0 & ; & 0 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

Denklem (3.7) ile verilen denklem sisteminin elde edilen genişletilmiş matris formunun son 3 tane satırı silinerek, yerine sırasıyla denklem (3.8) başlangıç koşullarından elde edilen genişletilmiş matris formunun $1, 2, 3$ ncü satırları yazılır. Böylece yeni genişletilmiş matris formu,

$$\boldsymbol{W}^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{12\times 12} ,$$

$$\boldsymbol{C}^* = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{12\times 36} , \quad \boldsymbol{G}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{12\times 1}}$$

olarak yazılmak üzere,

$$[\boldsymbol{W}^* \, ; \, \boldsymbol{C}^* \, ; \, \boldsymbol{G}^*]$$

şeklinde yazılabilir. Bu yeni genişletilmiş matris formu da kısaca,

$$\boldsymbol{W}^*\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{C}^*\overline{\boldsymbol{Y}} = \boldsymbol{G}^*$$

matris denklemine dönüştürülür. Bu matris denkleminden bilinmeyen Taylor katsayıları,

$$y_1{}^{(0)}(0) = 1 \ , \ y_1{}^{(1)}(0) = -1 \ , \ y_1{}^{(2)}(0) = 1 \ , \ y_1{}^{(3)}(0) = -1 \ ,$$

$$y_2{}^{(0)}(0) = 0 \ , \ y_2{}^{(1)}(0) = 1 \ , \ y_2{}^{(2)}(0) = -1 \ , \ y_2{}^{(3)}(0) = -1 \ ,$$

$$y_3{}^{(0)}(0) = 0 \ \ , \ \ y_3{}^{(1)}(0) = 0 \ \ , \ \ y_3{}^{(2)}(0) = 0 \ \ , \ \ y_3{}^{(3)}(0) = 2$$

olarak bulunur. Bunları Taylor açılımında yerine koyarsak çözüm,

$$y_1(x) \cong 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$$

$$y_2(x) \cong x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$$

$$y_3(x) \cong \frac{x^3}{3}$$

olur. Bu denklem sisteminin $N = 5$ için çözümü,

$$y_1(x) \cong 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120}$$

$$y_2(x) \cong x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{5x^4}{24} + \frac{x^5}{40}$$

$$y_3(x) \cong \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{60}$$

ve $N = 7$ için çözümü,

$$y_1(x) \cong 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} - \frac{x^7}{5040}$$

$$y_2(x) \cong x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{5x^4}{24} + \frac{x^5}{40} - \frac{71x^6}{720} + \frac{19x^7}{1008}$$

$$y_3(x) \cong \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{60} + \frac{7x^6}{72} - \frac{47x^7}{2520}$$

olarak elde ederiz. Bu sonuçların [3], [4] ve [22]’de verilen sonuçlarla aynı olduğu görülür. N’nin değişik değerleri için ve diğer çözüm yöntemlerinden elde edilen sonuçlar Tablo 3.1., 3.2. ve 3.3.’de verilmiştir.

ÖRNEK 4:

$$\frac{dy_1(x)}{dx}+\kappa_1 y_1(x)-\kappa_2 y_2(x)y_3(x)=0$$

$$\frac{dy_2(x)}{dx}-\kappa_3 y_1(x)-\kappa_4 y_2(x)y_3(x)+\kappa_5 y_2^2(x)=0 \qquad (3.9)$$

$$\frac{dy_3(x)}{dx}-\kappa_6 y_2^2(x)=0$$

başlangıç şartları;

$$y_1(0)=1$$

$$y_2(0)=0 \qquad (3.10)$$

$$y_3(0)=0$$

olan lineer olmayan stiff diferansiyel denklem sistemini ele alalım. Burada

$$\kappa_1=0.04 \;\;,\;\; \kappa_2=0.01 \;\;,\;\; \kappa_3=400 \;\;,\;\; \kappa_4=100 \;\;,\;\; \kappa_5=3000 \;\;,\;\; \kappa_6=30$$

olarak verilmiştir [3], [22].

ÇÖZÜM:

Ele aldığımız diferansiyel denklem sistemi homojen olduğu için denklem (1.2)'de,

$$G_i(x)=0 \;\;;\;\; i=1,2,3$$

olarak alınır. Bu diferansiyel denklem sistemi için $n=3$'dür. Denklem sisteminin yaklaşık çözümünü $c=0$ noktası civarında ve $N=3$ değeri için araştıralım. Böylece denklem (2.1) ile verilen yaklaşık çözüm,

$$y_j(x)\cong\sum_{t=0}^{3}\frac{y_j{}^{(t)}(0)x^t}{t!} \;\;;\;\; j=1,2,3$$

şeklinde olacaktır. Bu diferansiyel denklem sisteminde,

$$A_1(x)=1 \;\;,\;\; B_{11}(x)=\kappa_1 \;\;,\;\; B_{12}(x)=0 \;\;,\;\; B_{13}(x)=0$$

$$A_2(x) = 1 \ \ , \ B_{21}(x) = -\kappa_3 \ \ , \ B_{22}(x) = 0 \ \ , \ B_{23}(x) = 0$$

$$A_3(x) = 1 \ \ , \ B_{31}(x) = 0 \ \ , \ B_{32}(x) = 0 \ \ , \ B_{33}(x) = 0$$

$$C_{111}(x) = C_{112}(x) = C_{113}(x) = C_{121}(x) = C_{122}(x) = C_{131}(x)$$

$$= C_{132}(x) = C_{133}(x) = 0 \ \ , \ C_{123}(x) = -\kappa_2$$

$$C_{211}(x) = C_{212}(x) = C_{213}(x) = C_{221}(x) = C_{231}(x) = C_{232}(x)$$

$$= C_{233}(x) = 0 \ \ , \ C_{222}(x) = \kappa_5 \ \ , \ C_{223}(x) = -\kappa_4$$

$$C_{311}(x) = C_{312}(x) = C_{313}(x) = C_{321}(x) = C_{323}(x) = C_{331}(x)$$

$$= C_{332}(x) = C_{333}(x) = 0 \ \ , \ C_{322}(x) = -\kappa_6$$

olduğu için, denklem (2.7), denklem (2.10), denklem (2.14) ve denklem (2.17),

$$\boldsymbol{A_1} = \boldsymbol{A_2} = \boldsymbol{A_3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4\times4} \ , \ \boldsymbol{B_{11}} = \begin{bmatrix} \kappa_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\kappa_1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\kappa_1}{6} \end{bmatrix}_{4\times4} \ ,$$

$$\boldsymbol{B_{21}} = \begin{bmatrix} -\kappa_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\kappa_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\kappa_3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\kappa_3}{6} \end{bmatrix}_{4\times4} \ , \ \mathbf{G_1} = \mathbf{G_2} = \mathbf{G_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{4\times1} \ ,$$

$$\boldsymbol{C_{123}} = \begin{bmatrix} -\kappa_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\kappa_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\kappa_2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\kappa_2}{6} \end{bmatrix}_{4\times4} \ , \ \boldsymbol{C_{222}} = \begin{bmatrix} \kappa_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\kappa_5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\kappa_5}{6} \end{bmatrix}_{4\times4} \ ,$$

$$\boldsymbol{C_{223}} = \begin{bmatrix} -\kappa_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\kappa_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\kappa_4}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\kappa_4}{6} \end{bmatrix}_{4\times4} \ , \ \boldsymbol{C_{322}} = \begin{bmatrix} -\kappa_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\kappa_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\kappa_6}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\kappa_6}{6} \end{bmatrix}_{4\times4} \ ,$$

$$\boldsymbol{B_{12}} = \boldsymbol{B_{13}} = \boldsymbol{B_{22}} = \boldsymbol{B_{23}} = \boldsymbol{B_{31}} = \boldsymbol{B_{32}} = \boldsymbol{B_{33}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4\times 4} ,$$

$$\boldsymbol{C_{111}} = \boldsymbol{C_{112}} = \boldsymbol{C_{113}} = \boldsymbol{C_{121}} = \boldsymbol{C_{122}} = \boldsymbol{C_{131}} = \boldsymbol{C_{132}} = \boldsymbol{C_{133}} = \boldsymbol{C_{211}} = \boldsymbol{C_{212}}$$

$$= \boldsymbol{C_{213}} = \boldsymbol{C_{221}} = \boldsymbol{C_{231}} = \boldsymbol{C_{232}} = \boldsymbol{C_{233}} = \boldsymbol{C_{311}} = \boldsymbol{C_{312}} = \boldsymbol{C_{313}} = \boldsymbol{C_{321}}$$

$$= \boldsymbol{C_{323}} = \boldsymbol{C_{331}} = \boldsymbol{C_{332}} = \boldsymbol{C_{333}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4\times 4}$$

olarak bulunur. Ayrıca bu diferansiyel denklem sistemi için $N = 3$ ve $c = 0$ olarak alındığından, denklem (2.2) ve denklem (2.14),

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \frac{1}{0!} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1!} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2!} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3!} \end{bmatrix}_{4\times 4} , \quad \boldsymbol{Y_j} = \begin{bmatrix} y_j^{(0)}(0) \\ y_j^{(1)}(0) \\ y_j^{(2)}(0) \\ y_j^{(3)}(0) \end{bmatrix}_{4\times 1} , \quad \boldsymbol{Y_{jk}} = \begin{bmatrix} Y_{jk}^{(0)}(0) \\ Y_{jk}^{(1)}(0) \\ Y_{jk}^{(2)}(0) \\ Y_{jk}^{(3)}(0) \end{bmatrix}_{4\times 1} ; \quad j,k = 1,2,3$$

olarak yazılabilir. Böylece denklem (3.9) ile verilen diferansiyel denklem sisteminin denklem (2.23) matris denklemi,

$$\boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} A_1 + B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & A_2 + B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & A_3 + B_{33} \end{bmatrix}_{12\times 12} , \quad \boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix}_{12\times 1} , \quad \boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} MG_1 \\ MG_2 \\ MG_3 \end{bmatrix}_{12\times 1} ,$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} C_{111} & C_{112} & C_{113} & C_{121} & C_{122} & C_{123} & C_{131} & C_{132} & C_{133} \\ C_{211} & C_{212} & C_{213} & C_{221} & C_{222} & C_{223} & C_{231} & C_{232} & C_{233} \\ C_{311} & C_{312} & C_{313} & C_{321} & C_{322} & C_{323} & C_{331} & C_{332} & C_{333} \end{bmatrix}_{12\times 36} ,$$

$$\boldsymbol{\overline{Y}} = [Y_{11} \quad Y_{12} \quad Y_{13} \quad Y_{21} \quad Y_{22} \quad Y_{23} \quad Y_{31} \quad Y_{32} \quad Y_{33}]^T{}_{36\times 1}$$

olmak üzere,

$$\boldsymbol{WY} + \boldsymbol{C\overline{Y}} = \boldsymbol{G}$$

olarak yazılabilir. Bu matris denkleminin de denklem (2.25) genişletilmiş matris formu,

$$
\boldsymbol{W} = \begin{bmatrix}
\kappa_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \kappa_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{\kappa_1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\kappa_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\kappa_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{\kappa_3}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0 & \frac{\kappa_1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\frac{\kappa_3}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}_{12\times 12}, \quad \boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{12\times 1},
$$

$$
\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix}
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\kappa_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\kappa_2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\kappa_2}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & \kappa_5 & 0 & 0 & 0 & -\kappa_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \kappa_5 & 0 & 0 & 0 & -\kappa_4 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \frac{\kappa_5}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\kappa_4}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & -\kappa_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & -\kappa_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -\frac{\kappa_6}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\kappa_2}{6} & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\kappa_5}{6} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\kappa_4}{6} & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\kappa_6}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{bmatrix}_{12\times 36}
$$

olmak üzere,

$$[\boldsymbol{W}\,;\ \boldsymbol{C}\,;\ \boldsymbol{G}]$$

şeklinde bulunur.

Şimdi de başlangıç koşullarının genişletilmiş matris formunu bulalım:

Bu problemde verilen denklem (3.10) başlangıç koşullarında $\beta_{ijk} = 0$ 'dır. Ayrıca $x_0 = 0$ ve $c = 0$ olduğundan denklem (2.28),

$$\boldsymbol{X_0} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]_{1\times4}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla,

$$\boldsymbol{X_0M} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]_{1\times4}$$

şeklinde bulunur. Denklem (3.10) ile verilen başlangıç koşullarında,

$$\alpha_{11} = 1 \ , \ \alpha_{12} = 0 \ , \ \alpha_{13} = 0 \ , \ \lambda_1 = 1$$

$$\alpha_{21} = 0 \ , \ \alpha_{22} = 1 \ , \ \alpha_{23} = 0 \ , \ \lambda_2 = 0$$

$$\alpha_{31} = 0 \ , \ \alpha_{32} = 0 \ , \ \alpha_{33} = 1 \ , \ \lambda_3 = 0$$

olduğundan, denklem (2.31),

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X_0M} & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{X_0M} & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{X_0M} \end{bmatrix}_{3\times12} \ , \ \boldsymbol{V} = [\boldsymbol{0}]_{\boldsymbol{12\times36}} \ , \ \boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{3\times1}$$

olarak bulunur. Böylece denklem (3.10) ile verilen başlangıç koşullarının denklem (2.32) matris denklemi,

$$\boldsymbol{UY} + \boldsymbol{V\overline{Y}} = \boldsymbol{\lambda}$$

şeklinde yazılabilir. Bu matris denkleminin de denklem (2.34) genişletilmiş matris formu,

$$[\boldsymbol{U}\,;\boldsymbol{V}\,;\boldsymbol{\lambda}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 & \dots & 0 & ; & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 & \dots & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 & \dots & 0 & ; & 0 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

Denklem (3.9) ile verilen denklem sisteminin elde edilen genişletilmiş matris formunun son 3 tane satırı silinerek, yerine sırasıyla denklem (3.10) başlangıç koşullarının elde edilen genişletilmiş matris formunun $1, 2, 3$ ncü satırları yazılır. Böylece yeni genişletilmiş matris formu,

$$
\boldsymbol{W}^{*}=\begin{bmatrix}
\kappa_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & \kappa_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & \dfrac{\kappa_1}{2} & \dfrac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-\kappa_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & -\kappa_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -\dfrac{\kappa_3}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{2}\\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}_{12\times 12}, \quad
\boldsymbol{G}^{*}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix}_{\boldsymbol{12\times 1}},
$$

$$
\boldsymbol{C}^{*}=\begin{bmatrix}
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\kappa_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\kappa_2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{\kappa_2}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0\\
0 & \cdots & 0 & \kappa_5 & 0 & 0 & 0 & -\kappa_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
0 & \cdots & 0 & 0 & \kappa_5 & 0 & 0 & 0 & -\kappa_4 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \dfrac{\kappa_5}{2} & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{\kappa_4}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0\\
0 & \cdots & 0 & -\kappa_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
0 & \cdots & 0 & 0 & -\kappa_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{\kappa_6}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{bmatrix}_{12\times 36}
$$

olarak yazılmak üzere,

$$[\boldsymbol{W}^{*}\,;\ \boldsymbol{C}^{*}\,;\ \boldsymbol{G}^{*}]$$

şeklinde yazılabilir. Bu yeni genişletilmiş matris formu da kısaca,

$$\boldsymbol{W}^{*}\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{C}^{*}\overline{\boldsymbol{Y}}=\boldsymbol{G}^{*}$$

matris denklemine dönüştürülür. Bu matris denkleminden bilinmeyen Taylor katsayıları,

$${y_1}^{(0)}(0)=1 \;\;,\;\; {y_1}^{(1)}(0)=-\kappa_1 \;\;,\;\; {y_1}^{(2)}(0)=\kappa_1^2 \;\;,\;\; {y_1}^{(3)}(0)=-\kappa_1^3 \;\;,$$

$${y_2}^{(0)}(0)=0\,,\;\; {y_2}^{(1)}(0)=\kappa_3\,,\;\; {y_2}^{(2)}(0)=-\kappa_1\kappa_3\,, {y_2}^{(3)}(0)=\kappa_3(\kappa_1^2-2\kappa_3\kappa_5)$$

$${y_3}^{(0)}(0)=0 \;\;,\;\; {y_3}^{(1)}(0)=0 \;\;,\;\; {y_3}^{(2)}(0)=0 \;\;,\;\; {y_3}^{(3)}(0)=2\kappa_3^2\kappa_6$$

olarak bulunur. Bunları Taylor açılımında yerine koyarsak çözüm,

$$y_1(x)\cong 1-x\kappa_1+\frac{1}{2}x^2\kappa_1^2-\frac{1}{6}x^3\kappa_1^3$$

$$y_2(x)\cong x\kappa_3-\frac{1}{2}x^2\kappa_1\kappa_3+\frac{1}{6}x^3\kappa_1^2\kappa_3-\frac{1}{3}x^3\kappa_3^2\kappa_5$$

$$y_3(x)\cong \frac{1}{3}x^3\kappa_3^2\kappa_6$$

olarak bulunur. Bu denklem sisteminin $N=5$ için çözümü,

$$y_1(x)\cong 1-x\kappa_1+\frac{1}{2}x^2\kappa_1^2-\frac{1}{6}x^3\kappa_1^3+\frac{1}{24}x^4\kappa_1^4+x^5(-\frac{\kappa_1^5}{120}+\frac{1}{15}\kappa_2\kappa_3^3\kappa_6)$$

$$y_2(x)\cong x\kappa_3-\frac{1}{2}x^2\kappa_1\kappa_3+x^3\left(\frac{1}{6}\kappa_1^2\kappa_3-\frac{1}{3}\kappa_3^2\kappa_5\right)+x^4\left(-\frac{1}{24}\kappa_1^3\kappa_3+\frac{1}{4}\kappa_1\kappa_3^2\kappa_5\right)$$

$$+x^5\left(\frac{1}{120}\kappa_1^4\kappa_3-\frac{7}{60}\kappa_1^2\kappa_3^2\kappa_5+\frac{2}{15}\kappa_3^3\kappa_5^2+\frac{1}{15}\kappa_3^3\kappa_4\kappa_6\right)$$

$$y_3(x)\cong \frac{1}{3}x^3\kappa_3^2\kappa_6-\frac{1}{4}x^4\kappa_1\kappa_3^2\kappa_6+x^5\left(\frac{7}{60}\kappa_1^2\kappa_3^2\kappa_6-\frac{2}{15}\kappa_3^3\kappa_5\kappa_6\right)$$

olarak ve $N=7$ için çözümü,

$$y_1(x)\cong 1-x\kappa_1+\frac{1}{2}x^2\kappa_1^2-\frac{1}{6}x^3\kappa_1^3+\frac{1}{24}x^4\kappa_1^4+x^5\left(-\frac{\kappa_1^5}{120}+\frac{1}{15}\kappa_2\kappa_3^3\kappa_6\right)$$

$$+x^6(\frac{\kappa_1^6}{720}-\frac{29}{360}\kappa_1\kappa_2\kappa_3^3\kappa_6)+x^7(-\frac{\kappa_1^7}{5040}+\frac{17}{315}\kappa_1^2\kappa_2\kappa_3^3\kappa_6-\frac{11}{315}\kappa_2\kappa_3^4\kappa_5\kappa_6)$$

$$y_2(x)\cong x\kappa_3-\frac{1}{2}x^2\kappa_1\kappa_3+x^3\left(\frac{1}{6}\kappa_1^2\kappa_3-\frac{1}{3}\kappa_3^2\kappa_5\right)+x^4\left(-\frac{1}{24}\kappa_1^3\kappa_3+\frac{1}{4}\kappa_1\kappa_3^2\kappa_5\right)$$

$$+x^5\left(\frac{1}{120}\kappa_1^4\kappa_3-\frac{7}{60}\kappa_1^2\kappa_3^2\kappa_5+\frac{2}{15}\kappa_3^3\kappa_5^2+\frac{1}{15}\kappa_3^3\kappa_4\kappa_6\right)$$

$$+x^6\left(-\frac{1}{720}\kappa_1^5\kappa_3+\frac{1}{24}\kappa_1^3\kappa_3^2\kappa_5-\frac{5}{36}\kappa_1\kappa_3^3\kappa_5^2+\frac{1}{90}\kappa_2\kappa_3^4\kappa_6-\frac{5}{72}\kappa_1\kappa_3^3\kappa_4\kappa_6\right)$$

$$+x^7(\frac{\kappa_1^6\kappa_3}{5040}-\frac{31\kappa_1^4\kappa_3^2\kappa_5}{2520}+\frac{107\kappa_1^2\kappa_3^3\kappa_5^2}{1260}-\frac{17}{315}\kappa_3^4\kappa_5^3-\frac{29\kappa_1\kappa_2\kappa_3^4\kappa_6}{2520}$$

$$+\frac{107\kappa_1^2\kappa_3^3\kappa_4\kappa_6}{2520}-\frac{17}{315}\kappa_3^4\kappa_4\kappa_5\kappa_6)$$

$$y_3(x)\cong\frac{1}{3}x^3\kappa_3^2\kappa_6-\frac{1}{4}x^4\kappa_1\kappa_3^2\kappa_6+x^5\left(\frac{7}{60}\kappa_1^2\kappa_3^2\kappa_6-\frac{2}{15}\kappa_3^3\kappa_5\kappa_6\right)$$

$$+x^6(-\frac{1}{24}\kappa_1^3\kappa_3^2\kappa_6+\frac{5}{36}\kappa_1\kappa_3^3\kappa_5\kappa_6)+x^7(\frac{31\kappa_1^4\kappa_3^2\kappa_6}{2520}-\frac{107\kappa_1^2\kappa_3^3\kappa_5\kappa_6}{1260}$$

$$+\frac{17}{315}\kappa_3^4\kappa_5^2\kappa_6+\frac{2}{105}\kappa_3^4\kappa_4\kappa_6^2)$$

olarak elde ederiz. Bu sonuçların [3] ve [22]'de verilen sonuçlarla aynı olduğu görülür. N'nin değişik değerleri için ve diğer çözüm yöntemlerinden elde edilen sonuçlar Tablo 4.1., 4.2. ve 4.3.'de verilmiştir.

ÖRNEK 5:

$$\frac{dy_1(x)}{dx}-2e^{4x}y_4^2(x)=0$$

$$\frac{dy_2(x)}{dx}-y_1(x)+y_3(x)=\cos x-e^{2x} \tag{3.11}$$

$$\frac{dy_3(x)}{dx}-y_2(x)+y_4(x)=e^{-x}-\sin x$$

$$\frac{dy_4(x)}{dx}+e^{-5x}y_1^2(x)=0$$

başlangıç şartları;

$$y_1(0)=1$$

$$y_2(0) = 1 \tag{3.12}$$

$$y_3(0) = 0$$

$$y_4(0) = 1$$

olan homojen ve lineer olmayan diferansiyel denklem sistemini ele alalım. Bu diferansiyel denklem sisteminin tam çözümü;

$$y_1(x) = e^{2x}$$

$$y_2(x) = \sin x + \cos x \tag{3.13}$$

$$y_3(x) = \sin x$$

$$y_4(x) = e^{-x}$$

olarak verilmiştir [19].

ÇÖZÜM:

Bu diferansiyel denklem sistemi için $n = 4$ ’dür. Denklem sisteminin yaklaşık çözümünü $c = 0$ noktası civarında ve $N = 3$ değeri için araştıralım. Böylece denklem (2.1) ile verilen yaklaşık çözüm,

$$y_j(x) \cong \sum_{t=0}^{3} \frac{y_j^{(t)}(0)x^t}{t!} \quad ; \quad j = 1,2,3,4$$

şeklinde olacaktır. Bu diferansiyel denklem sisteminde,

$$A_1(x) = 1 \ , \ B_{11}(x) = 0 \ , \ B_{12}(x) = 0 \ , \ B_{13}(x) = 0 \ , \ B_{14}(x) = 0 \ ,$$

$$A_2(x) = 1 \ , \ B_{21}(x) = -1 \ , \ B_{22}(x) = 0 \ , \ B_{23}(x) = 1 \ , \ B_{24}(x) = 0 \ ,$$

$$A_3(x) = 1 \ , \ B_{31}(x) = 0 \ , \ B_{32}(x) = -1 \ , \ B_{33}(x) = 0 \ , \ B_{34}(x) = 1 \ ,$$

$$A_4(x) = 1 \ , \ B_{41}(x) = 0 \ , \ B_{42}(x) = 0 \ , \ B_{43}(x) = 0 \ , \ B_{44}(x) = 0 \ ,$$

$$G_1(x) = 0 \ , \ G_2(x) = \cos x - e^{2x} \ , \ G_3(x) = e^{-x} - \sin x \ , \ G_4(x) = 0 \ ,$$

$$C_{111}(x) = C_{112}(x) = C_{113}(x) = C_{114}(x) = C_{121}(x) = C_{122}(x) = C_{123}(x)$$

$$= C_{124}(x) = C_{131}(x) = C_{132}(x) = C_{133}(x) = C_{134}(x) = C_{141}(x) = C_{142}(x)$$

$$= C_{143}(x) = 0 \quad , \quad C_{144}(x) = -2e^{4x} \quad ,$$

$$C_{211}(x) = C_{212}(x) = C_{213}(x) = C_{214}(x) = C_{221}(x) = C_{222}(x) = C_{223}(x)$$

$$= C_{224}(x) = C_{231}(x) = C_{232}(x) = C_{233}(x) = C_{234}(x) = C_{241}(x) = C_{242}(x)$$

$$= C_{243}(x) = C_{244}(x) = 0 \quad ,$$

$$C_{311}(x) = C_{312}(x) = C_{313}(x) = C_{314}(x) = C_{321}(x) = C_{322}(x) = C_{323}(x)$$

$$= C_{324}(x) = C_{331}(x) = C_{332}(x) = C_{333}(x) = C_{334}(x) = C_{341}(x) = C_{342}(x)$$

$$= C_{343}(x) = C_{344}(x) = 0 \quad ,$$

$$C_{412}(x) = C_{413}(x) = C_{414}(x) = C_{421}(x) = C_{422}(x) = C_{423}(x) = C_{424}(x)$$

$$= C_{431}(x) = C_{432}(x) = C_{433}(x) = C_{434}(x) = C_{441}(x) = C_{442}(x) = C_{443}(x)$$

$$= C_{444}(x) = 0 \quad , \quad C_{411}(x) = e^{-5x}$$

olduğu için, denklem (2.7), denklem (2.10), denklem (2.14) ve denklem (2.17),

$$\boldsymbol{A_1} = \boldsymbol{A_2} = \boldsymbol{A_3} = \boldsymbol{A_4} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4\times4} , \boldsymbol{B_{21}} = \boldsymbol{B_{32}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}_{4\times4} ,$$

$$\boldsymbol{B_{23}} = \boldsymbol{B_{34}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}_{4\times4} , \boldsymbol{G_1} = \boldsymbol{G_4} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{4\times1} , \boldsymbol{G_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -5 \\ -8 \end{bmatrix}_{4\times1} , \boldsymbol{G_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{4\times1} ,$$

$$\boldsymbol{C_{144}}=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0 & 0\\ -8 & -2 & 0 & 0\\ -16 & -8 & -1 & 0\\ -\frac{64}{3} & -16 & -4 & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}_{4\times4}\ ,\ \boldsymbol{C_{411}}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -5 & 1 & 0 & 0\\ \frac{25}{2} & -5 & \frac{1}{2} & 0\\ -\frac{125}{6} & \frac{25}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{1}{6}\end{bmatrix}_{4\times4}\ ,$$

$$\boldsymbol{B_{11}}=\boldsymbol{B_{12}}=\boldsymbol{B_{13}}=\boldsymbol{B_{14}}=\boldsymbol{B_{22}}=\boldsymbol{B_{24}}=\boldsymbol{B_{31}}=\boldsymbol{B_{33}}=\boldsymbol{B_{41}}=\boldsymbol{B_{42}}=\boldsymbol{B_{43}}$$

$$=\boldsymbol{B_{44}}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}_{4\times4}\ ,$$

$$\boldsymbol{C_{111}}=\boldsymbol{C_{112}}=\boldsymbol{C_{113}}=\boldsymbol{C_{114}}=\boldsymbol{C_{121}}=\boldsymbol{C_{122}}=\boldsymbol{C_{123}}=\boldsymbol{C_{124}}=\boldsymbol{C_{131}}=\boldsymbol{C_{132}}$$

$$=\boldsymbol{C_{133}}=\boldsymbol{C_{134}}=\boldsymbol{C_{141}}=\boldsymbol{C_{142}}=\boldsymbol{C_{143}}=\boldsymbol{C_{211}}=\boldsymbol{C_{212}}=\boldsymbol{C_{213}}=\boldsymbol{C_{214}}=\boldsymbol{C_{221}}$$

$$=\boldsymbol{C_{222}}=\boldsymbol{C_{223}}=\boldsymbol{C_{224}}=\boldsymbol{C_{231}}=\boldsymbol{C_{232}}=\boldsymbol{C_{233}}=\boldsymbol{C_{234}}=\boldsymbol{C_{241}}=\boldsymbol{C_{242}}=\boldsymbol{C_{243}}$$

$$=\boldsymbol{C_{244}}=\boldsymbol{C_{311}}=\boldsymbol{C_{312}}=\boldsymbol{C_{313}}=\boldsymbol{C_{314}}=\boldsymbol{C_{321}}=\boldsymbol{C_{322}}=\boldsymbol{C_{323}}=\boldsymbol{C_{324}}=\boldsymbol{C_{331}}$$

$$=\boldsymbol{C_{332}}=\boldsymbol{C_{333}}=\boldsymbol{C_{334}}=\boldsymbol{C_{341}}=\boldsymbol{C_{342}}=\boldsymbol{C_{343}}=\boldsymbol{C_{344}}=\boldsymbol{C_{412}}=\boldsymbol{C_{413}}=\boldsymbol{C_{414}}$$

$$=\boldsymbol{C_{421}}=\boldsymbol{C_{422}}=\boldsymbol{C_{423}}=\boldsymbol{C_{424}}=\boldsymbol{C_{431}}=\boldsymbol{C_{432}}=\boldsymbol{C_{433}}=\boldsymbol{C_{434}}=\boldsymbol{C_{441}}=\boldsymbol{C_{442}}$$

$$=\boldsymbol{C_{443}}=\boldsymbol{C_{444}}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}_{4\times4}$$

olarak bulunur. Diferansiyel denklem sistemi için $N=3$ ve $c=0$ olarak alındığından, denklem (2.2) ve denklem (2.14),

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}\frac{1}{0!} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{1!} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2!} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3!}\end{bmatrix}_{4\times4}\ ,\ \boldsymbol{Y_j}=\begin{bmatrix}y_j^{(0)}(0)\\ y_j^{(1)}(0)\\ y_j^{(2)}(0)\\ y_j^{(3)}(0)\end{bmatrix}_{4\times1}\ ,\ \boldsymbol{Y_{jk}}=\begin{bmatrix}Y_{jk}^{(0)}(0)\\ Y_{jk}^{(1)}(0)\\ Y_{jk}^{(2)}(0)\\ Y_{jk}^{(3)}(0)\end{bmatrix}_{4\times1}\ ;\ j,k=1,2,3,4$$

olarak yazılabilir. Böylece denklem (3.11) ile verilen diferansiyel denklem sisteminin denklem (2.23) matris denklemi,

$$\boldsymbol{W}=\begin{bmatrix} A_1+B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & A_2+B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ B_{31} & B_{32} & A_3+B_{33} & B_{34} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & A_4+B_{44} \end{bmatrix}_{16\times16}, \quad \boldsymbol{G}=\begin{bmatrix} MG_1 \\ MG_2 \\ MG_3 \\ MG_4 \end{bmatrix}_{16\times1},$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} C_{111} & C_{112} & C_{113} & C_{114} & \cdots & C_{141} & C_{142} & C_{143} & C_{144} \\ C_{211} & C_{212} & C_{213} & C_{214} & \cdots & C_{241} & C_{242} & C_{243} & C_{244} \\ C_{311} & C_{312} & C_{313} & C_{314} & \cdots & C_{341} & C_{342} & C_{343} & C_{344} \\ C_{411} & C_{412} & C_{413} & C_{414} & \cdots & C_{441} & C_{442} & C_{443} & C_{444} \end{bmatrix}_{16\times64}, \quad \boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{bmatrix}_{16\times1},$$

$$\overline{\boldsymbol{Y}}=[Y_{11} \quad Y_{12} \quad Y_{13} \quad Y_{14} \quad \cdots \quad Y_{41} \quad Y_{42} \quad Y_{43} \quad Y_{44}]^T{}_{64\times1}$$

olmak üzere,

$$\boldsymbol{WY}+\boldsymbol{C}\overline{\boldsymbol{Y}}=\boldsymbol{G}$$

olarak yazılabilir. Bu matris denkleminin de denklem (2.25) genişletilmiş matris formu,

$$\boldsymbol{W}=\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}_{16\times16},$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -8 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -16 & -8 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{25}{2} & -5 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{64}{3} & -16 & -4 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{125}{6} & \frac{25}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{1}{6} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{16\times 64},$$

$$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -\frac{5}{2} & 1 & -2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix}^{T}_{16\times 1}$$

olmak üzere,

$$[\boldsymbol{W}\,;\,\boldsymbol{C}\,;\,\boldsymbol{G}]$$

şeklinde bulunur.

Şimdi de başlangıç koşullarının genişletilmiş matris formunu bulalım:

Bu problemde verilen denklem (3.12) başlangıç koşullarında $\beta_{ijk}=0$ 'dır. Ayrıca $x_0=0$ ve $c=0$ olduğundan denklem (2.28),

$$\boldsymbol{X_0}=[1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]_{1\times 4}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla,

$$\boldsymbol{X_0 M}=[1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]_{1\times 4}$$

şeklinde bulunur. Denklem (3.12) ile verilen başlangıç koşullarında,

$$\alpha_{11}=1\ ,\ \alpha_{12}=0\ ,\ \alpha_{13}=0\ ,\ \alpha_{14}=0\ ,\ \lambda_1=1$$

$\alpha_{21} = 0 \ \ , \ \alpha_{22} = 1 \ \ , \ \alpha_{23} = 0 \ \ , \ \ \alpha_{24} = 0 \ \ , \ \lambda_2 = 1$

$\alpha_{31} = 0 \ \ , \ \alpha_{32} = 0 \ \ , \ \alpha_{33} = 1 \ \ , \ \ \alpha_{34} = 0 \ \ , \ \lambda_3 = 0$

$\alpha_{41} = 0 \ \ , \ \alpha_{42} = 0 \ \ , \ \alpha_{43} = 0 \ \ , \ \ \alpha_{44} = 1 \ \ , \ \lambda_3 = 1$

olduğundan, denklem (2.31),

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X_0M} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{X_0M} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{X_0M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{X_0M} \end{bmatrix}_{4\times16} \quad , \ \boldsymbol{V} = [\boldsymbol{0}]_{4\times64} \quad , \ \boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{4\times1}$$

olarak bulunur. Böylece denklem (3.12) ile verilen başlangıç koşullarının denklem (2.32) matris denklemi,

$$\boldsymbol{UY} + \boldsymbol{V\bar{Y}} = \boldsymbol{\lambda}$$

şeklinde yazılabilir. Bu matris denkleminin de denklem (2.34) genişletilmiş matris formu,

$$[\boldsymbol{U}\,;\boldsymbol{V}\,;\boldsymbol{\lambda}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 & \dots & 0 & ; & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 & \dots & 0 & ; & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 & \dots & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 & \dots & 0 & ; & 1 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

Denklem (3.11) ile verilen denklem sisteminin elde edilen genişletilmiş matris formunun son 4 tane satırı silinerek, yerine sırasıyla denklem (3.12) başlangıç koşullarının elde edilen genişletilmiş matris formunun $1, 2, 3, 4$ ncü satırları yazılır. Böylece yeni genişletilmiş matris formu,

$$
\boldsymbol{W}^{*}=\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}_{16\times 16},
$$

$$
\boldsymbol{C}^{*}=\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -2 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -8 & -2 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -16 & -8 & -1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-5 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\frac{25}{2} & -5 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}_{16\times 64},
$$

$$
\boldsymbol{G}^{*}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -\frac{5}{2} & 1 & -2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}^{T}_{16\times 1}
$$

olarak yazılmak üzere,

$$[\boldsymbol{W}^{*}\ ;\ \boldsymbol{C}^{*}\ ;\ \boldsymbol{G}^{*}]$$

şeklinde yazılabilir. Bu yeni genişletilmiş matris formu da kısaca,

$$\boldsymbol{W}^{*}\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{C}^{*}\overline{\boldsymbol{Y}} = \boldsymbol{G}^{*}$$

matris denklemine dönüştürülür. Bu matris denkleminden bilinmeyen Taylor katsayıları,

$$y_1^{(0)}(0) = 1 \ \ , \ y_1^{(1)}(0) = 2 \ \ , \ y_1^{(2)}(0) = 4 \ \ , \ y_1^{(3)}(0) = 8 \ \ ,$$

$$y_2^{(0)}(0) = 1 \ \ , \ y_2^{(1)}(0) = 1 \ \ , \ y_2^{(2)}(0) = -1 \ \ , \ y_2^{(3)}(0) = -1 \ \ ,$$

$$y_3^{(0)}(0) = 0 \ \ , \ y_3^{(1)}(0) = 1 \ \ , \ y_3^{(2)}(0) = 0 \ \ , \ y_3^{(3)}(0) = -1 \ \ ,$$

$$y_4^{(0)}(0) = 1 \ \ , \ y_4^{(1)}(0) = -1 \ \ , \ y_4^{(2)}(0) = 1 \ \ , \ y_4^{(3)}(0) = -1$$

olarak bulunur. Bunları Taylor açılımında yerine koyarsak çözüm,

$$y_1(x) \cong 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4x^3}{3}$$

$$y_2(x) \cong 1 + x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$$

$$y_3(x) \cong x - \frac{x^3}{6}$$

$$y_4(x) \cong 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$$

biçiminde bulunur. Bu denklem sisteminin $N = 5$ için çözümü,

$$y_1(x) \cong 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4x^3}{3} + \frac{2x^4}{3} + \frac{4x^5}{15}$$

$$y_2(x) \cong 1 + x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}$$

$$y_3(x) \cong x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

$$y_4(x) \cong 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120}$$

biçiminde bulunur. Bu denklem sisteminin $N = 7$ için çözümü,

$$y_1(x) \cong 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4x^3}{3} + \frac{2x^4}{3} + \frac{4x^5}{15} + \frac{4x^6}{45} + \frac{8x^7}{315}$$

$$y_2(x) \cong 1 + x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^6}{720} - \frac{x^7}{5040}$$

$$y_3(x) \cong x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}$$

$$y_4(x) \cong 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} - \frac{x^7}{5040}$$

biçiminde bulunur. N'nin değişik değerleri için ve diğer çözüm yöntemlerinden elde edilen sonuçlar Tablo 5.1., 5.2., 5.3. ve 5.4.'de verilmiştir.

4. BÖLÜM

SONUÇ VE ÖNERİLER

Taylor matris yöntemi, daha önce Sezer ve arkadaşları ve diğer araştırmacılar tarafından çeşitli türden diferansiyel ve integral denklemlere uygulanmıştır [24-42]. Bu çalışmalar sonucunda, Taylor matris yöntemiyle diferansiyel ve integral denklemlerin yaklaşık çözümünün, büyük işlem karmaşıklıklarına ve zorluklarına yol açmadan bilgisayar programları yardımıyla kolaylıkla hesaplanabildiği kanıtlanmıştır.

Bu çalışmada da Taylor matris yöntemi birinci mertebeden lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklem sistemlerine uygulanmış ve denklem sistemlerinin yaklaşık çözümleri elde edilmiştir. Elde edilen yaklaşık çözümler, denklem sistemlerinin diğer yaklaşık veya tam çözüm yöntemlerinden elde edilen sonuçları ile karşılaştırılmış ve sonuçların aynı olduğu görülmüştür.

Sonuç olarak, Taylor matris yöntemiyle birinci mertebeden lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklem sistemlerinin yaklaşık çözümünün, büyük işlem zorluklarına ve karmaşıklıklarına yol açmadan bilgisayar programları yardımıyla kolaylıkla hesaplanabildiği kanıtlanmıştır. Bu da Taylor matris yönteminin birinci mertebeden lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklem sistemlerinin yaklaşık çözümü için doğru ve kullanışlı bir yöntem olduğunu gösterir. Ayrıca, yöntem yüksek mertebeden ve daha farklı tipte olan lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklem sistemlerine genişletilebilir.

EKLER

Tablo 1.1. Örnek 1'deki $y_1(x)$'in çözümlerinin karşılaştırılması

	TAYLOR MATRİS YÖNTEMİ			KUVVET SERİSİ YÖNTEMİ	DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM YÖN.	TAM ÇÖZÜM	HATA
x	$N=3$	$N=5$	$N=7$	$N=6$	$N=16$		$\lvert TÇ-TMY\ N=7\rvert$
0.000	1.000000000000	1.000000000000	1.000000000000	1.000000000000	1.000000000000	1.000000000000	0.000000000000
0.002	0.998721583250	0.998721369916	0.998721369939	0.998721369939	0.998721369939	0.998721369939	0.000000000000
0.004	0.995971666000	0.995968252667	0.995968254090	0.995968254123	0.995968254123	0.995968254090	0.000000000000
0.006	0.991878247750	0.991860967751	0.991860983771	0.991860984340	0.991860984349	0.991860983780	0.000000000009
0.008	0.986569328000	0.986514714671	0.986514803617	0.986514807878	0.986514807963	0.986514803703	0.000000000086
0.010	0.980172906250	0.980039572929	0.980039908167	0.980039928485	0.980039928992	0.980039908675	0.000000000508

Tablo 1.2. Örnek 1'deki $y_2(x)$'in çözümlerinin karşılaştırılması

	TAYLOR MATRİS YÖNTEMİ			KUVVET SERİSİ Y.	DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM Y.	TAM ÇÖZÜM	HATA
x	$N=3$	$N=5$	$N=7$	$N=6$	$N=16$		$\|TÇ-TMY\ N=7\|$
0.000	0.000000000000	0.000000000000	0.000000000000	0.000000000000	0.000000000000	0.000000000000	0.000000000000
0.002	0.038700249916	0.038700459836	0.038700459859	0.038700458192	0.038700459859	0.038700459859	0.000000000000
0.004	0.075800999333	0.075804303440	0.075804304896	0.075804278230	0.075804304896	0.075804304896	0.000000000000
0.006	0.111302247750	0.111318698311	0.111318714900	0.111318579905	0.111318714892	0.111318714892	0.000000000008
0.008	0.145203994666	0.145255112751	0.145255205958	0.145254779313	0.145255205876	0.145255205876	0.000000000082
0.010	0.177506239583	0.177628906263	0.177629261818	0.177628220215	0.177629261332	0.177629261332	0.000000000486

Tablo 1.3. Örnek 1'deki $y_3(x)$'in çözümlerinin karşılaştırılması

	TAYLOR MATRİS YÖNTEMİ			KUVVET SERİSİ Y.	DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM Y	TAM ÇÖZÜM	HATA
x	$N=3$	$N=5$	$N=7$	KSY $N=6$	DTY $N=16$		$\|TÇ-TMYN=7\|$
0.000	-1.000000000000	-1.000000000000	-1.000000000000	-1.000000000000	-1.000000000000	-1.000000000000	0.000000000000
0.002	-0.960300249916	-0.960300039996	-0.960300039973	-0.960300039973	-0.960300039973	-0.960300039973	0.000000000000
0.004	-0.922200999333	-0.922197695226	-0.922197693770	-0.922197693770	-0.922197693770	-0.922197693770	0.000000000000
0.006	-0.885702247750	-0.885685797191	-0.885685780602	-0.885685780602	-0.885685780611	-0.885685780611	0.000000000009
0.008	-0.850803994666	-0.850752876591	-0.850752783385	-0.850752783385	-0.850752783467	-0.850752783467	0.000000000082
0.010	-0.817506239583	-0.817383572929	-0.817383217374	-0.817383217376	-0.817383217859	-0.817383217859	0.000000000485

Tablo 2.1. Örnek 2'deki $y_1(x)$'in çözümlerinin karşılaştırılması

	TAYLOR MATRİS YÖNTEMİ			TAM ÇÖZÜM	HATA
x	$N=3$	$N=5$	$N=7$		$\lvert TÇ - TMY\ N=7\rvert$
0.0	1.000000000000	1.000000000000	1.000000000000	1.000000000000	0.000000000000
0.2	1.221333333333	1.221402666666	1.221402758095	1.221402758160	0.000000000065
0.4	1.490666666666	1.491818666666	1.491824680634	1.491824697641	0.000000017007
0.6	1.816000000000	1.822048000000	1.822118354285	1.822118800390	0.000000446105
0.8	2.205333333333	2.225130666666	2.225536365714	2.225540928492	0.000004562778
1.0	2.666666666666	2.716666666666	2.718253968253	2.718281828459	0.000027860206

Tablo 2.2. Örnek 2'deki $y_2(x)$'in çözümlerinin karşılaştırılması

	TAYLOR MATRİS YÖNTEMİ			TAM ÇÖZÜM	HATA
x	$N=3$	$N=5$	$N=7$		$\lvert TÇ - TMY\ N=7\rvert$
0.0	0.000000000000	0.000000000000	0.000000000000	0.000000000000	0.000000000000
0.2	0.198666666666	0.198669333333	0.198669330793	0.198669330795	0.000000000002
0.4	0.389333333333	0.389418666666	0.389418341587	0.389418342308	0.000000000721
0.6	0.564000000000	0.564647999999	0.564642445714	0.564642473395	0.000000027681
0.8	0.714666666666	0.717397333333	0.717355723174	0.717356090899	0.0000003677725
1.0	0.833333333333	0.841666666666	0.841468253968	0.841470984807	0.000002730839

Tablo 2.3. Örnek 2'deki $y_3(x)$'in çözümlerinin karşılaştırılması

	TAYLOR MATRİS YÖNTEMİ			TAM ÇÖZÜM	HATA
x	$N=3$	$N=5$	$N=7$		$\lvert TÇ - TMY\ N=7\rvert$
0.0	2.000000000000	2.000000000000	2.000000000000	2.000000000000	0.000000000000
0.2	2.201333333333	2.201469333333	2.201469335873	2.201469336001	0.000000000128
0.4	2.410666666666	2.412885333333	2.412885658412	2.412885691644	0.000000033232
0.6	2.636000000000	2.647448000000	2.647453554285	2.647454415300	0.000000861015
0.8	2.885333333333	2.922197333333	2.922238943492	2.922247637839	0.000008494347
1.0	3.166666666666	3.258333333333	3.258531746031	3.258584134327	0.000052388296

Tablo 3.1. Örnek 3'deki $y_1(x)$'in çözümlerinin karşılaştırılması

	TAYLOR MATRİS YÖNTEMİ			KUVVET SERİSİ Y.	ADOMİAN' IN AYRIŞIM Y.	DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM Y.
x	$N=3$	$N=5$	$N=7$	$N=5$	$N=4$	$N=7$
0.00	1.000000000000	1.000000000000	1.000000000000	1.000000000000	1.000000000000	1.000000000000
0.02	0.980198666666	0.980198673306	0.980198673306	0.980198673306	1.019798673333	0.980198673306
0.04	0.960789333333	0.960789439146	0.960789439152	0.960789439146	1.039189440000	0.960789439152
0.06	0.941763999999	0.941764533520	0.941764533584	0.941764533520	1.058164540000	0.941764533584
0.08	0.923114666666	0.923116346026	0.923116346386	0.923116346026	1.076716373333	0.923116346386
0.10	0.904830000000	0.904837416666	0.904837418035	0.904837416666	1.094837500000	0.904837418035

Tablo 3.2. Örnek 3'deki $y_2(x)$'in çözümlerinin karşılaştırılması

	TAYLOR MATRİS YÖNTEMİ			KUVVET SERİSİ Y.	ADOMİAN' IN AYRIŞIM Y.	DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM Y.
x	$N=3$	$N=5$	$N=7$	$N=5$	$N=4$	$N=7$
0.00	0.000000000000	0.000000000000	0.000000000000	0.000000000000	0.000000000000	0.000000000000
0.02	0.019798666666	0.019798700080	0.019798700073	0.019798700106	0.019798700000	0.019798700073
0.04	0.039189333333	0.039189869226	0.039189868825	0.039189870080	0.039189866666	0.039189868825
0.06	0.058163999999	0.058166719439	0.058166714891	0.058166725919	0.058166699999	0.058166714891
0.08	0.076714666666	0.076723281920	0.076723256464	0.076723309226	0.076723200000	0.076723256464
0.10	0.094833333333	0.094854416666	0.094854319940	0.094854500000	0.094854166666	0.094854319940

Tablo 3.3. Örnek 3'deki $y_3(x)$'in çözümlerinin karşılaştırılması

	TAYLOR MATRİS YÖNTEMİ			KUVVET SERİSİ Y.	ADOMİAN' IN AYRIŞIM Y.	DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM Y.
x	$N=3$	$N=5$	$N=7$	$N=5$	$N=4$	$N=7$
0.00	0.000000000000	0.000000000000	0.000000000000	0.000000000000	0.000000000000	0.000000000000
0.02	0.000002666666	0.000002626613	0.000002626619	0.000002626613	0.000002626666	0.000002626619
0.04	0.000021333333	0.000020691626	0.000020692021	0.000020691626	0.000020693333	0.000020692021
0.06	0.000071999999	0.000068747039	0.000068751523	0.000068747039	0.000068759999	0.000068751523
0.08	0.000170666666	0.000160372053	0.000160397148	0.000160372053	0.000160426666	0.000160397148
0.10	0.000333333333	0.000308166666	0.000308262023	0.000308166666	0.000308333333	0.000308262023

Tablo 4.1. Örnek 4'deki $y_1(x)$'in çözümlerinin karşılaştırılması

	TAYLOR MATRİS YÖNTEMİ			ADOMİAN' IN AYRIŞIM Y.	DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM Y.
x	$N=3$	$N=5$	$N=7$	$N=3$	$N=6$
0.0000	1.000000000000	1.000000000000	1.000000000000	1.000000000000	1.000000000000
0.0002	0.999992000032	0.999992000032	0.999992000032	0.999992000032	0.999992000032
0.0004	0.999984000127	0.999984000141	0.999984000139	0.999984000127	0.999984000141
0.0006	0.999976000287	0.999976000387	0.999976000365	0.999976000287	0.999976000387
0.0008	0.999968000511	0.999968000931	0.999968000762	0.999968000511	0.999968000931
0.0010	0.999960000799	0.999960002079	0.999960001275	0.999960000799	0.999960002079

Tablo 4.2. Örnek 4'deki $y_2(x)$'in çözümlerinin karşılaştırılması

	TAYLOR MATRİS YÖNTEMİ			ADOMİAN' IN AYRIŞIM Y.	DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM Y.
x	$N=3$	$N=5$	$N=7$	$N=3$	$N=6$
0.0000	0.000000000000	0.000000000000	0.000000000000	0.000000000000	0.000000000000
0.0002	0.078719680000	0.078744267776	0.078743789936	0.079359680000	0.079999687680
0.0004	0.149758720006	0.150545405957	0.150484255475	0.154878720006	0.159998842880
0.0006	0.205437120023	0.211410705424	0.210365966764	0.222717120023	0.239997742080
0.0008	0.238074880054	0.263246864409	0.255420441642	0.279034880054	0.319996846080
0.0010	0.239992000106	0.316809600017	0.279491108218	0.319992000106	0.399996800000

Tablo 4.3. Örnek 4'deki $y_3(x)$'in çözümlerinin karşılaştırılması

	TAYLOR MATRİS YÖNTEMİ			ADOMİAN' IN AYRIŞIM Y.	DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM Y.
x	$N = 3$	$N = 5$	$N = 7$	$N = 3$	$N = 6$
0.0000	0.000000000000	0.000000000000	0.000000000000	0.000000000000	0.000000000000
0.0002	0.000012799999	0.000012554163	0.000012558940	0.000012799999	0.000012799920
0.0004	0.000102399999	0.000095145824	0.000095145824	0.000102399999	0.000102398674
0.0006	0.000345599999	0.000285874099	0.000296319233	0.000345599999	0.000345593042
0.0008	0.000819199999	0.000567522099	0.000645769452	0.000819199999	0.000819177240
0.0010	0.001599999999	0.000831952000	0.001205056457	0.001599999999	0.001599942559

Tablo 5.1. Örnek 5'deki $y_1(x)$'in çözümlerinin karşılaştırılması

	TAYLOR MATRİS YÖNTEMİ			TAM ÇÖZÜM	HATA
x	$N = 3$	$N = 5$	$N = 7$		$\vert TÇ - TMY\ N = 7\vert$
0.0	1.000000000000	1.000000000000	1.000000000000	1.000000000000	0.000000000000
0.2	1.490666666666	1.491818666666	1.491824680634	1.491824697641	0.000000017007
0.4	2.205333333333	2.225130666666	2.225536365714	2.225540928492	0.000004562778
0.6	3.208000000000	3.315136000000	3.319994148571	3.320116922736	0.000122774165
0.8	4.562666666666	4.923114666666	4.951742455873	4.953032424395	0.001289968522
1.0	6.333333333333	7.266666666666	7.380952380952	7.389056098930	0.008103717978

Tablo 5.2. Örnek 5’deki $y_2(x)$’in çözümlerinin karşılaştırılması

	TAYLOR MATRİS YÖNTEMİ			TAM ÇÖZÜM	HATA
x	$N=3$	$N=5$	$N=7$		$\lvert TÇ-TMY\ N=7\rvert$
0.0	1.000000000000	1.000000000000	1.000000000000	1.000000000000	0.000000000000
0.2	1.178666666666	1.178736000000	1.178735908571	1.178735908636	0.000000000065
0.4	1.309333333333	1.310485333333	1.310479319365	1.310479336311	0.000000016946
0.6	1.384000000000	1.390048000000	1.389977645714	1.389978088304	0.000000442590
0.8	1.394666666666	1.414464000000	1.414058300952	1.414062800246	0.000004499294
1.0	1.333333333333	1.383333333333	1.381746031746	1.381773290676	0.000027258930

Tablo 5.3. Örnek 5’deki $y_3(x)$’in çözümlerinin karşılaştırılması

	TAYLOR MATRİS YÖNTEMİ			TAM ÇÖZÜM	HATA
x	$N=3$	$N=5$	$N=7$		$\lvert TÇ-TMY\ N=7\rvert$
0.0	0.000000000000	0.000000000000	0.000000000000	0.000000000000	0.000000000000
0.2	0.198666666666	0.198669333333	0.198669330793	0.198669330795	0.000000000002
0.4	0.389333333333	0.389418666666	0.389418341587	0.389418342308	0.000000000721
0.6	0.564000000000	0.564647999999	0.564642445714	0.564642473395	0.000000027681
0.8	0.714666666666	0.717397333333	0.717355723174	0.717356090899	0.000000367725
1.0	0.833333333333	0.841666666666	0.841468253968	0.841470984807	0.000002730839

Tablo 5.4. Örnek 5'deki $y_4(x)$'in çözümlerinin karşılaştırılması

	TAYLOR MATRİS YÖNTEMİ			TAM ÇÖZÜM	HATA
x	$N=3$	$N=5$	$N=7$		$\|TÇ - TMY\ N=7\|$
0.0	1.000000000000	1.000000000000	1.000000000000	1.000000000000	0.000000000000
0.2	0.818666666666	0.818730666666	0.818730753015	0.818730753077	0.000000000062
0.4	0.669333333333	0.670314666666	0.670320030476	0.670320046035	0.000000015559
0.6	0.544000000000	0.5487520000000	0.548811245714	0.548811636094	0.000000390380
0.8	0.434666666666	0.449002666666	0.449325145396	0.449328964117	0.000003818721
1.0	0.333333333333	0.366666666666	0.367857142857	0.367879441171	0.000022298314

KAYNAKLAR

1. Lambert, J. D., A Stable Sequence of Steplengths for Euler's Rule Applied to Stiff Systems of Differential Equations, Computers & Mathematics with Applications, 12, 1141-1151, 1986.

2. Burrden, R.L., Faires, J.D., Numerical Analysis, PWS-KENT Publishing Company, Boston, 1993.

3. Kaya, D., A Reliable Method for the Numerical Solution of the Kinetics Problems, Applied Mathematics and Computation, 156, 261-270, 2004.

4. Guzel, N., Bayram, M., On the Numerical Solution of Stiff Systems, Applied Mathematics and Computation, 170, 230-236, 2005.

5. Sorkun, H.H., Yalçinbaş, S., Approximate Solutions of Linear Volterra İntegral Equation Systems with Variable Coefficients, Applied Mathematical Modelling, 34, 3451-3464, 2010.

6. Adomian, G., Rach, R., Elrod, M., The Decomposition Method Applied to Stiff Systems, Mathematics nad Computers in Simulation, 30, 271-276, 1988.

7. Adomian, G., A Review of the Decomposition Method in Applied Mathematics, J. Math. Anal. Appl., 135, 501-544, 1988.

8. Adomian, G., Solving Frontier Problems of Physics, The Decomposition Method, Kluwer Academic Publishers, Boston, MA, 1994.

9. Biazar, J., Babolian, E., Islam, R., Solution of the System of Ordinary Differential Equations by Adomian Decomposition Method, Applied Mathematics and Computation, 147, 713-719, 2004.

10. He, J.H., A New Approach to Nonlinear Partial Differential Equations, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 2, 230-235, 1997.

11. He, J.H., Variational İteration Method for Delay Differential Equations, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 2, 235-236, 1997.

12. He, J.H., Approximate Solution of Nonlinear Differential Equations with Convolution Product Nonlinearities, Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., 167, 69-73, 1998.

13. He, J.H., Approximate Analytical Solution for Seepage Flow with Fractional Derivatives in Porous Media, Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., 167, 57-68, 1998.

14. He, J.H., Approximate Solution of Nonlinear Differential Equations with Convolution Product Nonlinearities, Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., 167, 69-73, 1998.

15. He, J.H., Variational İteration Method-A Kind of Non-Linear Analytical Technique Some Examples, Int. J. Nonlinear Mech., 34, 699-708, 1999.

16. He, J.H., Variational İteration Method for Autonomous Ordinary Differential Systems, Appl. Math. Comput., 114, 115-123, 2000.

17. He, J.H., Wu X.H., Construction of Solitary Solution and Compaction-Like Solution by Variational İteration Method, Chaos Soliton. Fract., 29, 108-113, 2006.

18. He, J.H., Some Asymptotic Methods for Strongly Nonlinear Equations, Int. J. Mod. Phys. B, 20, 1141-1199, 2006.

19. Biazar, J., Ghazvini, H., He's Variational İteration Method for Solving Linear and Non-Linear Systems of Ordinary Differential Equations, Applied Mathematics and Computation, 191, 287-297, 2007.

20. Tatari, M., Dehghan, M., Improvement of He's Variational İteration Method for Solving Systems of Differential Equations, Computers and Mathematics with Applications, 58, 2160-2166, 2009.

21. Zhou, J.K., Differential Transformation and İts Application for Electrical Circuits, Huarjung University Press, Wuuhahn, China, 1986.

22. Abdel-Halim Hassan, I. H., Application to Differential Transformation Method for Solving Systems of Differential Equations, Applied Mathematical Modelling, 32, 2552-2559, 2008.

23. Thongmoon, M., Pusjuso, S., The Numerical Solutions of Differential Transform Method and the Laplace Transform Method for a System of Differential Equations, Nonlinear Analysis, Hybrid Systems, 4, 425-431, 2010.

24. Kanwal, R.P., Liu, K.C., A Taylor Expansion Approach for Solving İntegral Equations, Int. J. Math. Educ. Sci. Technol., 20, 411-414, 1989.

25. Sezer, M., Taylor Polynomial Solutions of Volterra İntegral Equations, Int. J. Math. Educ. Sci. Technol., 25, 625-633, 1994.

26. Sezer, M., A Method for Approximate Solution of the Second Order Linear Differential Equations in Terms of Taylor Polynomials, Int. J. Math. Educ. Sci. Technol., 27, 821-834, 1996.

27. Nas, S., Yalçınbaş, S., Sezer, M., A Taylor Polynomial Approach for Solving High-Order Linear Fredholm İntegro-Differential Equations, Int. J. Math. Educ. Sci. Technol., 31, 213-225, 2000.

28. Yalçınbaş, S., Sezer, M., The Approximate Solution of High-Order Linear Volterra-Fredholm İntegro-Differential Equations in Terms of Taylor Polynomials, Appl. Math. Comput., 112, 291-308, 2000.

29. Karamete, A., Sezer, M., A Taylor Collocation Method for the Solution of Linear İntegro-Differential Equations, Int. J. Comput. Math., 79, 987-1000, 2002.

30. Keşan, C., Taylor Polynomial Solutions of Linear Differential Equations, Applied Mathematics and Computation, 142, 155-165, 2003.

31. Sezer, M., Karamete, A., Gülsu, M., Taylor Polynomial Solutions of Systems of Linear Differential Equations with Variable Coefficients, Int. J. Comput. Math., 82, 755-764, 2005.

32. Gülsu, M., Sezer, M., The Approximate Solution of High-Order Linear Difference Equation with Variable Coefficients in Terms of Taylor Polynomials, Appl. Math. Comput., 168, 76-88, 2005.

33. Sezer, M., Gülsu, M., A New Polynomial Approach for Solving Difference and Fredholm İntegro-Difference Equations with Mixed Argument, Appl. Math. Comput., 171, 332-344, 2005.

34. Sezer, M., Gülsu, M., Polynomial Solution of the Most General Linear Fredholm İntegro Differential-Difference Equation by Means of Taylor Matrix Method, Int. J. Complex Variables, 50, 367-382, 2005.

35. Gülsu, M., Sezer, M., A Method for the Approximate Solution of the High-Order Linear Difference Equations in Terms of Taylor Polynomials, Int. J. Comput. Math., 82, 629-642, 2005.

36. Gülsu, M., Sezer, M., Güney, Z., Approximate Solution of General High-Order Linear Non-Homogenous Difference Equations by Means of Taylor Collocation Method, Appl. Math. Comput., 173, 683-693, 2006.

37. Gülsu, M., Sezer, M., A Taylor Polynomial Approach for Solving Differential-Difference Equations, J.Comput.and Appl. Math., 186, 349-364, 2006.

38. Gülsu, M., Sezer, M., On the Solution of Riccati Equation by the Taylor Matrix Method, Applied Mathematics and Computation, 176, 414-421, 2006.

39. Gülsu, M., Sezer, M., Tanay B., A Matrix Method for Solving High-Order Linear Difference Equations with Mixed Argument Using Hybrid Legendre and Taylor Polynomials, Journal of the Franklin Institute, 343, 647-659, 2006.

40. Yalçinbaş, S., Sezer, M., A Taylor Collocation Method for the Approximate Solution of General Linear Fredholm–Volterra İntegro-Difference Equations with Mixed Argument, Applied Mathematics and Computation, 175, 675-690, 2006.

41. Kurt, N., Çevik, M., Polynomial Solution of the Single Degree of Freedom System by Taylor Matrix Method, Mechanics Research Communications, 35, 530-536, 2008.

42. Sezer, M., Tanay, B., Gülsu, M., A Polynomıal Approach for Solvıng Hıgh-Order Lınear Complex Dıfferentıal Equatıons wıth Varıable Coeffıcıents ın Dısc, Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 25, 374-389, 2009.

43. Çenesiz, Y., Keskin, Y., Kurnaz, A., The Solution of the Bagley-Torvik Equation with the Generalized Taylor Collocation Method, Journal of the Franklin Institute, 347, 452-466, 2010.

44. Akyüz-Daşcıoğlu, A., Chebyshev Polynomial Solutions of Systems of Linear İntegral Equations, Applied Mathematics and Computation, 151, 221-232, 2004.

45. Akyüz, A., Sezer, M., Chebyshev Polynomial Solutions of Systems of High-Order Linear Differential Equations with Variable Coefficients, Applied Mathematics and Computation, 144, 237-247, 2003.

46. Akyüz-Daşcıoğlu, A., Sezer, M., Chebyshev Polynomial Solutions of Systems of High-Order Linear Fredholm-Volterra İntegro-Differential Equations, Journal of the Franklin Institute, 342, 688-701, 2005.

47. Dolapci, İ.T., Lineer Diferensiyel Denklemlerin Yaklaşık Çözümü İçin Chebyshev-Sıralama Yöntemi, Yüksek Lisans Tezi, Dumlupınar Üniversitesi, Kütahya, 1996.

48. Dolapci, İ.T., Yaklaşık Simetri Teorileri ve Newtonyen Olamayan Bir Akışkan Problemine Uygulanması, Doktora Tezi, Osmangazi Üniversitesi, Eskişehir, 2003.

ÖZGEÇMİŞ

1985 yılında Manisa ili Salihli ilçesinde doğdu. İlk ve orta öğrenimini Manisa’da tamamladı. 2003 yılında Manisa Lisesi’nden mezun oldu. 2004 yılında Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandı. 2008 yılında Lisans öğrenimini tamamladı. 2009 yılında Nevşehir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü’nün açmış olduğu Yüksek Lisans sınavını kazandı. Halen Nevşehir Üniversitesi’nde Yüksek Lisans yapmaktadır.

E-mail : zeybek.halil45@gmail.com

Adres : Nevşehir Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 2000 Evler Mah. Zübeyde Hanım Cad. 50300 NEVŞEHİR

Tel : (0384) 228 11 00